Simplificación de identidades trigonométricas

Una o más de las siguientes sugerencias te pueden ayudar a simplificar expresiones trigonométricas

- Conocer las relaciones fundamentales y reconocer seis formas equivalentes.
- Manejar las técnicas del despeje algebraico.
- Saber las operaciones algebraicas fundamentales
- Conocer los procedimientos de operaciones con fracciones
- Dominar las técnicas algebraicas de factorización y productos especiales.
- Usar sustituciones para cambiar todas las funciones trigonométricas en expresiones que contengan únicamente ***senos*** y ***cosenos*** y entonces simplificar algebraicamente.

Por Cociente	*Pitagóricas*	*Inversas*
$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$	$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$	$sen\theta = \frac{1}{csc\theta}$
$cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$	$1 + tan^2\theta = sec^2\theta$	$cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$
	$1 + cot^2\theta = csc^2\theta$	$tan\theta = \frac{1}{cot\theta}$

Ejemplo 1:

Simplificar:	sen x cos2 x - sen x
Solución:	sen x cos2 x - sen x
Factorizando sen(x)	sen x (cos 2 x - 1)
Usando la identidad cos 2 (α) + sen 2 (α) = 1	sen x (cos 2 x - (cos 2 (x) + sen 2 (x))
	sen x (cos 2 x - cos 2 (x) - sen 2 (x))
Simplificando	sen x (- sen 2 (x))

- sen 3 (x)

Ejemplo 2:

Simplificar:	sen x + cot x cos x
Solución:	sen x + cot x cos x
Reescribiendo cot(x) = cos(x)/sen(x)	sen x + cos x sen x cos x
	sen2 x + cos2 x sen x
Usando la identidad cos 2 (α) + sen 2 (α) = 1	**1 sen x**

Simplificar:	sen x csc x + cos x sec x
Solución:	sen x csc x + cos x sec x
Reescribiendo sec(x) y csc(x) en términos de seno y coseno	sen x 1 sen x + cos x 1 cos x
	sen 2 x + cos 2 x
Usando la identidad cos 2 (α) + sen 2 (α) = 1	**1**

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Simplificar:

$2.tg\propto. cos^2 \frac{\propto}{2}$ –sen ∝

.

Solución:

$2.tg\propto. cos^2 \frac{\propto}{2} - sen \propto = 2.\frac{sen\propto}{cos\propto}.cos^2 \frac{\propto}{2} - sen\propto$

$=2.\frac{sen\propto}{cos\propto}.\left(\sqrt{\frac{1+cos\propto}{2}}\right)^2 - sen\propto$

$=2.\frac{sen\propto}{cos\propto}.\frac{1+cos\propto}{2}$ -sen∝

$=.\frac{sen\propto(1+cos\propto)}{cos\propto} - sen\ \propto$

$=\frac{sen\propto(1+cos\propto)-sen\propto.cos\propto}{cos\propto}$

$=\frac{sen\propto+sen\propto.cos\propto-sen\propto.cos\propto}{cos\propto}$

$=\frac{sen\propto}{cos\propto}=\text{tg}\propto$

2. $\frac{\textbf{sen}\ \alpha}{\textbf{cos}\ \alpha} + \frac{\textbf{cos}\ \alpha}{1+\textbf{sen}\ \alpha}$

Solución:

$\frac{\text{sen} \propto}{\text{cos}a} + \frac{\cos\propto}{1+\text{sena}} = \frac{\text{sen}\propto.(1+\text{sen}\propto).\cos\propto.\text{sen}\propto}{\cos\propto(1+\text{sen}a)}$

$=\frac{\text{sen}\propto+sen^2\propto+cos^2\propto}{\text{cos}\propto(1+\text{sen}a)}$

$=\frac{\text{sen}\propto+1}{\text{cos}\propto(1+\text{sen}a)}$

$=\frac{1}{\text{cos}\propto} = sec\ \propto$

3. Simplifique:

$\frac{sen\,2x}{1+\cos 2x}$

Solución:

$\frac{\text{sen2x}}{1+\cos 2x} = \frac{\text{2senx cosx}}{1+cos^2x-sen^2x} =$

$=\frac{\text{2senx cosx}}{cos^2x-cos^2x}=\text{tg x}$

4. Simplifique:

$\frac{sen\,2a}{1-\cos^2 a}\cdot\frac{sen\,2a}{\cos a}$

Solución:

$\frac{sen\,2a}{1-\cos^2 a}\cdot\frac{sen\,2a}{\cos a} = \frac{(2sen\,a\cdot\cos a)^2}{sen^2\,a\cdot\cos a} = 4\cos a$

=**4 cos a**

5. Simplifique:

Solución:

$$\frac{sen\,3a - sen\,5a}{\cos 3a + \cos 5a}$$

$$\frac{sen\,3a - sen\,5a}{\cos 3a + \cos 5a} = \frac{2\cos 4a \cdot sen(-a)}{2\cos 4a \cdot \cos(-a)} = -tg\,a$$

=-tg a

6. Dada la siguiente expresión: $\frac{1+\cot x}{2a}$ expresarla en términos de seny y cosx

Solución**:**

$$\frac{1+\frac{cosx}{sen\,x}}{\text{sen x}}$$ (escribiendo cot x en función de sen x y cos x)

$$\frac{\frac{sen\,x+cosx}{sen\,x}}{\text{sen x}}$$ (efectuando la suma de fracciones en el numerador hallando m.c.m=sen x)

$$\frac{senx+\cos x}{sen^2\,x}$$ (desarrollando la fracción compleja)

Nótese que nos quedó una expresión en términos de sen y cos.

7. Dada la siguiente expresión: $\frac{1-\text{tgx}}{\cot x-1}$ Expresarla en términos de sen y y cos x. Simplificar

Solución:

$$\frac{1+\frac{cosx}{sen\,x}}{\frac{cosx}{sen\,x}-1}$$ (escribiendo tg x y cot x en función de sen x y cos x)

$$\frac{\frac{cosx-sen\,x}{cos\,x}}{\frac{cosx-sen\,x}{sen\,x}}$$ (efectuando las fracciones en el numerador y denominador)

$$\frac{senx\,(\cos x-senx)}{cosx\,(\cos x-senx)}$$ desarrollando la fracción compleja, aplicando doble c

$$\frac{senx}{cosx}$$ Simplificando por (cos x-sen x)

8. Expresar (cotx+cscx)(tgx-senx)en términos de sen x y cos x

Solución:

Escribimos cot x, cosec x,tgx en función de sen x y cos x, quedándonos que:

$$\left(\frac{\cos x}{sen\,x}+\frac{1}{sen\,x}\right)\left(\frac{\text{sen}\,x}{cos\,x}-sen\,x\right)=$$

$$=\left(\frac{\cos x+1}{sen\,x}\right)\left(\frac{\text{sen}\,x-senx\,cosx}{cos\,x}\right)$$

Tomamos factor común sen x en el segundo paréntesis nos queda que:

$=\left(\frac{\cos x+1}{sen\ x}\right)\frac{\text{sen } x(1-cosx)}{cos\ x}=\frac{(\cos x+1)(1-cosx)}{cos\ x}$

En la penúltima expresión hemos simplificado por el sen x

9. Expresar en términos de sec x y csc x la expresión: $\frac{\cos x}{1+sen\ x}+\frac{\cos x}{1-sen\ x}$

Solución:
Sustituyendo por las identidades reciprocas tenemos:

$$\frac{\frac{1}{\sec x}}{1+\frac{1}{\csc x}}+\frac{\frac{1}{\sec x}}{1-\frac{1}{\csc x}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sec x}}{\frac{cscx+1}{\csc x}}+\frac{\frac{1}{\sec x}}{\frac{cscx-1}{\csc x}}=\frac{cscx}{\text{secx}(\csc x+1)}+\frac{cscx}{\text{secx}(\csc x-1)}$$

Hallamos el mínimo común múltiplo de los denominadores sec x(cscx+1)(csc x-1)y efectuamos la suma de fracciones ,quedándonos que:

$$=\frac{cscx(cscx-1)+cscx(cscx+1)}{\text{secx}(\csc x+1)(cscx-1)}$$

$$=\frac{cscx(cscx-1+cscx+1)}{\text{secx}(csc^2\ x-1)}$$ (Hemos tomado cscx factor común)

Si efectuamos las operaciones en el paréntesis del numerador nos queda:

$$\frac{cscx.2\ cscx}{\text{secx}(cscx^2-1)}=\frac{2\ csc^2\ x}{\text{secx}(csc^2\ x-1)}$$

10. Simplificar la siguiente expresión aplicando las propiedades de los ángulos complementarios. $\frac{\cos(90-A)+sen\ A.sen(90-A)}{sen\ A.\cos\ (90-A)}$

Solución:
Recordando que:
Cos(90-A)=Sen A
Sen(90-A)=Cos A

$$\frac{\cos(90-A)+sen\ A.sen(90-A)}{sen\ A.\cos\ (90-A)}$$

$$\frac{(\text{sen } A)+sen\ A.(cosA)}{sen\ A.(sen\ A)+sen\ A}=\frac{\text{sen A}.(1+cosA)}{sen\ A.(Sen\ A+1)}=$$

$$=\frac{1+cosA}{1+Sen\,A}$$