MATEMATICAS

22

VOLUMEN DE LOS SOLIDOS

SENA

SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE
MINISTERIO DE TRABAJO Y SEGURIDAD SOCIAL

SENA
DIRECCION GENERAL
SUBDIRECCION TECNICO PEDAGOGICA

VOLUMEN DE LOS SOLIDOS

Bogotá, 19 de julio de 1982

CONTENIDO

OBJETIVO TERMINAL

Al finalizar esta Unidad, usted estará en capacidad de:

1. Escribir correctamente los símbolos que representan las unidades de volumen y formular correspondencia entre estas unidades.

2. Hacer conversiones entre las unidades de volumen

3. a) Calcular el volumen de un cubo dada la arista y viceversa.

   b) Calcular el volumen de un paralelepípedo dada sus dimensiones.

   c) Determinar el volumen de un cilindro, dados su diámetro y su altura.

   d) Determinar el volumen de una pirámide dadas las medidas de la base y la altura de la pirámide.

e) Determinar el volumen de un cono, dados el radio o diámetro de la base y la altura del cono.

f) Determinar el volumen del tronco de pirámide, dadas las medidas de la base y la altura del tronco.

g) Determinar el volumen del tronco de cono, dados el radio de la base y la altura del tronco.

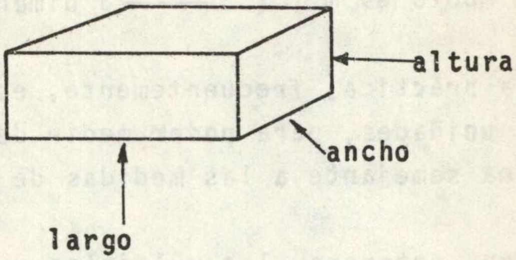
h) Determinar el volumen de la esfera, dado el radio.

VOLUMEN DE LOS SOLIDOS

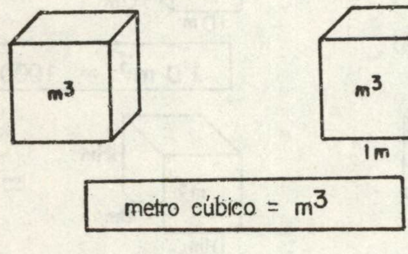
Usted ha observado que todo objeto, con los que uno tiene contacto en la vida diaria, ocupan cierta porción de espacio.

Pues biem, el espacio ocupado por un objeto es llamado VOLUMEN

Este volumen tiene 3 dimensiones: largo, ancho y altura.



En la práctica, se toma como unidad de volumen el volumen de un cubo cuya arista mide 1 m de largo. Luego, la unidad fundamental de las medidas de volumen es el metro cúbico.



> El metro cúbico es el volumen de un cubo con 1 metro de arista.

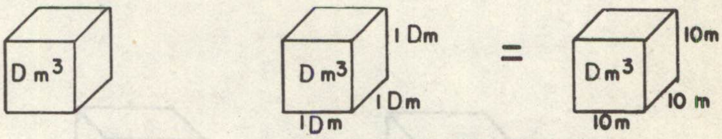
El símbolo es m^3 (3 $\longrightarrow$ 3 dimensiones)

En la práctica, frecuentemente, es necesario subdividir esas unidades, para poder medir determinado volumen (en (forma semejante a las medidas de área).

Surgen, entonces, los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico, los cuales son volúmenes de cubos, cuyas aristas son múltiplos y submúltiplos del metro. Usted los conocerá en seguida.

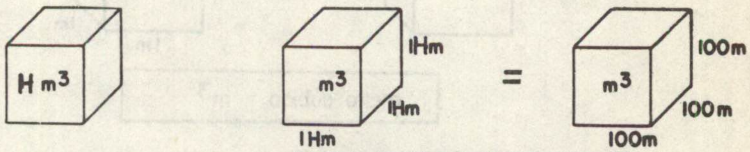
Múltiplos del metro cúbico

Decámetro cúbico



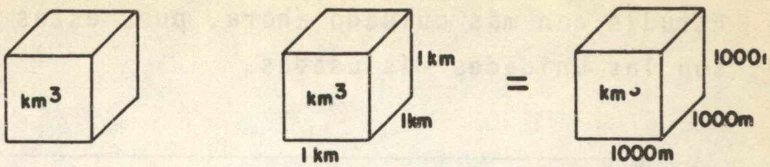
$1\ D\,m^3 = 1000\ m^3$

Hectometro cúbico



$1\,Hm^3 = 1000000\ m^3$

Kilómetro cúbico



$1\ km^3 = 1000000000\ m^3$

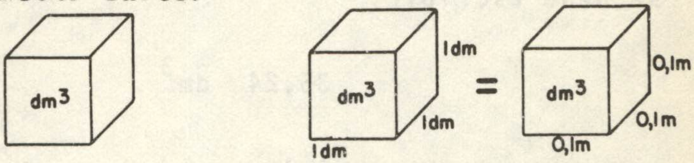
Resumiendo

$1\ km^3 = 1\,000 Hm^3 = 1\,000\,000\ Dm^3 = 1\,000\,000\,000\ m^3$

Preste bastante atención a estos múltiplos

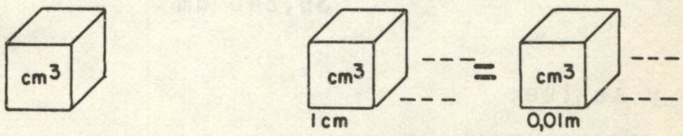
Submúltiplos del metro cúbico

decímetro cúbico



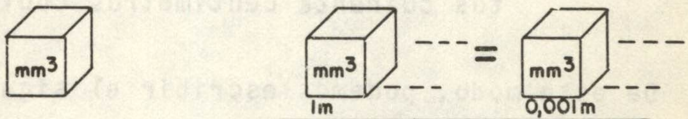
$1\ dm^3 = 0{,}001\ m^3$

centímetro cúbico



$1\ cm^3 = 0{,}000001\ m^3$

milímetro cúbico



$1\ mm^3 = 0{,}000000001\ m^3$

Resumiendo

$1\ mm^3 = 0{,}001\ cm^3 = 0{,}000001\ dm^3 = 0{,}000000001\ mm^3$

Estudie con más cuidado ahora, pues estos submúltiplos son las unidades más usadas.

Cada unidad es 1.000 veces mayor que la unidad inmediatamente superior.

Representación y lectura

Por lo que las unidades varían de 1.000 en 1.000, no se debe escribir:

$$35{,}24 \ dm^3$$

Lo correcto es escribir:

$$35{,}240 \ dm^3$$

y se lee:

"Treinta y cinco decímetros cúbicos y doscientos cuarenta centímetros cúbicos"

De este modo, podemos escribir el siguiente cuadro:

MULTIPLOS			UNIDADES	SUBMULTIPLOS		
Kilómetro cúbico	Hectómetro cúbico	Decámetro cúbico	Metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
Km^3	Hm^3	Dm^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1000000000 m^3	1000000 m^3	1000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000001 m^3	0,000000001 m^3

Donde cada unidad es _ _ _ _ _ veces mayor que la unidad inmediatamente _ _ _ _ _ _ _ _ _

De ahí que en la práctica, para pasar de una unidad a otra, basta con desplazar la coma 3 lugares para la derecha o para la izquierda, según el caso. O sea:

Unidad inmediatamente mayor | Unidad inmediatamente menor

$0{,}065\ Dm^3 = 65{,}000\ m^3 = 65000\ dm^3$

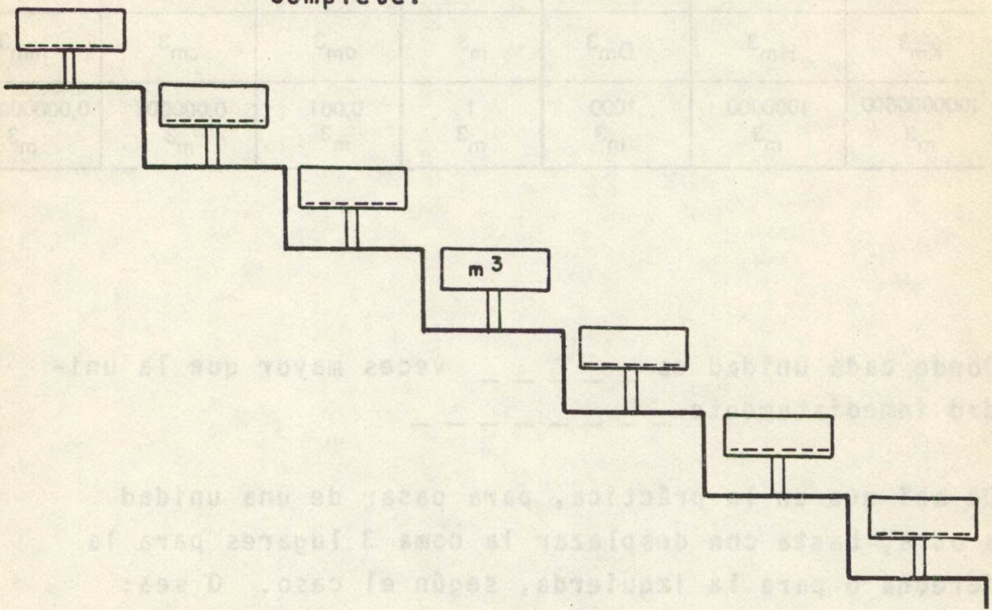
La coma
se desplaza
3 lugares

la izquierda ← para → la derecha

Cambio de unidad

Vamos a construir una "escalera" para facilitarle el aprendizaje.

Complete:



De modo semejante a lo que ocurre con las unidades de longitud (m) y con las unidades de superficie (m^2):

- Cada grada que desciende, desplaza la coma 3 lugares para la derecha; ejemplos (complételos):

$8,195418\ Km^3 = 8195,418\ Hm^3$

$5,650000\ m^3 = 5650000\ cm^3$

No se olvide de aumentar, si es necesario, los ceros.

$1,320\ m^3 =$ dm^3

$0,008456\ Km^3 =$ m^3

- Cada grada que sube desplaza la coma tres lugares para la izquierda. Ejemplo. (Complêtelos):

$2\ 183,7\ m^3 = 2,1837$ Dm^3

$0,183\ dm^3 = 0,183$ m^3

$0\ 000\ 001,8\ m^3 =$ Hm^3

$356\ cm^3 =$ dm^3

$13,8\ Dm^3 =$ Hm^3

Realice las conversiones para verificar si comprendió el cambio de unidades:

a) $1743,5\ dm^3 =$ m^3

b) $56008,4\ mm^3 =$ dm^3

c) $13,42\ Dm^3 =$ m^3

d) $5,3\ Hm^3 =$ Km^3

e) $0,005613\ m^3 =$ mm^3

Corrija

a) 1,7435 b) 0,0560084 c) 13420

d) 0,0053 e) 5613000

EJERCICIOS

1. Complete:

a) Las figuras espaciales, ocupan una cierta porción _ _ _ _ _ _ _ _ _

b) Verificar cuántas veces cabe un cubo en otro es lo mismo que medir el _ _ _ _ _ _ del otro.

c) 1 m^3 tiene 1.000 dm^3. Como cada dm^3 tiene 1.000 cm^3, entonces el m^3 tiene _ _ _ _ _ _ _ cm^3

d) $\frac{1}{10}$ de 1 m^3 = _ _ _ _ _ _ _ _ dm^3

e) 0,3 m^3 = 300 _ _ _ _ _

2. Complete conforme al ejemplo:

3412,720 dm^3 = 3412 dm^3 y 720 cm^3

a) 5,600 m^3 = ______ m^3 y ______ dm^3

b) 144,150 cm^3 = ______

c) 15,641700 dm^3 = ______

d) 7432,500 Hm^3 = ______

e) 9,142 m^3 = ______

3. Haga las conversiones indicadas:

a) 523,450 dm^3 = ________ cm^3

b) 2,576400 m^3 = ________ dm^3

c) 0,075 dm^3 = ________ mm^3

d) 51,325 cm^3 = ________ mm^3

4. Realice las operaciones indicadas:

a) 4,350 m^3 - 235,200 dm^3 = __________ m^3

b) 825,030 dm^3 + 52354 cm^3 = __________ cm^3

Haga las correcciones para después continuar los ejercicios:

1. a) De espacio
   b) Volumen
   c) 1000000 cm^3
   d) 100 dm^3
   e) dm^3

2. a) 5 m^3 y 600 dm^3

b) 144 cm^3 150 mm^3

c) 15 dm^3 641 cm^3 700 mm^3

d) 7432 Hm^3 500 Dm^3

e) 9 m^3 142 dm^3

3. a) 523450 cm^3

b) 2576,400 dm^3

c) 75000 mm^3

d) 51325 mm^3

4. a) 4,114800 m^3

b) **772676 cm^3**

Continúe...

5. **Coloque las unidades correspondientes:**

4,250 m^3 = 4250000 _ _ _

3265 mm^3 = 3,265 _ _ _

0,072500 dm^3 = 72500 _ _ _

$4275\ cm^3 = 0{,}004275$ _ _ _ _ _

6. Haga la lectura de las siguientes medidas:

a) $4{,}725\ Dm^3$

b) $3452{,}370\ dm^3$

c) $0{,}003\ cm^3$

d) $48{,}725683\ Dm^3$

e) $3{,}480\ mm^3$

f) $87{,}350\ m^3$

7. Haga las reducciones indicadas de las siguientes medidas:

a) $523{,}775\ m^3 \longrightarrow$ _ _ _ _ _ _ _ _ mm^3

b) $0{,}328472\ Dm^3 \longrightarrow$ _ _ _ _ _ _ _ _ m^3

c) $0{,}003\ cm^3 \longrightarrow$ _ _ _ _ _ _ _ _ Dm^3

d) $45\ Hm^3 \longrightarrow$ _ _ _ _ _ _ _ _ dm^3

e) $58976\ dm^3 \longrightarrow$ _ _ _ _ _ _ _ _ m^3

f) $4{,}379\ cm^3 \longrightarrow$ _ _ _ _ _ _ _ _ dm^3

8. Convierta a dm^3 las siguientes medidas:

a) 2,048 m^3 = ________ dm^3

b) 0,432 Dm^3 = _______ dm^3

c) 472 mm^3 = ________ dm^3

9. Convierta en m^3 las siguientes medidas:

15427 cm^3	0,004 Km^3	286,48 dm^3
↓	↓	↓
____ m^3	___ m^3	______ m^3

Confronte las respuestas

5. cm^3 - cm^3 - mm^3 - m^3

6. a) 4 Decámetros cúbicos y 725 metros cúbicos

   b) 3452 decímetros cúbicos y 370 centímetros cúbicos.

   c) 0 centímetros cúbicos y 3 milímetros cúbicos

   d) 48 Decámetros cúbicos, 725 metros cúbicos y 683 decímetros cúbicos.

e) 3 mm y 480 dêcimos de milîmetro cûbico

f) 87 metros cûbicos y 350 decîmetros cûbicos

7. a) 523775000000 mm^3

b) 328,472 m^3

c) 0,000000000003 Dm^3

d) 45000000000 dm^3

e) 58,976 m^3

f) 0,004379 dm^3

8. a) 2048

b) 432000

c) 0,000472

9. 0,015427 m^3

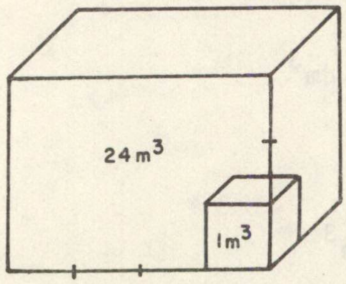
4000000 m^3

0,286480 m^3

MEDIDA DEL VOLUMEN DE LOS SOLIDOS

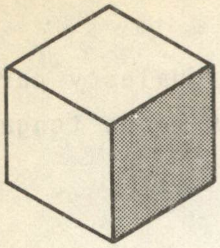
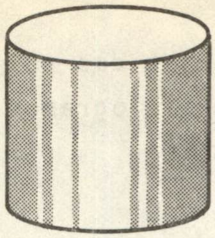
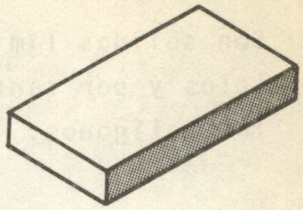
La medida de un sólido geométrico es tomada en relación con otro, que se escoge como unidad.

Luego, si decimos que una caja de agua es de 24 m^3, estamos afirmando que en esta caja de agua caben 24 cubos de _ _ _ _ _ _ _ _ de arista.

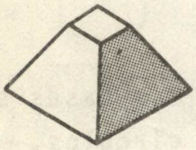
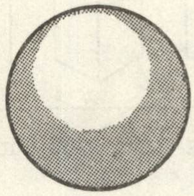
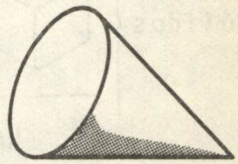


No obstante, la medida de un volumen no se puede efectuar directamente, pero sí por medios indirectos; se miden el largo, el ancho y la altura y se aplican fórmulas.

Observe los dibujos que dan ideas de figuras geométricas espaciales (sólidos) y dé a cada una de ellas, el nombre que usted cree conocer.

....

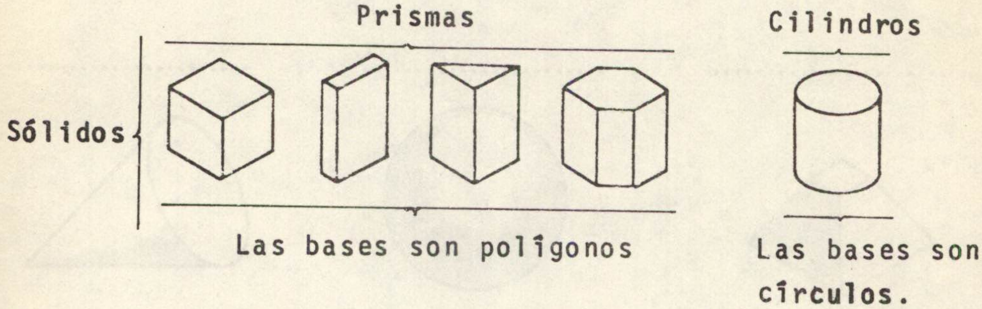
....

Verifique los nombres que se dio a los sólidos representados: cubo, cilindro, paralelepípedo, tronco de pirámide, esfera, cono.

En seguida presentaremos las principales figuras geométricas espaciales, acompañadas de las fórmulas para el cálculo del respectivo volumen.

PRISMAS

Son sólidos limitados por dos polígonos iguales y paralelos y por tantos paralelogramos cuantos lados tengan los polígonos.



De un modo general. el volumen de los prismas y del cilindro es calculado multiplicando el área de la base por la altura. esto es

$$\boxed{V = B.h}$$

De donde B representa el área de la base y h la medida de la altura.

Vamos a aplicar esta fórmula: Calcular el volumen de un prisma de base cuadrada de 8 cm de lado y cuya altura mide 3 cm.

$B = 8\ cm \times 8\ cm \Longrightarrow B = 64\ cm^2$

$V = 64\ cm^2 \times 3\ cm \Longrightarrow V = 192\ cm^3$

Calcule ahora el volumen de un prisma de base rectangular de 7 cm de largo, 5 cm de ancho y 9 cm de altura.

La respuesta debe ser: $315\ cm^3$

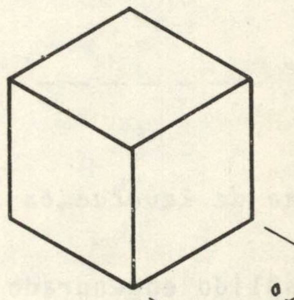
Como usted pudo darse cuenta, las formas de los sólidos de los dos problemas son diferentes. Pues bien, ahora los veremos con más detalles.

Cubo

Es el sólido limitado por 6 caras cuadradas congruentes.

El volumen del cubo se calcula elevando la medida de la arista al cubo, esto es:

$$\boxed{V = a^3}$$



Si a = 20 cm, entonces:

$V = a^3$

$V = 20^3$

$V = 20\ cm \times 20\ cm \times 20\ cm$

$V =$ _ _ _ _ _ _ cm^3

Paralelepípedo Rectangular

Es el sólido geométrico que posee 6 caras rectangulares congruentes, dos a dos.

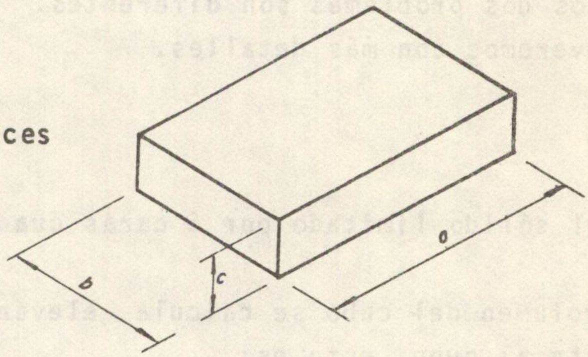
El volumen del paralelepípedo rectángulo es determinado por el producto de sus tres dimnesiones, esto es

$$\boxed{V = abc}$$

a = 10 cm

b = 5 cm

c = 3 cm, entonces



V = abc

Complete:

V = 10 x _ _ _ _ _ x _ _ _

V = _ _ _ _ _ _ _

Cilindro de Revolución

Es el sólido engendrado por un rectángulo que gira en torno de uno de sus lados.

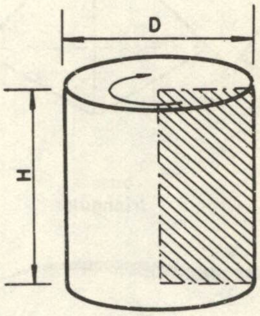
El volumen del cilindro se obtiene multiplicando el área de la base (πr^2) por la medida de la altura (H).

Esto es:

$$\boxed{V = \pi r^2 \cdot H}$$

D = 20 cm r = 10 cm

H = 20 cm, entonces:



$V = \pi r^2 \cdot H$

$V = 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 20$

Complete:

$V = \ldots \ldots \; cm^3$

Usted debe haber observado que tanto en el caso del cubo del paralelepípedo y del cilindro, siempre calculamos el volumen multiplicando el _ _ _ _ de la base por la altura, o sea:

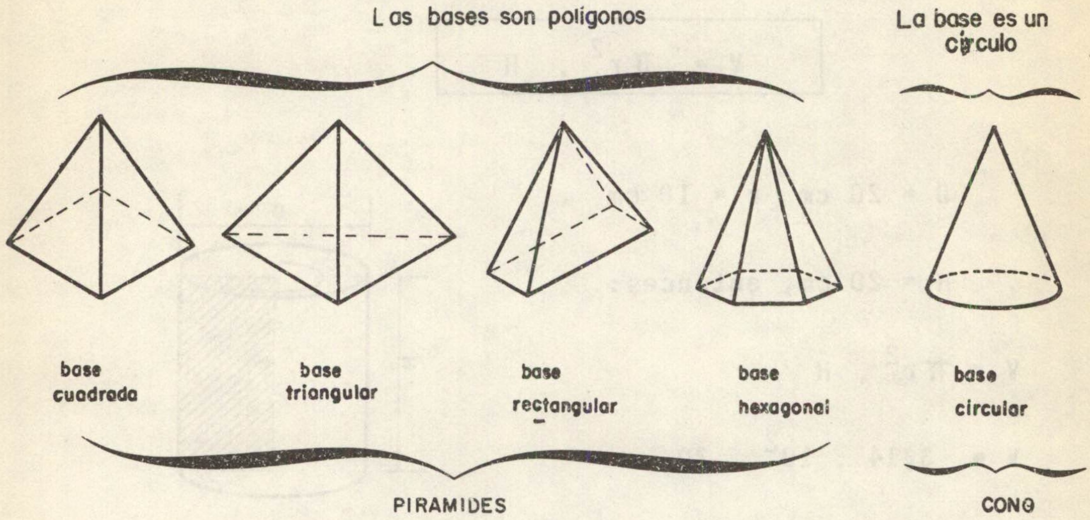
V = _ _ _ _ x _ _ _ _ _ _

Las respuestas para los casos del cubo, del paralelepípedo y del cilindro de revolución, debieron ser, respectivamente:

8000, 150 y 6280

Ahora veremos otro grupo de sólidos.

PIRAMIDES RECTAS Y CONOS CIRCULARES



La fórmula para calcular los volúmenes en estas figuras es:

$$\boxed{V = \frac{B}{3} \times h}$$

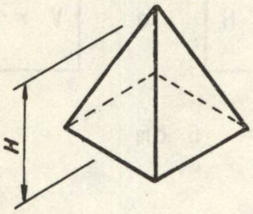
Analicemos, separadamente, pirámide y cono.

Pirámide

Es el sólido limitado por un polígono cualquiera y por triángulos que tienen un vértice común. El polígono es la base y los triángulos son las caras de la pirámide. Las pirámides se clasifican de acuerdo con las bases. El segmento de recta perpendicular a la base, a partir del vértice común, se llama altura de la pirámide.

El vòlumen de la pirámide se determina multiplicando un tercio del área de la base por la altura de ésta.

$$\boxed{V = \frac{1}{3} BH} \quad \text{o} \quad \boxed{V = \frac{BH}{3}}$$

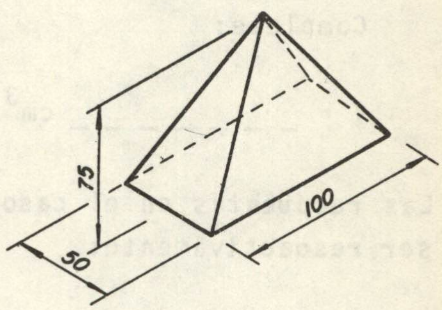


Donde B representa el área de la Base y H es la medida de la altura.

Ejemplo: Calcule el volumen de la pirámide de base rectangular

$$V = \frac{B \cdot H}{3}$$

$$V = \frac{(100 \cdot 50) \cdot 75}{3}$$



Calcule el resultado:

V = ... mm^3

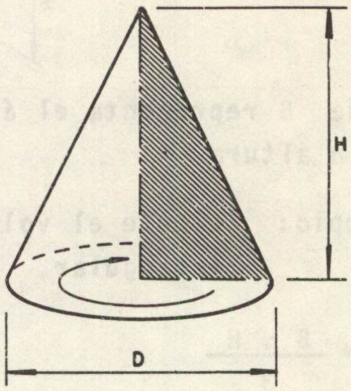
Cono

Es el sólido engendrado por un triángulo rectángulo que gira en torno a uno de sus catetos. El volumen del cono es igual al producto de un tercio del área de la base ($\frac{1}{3}\pi r^2$) por la altura (H) esto es:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 . H} \quad \text{o} \quad \boxed{V = \frac{\pi r^2 . H}{3}}$$

D = 12 cm R = 6 cm

H = 10 cm



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 . H$$

$$V = \frac{1}{3} . 3{,}14 . 6^2 . 10$$

Complete:

$V =$ _ _ _ _ _ _ _ _ cm^3

Las respuestas en el caso de estos dos sólidos debieron ser respectivamente:

125000 y 376,800

Tronco de Pirámide, tronco de Cono y Esfera

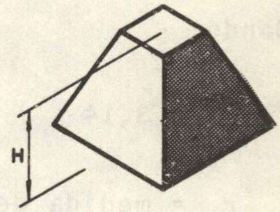
Sin definirlos, vamos a representar a usted esos sólidos geométricos y las respectivas fórmulas para los cálculos de sus volúmenes.

Observe con atención, para más adelante resolver problemas sobre ellos.

Tronco de pirámide

$$\boxed{V = \frac{H}{3} \left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)}$$

Donde:



H = **medida de la altura**

A_B = área de la base mayor

A_b = área de la base menor

Tronco de cono

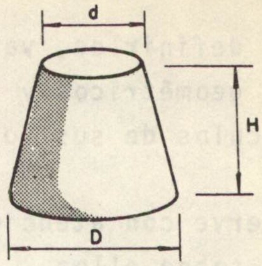
$$\boxed{V = \frac{\pi H}{3} \left(R^2 + r^2 + R \cdot r\right)}$$

$\pi \cong 3,14$

H = medida de la altura

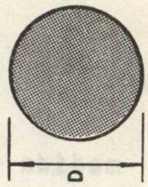
R = medida de la base mayor

r = medida de la base menor



Esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad o \quad V = \pi \frac{D^3}{6}$$



Donde:

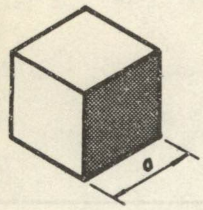
$\pi \cong 3,14$

r = medida del radio de la esfera

D = diámetro

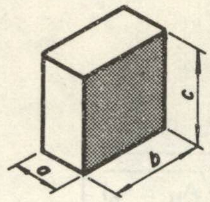
RESUMIENDO

Cubo



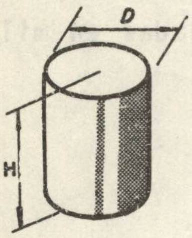
$$V = a^3$$

Paralelepípedo Rectangular



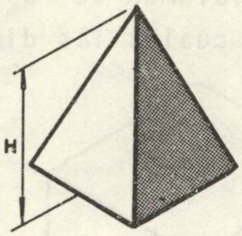
$$V = abc$$

Cilindro



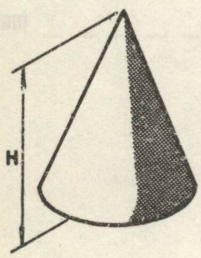
$$V = \pi r^2 H$$

Pirâmide



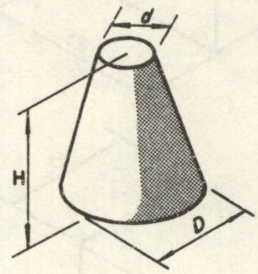
$$V = \frac{Ab \;.\; H}{3}$$

Cono

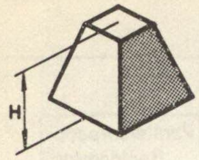


$$V = \frac{\pi r^2 H}{3}$$

Tronco do Coņo

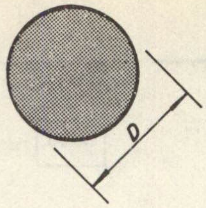


$$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + R \;.\; r)$$



Tronco de Pirámide

$$V = \frac{H}{3}(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$$



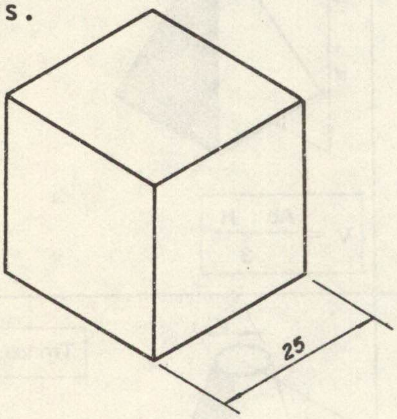
Esfera

$$V = \frac{D^3 \pi}{6}$$

EJERCICIOS

Calcule el volumen de las siguientes figuras espaciales, en las cuales las dimensiones son dadas en milímetros.

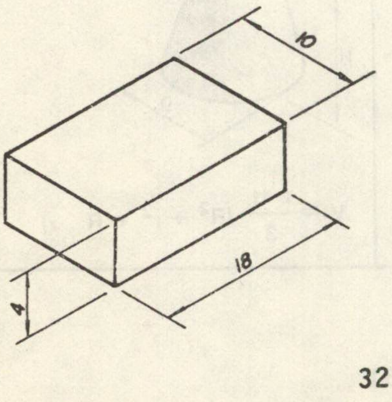
a)



Respuesta

V = __________ mm^3

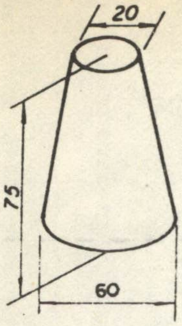
b)



Respuesta

V = __________ mm^3

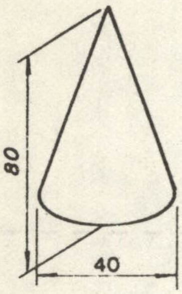
c)



Respuesta

V = _ _ _ _ _ _ _ mm^3

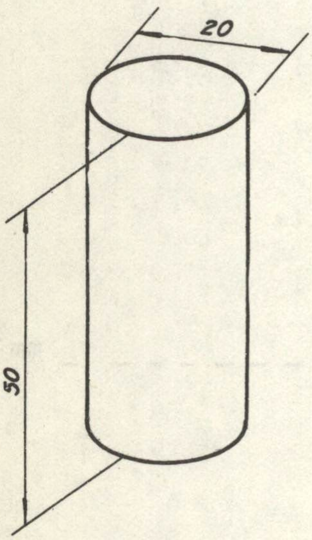
d)



Respuesta

V = _ _ _ _ _ _ _ mm^3

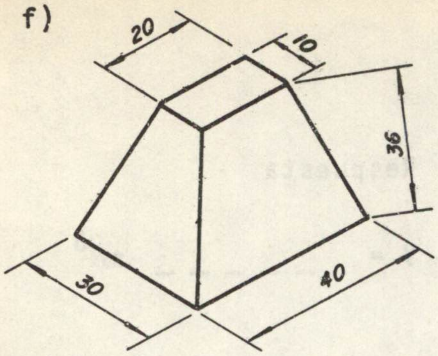
e)



Respuesta

V = _ _ _ _ _ _ _ mm^3

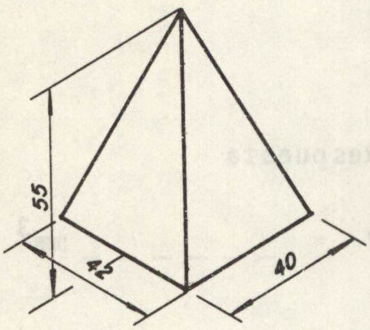
f)



Respuesta

V = ___________ mm^3

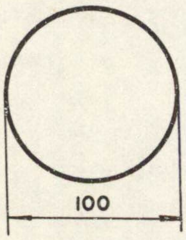
g)



Respuesta

V = ___________ mm^3

h)



Respuesta

V = ___________ mm^3

Corrección

a) $15625\ mm^3$

b) $720\ mm^3$

c) $102050\ mm^3$

d) $33493,33\ mm^3$

e) $15700\ mm^3$

f) $22678,77\ mm^3$

g) $30800\ mm^3$

h) $523333,33\ mm^3$

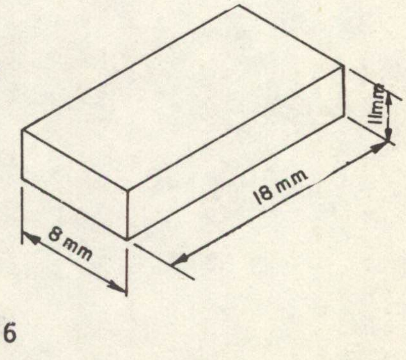
EVALUACION FINAL

Resuelva los siguientes problemas:

1. Se tiene un paralelepípedo rectangular cuyo volumen es 210 cm^3 . ¿Cuánto mide el área de la base, si la altura mide 12 cm?

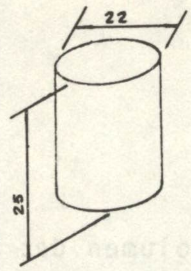
2. Calcule el volumen de un cubo cuyas aristas suman 84 dm.

3. Hallar el volumen de:



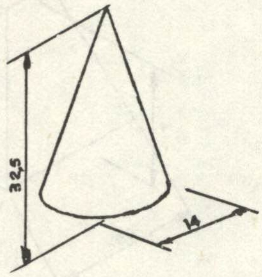
Resp.: V = ... mm^3

4. Hallar el volumen de



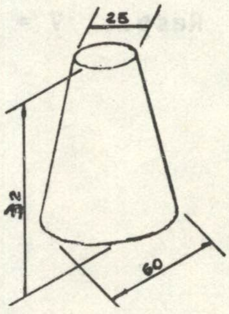
Resp.: V = ...mm^3

5. Hallar el volumen de:



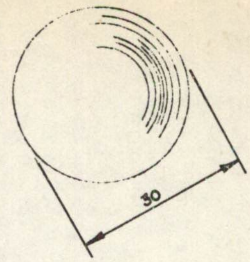
Resp.: V = ...mm^3

6. Hallar el volumen de:



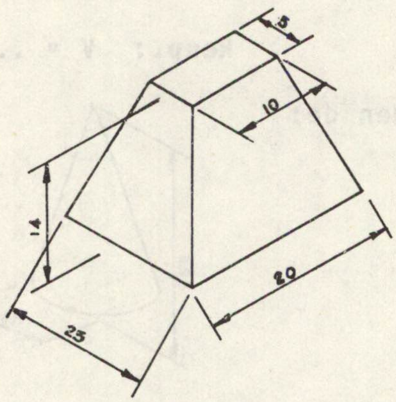
Resp.: V = ...mm^3

7. Hallar el volumen de:



Resp.: V = ...mm^3

8. Hallar el volumen de:



Resp.: V = ...mm^3

RESPUESTAS A LA EVALUACION FINAL

1. 17,5 cm^2

2. 343 dm^3

3. 1584 mm^3

4. 9498,5 mm^3

5. 1.666,81 mm^3

6. 47.937,33 mm^3

7. 14130 mm^3

8. 3299,81 mm^3 ó 3304,51 mm^3

Esta unidad fue traducida y adaptada por el SENA con la autorización de SENAI.

SENA
Publicaciones
Diseño e Impresión