educación de calidad
EL CAMINO PARA LA PROSPERIDAD

Grado 7º
Matemáticas

Ministerio de Educación Nacional
República de Colombia
Libertad y Orden

Secundaria Activa

Prosperidad para todos

educación de calidad
EL CAMINO PARA LA PROSPERIDAD

Ministerio de Educación Nacional
República de Colombia
Libertad y Orden

Prosperidad para todos

Secundaria Activa
Matemáticas grado séptimo

María Fernanda Campo Saavedra
Ministra de Educación Nacional

Mauricio Perfetti del Corral
Viceministro de Educación Preescolar, Básica y Media

Mónica López Castro
Directora de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media

Heublyn Castro Valderrama
Subdirectora de Referentes y Evaluación de la Calidad Educativa

Heublyn Castro Valderrama
Coordinadora del proyecto

Clara Helena Agudelo Quintero
Margarita Inés Alonso Rico
Gina Graciela Calderón Rodríguez
María del Sol Effio Jaimes
Omar Alejandro Hernández Salgado
Édgar Mauricio Martínez Camargo
Diego Fernando Pulecio Herrera
Eliceo Ramírez Rincón
Equipo técnico

©Ministerio de Educación Nacional
Serie Secundaria Activa
ISBN libro: 978-958-xxx-xxx

Dirección de Calidad para la Educación Preescolar, Básica y Media.
Subdirección de Referentes y Evaluación para la
Calidad Educativa.
Ministerio de Educación Nacional, Bogotá,
Colombia, 2011.

www.mineducacion.gov.co

Equipo de la actualización y cualificación del Modelo Educativo Secundaria Activa elaborado por:

AGUIRRE ASESORES S.A.S.

Eduardo Aguirre Dávila
Director de Proyecto

Miriam Saavedra
Amparo Calambás Clavijo
Autoras

Luz Marina Rincón Rojas
Coordinadora editorial

Ligia Flórez Bejarano
Coordinadora administrativa

Stefanie Vélez
Corrector de estilo

Julián Hernández
taller de diseño

Julián Ricardo Hernández Reyes - Pauta editorial y dirección de diseño
Walter Bolivar - Pauta editorial
Arnold Hernández - Pauta editorial
Freya Gil - Diagramación
Germán Piza - Diagramación
Jhon Cortés - Ilustración
Catalina Cardona - Ilustración
Ma. Angélica Martinez - Ilustración
Diagramación, diseño e ilustración

Secundaria Activa es el resultado de la actualización y cualificación del modelo educativo Telesecundaria, en su versión colombiana (1999-2002), que a su vez fue adaptado de los módulos de Telesecundaria Mexicana por parte del Ministerio de Educación Nacional.

Esta actualización se hizo dentro del marco del contrato No. 428 de 2010, suscrito entre el Ministerio de Educación Nacional y Aguirre Asesores S.A.S., cuyos derechos fueron cedidos al Ministerio de Educación Nacional.

El Ministerio de Educación Nacional agradece a la Secretaría de Educación Pública de México (SEP) y al Instituto Latinoamericano para la Comunicación Educativa (ILCE) el apoyo técnico y la generosidad en la transmisión de los avances educativos y tecnológicos al Ministerio de Educación de Colombia, durante los años comprendidos entre 1999 y 2002.

Tabla de contenido

La educación es un derecho establecido en la Constitución Política de Colombia. En cumplimiento de ese mandato, el Ministerio de Educación ha diseñado y cualificado diferentes modelos educativos flexibles como alternativas a la oferta educativa tradicional, para responder a las características y necesidades particulares de los grupos poblacionales.

Es así como el Ministerio de Educación Nacional presenta el modelo educativo Secundaria Activa dirigido a los estudiantes de básica secundaria de las zonas rurales y urbanas marginales. Una alternativa de alta calidad, encaminada a disminuir las brechas en cuanto a permanencia y calidad en este nivel educativo.

La propuesta pedagógica de Secundaria Activa privilegia el aprendizaje mediante el saber hacer y el aprender a aprender. En procura de este objetivo, los textos están orientados al desarrollo de procesos relacionados con los saberes conceptuales, procedimentales y actitudinales que, de manera significativa y constructiva, van configurando las habilidades de los estudiantes para alcanzar el nivel de competencia esperado en cada grado.

Por esa razón, estos módulos de aprendizaje están diseñados sobre una ruta didáctica y editorial pensada para que los estudiantes, a partir del análisis e interpretación de diversas situaciones problema, puedan aproximarse a su realidad y a su cotidianidad, y le encuentren significado a los contenidos planteados.

Secundaria Activa cuenta entre sus componentes con módulos para los grados 6, 7, 8 y 9 de la básica secundaria, en las áreas de Matemáticas, Lenguaje, Ciencias Naturales y Educación Ambiental, Ciencias Sociales, Educación Ética y Valores Humanos, Educación Artística, Educación Física, Recreación y Deporte y orientaciones para la formulación e implementación de proyectos pedagógicos productivos.

Dispone también de un manual de implementación que ofrece indicaciones generales y pedagógicas sobre el modelo y, de guías para los docentes por cada área y grado, en las que encuentran orientaciones disciplinares y didácticas que apoyan su trabajo en el aula.

Esta propuesta es una oportunidad educativa para que muchos jóvenes puedan continuar sus estudios de básica secundaria y ampliar sus posibilidades de vida digna, productiva y responsable, como ciudadanos colombianos.

El modelo surgió del proceso de cualificación y adaptación de los módulos de Telesecundaria de México (1999-2002) para lograr la versión colombiana. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia reitera su agradecimiento a la Secretaría Pública de México (SEP) y al Instituto Latinoamericano para la Comunidad Educativa (ILCE) por el apoyo técnico y la generosidad en la transmisión de los avances educativos y tecnológicos durante esos años.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

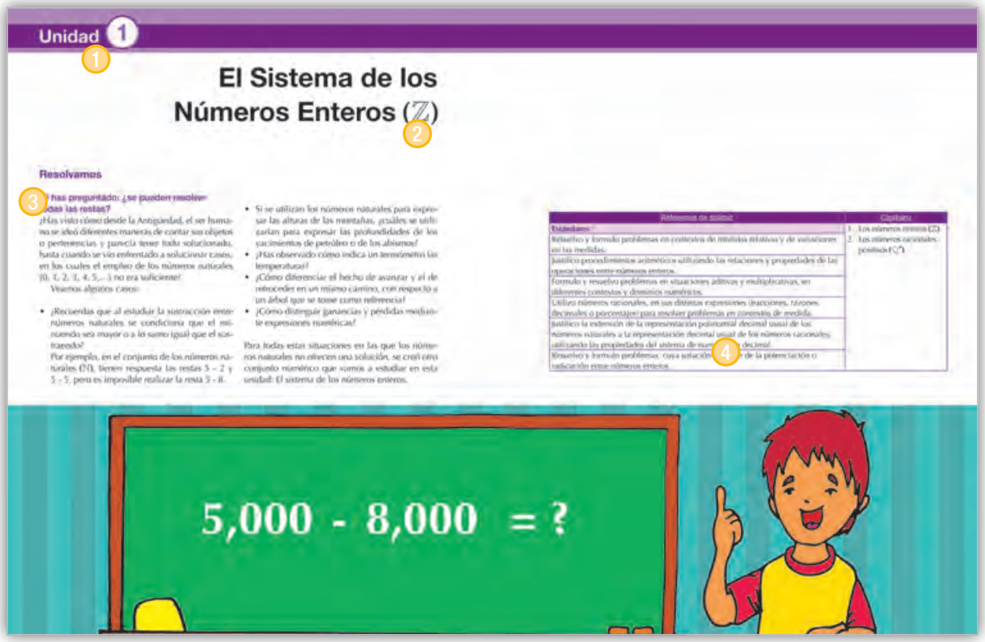
¿Cómo está compuesto el modelo Secundaria Activa?

El modelo Secundaria Activa contiene materiales educativos para siete áreas del conocimiento: Matemáticas, Ciencias Sociales, Lenguaje, Ciencias Naturales, Ética, Educación Física y Educación Artística. Además, presenta orientaciones para el desarrollo de Proyectos Pedagógicos Productivos en los establecimientos educativos en los que se implementa el modelo. Estas orientaciones están dirigidas a docentes y a estudiantes por conjuntos de grados.

Estos materiales están conformados por módulos para los estudiantes y guías didácticas para los docentes de cada grado.

¿Cómo son los módulos de los estudiantes?

Los módulos de aprendizaje son los documentos básicos de trabajo para el estudiante. En ellos se consignan los estándares básicos de competencias propias de cada área, así como los diferentes momentos para desarrollar y aplicar los conceptos y temas propuestos.
Cada módulo está compuesto por:



① **Unidad**

Es la sección mayor que reúne los capítulos y los temas. Son cuatro unidades por cada módulo para las áreas básicas (Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales, Ética y Valores y Educación Física).

② **Título**

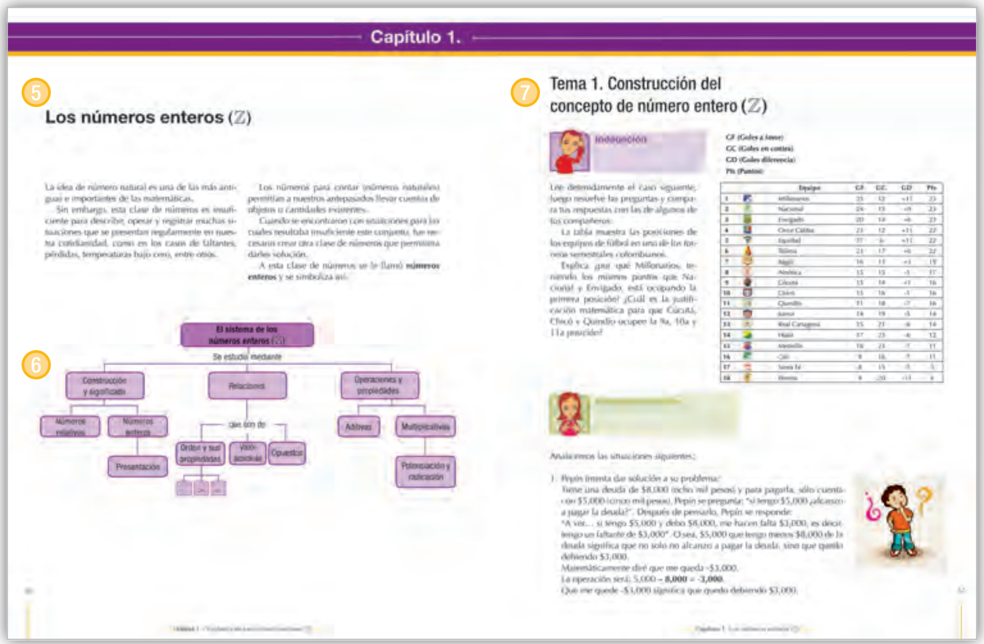
Es la presentación de la unidad de manera motivadora. Este título alude a la situación general que se trabajará en la unidad y guarda relación con las competencias propuestas por el MEN.

③ **Resolvamos**

Presenta una situación problemática de la vida cotidiana, la cual requiere el ejercicio de diferentes acciones de pensamiento como argumentar, discutir, explicar, debatir, indagar o proponer. Esta situación contextualiza al estudiante con los desarrollos básicos de la unidad y procura desequilibrios conceptuales que motiven al estudiante a encontrar soluciones. La situación planteada se acompaña de preguntas hipotéticas.

④ **Referentes de calidad y capítulos**

De manera enunciativa, exponen los estándares básicos de competencia y actividades que se desarrollarán en los capítulos.



⑤ Capítulo

Corresponde a cada una de las divisiones de la unidad y se refieren a los lineamientos o ejes articulares de cada área.

⑥ Organizador gráfico

Muestra de manera sucinta y gráfica los principales elementos que se tratan en el capítulo y se convierte en un indicativo del derrotero y la interrelación de los elementos tratados.

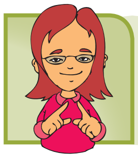
⑦ Tema

Son las partes en que se dividen los capítulos. Cada tema se compone de los siguientes momentos:

- Indagación
- Conceptualización
- Aplicación

Indagación

El propósito de este primer momento es acercar a los estudiantes a la temática mediante actividades previas como la presentación de situaciones, textos, material gráfico y actividades, que por su atractivo motivan a los jóvenes y con ello establece un primer acercamiento a los contenidos que se abordan. Igualmente, pretende indagar por los saberes previos que traen los estudiantes, a través de situaciones variadas.



Conceptualización

En este segundo momento confluyen diversas experiencias de aprendizaje que buscan la comprensión de los contenidos a través de lecturas y diversas actividades cognitivas. Los contenidos se elaboran de acuerdo con el desarrollo cognitivo de los estudiantes de cada grado, lo que implica una adecuada selección de los mismos y su profundidad, presentación y lenguaje adecuado. A la par de los contenidos, existen herramientas cognitivas que acompañan los contenidos conceptuales para favorecer su comprensión; por esto se presentan con subtítulos como ubicar, identificar, analizar, comparar, explicar, clasificar, inferir, transferir, aplicar, predecir, comunicar, entre otros.

Aplicación

Este tercer momento tiene por objeto trabajar las habilidades propias que desarrolla el área. Por ello, las actividades que se realizan enfrentan al estudiante a una situación real o de contexto para que logren un aprendizaje significativo.

Secciones flotantes

Dentro de los temas también se encuentran unas secciones flotante que tienen el propósito de dinamizar los contenidos, presentando información que amplía o se relaciona con el concepto trabajado. Todas las áreas comparten la sección *Entendemos por*, en la que se presentan las definiciones de los conceptos clave. Las otras secciones están definidas en particular para cada una de las áreas (ver información íconos)

Aplico mis conocimientos

Esta sección se presenta a lo largo del momento de la conceptualización. Es un espacio que consta de actividades de aprendizaje que acompañan los contenidos conceptuales para favorecer su comprensión.

Entendemos por…

En este ladillo se incluyen las definiciones de los conceptos clave. El propósito de esta sección es enriquecer el léxico del estudiante.

Día a día

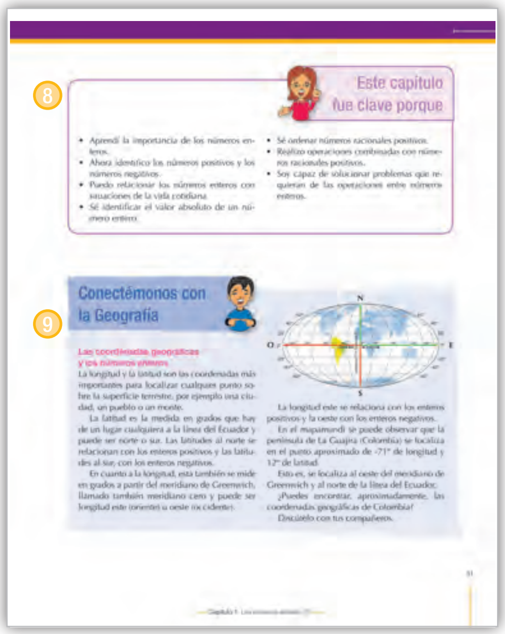
Aquí se trata de un texto en el que se relacionado la temática que se va desarrollando con aspectos de la vida diaria, con los que se relaciona el estudiante en su diario vivir, de tal manera que se evidencia como el conocimiento de la escuela tiene relación con la cotidianidad y por lo tanto es significativo.

Diversión matemática

Es airear el tema con algún acertijo o juego relacionado con el tema.

Cierre de capítulo

Al finalizar, cada capítulo ofrece:



8 Este capítulo fue clave porque

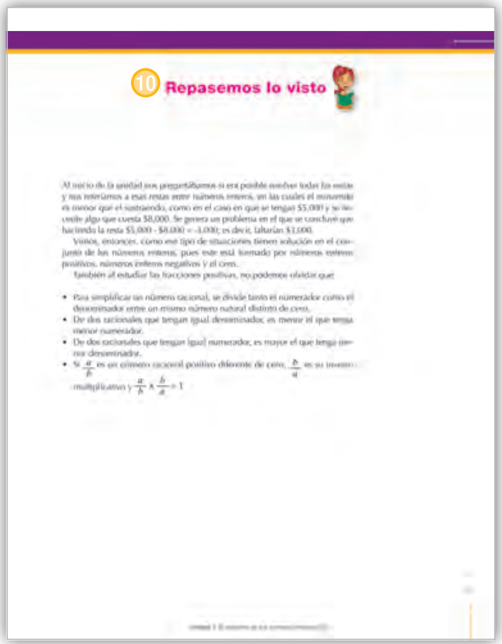
Presenta al estudiante una síntesis de los temas desarrollados durante el capítulo, para lo cual destaca su importancia y aplicabilidad.

9 Conectémonos con

Propone información que evidencia la relación de los contenidos básicos tratados con los de otras áreas de estudio y con las habilidades que estos puedan desarrollar.

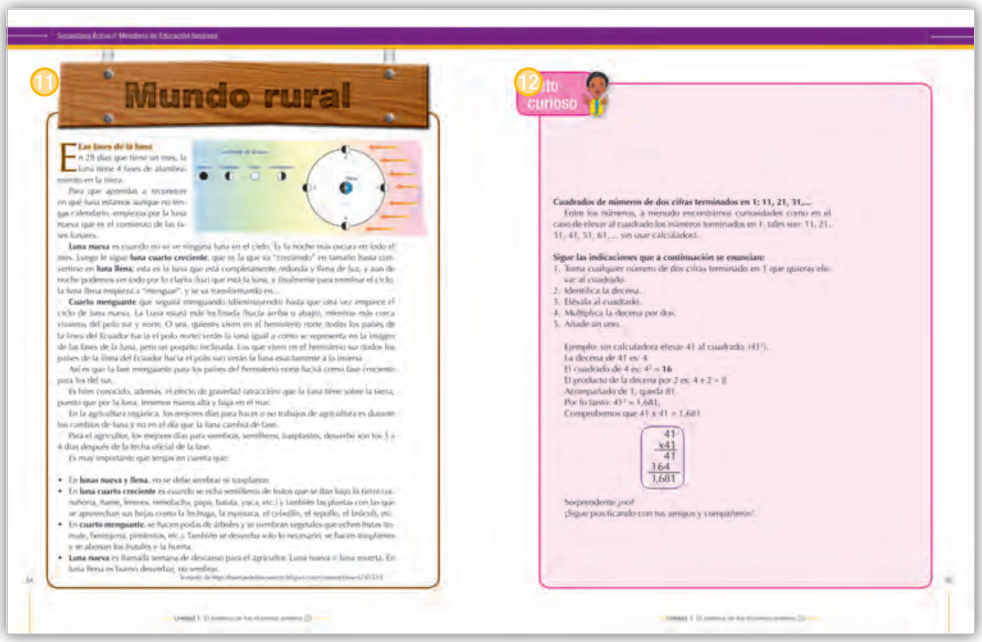
Cierre de unidad

Cada una de las unidades presenta al final:



10 Repasemos lo visto

Es la síntesis de la unidad y la conclusión de la situación problema.

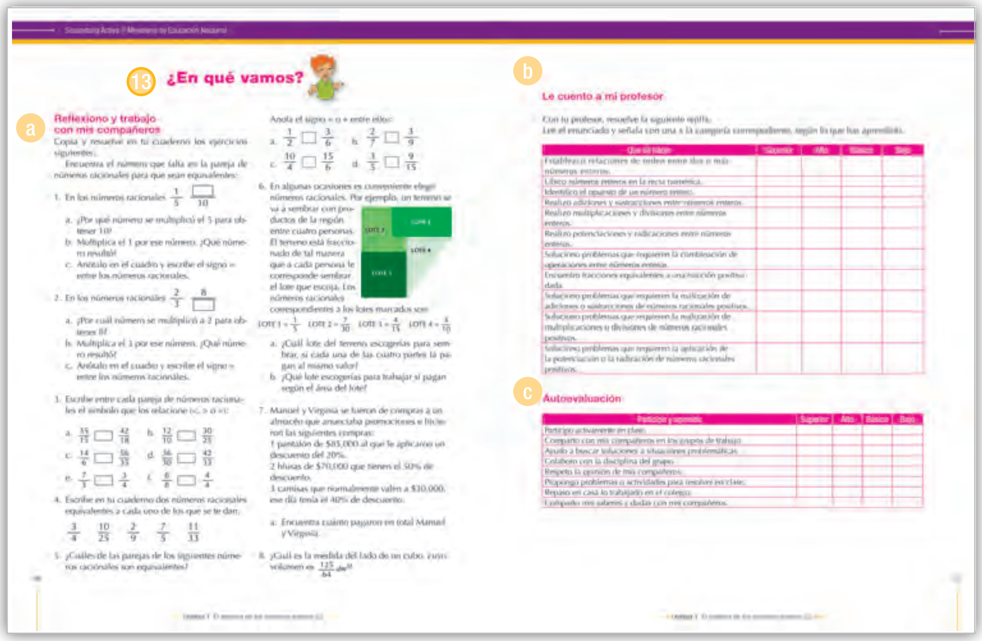


11 Mundo rural

Esta sección aprovecha el tema trabajado en la unidad, para relacionarlo con la vida del campo, de tal forma que los conceptos que se desarrollan contribuyan a la comprensión de fenómenos sociales y naturales rurales: ambiente, procesos productivos, organización comunitaria, paisaje, entre otros.

12 Dato curioso

Presenta información relacionada con aspectos como interpretación del tema por sujetos del pasado o aplicaciones tecnológicas en diferentes épocas, con la intención de motivar al estudiante, presentando la manera como los conceptos, las habilidades y los valores desarrollados por el género humano, en algunas oportunidades puede sorprender.



⑬ ¿En qué vamos?

Corresponde a los procesos de valoración del aprendizaje y evalúa si los aprendizajes de los estudiantes son significativos. También se busca que el estudiante sea responsable y controle su proceso de aprendizaje, es decir, su habilidad de autorregulación.

Esta sección está conformada por tres ejes:

ⓐ *Coevaluación*. Se presenta en la sección de *Reflexiono y trabajo con mis compañeros*, en la cual se mide la aprehensión de los conceptos, competencias y procedimientos esenciales a manera de aprendizaje colaborativo. El objetivo de esta sección es que el estudiante se vea frente a sus pares y los reconozca como interlocutores válidos. A este respecto, el estudiante podrá comparar sus respuestas con las de sus compañeros.

ⓑ *Heteroevaluación*. En el apartado titulado *Le cuento a mi profesor*, se establece un diálogo entre el docente y el estudiante para medir los alcances y logros especialmente de carácter procedimental (saber hacer) de las competencias, por medio de matrices que estipulan los criterios de calidad básicos de la unidad. Las matrices se ajustan desde los enunciados o metas de desarrollo y los criterios propios del Decreto 1290 de 2009.

ⓒ *Autoevaluación*. Corresponde a la sección *Participo y aprendo*, franja que cierra el proceso de valoración con una matriz en donde el estudiante se evalúa. Igualmente, esta sección permitirá establecer los procesos de mejoramiento para las unidades subsiguientes.

Unidad 1

El Sistema de los Números Enteros ($\mathbb{Z}$)

Resolvamos

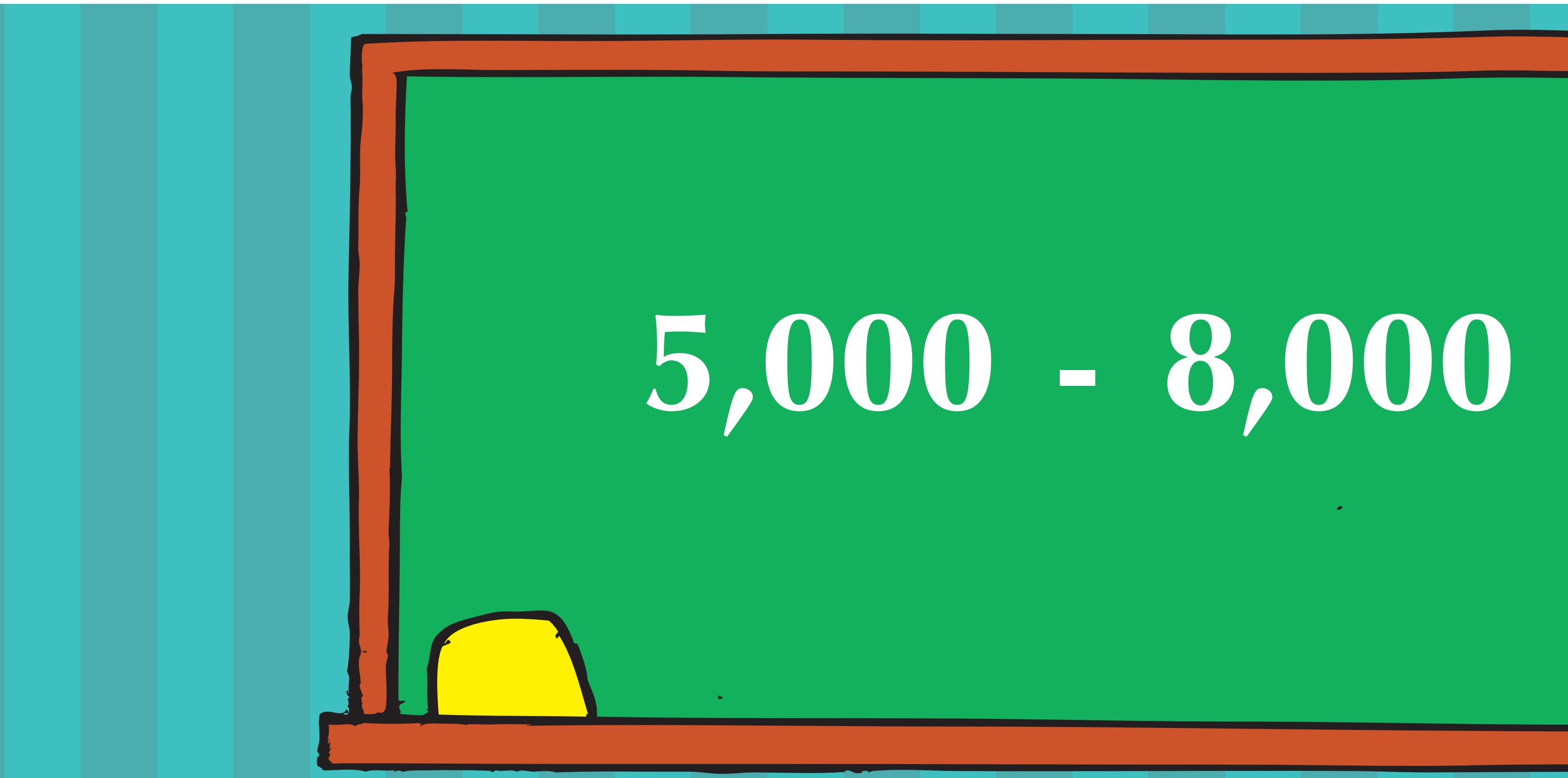
Te has preguntado: ¿se pueden resolver todas las restas?

¿Has visto cómo desde la Antigüedad, el ser humano se ideó diferentes maneras de contar sus objetos o pertenencias y parecía tener todo solucionado, hasta cuando se vio enfrentado a solucionar casos, en los cuales el empleo de los números naturales {0, 1, 2, 3, 4, 5,…} no era suficiente?

Veamos algunos casos:

- ¿Recuerdas que al estudiar la sustracción entre números naturales se condiciona que el minuendo sea mayor o a lo sumo igual que el sustraendo?
  Por ejemplo, en el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), tienen respuesta las restas 5 - 2 y 5 - 5, pero es imposible realizar la resta 5 - 8.
- Si se utilizan los números naturales para expresar las alturas de las montañas, ¿cuáles se utilizarían para expresar las profundidades de los yacimientos de petróleo o de los abismos?
- ¿Has observado cómo indica un termómetro las temperaturas?
- ¿Cómo diferenciar el hecho de avanzar y el de retroceder en un mismo camino, con respecto a un árbol que se tome como referencia?
- ¿Cómo distinguir ganancias y pérdidas mediante expresiones numéricas?

Para todas estas situaciones en las que los números naturales no ofrecen una solución, se creó otro conjunto numérico que vamos a estudiar en esta unidad: El sistema de los números enteros.



Referentes de calidad	Capítulos
Estándares	1. Los números enteros ($\mathbb{Z}$). 2. Los números racionales positivos ($\mathbb{Q}^+$).
Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.	
Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones entre números enteros.	
Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.	
Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	
Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.	
Resuelvo y formulo problemas, cuya solución requiere de la potenciación o radicación entre números enteros.	

Los números enteros ($\mathbb{Z}$)

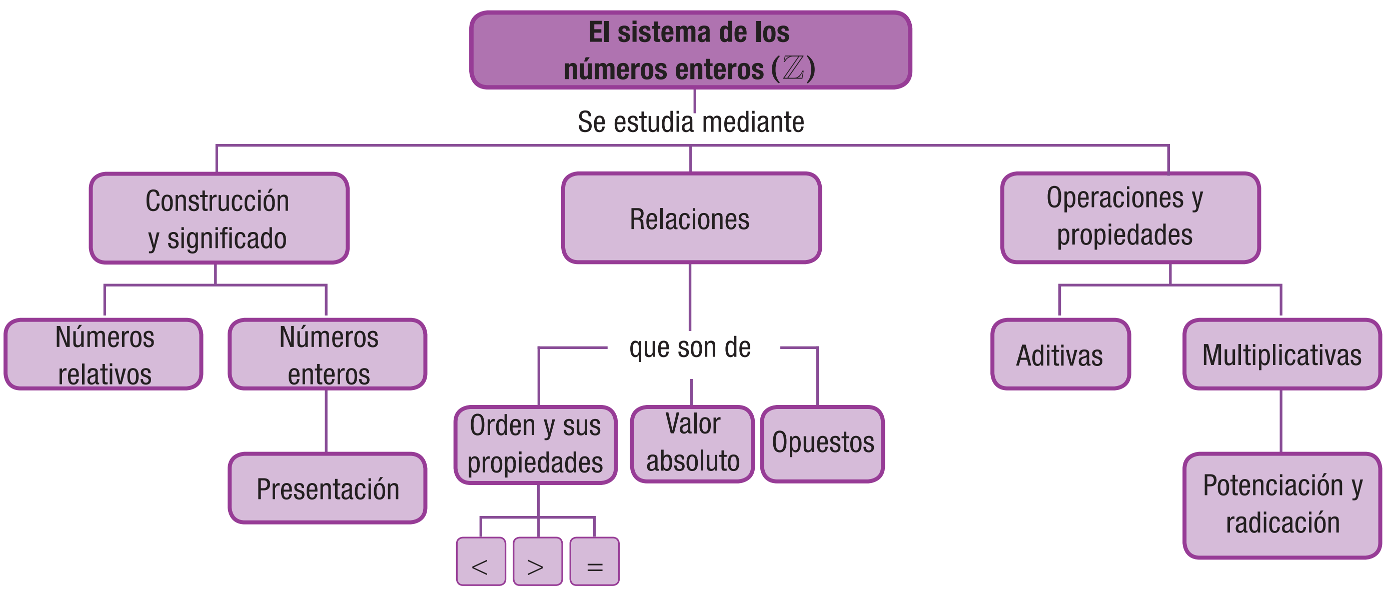
La idea de número natural es una de las más antiguas e importantes de las matemáticas.

Sin embargo, esta clase de números es insuficiente para describir, operar y registrar muchas situaciones que se presentan regularmente en nuestra cotidianidad, como en los casos de faltantes, pérdidas, temperaturas bajo cero, entre otros.

Los números para contar (números naturales) permitían a nuestros antepasados llevar cuentas de objetos o cantidades existentes.

Cuando se encontraron con situaciones para las cuales resultaba insuficiente este conjunto, fue necesario crear otra clase de números que permitiera darles solución.

A esta clase de números se le llamó **números enteros** y se simboliza así:



Tema 1. Construcción del concepto de número entero ($\mathbb{Z}$)

Indagación

Lee detenidamente el caso siguiente, luego resuelve las preguntas y compara tus respuestas con las de algunos de tus compañeros:

La tabla muestra las posiciones de los equipos de fútbol en uno de los torneos semestrales colombianos.

Explica ¿por qué Millonarios, teniendo los mismos puntos que Nacional y Envigado, está ocupando la primera posición? ¿Cuál es la justificación matemática para que Cúcuta, Chicó y Quindío ocupen la 9a, 10a y 11a posición?

GF (Goles a favor)
GC (Goles en contra)
GD (Goles diferencia)
Pts (Puntos)

	Equipo	GF	GC	GD	Pts
1	Millonarios	23	12	+11	23
2	Nacional	24	15	+9	23
3	Envigado	20	14	+6	23
4	Once Caldas	23	12	+11	22
5	Equidad	17	6	+11	22
6	Tolima	23	17	+6	22
7	Itagüí	16	13	+3	19
8	América	15	15	-1	17
9	Cúcuta	15	14	+1	16
10	Chicó	15	16	-1	16
11	Quindío	11	18	-7	16
12	Junior	14	19	-5	14
13	Real Cartagena	15	21	-6	14
14	Huila	17	23	-6	12
15	Medellín	16	23	-7	11
16	Cali	9	16	-7	11
17	Santa Fé	8	15	-7	9
18	Pereira	9	20	-11	6

Conceptualización

Analicemos las situaciones siguientes:

1. Pepín intenta dar solución a su problema:
   Tiene una deuda de \$8,000 (ocho mil pesos) y para pagarla, sólo cuenta con \$5,000 (cinco mil pesos). Pepín se pregunta: "si tengo \$5,000 ¿alcanzo a pagar la deuda?". Después de pensarlo, Pepín se responde:
   "A ver… si tengo \$5,000 y debo \$8,000, me hacen falta \$3,000, es decir, tengo un faltante de \$3,000". O sea, \$5,000 que tengo menos \$8,000 de la deuda significa que no solo no alcanzo a pagar la deuda, sino que quedo debiendo \$3,000.
   Matemáticamente diré que me queda -\$3,000.
   La operación será: 5,000 **– 8,000** = **-3,000**.
   Que me quede -\$3,000 significa que quedo debiendo \$3,000.

2. En la pista circular de atletismo, entrenan David (por el carril número 1), Julián (por el carril número 2), Claudia (por el carril número 3), Natalia (por el carril número 4) y Felipe (por el carril número 5); y la distancia medida desde el punto de salida (punto de referencia) hasta el punto H está demarcada cada 10 metros:

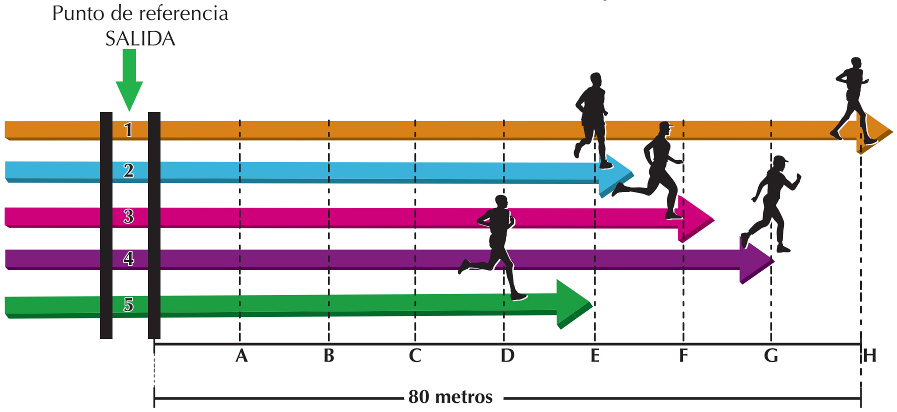


Ilustración 1. Punto de referencia (SALIDA)

La ilustración 1 muestra la ubicación de los deportistas en un tiempo después de salir.

¿Cuánta distancia, desde la salida (punto de referencia), ha recorrido Felipe?

¿Cuánta distancia ha recorrido Natalia?

¿Cuántos metros de ventaja le lleva David a Julián?

¿Quién va de primero en la competencia?

¿Quién va de último?

Las distancias recorridas, desde el punto de salida vamos a marcarlas con el signo + y los metros que falten para llegar a la meta las vamos a marcar con el signo menos (–).

La ilustración muestra que Felipe ha recorrido desde el punto de salida hasta el punto D 40 metros; como estos 40 metros ya los recorrió, en matemáticas decimos que Felipe ha recorrido +40 metros. Por lo que se ve que el sentido de las flechas es de izquierda  a derecha.

Natalia, entonces, ha recorrido +70 metros y David lleva +30 metros de ventaja a Julián.

Observa ahora el momento de llegada de los atletas en la ilustración 2:

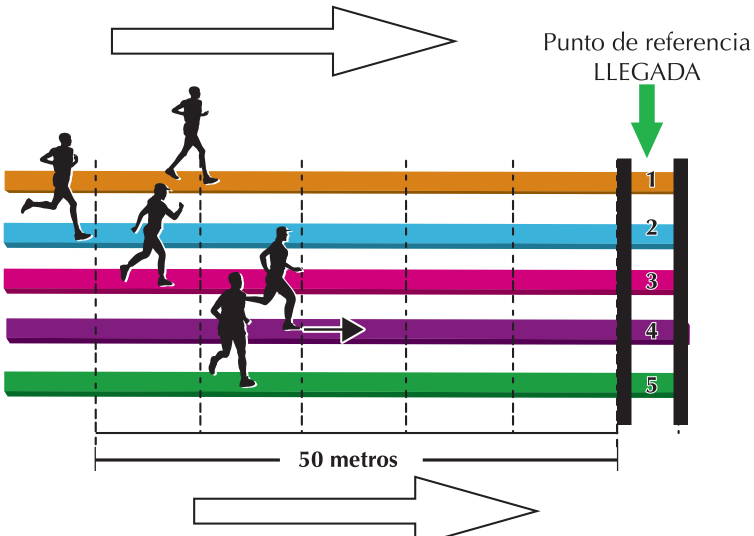


Ilustración 2. Punto de referencia (LLEGADA)

Contemos los metros que a cada uno de los participantes le faltan para llagar a la meta.

A Natalia le faltan 30 metros para alcanzar la meta, por tanto este número se escribe -30.

A David le faltan 40 metros, que escribimos -40 y entre Natalia y Julián hay -20 metros, porque a Julián le faltan 20 metros para alcanzar a Natalia.

Los números como +30, +40, +70, -30, -40 y -20, que tienen un + o un –, indican una cantidad de acuerdo con un punto de referencia u origen y se denominan números relativos.

3. En la ilustración 3 se muestran tres termómetros, en los que el punto de referencia es el cero (0). Significa, entonces, que -10°C (grados centígrados) es una temperatura muy fría, por debajo del punto de referencia cero; por encima del punto de referencia 0, están +10°C que es una temperatura menos fría que la primera, y +25°C que es una temperatura cálida:

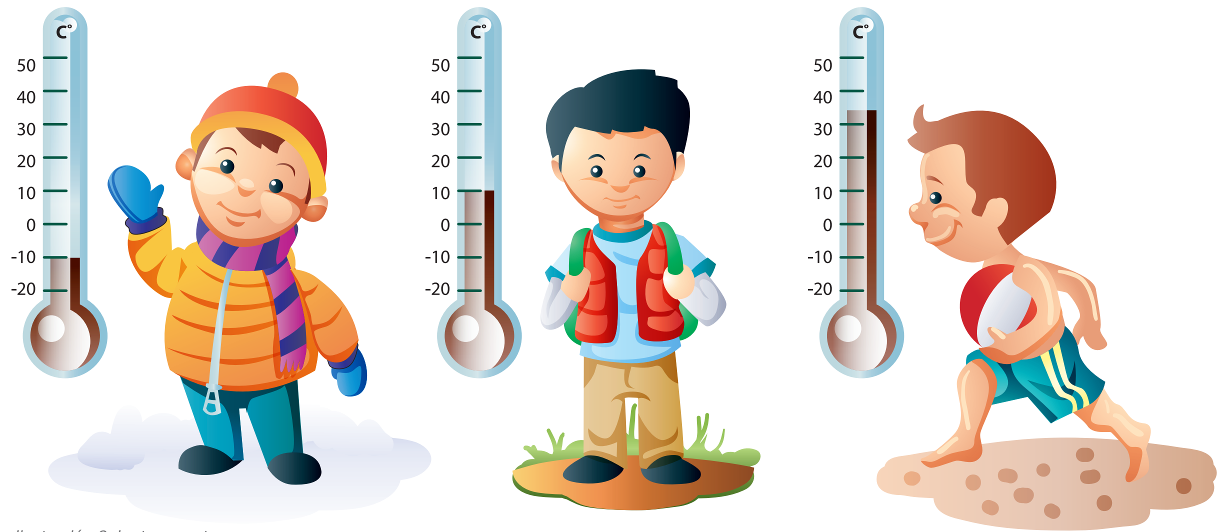
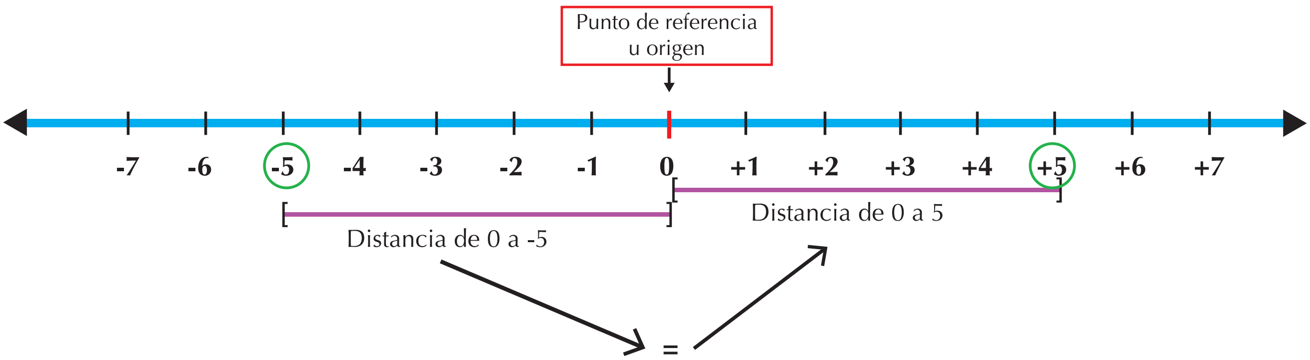


Ilustración 3. La temperatura

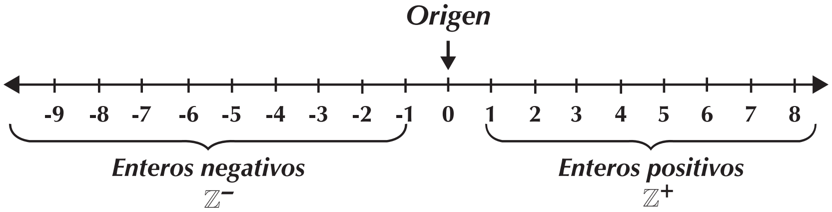
Observa que para un número relativo, hay otro número relativo en dirección contraria y a la misma distancia del punto de referencia. Estos números se llaman opuestos. Por ejemplo: +5 y -5 son opuestos. Fíjate en la siguiente representación:



El conjunto de los números enteros **(ℤ)** tiene las características siguientes:

1. El número 0 es el origen del conjunto de los números enteros **(ℤ)**. El cero no es negativo ni positivo.
2. Los números situados a la derecha del 0, en la recta numérica, se llaman **números enteros positivos** **($\mathbb{Z}^+$)** y los números ubicados a la izquierda del 0 se llaman **números enteros negativos** **($\mathbb{Z}^-$)**.

Conjunto de los números enteros en la recta numérica



La unión (U) de los números que están a la derecha del 0 (*positivos*), con los números que están a la izquierda 0 (*negativos*) y con el 0 se llama **conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$).**

Simbólicamente: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$

En diversas situaciones, los números enteros tienen aplicación práctica, por ejemplo, en la representación de pérdidas y ganancias comerciales, en la medición de ángulos, en localizaciones con respecto al nivel del mar, en la toma de temperaturas y en la medición de coordenadas geográficas. Veamos:

1. En las transacciones comerciales, la contabilidad de pérdidas y ganancias de un negocio es fundamental. Lo mismo sucede en un hogar organizado cuando se requiere llevar un control del dinero que se gana y de los gastos.

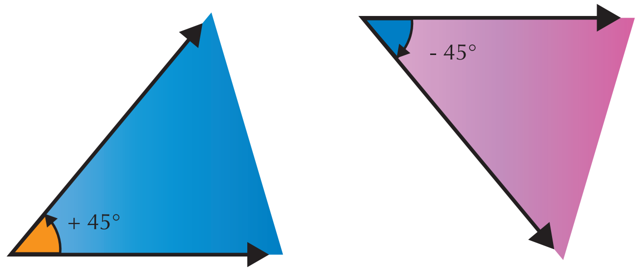
En una transacción (operación) comercial, generalmente, se asocian las ganancias con los números enteros positivos, las pérdidas con los números enteros negativos y aquellas transacciones en las que no hay ni pérdidas ni ganancias se asocian con el 0.

Por ejemplo, si en la contabilidad de una empresa, se anota la cantidad $2,820,673, esto indica que en la transacción se ganó esa cantidad de dinero; por el contrario, si se anota –$2,820,673, la cantidad representa una pérdida.

Lo mismo se acostumbra a decir con respecto a los ingresos o el dinero que entra (enteros positivos), los egresos o dinero que sale (enteros negativos) y la falta de ingresos y egresos (cero).

En el comercio, también se representan los enteros negativos con cifras de color rojo; por ello, cuando se tienen pérdidas, se dice que se "está en rojo" o que se tiene "saldo rojo".

2. En geometría, los ángulos se miden positivamente en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y se expresa con números positivos.

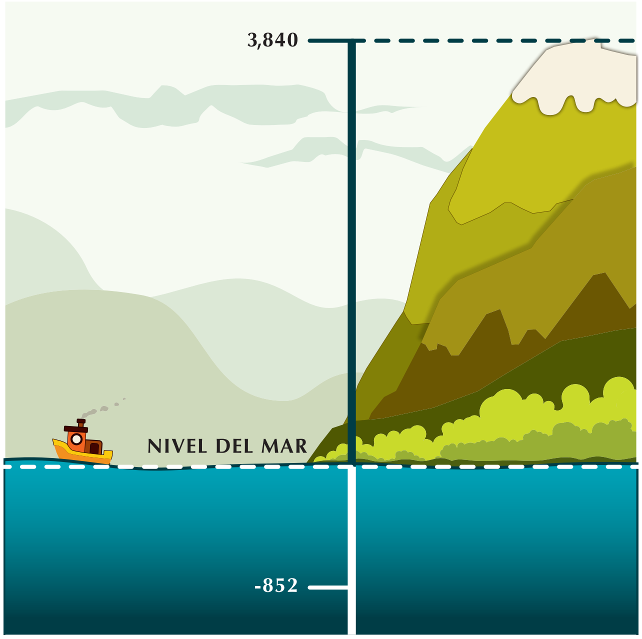


Ángulo positivo *Ángulo negativo*

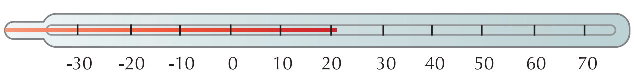
Si la rotación se da en el sentido de las manecillas del reloj, la medida se expresa con números negativos.

Cuando la posición inicial y la posición final coinciden por no haber una rotación, se dice que se tiene un ángulo de cero grados.

3. En la figura adjunta se muestra cómo los enteros pueden representar la descripción de alturas y profundidades de la superficie terrestre en relación con "el nivel del mar" o con cualquier otro punto de la Tierra. Así, al considerar el nivel del mar como cero, a las alturas se les atribuye una magnitud positiva y a las profundidades, una negativa. Con base en lo anterior, se afirma que el pico del monte está situado a 3,840 m y el submarino se encuentra a -852 m, es decir, el submarino se encuentra a 852 m bajo el mar.



4. Al medir temperaturas, también se utilizan los números enteros; las temperaturas se miden con el termómetro. Uno de los más usuales es el termómetro de mercurio, cuya escala de medición está en grados centígrados:



En el termómetro, cero grados (0°C) corresponde a la temperatura de congelación del agua a nivel del mar y los cien grados (100°C), a la temperatura de ebullición (cuando se pasa de un estado líquido a gaseoso) del agua, también a nivel del mar.

Así, en esta escala, se asocian los números positivos con las temperaturas mayores que 0°C y los negativos con las temperaturas menores de 0°C.

Por ejemplo, se conoce que una persona tiene una temperatura normal de 37°C, pero cuando tiene una temperatura mayor, se dice que tiene fiebre.

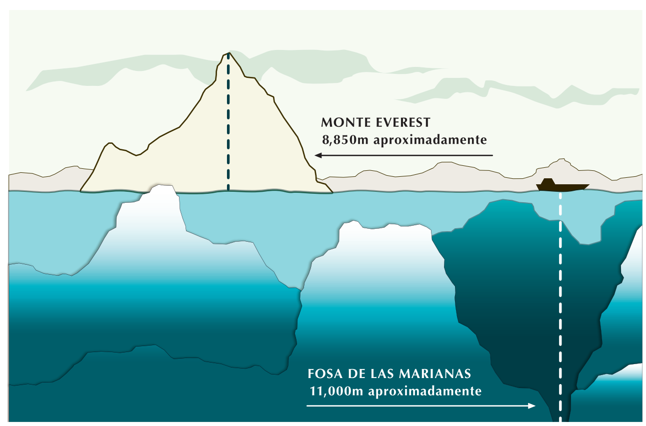
Aplicación

Copia en tu cuaderno los ejercicios siguientes, resuélvelos, y luego compara con algunos de tus compañeros.

1. Escribe los números relativos que corresponden a las siguientes afirmaciones:

   a. El señor Eduardo consignó $250,500 en el banco.
   b. El termómetro marcó 2°C bajo cero.
   c. La altura sobre el nivel del mar de una ciudad colombiana es de 2,527 m.

2. Según la gráfica siguiente, responde:



   a. La fosa de las Marianas tiene la mayor profundidad del planeta, aproximadamente ____________ metros bajo el nivel del mar.
   b. El monte Everest es la montaña más alta de la tierra, con una altura de _______ sobre el nivel del mar.

3. Copia la tabla en tu cuaderno y escribe el equipo que está en el primer puesto:

Equipo	Puntaje	Goles a favor	Goles en contra
6°-1	18	+2	-2
6°-2	18	+1	-3
6°-3	18	+3	-2

4. Escribe frente a cada expresión otra que represente la acción o situación opuesta:

   a. Adelante ____________________
   b. Subir ______________________
   c. Perder _____________________
   d. 530 años antes de nuestra era __________ ____________________________
   e. Ir de Bogotá a Cartagena _____________ ____________________________
   f. Sumar 15 a una cantidad _____________ ____________________________
   g. Restar 24 a una cantidad _____________ ____________________________

5. Representa la situación siguiente:
   Pedro trazó un ángulo positivo de 60° y luego dibujó otro pero negativo de 30°.

En los ejercicios del 6 al 8, describe el recorrido que se realizaría en la recta numérica.

En cada caso, debes partir de 0.

Por ejemplo, la descripción de -5, 4, 3 es cinco lugares a la izquierda de cero, luego cuatro lugares hacia la derecha y después tres lugares más a la derecha.

6. -1, 1, 0, -4
7. 7, -12, -3, 5
8. -1, 0, -5

Además de describir el recorrido que se realizaría en la recta numérica, representa en ella cada situación:

9. -2, -13, -5, 8
10. -9, -6, -5, 4

Entendemos por…

Punto de referencia aquel punto que se toma como señal, origen o punto de partida.

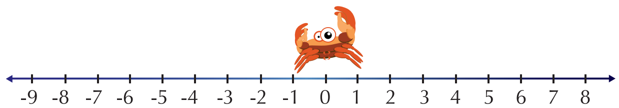
Números relativos a los números señalados con el signo + o - y que indican una cantidad a partir de un punto de referencia.

Diversión matemática

Usa la recta numérica para describir hasta qué punto llegó el cangrejo después de realizar los recorridos que abajo se indican.

Para cada recorrido haz una recta.

El cangrejo siempre inicia cualquier recorrido en el cero.



a. 3 pasos a la derecha, 4 pasos a la izquierda y 2 pasos a la derecha.
b. 5 pasos a la izquierda, 2 pasos a la derecha y 2 pasos a la izquierda.
c. 2 pasos a la izquierda, 4 pasos a la izquierda y 6 pasos a la derecha.

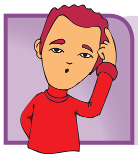
Día a día

El llamado Lago Vostok está ubicado cerca de la base rusa del mismo nombre y a 4,000 metros por debajo de la superficie de hielo, aislado del exterior y protegido de la atmósfera.

La base rusa Vostok funciona desde 1957 y está localizada a unos 1,000 km de la costa y muy cerca del Polo Sur. En esa estación se registró la temperatura atmosférica más baja de todos los tiempos: -89ºC, por lo que se identifica a este lugar como el Polo Frío. En los años sesenta, científicos soviéticos de esta base descubrieron indicios de un lago subterráneo; lo que se consideró uno de los hallazgos geográficos más importantes del siglo XX.

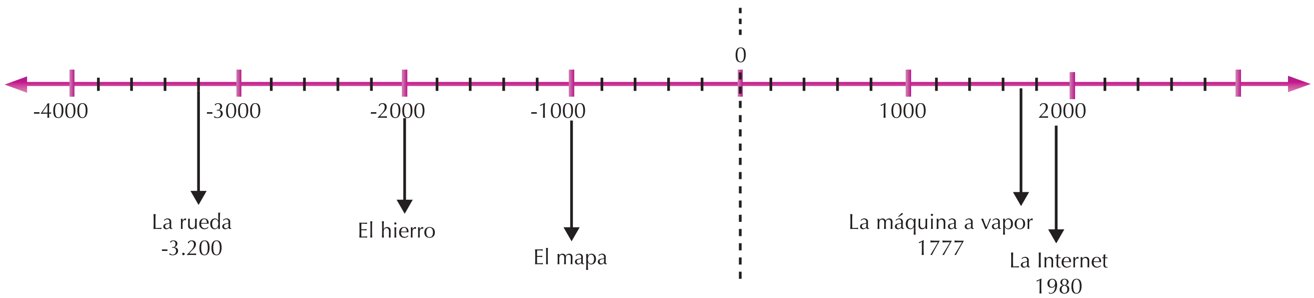
Tomado de: http://antarticos.blogspot.com/2006/01/se-reanudan-las-perforaciones-para.html

Tema 2. Igualdad, desigualdad y valor absoluto entre los números enteros ($\mathbb{Z}$)



Indagación

La gráfica muestra la representación de una línea del tiempo para ubicar las fechas de algunos inventos hechos por del hombre durante la historia:



De acuerdo con la gráfica responde:

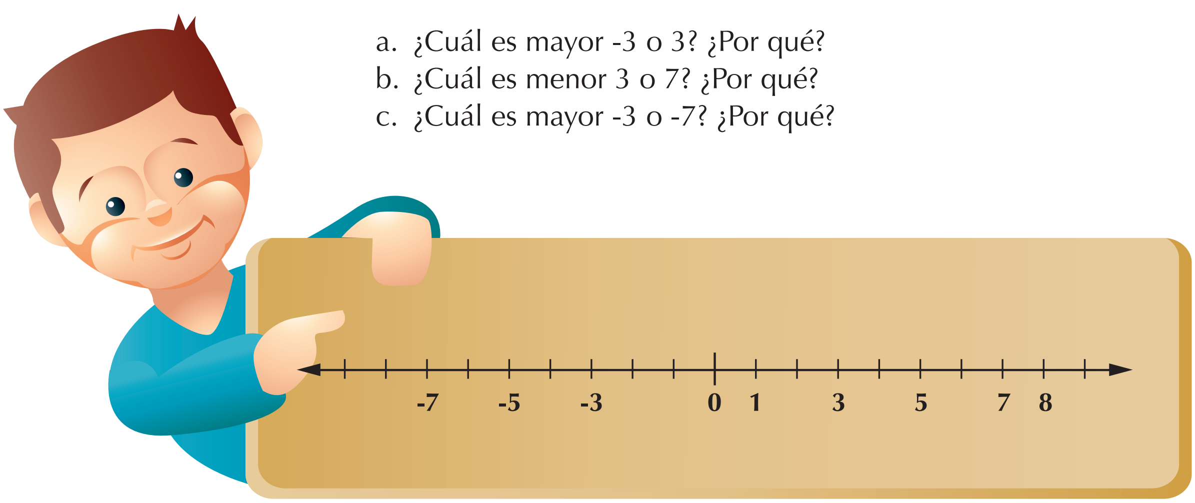
a. ¿Qué invento es más reciente, el mapa o la máquina a vapor? ¿Por qué?
b. ¿Qué invento es más antiguo, el hierro o la rueda? ¿Por qué?

Conceptualización

El orden entre los enteros

En la recta numérica, vamos a ubicar algunos números enteros:

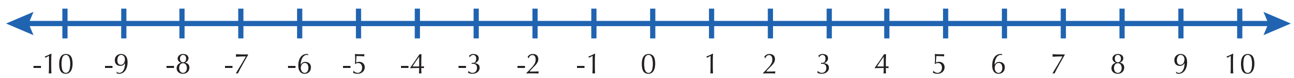
a. ¿Cuál es mayor -3 o 3? ¿Por qué?
b. ¿Cuál es menor 3 o 7? ¿Por qué?
c. ¿Cuál es mayor -3 o -7? ¿Por qué?



Solución

a. 3 es mayor que -3, porque 3 es positivo y significa haber (tengo 3), mientras que -3 significa deuda (debo 3). Además, 3 está a la derecha de -3, en la recta numérica. Simbólicamente escribimos 3 > -3.
b. 3 es menor que 7, porque aunque ambos sean positivos y signifiquen haber o ganancia, entre 3 y 7 tengo más cuando tengo 7 que cuando tengo 3. Además, 3 está a la izquierda de 7, en la recta numérica. Simbólicamente escribimos 3 < 7.
c. Entre -3 y -7 es mayor -3, porque aunque ambos sean negativos y signifiquen deuda, se tiene más cuando se tiene menos deuda. Además, -3 está a la derecha de -7, en la recta numérica. Simbólicamente escribimos -3 > -7.

Ahora, veamos estos otros ejemplos:



a. 8 > 3, porque 8 está a la derecha de 3.
b. -9 < 4, porque -9 está a la izquierda de 4.
c. -7 > -10, porque -7 está a la derecha de -10.
d. -6 < 6, porque -6 está a la izquierda de 6.
e. 0 > -10, porque 0 está a la derecha de -10.

Dados dos números enteros cualesquiera representados en una recta numérica:

a. Es mayor el que está a la derecha.
b. Es menor el que está a la izquierda.
c. Son iguales si les corresponde el mismo punto.

La igualdad y sus propiedades

Si un cuaderno vale $5,000 y un bolígrafo también cuesta $5,000, entonces decimos que el cuaderno y el bolígrafo valen lo mismo, esto es, que tienen **igual** precio.

Si un libro de geografía cuesta $45,000 y un diccionario de inglés vale $15,000, ¿cuántos diccionarios de inglés valen **igual** que un libro de geografía?

La relación de **igualdad** puede establecerse entre los números.

Por ejemplo, al decir que cuatro más uno da como resultado cinco, se puede establecer la siguiente igualdad: **4 + 1 = 5**.

Con lo cual podemos concluir lo siguiente:

La igualdad se establece entre dos expresiones que representan el mismo valor.

La igualdad

Sobre la igualdad podemos decir:

1. Si tenemos una cosa: **Primera** entonces, el valor de **Primera** es igual al valor de ella misma.

   Ejemplo numérico: **8 = 8**.

Todo número es igual a sí mismo. Se conoce como propiedad reflexiva o idéntica.

2. Si tenemos dos cosas: **Primera** y **Segunda** y si el valor de **Primera** es igual al valor de **Segunda**, entonces, el valor de **Segunda** es igual al valor de **Primera**.

   Ejemplo numérico: Si **95 - 100** = **-5** , entonces, **-5** = **95 - 100**

Dados dos números, si el 1.° es igual al 2.°, entonces, el 2.° es igual al 1.°. Se conoce como propiedad simétrica.

3. Si tenemos tres cosas: **Primera**, **Segunda** y **Tercera** y si el valor de **Primera** es igual al valor de **Segunda** y el valor de **Segunda** es igual al valor de **Tercera** entonces, el valor de **Primera** es igual al valor de **Tercera** .

   Ejemplo numérico: Si **95 - 100 = -5** y **-5 = 19 - 14**, entonces, **95 - 100 = 19 – 14**.

Dados tres números, si el 1.° es igual al 2.° y el 2.° es igual al 3.°, entonces el 1.° es igual al 3.°. Se conoce como propiedad transitiva.

4. Sabemos que **9 - 5 = 4**.
   Entonces, vamos a aumentar **15** a cada lado de la igualdad:
   (9 - 5) + *15* = 4 + *15*.
   Puedes comprobar que la igualdad no cambia.
   Ahora, tomemos la igualdad original: **9 - 5 = 4** y multipliquemos por **3** cada lado: **(9 - 5) x *3* = 4 x *3***.
   Puedes comprobar que la igualdad tampoco cambia.
   Verifica también que tomando la misma igualdad y dividiendo entre 2 cada lado, esta no cambia.

Si a los dos miembros de una igualdad se les aumenta, disminuye, multiplica o divide entre la misma cantidad, la igualdad subsiste.
Se conoce como propiedad uniforme.

Valor absoluto de un número entero

Observa las distancias en la recta numérica:

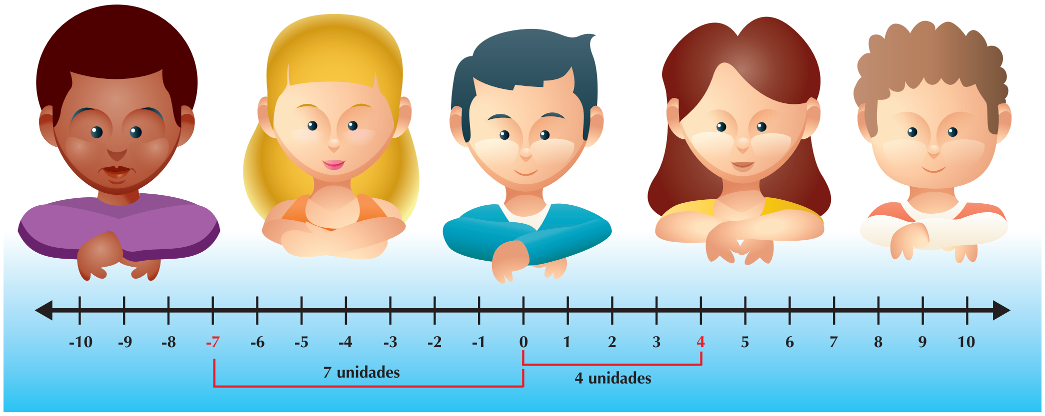


Ilustración 4. Valor absoluto

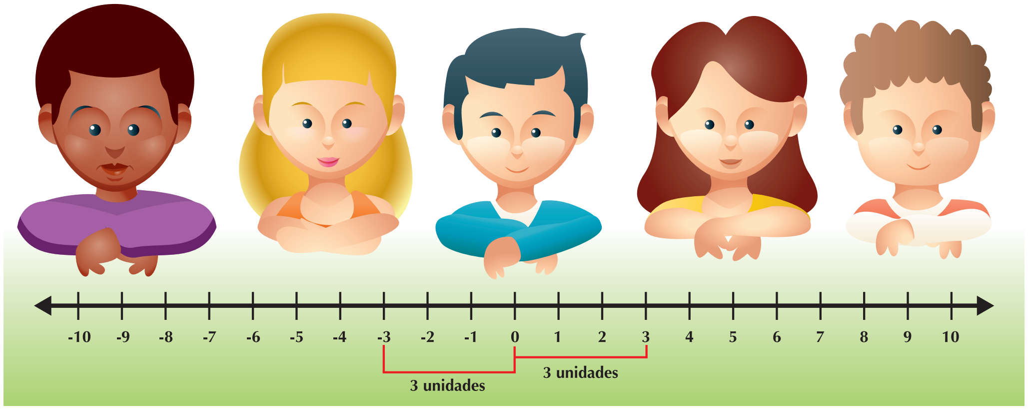
- La distancia desde 0 a -7 es 7 unidades.
- La distancia desde 0 a 4 es 4 unidades.

El valor absoluto de un número entero es la distancia desde el cero al número entero indicado y se escribe entre barras, así:

|**-7**|=7 (el valor absoluto de -7 es igual a 7).
|**4**|=4 (el valor absoluto de 4 es igual a 4).

Opuesto de un número entero

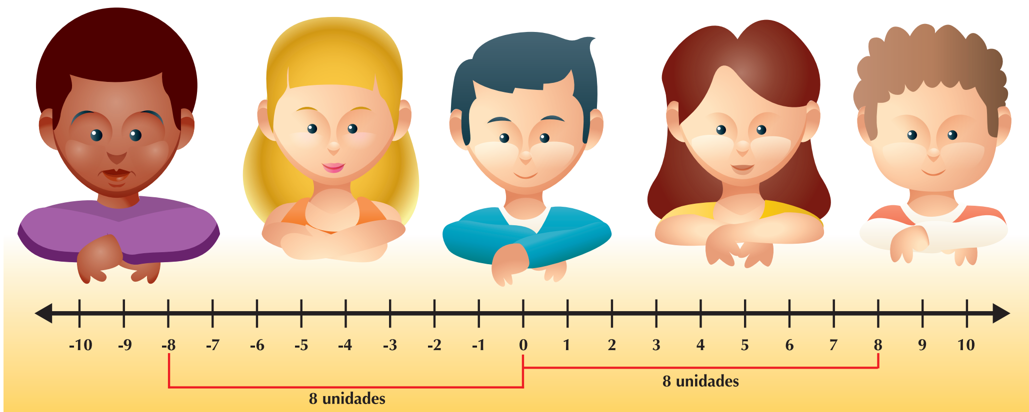
Observa los números enteros ubicados en la recta numérica siguiente:



3 y -3 están situados a la misma distancia del 0; es decir, tienen el mismo valor absoluto:

$$|-3|=|3|=3,$$

-3 es el opuesto de 3 y 3 es el opuesto de -3.
Con estas condiciones 3 y -3 son **simétricos**.



El 8 y -8 están situados a la misma distancia del 0, es decir, tienen el mismo valor absoluto:

|-8|=|8|=8, entonces -8 es el opuesto de 8 y 8 es el opuesto de -8, por lo tanto 8 y -8 son **simétricos**.

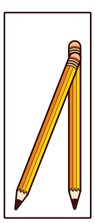
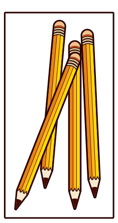
El opuesto de un número entero es aquel que tiene el mismo valor absoluto, pero con signo contrario.

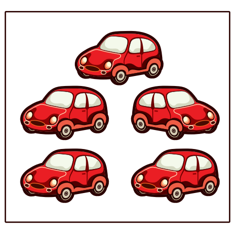
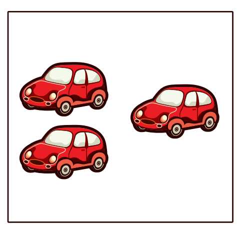
Aplicación

Trabaja con tu compañero y resuelvan cada uno en su cuaderno los ejercicios:

Escribe el signo >, < o =, entre las componentes de cada pareja:

1.

a.  

b.  

2.

a. | -10 | -2 |

b. | -28 | 5 |

c. | 46 | 30 |

d. | -286 | 0 |

3. Ordena de mayor a menor los siguientes enteros:
23, -85, 0, -15, -7, 5, -3, 83.

Analiza las siguientes expresiones y anota la propiedad de la igualdad que se podría ilustrar:

4. Juan es hermano de Pepe y Pepe es hermano de Miguel, por lo tanto, Juan es hermano de Miguel.
5. El señor Ruiz y la señora González tenían en el banco $40,000 cada uno. Si ambos depositan $60,000 en su respectiva cuenta, tendrán la misma cantidad.
6. Gloria es igual de alta que Elsa y Elsa es igual de alta que Gloria.

Escribe al frente de cada expresión su valor absoluto:

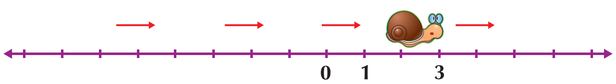
7. $|-583| =$
8. $|69| =$

Represente el opuesto de cada número, en la recta numérica:

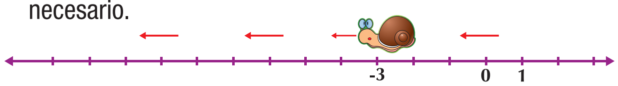
9. a. –11 b. –7
10. a. 15 b. 10

Diversión matemática

Sobre un listón de madera que tiene marcados 15 cm en el dibujo de una recta numérica, un caracol se desplaza en el sentido indicado por la flecha roja:



¿Habías visto un caracolito? Te presentamos uno muy especial. Trabaja en tu cuaderno.
El caracol avanza una unidad por hora.
A las 12 del mediodía se encuentra en el punto +3.
Según la recta numérica dibujada, ¿en cuál punto se encontraría a las 11 a.m.?, ¿a las 9 a.m.?, ¿a las 8 a.m.?, ¿a las 6 a.m.? y ¿a las 5 a.m.?
Utiliza los números negativos en las horas que sea necesario.



Al otro día, a las 11 a.m., el mismo caracol se desplaza en el sentido indicado por la flecha roja, desde el punto -3.

a. ¿En dónde se encontrará a las 13 horas?, ¿a las 15? y ¿a las 16?
b. ¿Dónde se encontraba a las 11 horas?, ¿a las 8?, ¿a las 9? y ¿a las 7?

Entendemos por…

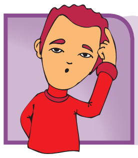
Un número mayor (>) que otro dado aquel número que se encuentra ubicado a la derecha de él, en la recta numérica.
Por ejemplo 8 > 3. En la recta numérica, 8 está a la derecha de 3.
Un número menor (<) que otro dado aquel número que se encuentra ubicado a la izquierda de él, en la recta numérica.
Por ejemplo 3 > 8. En la recta numérica, 3 está a la izquierda de 8.

Día a día

Un juego mental muy común hoy es el llamado sudoku. El sudoku consta siempre de 9 filas (dirección horizontal) y 9 columnas (dirección vertical), del cual salen 9 cuadrados interiores (cuadrados de lados rojos), y cada uno de ellos a su vez contiene 9 casillas, en las cuales van los números de 1 a 9, igual que en cada fila y columna del cuadrado grande. ¡Complétalo!

7	4		3	5	1			6
5	3			9	8		1	
		8	6	2		5		
3		7		1	2	8	4	9
2	8	9	4		7			
4	1		9	8	3	7	6	2
		3	8		5	6	2	1
	5		2		6	4	9	7
6			1		9	3	5	8

Tema 3. Adición y sustracción de los números enteros (ℤ). Propiedades.



Indagación

La ilustración 5 muestra los ciclistas que ocupan los puestos 1.°, 2.°, 3.° y 4.° y los kilómetros que separan a un ciclista de otro, en ese instante:

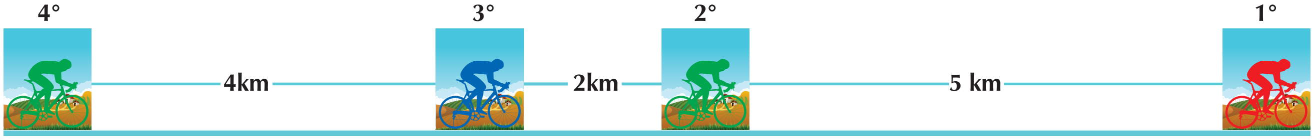
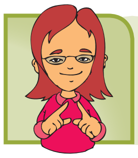


Ilustración 5. Carrera de ciclistas

- ¿Cuál es la distancia que separa al 4.° ciclista del 1.°?
- ¿Cuál es la distancia que separa al 2.° ciclista del 4.°?
- ¿Cuál es la distancia que separa al 3.° ciclista del 2.°?
- ¿Cuál es la distancia que separa al 2.° ciclista del 1.°?
- Discútelo con algunos de tus compañeros.



Conceptualización

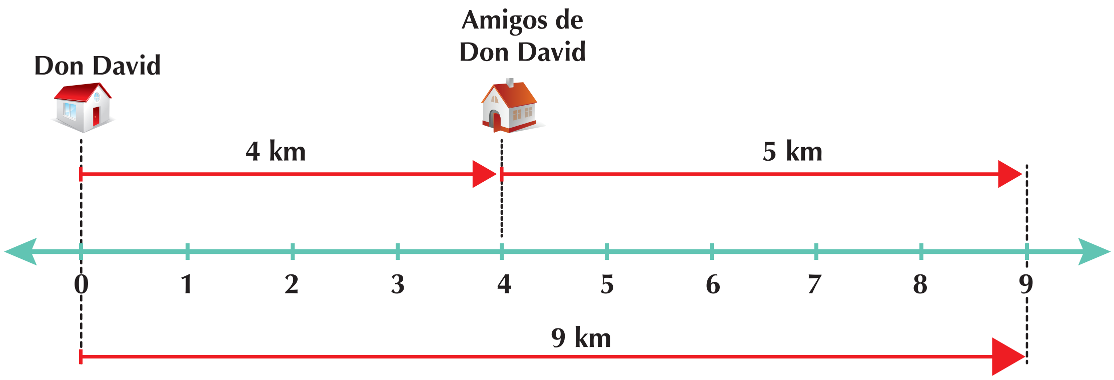
Adición de números enteros

Caso 1. Adición de enteros positivos

Don David, un señor que todas las mañanas sale a caminar, realiza diferentes recorridos cada día.

Un lunes salió de su casa y anduvo 4 kilómetros hacia la casa de unos amigos, que queda al oriente de la de él (derecha), después de descansar un rato, continuó su camino en la misma dirección, esta vez 5 kilómetros. Queremos saber ¿cuántos kilómetros en total recorrió don David?

Solución



A partir de 0 se representan los sumandos 4 km y 5 km con flechas hacia la derecha, y el resultado se representa con una flecha que va desde 0 hasta 9.

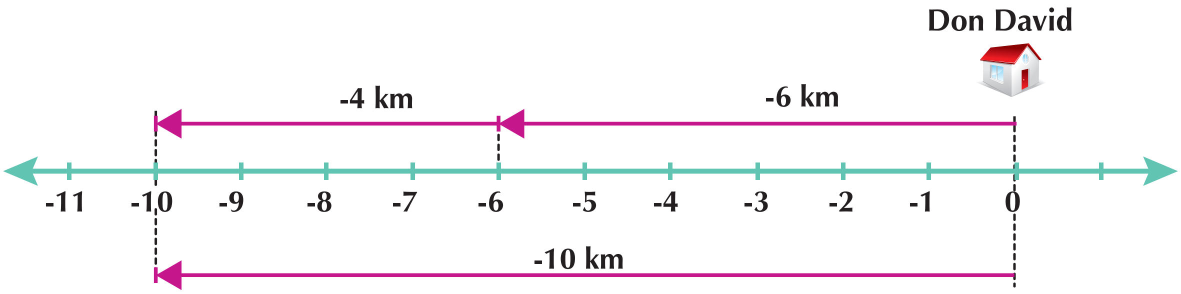
Por lo tanto: 4 km + 5 km = 9 km.

En total, don David recorrió 9 km.

La suma de dos números enteros positivos da siempre positivo.

Caso 2. Adición de enteros negativos

El miércoles se le ocurrió a don David salir a caminar hacia el lado contrario de la casa de sus amigos (izquierda, dirección que señalamos con el signo -) y esta vez recorrió 6 km hacia la izquierda, descansó un rato y continuó caminando otros 4 km (en la misma dirección, hacia la izquierda). Es decir que su recorrido esta vez fue (-6 km) + (-4 km). ¿A qué distancia de su casa quedó don David?



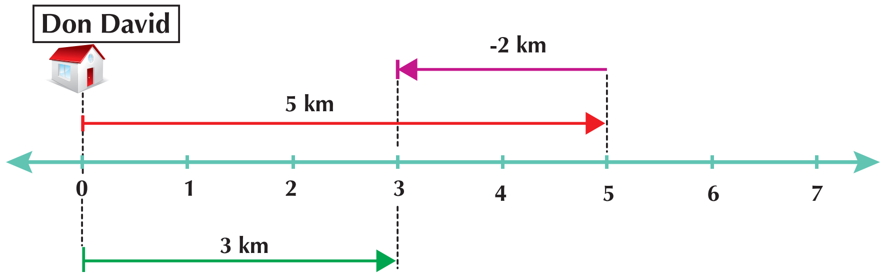
Por consiguiente: (–6 km) + (–4 km) = –10 km.

La suma de dos números enteros negativos da siempre negativo.

Caso 3. Adición de enteros con diferente signo

Otro día, don David salió de su casa, recorrió 5 km hacia la derecha y se devolvió 2 km.

¿A cuántos km de su casa quedó don David finalmente?



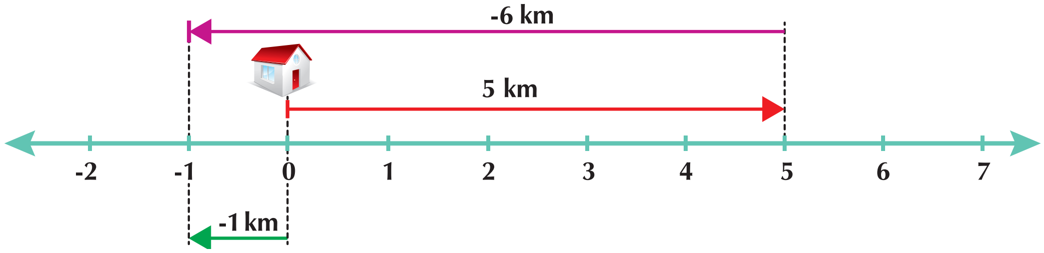
El primer número (5) se representa con una flecha que parte de 0 y a continuación el número (3), que se representa con la flecha (-2) en sentido contrario a la primera. El resultado o suma es el desplazamiento desde 0 hasta 3.

Por consiguiente (5) + (-2) = 3.

Sumar un negativo es equivalente a restar.

En este caso, tenemos (5) + (-2) = 5 – 2 = 3.

- Si después de recorrer los primeros 5 km, don David no se hubiera devuelto 2 km sino 6 km, ¿a cuántos km de su casa quedaría?



Don David quedó a 1 km a la izquierda de su casa, puesto que (5) + (-6) = -1.

La suma de un número entero positivo con un número entero negativo da como resultado un número entero del mismo signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Aplicación

Realiza en tu cuaderno los ejercicios siguientes y compara los resultados con algunos de tus compañeros:

1. Representa en la recta numérica las siguientes adiciones:

   a. 5 + 4 + 45 =
   b. (–8) + (–5) + (–46) =
   c. (9) + (–6) + 20 =
   d. 4 + (–11) + 64 =
   e. 4 + 52 + 76 =
   f. (–1) + (–5) + (–28) =
   g. (–8) + (–10) + (–47) =
   h. 12 + 80 – 194 =

2. Juan le debe a Luis $23,508 y a Esteban $37,160, ¿cuánto debe en total?

3. Completa los siguientes cuadros, realizando las operaciones entre los números vertical y horizontalmente:

				+4				
				+3				
				+2				
				+1				+5
-4	-3	-2	-1	+	+1	+2	+3	+4
-5				-1				
				-2				+2
				-3				
				-4				

			+3				
-1			+2				
			+1				
-3	-2	-1		+1	+2	+3	+4
-4			-1				
			-2				
			-3				
			-4				

4. Los emperadores Julio César y Augusto:

- Julio César fue un emperador romano que nació en el año 110 a.C. y murió asesinado en el año 44 a. C.
- Augusto nació en el año 63 a. C., quien llegó a ser emperador a la edad de 36 años y murió en el año 14 d. C.

   a. Represента en una recta las fechas de nacimiento y muerte de los dos personajes.
   b. ¿A qué edad murió Julio César?
   c. ¿Cuántos años tenía Julio César cuando nació Augusto?
   d. ¿Cuál era la edad de Augusto cuando murió Julio César?
   e. ¿Cuántos años duró el reinado de Augusto?

5. Un comerciante invirtió $5,350,000 en mercancía. Al venderla obtuvo $9,480,000. ¿De cuánto fue la pérdida o la ganancia? Anota al resultado el signo que le corresponda.
6. En el mercado del pueblo, el domingo pasado, un campesino vendió su cosecha de papa. De ella obtuvo $250,000 de ganancia. Aprovechó para llevar algunos artículos para su hogar y halagar a su familia. A su esposa le compró un vestido que le costó $40,000 y a cada uno de sus tres hijos les compró pantalón a $15,000 y camisa a $12,000. Calcula:

   a. ¿Cuánto gastó en los regalos para su familia?
   b. ¿Cuánto dinero le quedó?

7. Realiza en tu cuaderno las operaciones siguientes:

   a. -14 + 46 =
   b. 58 + 32 - 285 =
   c. 30 + 23 + 56 + 46 =
   d. 77 + 46 + 297 + 39 =
   e. 30 - 23 + 56 - 46 =
   f. -7 + 46 - 107 - 19 =
   g. 30 - 13 - 36 - 6 =
   h. -5 + 6 - 17 - 79 =

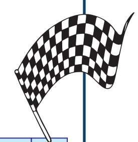
Entendemos por…

Adición de un entero positivo y un entero negativo la diferencia de los valores absolutos con el signo del número de mayor valor absoluto.

Diversión matemática

Juega y evalúate

Dados con números positivos y negativos. Juega con dos dados: uno verde para avanzar y otro rojo para retroceder, es decir, en el verde considera los enteros positivos +1, +2, +3, +4, +5 y +6 y en el rojo, los enteros negativos -1, -2, -3, -4, -5 y -6.



-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	SALIDA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Rosita obtuvo los resultados siguientes en sus tres primeros lanzamientos:

Lanzamiento	Dado rojo	Dado verde
En un primer lanzamiento	-2	4
En un segundo lanzamiento	-6	1
En un tercer lanzamiento	-5	3

a. Si en el primer lanzamiento Rosita avanza 4 posiciones, pero retrocede 2. ¿Cuál fue su posición definitiva de este lanzamiento?
b. Describe lo que le ocurrió a Rosita en el 2º lanzamiento.
c. Después del tercer lanzamiento, ¿sobre cuál casilla estará?
d. ¿Cuál puede ser el resultado de un cuarto lanzamiento para llegar a la casilla de llegada?
e. Copia el juego en una cartulina, consigue los dados con los colores o píntalos y juega con algunos de tus compañeros.

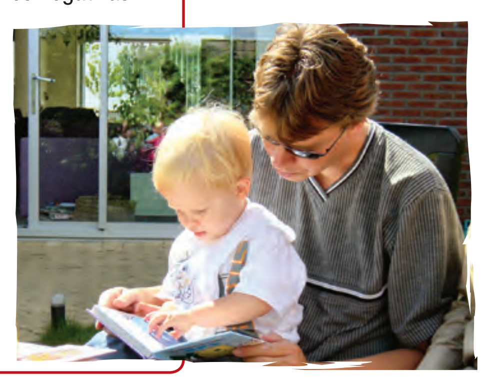
Día a día

5 consejos para mantener una actitud positiva en las situaciones negativas.

Aunque no es fácil, es importante mantener una actitud positiva en las situaciones negativas. Tenga en cuenta los consejos siguientes:

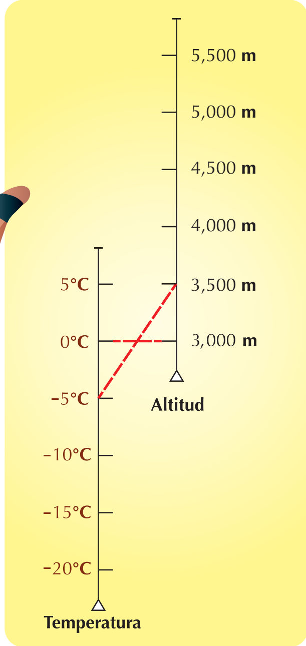
1. Nunca responda cuando esté alterado. Respire profundo y tómese el tiempo para calmarse.
2. Hable en tono suave para reducir la tensión de la situación.
3. Mantenga una visión positiva de la gente, resalte lo positivo en vez de lo negativo.
4. Si usted comete errores, esté dispuesto a admitirlo.

Dése cuenta de que tener sentimientos negativos, solo le hará daño a usted y no a los demás.cotidianidad y por lo tanto es significativo.



Tema 4. Estructuras de la multiplicación y división de los números enteros ($\mathbb{Z}$)

Indagación



Durante el ascenso a una montaña, la temperatura desciende 1 grado centígrado cada 100 m de ascenso.

¿A qué altura habrá que ascender para alcanzar -15ºC, si en el punto de partida la temperatura es de 5ºC y este está a una altitud de 3,000 m?

Conceptualización

Multiplicación de números enteros

Ya sabes realizar operaciones en el conjunto de los números naturales, que forman la parte positiva del conjunto de los números enteros.

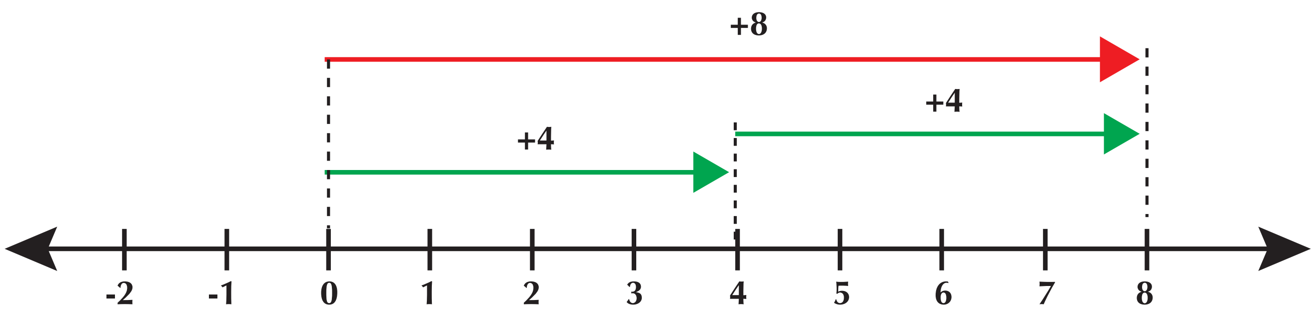
Sabes por ejemplo que duplicar un valor es multiplicarlo por 2 o tomarlo 2 veces. Esto podemos construirlo en la recta numérica. Vamos a representar en la recta numérica algunas operaciones entre números enteros:

1. Representar en la recta numérica el duplo de 4.

   Solución

   El duplo de un número equivale a tomarlo 2 veces o a multiplicarlo por 2.

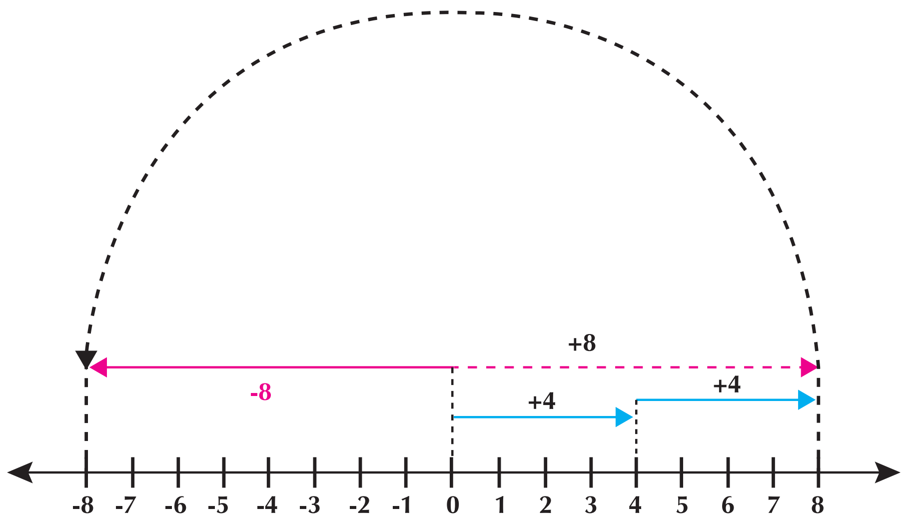
   El duplo de 4 = 2 veces 4 = (2) x (4).



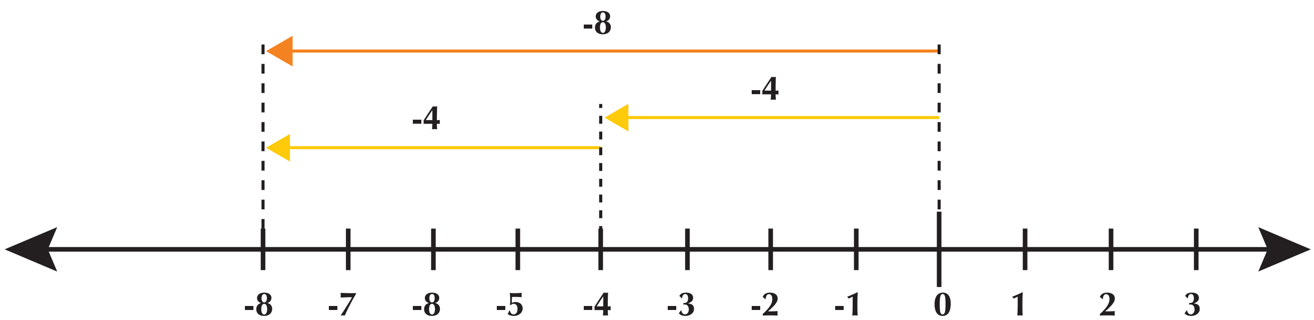
La figura nos muestra que 4 tomado 2 veces (2 flechas verdes) nos da 8 (flecha roja).

Luego (2) x (4) = 8.

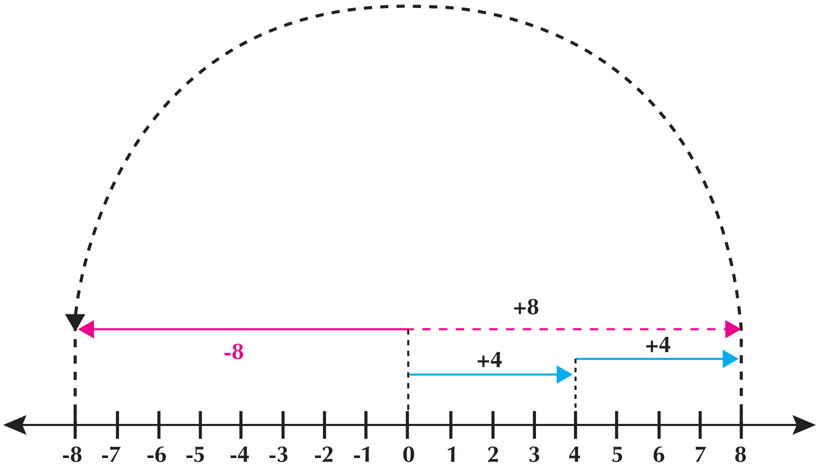
2. ¿Cómo será en la recta numérica el duplo de -4?
   Solución
   El duplo de -4 equivale a tomar el 4 dos veces, pero en sentido contrario.
   Así: (2) x (-4) = - (2) x (4), esto es 2 x 4 en sentido contrario.



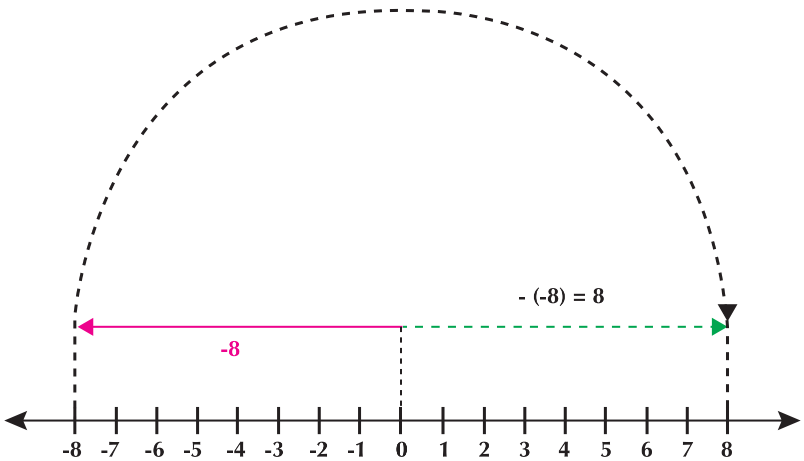
   Tomamos el 4 dos veces (flechas azules) y da 8 (flecha rosada punteada), pero como se multiplica por -2 y no por 2, entonces se toma el 8 en sentido contrario, es decir -8 (flecha rosada continua).
   Luego (-2) x (4) = - 8.
3. Ahora veamos qué pasa cuando el entero (-4) sea multiplicado por +2.
   Aquí significa que el valor -4 es tomado 2 veces en el mismo sentido o que -4 es duplicado.
   Su representación en la recta numérica es la siguiente:



   Vemos que (+2) x (-4) = -8.
   Analicemos ahora cómo realizar en la recta numérica el producto (-2) x (-4).
   Vimos que (-2) x (4) es igual a -8, es decir, 8 en sentido contrario de 2 x 4.
   Entonces si (-2) x (4) es igual a 8 en sentido contrario (o sea -8), entonces, (-2) x (-4) es (-2) x (4) tomado otra vez en sentido contrario, es decir, -8 en sentido contrario, que equivale a 8.



Si la flecha rosada representa (-2) x (4), entonces volver a voltear la flecha rosada será (-2) x (-4), esto es (-8) en sentido contrario o lo que es lo mismo -(-8).



Resumiendo:
2 x 4 = 8.
2 x -4 = -8 (en multiplicación un signo – me cambia el sentido).
- 2 x 4 = -8 (en multiplicación un signo – me cambia el sentido).
-2 x -4 = -(-8) (el otro signo – me vuelve a cambiar de signo) = 8.

Resolvamos los problemas siguientes:

1. Si se considera positivo el depósito en un banco, entonces, ¿cuánto consignó en cinco días, un señor que diariamente depositó $750,000?

   Solución
   Esta situación se resuelve con una multiplicación de números enteros, así:
   (+5)(750,000) = 3,750,000.
   Ten en cuenta que dos paréntesis seguidos indican multiplicación.
   Este producto también pudo haberse representado así:
   (+5) 750,000 o también 5 x 750,000 o +5 (750,000).
   El estado de cuenta del señor después de los cinco días, entonces es de $3,750,000.

2. Esta otra situación es bien especial: considerando un retiro bancario como negativo, una persona retira del banco \$500,000 diariamente durante seis días, ¿cuál era su estado de cuenta antes de retirar estas cantidades?

Nótese que hace retiros diarios (–\$500,000) durante 6 días ya pasados (–6), entonces:

$$\underbrace{(-6)}_{\text{días pasados}}\ \underbrace{(-500,000)}_{\text{retiro}} = \underbrace{3,000,000}_{\text{cantidad que tenía antes}}$$

Podemos resumir la multiplicación de números enteros, enunciando las leyes de los signos.

Leyes de los signos de la multiplicación de números enteros

En la multiplicación de números enteros, se emplean las mismas tablas de multiplicar que se usan para los números naturales y se tiene en cuenta que **el producto de números enteros con signos iguales da + y el producto de números enteros con signos contrarios da –**. La tabla adjunta resume las leyes de los signos.

$$(+)(+) = +$$
$$(-)(-) = +$$
$$(-)(+) = -$$
$$(+)(-) = -$$

Por último, cuando se tienen que multiplicar más de dos factores, se obtiene el producto de los primeros dos, luego dicho producto se multiplica por el siguiente factor, y así sucesivamente hasta terminar.

Realicemos el producto: (-3)(-2)(+5)(-4):

(-3) (-2) (+5) (-4) = -120

(+6)

(+30)

(-120)

División de números enteros

Sabemos que cociente es el resultado de una división y esta es la operación inversa de la multiplicación. Analicemos el siguiente problema que muestra esa relación:

Una persona adquiere una deuda de \$3,500,000 con el compromiso de cubrirla en 7 pagos iguales. ¿De qué cantidad deberá ser cada pago?

La deuda se presentará como una cantidad negativa, o sea, –3,500,000 y los siete pagos como +7. De manera que la situación se puede representar así: (+7) (x) = -3,500,000, donde x es la cantidad que se desea conocer.

Esto es, una multiplicación en la que se desconoce un factor, pero se tiene el otro factor y el producto de ambos.

$$\underbrace{(+7)}_{\textit{Factor conocido}}\underbrace{(\boxed{})}_{\textit{Factor desconocido}} = \underbrace{-3,500,000}_{\textit{Producto}}$$

Por las leyes de los signos estudiadas en el tema de la multiplicación de números enteros, podemos deducir que el factor desconocido tiene signo – para que multiplicado con el positivo 7 nos dé signo –.

Para encontrar el factor desconocido, se realiza una división, donde el producto se convierte en dividendo y el factor conocido, en divisor:

(3,500,000) ÷ (+7) = -500.

De esta forma, se sabe que los pagos serán de $500,000 cada uno.

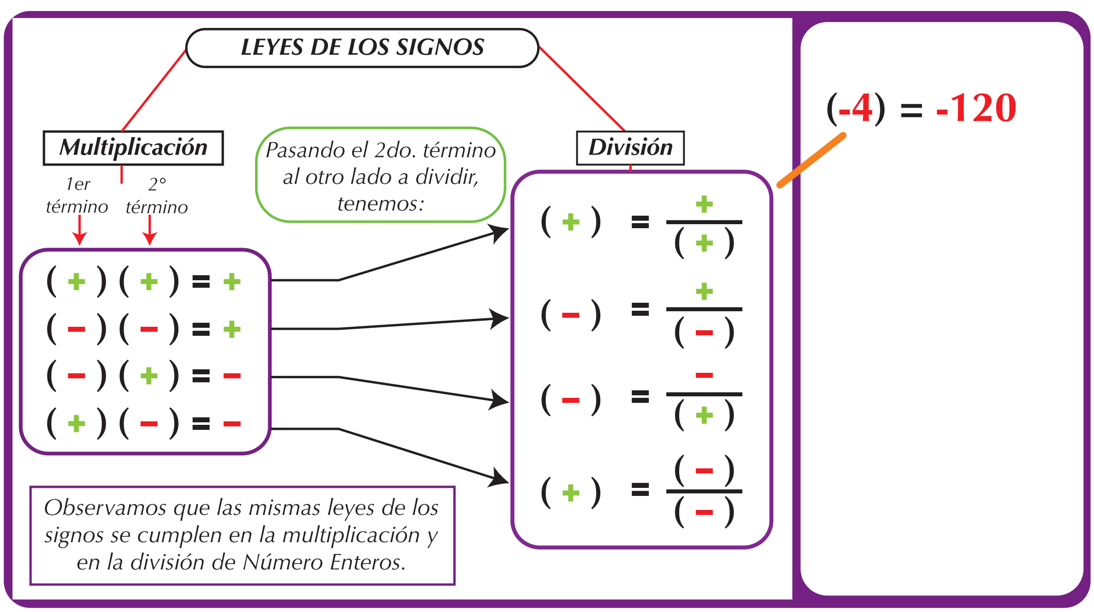
Recordemos que la operación inversa de la multiplicación es la división.

1.	24 ÷ 6 = 4, porque (4)(6) = 24
2.	(-24) ÷ (-6) = 4, porque (4)(-6) = -24
3.	24 ÷ (-6) = -4, porque (-4)(-6) = 24
4.	(-24) ÷ 6 = -4, porque (-4)(6) = -24

Observa los ejercicios siguientes:

1.	21 ÷ 7 = 3	**porque**	(3) (7) = 21
2.	(-21) ÷ (-7) = 3	**porque**	(3) (-7) = -21
3.	(21) ÷ (-7) = -3	**porque**	(-3) (-7) = 21
4.	(-21) ÷ (7) = -3	**porque**	(-3) (7) = 21

Con base en la tabla de las leyes de los signos de la multiplicación, podemos deducir la tabla de las leyes de los signos para la división así:



En la multiplicación y en la división de números enteros se cumple: signos iguales dan + (más) y signos contrarios dan – (menos).

Los paréntesis y su uso. Jerarquía de operaciones

Una correcta solución al obtener el resultado de un problema en donde se combinan las operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación) requiere del establecimiento de un orden en dichas operaciones. Ejemplos:

1. El sueldo diario de un obrero que trabajó de lunes a vienes fue de $25,000. Gastó esa semana en comida $20,000 y en pasajes $10,000, además le pagaron $45,000 que le adeudaban. ¿Cuánto dinero le quedó al final de esa semana?

Solución

La expresión 25,000 x 5 – 20,000 – 10,000 + 45,000 indica las operaciones que se necesitan para obtener el resultado correcto. ¿Cómo se debe calcular el resultado de esta expresión para que responda a la pregunta del problema?

Para evitar confusiones en el momento de realizar el cálculo de las operaciones, se debe llevar un orden al operar.

- **Primero:** Toda cifra debe estar agrupada con un signo.
- **Segundo:** Se debe potenciar y radicar en orden, de izquierda a derecha.
- **Tercero:** Hay que dividir o multiplicar en orden, de izquierda a derecha.
- **Cuarto:** Debe sumarse o restarse en orden, de izquierda a derecha.

Por tanto, primero se debe hacer la multiplicación, luego las restas y por último la suma:

$$(25,000 \times 5) - 20,000 - 10,000 + 45,000$$
$$125,000 - 20,000 - 10,000 + 45,000$$
$$105,000 - 10,000 + 45,000$$
$$95,000 + 45,000$$
$$140,000$$

2. Efectuar 8 + 6 ÷ 2 – 3 x 2 – 2

   a. Se efectúa primero la división y la multiplicación, de izquierda a derecha.
   b. Se realizan luego las sumas y las restas, de izquierda a derecha y se tiene:

8 + 6 ÷ 2 - 3 x 2 - 2

8 + 3 -6 -2

11 -6 -2

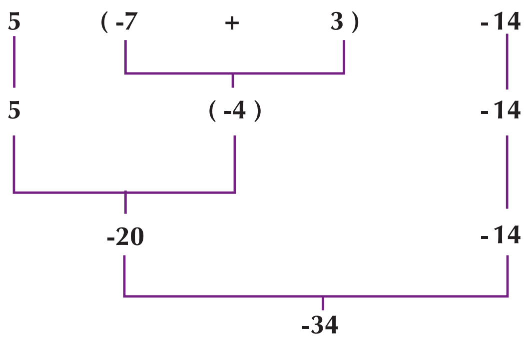
5 -2

3

Por lo tanto, la solución a la expresión es = 3.

3. Efectuar 5 (–7 + 3) – 14.
Cuando una expresión tiene operaciones indicadas dentro de un paréntesis, se procede a resolverla de la siguiente forma:

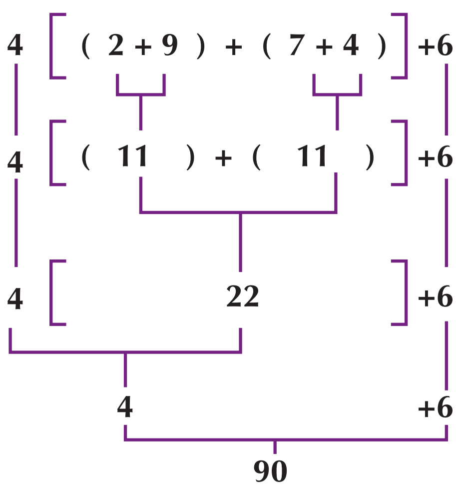
1. Se resuelven los elementos contenidos dentro del paréntesis.
2. Se resuelve la multiplicación.
3. Se resuelve la resta.



En el caso de que existan dos o más paréntesis, entonces se empieza de adentro hacia afuera.

4. $4[\![(2+9)\ +\ (7+4)]\!]+6$

1. Se resuelven primero los paréntesis:



Así, la solución a la expresión
$4[\![(2+9)\ +\ (7+4)]\!]+6$ es 90,
porque

$4[(2 + 9) + (7 + 4)] + 6 = 4(11+11) + 6 = 4(22) + 6 = 90$

Se concluye, entonces, que en toda expresión matemática se deben jerarquizar las operaciones que involucra, para poder llegar al resultado correcto.

La jerarquización de las operaciones señaladas se indica mediante el uso de paréntesis en las expresiones.

Aplicación

Trabaja en equipo, discute y resuelve los ejercicios que a continuación se presentan:

1. Calcula mentalmente el valor del $\square$ en cada igualdad:

   a. ($\square$ - 5)(5) = -100
   b. (3) + ($\square$)(-5) = 10
   c. (- 8)($\square$) = -32
   d. (18) ÷ (-9) = $\square$
   e. (-30) ÷ (-5) = $\square$

2. Expresa el número entero **-16** de tal manera que:

   a. **-16** sea el producto de dos números enteros. (Considera todos lo casos posibles).
   b. **-16** sea el cociente de dos enteros. (Considera todos lo casos posibles).

3. Completa cada cuadro, haciendo los cálculos mentalmente de la suma de un valor horizontal con un valor vertical: así por ejemplo, en la tabla 3, la suma de 12 y 3 da 15 y en la tabla 4, la suma de –8 y –9 da –17.

   a.

x	11	5	3	10
4				
9				
7				
12			15	
1				

b.

x	-9	-4	-6	-20
-5				
-8	-17			
-1				
-15				
-2				

4. Un estanque se está desocupando a razón de 6 litros en cada hora. ¿Cuántos litros menos tendrá el estanque después de 5 horas?

5. Hay algunos países que tienen las 4 estaciones: primavera, invierno, otoño y verano. Por ejemplo, un día de otoño, cuando la naturaleza verde pareció haberse secado, la temperatura en París, capital de la República de Francia, fue de –2°C a las 8:00 a.m. Al anochecer, en la televisión se informó que hacía el triple de frío que en la mañana, ¿qué temperatura marcó el termómetro en la noche?

Resuelve:

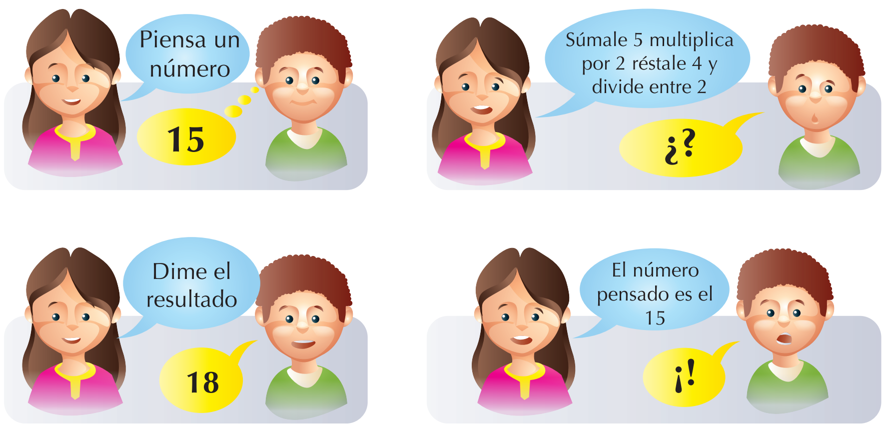
6. $[(40 \div 4) - (14 \div 2)] + (8 \div 2) =$
7. $[(9 \times 4) \div 6 - (4 \times 2)] =$
8. $(8 \times 3) \div (6 \times 4) =$
9. $(6 \times 3) + [4 - 3 \times 2 + (4 \div 2)]\ (54 \div 3) + (2 \times 3) =$
10. $2(70 - 25) + [(3 \times 8 - 10) - (9 \div 3 \times 2)] - (20 \times 5 \div 2) =$

Entendemos por…

Operador aquel símbolo matemático que nos indica que una operación debe llevarse a cabo

Diversión matemática

Piensa un número que yo te lo adivino:



Descubre el truco y adivina ese número pensado.
¿Cómo es posible que con este resultado se adivine el número pensado?
Practica el truco con tus compañeros.relacionado con el tema.

Día a día

Cómo elaborar un balance personal

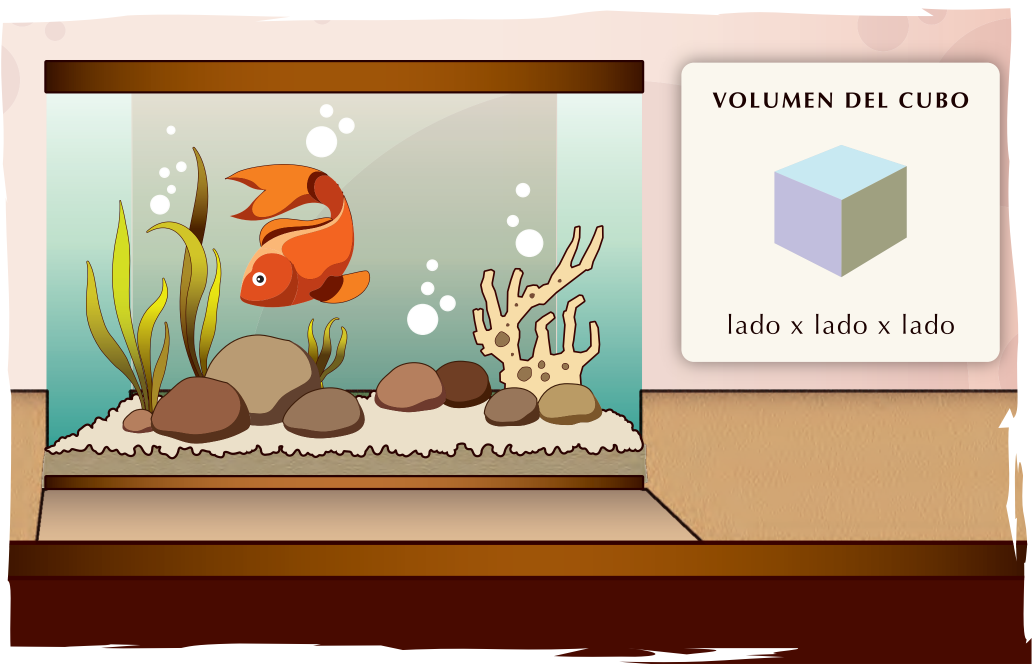
Un balance personal es un documento en el que se detallan los activos, los pasivos y el patrimonio que posee una persona en un determinado momento. Un balance personal le permite a una persona conocer y analizar su situación financiera para tomar decisiones. Los activos son objetos de valor como joyas y cuadros, muebles, electrodomésticos, equipos de sonido, videos; vehículos como un automóvil y una motocicleta; fincas raíces como una casa, un apartamento, una finca, terrenos; ahorros, títulos valores, entre otros.
Los pasivos son, por ejemplo, tarjetas de crédito (saldo pendiente), préstamos personales que se hayan adquirido, saldos por pagar de créditos adquiridos por vehículo, casa, finca u otro bien, etc.
Para conocer el valor de nuestro patrimonio, restamos al total de activos el total de pasivos.

Tomado de: http://www.crecenegocios.com/como-elaborar-un-balance-personal/Enlaces patrocinados

Realiza tu balance al día de hoy.

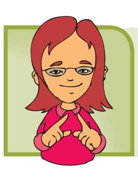
Tema 5.
Potenciación y radicación de números enteros

Indagación



La potenciación de números naturales permite encontrar el volumen de un acuario como el de la figura.

El acuario tiene forma de cubo de lado 80 cm, ¿cuál crees que es el volumen?



Conceptualización

Un edificio tiene 4 plantas (pisos) y en cada planta hay 4 apartamentos y en cada apartamento hay 4 alcobas.

¿Cuántos apartamentos y cuántas alcobas tiene el edificio?

Solución

Si cada planta o piso tiene 4 apartamentos, entonces las 4 plantas tendrán 4 x 4 que es igual que decir 4^2.

Entonces, $4 \times 4 = 4^2 = 16$. El edificio tiene 16 apartamentos.

Como cada apartamento tiene 4 alcobas, entonces, en el edificio hay en total 16 x 4 que es igual que decir $(4 \times 4) \times 4 = 4^3 = 16 \times 4 = 64$.

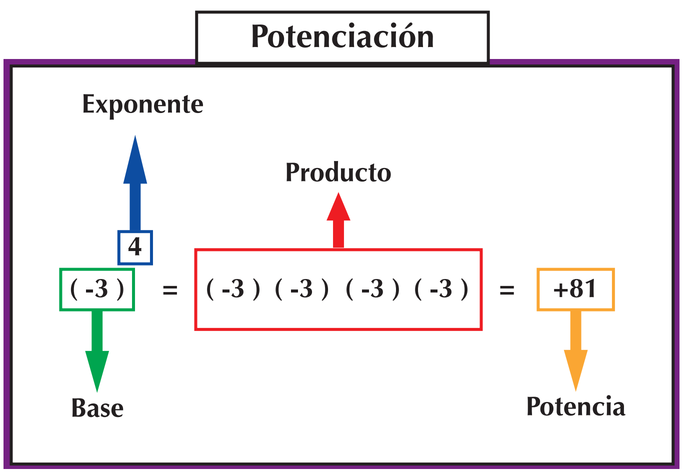
Por tanto, el edificio tiene un total de 64 alcobas.

En resumen:

Plantas o pisos	Apartamentos	Operación multiplicación	Operación pontenciación	Total apartamentos
4	**4**	**4 x 4**	4^2	**16**

Plantas o pisos	Apartamentos por piso	Alcobas por apartamento	Operación multiplicación	Operación potenciación	Total alcobas
4	**4**	**4**	**4 x 4 x 4**	4^3	**64**

Observa el recuadro siguiente:



Observa el desarrollo de las potencias de base negativa y de exponente positivo:

- $(-3)^1 = -3$ → el resultado es un número negativo.
- $(-3)^2 = -3 \times -3 = 9$ → el resultado es un número positivo.
- $(-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27$ → el resultado es un número negativo.
- $(-3)^4 = -3 \times -3 \times -3 \times -3 = 81$ → el resultado es un número positivo.
- $(-3)^5 = -3 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 = -243$ → el resultado es un número negativo.
- $(-3)^6 = -3 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 \times -3 = 729$ → el resultado es un número positivo.

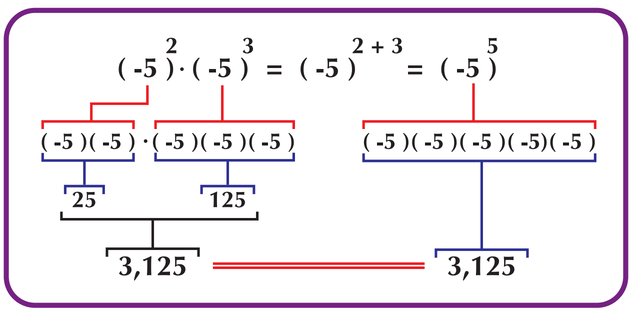
Sabemos que la base de la potencia es negativa: -3

- Cuando -3 se eleva a 1, 3 o 5 (enteros positivos impares), el resultado es un número negativo.
- Cuando -3 se eleva a 2, 4 o 6 (enteros positivos pares), el resultado es un número positivo.

Dada una potencia: Si su base es negativa y su exponente es impar, el resultado es negativo. Si su base es positiva y su exponente es par, el resultado es positivo.

Multiplicación de potencias de igual base

Analicemos el ejercicio: $(-5)^2$ y $(-5)^3$ son dos potencias de base (-5), entonces:



Si dos potencias tienen su base igual y se multiplican, su resultado tiene la misma base y su exponente es la suma de los exponentes de las potencias que se multiplican.

División de potencias de igual base

Como la división es la operación contraria de la multiplicación, si para multiplicar potencias de igual base se suman los exponentes, entonces para dividir potencias de igual base ¿qué crees que se hará?

Veamos:
Queremos realizar la operación
$(+7)^3 \div (+7)^2$

Una marera de realizarla es la siguiente:

$$(+7)(+7)(+7) \div (+7)(+7) = (+343) \div (+49) = (+7)$$

Otra manera de resolverla:

$$(+7)^3 \div (+7)^2 = \frac{(+7)^3}{(+7)^2} = \frac{\cancel{(+7)}\cancel{(+7)}(+7)}{\cancel{(+7)}\cancel{(+7)}} = +7$$

Ahora, así como para multiplicar dos potencias de igual base, se escribe la misma base y se suman los exponentes, para dividir dos potencias de igual base, se escribe la misma base y se restan los exponentes.

$$(+7)^3 \div (+7)^2 = \frac{(+7)^3}{(+7)^2} = (+7)^{3-2} = (+7)^1 = +7$$

Si dos potencias tienen su base igual y se dividen, su resultado tiene la misma base y su exponente es la resta de los exponentes de las potencias que se dividen.

Un caso especial es cuando las dos potencias que se dividen tienen el mismo exponente, por ejemplo:
Sabemos que

$$\frac{2^5}{2^5} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{32}{32} = 1$$

Aplicando la propiedad de la división de potencias de igual base, tenemos

$$\frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0$$

Como $\frac{2^5}{2^5} = \frac{32}{32} = 1$ y $\frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0$,

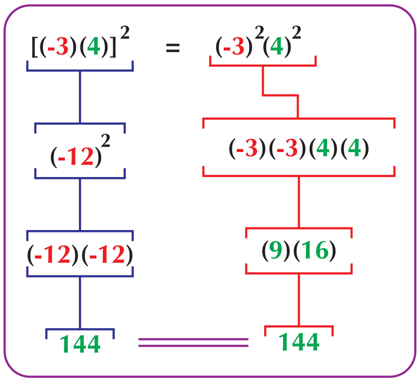
entonces, por la propiedad transitiva de la igualdad podemos escribir:

Si $\frac{2^5}{2^5} = 1$ y $\frac{2^5}{2^5} = 2^0$, concluimos que $1 = 2^0$, es decir, $2^0 = 1$.

Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación

Realicemos: $(-3 \times 4)^2$

Observa que desarrollando hacia abajo el lado izquierdo de la igualdad, da el mismo resultado que desarrollando su lado derecho:



Concluimos que si $[(-3)(4)]^2 = 144$ y $(-3)^2\,(4)^2 = 144$, entonces, $[(-3)(4)]^2 = (-3)^2\,(4)^2$ por la propiedad transitiva de la igualdad. Por tanto, dos términos que son iguales a un tercero son iguales entre sí.

La potencia del producto de dos números es igual al producto de las potencias de los factores.

Propiedad recolectiva de la potenciación con respecto a la multiplicación

Calculemos:

$$(-2)^3 \times 5^3 = (-2 \times -2 \times -2) \times (5 \times 5 \times 5) = -8 \times 125 = -1{,}000$$

Resolviendo de otra manera:

$$(-2)^3 \times 5^3 = (-2 \times 5)^3 = (-10)^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1{,}000$$

La propiedad recolectiva, entonces, permite el efecto contrario de la propiedad distributiva: notamos que los dos factores están elevados al mismo exponente.

Propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la división

Igual que la potenciación se distribuye con respecto a la multiplicación, también lo hace con respecto a la división.

Calculemos la potencia de la división $\left(\frac{-10}{-5}\right)^2$

Una manera de calcularla es resolviendo la división y elevándola al cuadrado:

$$\left(\frac{-10}{-5}\right)^2 = (2)^2 = 4$$

Otra manera es asignando el exponente a cada miembro de la división y resolviendo cada potencia:

$$\left(\frac{-10}{-5}\right) = \frac{(-10)^2}{(-5)^2} = \frac{(10) \times (10)}{(5) \times (5)} = \frac{100}{25} = 4$$

Como de la primera manera nos dio 4 y de la segunda también nos dio 4, entonces, podemos concluir que

$$\left(\frac{-10}{-5}\right) = \frac{(-10)^2}{(-5)^2}$$

La potencia de la división de dos números es igual a la división de las potencias de los dos números que se dividen.

Propiedad recolectiva de la potenciación con respecto a la división

Calculemos: $\frac{4}{(-2)^2} = \frac{4 \times 4}{(-2) \times (-2)} = \frac{16}{4} = 4$

De otra forma tenemos:

$$\frac{4}{(-2)^2} = \left(\frac{4}{-2}\right) = (-2)^2 = (-2)\,(-2) = 4$$

La propiedad recolectiva permite el efecto contrario de la propiedad distributiva, pues notamos que los dos números que se dividen están elevados al mismo exponente.

Potencia de una potencia

Calculemos: $[(-2)^2]^3$

Podemos resolverlo así:

$[(-2)^2]^3 = [(-2)(-2)]^3 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

O también: $[(-2)^2]^3 = (-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64$

La potencia de otra potencia es igual al resultado de elevar la base al producto de los exponentes.

Radicación

Hemos visto que las partes de la potenciación son:

$$\text{Base}^{\text{Exponente}} = \text{Potencia}$$

Ahora, ¿cómo encontrar la base si tenemos los otros términos?
Es decir:

$$?^{\text{Exponente}} = \text{Potencia}$$

Analicemos el ejercicio siguiente:

$$\square^{3} = 8$$

¿Cuál es el número que elevado al cubo (a la 3) da 8?

Para encontrarlo, utilizamos la operación llamada **radicación**.

La radicación es una de las operaciones inversas de la potenciación.

Es la operación que permite encontrar la base de una potencia.

Índice Raíz

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

Cantidad Subradical

porque **(-2) (-2) (-2) = -8**, es decir, $(-2)^3 = -8$

Concluimos que -2 es el número que elevado al cubo (a la 3) da como resultado -8, porque (-2)(-2)(-2) = -8.

Ahora, estudiemos la siguiente situación:

Felipe, Claudia y Fernando desean hacerle llegar 2,187 mensajes electrónicos de felicitación en los próximos 7 días de la semana a Diana, por haber hecho el mejor récord en la categoría juvenil de mujeres, en el mundial de patinaje realizado en la ciudad de Cali.

Para lograr este objetivo, Felipe, Claudia y Fernando deben conseguirse un número de amigos, que a su vez, cada día, consigan ese mismo número de amigos formando así una red de amigos.

Verifica que cada persona consiga 3 amigos que feliciten a Diana.

El dibujo siguiente ilustra la situación:

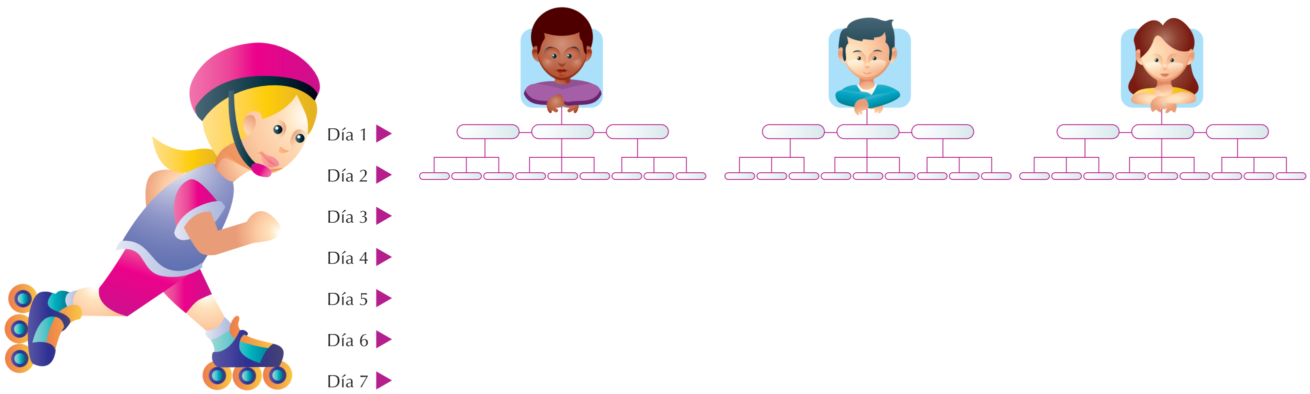


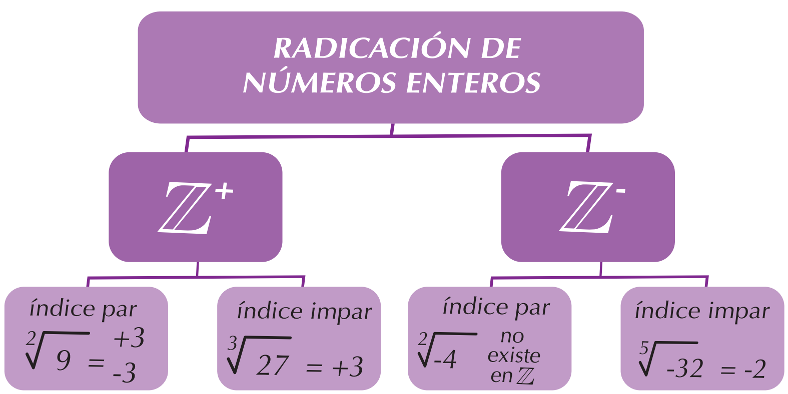
Ilustración 6. Red de amigos

Como cada persona debe conseguirse otras 3 personas para que la red alcance el objetivo, entonces tenemos:

- El 1.er día, cada uno de los 3 (Felipe, Claudia y Fernando) consiguió 3 amigos, es decir, (3)(3), esto es: 3^2
- El 2.º día cada uno de los 9 amigos consiguió otros 3, o sea, (9)(3), esto es $(3^2)(3) = 3^3$
- El 4.º día correspondió a 3^3 del día anterior por 3, es decir, $(3^3)(3) = 3^4$
- El 5.º día van $(3^4)(3) = 3^5$ mensajes.
- El 6.º día van $(3^5)(3) = 3^6$ mensajes.
- El 7.º día van $(3^6)(3) = 3^7$ mensajes.

Veamos a cuánto es igual 3^7. Si realizas las multiplicaciones correspondientes a $3^7 = (3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)$, verás que el resultado es 2,187. Luego puede afirmarse que $\sqrt[7]{2{,}187} = 3$.

A continuación, encuentras los casos de radicación de números enteros:

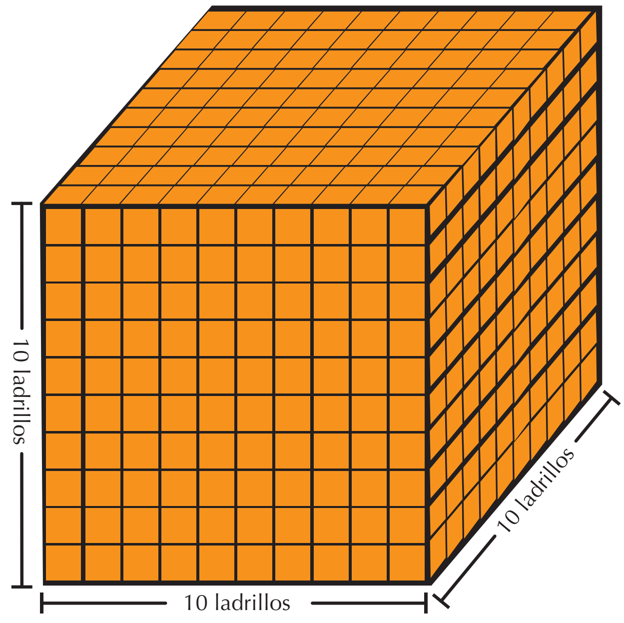


Aplicación

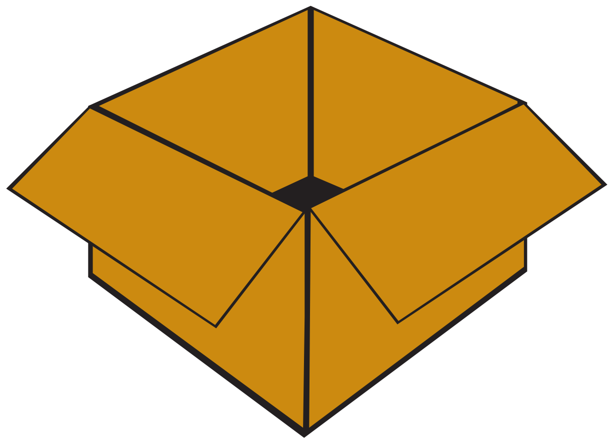
Copia los ejercicios siguientes en tu cuaderno, resuélvelos de manera individual y luego compara los resultados que has obtenido con algunos de tus compañeros.

Escribe numéricamente las siguientes expresiones:

1. El cubo de tres es igual a tres, por tres, por tres.
2. El cuadrado de menos quince es igual a menos quince por menos quince.
3. La raíz cuadrada de diez mil es igual a cien.
4. La raíz cuadrada de ciento treinta y nueve es trece.
5. Una columna de forma cúbica tiene 10 ladrillos de ancho, 10 ladrillos de largo y 10 ladrillos de alto. ¿Cuántos ladrillos se necesitaron para formar la columna?



6. Sabiendo que el volumen de una caja se calcula multiplicando el largo por el ancho y por el alto, encuentra el volumen de una caja de cartón que mide 70 cm de ancho, 70 cm de largo y 70 cm de alto.



Aplica las propiedades de la potenciación para calcular el valor de cada expresión:

Expresión	Aplicación de las propiedades	Nombre de las propiedades aplicadas	Resultado
7. $(5)x(5)x(5)x(5)x(5)$			
8. 9^3x9^2			
9. $(6^5)^4$			
10. $6^5 \div 6^3$			

Entendemos por…

Operación inversa al proceso contrario de una operación realizada. Por ejemplo, la operación suma es inversa a la operación resta y la operación división es inversa a la operación multiplicación.

Diversión matemática

¡Cómo calcular cuadrados rápidamente!

Una forma rápida de calcular el cuadrado de 15 es la siguiente:

Por ejemplo, la decena de 15 es 1.

La decena siguiente a 1 es 2.

La multiplicación de las dos decenas es 1 x 2 = **2**.

A este producto se le añade el número **25**,

entonces 15^2 = **225**.

Diviértete con tus compañeros calculando rápidamente y sin calculadora los cuadrados de números de dos cifras terminados en 5.

Día a día

Reproducción de una bacteria

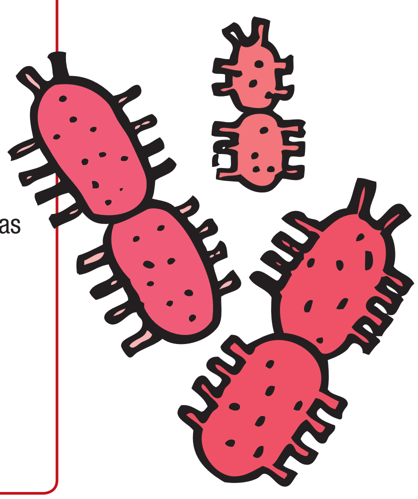
La reproducción de las bacterias, generalmente, se hace al dividirse en dos la célula madre, dando lugar a dos células hijas y estas dos hijas se dividen en 2 cada una, y así sucesivamente.

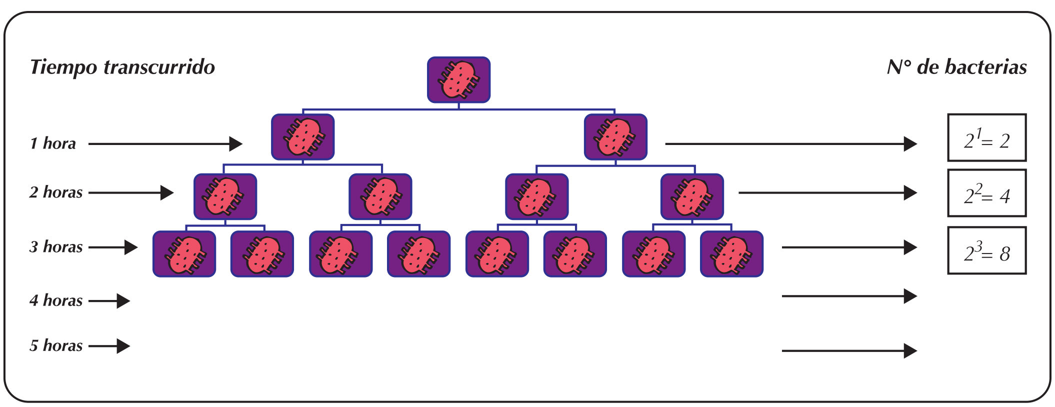
Si sembramos una cantidad de bacterias llamada *salmonella typhimurium*, causante de las intoxicaciones alimenticias, veremos que a cada hora se duplicará.

Es decir, a cada hora una sola bacteria se convertirá en dos bacterias de idénticas características que la original.

Es decir, a cada hora una sola bacteria se convertirá en dos bacterias de idénticas características que la original.

Completa la tabla en tu cuaderno.

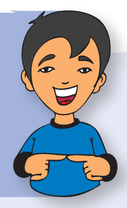




Este capítulo fue clave porque

- Aprendí la importancia de los números enteros.
- Ahora identifico los números positivos y los números negativos.
- Puedo relacionar los números enteros con situaciones de la vida cotidiana.
- Sé identificar el valor absoluto de un número entero.
- Sé ordenar números racionales positivos.
- Realizo operaciones combinadas con números racionales positivos.
- Soy capaz de solucionar problemas que requieran de las operaciones entre números enteros.

Conectémonos con la Geografía

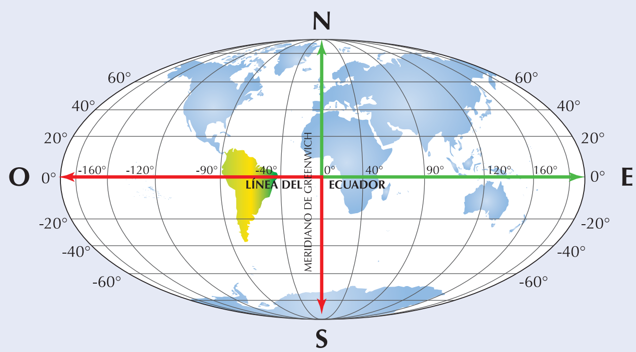


Las coordenadas geográficas y los números enteros

La longitud y la latitud son las coordenadas más importantes para localizar cualquier punto sobre la superficie terrestre, por ejemplo una ciudad, un pueblo o un monte.

La latitud es la medida en grados que hay de un lugar cualquiera a la línea del Ecuador y puede ser norte o sur. Las latitudes al norte se relacionan con los enteros positivos y las latitudes al sur, con los enteros negativos.

En cuanto a la longitud, esta también se mide en grados a partir del meridiano de Greenwich, llamado también meridiano cero y puede ser longitud este (oriente) u oeste (occidente).



La longitud este se relaciona con los enteros positivos y la oeste con los enteros negativos.

En el mapamundi se puede observar que la península de La Guajira (Colombia) se localiza en el punto aproximado de -71° de longitud y 12° de latitud.

Esto es, se localiza al oeste del meridiano de Greenwich y al norte de la línea del Ecuador.

¿Puedes encontrar, aproximadamente, las coordenadas geográficas de Colombia?

Discútelo con tus compañeros.

Capítulo 2

Los números racionales positivos ($\mathbb{Q}^+$)

Una vez, en un salón de la escuela, se escuchó el siguiente diálogo entre Luisa y José:

Luisa dijo: “Hola José buenos días, hoy llegué un cuarto de hora antes de la clase”.

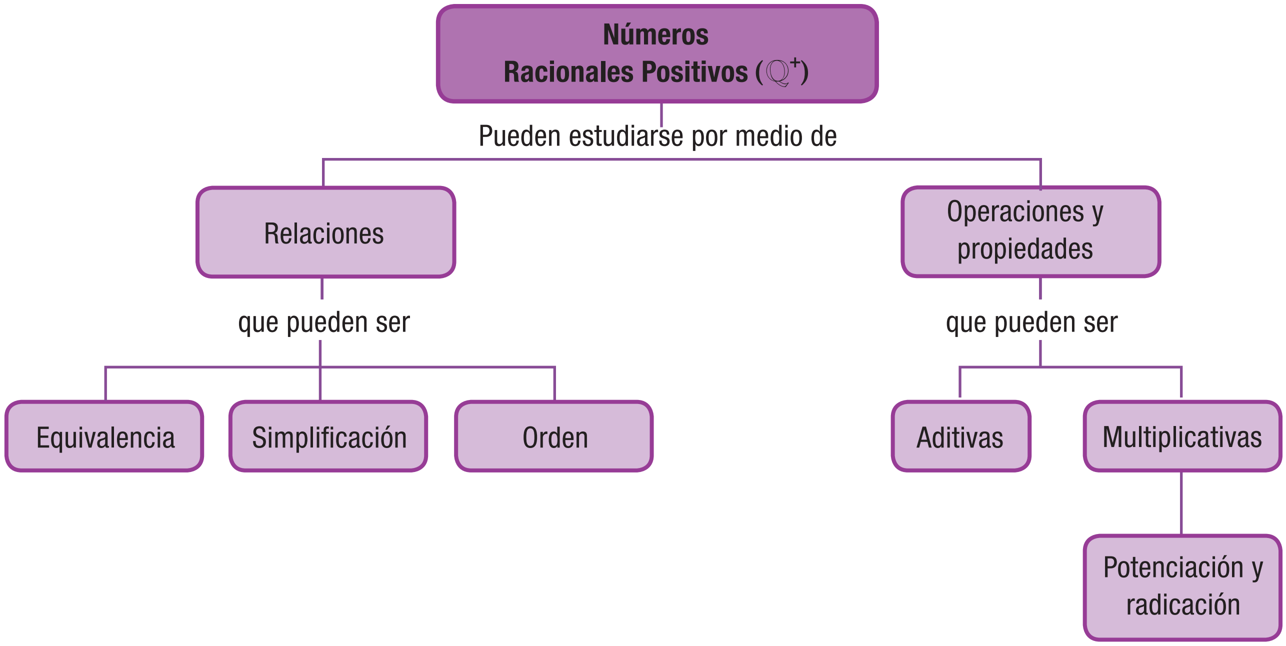
José respondió: “Buenos días Luisa, hoy yo te gané, porque llegué a la clase media hora antes”. “Un cuarto” o “media” a los que se refieren Luisa y José son parte de la hora.

Si la clase era a las 7 a.m., preguntémonos: ¿a qué hora llegó cada uno?

Pues Luisa llegó faltando $\frac{1}{4}$ para las 7 de la mañana y José llegó a las 6 y $\frac{1}{2}$ de la mañana.

Diálogos como el anterior, en el que se nombran números racionales positivos, son frecuentes en nuestra vida cotidiana. Piensa en otros ejemplos de la vida diaria en los que se usen números racionales positivos.

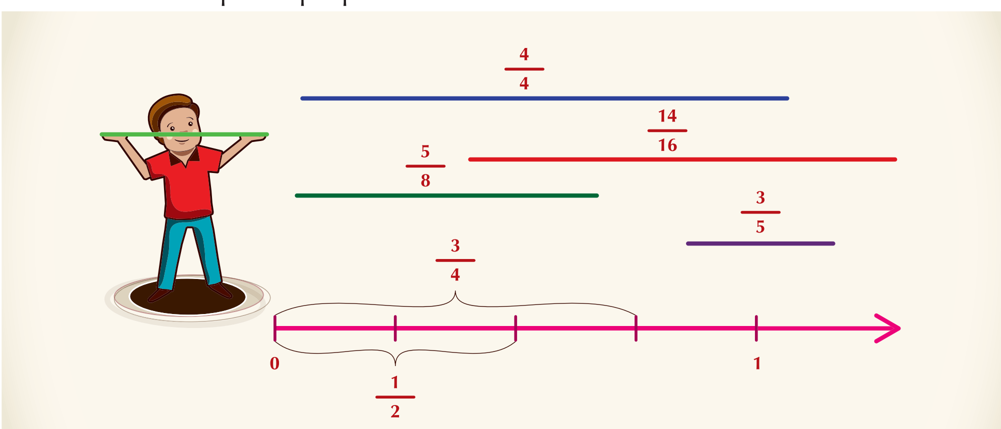
Históricamente, el ser humano ha medido el tiempo valiéndose de la naturaleza o de instrumentos rudimentarios. Es conocido desde el reloj de sol o el reloj de arena hasta sofisticados relojes electrónicos de alta precisión.



Tema 1. Relaciones de equivalencia y orden en los números racionales positivos ($\mathbb{Q}^+$)

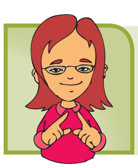
Indagación

Copia en tu cuaderno la situación siguiente y realiza la actividad que se propone:



En el recuadro anterior, Leonidas compara diferentes segmentos sobre la recta numérica.

Ayúdale, trasladando, sobre la recta numérica el segmento del número racional positivo, cuya longitud se encuentra entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.



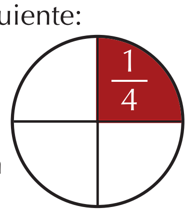
Conceptualización

Equivalencia en los números racionales

Un número racional positivo puede escribirse de varias maneras y cada una de ellas representa la misma porción o parte de la unidad.

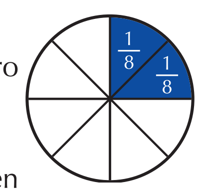
Vamos a analizar el ejemplo siguiente:

Tomamos un círculo como 1 unidad y sombreamos en él $\frac{1}{4}$.



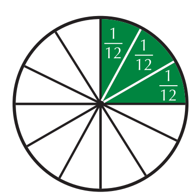
Para ello, dividimos la unidad en 4 partes y tomamos 1.

Tomamos la misma unidad, pero ahora sombreamos en ella $\frac{2}{8}$.



Para ello, dividimos la unidad en 8 partes y tomamos 2.

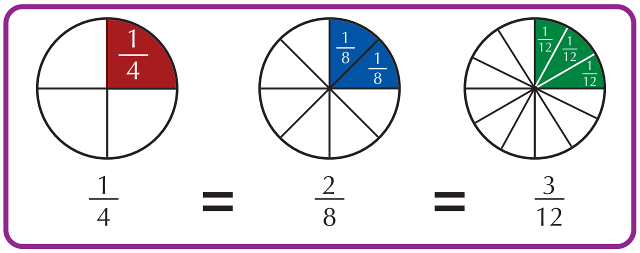
Nuevamente tomamos la unidad, pero sombreamos en ella $\frac{3}{12}$.



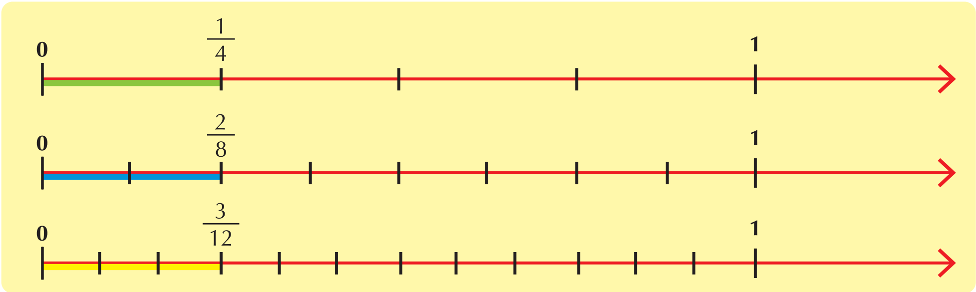
Para ello, dividimos la unidad en 12 partes y tomamos 3.

Si observas detenidamente, verás que el total de las partes sombreadas, en cada círculo, es igual para los tres números racionales.

Esto es:



Otra forma es representarlos en la recta numérica:



A los números racionales $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{12}$, se les conoce como números **racionales positivos equivalentes**, porque $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$.

Para obtener números racionales equivalentes a un número racional dado, tanto el numerador como el denominador se multiplican por el mismo número natural (amplificación) o se dividen por el mismo número natural (simplificación) diferente de 0.

En el ejemplo que analizamos, a $\frac{1}{4}$ lo hemos amplificado por 2, esto es $\frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$.

Luego, a $\frac{1}{4}$ lo amplificamos por 3 y queda así: $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$.

Si a $\frac{1}{4}$ lo amplificamos por 4, obtenemos $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 4}{4 \times 4} = \frac{4}{16}$.

Y así podríamos amplificar a $\frac{1}{4}$ por el número natural que quisiéramos y nos resultará siempre racionales positivos equivalentes a $\frac{1}{4}$.

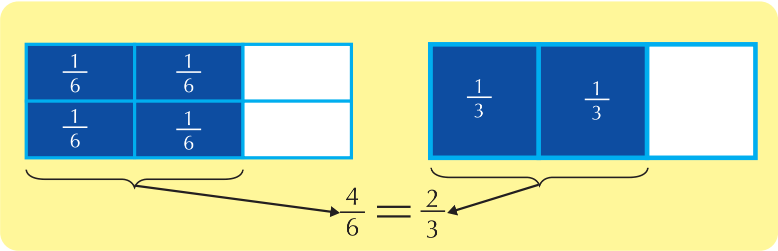
Los números racionales equivalentes representan la misma cantidad.

Por lo tanto, podemos decir que en este caso $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{13} = \frac{4}{16} = \ldots$

Simplificación de números racionales positivos

Al reducir un número racional a su expresión más simple, lo que en realidad se hace es obtener un nombre diferente para el mismo número.

Considérese la figura siguiente:



En la figura se aprecia que la parte pintada de azul para representar a $\frac{2}{3}$ es del mismo tamaño que la parte pintada de azul para representar a $\frac{4}{6}$, por lo cual se puede afirmar que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

De igual manera podemos simplificar a $\frac{4}{6}$ y nos resultará así: $\frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$.

Para simplificar un número racional, se divide tanto el numerador como el denominador entre un mismo número natural distinto de cero.

Cuando el numerador y el denominador de un número racional se pueden dividir entre un mismo número natural distinto de 0, el racional se puede simplificar. En ese caso, se dice que el racional es reducible.

Pero, cuando el numerador y el denominador de un número racional no se pueden dividir entre un mismo número natural distinto de 0, el racional no se puede simplificar. En ese caso, se dice que el racional es irreducible.

Comparación de números racionales positivos

La comparación de números racionales positivos la podemos hacer de varias maneras:

Por amplificación o por simplificación.

Dados los números racionales $\frac{4}{5}$ y $\frac{3}{4}$, ¿son equivalentes o hay uno mayor que el otro?

Para saberlo, los expresamos con un denominador igual (común denominador). En este caso, ambos racionales pueden expresarse con denominador 20.

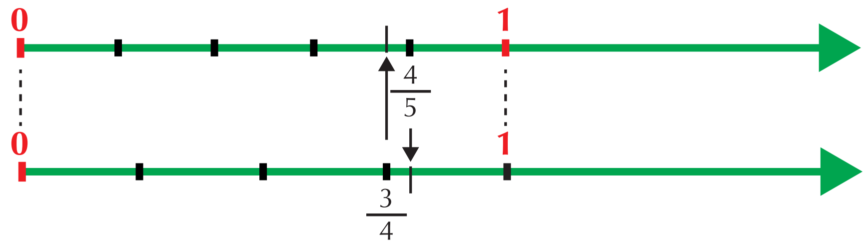
Si amplificamos por 4 el racional $\frac{4}{5}$ y amplificamos por 5 el racional $\frac{3}{4}$, ambos racionales quedan con denominador 20.

Pero, ¿serán iguales?

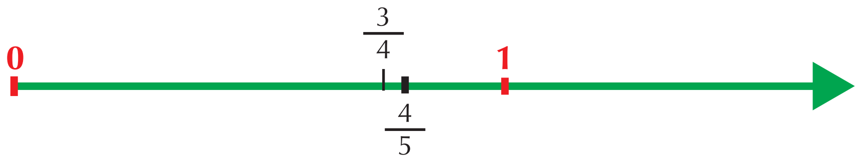
Veamos: $\frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \frac{16}{20}$ $\frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$, entonces, $\frac{16}{20}$ y $\frac{15}{20}$ no son iguales, luego no son equivalentes, por lo tanto uno de ellos es mayor que el otro, en este caso $\frac{16}{20} > \frac{15}{20}$ (se lee $\frac{16}{20}$ es mayor que $\frac{15}{20}$).

Si $\frac{16}{20} > \frac{15}{20}$, entonces, podemos afirmar que $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$, puesto que $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$ y $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$.

Ubicando cada racional en una recta numérica, tenemos lo siguiente:



Fusionando las dos rectas (una sobre la otra), nos queda así:



En la recta numérica, $\frac{3}{4}$ está a la izquierda de $\frac{4}{5}$ y significa que $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ (se lee $\frac{3}{4}$ es menor que $\frac{4}{5}$).

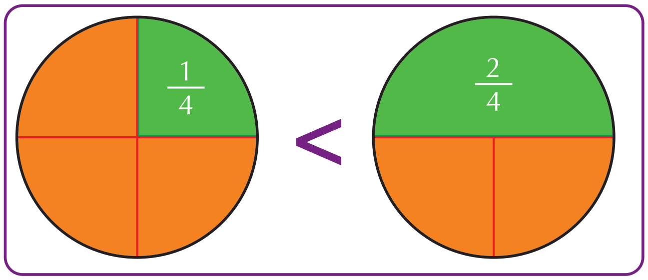
O también: en la recta numérica, $\frac{4}{5}$ está a la derecha de $\frac{3}{4}$, por lo tanto $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$ (se lee: $\frac{4}{5}$ es mayor que $\frac{3}{4}$).

Comparación de números racionales

Durante nuestra vida, hacemos numerosas comparaciones.

Comparamos personas, estaturas, colores, edades, cosas, animales, números, etcétera.

Comparemos dos números racionales:



a. Las partes de color verde corresponden a los racionales que comparamos. Obsérvalas detenidamente.

Fíjate que en ambos racionales el denominador es 4.

Entonces, según la representación, $\frac{1}{4}$ es menor que $\frac{2}{4}$.

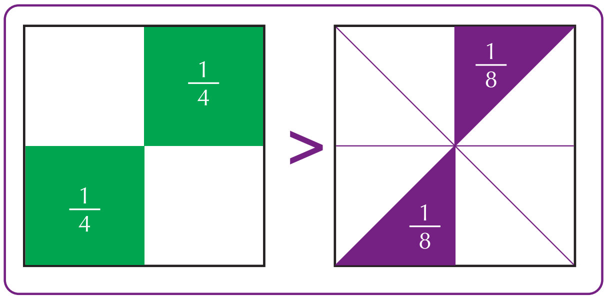
Simbólicamente se escribe $\frac{1}{4} < \frac{2}{4}$.

En general:

De dos racionales que tengan igual denominador, es menor el que tenga menor numerador.

b. ¿Cómo saber si un racional es menor o mayor que otro, si tienen diferentes denominadores?

Por ejemplo: Dados los racionales $\frac{2}{4}$ y $\frac{2}{8}$, ¿cuál es mayor?



Copia el dibujo anterior en tu cuaderno y escribe cómo harías para saber que $\frac{2}{4}$ es mayor que $\frac{2}{8}$.

Puedes trasladar una región coloreada al lado de la otra para que visualices mejor.

Ahora, para compararlos numéricamente, expresamos los dos racionales con igual denominador (común denominador); podemos hacerlo de varias maneras:

Una puede ser simplificando $\frac{2}{8}$, esto es, $\frac{2 \div 2}{8 \div 2} = \frac{1}{4}$. Luego, $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Comparar a $\frac{2}{4}$ con $\frac{2}{8}$ es igual que comparar a $\frac{2}{4}$ con $\frac{1}{4}$, por lo que diremos que $\frac{2}{4}$ es mayor que $\frac{1}{4}$; simbólicamente: $\frac{2}{4} > \frac{1}{4}$ y como $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, entonces, $\frac{2}{4} > \frac{2}{8}$.

Otra manera es amplificando por 2 el racional $\frac{2}{4}$, así: $\frac{2 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4}{8}$.

Entonces comparar $\frac{2}{4}$ con $\frac{2}{8}$ es lo mismo que comparar $\frac{4}{8}$ con $\frac{2}{8}$ y como $\frac{4}{8} > \frac{2}{8}$, podemos decir que $\frac{2}{4} > \frac{2}{8}$, ya que $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.

En general:

De dos racionales que tengan igual numerador, es mayor el que tenga menor denominador.

Aplicación

Copia en tu cuaderno los ejercicios siguientes, resuélvelos y compara con algunos de tus compañeros.

Expresa algunos números racionales a un racional dado, completando el cuadro siguiente:

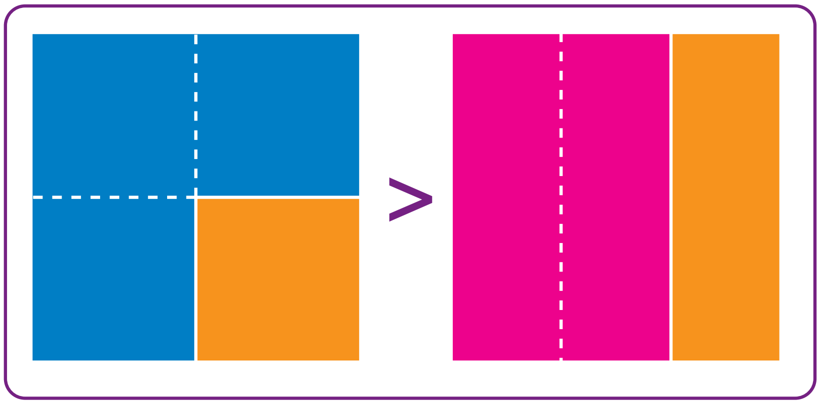
	Racional dado	Racionales equivalentes		
1.	$\frac{2}{5}$	$\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$	$\frac{2 \times 5}{5 \times 5} = \square$	$\frac{2 \times \square}{5 \times \square} = \square$
2.	$\frac{1}{9}$	$\frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \square$	$\frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \square$	$\frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \square$
3.	$\frac{4}{7}$	$\frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \square$	$\frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \square$	$\frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \square$
4.	$\frac{15}{11}$	$\frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \square$	$\frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \square$	$\frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \square$

5. El señor Martínez utiliza una cuarta parte de su sueldo mensual en el mercado, una quinta parte en el arriendo de su casa, dos octavos en transporte y dos décimos en gastos varios. Ayúdalo a escribir esos racionales:

   Mercado _______
   Arriendo _______
   Transporte _______
   Gastos varios _______

6. ¿Cuántos números racionales positivos equivalentes crees que tiene $\frac{1}{4}$? Discútelo con tus compañeros.

7. Verifica numéricamente por amplificación o por simplificación que $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.



8. Amplifica las fracciones siguientes:

   a. $\frac{2}{7}$

   b. $\frac{5}{2}$

   c. $\frac{10}{9}$

   d. $\frac{1}{6}$

9. Simplifica las siguientes fracciones:

   a. $\frac{25}{70}$

   b. $\frac{35}{5}$

   c. $\frac{100}{4}$

   d. $\frac{140}{20}$

10. Busca 6 fracciones equivalentes a cada fracción dada:

   a. $\frac{45}{81}$

   b. $\frac{190}{330}$

Entendemos por…

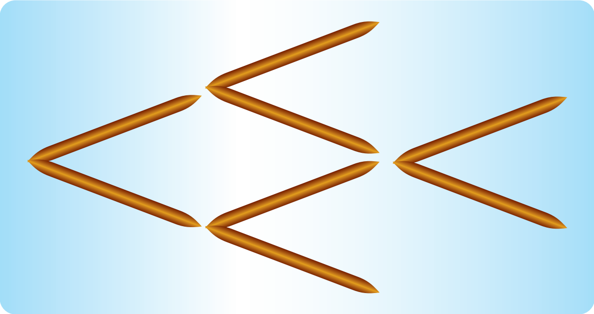
Amplificar el hecho de ampliar o aumentar algo. En matemáticas, por ejemplo, es expresar un racional en múmeros mayores pero la cantidad es la misma.

Simplificar el hacer más sencillo algo. En matemáticas, es llevar a su mínima expresión o llevar un racional a su expresión más simple.

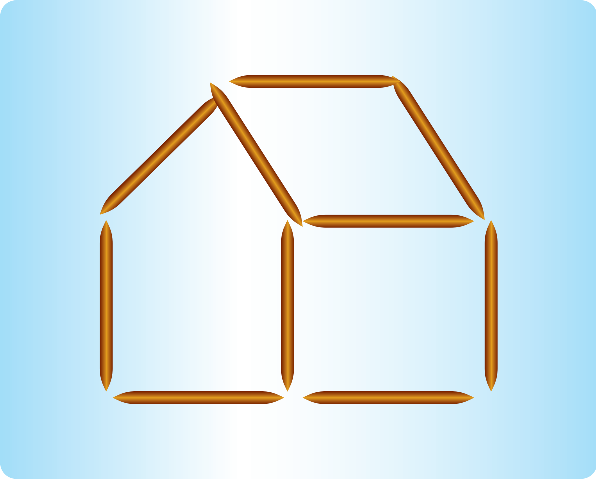
Diversión matemática

Diviértete jugando con palillos

Cambia la posición de 3 palillos, y el pez nadará en sentido contrario.



Cambia la posición de 2 palillos, y verás la casa desde otro costado.



Día a día

La fotocopiadora

La fotocopiadora es un aparato que proporciona instantáneamente copias de cualquier documento. Existen dos tipos principales de fotocopiadoras: las xerográficas que utilizan papel normal y las electrostáticas que requieren un papel sensible especial. La xerografía fue inventada por el norteamericano Chester Carlson, el 22 de octubre de 1938. En 1959, se comercializó la primera fotocopiadora. En las copiadoras electrostáticas, la imagen a reproducir se proyecta directamente sobre el papel, cuya superficie queda sensibilizada con cargas eléctricas.

El papel se somete luego a un baño de toner y las partículas se fijan en las zonas electrizadas de este, dando lugar a la copia definitiva. La fotocopia en color fue creada por la empresa japonesa Cannon, en 1973. La misma empresa logra la fotocopiadora láser en blanco y negro, y posteriormente, en 1986, presenta la primera fotocopiadora láser a color sobre papel común. Antes de que se inventaran las fotocopiadoras, lo común para duplicar un documento era usar papel carbón o papel de calco o de calcar.

Hoy en día, es común encontrar fotocopiadoras no solo muy rápidas, sino que también amplifican o reducen el tamaño de lo que está en el documento, por ejemplo una foto o un dibujo original, además de sacarlo a todo color.

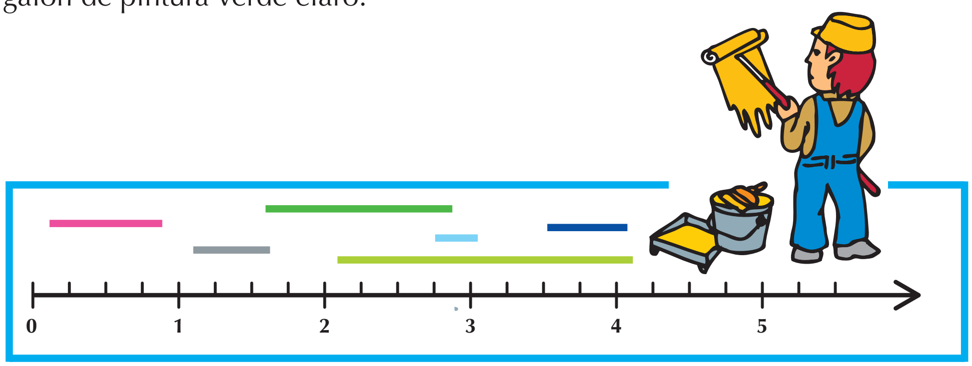
Tomado de http://elinventor.galeon.com/letra_f.htm

Tema 2. Situaciones aditivas y sus propiedades en los números racionales positivos ($\mathbb{Q}^+$)

Indagación

La familia Gutiérrez está pintando con diferentes colores las paredes de su casa.

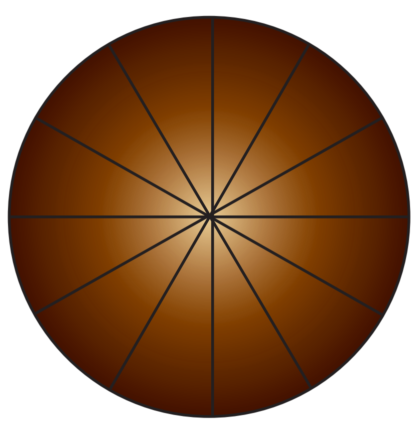
Para los dormitorios, Anita utiliza $\frac{3}{4}$ del galón con pintura rosada y $\frac{1}{2}$ del galón con pintura gris, su hermano Felipe utiliza $\frac{1}{4}$ del galón con pintura azul cielo y $\frac{1}{2}$ del galón con pintura azul oscura y los padres utilizan $\frac{5}{4}$ del galón de pintura blanco nácar. Para el resto de la casa, pintan con $\frac{7}{4}$ del galón de pintura verde claro.



Utiliza los segmentos de colores y la recta numérica, para saber cuántos galones de pintura, en total, utilizó la familia Gutiérrez.

Conceptualización
Adición y sustracción de números racionales

Doña Sara compró una torta de chocolate y la partió en 12 tajadas de igual tamaño, como muestra la figura:



De ella, tomó tres tajadas para sus amigas y cuatro para sus hijos.

a. ¿Cuánta parte de la torta se consumió?
b. ¿Cuánta parte de la torta quedó?

Solución
De las 12 tajadas de torta:

a. Se consumieron los $\frac{3}{12}$ y $\frac{4}{12}$.

En total se consumieron $\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$, es decir, 7 de las 12 tajadas.

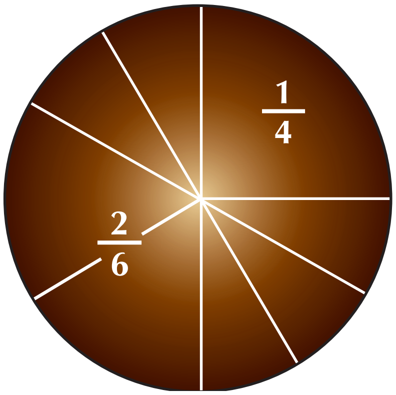
b. Como de las 12 tajadas se consumieron 7, entonces quedaron 5 tajadas, es decir:

La torta completa tiene 12 tajadas, esto es, la torta completa tiene $\frac{12}{12}$.

Si se consumieron $\frac{7}{12}$, entonces, que daron $\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$. Observa en la torta dibujada.

Pero doña Sara no siempre parte sus tortas en doceavos. En otra ocasión, compró otra torta de chocolate e hizo la repartición siguiente:

A su vecina le obsequió $\frac{1}{4}$ de la torta y dejó $\frac{2}{6}$ de la torta para su familia.



Ahora quiere saber qué parte de la torta repartió y qué parte le quedó.

En este caso, doña Sara debe sumar $\frac{1}{4} + \frac{2}{6}$ de la torta.

No puede sumar directamente, porque las porciones no son del mismo tamaño, es decir, no tienen el mismo denominador.

Así, amplificamos a $\frac{1}{4}$ por 3 y a $\frac{2}{6}$ por 2, entonces nos queda:

$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$ y $\frac{2 \times 2}{6 \times 2} = \frac{4}{12}$.

Reemplazando a $\frac{1}{4}$ por el racional $\frac{3}{12}$ y a $\frac{2}{6}$ por el racional $\frac{4}{12}$, tenemos: $\frac{1}{4} + \frac{2}{6} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$.

Si doña Sara ha consumido $\frac{7}{12}$, por lo tanto le quedó $\frac{5}{12}$ de la torta, puesto que $\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

Sustracción de números racionales

Vamos a analizar las situaciones siguientes:

1. Mario tenía tres cuartos de litro ($\frac{3}{4}l$) de agua y consumió $\frac{2}{4}l$ (de litro), ¿cuánta cantidad de agua le quedó?

Solución

Como de $\frac{3}{4}l$ Mario consumió $\frac{2}{4}l$,

entonces, le quedó:

$\frac{3}{4} - \frac{2}{4}$.

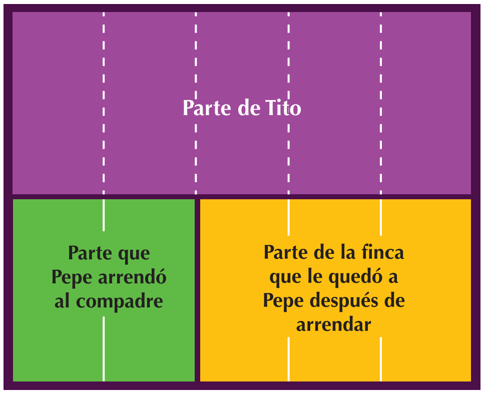
Como los dos números racionales tienen igual denominador, sólo se realiza la resta de los numeradores, quedando el resultado así:

$\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$.

2. Pepe y Tito son dos hermanos que tienen una finca por partes iguales (es decir, cada uno es dueño de la mitad de la finca). De la parte suya, Pepe arrendó a un compadre el equivalente a los $\frac{2}{10}$ de toda la finca.

   ¿De qué fracción de la finca dispone Pepe?

Finca de Tito y Pepe



Solución

A $\frac{1}{2}$ de la finca le restamos $\frac{2}{10}$ de ella, que arrendó Pepe.

Para realizar la resta de estos dos números racionales que tienen diferente denominador, convertimos a denominador 10 y tenemos:

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{10} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} - \frac{2}{10} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}.$$

Luego, Pepe puede disponer de los $\frac{3}{10}$ de la finca.

Propiedades de la adición de números racionales positivos

Nombre de la propiedad	Ejemplo	Enunciado de la propiedad
Clausurativa	$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{2 \times 5}{3 \times 5}+\frac{1 \times 3}{5 \times 3}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{7}{15}$	La suma de dos o más números racionales positivos es igual a otro número racional positivo.
Asociativa	$\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\right)+\frac{1}{4}=$ $\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{1x4}{3x4}+\frac{2x3}{4x3}\right)+\frac{1}{4}=$ $\frac{1x4}{3x4}+\left(\frac{3x3}{4x3}\right)=\left(\frac{4}{12}+\frac{6}{12}\right)+\left(\frac{1x3}{4x3}\right)=$ $\frac{4}{12}+\frac{9}{12}=\frac{10}{12}+\frac{3}{12}=$ $\frac{13}{12}=\frac{13}{12}$	Tres o más números racionales se pueden sumar agrupando de distinta forma y el resultado es el mismo.
Modulativa	$\frac{2}{9}+0=\frac{2}{9}+\frac{0}{9}=\frac{2+9}{9}=\frac{2}{9}$	Todo número racional positivo sumado a cero da como resultado el mismo número racional positivo.
Conmutativa	$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{4}{7}+\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{2 \times 7}{3 \times 7}+\frac{4 \times 3}{7 \times 3}=\frac{14}{21}+\frac{12}{21}=\frac{26}{21}$ $\frac{4}{7}+\frac{2}{3}=\frac{4 \times 3}{7 \times 3}+\frac{2 \times 7}{3 \times 7}=\frac{12}{21}+\frac{14}{21}=\frac{26}{21}$	Dos o más números racionales positivos se pueden sumar en diferente orden y la suma no cambia.

Aumentos y descuentos

El uso del porcentaje desempeña un papel fundamental en el tratamiento y análisis de la información que proporcionan los medios de comunicación; este puede ser representado de distintas maneras, a saber: por medio de gráficas, en términos porcentuales, como índices de cotizaciones comerciales o de contaminación ambiental.

En el anterior grado (6°), aprendiste a calcular el tanto por ciento de forma manual; sin embargo, si dispones de una calculadora convencional, puedes encontrar un porcentaje, rápidamente.

Observa detenidamente el teclado y nota que además de las teclas $\boxed{+}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\div}$ e $\boxed{=}$ hay una tecla $\boxed{\%}$ que corresponde al tanto por ciento.

Para calcular un porcentaje, se escribe la cantidad, el signo de multiplicación, el número del porcentaje y la tecla $\boxed{\%}$.

Estudia los casos siguientes:

1. Calcula el 80% de 750.

Solución

Si se dispone de una calculadora, se oprimen las teclas siguientes:

$\boxed{7}\,\boxed{5}\,\boxed{0}\;\boxed{\times}\;\boxed{8}\,\boxed{0}\,\boxed{\%}\,\boxed{=}$ y el resultado es 600.

2. Un producto cuesta $15,000, y se anuncia un descuento del 20%, por pago de contado.

a. ¿Qué cantidad se descuenta al precio original?
b. Cuánto se pagaría por el producto?

Solución

a. Usando la calculadora:

$\boxed{1}\,\boxed{5}\,,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{0}\,\boxed{\times}\,\boxed{2}\,\boxed{0}\,\boxed{\%}$ **= 3,000**

Por tanto, el descuento es $3,000.

b. Si al precio de lista se le resta el descuento, se obtiene: 15,000 – 3,000 = 12,000.

Con el descuento aplicado, se pagaría $12,000.

Aplicación

Lee cuidadosamente cada situación, cópialas en tu cuaderno y luego compara con algunos de tus compañeros.

1. Un señor quiere comprarse un vestido, para lo cual se le presentan las siguientes alternativas de pago: de contado, le descuentan un 30%; si paga en un mes, le rebajan el 5%; si paga en dos meses, no tiene ningún descuento, pero si lo liquida en tres meses, se le hace un recargo del 7.5%.
   Si el precio original que es de $345,000, ¿cuáles son los diferentes precios que tiene el mismo vestido, según la forma de pago?

   Solución

   Precio original: $345,000

Meses	0	1	2	3
Tanto por ciento				
Descuento (-)				
Recargo (+)				
Precio con descuento o recargo				

2. La señora Fernández compró en el mercado $\frac{1}{4}$ kg de carne de res molida, $\frac{3}{4}$ kg de carne de pechuga de pollo y $1\frac{1}{2}$ kg de tomates; ingredientes que le faltaban para hacer la comida.
   ¿Cuánta carne compró en total?, ¿cuánto pesa el total de su compra?

3. Para pintar el marco del periódico mural de la escuela, se emplearon $\frac{1}{8}$ de litro de pintura roja y $\frac{1}{16}$ de litro de pintura amarilla, ¿qué cantidad de pintura se utilizó en total?

4. Daniel debe leer un libro; si el primer día lee $\frac{6}{15}$ del número de páginas y el segundo día otros $\frac{6}{10}$, ¿qué parte del número de páginas del libro le faltan por leer?

5. En un grupo las $\frac{2}{3}$ partes prefieren la música de banda; $\frac{1}{5}$, el rock, y el resto, la música tropical; ¿qué parte del grupo no prefiere la música tropical?

6. De una varilla de $2\frac{3}{10}$ m, se corta un pedazo de $1\frac{1}{2}$ m y otro de $\frac{2}{5}$ m. ¿Qué cantidad de varilla se ocupó? y ¿cuánta sobró?

Realiza las operaciones:

7. $\frac{2}{4}+\frac{7}{2}+\frac{3}{8}=$

8. $\frac{15}{9}-\frac{7}{3}=$

9. $\frac{8}{3}+\frac{2}{5}-\frac{4}{45}=$

10. $\frac{8}{4}-\frac{3}{2}+\frac{1}{8}=$

Entendemos por…

Número racional el resultado de dividir un número entero, llamado numerador, entre otro número entero, llamado denominador, siempre que el denominador sea diferente de cero. También podemos decir que el número racional se representa de la forma $\frac{a}{b}$, tal que a es un número entero, b también es un número entero y $b \neq 0$.

Diversión matemática

Ahora puedes jugar con un compañero formando y resolviendo sumas. Quien más sumas realice, ganará.
Si sumas números del casillero color lila con números del casillero color verde, te resultará un número del casillero de color amarillo.
Encierra con un color que escojas los resultados encontrados. Si juegas con un compañero, gana quien tenga más resutados.

$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{13}{30}$
$\frac{15}{50}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{20}$

$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{10}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

$\square + \square = \square$

Día a día

Termómetros infrarrojos

¿Cómo funciona un termómetro infrarrojo (IR)?
Todos los objetos emiten energía infrarroja.
Entre más caliente esté un objeto, la actividad de las moléculas es mayor y emite más energía infrarroja. Un termómetro infrarrojo posee elementos ópticos, a los cuales se les envía energía radiante infrarroja, y estos la enfocan hacia un detector.
El detector convierte la energía en señal eléctrica que es amplificada e indicada en la pantalla.
¿Cuál es el tiempo de respuesta de un termómetro infrarrojo?
El tiempo de respuesta de un termómetro infrarrojo es mayor que la mayoría de los termómetros; es de aproximadamente $\frac{1}{2}$ segundo.

Tomado de http://www.atinco.com.co/esp/ventas/asister.htm

Tema 3. Situaciones multiplicativas y sus propiedades en los números racionales positivos ($\mathbb{Q}^+$)

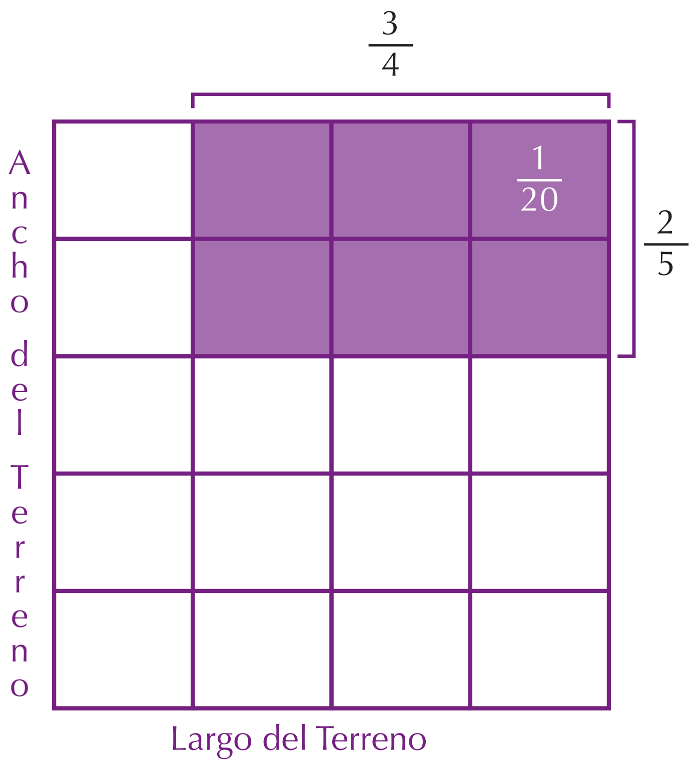
Indagación

A un constructor se le ha presentado la situación siguiente:

En el terreno cuadrado de un colegio, hay un lote en el que se quiere construir un restaurante escolar.

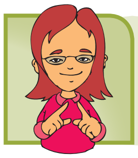
Las dimensiones de este lote están dadas así: el largo del lote equivale a las tres cuartas partes del largo total del terreno del colegio y el ancho del lote corresponde a los dos quintos del ancho del terreno total.

Observa el dibujo:



¿Qué parte del terreno ocupará el lote del restaurante?

Explica tu respuesta y compárala con las de algunos de tus compañeros.



Conceptualización

1. Analicemos el problema del restaurante del colegio, planteado en la sección de indagación.
   Para determinar el área que ocupa el restaurante escolar, se cuenta la cantidad de rectángulos en que queda subdividido el cuadrado original que representa el terreno. Cada uno de estos rectángulos es $\frac{1}{20}$ del área del cuadrado. El restaurante ocupará 6 veces $\frac{1}{20}$.

   Por lo tanto, $6 \times \frac{1}{20} = \frac{6}{1} \times \frac{1}{20} = \frac{6}{20}$, que es el área del lote del restaurante.

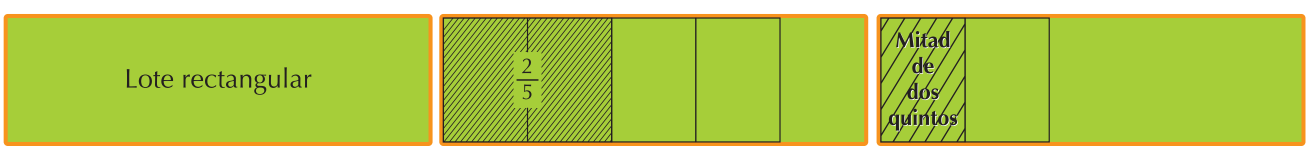
   En la gráfica inicial, podemos ver que un lado del rectángulo del lote del restaurante escolar es 3 veces $\frac{1}{4}$ y el otro lado es 2 veces $\frac{1}{5}$.

   Por tratarse de un rectángulo, el área es $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$;

   La cantidad 4 x 5 = 20 indica la cantidad de rectángulos en que se subdivide el cuadrado y 3 x 2 = 6 es el número de subdivisiones que ocupará el restaurante escolar.

2. Ahora, analicemos otra situación:
   La mitad de los $\frac{2}{5}$ de un lote rectangular se van a sembrar con hortalizas.
   ¿Qué parte de todo el lote es esta cantidad?

   Solución
   El primer rectángulo verde representa el lote, el segundo rectángulo representa el lote dividido en 5 partes iguales de las cuales se han rayado 2 y el tercer rectángulo muestra la mitad de $\frac{2}{5}$ que es $\frac{1}{5}$; sección rayada:



   La mitad de dos quintos se escribe matemáticamente así:

$$\left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times 1}{5 \times 2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ (simplificado).}$$

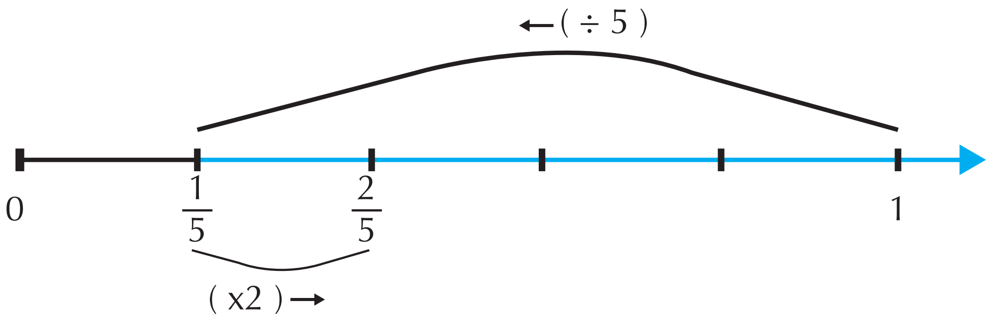
Dados dos números racionales positivos, el producto de ellos se encuentra multiplicando entre sí los numeradores y entre sí los denominadores.

Inverso multiplicativo de un número racional positivo

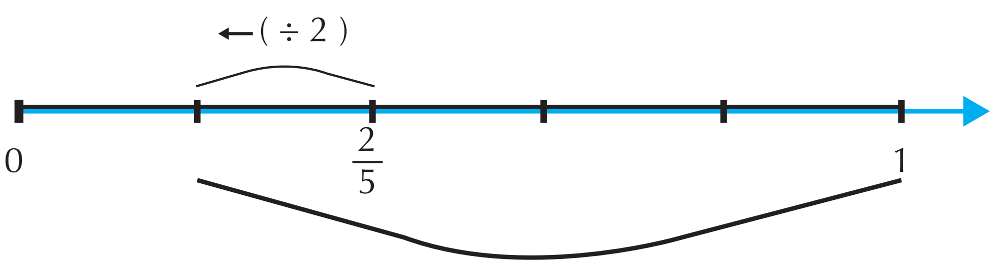
Aplicar los operadores $\left(\times\frac{2}{5}\right)$ y $\left(\times\frac{5}{2}\right)$ de la unidad, en la recta numérica:

Apliquemos primero $\left(\times\frac{2}{5}\right)$ a 1:

$1\left(\times\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$ $\qquad \frac{1}{5}(\times 2)=\frac{2}{5}$



A $\frac{2}{5}$ le aplicamos $\left(\times\frac{5}{2}\right)$.



$\frac{2}{5}\left(\times\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{10}$ $\qquad \frac{2}{10}(\times 5)=\frac{10}{10}=1$

Luego $1\left(\times\frac{2}{5}\right)\left(\times\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{5}\left(\times\frac{5}{2}\right)=\frac{10}{10}=1$

Luego $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}=1$, donde 1 es el módulo de la multiplicación de los números racionales positivos y $\frac{2}{5}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{5}{2}$.

Si $\frac{a}{b}$ es un número racional positivo diferente de cero, $\frac{b}{a}$ es su inverso multiplicativo y $\frac{a\times b}{b\times a}=1$.

Propiedades de la multiplicación de números racionales positivos

Nombre de la propiedad	Ejemplo	Enunciado de la propiedad
Clausurativa	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2 \times 1}{3 \times 5} = \frac{2}{15}$	La multiplicación de dos o más números racionales positivos es otro número racional positivo.
Asociativa	$\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{4} \times \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{4}\right) \times \frac{1}{4} =$ $\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{16}\right) = \left(\frac{2}{12}\right) \times \frac{1}{4} =$ $\frac{2}{48} = \frac{2}{48}$	La multiplicación de tres o más números racionales positivos agrupados de diferente forma no cambia el producto.
Modulativa	$\frac{2}{9} \times 1 = \frac{2}{9} \times \frac{1}{1} = \frac{2 \times 1}{9 \times 1} = \frac{2}{9}$	1 es el módulo de la multiplicación de los números racionales positivos. Entonces, al multiplicar un número racional positivo por 1 el producto es el mismo número.
Invertiva	$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{2 \times 5}{5 \times 2} = \frac{10}{10} = \frac{1}{1} = 1$	Si $\frac{a}{b}$ es un número racional positivo, $\frac{b}{a}$ es su inverso multiplicativo y $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$.
Conmutativa	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \times \frac{2}{3}$ $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{2 \times 4}{3 \times 7} = \frac{8}{21}$ $\frac{4}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{7 \times 3} = \frac{8}{21}$	Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos números racionales positivos, entonces $\frac{a}{b} \times \frac{a}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$.

División de números racionales positivos

La división de dos números racionales positivos es la operación inversa a la multiplicación, como en los sistemas de números naturales y enteros.

Ejemplos:

1. Dividir $\frac{3}{4} \div \frac{1}{5}$.

La operación $\frac{3}{4} \div \frac{1}{5}$ equivale a buscar un número racional positivo, que multiplicado por $\frac{1}{5}$ dé como resultado $\frac{3}{4}$, es decir: $\frac{3}{4} \div \frac{1}{5}$ equivale a

$\boxed{} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{4}$, en donde $\boxed{}$ es un número racional positivo.

En la expresión: $\boxed{} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{4}$, se despeja el valor desconocido, así:

multiplicando los dos miembros de la igualdad $\boxed{} \times \frac{1}{5}\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{1}\right)$

por el inverso multiplicativo de $\frac{1}{5}$, es decir, multiplicando a ambos lados por $\frac{5}{1}$ tenemos:

$$\square \times \frac{5}{5} = \frac{15}{4}$$

$$\square \times 1 = \frac{15}{4}$$

entonces:

$$\square = \frac{15}{4}.$$

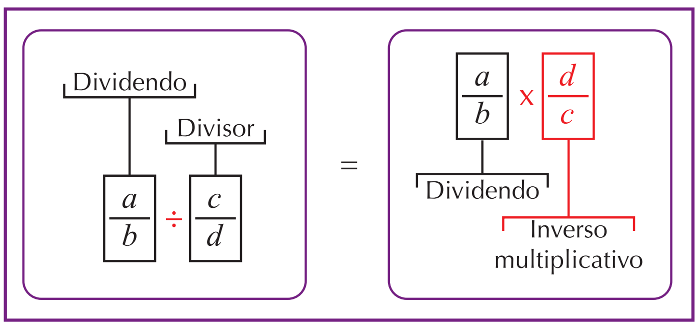
Luego: $\frac{3}{4} \div \frac{1}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{1} = \frac{15}{4}$.

2. Calcular: $\frac{7}{3} \div \frac{5}{2}$.

Solución: $\frac{7}{3} \div \boxed{\frac{5}{2}} = \frac{7}{3} \times \boxed{\frac{2}{5}} = \frac{14}{15}$

Inverso

El cociente de dos números racionales positivos es equivalente a multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor, es decir:



Donde $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son números racionales positivos y $\frac{c}{d} \neq 0$ (c/d es diferente de cero).

Aplicación

Copia en tu cuaderno los ejercicios, resuélvelos y compara con algunos de tus compañeros.

1. Recuerda la construcción del restaurante escolar de la institución. Ahora, se quiere que se siga teniendo la misma forma rectangular mencionada y que ocupe la misma área, pero que uno de sus lados sea la mitad de un lado del terreno:

a. ¿Qué parte del lado del terreno es el otro lado?

b. ¿Cuál es el lado si el otro fuera $\frac{6}{7}$?

2. El área ocupada del terreno es $\frac{1}{5}$. ¿Qué parte del ancho y del largo del terreno, podrían ser el largo y el ancho del restaurante?

3. ¿Cuál es el número que multiplicado por $\frac{5}{4}$ da como resultado 1?

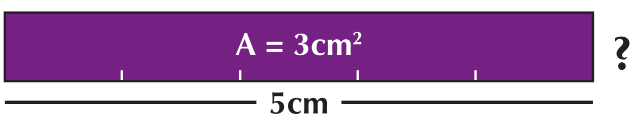
4. Encontrar algún valor para m, de modo tal que se verifique la siguiente igualdad:

$$\frac{2}{9} \times m = 1.$$

5. ¿Cuál es el número que multiplicado por $\frac{2}{5}$, da como resultado $\frac{7}{36}$?

6. Busca dos números racionales tal que el producto sea $\frac{7}{4}$.

7. ¿Cuál es la altura del rectángulo si el área es 3 cm^2 y la base es 5 cm?



8. Realiza las operaciones siguientes:

a. $\frac{2}{7} \times \frac{1}{3} =$

b. $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} =$

c. $\frac{1}{4} \div \frac{9}{2} =$

d. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{3} =$

9. La siguiente tabla se obtiene dividiendo a 5 entre 2, entre 3, entre 4, etc.; la base del rectángulo es 5 y su área es 3. En tu cuaderno, completa los espacios.

Posición	Base	Altura	Área
1	5		3
2	$\frac{5}{2}$		3
3	$\frac{5}{3}$		3
4	$\frac{5}{4}$		3
			3
			3
			3

a. ¿Cuáles son las medidas del rectángulo que ocupa la posición 32 de la serie?

b. ¿Cuáles son las medidas del rectángulo que ocupa la posición 100 de la serie?

10. Felipe desea hacer una mezcla de pintura y prueba con 7 litros de pintura verde y 3 litros de pintura blanca.
Ahora, quiere hacer otra mezcla sin cambiar la tonalidad, pero usando 5 litros de pintura blanca.

a. ¿Cuántos litros de pintura verde se requieren?

b. Si se desea hacer la mezcla con 4 litros de pintura verde, ¿cuántos litros de pintura blanca se necesitan para obtener la misma tonalidad?

c. Si a una mezcla de 4 litros de pintura verde y 1 litro de pintura blanca se le agrega un litro de cada color, ¿se obtiene un color más suave o un color más fuerte?

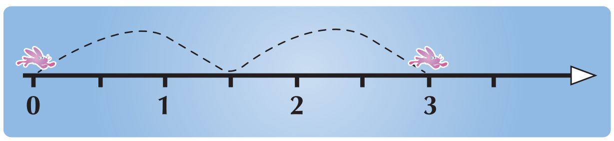
Entendemos por...

Mitad cada una de las dos partes iguales de un todo.

Diversión matemática

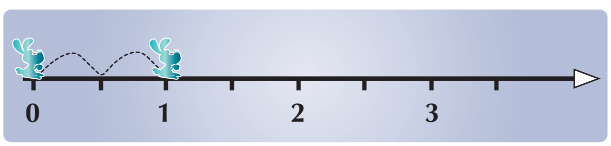
Los conejos saltarines

Un conejo salta 2 veces desde 0 hasta 3, como lo muestra la gráfica.
Las distancias entre todos los saltos tienen la misma magnitud.



a. Si el conejo se detiene en seis y salta solamente una vez a la derecha, ¿qué punto de la recta se le asigna a ésta ubicación?
b. Identifica 5 puntos de la recta, donde pararía el conejo y que no coincidan con los números naturales.

Otro conejo salta dos veces desde 0 hasta 1, como lo muestra la gráfica siguiente:



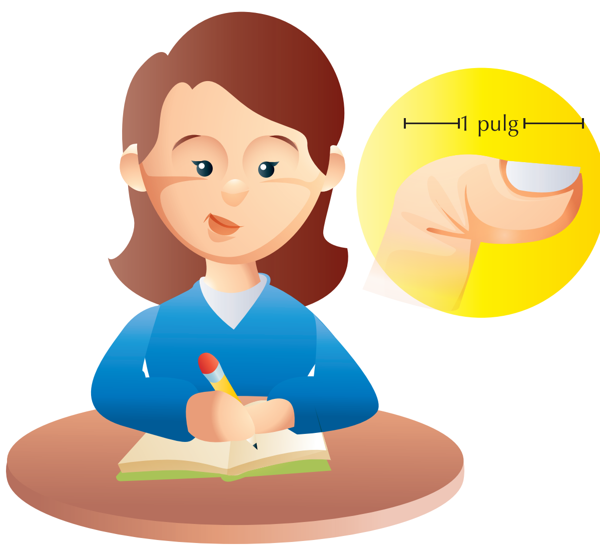
c. Si este conejo se detiene en el punto 4 y salta una sola vez a la derecha, ¿qué punto de la recta se le asigna a esta posición?
d. Si los conejos están en el punto nueve de la recta, ¿hay algún punto de la recta que no sea un número natural donde coincidan los saltos de los dos conejos?relacionado con el tema.

Día a día

La pulgada

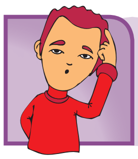
Cuenta una leyenda que su medida corresponde a una falange del pulgar del rey Eduardo de Inglaterra (siglo X).
El símbolo de pulgada es ”.
1 pulgada (1”) = 2,54 cm = 25,4 milímetros y es utilizada para medir: tuberías, ruedas de vehículos, tuercas, tornillos, pantallas, etc. Las fracciones de pulgada más comunes, que se usan en la construcción de casas y trabajos de mecánica, son: 1/2”, 1/4”, 1/8”, 1/16”, 1/32”, 1/64”.
Los instaladores de gas o de agua generalmente no se refieren a las cañerías en pulgadas, sino en dieciseisavos de pulgada.
Ejemplos:

a. La cañería de 1/4” escrita con denominador 16 produce 4/16” y se conoce como cañería de 4.
b. La cañería de 3/4” sería 12/16” y se conoce como cañería de 12.
c. La cañería de 1” es 16/16” y se conoce como cañería de 16.
d. La cañería de 1 1/4” es 20/16” y se conoce como cañería de 20.



Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Pulgada
y http://matematica100x100.blogspot.com/

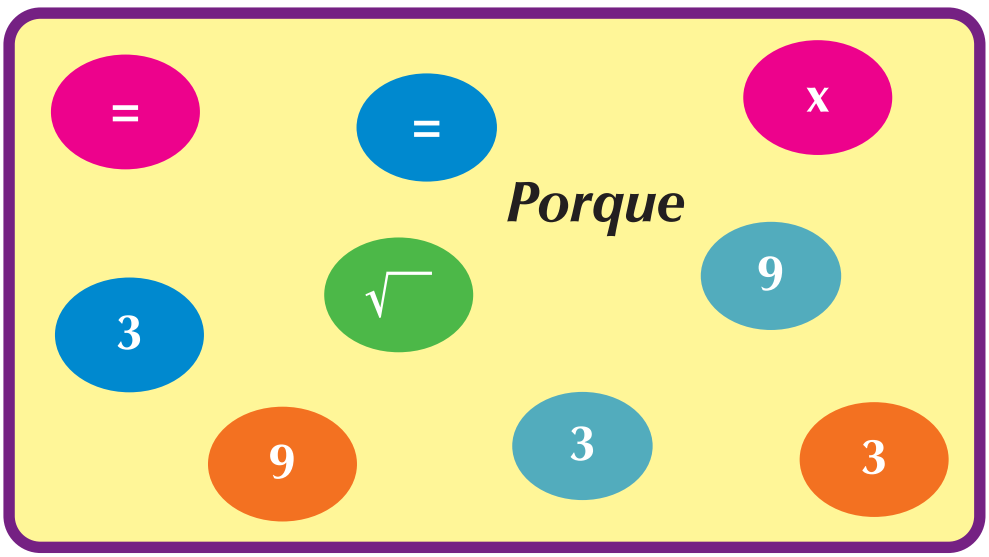
Tema 4. Potenciación y radicación de los números racionales positivos ($\mathbb{Q}^+$)



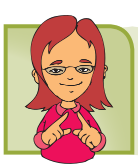
Indagación

Completa en tu cuaderno los términos del recuadro y arma el rompecabezas que diga:

"Raiz cuadrada de nueve es igual a tres, porque tres por tres es igual a nueve".



La potenciación y la radicación de números racionales positivos tienen el mismo significado de la potenciación y la radicación en el conjunto de los números naturales y enteros.



Conceptualización

La potenciación de números racionales positivos tiene el mismo significado de la potenciación en el conjunto de los números naturales y enteros.

Ejemplos:

1. Calcular $\left(\dfrac{2}{7}\right)^2$.

   Identifiquemos sus partes:

   $$\underbrace{\left(\frac{2}{7}\right)}_{\text{base}}^{\overset{\text{exponente}}{2}} = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \overset{\text{potencia}}{\frac{4}{49}}$$

2. Calcular $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-3}$.

   Solución:

   Recordemos que el inverso de $\dfrac{5}{3}$ es $\dfrac{3}{5}$ y el opuesto de –3 es 3.

   $$\left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{3} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

   La potencia de un número racional positivo con exponente negativo es equivalente a la potencia del inverso con exponente positivo.

3. Resolvamos: $\left(\dfrac{9}{4}\right)^1 = \dfrac{9^1}{4^1} = \dfrac{9}{4}$.

   Los números racionales positivos elevados al exponente 1 son equivalentes al mismo número racional positivo.

   Si $\dfrac{a}{b}$ es un número racional positivo, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^1 = \dfrac{a}{b}$.

4. Un caso especial es la potencia de exponente cero:

   $$\left(\frac{12}{15}\right)^{0} = \frac{12^0}{15^0} = \frac{1}{1} = 1$$

   Los números racionales positivos elevados al exponente 0 son equivalentes a 1.

   Si $\dfrac{a}{b}$ es un número racional positivo,entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^0 = 1$.

Propiedades de la potenciación de los números racionales

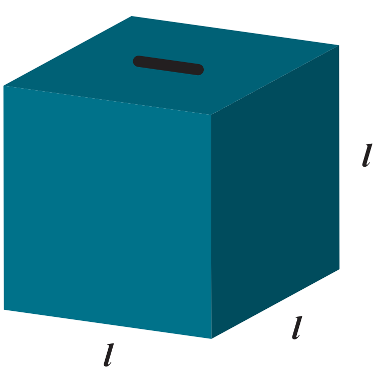
Nombre de la propiedad	Ejercicio	Enunciado general
Multiplicación de potencias de igual base fraccionaria	Resolviendo sin aplicar propiedad tenemos: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}\times\frac{8}{27} = \frac{32}{243}$ Aplicando la propiedad: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{2\times2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3\times3} = \frac{32}{243}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}$ Se escribe la misma base y se suman los exponentes.
Potencia de una potencia de base fraccionaria	Resolviendo sin aplicar propiedad tenemos: $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2 = \left[\frac{2\times2\times2}{5\times5\times5}\right]^2 = \left[\frac{8}{125}\right]^2 = \frac{8\times8}{125\times125} = \frac{64}{15{,}625}$ Aplicando la propiedad: $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3\times2} = \left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2}{5\times5\times5\times5\times5\times5} = \frac{64}{15{,}625}$	$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\times n} = \left(\frac{a^{m\times n}}{b^{m\times n}}\right)$ Se escribe la misma base y se multiplican los exponentes.
Potencia de base fraccionaria y exponente cero	$\left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{4^0}{5^0} = \frac{1}{1} = 1$	$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1, \ \forall \left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$ Toda fracción diferente de cero elevada a la cero da 1.
Potencia de base fraccionaria y exponente negativo	$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$ Una fracción elevada a exponente negativo es igual al inverso de la fracción elevado a exponente positivo.

Radicación de números fraccionarios positivos

Analicemos la situación siguiente:

Betty tiene una alcancía que tiene forma de cubo.

¿Cuál es la medida del lado de la alcancía si mide $\frac{125}{8}$ unidades de volumen?



Solución

El lado de la alcancía, que tiene forma cúbica, es igual a la raíz cúbica de $\frac{125}{8}$.

La raíz cubica de $\frac{125}{8}$ es el número $\frac{\square}{\square}$

de tal modo que $\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{125}{8}$.

Debemos encontrar el número que multiplicado por sí mismo 3 veces dé 125 en el numerador y el número que multiplicado por sí mismo 3 veces dé 8 en el denominador.

Estos números son 5 y 2, es decir, $\dfrac{\boxed{5}}{\boxed{2}}$, porque $\dfrac{5}{2} \times \dfrac{5}{2} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{125}{8}$.

La radicación de números racionales positivos es aplicada para hallar bases de potencias desconocidas.

Índice — Raíz — Exponente

$$\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2} \text{ porque } \left[\frac{5}{2}\right]^3 = \frac{125}{8} \longrightarrow \text{Potencia}$$

Radicando — Base

Aplicación

Copia en tu cuaderno los ejercicios. Luego, resuelve y compara los resultados con algunos de tus compañeros.

1. Escribe las potencias indicadas para los números racionales positivos:

   a. $\left(\dfrac{2}{7}\right)^3 =$

   b. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 =$

   c. $\left(\dfrac{10}{7}\right)^4 =$

   d. $\left(\dfrac{2}{9}\right)^2 =$

2. Indica en el recuadro el exponente de las potencias siguientes:

   a. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\square} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{256}$

   b. $\left(\dfrac{8}{5}\right)^{\square} = \dfrac{8}{5} \times \dfrac{8}{5} \times \dfrac{8}{5} = \dfrac{512}{125}$

3. Expresa la potencia con exponente positivo y calcula el resultado:

a. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} =$

b. $\left(\frac{2}{9}\right)^{-2} =$

c. $\left(\frac{3}{10}\right)^{-3} =$

4. Aplica las propiedades para la potenciación de números racionales positivos y calcula el resultado:

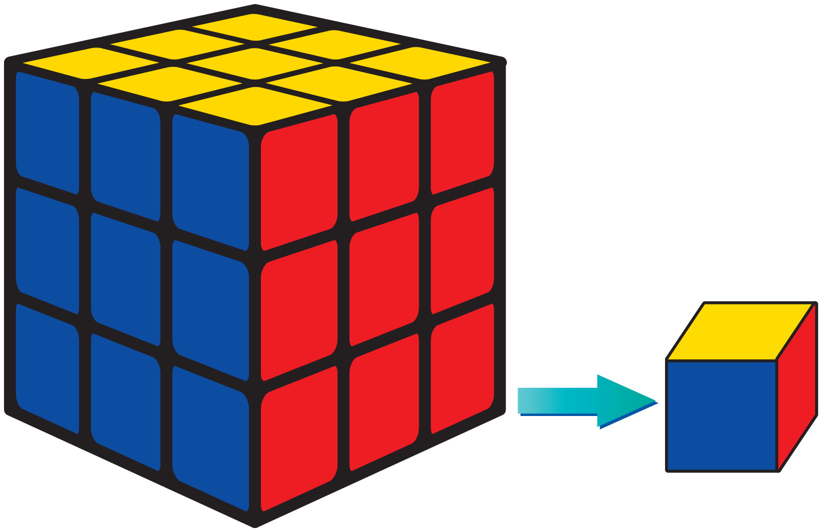
a. $\left(\frac{7}{3}\right)^{3} \times \left(\frac{7}{3}\right)^{2} =$

b. $\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{2}\right]^{2} =$

c. $\left(\frac{45}{13}\right)^{0} =$

5. La figura muestra un cubo mágico de volumen 27 (recuerda que el volumen del cubo = lado x lado x lado).

a) ¿Cuánto mide el lado?
b) ¿Cuál es el volumen del cubo pequeño?
c) ¿Cuánto mide el lado del cubito?



Resuelve las siguientes operaciones aplicando las propiedades de la potenciación:

6. $\frac{(-3)^8}{(-3)^3} =$

7. $\frac{(12)^{13}}{(12)^{11}} =$

8. $\frac{(2)^2 \times (2)^3 \times (2)^4}{(2)^6 \times (2)^1} =$

9. $\frac{(-4)^7 \times (-4)^2 \times (-4)^6}{(-4)^2 \times (-4)^2 \times (-4)^9} =$

10. $\frac{(3)^2 \times (2)^3 \times (3)^4}{(2)^3 \times (3)^4} =$

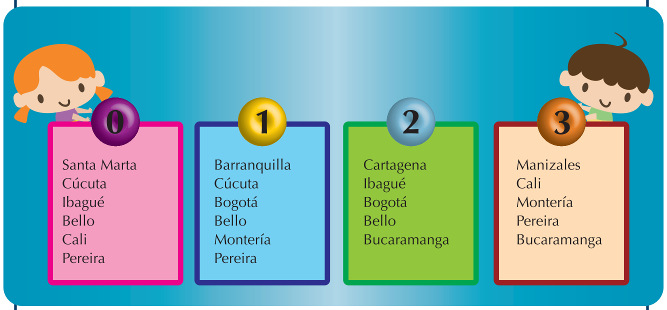
Entendemos por…

Radical el signo con que se indica la raíz de un número: $\sqrt{}$.
Se usa para indicar la raíz que se le extrae a un número.
Por ejemplo: $\sqrt{25} = 5$ y $\sqrt[3]{8} = 2$

Diversión matemática

Las ciudades y las potencias de dos

El juego consiste en la elaboración de 4 tarjetas de diferente color marcadas con los números 0, 1, 2 y 3. Bajo cada número los nombres de las ciudades como se muestra:



Luego, se elabora una tabla con la información siguiente, que solamente puede leer el controlador del juego:

Ciudad	No. de la ciudad escogida	Descomposición en base 2	Descomposición en potencias de base 2
Santa Marta	1	1	2^0
Barranquilla	2	2	2^1
Cúcuta	3	2+1	$2^1 + 2^0$
Cartagena	4	4	2^2
Ibagué	5	4+1	$2^2 + 2^0$
Bogotá	6	4+2	$2^2 + 2^1$
Bello	7	4+2+1	$2^2 + 2^1 + 2^0$
Manizales	8	8	2^3
Cali	9	1+8	$2^0 + 2^3$
Montería	10	2+8	$2^1 + 2^3$
Pereira	11	1+2+8	$2^0 + 2^1 + 2^3$
Bucaramanga	12	4+8	$2^2 + 2^3$

Por parejas, uno de los jugadores escoge una ciudad en secreto y dice solamente el color de las tarjetas en las que están los exponentes de la descomposición en potencias de base 2.

El controlador del juego adivinará la ciudad pensada por el jugador.

Por ejemplo: supongamos que el jugador eligió la ciudad de Pereira. Sin decir qué ciudad ha escogido, toma las tarjetas rosada, azul y habana, marcadas con los números 0, 1 y 3, porque en ellas aparece Pereira.

El controlador del juego hace la siguiente cuenta **$2^0 + 2^1 + 2^3 = 1 + 2 + 8 = 11$**, que de acuerdo con la tabla corresponde a la ciudad de Pereira. Por lo tanto, la ciudad de Pereira fue la elegida por el jugador. relacionado con el tema.

Día a día

La utilidad de las fracciones en la vida cotidiana

Los números fraccionarios han surgido a lo largo de la historia por la necesidad que han tenido las personas de contar, medir y repartir, en situaciones en las cuales no utiliza números enteros.

¿Cuándo utilizamos las fracciones o números racionales?

Las fracciones son utilizadas, en muchas situaciones cuando, por ejemplo, seguimos instrucciones de una receta de cocina, pues fraccionamos los ingredientes. Cuando vamos al supermercado y queremos adquirir algún alimento, como por ejemplo: medio litro de jugo (1/2), un cuarto de kilo de café (1/4), tres cuartos de kilo de queso (3/4), una gaseosa en envase litro y 1/2. Además, cuando repartimos alimentos como pizza, tortas, pan, chocolate, entre otros, seguimos fraccionando. Piensa en otras actividades en las que utilizas fracciones.

Tomado de http://fraccionmania.blogspot.com/2008/07/la-utilidad-de-las-fracciones-en-la.html

Este capítulo fue clave porque

- Pude aclarar dudas sobre el orden al operar con los números racionales positivos.
- Aprendí a ubicar números racionales positivos en la recta numérica.
- Sé solucionar situaciones con sumas aditivas de números racionales positivos.
- Soluciono situaciones multiplicativas con los números racionales positivos.
- Comprendí la importancia de la potenciación y la radicación de los números racionales positivos.
- Sé aplicar las propiedades de las operaciones aritméticas en la solución de situaciones cotidianas.

Conectémonos con la Ingeniería Civil

La ingeniería civil es una rama de la ingeniería que realiza obras civiles, llamadas así a todas aquellas obras o construcciones que sirven para satisfacer las necesidades de la sociedad y son un índice del progreso.

Estas obras son de gran importancia para el desarrollo y crecimiento de las poblaciones.

El ingeniero civil se encarga de la proyección y construcción de edificios, urbanizaciones, escuelas, túneles, puertos, iglesias, aeropuertos, vías férreas, centros comerciales, etc.

Las matemáticas son la principal ayuda de los ingenieros en sus propuestas de construcción, pues necesitan utilizar los conjuntos numéricos, las mediciones y, en general, altos conocimientos de cálculo.

También deben hacer un estimado de los costos de las construcciones a realizar, para los respectivos presupuestos, así como también el cálculo de la resistencia de los materiales de la obra y el tiempo aproximado de duración tanto del proceso de planeación y construcción como de vida real de la obra ejecutada.

Repasemos lo visto

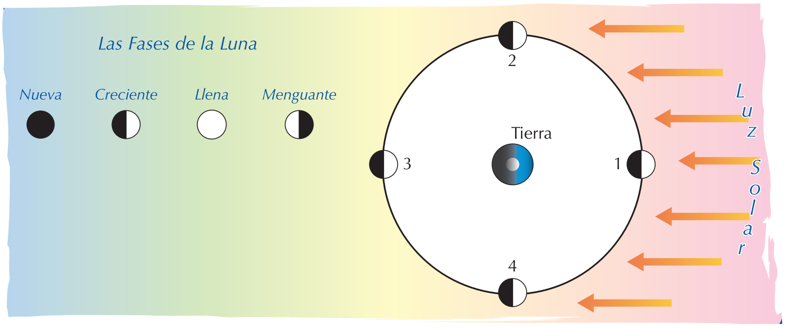
Al inicio de la unidad nos preguntábamos si era posible resolver todas las restas y nos referíamos a esas restas entre números enteros, en las cuales el minuendo es menor que el sustraendo, como en el caso en que se tengan \$5,000 y se necesite algo que cuesta \$8,000. Se genera un problema en el que se concluye que haciendo la resta \$5,000 - \$8,000 = -3,000; es decir, faltarían \$3,000.

Vimos, entonces, como ese tipo de situaciones tienen solución en el conjunto de los números enteros, pues este está formado por números enteros positivos, números enteros negativos y el cero.

También al estudiar las fracciones positivas, no podemos olvidar que:

- Para simplificar un número racional, se divide tanto el numerador como el denominador entre un mismo número natural distinto de cero.
- De dos racionales que tengan igual denominador, es menor el que tenga menor numerador.
- De dos racionales que tengan igual numerador, es mayor el que tenga menor denominador.
- Si $\frac{a}{b}$ es un número racional positivo diferente de cero, $\frac{b}{a}$ es su inverso multiplicativo y $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

Mundo rural



Las fases de la luna

En 28 días que tiene un mes, la luna tiene 4 fases de alumbramiento en la tierra.

Para que aprendas a reconocer en qué luna estamos aunque no tengas calendario, empiezas por la luna nueva que es el comienzo de las fases lunares.

Luna nueva es cuando no se ve ninguna luna en el cielo. Es la noche más oscura en todo el mes. Luego le sigue **luna cuarto creciente**, que es la que va “creciendo” en tamaño hasta convertirse en **luna llena**; esta es la luna que está completamente redonda y llena de luz, y aun de noche podemos ver todo por lo clarita (luz) que está la luna, y finalmente para terminar el ciclo, la luna llena empieza a “menguar”, y se va transformando en…

Cuarto menguante que seguirá menguando (disminuyendo) hasta que otra vez empiece el ciclo de luna nueva. La Luna estará más inclinada (hacia arriba o abajo), mientras más cerca vivamos del polo sur y norte. O sea, quienes viven en el hemisferio norte (todos los países de la línea del Ecuador hacia el polo norte) verán la luna igual a como se representa en la imagen de las fases de la luna, pero un poquito inclinada. Los que viven en el hemisferio sur (todos los países de la línea del Ecuador hacia el polo sur) verán la luna exactamente a la inversa.

Así es que la fase menguante para los países del hemisferio norte lucirá como fase creciente para los del sur.

Es bien conocido, además, el efecto de gravedad (atracción) que la luna tiene sobre la tierra, puesto que por la luna, tenemos marea alta y baja en el mar.

En la agricultura orgánica, los mejores días para hacer o no trabajos de agricultura es durante los cambios de luna y no en el día que la luna cambia de fase.

Para el agricultor, los mejores días para siembras, semilleros, trasplantes, desyerbe son los 3 a 4 días después de la fecha oficial de la fase.

Es muy importante que tengas en cuenta que:

- En **lunas nueva y llena**, no se debe sembrar ni trasplantar.
- En **luna cuarto creciente** es cuando se echa semilleros de frutos que se dan bajo la tierra (zanahoria, ñame, lerenes, remolacha, papa, batata, yuca, etc.) y también las plantas con las que se aprovechan sus hojas como la lechuga, la espinaca, el cebollín, el repollo, el brócoli, etc.
- En **cuarto menguante**, se hacen podas de árboles y se siembran vegetales que echen frutas (tomate, berenjena, pimientos, etc.). También se desyerba solo lo necesario, se hacen trasplantes y se abonan los frutales y la huerta.
- **Luna nueva** es llamada semana de descanso para el agricultor. Luna nueva = luna muerta. En luna llena es bueno desyerbar, no sembrar.

Tomado de http://huertasdelencuentro.bligoo.com/content/view/674153/F

Dato curioso

Cuadrados de números de dos cifras terminados en 1: 11, 21, 31,...

Entre los números, a menudo encontramos curiosidades como en el caso de elevar al cuadrado los números terminados en 1, tales son: 11, 21, 31, 41, 51, 61,… sin usar calculadora.

Sigue las indicaciones que a continuación se enuncian:

1. Toma cualquier número de dos cifras terminado en 1 que quieras elevar al cuadrado.
2. Identifica la decena.
3. Elévala al cuadrado.
4. Multiplica la decena por dos.
5. Añade un uno.

Ejemplo: sin calculadora elevar 41 al cuadrado: (41^2).
La decena de 41 es: 4
El cuadrado de 4 es: $4^2 =$ **16**
El producto de la decena por 2 es: 4 x 2 = 8
Acompañado de 1, queda 81.
Por lo tanto: $41^2 = 1{,}681$.
Comprobemos que 41 x 41 = 1,681

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times 41 \\ \hline 41 \\ 164 \\ \hline 1{,}681 \end{array}$$

Sorprendente ¿no?
¡Sigue practicando con tus amigos y compañeros!

¿En qué vamos?

Reflexiono y trabajo con mis compañeros

Copia y resuelve en tu cuaderno los ejercicios siguientes:

Encuentra el número que falta en la pareja de números racionales para que sean equivalentes:

1. En los números racionales $\frac{1}{5}$ $\frac{\square}{10}$
   a. ¿Por qué número se multiplicó el 5 para obtener 10?
   b. Multiplica el 1 por ese número. ¿Qué número resultó?
   c. Anótalo en el cuadro y escribe el signo = entre los números racionales.

2. En los números racionales $\frac{2}{3}$ $\frac{8}{\square}$
   a. ¿Por cuál número se multiplicó a 2 para obtener 8?
   b. Multiplica el 3 por ese número. ¿Qué número resultó?
   c. Anótalo en el cuadro y escribe el signo = entre los números racionales.

3. Escribe entre cada pareja de números racionales el símbolo que los relacione (<, > o =):

   a. $\frac{35}{15}$ $\square$ $\frac{42}{18}$ b. $\frac{12}{10}$ $\square$ $\frac{30}{25}$

   c. $\frac{14}{6}$ $\square$ $\frac{56}{35}$ d. $\frac{36}{30}$ $\square$ $\frac{42}{35}$

   e. $\frac{7}{3}$ $\square$ $\frac{3}{4}$ f. $\frac{8}{8}$ $\square$ $\frac{4}{4}$

4. Escribe en tu cuaderno dos números racionales equivalentes a cada uno de los que se te dan:

   $\frac{3}{4}$ $\frac{10}{25}$ $\frac{2}{9}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{11}{33}$

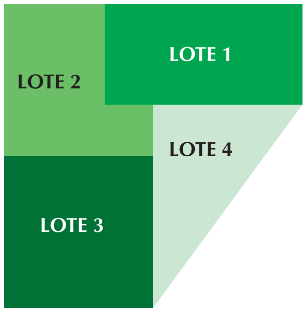
5. ¿Cuáles de las parejas de los siguientes números racionales son equivalentes?

   Anota el signo = o ≠ entre ellos:

   a. $\frac{1}{2}$ $\square$ $\frac{3}{6}$ b. $\frac{2}{7}$ $\square$ $\frac{3}{9}$

   c. $\frac{10}{4}$ $\square$ $\frac{15}{6}$ d. $\frac{3}{5}$ $\square$ $\frac{9}{15}$

6. En algunas ocasiones es conveniente elegir números racionales. Por ejemplo, un terreno se va a sembrar con productos de la región entre cuatro personas. El terreno está fraccionado de tal manera que a cada persona le corresponde sembrar el lote que escoja. Los números racionales correspondientes a los lotes marcados son:



   LOTE 1 = $\frac{1}{5}$ LOTE 2 = $\frac{7}{30}$ LOTE 3 = $\frac{4}{15}$ LOTE 4 = $\frac{3}{10}$

   a. ¿Cuál lote del terreno escogerías para sembrar, si cada una de las cuatro partes la pagan al mismo valor?
   b. ¿Qué lote escogerías para trabajar si pagan según el área del lote?

7. Manuel y Virginia se fueron de compras a un almacén que anunciaba promociones e hicieron las siguientes compras:
   1 pantalón de $85,000 al que le aplicaron un descuento del 20%.
   2 blusas de $70,000 que tienen el 50% de descuento.
   3 camisas que normalmente valen a $30,000, ese día tenía el 40% de descuento.

   a. Encuentra cuánto pagaron en total Manuel y Virginia.

8. ¿Cuál es la medida del lado de un cubo, cuyo volumen es $\frac{125}{64}\,dm^3$?

Le cuento a mi profesor

Con tu profesor, resuelve la siguiente rejilla.
Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspodiente, según lo que has aprendido.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Establezco relaciones de orden entre dos o más números enteros.				
Ubico números enteros en la recta numérica.				
Identifico el opuesto de un número entero.				
Realizo adiciones y sustracciones entre números enteros.				
Realizo multiplicaciones y divisiones entre números enteros.				
Realizo potenciaciones y radicaciones entre números enteros.				
Soluciono problemas que requieren la combinación de operaciones entre números enteros.				
Encuentro fracciones equivalentes a una fracción positiva dada.				
Soluciono problemas que requieren la realización de adiciones o sustracciones de números racionales positivos.				
Soluciono problemas que requieren la realización de multiplicaciones o divisiones de números racionales positivos.				
Soluciono problemas que requieren la aplicación de la potenciación o la radicación de números racionales positivos.				

Autoevaluación

Participo y aprendo	Superior	Alto	Básico	Bajo
Participo activamente en clase.				
Comparto con mis compañeros en los grupos de trabajo.				
Ayudo a buscar soluciones a situaciones problemáticas.				
Colaboro con la disciplina del grupo.				
Respeto la opinión de mis compañeros.				
Propongo problemas o actividades para resolver en clase.				
Repaso en casa lo trabajado en el colegio.				
Comparto mis saberes y dudas con mis compañeros.				

Unidad 2

Construyo y Compruebo

Resolvamos

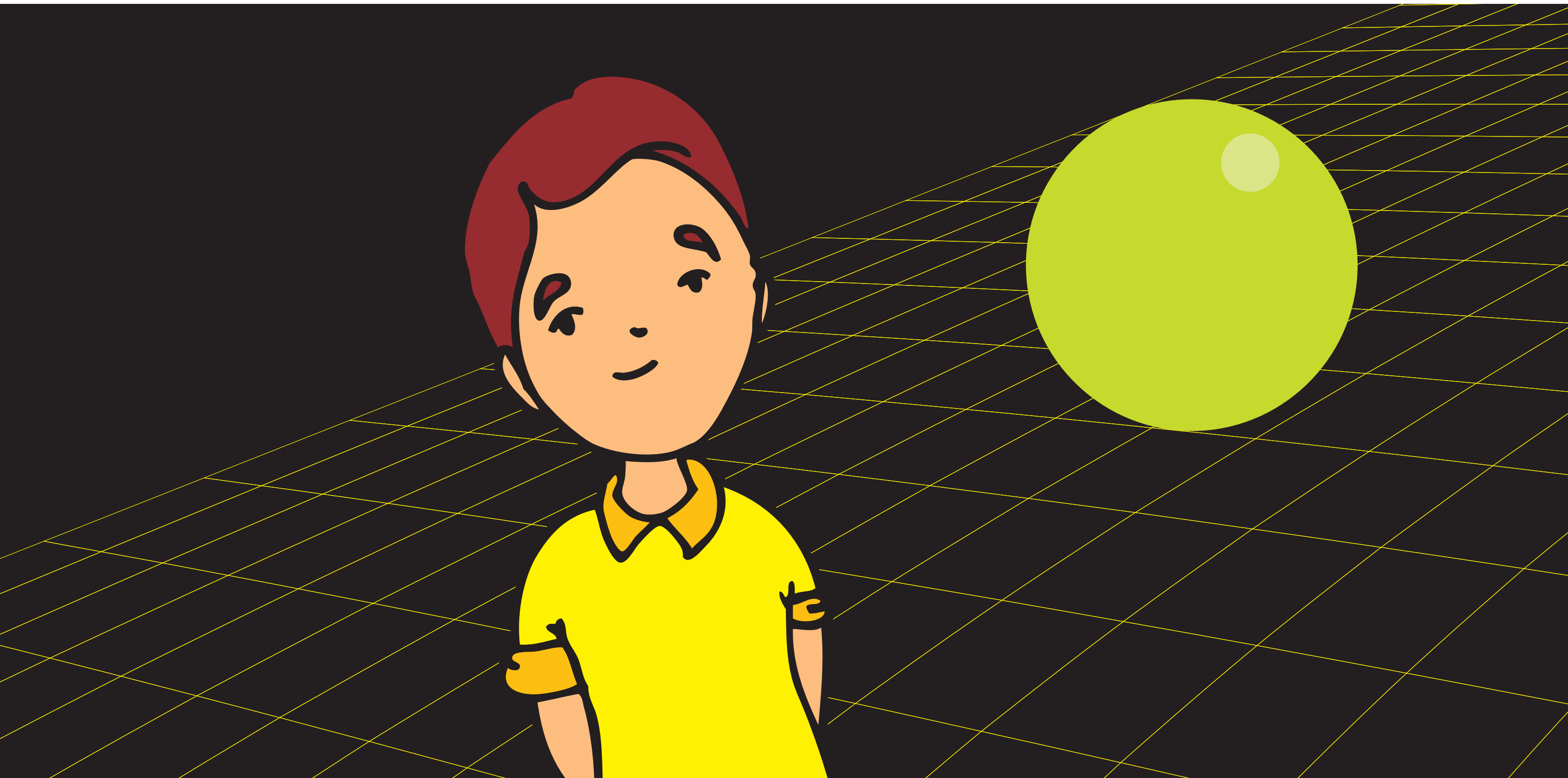
Te has preguntado: ¿Para qué sirven las construcciones geométricas?

El manejo del espacio y de las construcciones geométricas es una gran experiencia para el avance en la formación matemática. El manejo del plano cartesiano, las descripciones y exploraciones de cuerpos y figuras geométricas constituyen el fundamento de futuras demostraciones, construcciones y soluciones de problemas, ampliando así su capacidad de análisis.

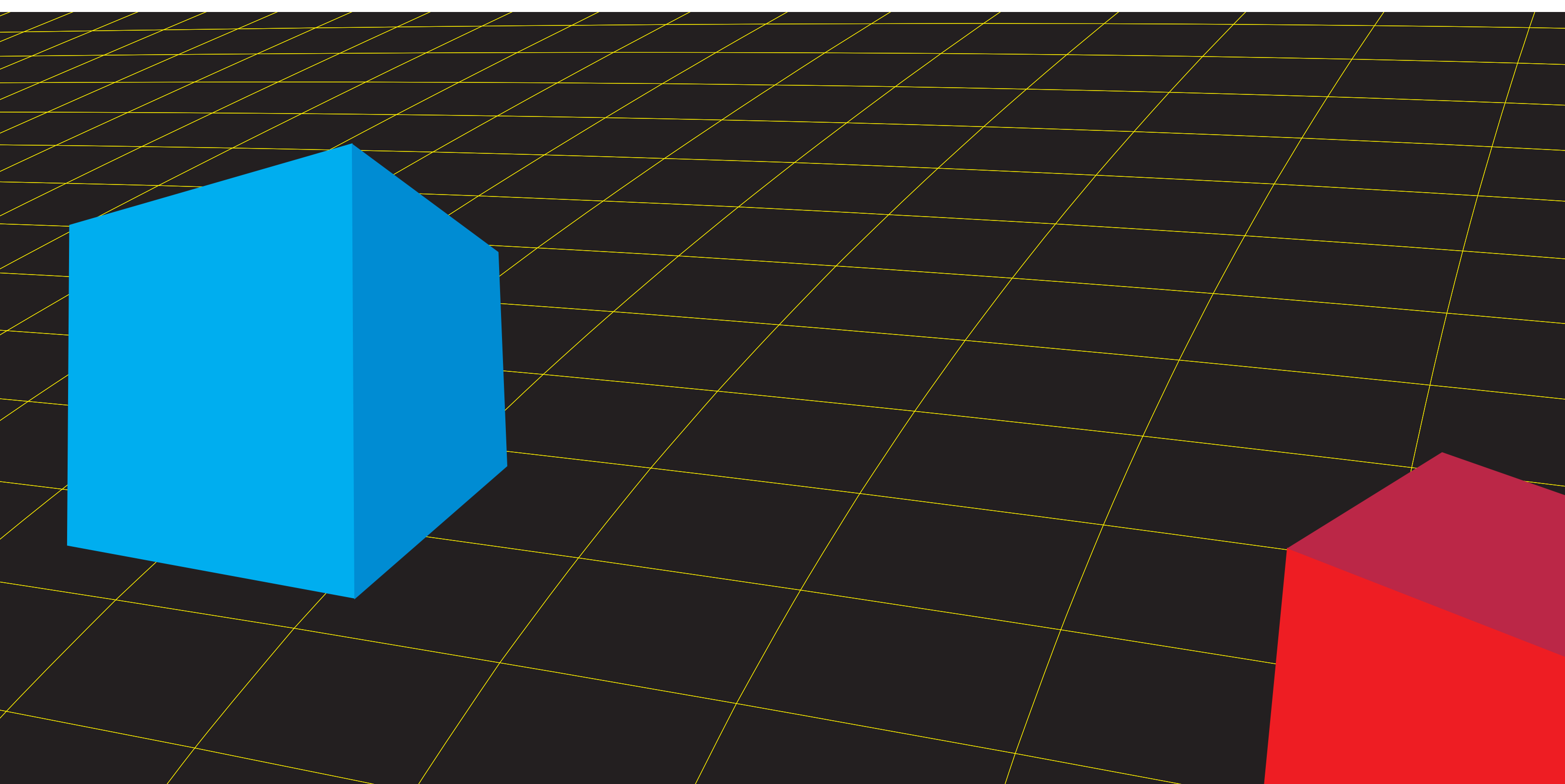
El estudio de las magnitudes y su medida es importante en el currículo de matemáticas desde los niveles de educación primaria hasta la secundaria, debido a su aplicabilidad y uso extendido en una gran cantidad de actividades de la vida diaria.

Estudiar la medición también ofrece la oportunidad de recordar y aplicar otros contenidos matemáticos, como operaciones aritméticas, ideas geométricas, conceptos estadísticos y la noción de función. Todos estos temas permiten establecer conexiones entre diversas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras ciencias.

La geometría ha sido desde los principios de la humanidad un mecanismo utilizado para encontrar soluciones a los problemas más comunes de quienes la han aplicado en su vida, pues, entre otros usos, facilita la medición de estructuras sólidas reales, tanto tridimensionales como superficies planas, y además es bastante útil para la realización de complejas operaciones matemáticas.



<table>
<tr><th>Referentes de calidad</th><th>Capítulos</th></tr>
<tr><td>Estándares</td><td rowspan="7">1. Realizo construcciones y mediciones.
2. Movimientos en el plano.
3. Los sólidos o cuerpos geométricos.</td></tr>
<tr><td>Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.</td></tr>
<tr><td>Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales, en situaciones matemáticas y en el arte.</td></tr>
<tr><td>Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia, usando representaciones visuales.</td></tr>
<tr><td>Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.</td></tr>
<tr><td>Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.</td></tr>
<tr><td>Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.</td></tr>
</table>



Realizo construcciones y mediciones

Los conocimientos sobre el espacio son de gran importancia en la vida de nosotros los seres humanos, pues todos nos movemos en él.

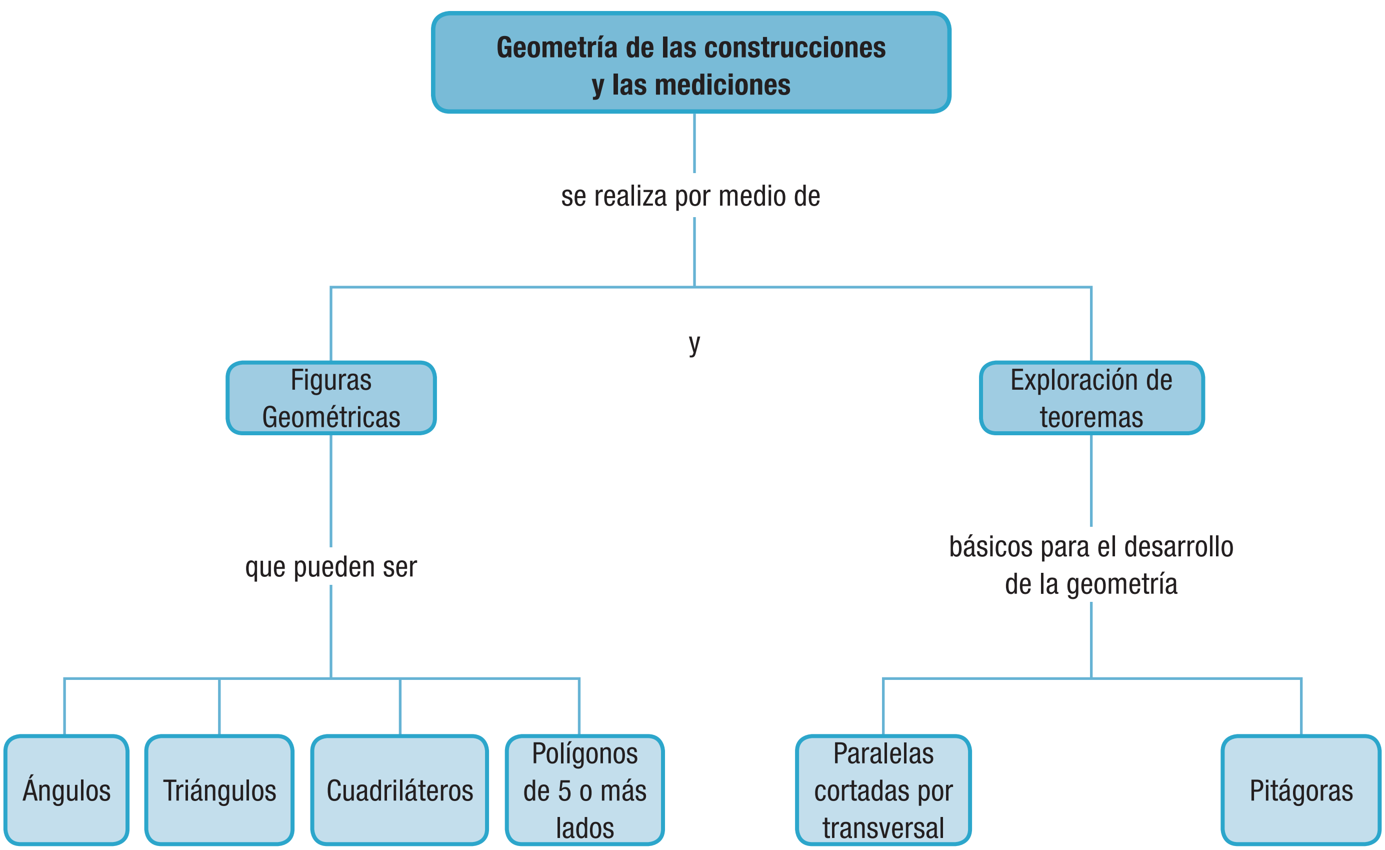
Los objetos que componen la realidad que nos rodea están compuestos por formas y dimensiones diferenciadas, entre los que se establecen determinadas relaciones que configuran aspectos importantes de la vida cotidiana, tales como orden, tamaños, etc.

Tener la oportunidad de vivenciar conceptos geométricos aplicados a nuestra propia vida hace que la geometría se vuelva familiar, como lo ha sido a lo largo de la existencia de la humanidad.

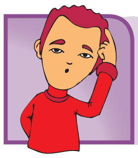
Desde la Antigüedad, las personas han observado el cielo, los mares, las montañas, las llanuras y todo a su alrededor, descubriendo objetos y situaciones que han logrado estudiar, clasificar, representar y analizar hasta tener hoy una gran cantidad de conocimientos que cada día nos ayudan más a progresar y a comprender el mundo.

El estudio y la realización de ejercicios propician la búsqueda de regularidades y el descubrimiento de propiedades que llevarán a obtener conclusiones o generalidades.

Mediante el planteamiento de situaciones cotidianas, se tratará que los alumnos y alumnas actúen interesados por la resolución de problemas espaciales y tengan oportunidad de manifestar su curiosidad y creatividad ante sus descubrimientos.



Tema 1. Figuras geométricas

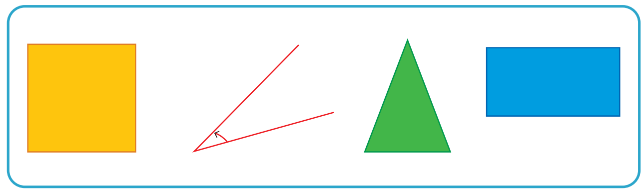


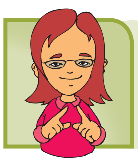
Indagación

Vamos a recordar algunos conocimientos estudiados en los cursos anteriores.

¿Sabes dibujar figuras geométricas?

Reúnete con dos o tres compañeros y cada uno dibuje en su cuaderno las figuras nombradas Luego describan sus características, comparen sus dibujos y discutan sus descripciones.





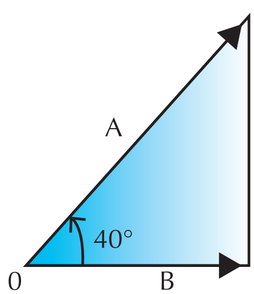
Conceptualización

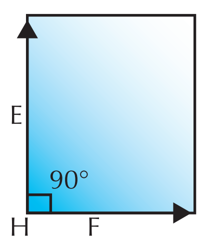
Muchas de las edificaciones y de los objetos que están a nuestro alrededor contienen figuras geométricas.

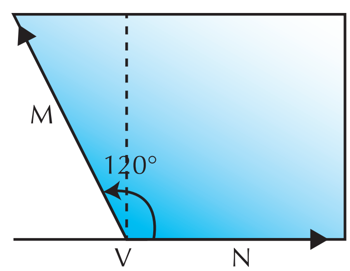
Por ello, resulta importante conocer algunas de sus características.

Ángulos

Observa los ángulos siguientes y estudia las características de cada uno:







SEMIRRECTAS O RAYOS	$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$
VÉRTICE	0
ÁNGULO	∠AOB
AMPLITUD DE ÁNGULO	40°
CLASIFICACIÓN	Agudo

SEMIRRECTAS O RAYOS	$\overrightarrow{HE}$ y $\overrightarrow{HF}$
VÉRTICE	H
ÁNGULO	∠EHF
AMPLITUD DE ÁNGULO	90°
CLASIFICACIÓN	Recto

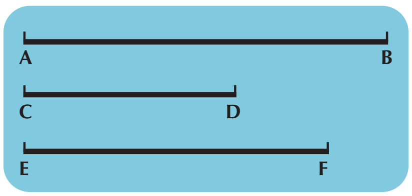
SEMIRRECTAS O RAYOS	$\overrightarrow{VM}$ y $\overrightarrow{VN}$
VÉRTICE	V
ÁNGULO	∠MVN
AMPLITUD DE ÁNGULO	120°
CLASIFICACIÓN	Obtuso

Recordemos algunos otros ángulos como el ángulo llano o plano que mide 180° y el ángulo de una vuelta que mide 360°.

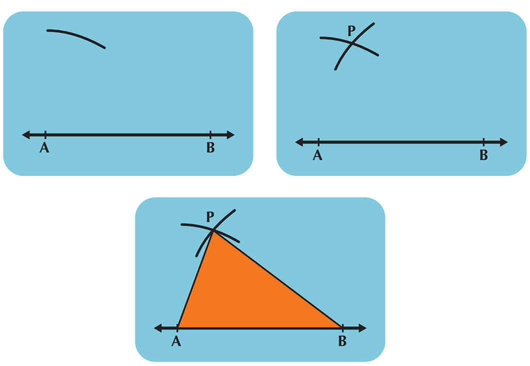
Construcción de triángulos

Se llama triángulo la figura plana que está formada por tres ángulos y tres lados.

1. Vamos a construir un triángulo de lados desiguales, dadas las medidas de sus lados:

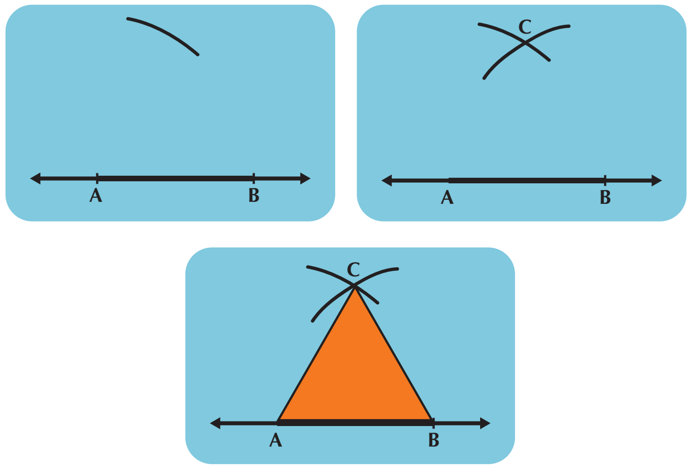


Se traza una recta y sobre ella se mide el segmento AB.
Se abre el compás con la distancia del segmento CD; luego, se hace centro en A y se traza un arco hacia arriba.
Después, se abre el compás hasta alcanzar la distancia EF, y haciendo centro en B, se traza un arco que interseque (corte) al arco que se trazó en el paso anterior; esta intersección se denomina el punto P.



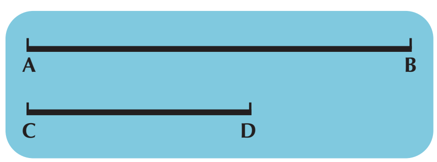
Para terminar, se trazan los segmentos que unan los puntos A con P y B con P, teniéndose así un triángulo ABP, cuyos lados son desiguales. Este triángulo se llama ***triángulo escaleno***.

2. Construyamos un triángulo de lados iguales, conociendo uno de sus lados:
Sea AB el lado dado del triángulo a construir. Haz el dibujo en tu cuaderno.
Se toma con el compás la medida de A a B y, haciendo centro en A, y se traza un arco.
En seguida, haciendo centro en B, con la misma abertura del compás, se traza un arco que interseque al arco anterior, siendo esta intersección el punto C.

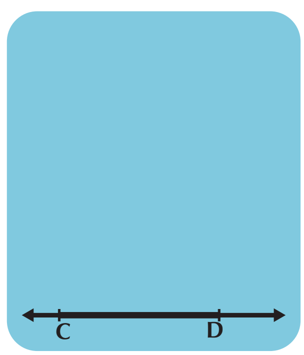


Por último, se trazan los segmentos que unan los puntos A con C y B con C, teniéndose así el triángulo ABC, cuyos lados miden lo mismo y, por ello, se le conoce con el nombre de ***triángulo equilátero***.

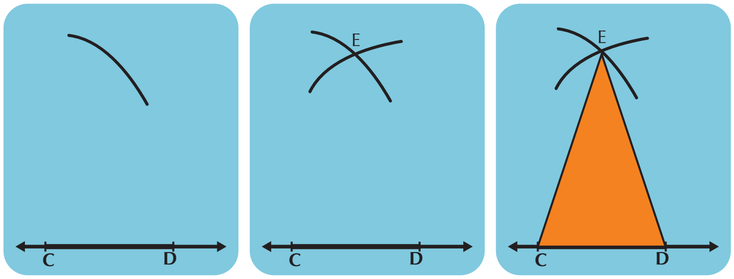
3. Ahora vamos a construir un triángulo, dadas las medidas de dos de sus lados:
sean los lados A B y C D conocidos:



Se traza la recta determinada por los puntos C y D.



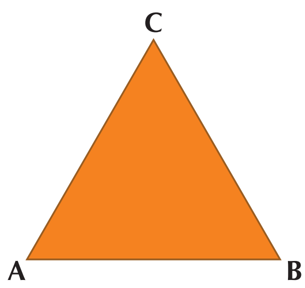
Después, se toma con el compás la medida de A a B y, haciendo centro en C, se traza un arco.



Luego, haciendo centro en D, con la misma abertura del compás, se traza un arco que interseque el arco anterior, siendo esa intersección el punto E. Posteriormente, se trazan los segmentos que unan los puntos E con C y D con E, teniéndose así el triángulo CDE, en el que dos de sus lados miden lo mismo (segmento AB). Este triángulo recibe el nombre de ***triángulo isósceles***.

Otra clasificación de los triángulos es de acuerdo con la medida de sus ángulos interiores:

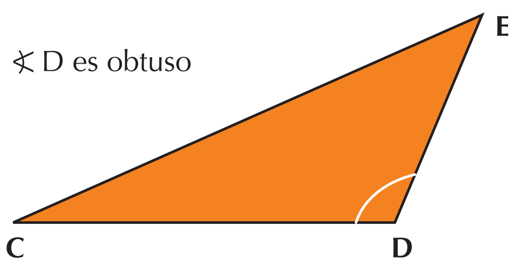
a. Triángulo acutángulo: es aquel cuyos ángulos son agudos (menores de 90º).



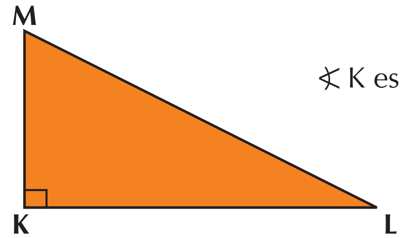
De la figura se observa que los ángulos ∢A, ∢B y ∢C son menores de 90°.

b. Triángulo obtusángulo: es aquel que tiene un ángulo obtuso (mayor de 90º y menor 180º):

∢D es obtuso



c. Triángulo rectángulo: es el que tiene un ángulo recto, es decir, que mide 90º.

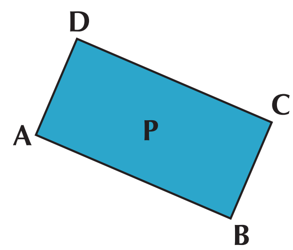


∢K es recto, mide 90°

Cuadriláteros

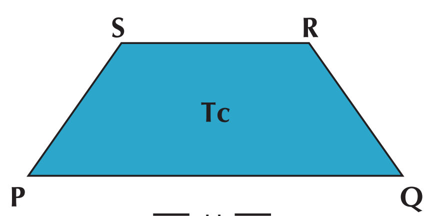
A los polígonos de cuatro lados se les llama cuadriláteros. Observa las figuras:

a. En la figura se observa que el cuadrilátero tiene dos pares de lados opuestos paralelos, por lo que se le llama **paralelogramo**.



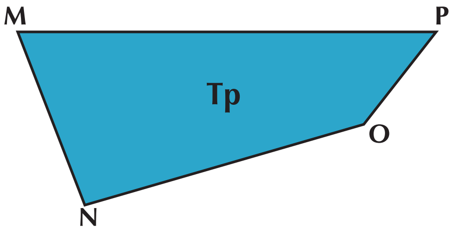
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

b. En esta figura, el cuadrilátero muestra solo un par de lados paralelos y se le designa con el nombre de **trapecio**.



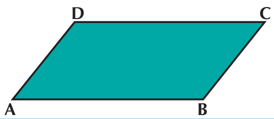
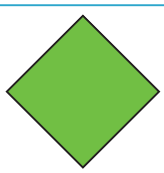
$\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$

c. El cuadrilátero de la figura presenta todos sus lados desiguales y ninguno de ellos es paralelo, por lo que recibe el nombre de **trapezoide**.



Paralelogramos

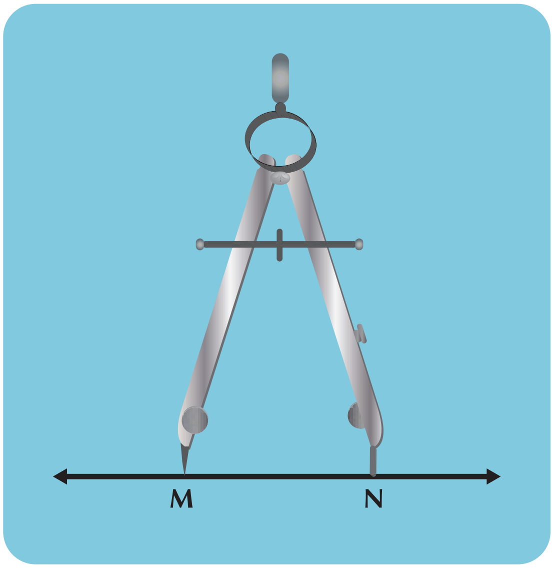
Son cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos, como los siguientes:

	**Romboide:** los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son paralelos, así como $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$.
	**Rectángulo:** sus cuatro ángulos interiores son rectos, por lo tanto son congruentes.
	**Cuadrado:** sus lados son congruentes y paralelos y sus cuatro ángulos son rectos.
	**Rombo:** sal igual que el cuadrado, tiene sus cuatro lados congruentes y son paralelos, pero sus ángulos no son rectos.

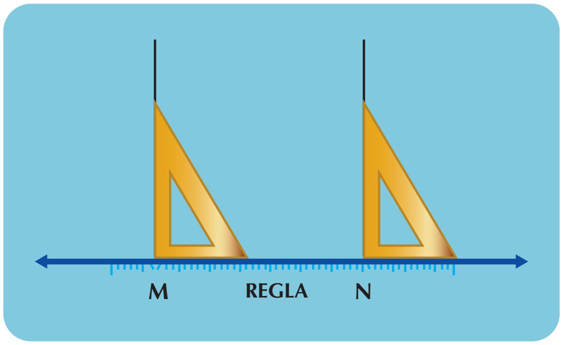
Para su construcción, utilizando escuadras y el compás, se puede proceder así:

Primera construcción: Considera los segmentos MN y RS como los lados conocidos de la figura.

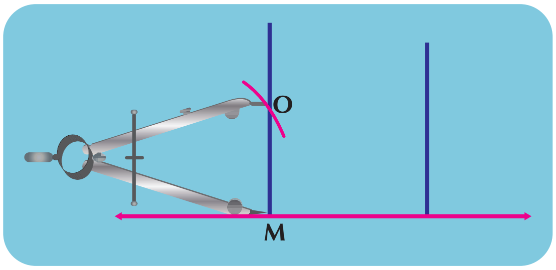
a. Se traslada con el compás el segmento conocido MN sobre una recta:



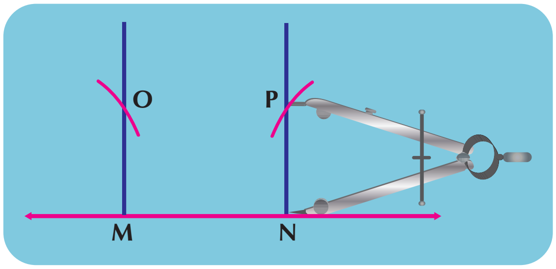
b. Con las escuadras se levantan, perpendiculares desde los puntos M y N:



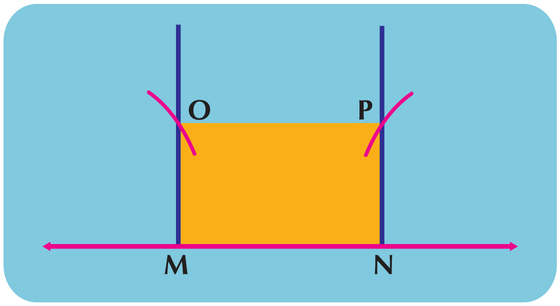
c. Con una abertura de compás igual a RS, y apoyándose en M, se traza un arco que corte la línea perpendicular a M, en el punto O:



d. Se repite el trazo anterior, apoyándose en N, para obtener el punto P:



e. Se unen los puntos O y P, y queda terminada la figura:



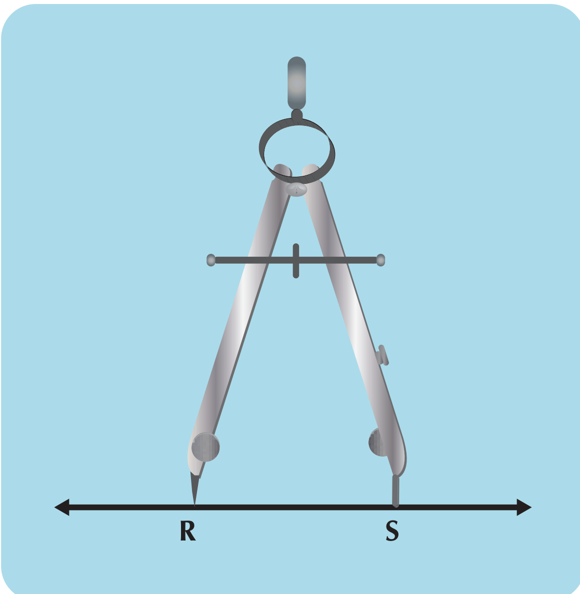
En esta construcción, se observa que:

1. La figura construida corresponde a un **rectángulo.**
2. Sus lados opuestos son paralelos y de igual longitud.
3. Sus cuatro ángulos internos son rectos (tienen una amplitud o medida de 90º).

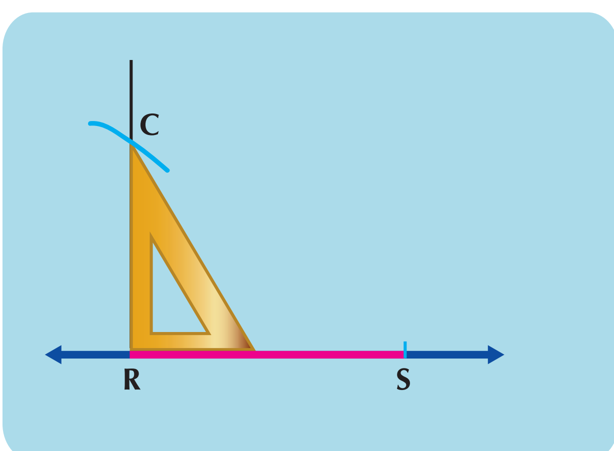
Por lo que $OM \perp MN$ y $PN \perp MN$.

Segunda construcción: Sea el segmento RS cualquiera de sus lados; construyamos la figura, siguiendo las instrucciones que a continuación se expresan:

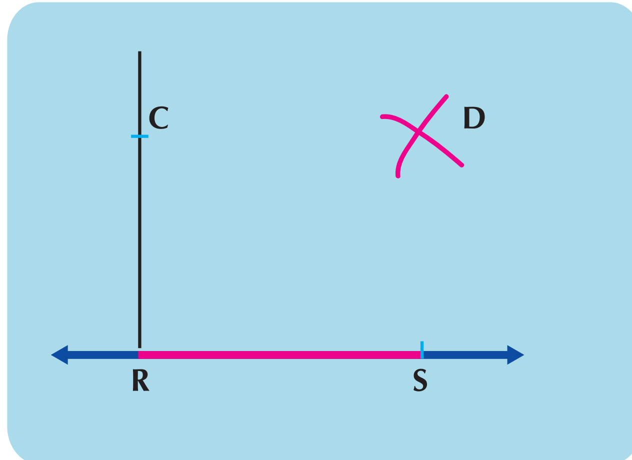
a. Se lleva con el compás el lado conocido sobre una recta:



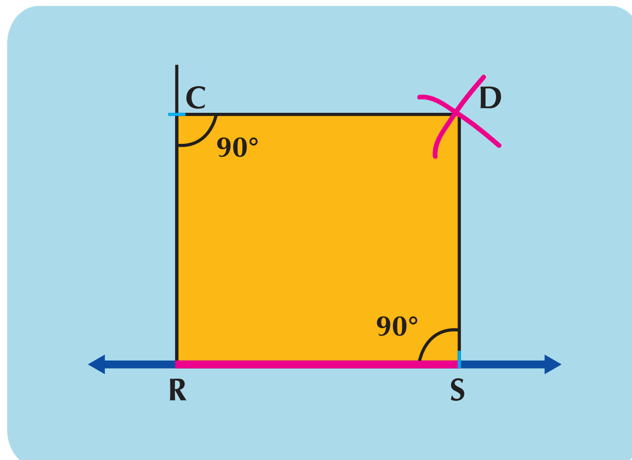
b. Se levanta con la escuadra y con el compás una perpendicular a R, y se marca el punto C:



c. Desde los puntos C y S, con una abertura de compás igual a la longitud del segmento RS, se marcan arcos que se cortan en el punto D:



d. Se trazan los segmentos de rectas CD y DS, y resulta la figura pedida:



Por tanto,

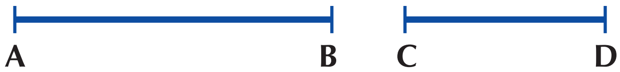
$\overline{CR}$ // $\overline{DS}$ y $\overline{RS}$ // $\overline{CD}$.

En la segunda construcción se observa que:

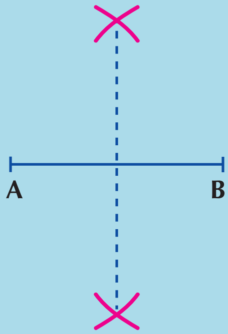
1. La figura construida corresponde a un ***cuadrado***.
2. Tiene cuatro lados de igual medida:
   RS = CD = CR = DS.
3. Sus cuatro ángulos son rectos o de 90°.
4. Sus lados opuestos son paralelos.

Tercera construcción: Dadas dos diagonales de una figura, constrúyela de acuerdo con el procedimiento siguiente:

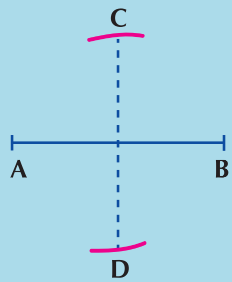
sean los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$:



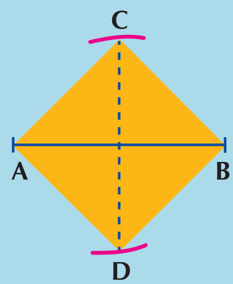
a) Con el compás se traza una perpendicular en la mitad de la diagonal AB:



b) Con abertura del compás igual a la mitad de la diagonal CD, se corta por ambos lados la perpendicular:



c) Con la regla o escuadra se unen los puntos A, B, C y D:



Entonces, $\overline{AD}$ || $\overline{BD}$ y $\overline{DB}$ || $\overline{AC}$.

En la tercera construcción se observa que:

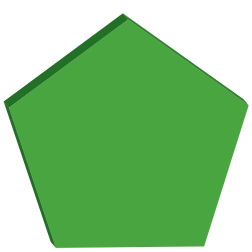
1. La figura construida corresponde a un ***rombo***.
2. Tiene los cuatro lados de igual longitud: AD = DB = BC = AC.
3. Sus ángulos opuestos son iguales y, en este caso, no son rectos.
4. Sus lados opuestos son paralelos.

Polígonos regulares de 5, 6, 7 y 8 lados

Un polígono regular es aquel que tiene todos sus lados de igual longitud y ángulos de igual medida.

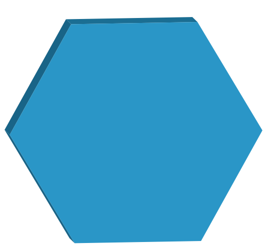
De acuerdo con el número de lados, el polígono tiene un nombre especial. Veamos:

De 5 lados



Pentágono

De 6 lados

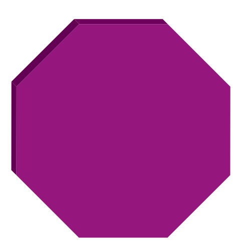


Hexágono

De 7 lados

Heptágono

De 8 lados



Octágono

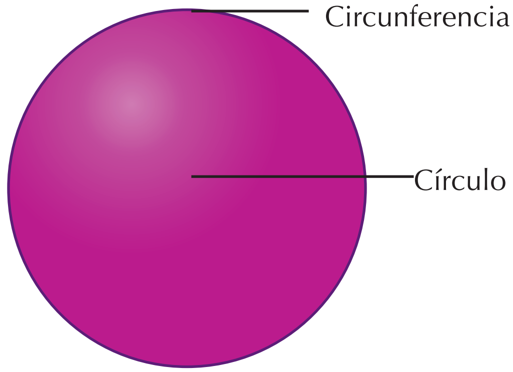
Aprendamos que:
el polígono regular de 3 lados se llama ***triángulo equilátero***,
el polígono regular de 4 lados se llama ***cuadrado***,
el polígono regular de 5 lados se llama ***pentágono regular***,
el polígono regular de 6 lados se llama ***hexágono regular***,
el polígono regular de 7 lados se llama ***heptágono regular***,
el polígono regular de 8 lados se llama ***octágono regular***.

Hay otros polígonos como: el *nonágono* (nueve lados),
decágono (diez lados),
endecágono (once lados) y
dodecágono (doce lados).

En los siguientes polígonos, es decir, de más de doce lados, se indica únicamente el número de lados, por ejemplo: polígono de trece lados.

Círculo y circunferencia

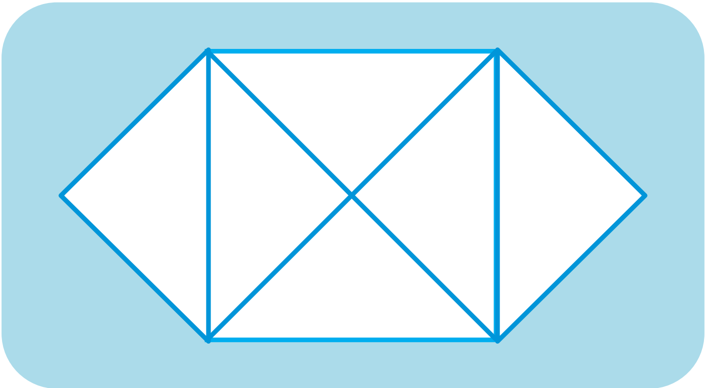
- Un círculo puede ser tomado como un polígono de infinito número de lados.
- El círculo puede describirse como una figura plana limitada por una circunferencia.
- La circunferencia es el contorno del círculo.
- La circunferencia tiene longitud y el círculo tiene área.



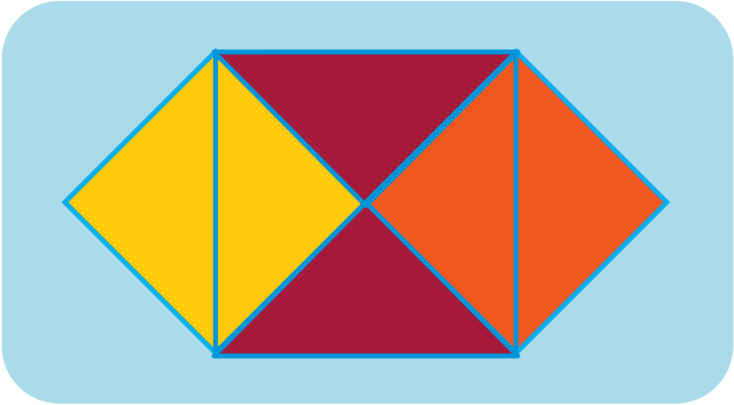
Aplicación

Copia en tu cuaderno los ejercicios siguientes, resuélvelos y compara tus respuestas con las de otros compañeros. Si tuviste errores, por favor corrígelos.

1. De un solo trazo, dibuja la figura siguiente sin despegar el lápiz de papel y sin pasar dos veces por la misma línea. Marca sobre la figura la división de los trazos que hiciste para llegar a la solución.

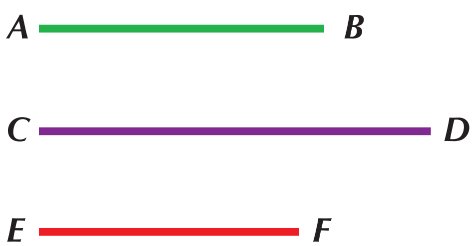


2. Observa la figura que hiciste, si quieres coloréala y contesta las preguntas:



   a. ¿Cuántas figuras de diferente forma hay?
   b. ¿Cuáles son?
   c. ¿Cuántos triángulos hay en total?
   d. ¿Cuántos cuadrados hay en total?
   e. ¿Cuántos trapecios hay en total?
   f. ¿Cuántos pentágonos hay en total?
   g. ¿Hay otro tipo de figuras diferente de las mencionadas?
   h. Dibuja los cuadrados en la misma posición en que los ves, pero separados.

3. Dados los tres segmentos, siguientes construye en tu cuaderno el triángulo correspondiente.



   Compara tu figura con la de tus compañeros.
   Si varios estudiantes recortan este triángulo y colocan uno sobre otro, ¿qué observan al superponerlos?

4. A partir del siguiente segmento, construye un triángulo equilátero.

   a. Usa el mismo segmento para construir un triángulo isósceles.
   b. ¿Qué ocurre si comparas este triángulo con el que han dibujado algunos de tus compañeros?

5. Construye, con escuadras y un compás, un rectángulo; considera los siguientes segmentos como lados conocidos de la figura:

Traslada con el compás el segmento AB, sobre una recta x que dibujes. Levanta perpendiculares a los puntos A y B con las escuadras. Con una abertura del compás igual al segmento CD, apoyándote en A y luego en B, corta las perpendiculares en los puntos E y F.

Une estos puntos y quedará terminado el paralelogramo. ¿Cómo lo denominamos?

6. Si en la construcción anterior, los segmentos AB y CD fueran de la misma longitud, ¿qué figura obtendrías?, ¿podrían también llamarla rectángulo?
7. Copia en tu cuaderno las siguientes figuras y completa la tabla:

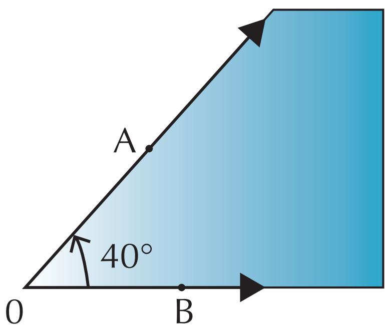


Figura 1

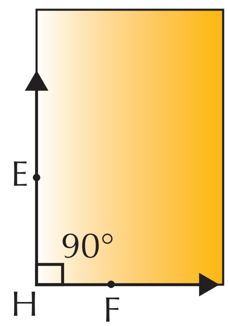


Figura 2

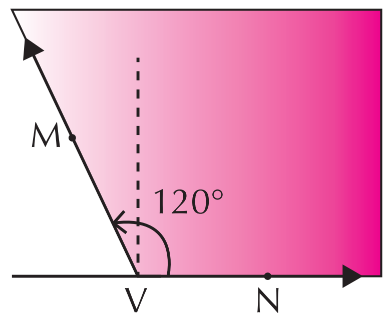


Figura 3

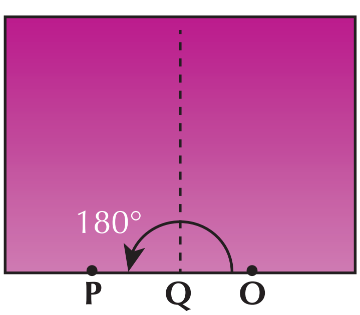


Figura 4

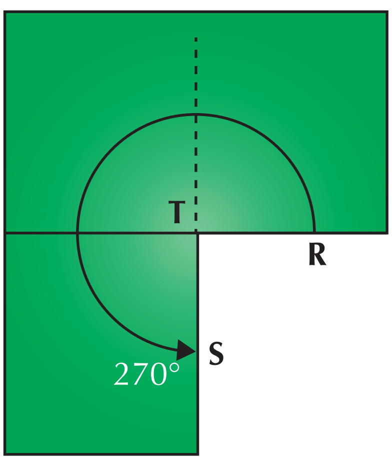


Figura 5

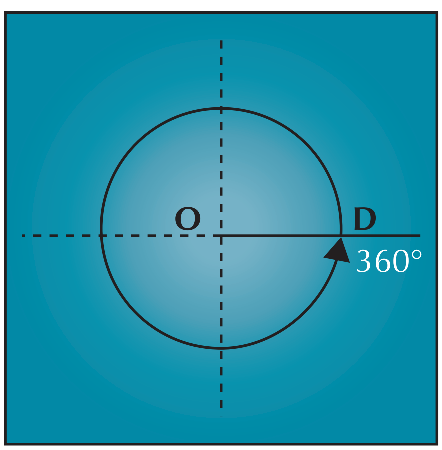
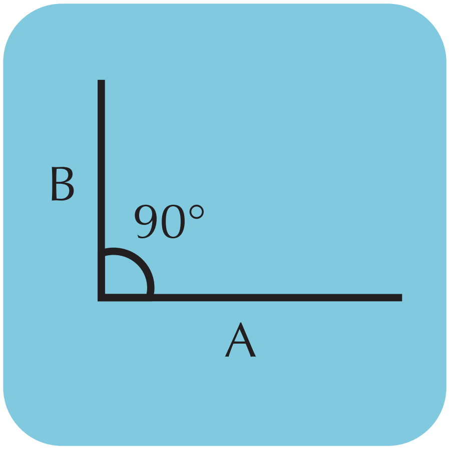


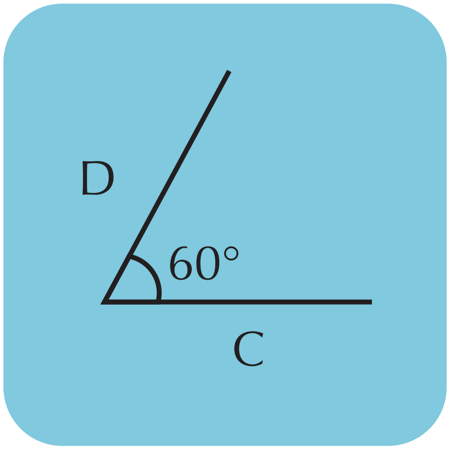
Figura 6

	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Semirrectas o rayos						DOD
Vértice	O				T	
Ángulo				$\angle OQP$		
Amplitud del ángulo		90°				
Clasificación					Tres cuartos de vuelta	

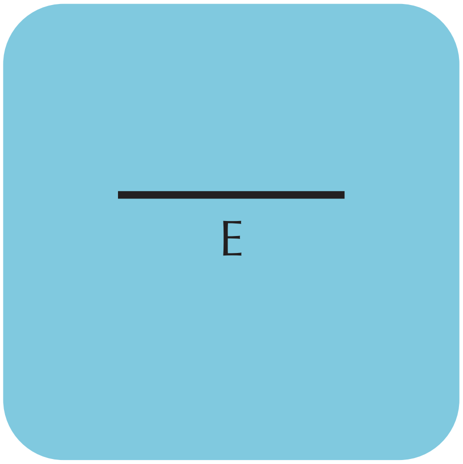
8. Ahora, con otro compañero, termina la construcción de los siguientes paralelogramos; utiliza regla y escuadras. Haz los dibujos en tu cuaderno:



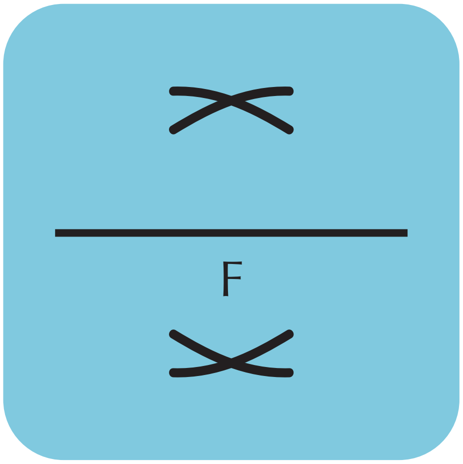
a. Rectángulo



b. Rombo



c. Cuadrado



d. Rombo

9. Construye una figura de tres lados que tenga una base de 4 cm y que dos de sus ángulos midan 65° cada uno. Al final, describe la clase de figura que te resulta.

   Sigue el procedimiento descrito a continuación:

   a. Traza un segmento de recta horizontal con dimensión 4 cm y llama sus extremos A y B.
   b. Coloca el transportador en la base AB, de manera que su centro coincida en el extremo A primero y después en el B, marcando en ambos casos el ángulo de 65°.
   c. Traza los ángulos marcados prolongando las líneas hasta que se corten y quedará terminada la figura que corresponde a un: __________
   d. Si el segmento AB no está sobre una recta horizontal, ¿qué figura obtienes?

10. Construye una figura de tres lados que tenga: 3 cm en la base, un lado de igual medida y no de sus ángulos sea recto.

    Sigue el procedimiento descrito a continuación:

    a. Traza un segmento de recta horizontal con dimensión 3 cm y llama sus extremos CD.
    b. Coloca el transportador sobre el segmento CD, haciendo coincidir el centro del ángulo de los extremos para marcar el ángulo de 90°.
    c. Traza el ángulo con la regla.
    d. Ahora, con una abertura del compás igual a 3 cm y apoyándote en el vértice, corta esta línea y llama O al punto de corte.
    e. Une el punto O con el extremo opuesto al vértice del ángulo y completarás así la construcción de la figura que corresponde a un __________
    f. Describe la clase de figura que te resulta.

Entendemos por…

Polígono la figura simple cerrada situada en un plano, formada por tres o más segmentos de recta.

Polígonos semejantes a dos polígonos cuyos ángulos correspondientes son guales y sus lados correspondientes son proporcionales.

Los polígonos semejantes tienen la misma forma, pero pueden no tener el mismo tamaño.

Diversión matemática

Con material reciclable como periódico, plástico, tela, alambre, palitos, piola o similares, construye una cometa que pueda remontar las alturas. Invéntale a tu cometa, una cola con trozos de tela, retazos viejos, corbatas que ya no uses.

Esto puedes hacerlo con otro compañero.

Día a día

La parcela

El término parcela se utiliza para nombrar a una porción pequeña de tierra uniforme, que suele considerarse como parte de otra mayor que ha sido comprada, adjudicada o expropiada.

Es posible analizar la parcela desde distintas perspectivas. La división de terrenos en parcelas se conoce como **parcelación**. En concreto, la parcelación urbanística es la división sucesiva de terreno en varias parcelas con el objetivo de urbanizarlos o edificarlos.

Por ejemplo: ***"Mi abuelo planea dividir el terreno en varias parcelas para alquilárselas a distintos productores", "Me compré una pequeña parcela en un barrio privado para construir una casa".***

En el lenguaje cotidiano, por último, una parcela es una parte pequeña de alguna cosa: **"Domínguez tuvo una actuación bastante pobre, ya que se limitó a recorrer solo una pequeña parcela del campo de juego"**.

Tema 2. Exploración de teoremas

Indagación

Las estructuras de los puentes están diseñadas con materiales resistentes al uso y de acuerdo con la carga que van a soportar.

Muchos puentes están construidos con madera de diferentes tipos y la forma del diseño está hecha con perfiles dispuestos en grupos de rectas paralelas y secantes, a veces en forma de cruz, en cuyo trazado pueden identificarse triángulos.

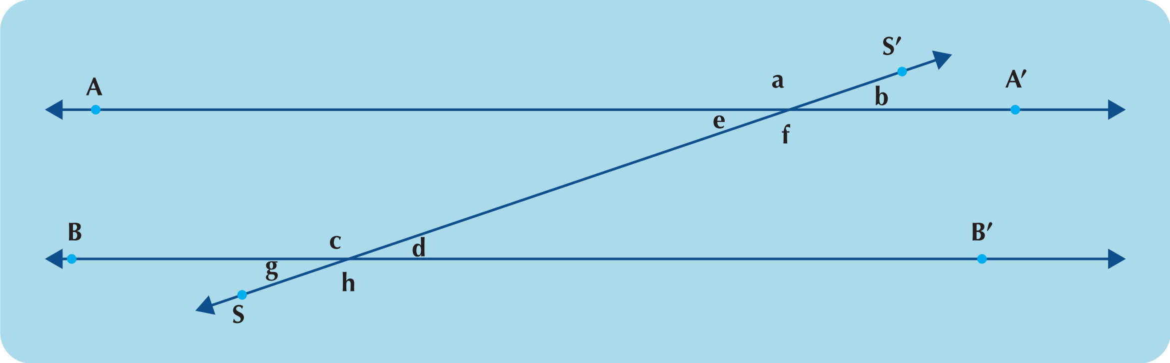
¿Cuál crees tú que es la razón por la cual el diseño del puente se haya construido de esta forma?

Conceptualización

Ángulos formados por dos paralelas y una secante o dos paralelas cortadas por una transversal

Una vez que ya se conocen las rectas paralelas y la recta secante, se estudiarán ahora los ángulos que se forman cuando una secante corta a las rectas paralelas: situación que ilustra la figura siguiente:

De la figura se tiene que: $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$ (se lee: la recta AA´ es paralela a la recta BB´), en la que la recta secante $\overleftrightarrow{SS'}$ corta a las dos paralelas y forman ocho ángulos, los cuales se representan por letras minúsculas (a, b, e, f, c, d, g y h) y se identifican por parejas de acuerdo con su posición, en la siguiente forma:

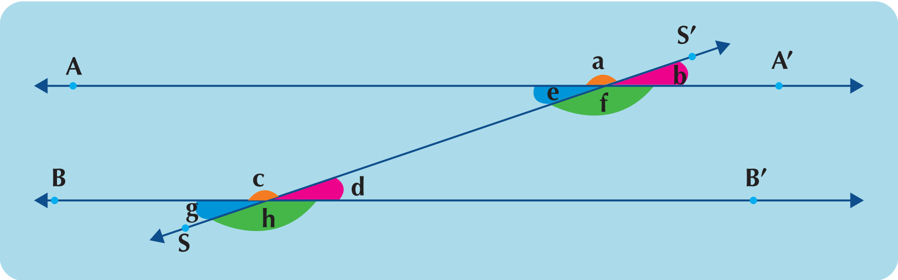


Ángulos correspondientes

Son los ángulos que se encuentran en un mismo lado de la secante, formando parejas, uno interno y otro externo.

Los ángulos correspondientes son:

$\angle a$ y $\angle c$; $\angle e$ y $\angle g$; $\angle b$ y $\angle d$; $\angle f$ y $\angle h$;

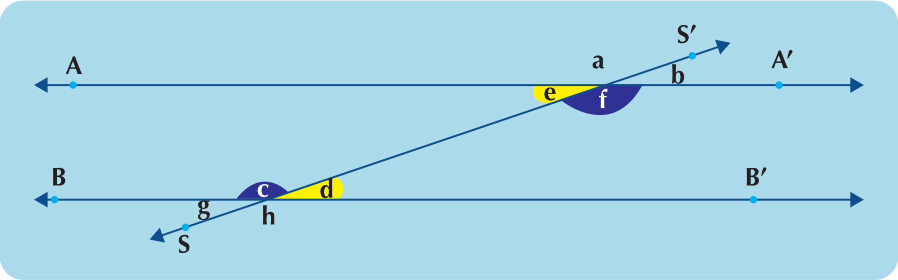


Ángulos alternos internos

Son los ángulos interiores que se encuentran a uno y otro lado de la secante, entre las dos rectas paralelas.

Los ángulos alternos internos son:

$\angle e$ y $\angle d$; y $\angle c$ y $\angle f$.

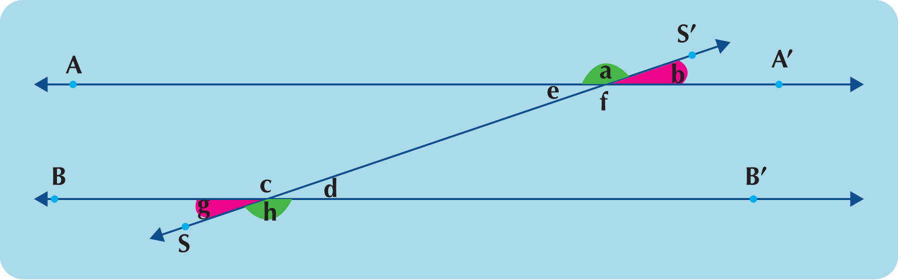


Ángulos alternos externos

Son los ángulos exteriores que se encuentran a uno y otro lado de la secante.

Los ángulos alternos externos son:

$\angle a$ y $\angle h$; y $\angle b$ y $\angle g$.

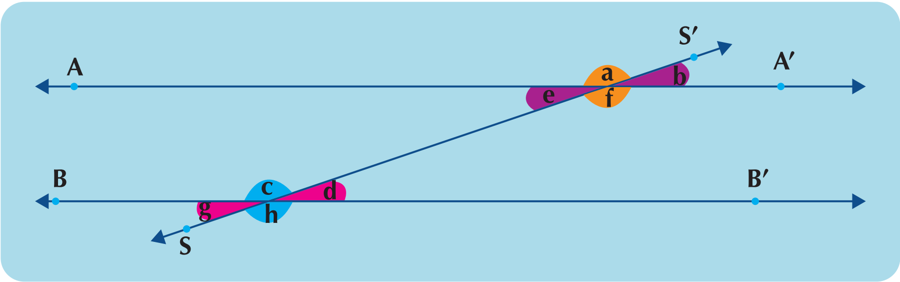


Ángulos opuestos por el vértice

Son aquellos que tienen en común el mismo vértice, pero se oponen el uno al otro.

Los ángulos opuestos por el vértice son:

$\angle a$ y $\angle f$; $\angle b$ y $\angle e$; $\angle c$ y $\angle h$; y $\angle d$ y $\angle g$.



Como los ángulos opuestos por el vértice tienen igual medida, entonces decimos que son *congruentes*.

m ∠ a = m ∠ f, por lo que ∠ a ≅ ∠ f, y se lee: la medida del ángulo **a** es igual a la medida del ángulo **f**, por lo que el ángulo **a** es congruente con el ángulo **f**.

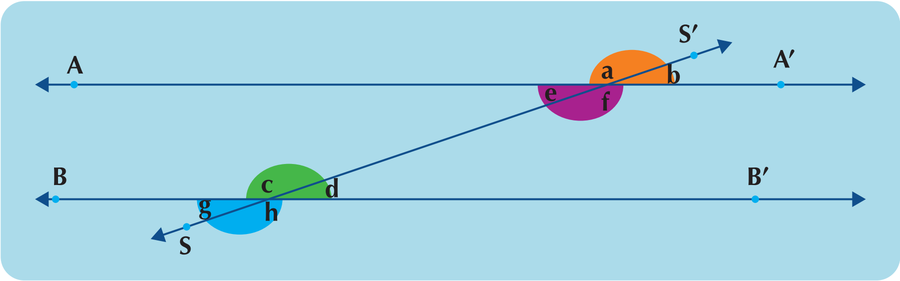
m ∠ b = m ∠ e, por lo que ∠ b ≅ ∠ e, y se lee: la medida del ángulo **b** es igual a la medida del ángulo **e**, por lo que el ángulo **b** es congruente con el ángulo **e**.

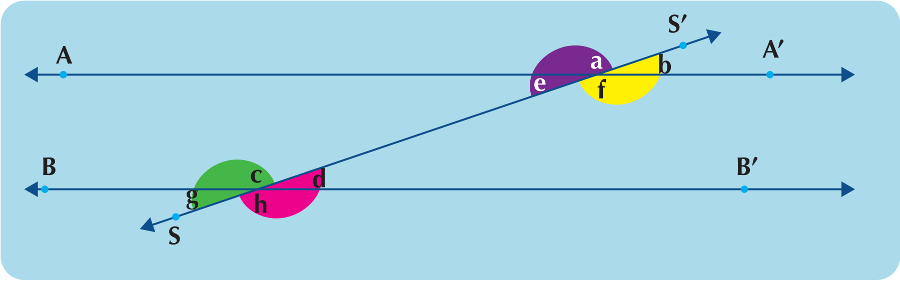
m ∠ c = m ∠ h, por lo que ∠ c ≅ ∠ h, y se lee: la medida del ángulo **c** es igual a la medida del ángulo **h** por lo que el ángulo **c** es congruente con el ángulo **h**.

m ∠ d = m ∠ g, por lo que ∠ d ≅ ∠ g, y se lee: la medida del ángulo **d** es igual a la medida del ángulo **g** por lo que el ángulo **d** es congruente con el ángulo **g**.

Ángulos suplementarios

Dos ángulos cuya suma dé 180° se llaman suplementarios:





Ahora vamos a buscar el valor de todos los ángulos formados por dos paralelas cortadas por una transversal o secante, cuando se conoce la medida de uno de sus ángulos.

Si cuando una secante corta dos rectas paralelas, uno de sus ángulos es de 60°. Determinar la medida de los otros ángulos.

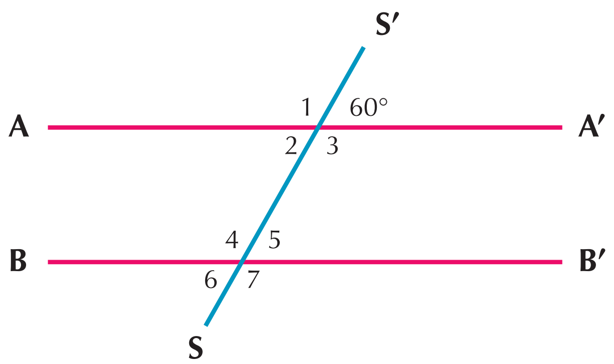
Como el $\angle$ 1 es suplementario de 60°, entonces:

m $\angle$ 1 + 60º = 180º, por tanto m $\angle$ 1 = 180º - 60º luego m $\angle$ 1 = 120º.

El $\angle$ 3 es opuesto por el vértice al $\angle$ 1, es decir, al de 120°, por lo que tienen igual medida: m $\angle$ 3 = 120º.

Por tanto, el $\angle$ 2 es opuesto por el vértice al $\angle$ de 60°, por lo que tienen igual medida: m $\angle$ 2 = 60º.

Los ángulos colaterales son:



$\angle$ 1 y $\angle$ 6; $\angle$ 2 y $\angle$ 4; $\angle$ 3 y $\angle$ 5; y $\angle$ 7 y $\angle$ de 60º.

Si m $\angle$ 1 = 120°, entonces m $\angle$ 6 = 60°.

Si m $\angle$ 2 = 60°, entonces m $\angle$ 4 = 120°.

Si m $\angle$ 3 = 120°, entonces m $\angle$ 5 = 60°.

Como el $\angle$ 7 es suplementario de 60°, entonces m $\angle$ 7 = 120°.

Los ángulos alternos son congruentes.

Dos parejas de ángulos son alternos internos: $\angle$ 3 y $\angle$ 4, y $\angle$ 2 y $\angle$ 5.

Dos parejas de ángulos son alternos externos: $\angle$ 1 y $\angle$ 7; y $\angle$ 6 y $\angle$ de 60°.

Si m $\angle$ 3 = 120°, entonces m $\angle$ 4 = 120°.

Si m $\angle$ 2 = 60°, entonces m $\angle$ 5 = 60°

Si m $\angle$ 1 = 120°, entonces m $\angle$ 7 = 120°.

Como el $\angle$ 6 es alterno externo del $\angle$ de 60°, entonces m $\angle$ 6 = 60°.

De lo anterior se cumple que:

Cuando una secante o transversal corta a dos rectas paralelas se forman ángulos colaterales, correspondientes, alternos y opuestos.

Los ángulos correspondientes y alternos son congruentes.

Los ángulos colaterales son suplementarios.

Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus ángulos es de 180º.

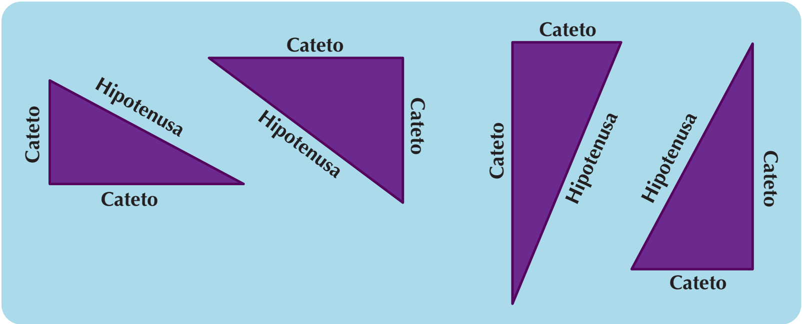
Los ángulos congruentes son los que tienen igual medida.

Exploración del teorema de Pitágoras

Recordemos algunos términos:

Triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto.

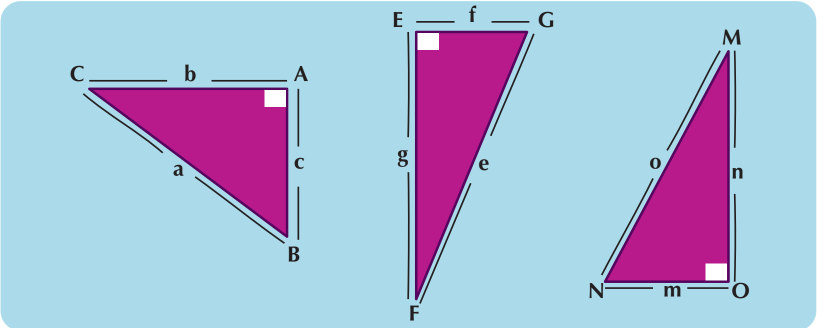
Las figuras siguientes son triángulos rectángulos:



En un triángulo rectángulo, a los lados que forman el ángulo recto (90°) se les conoce como catetos y al segmento que los une se le llama *hipotenusa*.

Los vértices de un triángulo se nombran con una letra mayúscula y cada lado del triángulo se nombra con la letra minúscula correspondiente a la del ángulo opuesto (del frente).

Así, en los triángulos siguientes, observamos:



Para el triángulo ABC: el cateto **b** es el lado que está opuesto al ángulo B, el cateto **c** es el lado opuesto al ángulo C y la hipotenusa **a** es el lado opuesto al ángulo recto A.

Para el triángulo EFG: **f** y **g** son catetos y **e** es la hipotenusa.

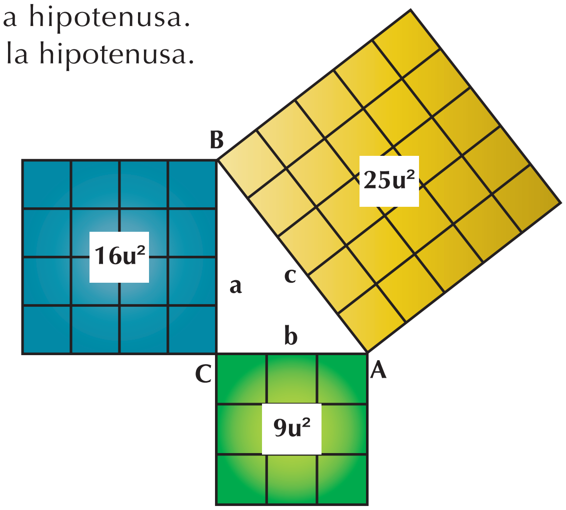
Para el triángulo MNO: **m** y **n** son catetos y **o** es la hipotenusa.

Veamos ahora qué establece el teorema de Pitágoras:

Se dibuja el triángulo rectángulo ABC, cuyas medidas de sus catetos son 3 unidades (3u) y 4 unidades (4u); y su hipotenusa mide 5 unidades (5u).

Con cada uno de sus lados se han construido los cuadrados correspondientes.

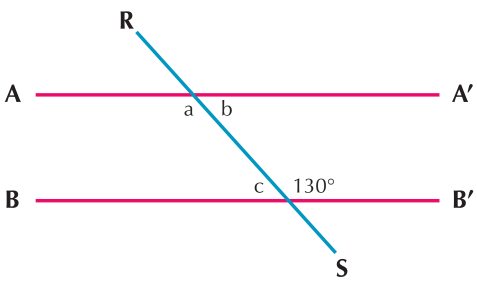
Copia esta figura y cuenta los cuadritos, es decir, las unidades cuadradas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo.



Aplicación

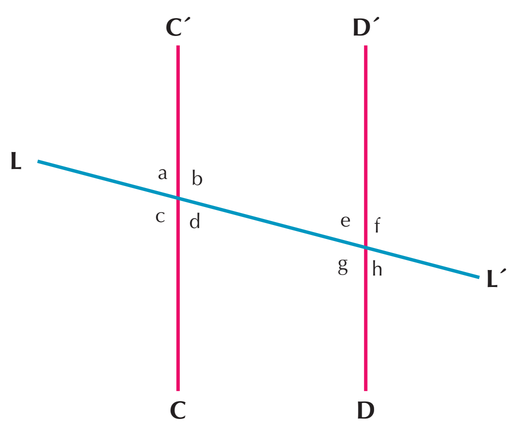
Copia los ejercicios en tu cuaderno, sigue las instrucciones, resuélvelos y al finalizar compara con algunos de tus compañeros.

1. Si se tiene la siguiente figura:

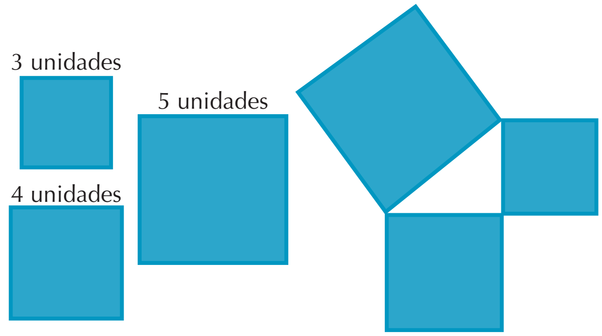


   Determina la medida de los ángulos ∠ a, ∠ b y ∠ c.

2. Haz una figura como la siguiente:
   Luego colorea de un mismo color los ángulos que midan lo mismo.



3. En una hoja cuadriculada, dibuja y recorta un cuadrado de lado 4 unidades (puedes tomar como unidad de medida 1, 2, 3 o más cuadritos de tu hoja cuadriculada. Luego dibuja también otro cuadrado de 3 unidades de lado y otro cuadrado de 5 unidades de lado.
   Pégalos sobre un trozo de cartulina y resuelve los literales a) b) y c):



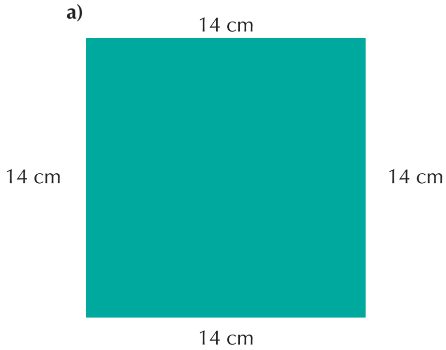
   a. Escribe las medidas de los lados del triángulo que se forma entre los cuadrados. Compara tu trabajo con el de alguno de tus compañeros.
   b. Cuenta las unidades cuadradas (cuadritos) de cada cuadrado que construiste y escríbelas sobre ellos.
   c. Comprueba que la suma de las unidades cuadradas de los dos cuadrados pequeños es igual al número de las unidades cuadradas del cuadrado grande.

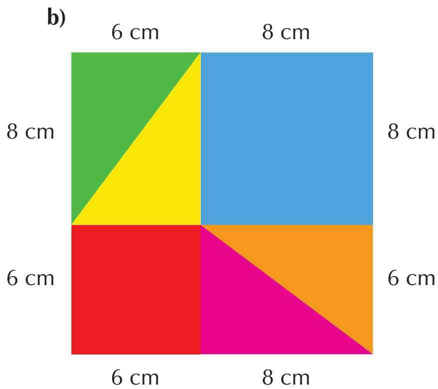
4. Toma una regla o escuadra y traza un triángulo rectángulo (que tenga un ángulo recto, es decir, de 90°), cuyos catetos midan 6 cm y 8 cm.

   a. Cuenta los centímetros que mide la hipotenusa.
   b. Traza el cuadrado sobre cada lado del triángulo y divídelo en cuadrados de un centímetro por lado.
   c. Cuenta los centímetros cuadrados (cuadritos) que resultan en cada cuadrado construido sobre los catetos.
   d. Cuenta los centímetros cuadrados del cuadrado construido sobre la hipotenusa.
   e. Suma el número de centímetros cuadrados de cada cuadrado construido sobre los catetos y compara el resultado con el número obtenido en el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

5. Con un compañero haz un rompecabezas que te permita verificar el teorema de Pitágoras, siguiendo as siguientes instrucciones:

   a. Construye un cuadrado de lado 14 cm y recórtalo. Lo mantendrás como base. Coloréalo.
   b. Sobre otro cuadrado de lado 14 cm haz los siguientes trazos y recorta las piezas que señala el dibujo.

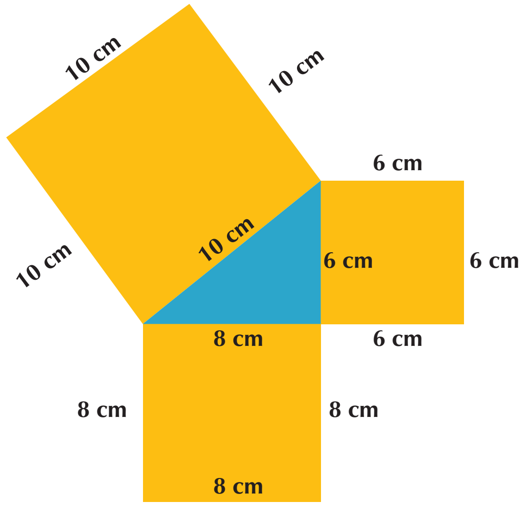




Tu rompecabezas está compuesto por: dos cuadrados, uno de 6 cm de lado y otro de 8 cm de lado; y cuatro triángulos rectángulos, dos de catetos de 6 cm y otros dos de catetos de 8 cm. Responde:

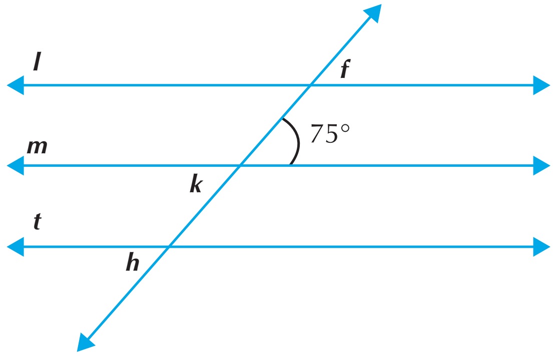
a. ¿Cuánto miden las hipotenusas de esos triángulos?
b. Retira los dos cuadrados y sobre tu cuadrado base coloca los triángulos, como lo indica el dibujo adjunto.
c. ¿Qué figura enmarcan los triángulos sobre el cuadrado base?
d. Verifica que al retirar los dos cuadrados y colocar los cuatro triángulos, el área de la figura del centro es equivalente a la suma de los dos cuadrados retirados. Discútelo con tus compañeros.

6. Dibuja y recorta 3 cuadrados así: uno de 6 cm de lado, otro de 8 cm de lado y otro de 10 cm de lado.
   Colócalos de 2 en 2, de tal manera que unidos por uno de sus vértices formen un triángulo en su interior Se cumple, entonces, que la suma de las áreas de los 2 cuadrados pequeños es igual al área del cuadrado grande.
   Con esta construcción, verificas el teorema de Pitágoras para el triángulo de catetos de 8 cm y 6 cm y de hipotenusa de 10 cm.

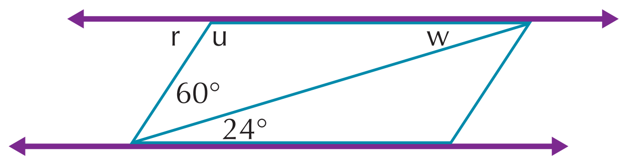


7. Encuentra los valores de los ángulos marcados con letras en cada figura:

   a.



   b.



8. Dibuja el cuadrado sobre cada lado del triángulo rectángulo dado.

a. ¿Cuántas unidades cuadradas (cuadritos) tiene el cuadrado construido sobre la hipotenusa (lado más largo del triángulo rectángulo)?

Entendemos por…

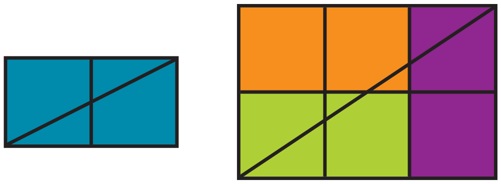
Axioma la proposición que se establece sin demostración.

Teorema aquella proposición que afirma una verdad demostrable. de esta sección es enriquecer el léxico del estudiante.

Diversión matemática

Rectángulos obstinados

En una hoja de papel cuadriculado dibujamos un rectángulo formado por dos cuadrados. Trazamos una diagonal al rectángulo y observamos que corta a los dos cuadrados.



Haciendo lo mismo con un rectángulo mayor, de dos por tres cuadrados, la diagonal corta a cuatro cuadrados. ¿Cuántos cuadrados cortará la diagonal de un rectángulo de seis por siete cuadrados?

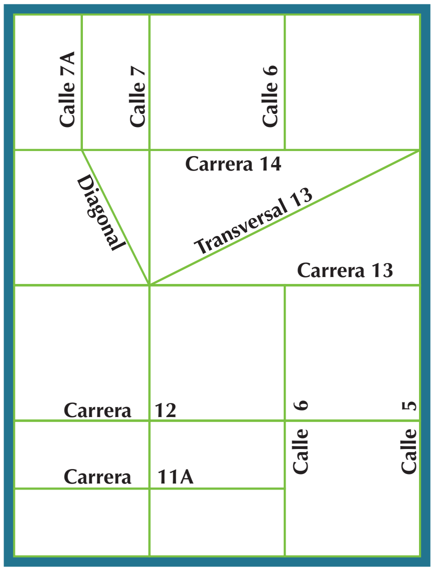
¿Se puede hacer sin dibujar el rectángulo y sin contar los cuadrados? ¿Se puede encontrar alguna regla? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuál sería la regla?

Tomado de: http://platea.pntic.mec.es/jescuder/construc.htm

Día a día

En Bogotá, la capital de Colombia, las "carreras" van paralelas a las montañas, de sur a norte y se abrevian en los mapas como cra., K. o cr.

Las calles van del este (oriente) al oeste (occidente) y atraviesan las carreras perpendicularmente; su abreviatura es cll, cl, o C.



Además de las carreras y las calles tenemos, las diagonales y las transversales: las primeras van del este al oeste, como las calles, y las segundas van como las carreras, de sur a norte.

Las avenidas van paralelas, diagonales o perpendiculares a las carreras; son calles principales y, en general, más anchas que las otras. Las calles de esa ciudad y del resto del país usan el sistema numérico, pero hay unas que, además del número, les han puesto un nombre como en el caso de Avenida Caracas, que es la carrera 14, la Avenida Gonzalo Jiménez de Quesada, que es la calle 13, etc. Cada dirección consiste en una serie de números. Por ejemplo: calle 42 # 15-34. Esto significa que la casa está situada en la calle 42, a 34 metros de distancia de la esquina de la carrera 15 hacia la carrera 16.

Tomado de: http://www.bogota-dc.com/maps/bog-map.htm

Este capítulo fue clave porque

- Aclaré conceptos sobre las figuras geométricas y su clasificación.
- Aprendí a realizar construcciones de diferentes formas y tamaños con escuadra y compás.
- Sé clasificar ángulos y operar con ellos.
- Sé clasificar polígonos y describir sus características.
- Identifico las parejas de ángulos de igual medida, en paralelas cortadas por una transversal.
- Realizo el cálculo del valor de cada ángulo formado por paralelas cortadas por una transversal, dada la medida de uno de ellos.
- Exploré más el teorema de Pitágoras, recortando cuadrados.
- Tengo claro que el teorema de Pitágoras se cumple solamente en triángulos que tengan un ángulo de 90°, es decir, en triángulos rectángulos.

Conectémonos con La Historia

¿Has oído hablar de Pitágoras?

Fue un filósofo y matemático griego.

Se cree que nació en la isla de Samos en el siglo V a.C.

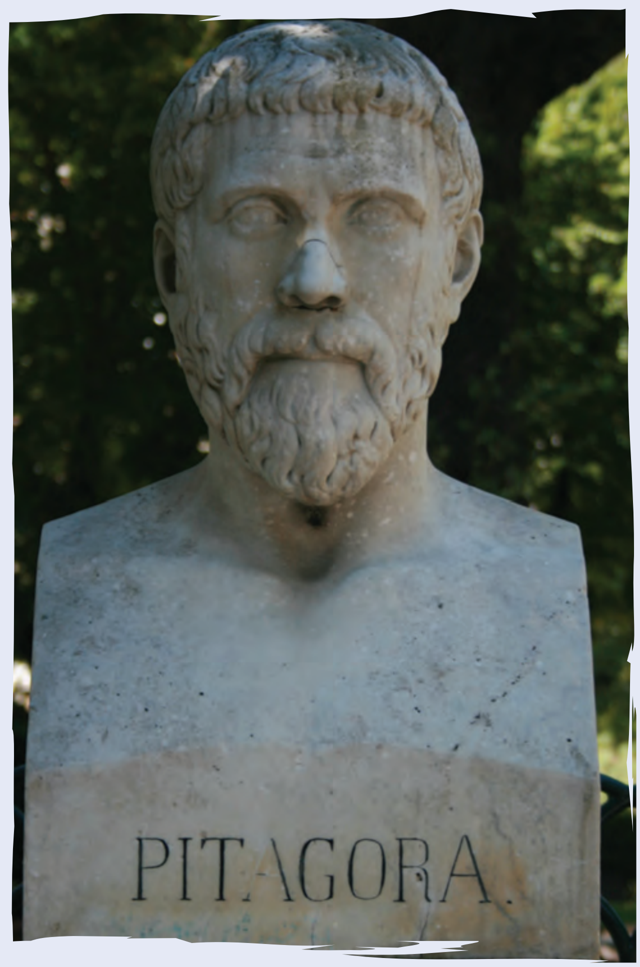
Desarrolló grandes conocimientos en aritmética y geometría, los cuales han sido fundamentales para las matemáticas.

Cuentan que a su cátedra acudía una gran muchedumbre de todas las clases sociales, e incluso las mujeres, que tenían la prohibición de asistir a actividades que en ese tiempo se consideraban cosas de hombres.

Entre las mujeres más atentas se encontraba Theano, una joven hermosa con quien se casó.

Los pitagóricos, sus seguidores, hicieron grandes progresos especialmente en la teoría de los números y en la geometría de áreas y volúmenes. A él se le atribuye el teorema que lleva su nombre.

Comenta con algunos compañeros sobre lo que saben de este gran matemático.



Movimientos en el plano

Hemos estudiado la idea de plano y lo que podemos representar en él.

Desde los cursos anteriores, realizamos construcciones sobre una hoja (porción de plano) y con instrumentos (regla, escuadras, compás y transportador).

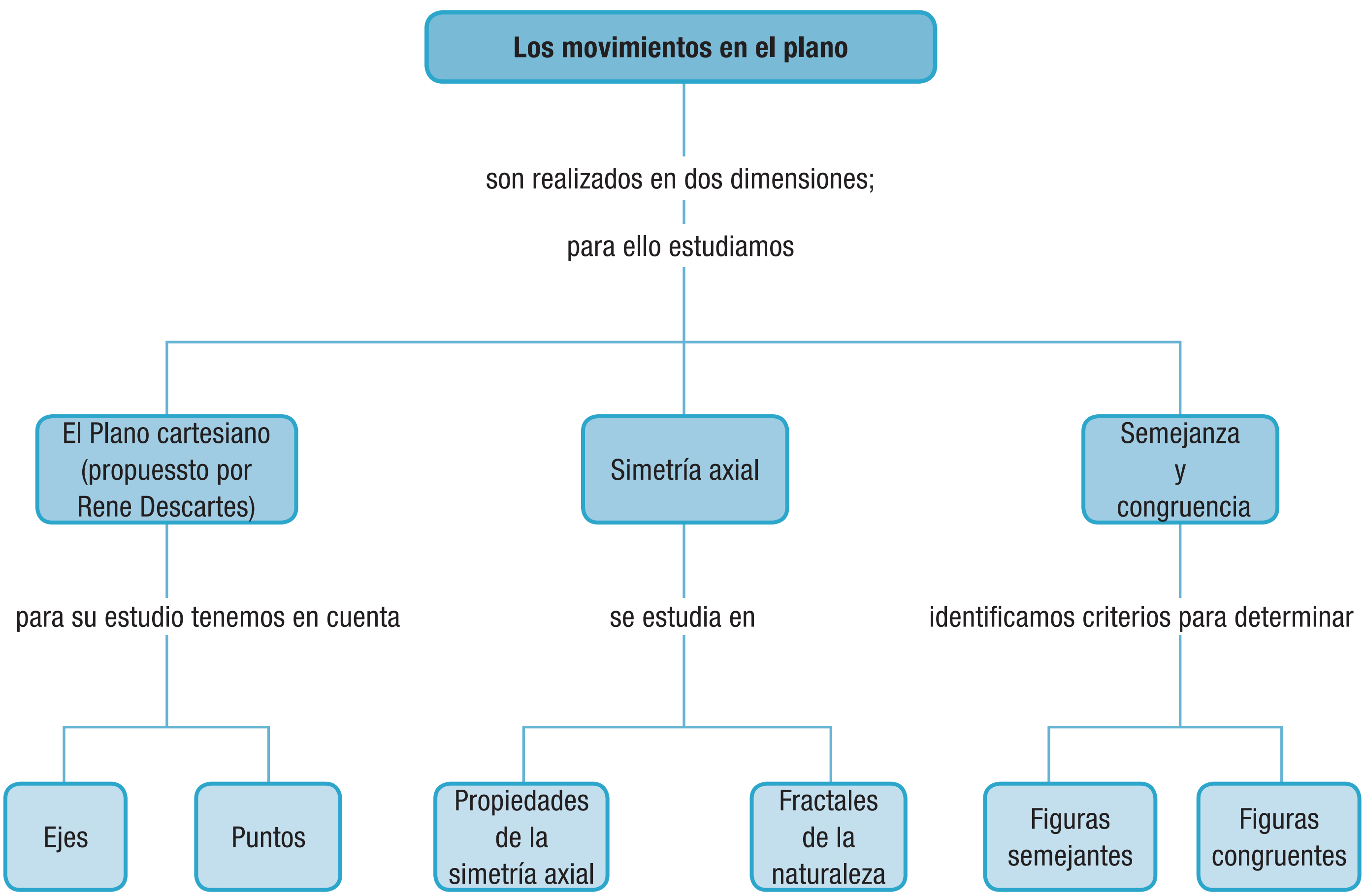
Ahora vamos a hablar de un plano muy especial. Gracias a los aportes de René Descartes, un matemático, filósofo, físico e ingeniero francés del siglo XVII, utilizamos hoy el plano cartesiano.

El plano cartesiano es llamado así en honor a Descartes, quien inventó la geometría analítica.

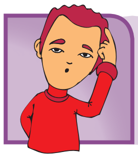
En el plano cartesiano podemos describir movimientos de figuras y construir otras de diferentes tamaños estableciendo relaciones entre ellas.

Al adquirir la habilidad para trabajar en el plano cartesiano, desarrollarás la capacidad de representar e interpretar gráficamente expresiones algebraicas; así mismo, se te facilitará el aprendizaje de otros temas de nivel superior.

A lo largo de este capítulo estudiaremos el plano cartesiano y en él diferentes posiciones de figuras geométricas y estableceremos relaciones entre ellas.



Tema 1.
El plano cartesiano



Indagación
Los puntos cardinales

Desde niños nos han enseñado los puntos cardinales.

Ellos se usan en todo el mundo.

Sabemos que cada mañana, el sol sale por el oriente llamado también este y se oculta por el occidente también denominado oeste.

Hemos aprendido que los puntos cardinales sirven para orientarnos y conocer una dirección.

En el lugar en donde estemos nos ubicamos así: ubicamos la salida del sol y este punto es el oriente o este y lo señalamos extendiendo el brazo derecho.

Nuestra cara quedará, entonces, hacia el norte.

Hacia el sur quedará nuestra espalda y nuestro brazo izquierdo, al extenderlo, señalará el occidente u oeste.

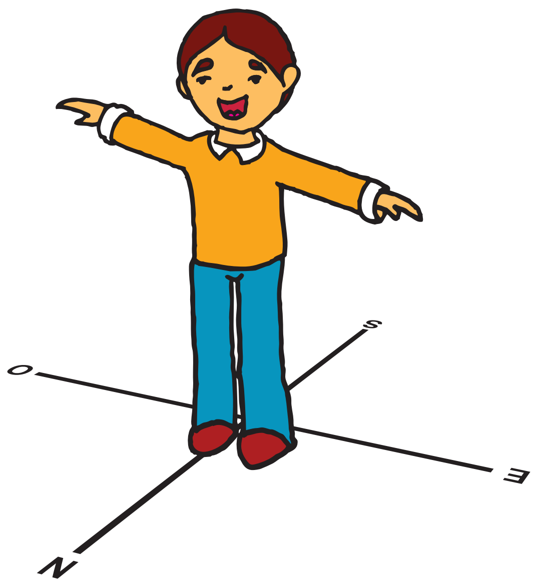
Los puntos intermedios son:

- Noreste (NE): Puntos que quedan entre el norte y el este.
- Noroeste (NO): Puntos que quedan entre el norte y el oeste.
- Sureste (SE): Puntos que quedan entre el sur y el este.
- Suroeste (SO): Puntos que quedan entre el sur y el oeste.

Los puntos cardinales son de gran utilidad para orientarse en tierra, mar o aire.

Así como los conductores en tierra necesitan saber si el lugar hacia el cual se dirigen es el norte, el sur, el oriente o el occidente, así también los pilotos de aviones y los navegantes utilizan las llamadas coordenadas, que tienen relación con los puntos cardinales.

Ubica los puntos cardinales en la región en donde estás, en tu casa y tu colegio o escuela, y realiza un dibujo en tu cuaderno, señalándolos.

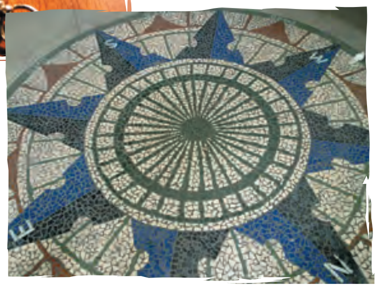


Conceptualización

Ya has utilizado la recta numérica como un valioso auxiliar para representar gráficamente números naturales, fraccionarios positivos y enteros. Sin embargo, para describir la posición de un punto en el plano, no basta la recta numérica, debido a que cada punto del plano se representa por un par ordenado de números.

Las coordenadas cartesianas, como se llama así a las parejas del plano, son importantes para la geografía, la marina y la aviación.

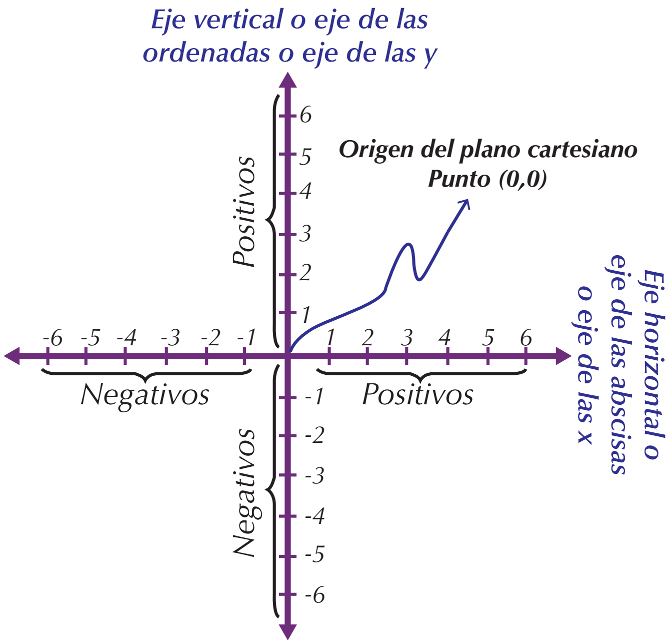
Un navegante o cualquier persona utiliza instrumentos como la brújula y la rosa de los vientos para orientarse, llegar a un lugar determinado o ubicarse, los cuales tienen como guía los puntos cardinales.



Como dijimos antes, la idea de representar puntos en el plano mediante parejas de números se debe al filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1660). Por tal motivo, se le llama ***plano cartesiano***.

El plano cartesiano se construye con dos rectas numéricas: una en posición horizontal y otra en posición vertical, para que sean perpendiculares.

A estas dos rectas se les llaman ***ejes coordenados***.



El punto de intersección de las dos rectas es el que corresponde a cero y recibe el nombre de origen (0,0).

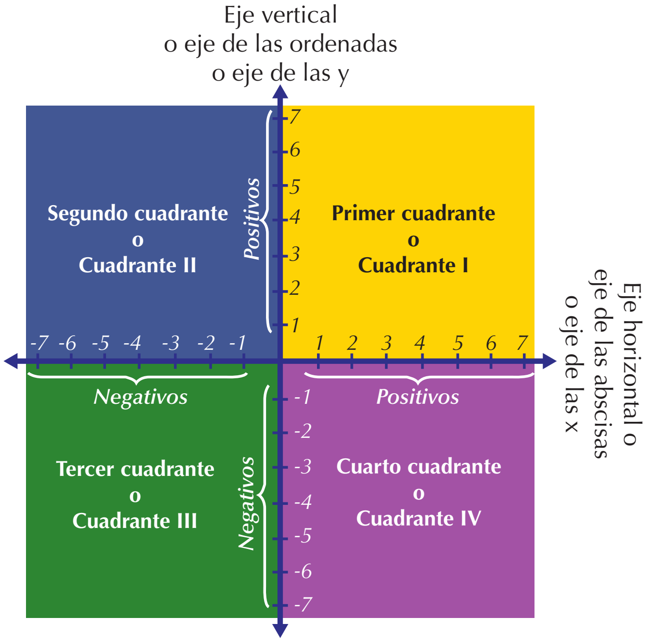
La graduación en los ejes es arbitraria y se determina según se necesite en cada caso.

El ***eje horizontal*** se llama eje de las ***abscisas*** o eje de las ***x***.

El ***eje vertical*** es el eje de las ***ordenadas*** o eje de las ***y***.

Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas ***cuadrantes***.

Los cuadrantes se simbolizan con números romanos.



El orden de los cuadrantes se establece en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y se inicia en el cuadrante superior derecho.

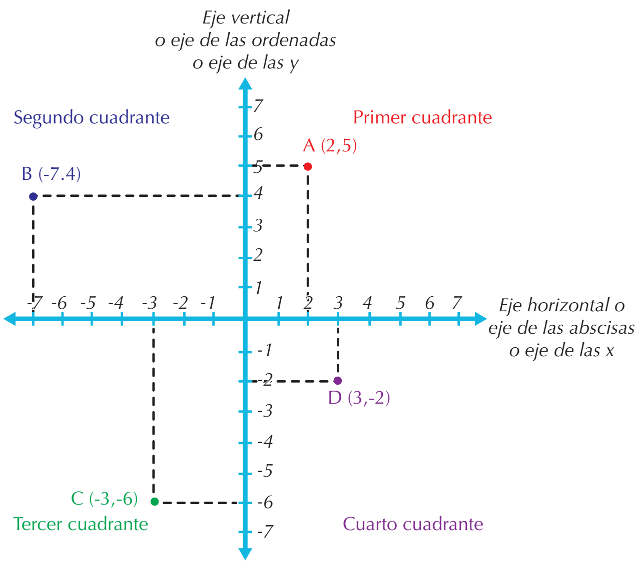
En plano cartesiano, se ubican los ***pares ordenados de números*** o ***parejas ordenadas***.

Así por ejemplo, si tenemos el par ordenado o la pareja ordenada (2,5), significa que el 2 está en el eje horizontal o eje de las abscisas o eje ***x*** y 5 está en el eje vertical o eje de las ordenadas o eje **y**.

Esta pareja ordenada de puntos corresponde a un punto en el primer cuadrante o cuadrante I.

A ese punto lo llamaremos A y sus componentes 2 y 5 se denominan ***coordenadas***.

El punto siempre es el cruce de las líneas punteadas.



Observa los puntos del plano cartesiano y el cuadrante al cual pertenecen.

Aplicación

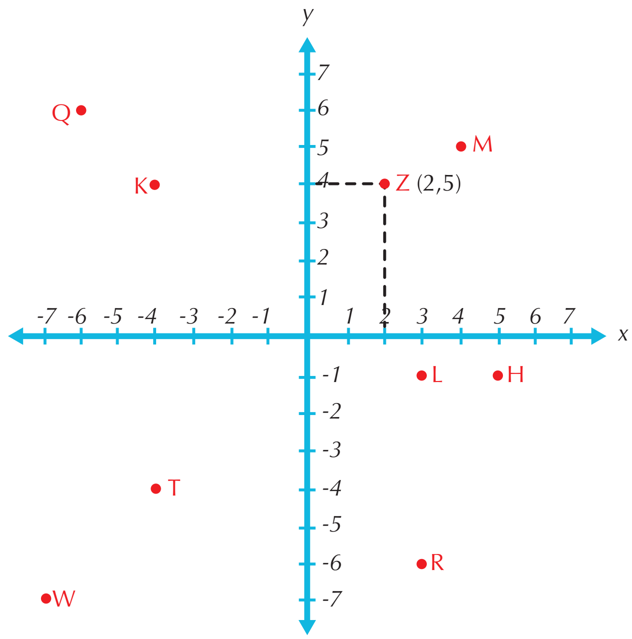
Copia en tu cuaderno los siguientes ejercicios, resuélvelos y compara con algunos de tus compañeros.

Corrige si tienes errores.

1. Frente a cada punto escribe el cuadrante en el cual debe estar situado:

   a. M(8,8) ______________
   b. L(1,-9) ______________
   c. W(5,-3) ______________
   d. K(-1,-1) ______________
   e. S(-5,-5) ______________
   f. Q(-10,-2)______________
   g. V(6,-6) ______________
   h. P(9,-11) ______________

2. Ubica en un mismo plano cartesiano los puntos del ejercicio anterior.
3. Con el plano que se presenta a continuación:



   a. Marca las líneas entrecortadas para encontrar las coordenadas de cada punto del plano.
   b. Entre paréntesis escribe las coordenadas correspondientes a cada punto del plano:

M = (2 , 4), Q = (,), K = (,), T = (,),
W = (,), R = (,), L = (,) y H = (,).

4. Dibuja un plano cartesiano y en él traza el segmento de recta cuyos extremos son los puntos:

A(-2,-5) y B(2, 5)

5. Indica en cuál cuadrante está ubicado cada punto del segmento del ejercicio anterior.
6. En un plano cartesiano, dibuja el triángulo que tiene por vértices los puntos:

D(0,-3), E(1,5) y F(0,3).

7. Indica en cuál cuadrante está ubicado cada punto del triángulo del ejercicio anterior.
8. Ubica en un plano cartesiano cinco puntos que tú quieras, construyendo una figura, con sus correspondientes coordenadas.

9. Explica en cuál cuadrante quedó cada uno de los puntos que ubicaste en el plano cartesiano del ejercicio anterior.

Entendemos por…

Coordenadas los componentes horizontal y vertical que nos dan la ubicación de un punto en el plano cartesiano. Por ejemplo, el punto V(-4,7) queda a 4 unidades a la izquierda del 0 en el eje horizontal y 7 unidades desde el 0 hacia arriba en el eje vertical del plano cartesiano.

Diversión matemática

Figuras escondidas

Un grupo de amigos nos encontramos una hoja de papel tirada en el suelo. La hoja decía: "este dibujo te dará buena suerte". Nos quedamos sorprendidos, pues en la hoja no había ningún dibujo, solo una serie de números: "(1,5), (4,6), (5,9), (6,6), (9,5), (6,4), (5,1), (4,4), (1,5)".

Uno de los compañeros del grupo tiene una tía que es matemática, así que decidimos ir a verla para pedirle que nos ayudara.

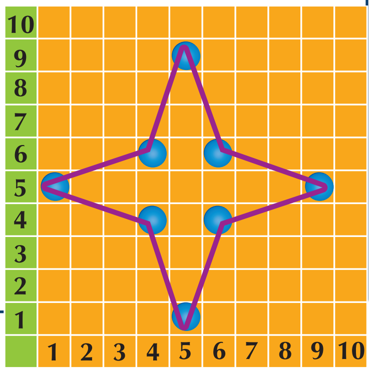
Cuando la tía matemática vio los números, sonrió y dijo: "basta un papel cuadriculado para encontrar el dibujo".

¿Una hoja cuadriculada nada más? Preguntamos.

Por suerte yo llevaba el cuaderno de matemáticas, así que rápidamente saqué una hoja y un lápiz.

Luego nos explicó: Lo que he hecho es numerar todas las columnas y todos los renglones de la hoja cuadriculada. Los números que escribí abajo numeran las columnas y los números que escribí a la izquierda numeran los renglones.

Cada pareja de números entre paréntesis representa un punto. El primer número nos dice en cuál columna está el punto y el segundo nos dice en cuál renglón. Las columnas se cuentan de izquierda a derecha y los renglones de abajo hacia arriba.



Observa con cuidado: el punto (1,5) no es el mismo que el punto (5,1). Es muy importante respetar el orden de los números.

"Ahora me imagino que lo que hay que hacer es unir los puntos en el mismo orden en el que aparecen escritos", dijo muy contenta. (1,5) con (4,6) con (5,9) con (6,6) con (9,5) con (6,4) con (5,1) con (4,4) y volvemos con (1,5).

Y el dibujo que queda es una estrella de cuatro picos.

Luego nos dimos cuenta de que al revés de la hoja había otras claves.

Ahora, ¿tú podrías ayudarnos a encontrar qué dibujos son estos?:

Clave A: (2,5), (6,10), (10,5), (6,1) y (2,5).

Clave B: (4,2), (2,5), (5,8), (8,5), (6,2) y (4,2).

Clave C: (2,4), (2,6), (6,6), (6,8), (9,5), (6,2), (6,4) y (2,4).

Clave D: (2,4), (4,6), (2,8), (4,10), (6,8), (8,10), (10,8), (8,6), (10,4), (8,2), (6,4), (4,2) y (2,4).

Tomado de http://redescolar.ilce.edu.mx/educontinua/mate/lugares/mate1g/mate1g.htm

Día a día

René Descartes (1596-1660)

Filósofo y matemático del siglo XVII, que nació en La Haye en Touraine, Francia.

Descartes es considerado como el iniciador de la filosofía moderna y padre de la geometría analítica, con la creación del plano cartesiano y la asignación de un punto (concepto geométrico) a una pareja de puntos (concepto algébrico).

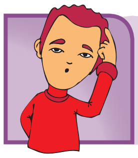
Sus obras más importantes son: Discurso del método (1637), obra en la que propuso una "duda metódica" que somete a juicio los conocimientos de la época; Meditaciones metafísicas (1641), y Principios de la filosofía (1644).

A Renato o René Descartes se debe la frase "Pienso, luego existo".

Las enseñanzas de Descartes aún hoy continúan vigentes.

Tomado de http://symploke.trujaman.org/index.php?title=Renato_Descartes

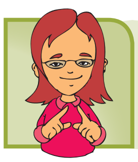
Tema 2.
Simetrías y fractales



Indagación

Cuando estamos frente a un espejo, decimos que nuestra imagen se "refleja" en él, estableciéndose así una relación entre nuestro cuerpo y la imagen reflejada.

Por ejemplo, si vemos nuestro rostro en un espejo y cerramos un ojo, también en la imagen del espejo aparece cerrado un ojo y así cada punto de nuestra cara tendrá un punto correspondiente en el espejo.



Conceptualización

Existen a nuestro alrededor muchos objetos que establecen una **relación** muy armoniosa consigo mismos: la **de simetría**.

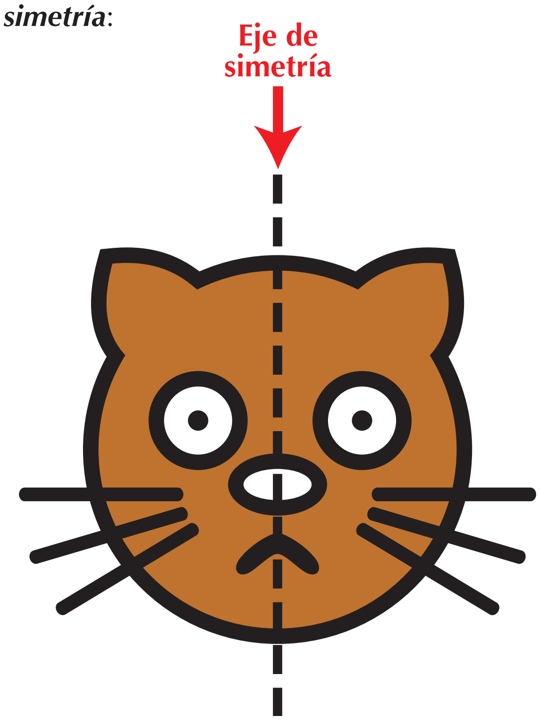
Simetría axial

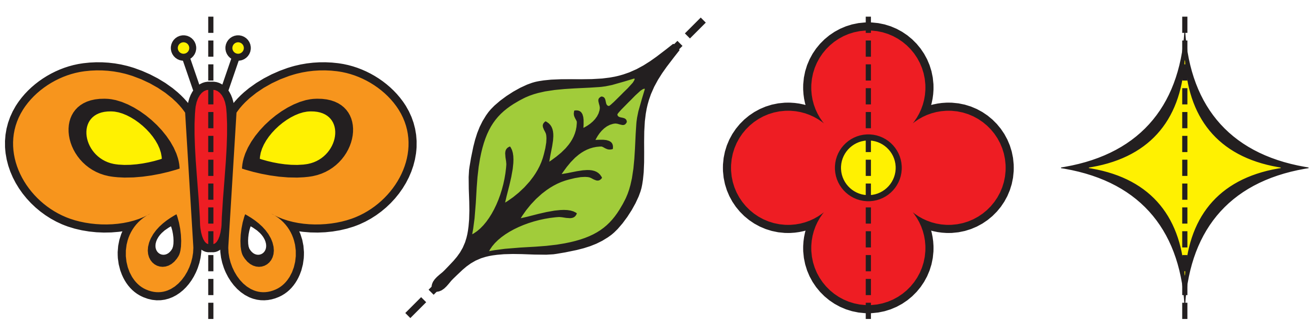
Muchas de las formas que existen en el mundo tienen una relación de armonía y correspondencia consigo mismas o con otras, es decir, son simétricas.

Observa detenidamente cada dibujo que aparece a continuación y describe las similitudes que ves entre las partes de cada uno:

Si las figuras anteriores se calcan y doblan por la línea punteada, se observa que sus puntos coinciden, uno a uno, de un lado y otro del doblez, la huella del doblez o línea punteada recibe el nombre de ***simetría axial***.

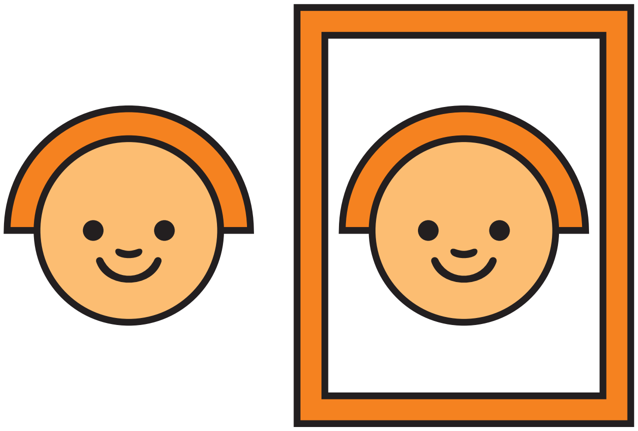
Una figura es simétrica si existe coincidencia de sus puntos de una mitad con la otra, al tomar como referencia una línea que recibe el nombre de ***eje de simetría***:





Pero también dos figuras iguales son simétricas respecto a un eje si al unir un punto de una figura con el correspondiente de la otra, la línea es perpendicular a dicho eje.

Esto se aprecia al ver reflejada una imagen en un espejo.



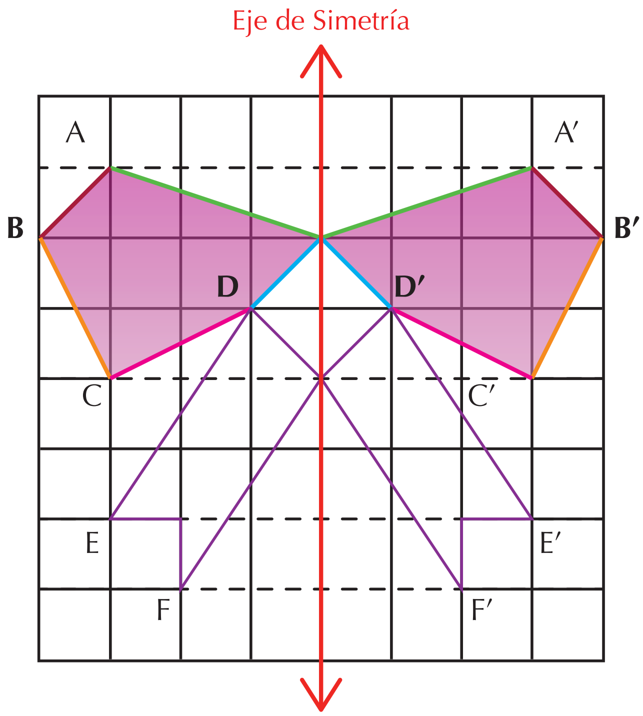
De esa forma se puede concluir que simetría axial es la coincidencia de partes, líneas o puntos, uno a uno y a distancias iguales de una línea que recibe el nombre de ***eje de simetría***.

Las figuras que no tienen eje de simetría reciben el nombre de ***asimétricas***.

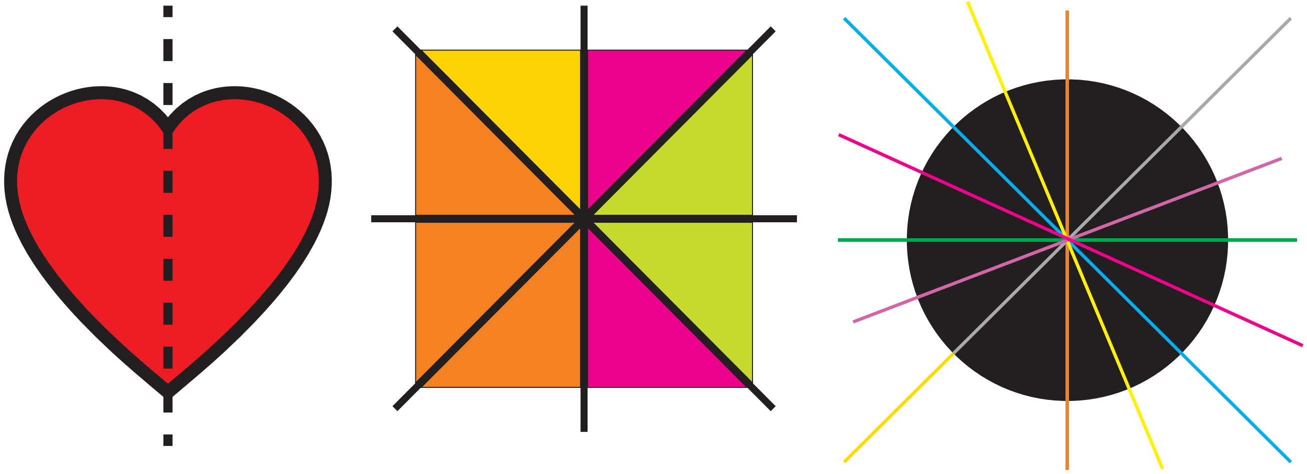
Las figuras simétricas pueden tener uno, dos, tres, cuatro o más ejes de simetría.

Por ejemplo, el círculo puede tener un número infinito de ejes de simetría, ya que cualquier recta que pase por su centro lo divide en dos partes que coinciden al colocar una sobre la otra.

En la siguiente figura, a cada punto del lado izquierdo, con respecto al eje de simetría, le corresponde un punto a la misma distancia pero del lado derecho, de donde se corresponden los puntos: A con A′, B con B′, C con C′, D con D′, E con E′ y F con F′.



Esos puntos reciben el nombre de ***puntos homólogos***.



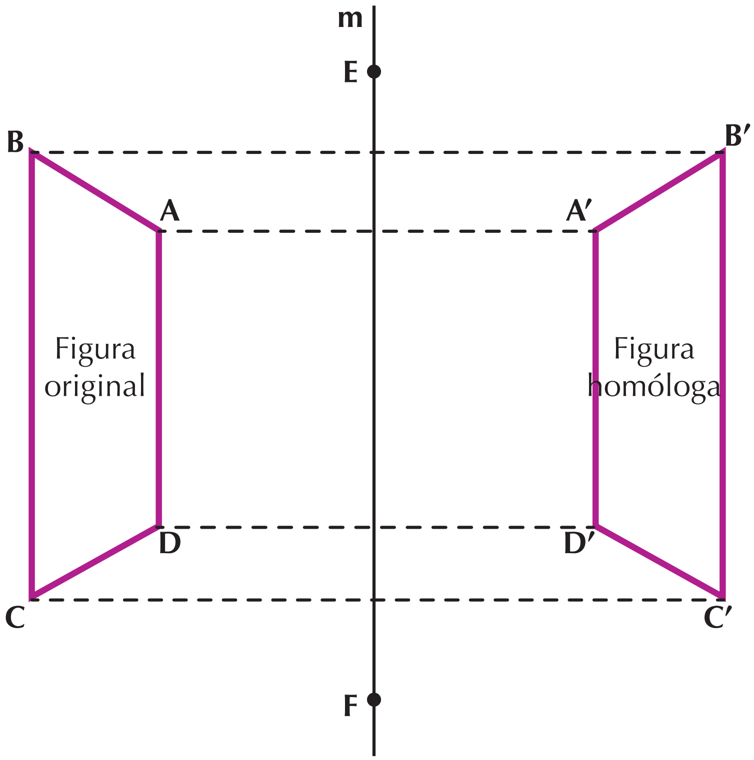
Al unirse tales puntos se obtienen segmentos perpendiculares al eje de simetría y paralelos entre sí.

Ver las líneas entrecortadas. De esa forma, midiendo la distancia de cada punto al eje de simetría y marcándolo del lado contrario a este, es posible reproducir un dibujo hasta tener una figura simétrica.

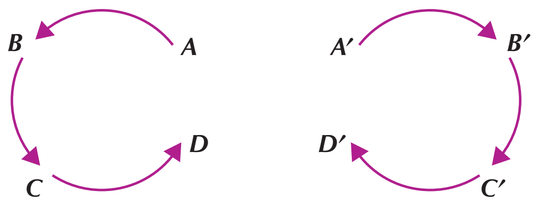
A los puntos que se corresponden entre sí en dos figuras que coinciden totalmente en todas sus partes se les llaman puntos homólogos.

Propiedades de la simetría axial

Analicemos el ejemplo siguiente:



a. Los puntos homólogos A y A′, C y C′, etc., se encuentran a la misma distancia (equidistan) del eje de simetría ***m***.
b. Los segmentos de recta que unen a las parejas de puntos homólogos AA′, BB′, etc., son perpendiculares al eje de simetría ***m***.
c. Los segmentos que se trazaron para obtener los pares de puntos homólogos, AA′, CC′, etc., son paralelos (las líneas están entrecortadas).
d. Los segmentos de recta que son simétricos, AD y A′D′, AB y A′B′, etc., coinciden si se dobla por el eje.
e. Los ángulos simétricos son iguales: ABC = A′B′C′ y BCD = B′C′D′.



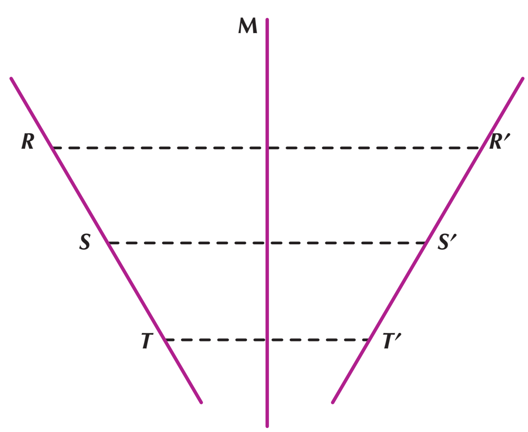
f. El orden en que están situados los puntos de la figura original es opuesto al de su figura homóloga.

En la figura original los puntos están dispuestos en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y en la figura homóloga van en la misma dirección de las manecillas del reloj.

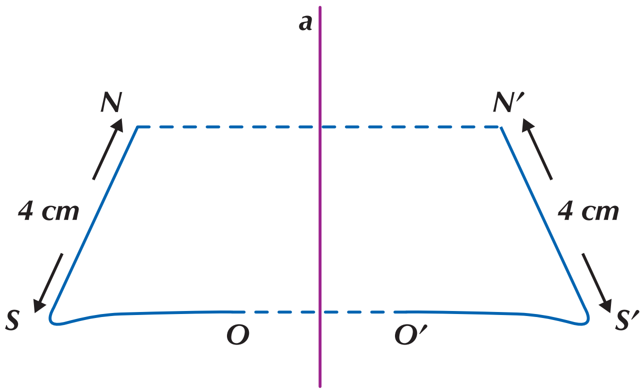
Resumimos las propiedades de la simetría axial así:

1. **La simetría axial conserva colinealidad**
   Si tres puntos R, S, T son colineales (están en la misma línea), sus homólogos también son colineales.
   Es decir, los puntos R, S y T son colineales y los puntos R′, S′ y T′ también son colineales.

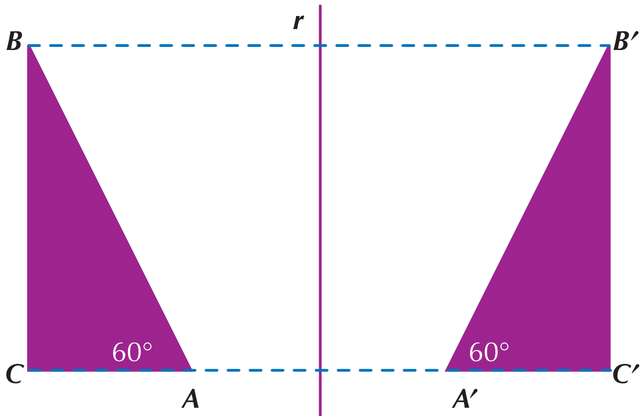
Original Homóloga



2. **Conserva la distancia**
Si dos puntos S y N están a una distancia de 4 cm, entre sus homólogos S′ y N′ habrá esa misma distancia, como se ve a continuación:



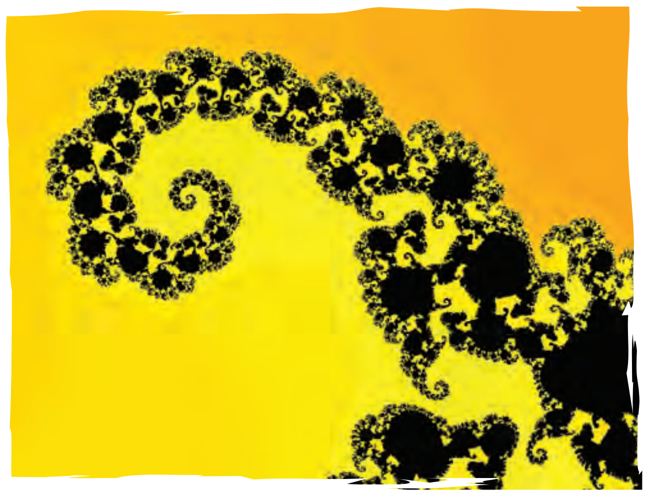
3. **Conserva ángulos**
Si entre dos segmentos de recta está comprendido un ángulo de 60º, el ángulo comprendido entre sus homólogos también tiene una amplitud de 60º, como se ve en la ilustración.



4. **No conserva orientación**
La simetría axial muestra a la figura original como si se reflejara en un espejo. Es decir, cambia izquierda por derecha y derecha por izquierda.

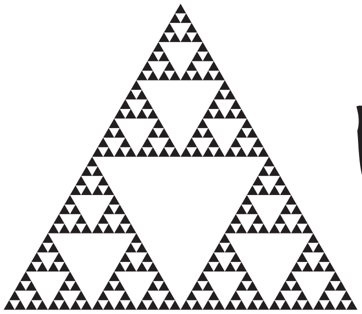
Fractales

La característica principal de un fractal es la autosimilitud.

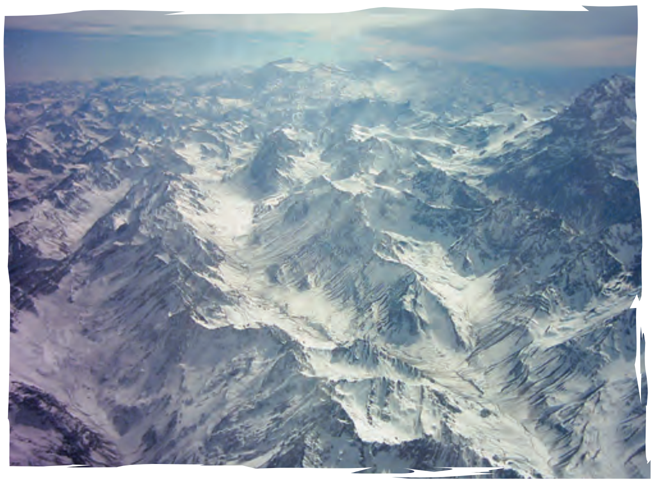


En las imágenes o figuras ***fractales*** es posible apreciar la existencia de similitud entre porciones de las mismas y la figura en sí; esto quiere decir que dichas figuras aparecen formadas por copias de sí mismas.

La dimensión de las figuras de un fractal es fraccionaria, es decir, no es entera.



Cadena de montañas

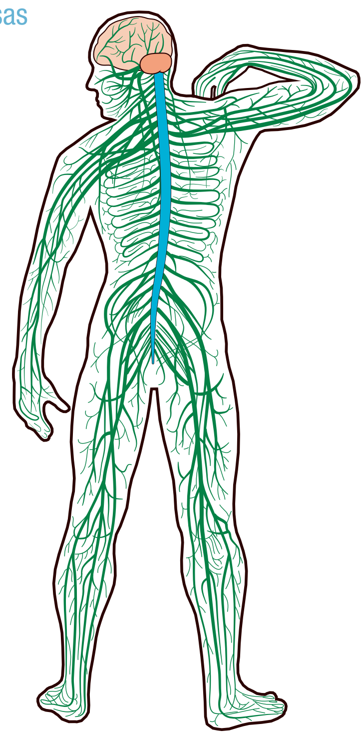


Coníferas

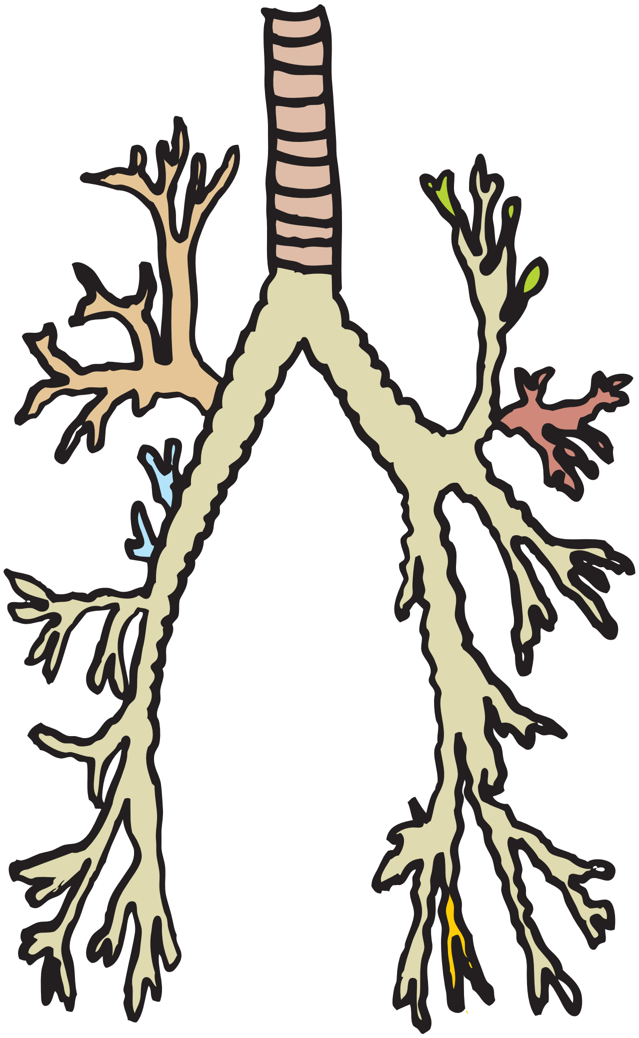
La mayoría de las figuras que se encuentran en la naturaleza son de geometría fractal.

Por ejemplo, una cadena de montañas o una flor conífera pueden definirse por un modelo matemático fractal.

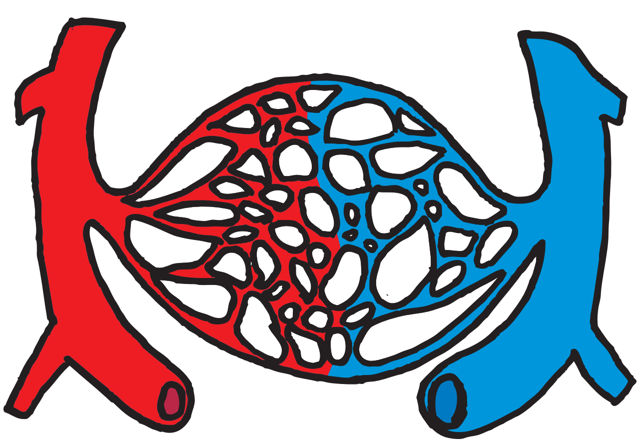
Redes nerviosas



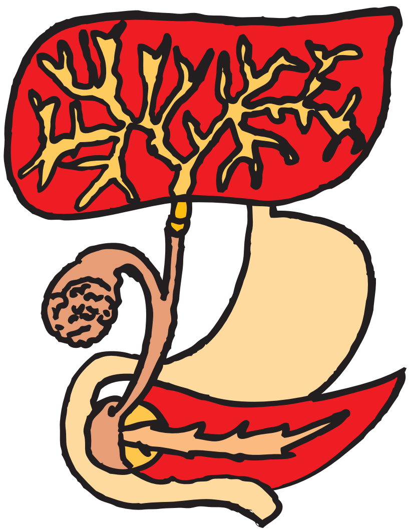
Sistemas de tubos pulmonares y bronquios



Redes de vasos sanguíneos



Conductos biliares

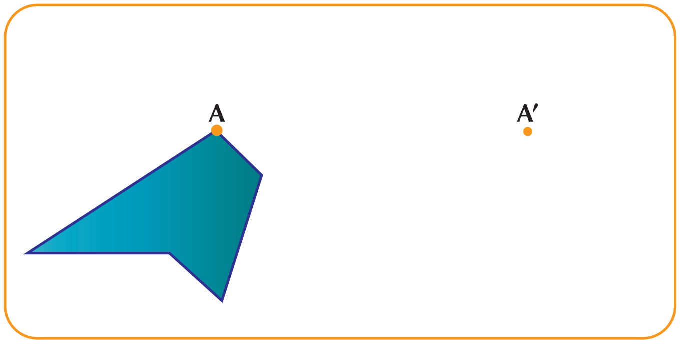


Observa las partes que forman las redes nerviosas, los sistemas de tubos pulmonares y bronquios, las redes de vasos sanguíneos y los conductos biliares, que son componentes de nuestro cuerpo.

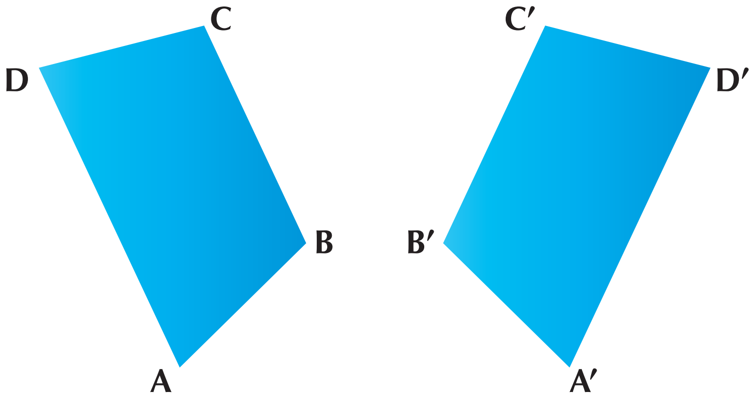
Saca varias conclusiones y compártelas con algunos de tus compañeros.

Aplicación

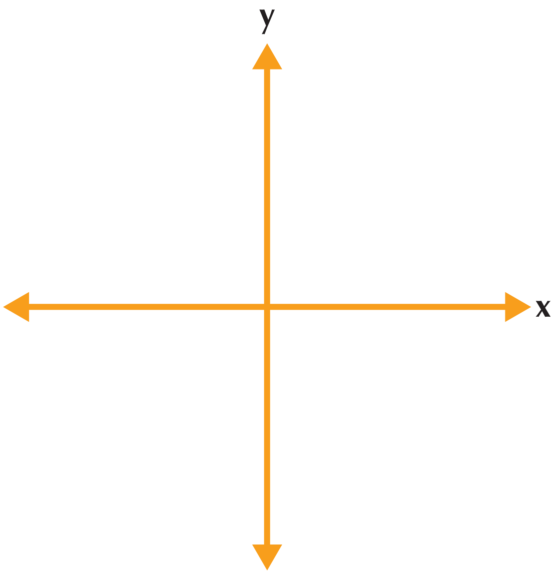
1. En el dibujo siguiente aparece una figura, en el que el punto A es uno de sus vértices.
   También aparece el homólogo de ese punto, que es A′.
   Encuentra el eje de simetría y la figura simétrica correspondiente:



2. Las siguientes figuras son simétricas con respecto a un eje ***n***, que no aparece en el dibujo.
   Encuentra la posición de dicho eje y trázalo.



3. En un sistema de ejes coordenados, como el de la figura, localiza estos puntos: A(7,4), B(6,9), C(2,6) y D(5,1).
   Une con segmentos de recta los cuatro puntos.
   Luego, traza una figura simétrica a la figura obtenida, tomando como eje de simetría el eje de las ordenadas (eje de las ***y***).

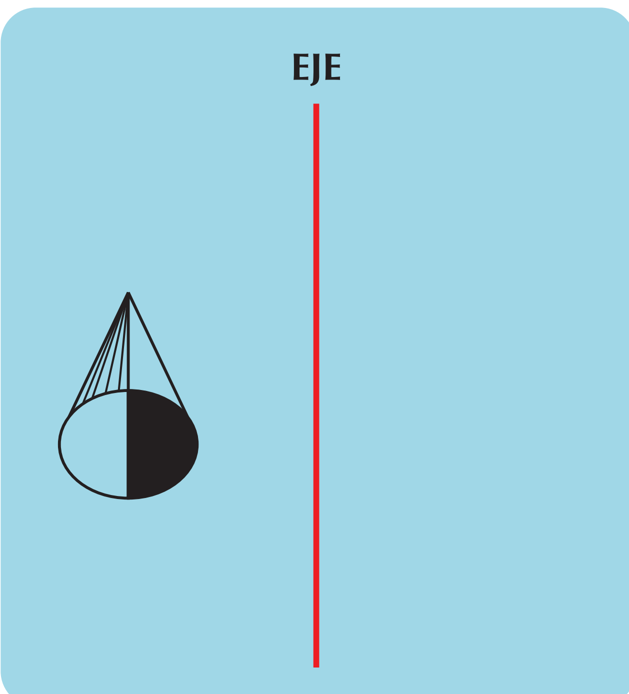


4.

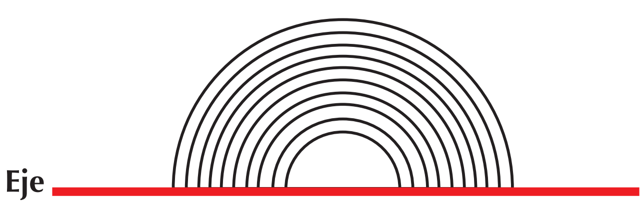
   a. Dibuja un cuadrado y un trapecio; traza sus ejes de simetría y comprueba que sus lados son simétricos: dobla por el eje, o los ejes de simetría, y luego mide de tal manera que sus partes sean congruentes y simétricas. (Las dimensiones de las figuras serán las que tú escojas y las realizarás en una hoja de tu cuaderno).
   b. ¿Cuántos ejes de simetría tiene el cuadrado?
   c. ¿Cuántos ejes de simetría tiene el trapecio?

5. Encuentra el simétrico de las siguientes figuras, dada la posición del eje de simetría:

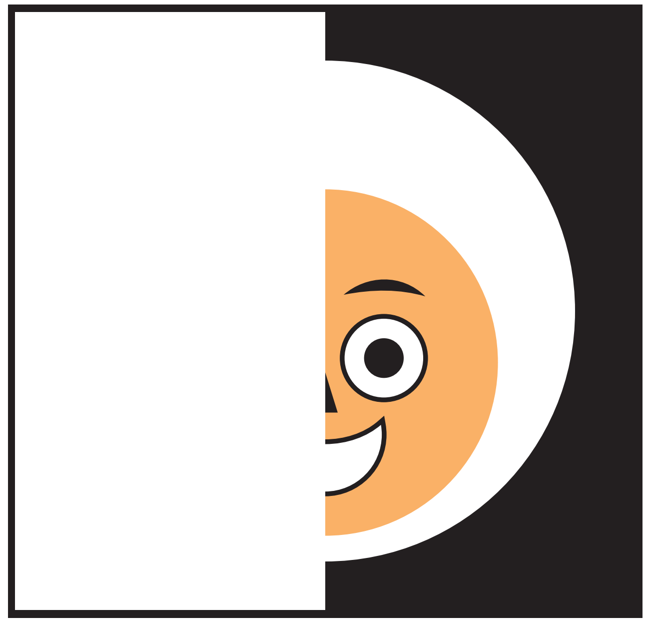
   a.



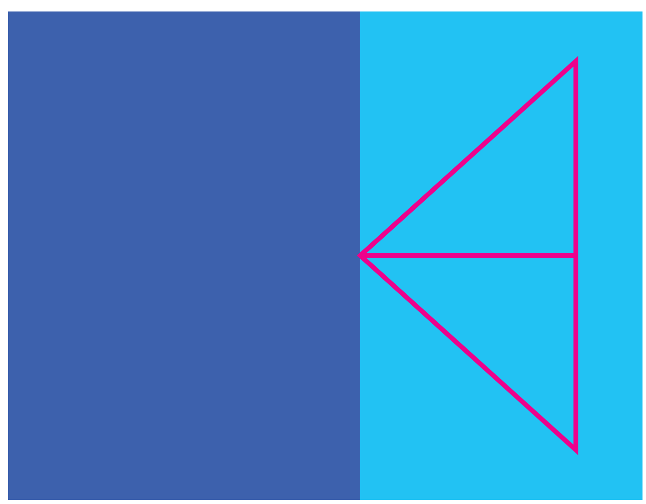
   b.



6. Toma una flor, obsérvala detenidamente, identifica la parte de ella que se repite y dibújala en tu cuaderno.
7. Completa la figura:



8. Traza el eje de simetría vertical de la figura del ejercicio anterior.
9. En la región azul oscura, traza los triángulos simétricos a los triángulos de la región azul clara.



10. Marca con letras mayúsculas los vértices de los triángulos de la región azul clara del ejercicio anterior e identifica los puntos homólogos correspondientes en la región azul oscura.

Entendemos por…

Simetría la correspondencia de posición, de forma o de medida entre los elementos de un conjunto o entre dos o más conjuntos. Una figura simétrica coincide en todas sus partes cuando se dobla por la mitad.

Diversión matemática

Iteración de un triángulo sierpinskiniano

Diviértete construyendo el fractal siguiente:

Paso 1: En una cartulina u hoja de block construye y recorta un triángulo equilátero (lados iguales y ángulos de 60° cada uno) que mida 20 cm por cada lado.

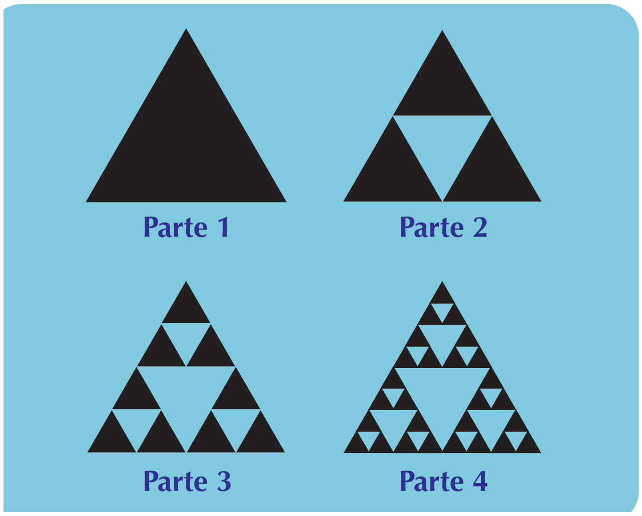
Paso 2: Marca el punto medio de cada lado y únelos. Observa que se forma un nuevo triángulo dentro del primero.

Paso 3: Divide cada lado del triángulo inicial en 4 partes y marca el punto medio de cada lado del triángulo interior y únelos.

Paso 4: Divide cada lado del triángulo inicial en 8 partes y marca el punto medio de cada lado de los nuevos triángulos interior y únelos.

Paso 5: Intenta crearlo.

Puedes colorear los triángulos como quieras. Comparte y comenta con tus compañeros.



Día a día

Efectos visuales

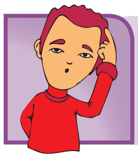
Una de las características más triviales de las aplicaciones de los fractales son sus efectos visuales.

No solamente engañan la vista, sino que también de algún modo "confunden" a la mente.

Los fractales han estado siendo usados comercialmente en la industria cinematográfica, en películas como Star Wars y Star Trek.

Las imágenes fractales se usan como una alternativa ante costosos sets elaborados para producir diferentes productos del mercado.

Tema 3. Características de figuras semejantes y de figuras congruentes

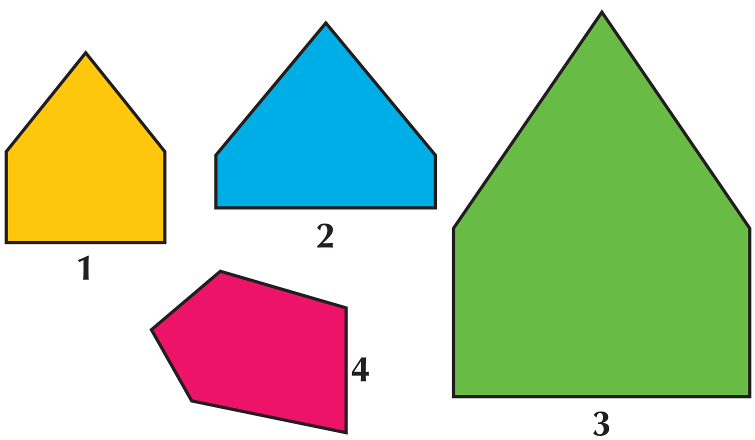


Indagación

En el lenguaje cotidiano decimos que dos o más cosas son «semejantes» cuando advertimos características comunes en ellas. Oímos decir que «debemos amar a nuestros semejantes».

¿Quiénes son, pues, nuestros semejantes? ¿Por qué son semejantes nuestros? Discútelo con tus compañeros.

En matemáticas, debemos precisar el concepto de semejanza y encontrar todas las condiciones que nos permiten asegurar que dos o más objetos son matemáticamente semejantes.



Observemos las figuras 1, 2, 3, y 4.

Comparemos una figura con otra y busquemos qué partes tienen en común.

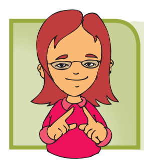
- Los lados de la figura 1 son paralelos a los lados de la figura 2.
  Compruébalo usando una regla y una escuadra.
- Los lados de la figura 1 tienen la misma medida que los lados de la figura 4.

A las preguntas siguientes responde sí o no y, luego, en tu cuaderno, explica por qué:

1. ¿Podrías decir que la figura 1 y la figura 2 tienen la misma forma?
2. ¿La figura 1 y la figura 4 tienen la misma forma?
3. ¿Estarías de acuerdo en decir que el hecho de tener lados paralelos garantiza que las figuras tengan la misma forma?
4. ¿El hecho de tener lados de igual medida hace que las figuras sean de la misma forma?

Compara las figuras 1 y 3 y revisa si tienen la misma forma, si sus lados respectivamente son paralelos, si sus lados respectivos tienen igual medida y si tienen otras características en común.

Escribe tus apreciaciones en tu cuaderno y compártelas con tus compañeros.

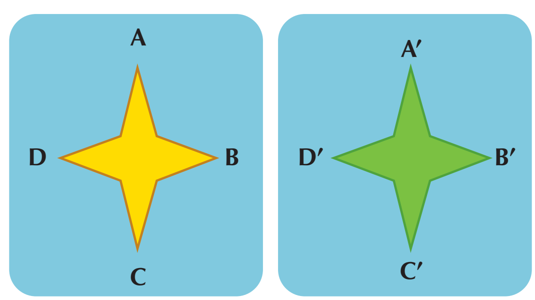


Conceptualización

Congruencia

Observa que la figura ABCD tiene la misma forma y el mismo tamaño que la figura A′B′C′D′.

Si en una hoja copias las figuras amarilla y verde y las recortas, verás que al poner una sobre la otra coinciden en todas sus partes:



Decimos entonces que las dos figuras son congruentes y simbólicamente se escribe:

ABCD ≅ A′B′C′D′ Se lee: ABCD es congruente con A´B´C´D´

Si al superponer dos figuras, todos sus elementos (lados y ángulos) coinciden, es decir, sus elementos homólogos tienen la misma medida, decimos que esas figuras son congruentes.

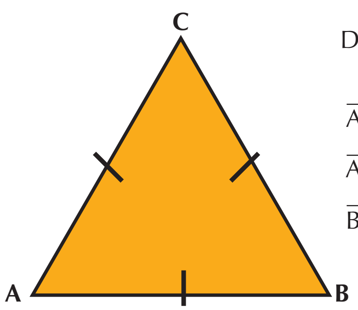
Triángulos

Recordemos la clasificación de los triángulos y observemos la congruencia entre sus lados.

Triángulo es todo polígono de tres lados y tres ángulos.

Según la medida de sus lados, los triángulos se pueden clasificar en:

- **Triángulos equiláteros:** Son aquellos que tienen sus tres lados congruentes, esto es, tienen la misma medida.
  El lado AB es congruente con el lado BC, el lado AC es congruente con el lado AB y el lado BC es congruente con el lado AC. Luego, los lados AB, BC y CA son congruentes, por ser el triángulo ABC equilátero.
  Tienen también sus tres ángulos congruentes.



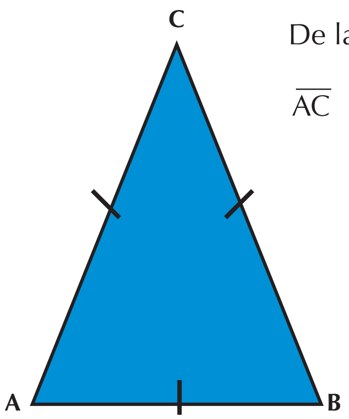
De la figura se observa que:

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$\overline{AC} \cong \overline{AB}$

$\overline{BC} \cong \overline{AC}$

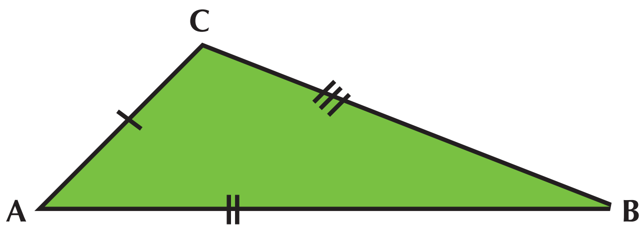
- **Triángulo isósceles:** Es el que tiene dos de sus lados congruentes y, por lo tanto, dos ángulos congruentes.



De la figura se observa que:

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

- **Triángulo escaleno:** Es aquel que no tiene lados congruentes.
  De la figura se observa que ningún lado es congruente con otro y, por lo tanto, tampoco tiene ángulos congruentes.
  Todos los lados tienen diferente medida.



Dos figuras se llaman congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

Semejanza

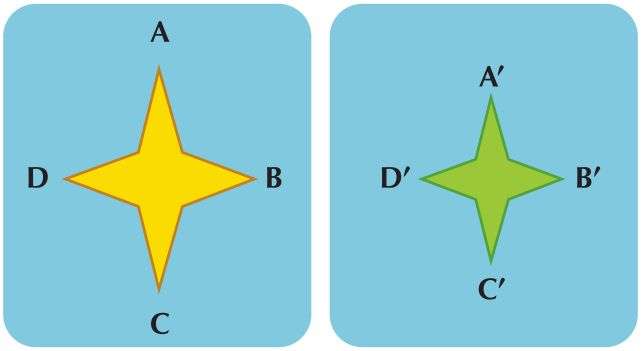
Observemos las figuras rosada y azul.

Ellas tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño.

Sus ángulos homólogos son de igual medida y sus lados homólogos son proporcionales.

Por tanto, la figura ABCD es semejante a la figura A′B′C′D′.

Simbólicamente, escribimos **ABCD ≈ A´B´C´D´**:



Dos figuras se llaman semejantes si tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño.

Dibujos a escala

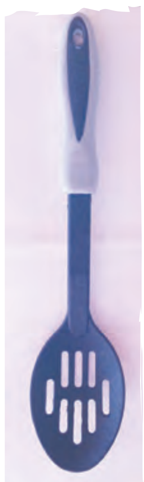
Recordemos algunas características de las escalas estudiadas en grado 6.º.

Por ejemplo, los automóviles pequeños de juguete “modelo a escala” son sumamente parecidos a los originales, es decir, son una réplica de ellos. ¿Cómo los hacen tan parecidos?

Las escalas se utilizan para ampliar, reducir o realizar dibujos de objetos y consisten en la aplicación de una razón de semejanza determinada que permite representar dichos objetos en el tamaño deseado.

Según la razón de proporcionalidad, las escalas son:

- **Escala natural:** Es aquella en la que el dibujo tiene las mismas dimensiones que el objeto real. Si se le llama A a una unidad del dibujo y B a una unidad del objeto real, la razón de semejanza es $\frac{A}{B}=1$.

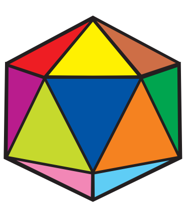


Objeto real

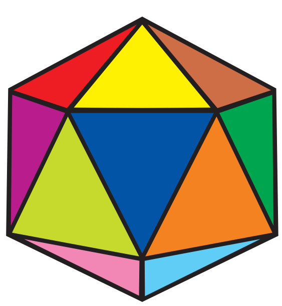
Objeto a escala natural

Los dibujos hechos a escala natural son congruentes con su original.

- **Escala de ampliación:** Es aquella que se utiliza para dibujar un objeto de mayor tamaño que el que tiene en la realidad.
  Si se le llama A a una unidad del dibujo y B a una unidad del objeto real, la razón de semejanza es $\frac{A}{B}>1$.



Objeto real

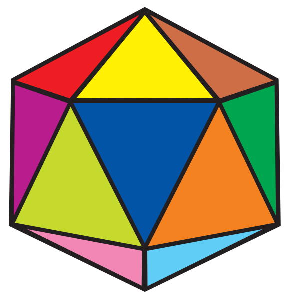


Objeto ampliado

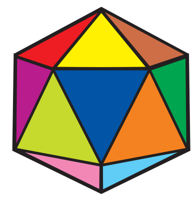
Un dibujo hecho a escala ampliada es semejante con su original.

- **Escala de reducción:** Es la escala que se utiliza para dibujar un objeto de menor tamaño que el que tiene en la realidad.

La razón de semejanza es $\frac{A}{B}<1$.



Objeto real



Objeto reducido

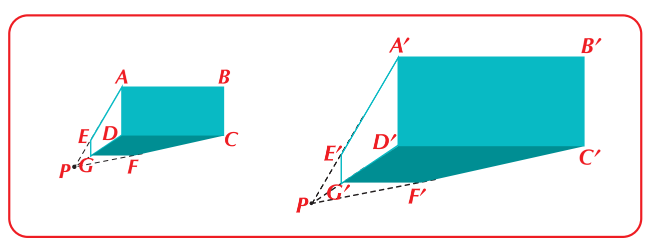
Un dibujo hecho a escala reducida es semejante con su original.

En general podemos decir que:

La escala es la razón de proporcionalidad entre dos figuras semejantes.
Si la razón de semejanza entre ellas es 1, decimos que las figuras son congruentes.

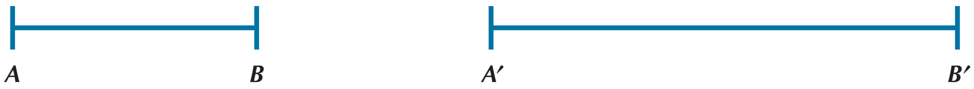
Analicemos los ejercicios que se presentan a continuación:

1. Observa los siguientes dibujos que representan un paralelepípedo rectangular en perspectiva, es decir, vista de lejos desde un punto:



¿En qué son diferentes?
Nota que sus formas son iguales, pero sus tamaños son diferentes.

2. Si se dibujan los segmentos AB y A′B′, se tiene:



Midiendo cada uno de los segmentos, resulta $AB = 2\ cm$, $A'B' = 4\ cm$.

Ahora, comparando sus medidas, observa que $A'B' = 2AB$, ya que $4\ cm = 2\ (2\ cm)$.
Estableciendo una razón, resulta: $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{4\ cm}{2\ cm} = 2 > 1$

Por tanto, esto es una ampliación, es decir, que en el segundo dibujo sus longitudes son el doble que las del primero.

3. Un joven que mide 1.60 m está parado cerca de un enorme árbol.
Él quiere saber cuánto mide la altura del árbol. Tiene dos datos muy interesantes: la sombra que arroja el árbol que es de 8.60 m y la de él que es de 0.72 m. Si colocamos en un dibujo estos datos podríamos construir triángulos rectángulos semejantes: la sombra y la altura de los objetos forman un ángulo recto y gracias a que los rayos del sol forman ángulos iguales con los objetos verticales, ya se tienen triángulos con dos ángulos de igual medida.
Entonces, el cociente de proporcionalidad se puede encontrar así:

$$\frac{\text{Longitud sombra del árbol}}{\text{Longitud de la sombra del joven}} = \frac{8.6}{0.72} = 11.944$$

Este cociente es el mismo entre:

$$\frac{\text{Altura del árbol}}{\text{Altura del joven}} = \frac{x}{1.6} = 11.944,$$

donde x es la altura del árbol que no conoces, pero ahora la puedes calcular. ¿Cuánto mide el árbol?:

x = (11.944) . (1.6)
x = 19.11

Otra manera de resolverlo es estableciendo la proporción:

$$\frac{\text{Sombra del joven}}{\text{Sombra del árbol}} = \frac{\text{Altura del joven}}{\text{Altura del árbol}}$$

$$\frac{0.72\ \text{m}}{8.60\ \text{m}} = \frac{1.60\text{m}}{x}$$

$$x = \frac{(8.6)\ (1.6)}{(0.72)}$$

$$x = 19.11\ \text{m}$$

Conclusión:

Los dibujos hechos a escala de ampliación o de reducción son semejantes con su original.

Aplicación

Invita a tres de tus compañeros para realizar el siguiente taller:

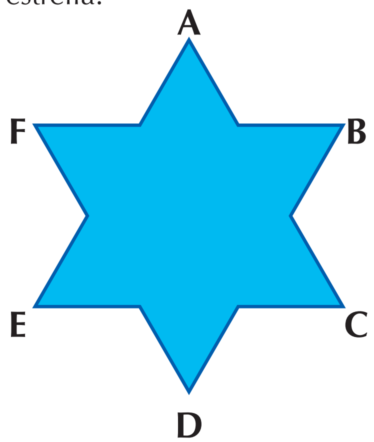
1. Cada uno trace y recorte un triángulo que tenga:

   a. Un lado de 4 cm de longitud. Comparen sus construcciones y expliquen si coinciden o no y por qué.
   b. Un triángulo que tenga dos lados de 6 cm y otro de 5 cm de longitud. Comparen sus construcciones y expliquen si coinciden o no y por qué.
   c. Un triángulo cuyos lados midan 8 cm, 6 cm y 4 cm. Comparen sus construcciones y expliquen si coinciden o no y por qué.

2. Dado un rectángulo cuyas medidas son 10 cm y 8 cm, traza en tu cuaderno y colorea:

   a. Un rectángulo congruente a él.
   b. Tres rectángulos semejantes al rectángulo.

3. Dada la estrella:



   a. Dibuja una estrella reducida de la dada.
   b. Dibuja una estrella ampliada de la dada.

4. En tu cuaderno, dibuja tres triángulos que sean semejantes.
5. De algún periódico o revista, calca dos veces una figura. Recorta los dibujos calcados y comprueba que coinciden totalmente. ¿Qué puedes afirmar?
6. En un plano cartesiano:

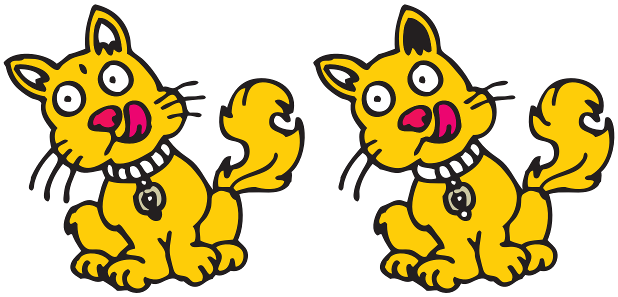
   a. localiza los puntos (3, 1), (-2, 3), (-5, -4), (5, -3) y (-3, -7), y luego únelos.
   b. Ahora, quítale 1 a cada coordenada de cada punto y une los nuevos puntos obtenidos. Describe lo que te ha resultado.
   c. Ponle letra a cada punto de las figuras construidas en tu plano y nombra los lados homólogos.

Entendemos por…

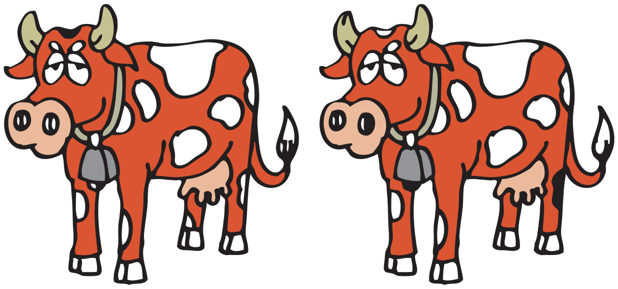
Homólogos a los elementos correspondientes en dos o más figuras.
Estos elementos pueden ser lados o ángulos.sección es enriquecer el léxico del estudiante.

Diversión matemática

Muchas veces, al tener frente a nosotros dos objetos, los comparamos buscando generalmente sus semejanzas, pero ahora, entre los dibujos dados, debemos encontrar las diferencias:



Encuentra las 8 diferencias



Encuentra las 8 diferencias

Día a día

Aeromodelismo

El aeromodelismo es un deporte con un elevado componente científico y técnico, cuyo objetivo es diseñar, construir y hacer volar aviones a escala, como una réplica lo más exacta posible de otros existentes, diseñados exclusivamente para aeromodelismo o incluso como prueba para futuros aviones reales.

Original

A escala

Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Aeromodelismo

Este capítulo fue clave porque

- Aprendí a manejar el plano cartesiano.
- Identifico los ejes de las abscisas (**x**) y de las ordenadas (**y**) del plano cartesiano.
- Sé ubicar puntos en el plano cartesiano.
- Reconozco las coordenadas de un punto.
- Localizo los ejes de simetría de una figura.
- Puedo diferenciar entre una figura simétrica y una fractal.
- Sé dibujar a escala.
- Identifico figuras congruentes.
- Reconozco figuras semejantes.
- Sé construir figuras congruentes.
- Sé construir figuras semejantes.

Conectémonos con El Arte

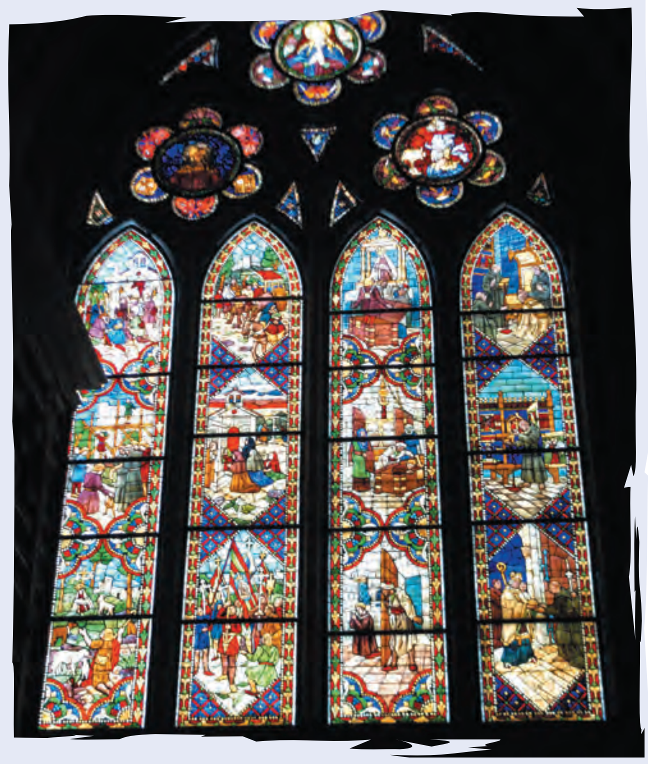
Vitrales

Un vitral es una composición elaborada con vidrios de colores.

Los vitrales ya eran usados en los templos de la época románica pero llegaron a su apogeo en la arquitectura gótica y se fueron generalizando a partir del siglo XIII.

Los vitrales presentan la forma de mosaico en el fondo, con varios compartimentos o medallones de figuras en serie de arriba-abajo, representándose en cada uno algún asunto religioso, histórico o simbólico, pero sin llevar más de un color cada fragmento de vidrio (salvo el esmalte de color gris o negruzco que se añade para trazar algunos perfiles y contornos de las figuras).

Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Vitral



Los sólidos o cuerpos geométricos

Lo más seguro es que en tus actividades diarias te encuentras rodeado de gran cantidad de formas geométricas, cuyos modelos generalmente semejan un paralelepípedo; por ejemplo: cajas, libros, libretas de remisiones, muebles y otros objetos. De hecho, la hoja que estás leyendo en este momento es un paralelepípedo de muy escaso grosor.

El paralelepípedo, llamado también prisma, es un cuerpo con forma tridimensional; es decir, que tiene volumen porque ocupa un espacio real.

Cuando jugamos con dos dados, cuando empacamos algunas cosas en cajas de cartón, es posible encontrarnos con un cubo.

Recuerda que cuando una caja tiene sus caras cuadradas y de igual tamaño, se dice que tiene forma cúbica.

Durante el desarrollo de este capítulo, principalmente conocerás las características de cuerpos que llamamos sólidos geométricos.

Obtendrás también el área lateral de algunos de ellos.

Y además conocerás y manejarás las unidades de volumen y capacidad, así como sus equivalencias, y las aplicarás en la resolución de problemas.

Los sólidos o cuerpos geométricos

estudiamos las características de

Cubo | Prisma recto | Pirámide

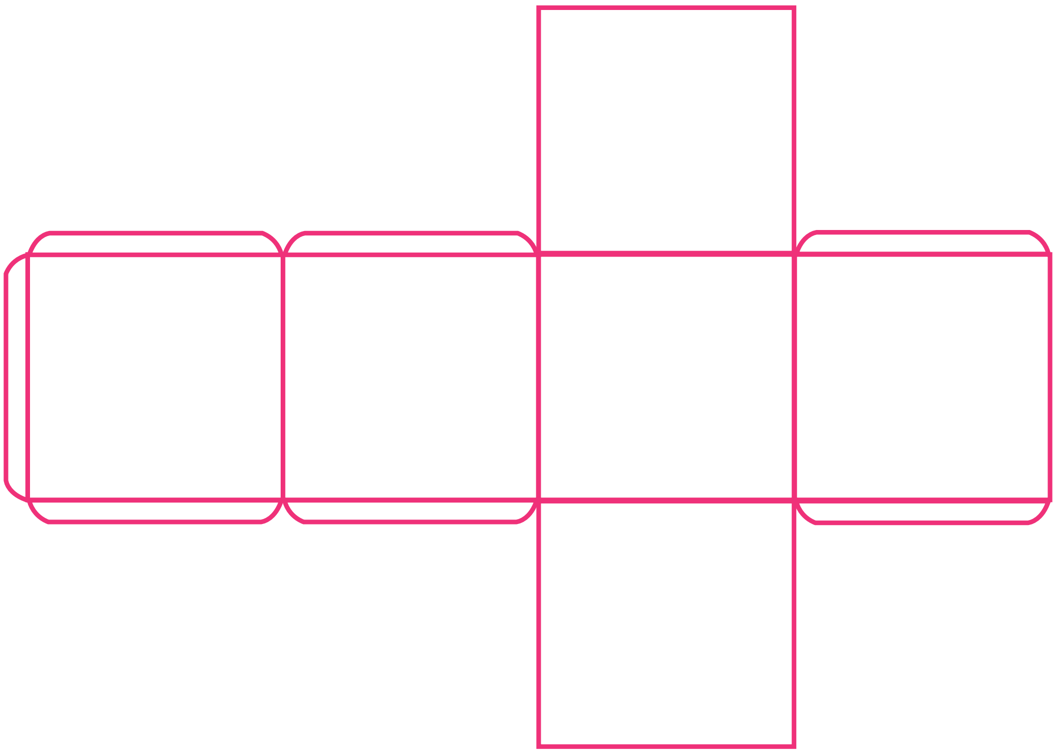
calculamos su área lateral, área total y volumen

y la relación de volumen con la masa y la capacidad

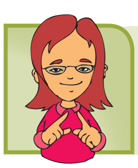
Tema 1. Cuerpos o sólidos geométricos. Áreas de cubo, prisma recto y pirámide

Indagación
Tú eres capaz de hacer un dado.

Entonces, copia al tamaño que quieras el molde que encuentras a continuación:



En una cara dibuja 1 punto; en otra, 2 puntos; y así sucesivamente hasta los 6 puntos. Aplícale colores, recorta y arma tu dado. Luego, apuesta con tu compañero al que saque mayor puntaje sumando los puntos obtenidos en 10 lanzamientos.



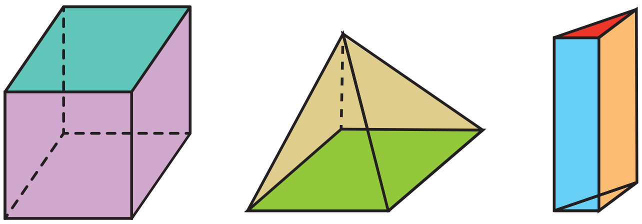
Conceptualización
Descripción de sólidos

Con frecuencia se efectúan comparaciones y se clasifican cosas, personas o hechos.

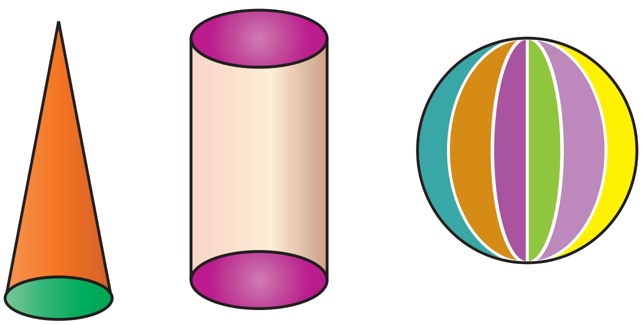
Para que las clasificaciones sean válidas, es necesario determinar el criterio de clasificación y manejar un lenguaje común.

Los cuerpos geométricos o sólidos se clasifican en poliedros y cuerpos redondos.

Los poliedros están limitados por caras planas y los cuerpos redondos están limitados por caras curvas o por la combinación de caras curvas y planas. Por ejemplo:



Poliedros



Cuerpos redondos

Los sólidos, aunque tienen formas diferentes, tienen también elementos comunes.

Todo sólido está limitado por caras planas o por caras curvas.

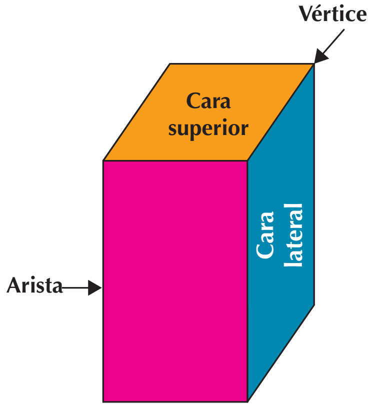
Definimos, entonces:

Cara: Es cada una de las superficies que limitan a un poliedro o a un cuerpo redondo.

Algunas de estas caras las denominamos bases y otras caras laterales.

Arista: Es la línea o borde donde concurren o se unen dos caras de un sólido.

Vértice: Es el punto donde concurren tres o más aristas.



Los sólidos platónicos

Los sólidos platónicos son: el tetraedro, el cubo (o hexaedro regular), el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Los sólidos platónicos también se conocen con otros nombres como: cuerpos platónicos, cuerpos cósmicos, sólidos pitagóricos, sólidos perfectos, poliedros de Platón o poliedros regulares convexos.

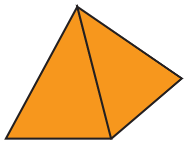
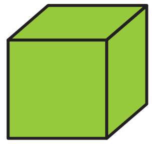
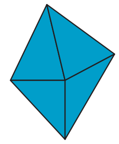
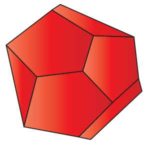
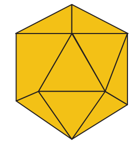
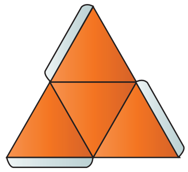
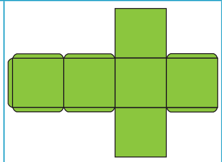
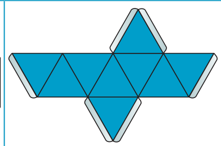
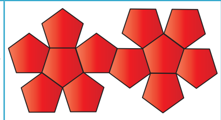
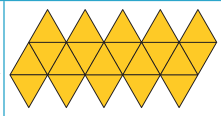
Los sólidos platónicos se caracterizan por ser poliedros convexos, cuyas caras son polígonos regulares iguales. Reciben este nombre en honor al filósofo griego Platón, quien vivió entre los años 427 y 347 antes del nacimiento de Cristo.

Según la historia, Platón relacionó los sólidos platónicos con los cuatro elementos y el universo, así:

Cubo → **Tierra**
Tetraedro → **Fuego**
Octaedro → **Aire**
Icosaedro → **Agua**
Dodecaedro → **Universo**

Así varios matemáticos y filósofos, impresionados por la belleza y elegancia lógica de la geometría, han pretendido utilizar las ideas geométricas para explicar el Universo en que vivimos. Uno de los primeros fue Platón, quien estaba tan prendado de los cinco sólidos regulares que los empleó como el fundamento de una teoría de la materia. En su libro Timeo, escrito hacia el 350 a. C., Platón llevó adelante la sugerencia de que los “cuatro” elementos que se pensaba que componían el mundo, a saber, el agua, el aire, el agua y la tierra, eran todos ellos agregados sólidos diminutos. Pensaba además que, puesto que el mundo solamente podía estar formado a partir de cuerpos perfectos, tales elementos debían tener la forma de los sólidos regulares. Además, argumentaba que el fuego era un tetraedro al ser el más ligero y punzante de los elementos; la tierra ha de consistirse en cubos al ser el más estable de todos; el agua debe ser un icosaedro, el sólido regular que tiene más posibilidades de rodar fácilmente, por ser el más móvil y fluido; y en cuanto al aire, Platón observó que “el aire es al agua lo que el agua es a la tierra”, concluyendo, aunque algo misterioso, que el aire debe ser un octaedro. Y finalmente, para no dejar al único sólido regular que queda fuera del cuadro, propuso que el dodecaedro representa la forma del Universo en su totalidad.

Tomado de http://laescueladeateanas.wordpress.com/2008/10/17/los-solidos-de-platon-i/

	Tetraedro	Hexaedro o cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Sólidos platónicos					
Modelación					
Características	Del griego ***téttara*** (cuatro) y ***edra*** (cara o base). Sus caras son cuatro triángulos equiláteros.	Del griego ***hex*** (seis) y ***edra*** (cara o base). Sus caras son seis cuadrados iguales.	Del griego ***októo*** (ocho) y ***edra*** (cara o base). Sus caras son ocho triángulos equiláteros.	Del griego ***doódeka*** (doce) y ***edra*** (cara o base). Sus caras son 12 pentágonos regulares.	Del griego ***eíkosi*** (veinte) y ***edra*** (cara o base). Sus caras son 20 triángulos equiláteros.
Polígonos que forman sus caras	Triángulos equiláteros	Cuadrados	Triángulos equiláteros	Pentágonos regulares	Triángulos equiláteros
Número de aristas	6	12	12	30	30
Número de caras	4	6	8	12	20
Número de vértices	4	8	6	20	12

Prismas o paralelepípedos rectos

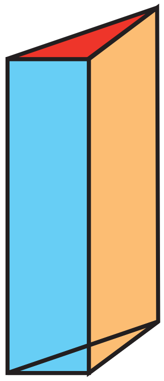
Los ***prismas*** son aquellos poliedros que tienen dos bases de la misma forma y sus caras laterales son rectangulares. Si todas sus caras no son iguales, se les denomina ***irregulares***.

Los prismas, poliedros o paralelepípedos reciben su nombre según la forma de sus bases, por ejemplo:

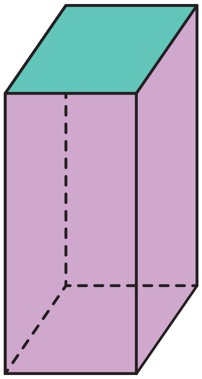
Prisma rectangular

Sus bases son rectángulos, pero no son de la misma forma y dimensiones que sus caras laterales.

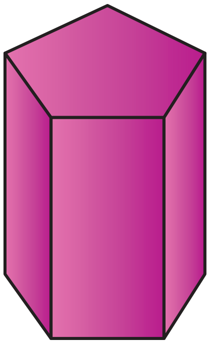
Prisma triangular
Sus bases son triángulos.



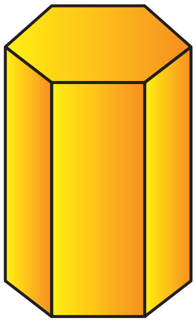
Prisma cuadrangular
Sus bases son cuadrados.



Prisma pentagonal
Sus bases son pentágonos.



Prisma hexagonal
Sus bases son hexágonos.



Área lateral y área total del cubo y del prisma o paralelepípedo

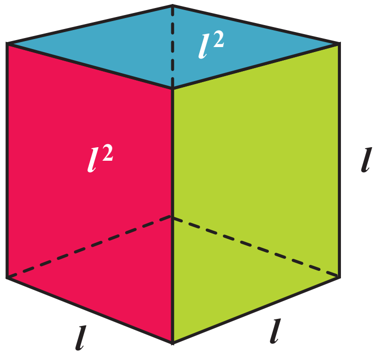
Los conocimientos geométricos y de medición que ya posees te permiten calcular muy fácilmente el área lateral de un cubo y de un prisma recto o paralelepípedo recto, puesto que las caras laterales de estos sólidos son cuadrados o rectángulos. ¿Te acuerdas?

Se llama *área lateral* (*Al*) a la suma de las áreas de las caras laterales del poliedro y *área total* (*At*) a la suma del área lateral con el área de las bases.

Áreas lateral y total del cubo

Como el cubo tiene 4 caras laterales y 2 bases, todas cuadradas y de igual área, entonces el área lateral del cubo es igual a 4 veces el área de una cara y el área total que es la suma del área lateral con el área de las 2 bases será 6 veces el área de una cara.

Simbólicamente:
Área lateral (*Al*)
$Al = l^2 + l^2 + l^2 + l^2 = 4l^2$, en donde l^2 es el área de una cara.
Áreal total (*At*)
$At = Al + l^2 + l^2 = 4l^2 + l^2 + l^2 = 6l^2$



Cubo

Analicemos el caso siguiente:

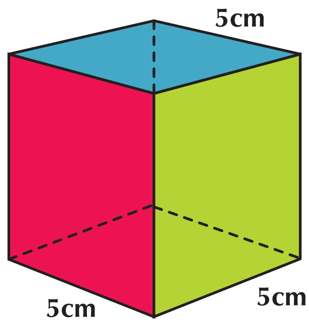
Si el cubo de la figura mide 5 cm por cada lado, calcula:

a. Su área lateral
b. Su área total

Solución

a. Área lateral (Al)

$Al = l^2 + l^2 + l^2 + l^2$
$= (5cm)^2 + (5cm)^2 + (5cm)^2 + (5cm)^2$
$= (4)\,(5cm)^2$
$= (4)\,(5cm)\,(5cm)$
$= (4)\,(25cm^2)$
$= 100cm^2$



b. Área total (At)

At = área lateral + área de las bases
$= Al + l^2 + l^2 = 4l^2 + l^2 + l^2 = 6l^2$
$= 100cm^2 + (5cm)^2 + (5cm)^2$
$= 100cm^2 + 2(25cm^2)$
$= 100cm^2 + 50cm^2$
$= 150cm^2$

Otra manera de calcular el área total del cubo es multiplicando al área de una cara por 6, ya que el cubo tiene 6 caras de igual área.

$$At = 6(5cm)^2$$
$$= 6(25\,cm^2)$$
$$= 150cm^2$$

Áreas lateral y total del prisma o paralelepípedo

El prisma o paralelepípedo tiene tantas caras laterales como lados t y 2 bases. Un prisma puede tener bases triangulares, cuadradas, rectangulares o bases de cualquier otro polígono, pero sus caras laterales siempre son rectángulos.

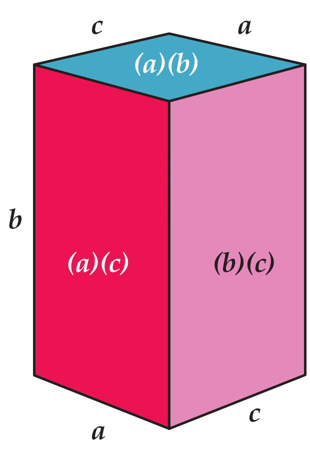
En la figura siguiente tenemos el prisma o paralelepípedo de bases **a** x **c** y altura **b**.

El área lateral del prisma es igual a la suma de las áreas de las caras laterales y el área total es la suma del área lateral con el área de las 2 bases.

Simbólicamente tenemos:

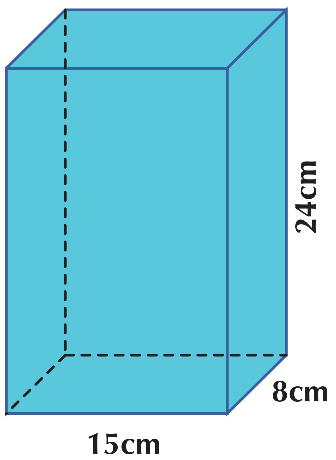
Área lateral (Al)

Al = suma de las áreas de las caras laterales
$Al = (ab) + (bc) + (ab) + (bc) = 2(ab) + 2(bc)$,
en donde (ab) y (bc) son áreas de caras laterales.



Área total (At)
At = área lateral + áreas de las bases
$At = Al + (ac) + (ac) = Al + 2(ac)$,
en donde (ac) es el área de una de sus bases.

Observa la solución de la siguiente situación:
Se quiere calcular el área lateral y el área total del paralelepípedo:



Solución
Área lateral (*Al*)

Al = suma de las áreas de las caras laterales
Al = (24cm)(15cm) + (24cm)(8cm) + (24cm)(15cm) + (24cm)(8cm)
= [(24cm)(15cm) + (24cm)(15cm) + (24cm)(8cm) + (24cm)(8cm)]
= 2(24cm)(15cm) + 2(24cm)(8cm)
= 720cm^2 + 384cm^2
= 1,104cm^2

Otra manera de calcular el área lateral del prisma es multiplicando el perímetro de una de sus bases por la altura:

Al = perímetro de la base por altura
Al = (15cm + 8cm + 15cm + 8cm)(24cm)
= [2(15cm) + 2(8cm)] (24cm)
= [30cm + 16cm] (24cm)
= [46cm] (24cm)
= 1,104cm^2

Área total del prisma o paralelepípedo dado:
Área total (*At*)

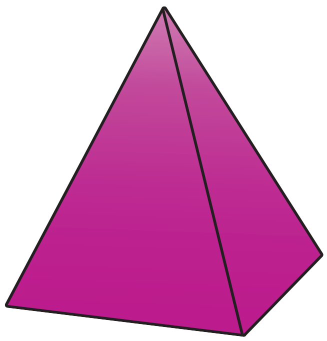
At = área lateral + áreas de las bases
= 1,104cm^2 + 2 (15cm)(8cm)
= 1,104cm^2 + 2 (120cm^2)
= 1,104cm^2 + 240cm^2
= 1,344cm^2

Pirámide

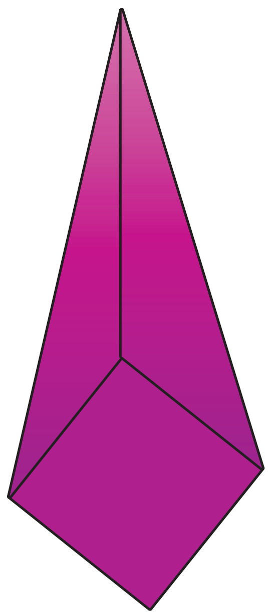
Las pirámides son cuerpos irregulares.

Las pirámides son aquellos poliedros que tienen una sola base, sus caras laterales son triángulos y los vértices de los triángulos se unen en un punto llamado cúspide, el cual está opuesto a la base.

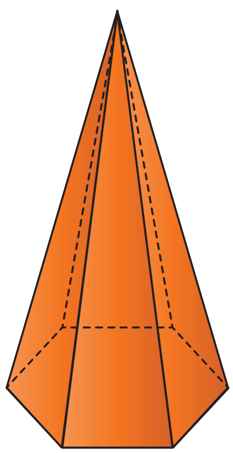
Al igual que los prismas, las pirámides reciben su nombre según la forma de su base:



Pirámide triangular



Pirámide cuadrangular



Pirámide hexagonal

En las pirámides, como también sucede en los prismas, también se puede identificar: el número de caras, el número de vértices y el número de aristas.

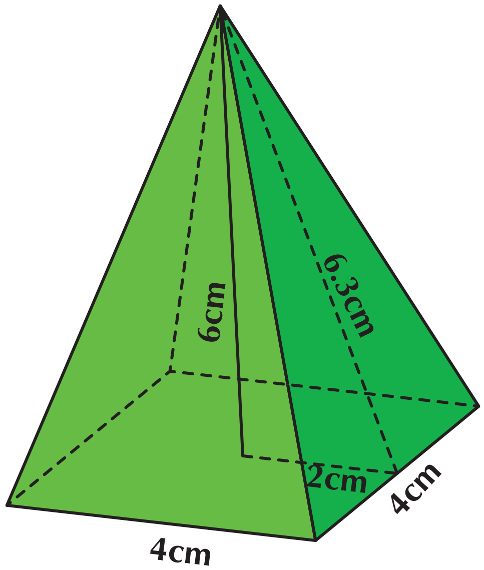
Áreas lateral y total de la pirámide

Como en todo poliedro, el área lateral de la pirámide es igual a la suma de las áreas de las caras laterales y el área total es igual a la suma del área lateral más el área de la base.

Área lateral de la pirámide (*Al*)
Al = suma de las áreas de las caras laterlaes

Área total (*At*)
At = área lateral + área de la base

Esta pirámide tiene 4 caras triangulares de medidas iguales: base 4 cm y altura de cada cara 6.3 cm.



Entonces tenemos:

Al = suma de las áreas de las caras laterlaes

$$Al = \cancel{4}\left[\frac{(6.3\text{cm})(4\text{cm})}{\cancel{2}}\right]$$

$$= 2\ [25.2\text{cm}^2\ ]$$

$$= 50.4\text{cm cm}^2$$

Área total de la pirámide dada:

Área total (At)

At = área lateral + área de la base

$$At = (50.4\text{cm}^2) + [(4\text{cm})(4\text{cm})]$$

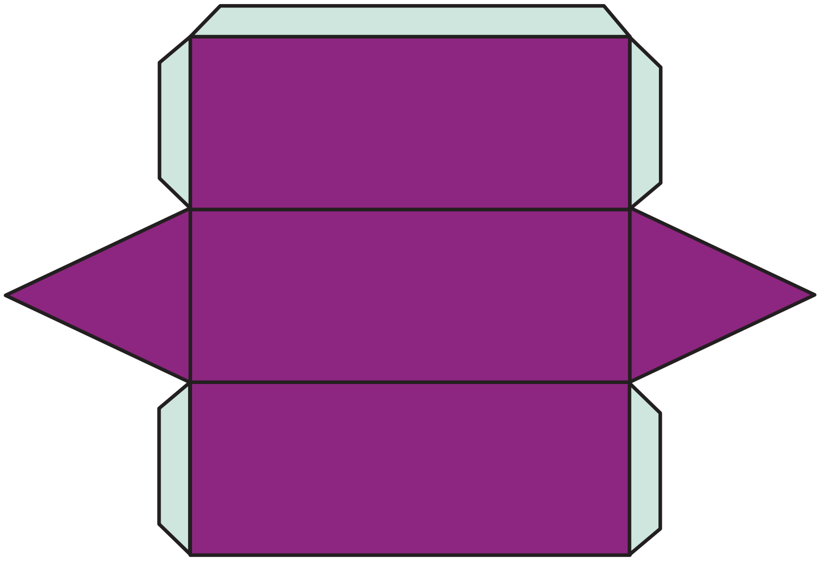
$$= (50.4\text{cm}^2) + (16\text{cm}^2)$$

$$= 66.4\ \text{cm}^2$$

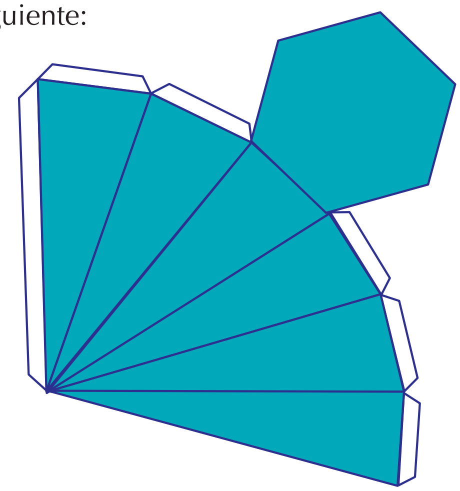
Aplicación

Copia en tu cuaderno los ejercicios siguientes, resuélvelos y compara tu trabajo con algunos de tus compañeros.

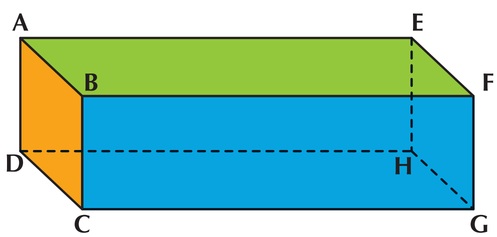
1. Busca en revistas, periódicos o cualquier impreso ejemplos que ilustren cómo el ser humano ha empleado formas geométricas de sólidos en construcciones y objetos.
2. Construye un prisma triangular y una pirámide hexagonal, en cartulina, del tamaño que quieras y según el modelo siguiente:



3. Construye una pirámide hexagonal, en cartulina, del tamaño que quieras y según el modelo siguiente:



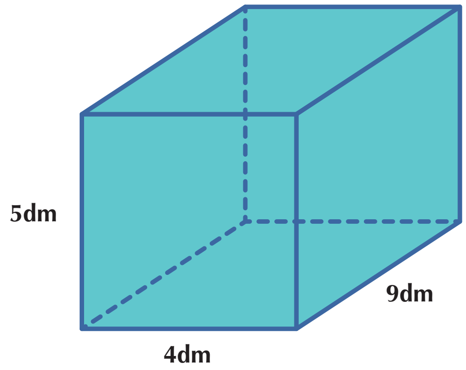
4. Analiza el prisma siguiente y contesta las preguntas en tu cuaderno.



   a. Nombra los vértices del prisma.
   b. Nombra todas sus aristas.
   c. ¿Cuáles caras consideras como bases del prisma?
   d. ¿Cuáles serían entonces sus caras laterales?
   e. ¿Si consideraras como base de este prisma la cara ABCD, ¿cuál sería la otra base?

Debajo de cada cuerpo geométrico, escribe su nombre y clasifícalo como poliedro o cuerpo redondo.

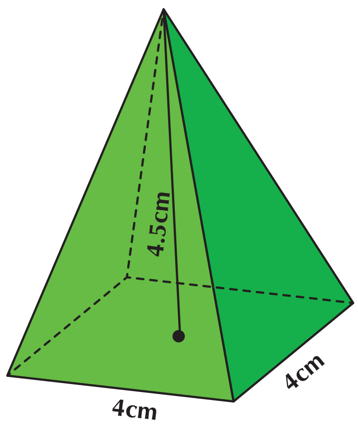
Pipe tiene un acuario en su casa y ha hecho un dibujo de él asignándole sus medidas:



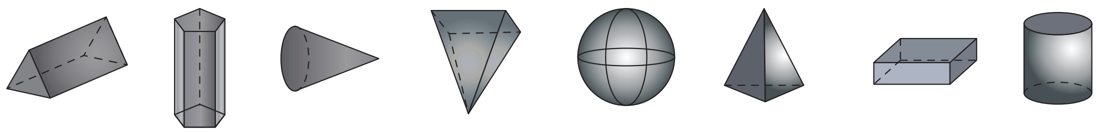
Ayúdale a Pipe a calcular

7. El área lateral
8. El área total de su acuario

Dada la pirámide de la figura, calcula los datos siguientes:



9. El área lateral.
10. El área total.



5. Nombre ________ ________ ________ ________ ________ ________ ________ ________

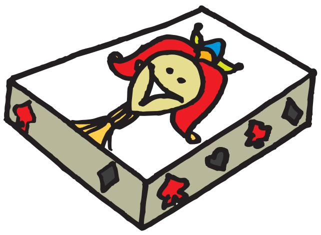
6. Clasificación ________ ________ ________ ________ ________ ________ ________ ________

Entendemos por…

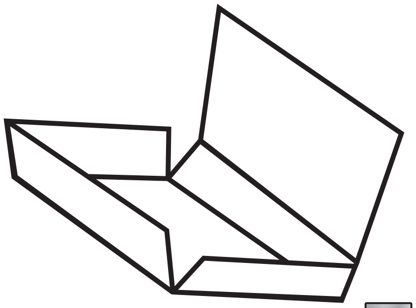
Cúspide la punta donde termina algo. Vértice de la pirámide en donde confluyen o llegan las caras laterales de la pirámide.
Cara cada una de las superficies que limitan a un poliedro o a un cuerpo redondo.
Algunas de estas caras las denominamos **bases** y otras **caras laterales**.

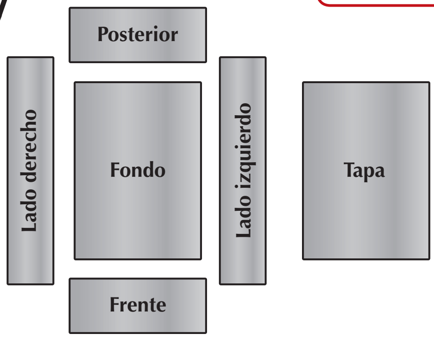
Diversión matemática

Telmo desea diseñar una caja para guardar un regalito que compró para su novia, puede ser similar a la que se muestra. ¿Cómo harías el diseño?
Consigue una caja similar que puedas desbaratar como se ilustra a continuación.



Observando la caja por el frente, la parte posterior, los lados, por arriba, por abajo, se concluye que se requieren dos rectángulos congruentes para la cara posterior y el frente, dos más para los lados y otros dos para la base y la tapa.
Ayúdale a Telmo a construir su cajita en un cartón, cartulina o papel.





Día a día

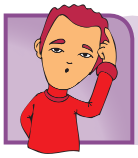
Las pirámides de Egipto

Las grandes pirámides de Egipto son tres y se les denomina, de mayor a menor, Khufu, Kafre y Menkaure (en griego; Keops, Kefrén y Mikerinos); nombres de los faraones a quienes se les atribuye su construcción.
La fecha estimada de terminación de la Gran Pirámide es 2570 a.C. y fue la primera y mayor de las tres grandes pirámides de la Necrópolis de Giza en las afueras de El Cairo en Egipto y el edificio más alto del mundo hasta a mediados del siglo XIX. Siendo entonces superada solo por las agujas de la Catedral de Colonia (157 m, construida entre 1248 a 1880) y la Torre Eiffel (300 m, erigida en 1889). Aún hoy la Gran Pirámide es el mayor edificio construido en piedra.
El egiptólogo británico William Matthew Flinders Petrie hizo el estudio más detallado realizado hasta el momento acerca del monumento, siendo sus dimensiones las siguientes:
Altura original = 146.61 m
Altura actual = 136.86 m
Las longitudes de los lados de la base, según Flinders Petrie son:

lado norte: 230,364 m (9069.4 pulgadas)
lado este: 230,319 m (9067.7 pulgadas)
lado sur: 230,365 m (9069.5 pulgadas)
lado oeste: 230,342 m (9068.6 pulgadas)

http://www.taringa.net/posts/imagenes/1355399/Las-piramides-de-Egipto.html

Tema 2. Medidas de volumen, peso y capacidad de los sólidos



Indagación

Cuando queremos medir algo tenemos que elegir la unidad de medida adecuada y los instrumentos que nos posibiliten una mayor precisión. Por ejemplo, no podríamos medir el largo del salón de clase usando como unidad el kilogramo, ni decir cuánto pesa un elefante usando el litro o el metro.

Del mismo modo, si un joyero necesita saber el peso de un anillo de oro precisa una aproximación más fina que la del vendedor que pesa una bolsa de papas.

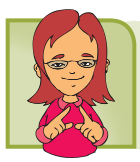
No nos olvidemos que los resultados de las mediciones son siempre aproximaciones, pues los valores que se obtienen dependen de la habilidad de la persona que mide y de la precisión del instrumento del que se disponga.

La forma de algunos objetos les permite contener sustancias; esos objetos se llaman recipientes y de ellos se puede medir tanto su capacidad como su volumen. También se puede conocer el volumen de su contenido. Por ejemplo, una taza vacía tiene un volumen, ocupa un lugar en el espacio y, como es un recipiente, también se pueden medir su capacidad y el volumen del líquido que se desee agregar.

En cambio, de otros objetos, como una piedra, solo se le puede medir su volumen. La piedra no es un recipiente.

Así, los cuerpos geométricos, como el cubo y los paralelepípedos, son de forma tridimensional, esto quiere decir que tienen volumen y ocupan un espacio real.

Conversa con tus compañeros sobre cuáles objetos de la casa tienen volumen, peso o capacidad.



Conceptualización

Los materiales en la naturaleza se encuentran en tres estados: sólido, líquido o gaseoso.

Cada uno tiene propiedades o características propias.

Las medidas de longitud, superficie, volumen, capacidad y peso forman parte del sistema métrico decimal.

Recordemos que las medidas de longitud sirven para determinar una sola dimensión, por ejemplo, la altura de una persona, un árbol, una casa, etc.

Las medidas de área sirven para medir superficies en unidades cuadradas, es decir, en dos dimensiones: largo y ancho, como por ejemplo, la extensión de un lote o una finca.

Las medidas de volumen sirven para medir el espacio que ocupa un cuerpo, como el del estanque de peces.

Las medidas de peso sirven para medir la fuerza con que la tierra atrae a los cuerpos. Por ejemplo, el peso de un bulto de papa.

Las medidas de capacidad sirven para medir los líquidos, como agua, aceite, leche y vino.

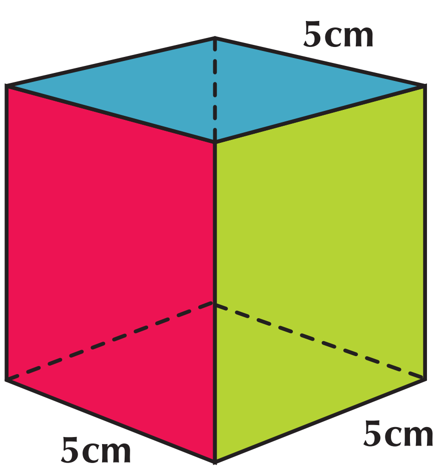
El volumen

El volumen es el espacio que ocupa la materia. El volumen se puede medir.

La unidad de medida es el metro cúbico (m^3) que es un cubo que por cada lado mide 1 metro lineal.

Hemos estudiado las características de los sólidos o cuerpos geométricos y las áreas lateral y total del cubo, el prisma y la pirámide. Ahora veamos cómo calcular su volumen.

Retomemos los ejemplos de los cuerpos geométricos del tema anterior:



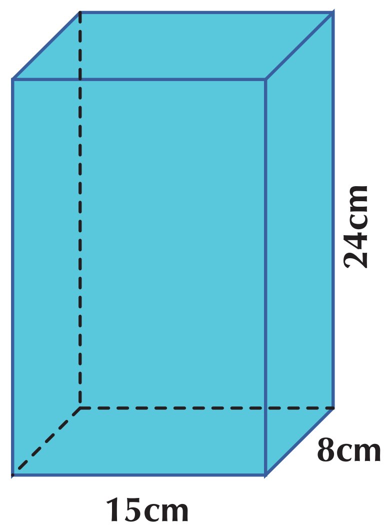
Vimos cómo el cubo que mide 5 cm por cada lado tiene un área lateral de 100 cm^2 y su área total es de 150 cm^2.

El volumen del cubo es igual al producto del largo, por el ancho y por el alto. Es decir, área de la base por altura.

Así, el volumen del cubo dado será:

$$\begin{aligned} V_c &= l \; x \; l \; x \; l = l^3 \\ &= (5cm)\,(5cm)\,(5cm) \\ &= (5cm)^3 \\ &= 125cm^3 \end{aligned}$$

En el caso del prisma encontramos que:



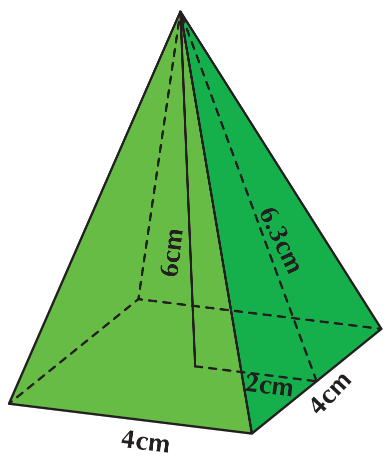
área lateral = 1 104 cm^2 y
área total = 1 344 cm^2.

Ahora calculamos su volumen que es igual al área de la base por altura.

Así:

$$\begin{aligned} V_p &= \text{área de la base por altura} \\ V_p &= [(15cm)(8cm)]\,(24cm) \\ &= [120cm^2]\,(24cm) \\ &= 2{,}880cm^3 \end{aligned}$$

Ya calculamos el área lateral de esta pirámide y nos dio 50.4 cm^2 y su área total fue de 66.4 cm^2. Veamos ahora cómo calcular el volumen.



Si tuvieras dos cajas: una en forma de prisma y otra en forma de pirámide de igual altura e igual base, podríamos comprobar que en ese prisma caben tres pirámides de igual volumen. Podemos entonces afirmar que el volumen de la pirámide es igual a la tercera parte del volumen del prisma que tiene igual base y altura que ella, esa decir:

$V_p = \frac{1}{3}$ del área de la base por la altura de la pirámide

Simbólicamente:

$$V_p = \frac{1}{3}\ [(\text{largo})(\text{ancho})]\ (\text{altura})$$

En este caso:

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{3}\ [(4cm)(4cm)]\ (6cm) \\ &= \frac{1}{3}\ [16cm^2]\ (6cm) \\ &= \frac{1}{3}\ [96cm^3] \\ &= 32cm^3 \end{aligned}$$

Observa que las medidas de volumen son cúbicas. Las medidas de volumen van de 1,000 en 1,000, así:

- 1 metro cúbico = 1,000 decímetros cúbicos = 1,000 dm^3;
- 1 decímetro cúbico = 1,000 centímetros cúbicos = 1,000 cm^3;
- 1 centímetro cúbico = 1,000 milímetros cúbicos = 1,000 mm^3.

Podemos expresar las medidas al contrario así:
1 decímetro cúbico = $\frac{1}{1,000}$ de metro cúbico, es decir, que 1 dm^3 = 0.001 m^3.
1 centímetro cúbico = $\frac{1}{1,000}$ de decímetro cúbico, es decir, que 1 cm^3 = 0.001 dm^3.
1 milímetro cúbico = $\frac{1}{1,000}$ de centímetro cúbico, es decir, que 1 mm^3 = 0.001 cm^3.

Las medidas mayores que el metro cúbico, llamadas múltiplos, son:

- 1 decámetro cúbico = 1 dam^3 = 1 Dm^3 = 1,000 m^3;
- 1 hectómetro cúbico = 1 hm^3 = 1,000 dam^3 = 1,000 Dm^3;
- 1 kilómetro cúbico = 1 km^3 = 1,000 hm^3.

Podemos decir también que:
1 metro cúbico = $\frac{1}{1,000}$ dam^3 = $\frac{1}{1,000}$ Dm^3 = 0.001Dm^3.
1 decámetro cúbico = $\frac{1}{1,000}$ hm^3 = 0.001 hm^3.
1 hectómetro cúbico = $\frac{1}{1,000}$ km^3 = 0.001 km^3.

Conversiones entre medidas de volumen

Expresemos 4 km^3 en mm^3:

$$4km^3 = \frac{4km^3 \text{ x } 1,000hm^3}{1km^3} = 4,000hm^3$$

Expresemos 25 cm^3 en m^3:

$$25cm^3 = \frac{25cm^3 \text{ x } 0.001dm^3}{1cm^3} = 0.025dm^3 =$$

$$\frac{0.025dm^3 \text{ x } 0.001m^3}{1dm^3} = 0.000025m^3$$

El peso

Hagamos primero la diferencia entre masa y peso.

Hemos dicho que el peso es la fuerza con que nuestro planeta atrae a los cuerpos.

La *masa* es la cantidad de materia que posee un cuerpo.

La masa y el peso están estrechamente relacionados. Para calcular el peso de un cuerpo es necesario conocer la masa y multiplicarla por la aceleración gravitacional del planeta en que se encuentre el cuerpo.

Así por ejemplo, un cuerpo pesa en la tierra 6 veces más que en la Luna, porque la aceleración gravitacional en la luna es 6 veces menor que en la tierra, aunque el cuerpo tenga la misma masa.

En la cotidianidad, cuando hablamos de peso nombramos unidades como kilogramos o gramos que son unidades de masa y deberíamos decir kilogramos-fuerza o gramos-fuerza para referirnos al peso.

Así, un cuerpo de masa el doble que otro, pesa también el doble.

El kg es, por tanto, una unidad de masa, no de peso. Sin embargo, muchos aparatos utilizados para medir pesos (básculas, por ejemplo) tienen sus escalas graduadas en kg en lugar de kg-fuerza. Esto no suele representar, normalmente, ningún problema, ya que 1 kg-fuerza es el peso en la superficie de la tierra de un objeto de 1 kg de masa. Así, una persona de 60 kg de masa pesa en la superficie de la tierra 60 kg-fuerza.

Entonces, cuando hablemos de peso, nos referiremos simplemente a las unidades siguientes:

El gramo (g) es la unidad de masa y de peso es gramo-fuerza.

El gramo (g) tiene submúltiplos y múltiplos que van de 10 en 10.

- 1 gramo = 10 decigramos = 10 dg,
- 1 decigramo = 10 centigramos = 10 cg,
- 1 centigramo = 10 miligramos = 10 mg.

Podemos expresar las medidas al contrario así:

1 decigramo = $\frac{1}{10}$ de gramo, es decir que

1 dg = 0.1 g.

1 centigramo = $\frac{1}{10}$ de decigramo, es decir que

1 cg = 0.1 dg.

1 miligramo = $\frac{1}{10}$ de centigramo, es decir que

1 mg = 0.1 cg.

Las medidas mayores que el gramo, llamadas múltiplos, son:

- 1 decagramo = 10 gramos,
- 1 hectogramo = 10 decagramos,
- 1 kilogramo = 10 hectogramos.

Podemos decir también que:

1 gramo = $\frac{1}{10}$ dag = $\frac{1}{10}$ dg = 0,1 dg,

1 decagramo = $\frac{1}{10}$ hg = 0,1 hg,

1 hectogramo = $\frac{1}{10}$ kg = 0,1 kg.

Observemos que cada unidad de masa o peso es 10 veces mayor que la unidad inmediatamente inferior y 10 veces menor que la inmediatamente superior.

Conversiones entre medidas de peso (masa)

Expresemos 85 kg en g:

Como un kilogramo tiene 1,000 gramos, entonces,

$$85\text{kg} = \frac{85\text{kg} \times 1{,}000\text{g}}{1\text{kg}} = 85{,}000\text{g}$$

Expresemos 498 dg en kg:

$$498\text{dg} = \frac{498\text{dg} \times 0.1\text{g}}{1\text{dg}} = 49.8\text{g} = \frac{49.8\text{g} \times 0.001\text{kg}}{1\text{g}} = 0.0498\text{kg}$$

Recordemos:

Multiplicar por 0.1 es lo mismo que dividir entre 10.
Multiplicar por 0.01 es lo mismo que dividir entre 100.
Multiplicar por 0.001 es lo mismo que dividir entre 1000.

La capacidad

Las medidas de capacidad sirven para medir los líquidos, como agua, leche, jugo, gaseosa, cerveza, etc.

Los líquidos toman la forma del recipiente que los contiene.

Puedes comprobarlo, por ejemplo, deposita agua en una jarra, luego vacía esa cantidad en un envase o en una olla, y verás que el líquido se acomoda.

La unidad de las medidas de capacidad es el litro (l).

Al igual que las medidas de longitud y de peso o de masa, las medidas de capacidad van de 10 en 10. Es decir, cada unidad de capacidad es 10 veces mayor que la unidad inmediatamente inferior y 10 veces menor que la inmediatamente superior.

Entonces,

- 1 litro = 10 decilitros = 10 dl,
- 1 decilitro = 10 centilitros = 10 cl,
- 1 centilitro = 10 mililitros = 10 ml.

Podemos expresar las medidas al contrario así:

1 decilitro = $\frac{1}{10}$ de litro, es decir que 1 dl = 0.1 l.

1 centilitro = $\frac{1}{10}$ de decilitro, es decir que 1 cl = 0.1 dl.

1 mililitro = $\frac{1}{10}$ de centilitro, es decir que 1 ml = 0.1 cl.

Las medidas mayores que el litro, llamadas múltiplos, son:

- 1 decalitro = 1 dal = 1 Dl = 10 l,
- 1 hectolitro = 1 hl = 10 dal = 100 l,
- 1 Kilolitro = 1 kl = 10 hl = 100 dal = 1,000 l.

Podemos decir también que:

1 litro = $\frac{1}{10}$ dal = $\frac{1}{10}$ Dl = 0.1 dl,

1 decalitro = $\frac{1}{10}$ hl = 0.1 hl,

1 hectolitro = $\frac{1}{10}$ kl = 0.1 kl.

Observemos también que cada unidad de masa o peso es 10 veces mayor que la unidad inmediatamente inferior y 10 veces menor que la inmediatamente superior.

Conversiones entre medidas de peso (masa)

Expresemos 78 hl en dl:

Como 1 hectolitro tiene 100 litros, entonces, $78\text{hl} = \frac{78\text{hl} \times 100\text{l}}{1\text{hl}} = 7{,}800\text{l}$.

Expresemos 985 ml en dl:

$$985\text{ml} = \frac{985\text{ml} \times 0.1\text{cl}}{1\text{ml}} = 98.5\text{cl} = \frac{98.5\text{cl} \times 0.01\text{l}}{1\text{cl}} = 0.985\text{l} = \frac{0.985\text{l} \times 0.1\text{dl}}{1\text{l}} = 0.0985\text{dl}$$

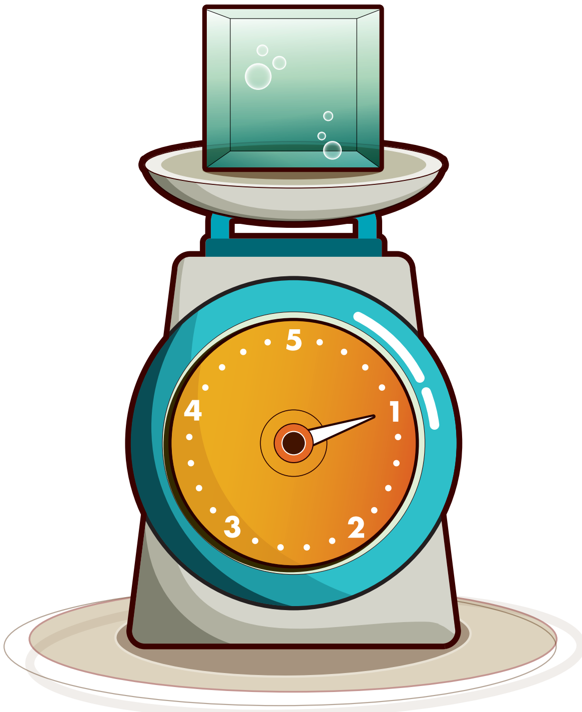
Relaciones entre medidas de volumen, peso y capacidad

Si depositamos un litro de agua pura en una caja que tiene un volumen de 1 decímetro cúbico, esta pesará 1 kilogramo-fuerza, es decir, su masa es de 1 kg.

Volumen	Masa	Capacidad
1 dm^3 = 1,000 cm^3	1 kg	1 l = 1,000 ml
1 m^3 = 1,000 dm^3	1,000 kg	1 kilolitro (1 kl)
1 centímetro cúbico (cm^3)	1 g	1 ml

Analicemos el ejercicio siguiente:

En una planta de tratamiento se tienen 5 kilolitros de agua químicamente pura. ¿Cuánto pesan y qué volumen ocupan?



Solución

Sabemos que:

Un volumen de 1 dm^3 tiene una capacidad de 1 litro y pesa 1 kg, esto es: 1 dm^3 = 1 l = 1 kg.

Como 5 kilolitros = 5,000 litros, entonces, ocuparán un volumen de 5,000 dm^3.

Además, como 1 dm^3 de agua pesa 1 kg, entonces, 5,000 dm^3 = 5,000 kg.

Aplicación

1. Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que mide 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2,500 mm de alto.
2. En un club hay una piscina que tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?
3. En un almacén, hay un salón de dimensiones: 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto. Queremos almacenar cajas de dimensiones: 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuántas cajas podremos almacenar?
4. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para recubrir las caras de una piscina de 10 m de largo por 6 m de ancho y de 3 m de profundidad?
5. Javier ha comprado litros de leche y de jugo, en envases de 1.5 litros cada uno. Los litros de leche son el doble de los litros de jugo. ¿Cuántos litros de jugo y cuántos de leche ha comprado Javier?
6. Un frasco contiene 250 cm^3 de jarabe. El médico le ha recetado a Patricia que tome 3 cucharadas diarias de 5 ml cada una. ¿Tiene suficiente jarabe para 12 días de tratamiento? Justifica tu respuesta.
7. Completa la tabla de equivalencias:

	Volumen	Peso	Capacidad
a.	2 cm^3		
b.		7 hg	
c.			8 cl
d.	6.45 m^3		
e.		0.37 g	

Completa:

8.

a. 33,000 cm^3 = ... m^3
b. 1,200 km^3 = ... hm^3
c. 4.5 m^3 = ... mm^3
d. 34.5 dm^3 = ... dm^3
e. 2,300 mm^3 = ... km^3

9.

a. 3,500 l = ... dal
b. 0.5 kl = ... cl
c. 45.6 cl = ... hl
d. 23 hl = ... l
e. 3 hl = ... ml

10.

a. 3.4 g = ... kg
b. 15.7 dag = ... mg
c. 5.2 hg = ... cg
d. 6.2 kg = ... g
e. 89,434 mg = ... hg

Entendemos por…

Poliedro al cuerpo cerrado limitado por polígonos. Por ejemplo, el prisma de base cuadrada, triangular o rectangular.

Diversión matemática

Dominó de capacidad y volumen

Formamos grupos de 4 alumnos y repartimos a cada grupo un dominó como el siguiente (fotocopiado en cartulina).
Jugamos el dominó tradicional, teniendo que unir cada valor de capacidad o volumen con su equivalente:

DOMINÓ DE CAPACIDAD Y VOLUMEN

1 *l* / 1 dm^3	0.1 *Dl* / 10 *l*	10 *dl* / 10 *Dl*	0.01 *Hl* / 1,000 dm^3	100 *cl* / 0.1 dm^3	0.001 m^3 / 0.01 dm^3	1,000 cm^3 / 0.1 cl^3
1 *Dl* / 10 dm^3	100 dm^3 / 0.1 *Hl*	1,000 *l* / 0.01 m^3	10 *cl* / 100 *dl*	0.01 *l* / 10,000 cm^3	0.01 *dl* / 0.01 *Kl*	1 *Hl* / 100 *l*
10 *Hl* / 0.1 m^3	100 *ml* / 0.1 *Kl*	10 *ml* / 1,000 *dl*	0.001 dm^3 / 100,000 cm^3	1 *Kl* / 1 m^3	100 cm^3 / 100 *Dl*	10 cm^3 / 0.1 *Ml*
0.000001 m^3 / 1,000,000 cm^3	1 *dl* / 0.1 *l*	0.001 *Dl* / 0.01 *Dl*	0.0001 *Dl* / 0.0001 m^3	1 *cl* / 0.1 *dl*	0.001 *l* / 0.0001 m^3	1 *ml* / 1 cm^3

Día a día

Tipos de pesas o balanzas

En nuestra vida diaria, las balanzas son fundamentales. Las balanzas se utilizan con el objeto de medir la masa de un cuerpo con la mayor precisión posible.

Existen en la actualidad diversos tipos de balanzas: las electrónicas, las de platillos, las romanas, etc.; con ellas se pueden conseguir distintas precisiones al realizar la medición de la masa.

Para los que quieren obtener una medición más exacta se recomienda adquirir una balanza analítica, la cual suele ser encerrada en una urna de vidrio para que no se afecte por las corrientes de aire.

Cada vez que utilizamos una balanza, es necesario calibrarla. Cuando sobre la balanza no hay ningún cuerpo a ser pesado, esta debe señalar el cero.

Tomado de http://www.basculas-y-balanzas.com/balanzas.html

Este capítulo fue clave porque

- Practiqué el manejo de instrumentos de geometría como regla, escuadras, transportador y compás.
- Recordé la clasificación de los ángulos y de los triángulos.
- Trabajé los teoremas iniciales de la geometría.
- Adquirí precisión en el manejo del plano cartesiano.
- Identifiqué numerosos fractales que existen la naturaleza y que antes no sabía que existían.
- Modelé algunos cuerpos o sólidos geométricos.
- Diferencio entre un cubo, un prisma y una pirámide.
- Aprendí a calcular áreas y volúmenes de sólidos geométricos.
- Puedo solucionar problemas que involucran medidas de volumen, peso y capacidad.

Conectémonos con La Historia

El arte en el Egipto antiguo

La gran mayoría de las personas trabajaba para el faraón, los templos y los nobles, fabricando y decorando las casas, los muebles y las tumbas.

Los obreros cobraban regularmente en grano y les abastecían de sal, vestidos y herramientas, pero el resto de enseres como muebles o aceite debían comprarlos.

El salario era de 5.5 sacos (un saco equivalía a 65 kg) de grano al mes, más o menos 11 *deben*, y si un litro de aceite o un cuchillo costaban uno o dos *deben*, sillas o camas llegaban a los 20, y un sarcófago podía oscilar entre 25 y 200, por lo que hacían encargos particulares fuera de sus horas laborales.

Algunos practicaban distintos sistemas de ahorro: posponer el cobro mensual tanto como se pudiera para cobrar de una vez o bien comprar a crédito; algo arriesgado porque de incumplir el plazo el moroso era condenado a pagar el doble.

En general, los obreros trabajaban en semanas laborales de 10 días seguidos de un festivo, pero hay manuscritos que relatan que durante muy largos periodos de tiempo los esclavos no tenían festivos.

En el año 1170 a. C., bajo el reinado de Ramsés III, el retraso en el pago de salarios y el hambre llevó a huelga a los obreros de Deir el-Medina, logrando sus objetivos.

Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Costumbres_del_Antiguo_Egipto

Repasemos lo visto

Recuerdas que al iniciar esta unidad te averiguábamos si te habías preguntado **¿para qué sirven las construcciones geométricas?**

Después de los temas estudiados en esta unidad, nos damos cuenta de lo mucho que sirven las construcciones geométricas; ahora, cuando visitemos algún pueblo o ciudad, podemos analizar más la distribución, ubicación de la plaza, su tamaño, sus casas, sus fincas, etc.

Antes, no éramos conscientes de la simetría que existe en la naturaleza y cómo en ella se cumplen conceptos de paralelismo y perpendicularidad, así como de la gran cantidad de fractales que cada vez más podemos descubrir.

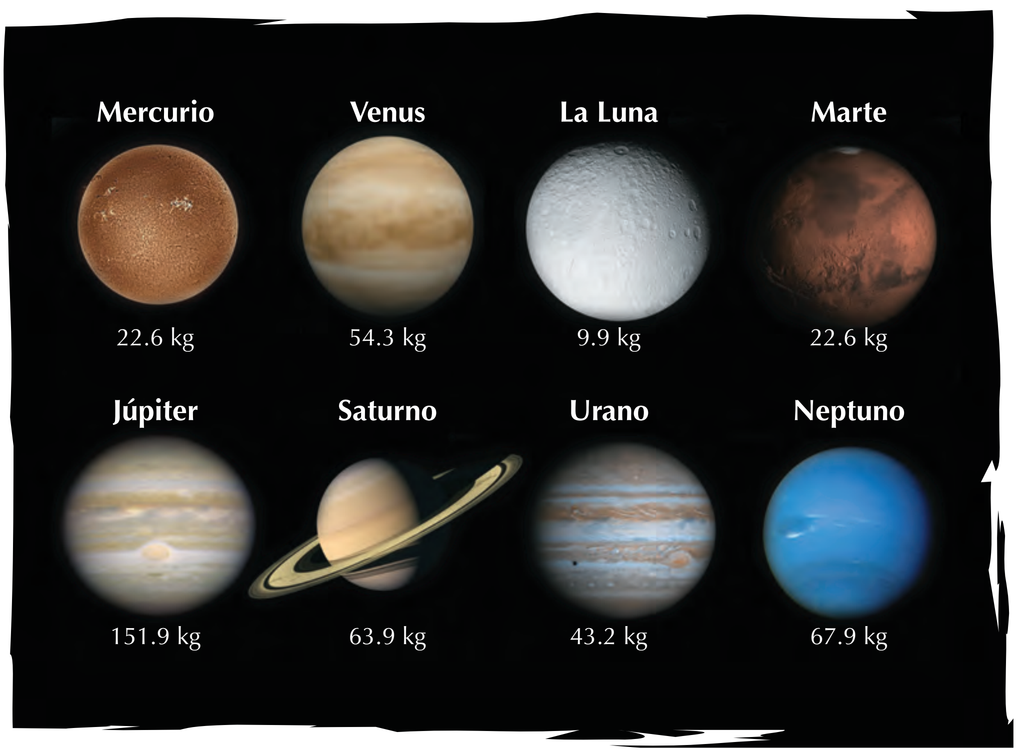
Al realizar ejercicios sobre mediciones, también se ha ampliado la posibilidad de dar un mejor manejo a aquellas situaciones de la vida cotidiana, que se relacionan con áreas, volúmenes, pesos y capacidades, y solucionar además problemas que antes nos parecían muy difíciles.

Mundo rural

Los planetas

Nuestra galaxia se compone de planetas de diferentes tamaños, pesos y gravedades que giran alrededor del Sol, con diferentes distancias entre ellos, lo que da como consecuencia que en cada planeta pesaríamos diferente, si pudiéramos ir a visitarlos.

Veamos cuánto pesaría en algunos planetas de nuestra galaxia y en la Luna Anita, teniendo en cuenta que en la Tierra pesa 60 kg:



Tomado de http://www.traducimos.cl/planet/

Dato curioso

Los dados de rol

Un dado es un objeto con forma de poliedro, aunque en la Antigüedad se utilizaron huesecillos de animales.

Un dado de rol, es un dado utilizado en juegos de rol principalmente. Al lanzarlo, una de sus caras, la que queda en posición superior, una vez que el dado se ha inmovilizado, indica el resultado del lanzamiento.

Los dados de rol pueden ser de plástico o de madera, opacos o transparentes, de colores lisos o colores irisados, etc.

La imagen muestra un set completo de dados de rol. Comenzando por abajo y en sentido contrario a las agujas del reloj: dado de cuatro caras, dado de seis, dado de ocho, dado de diez, dado de doce y dado de veinte.

Los dados de rol utilizados en algunos juegos tienen las formas de los sólidos platónicos:

Dado de veinte caras (D20).

Dado de doce caras (D12).

Dado de diez caras (D10, aunque no es un sólido platónico, es un sólido formado por dos pirámides pentagonales unidas por su base).

Dado de ocho caras (D8).

Dado de seis caras (D6).

Dado de cuatro caras (D4).

De los seis dados que más se utilizan en los juegos de rol, cinco tienen la forma de los llamados cinco sólidos platónicos, los únicos cinco poliedros en ser llamados «perfectos» por ser los únicos en tener caras perfectamente regulares.

De estos seis dados utilizados, el único en no ser un sólido platónico es el dado de diez caras:

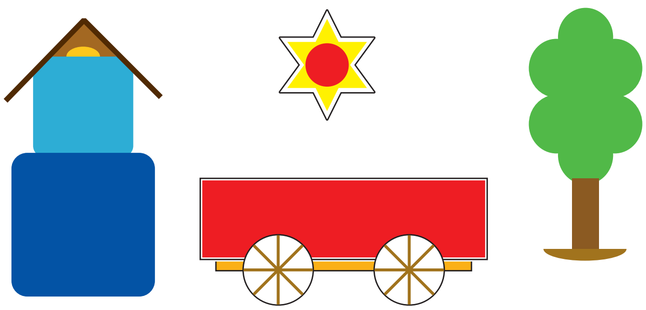
- El dado de cuatro caras es un tetraedro regular.
- El dado de seis caras es un hexaedro regular (o lo que es lo mismo: un cubo).
- El dado de ocho caras es un octaedro regular.
- El dado de doce caras es un dodecaedro regular.
- El dado de veinte caras es un icosaedro regular.
- El dado de diez caras es un trapezoedro pentagonal.

¿En qué vamos?

Coevaluación “Reflexiono y trabajo con mis compañeros”:

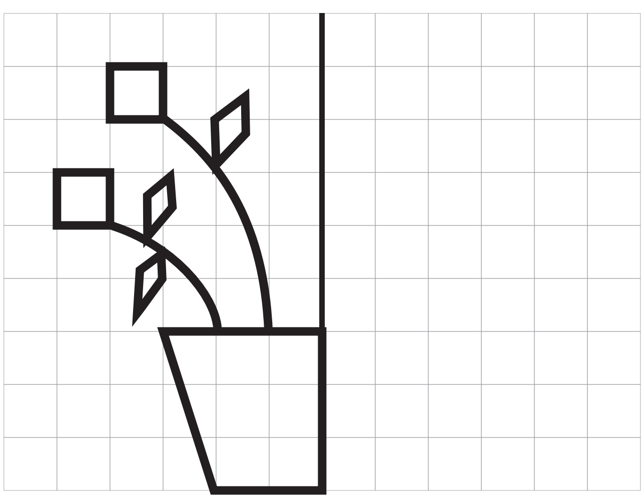
De manera individual, realiza los ejercicios siguientes y compara con tus compañeros:

1. Encuentra todos los ejes de simetría que tengan cada una de las siguientes representaciones:



   a. ¿Cuántos ejes de simetría tiene el árbol?
   b. ¿Cuántos la casa?
   c. ¿Cuántos la carreta?
   d. ¿Cuántos la estrella?

2. En tu cuaderno, haz el siguiente dibujo y encuentra sus puntos homólogos y traza las líneas para que sea una figura simétrica:



3. En forma individual trabaja en tu cuaderno; relaciona las dos columnas, colocando el número correcto dentro de los paréntesis respectivos:

1. Conserva colinealidad	( )	Cambia izquierda por derecha y derecha por izquierda.
2. No conserva orientación	( )	Equidistantes del eje de simetría.
3. Conserva la distancia	( )	Congruentes.
4. Los ángulos simétricos son	( )	Dos segmentos homólogos tienen la misma longitud.
5. Puntos homólogos	( )	Si una serie de puntos con forma una recta, los puntos homólogos conformarán también una recta.

4. En forma individual argumenta las respuestas que des a las preguntas:

   a. ¿Un cuadrado también es un rectángulo? ¿Por qué?
   b. ¿Todos los rectángulos también son cuadrados?
   c. ¿Podría considerarse que los cuadrados también son rombos?
   d. Si un romboide es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos, ¿podría considerarse que los rectángulos, los cuadrados y los rombos son romboides especiales?

5. Traza una secante a 2 paralelas de manera que se forme un ángulo de 54°; para ello, utiliza el transportador.

Completa:

6.

a. 0.4 hg = ... kg
b. 5.75 g = ... mg
c. 8.2 cg = ...g

7.

a. 15,500 ml = ...kl
b. 0.5 dl = ... cl
c. 45,6 dal = ... hl

8.

a. 33,000 km^3 =................m^3
b. 1,200 cm^3 = ... hm^3
c. 4.5 dm^3 = ... mm^3

Heteroevaluación "Le cuento a mi profesor"

Con tu profesor, resuelve la siguiente rejilla.
Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Clasifico figuras geométricas				
Descubro los ejes de simetría de figuras dadas				
Identifico el opuesto de un número entero				
Identifico fractales de la naturaleza				
Reconozco la utilidad de las mediciones.				
Calculo áreas lateral y total de cubos				
Calculo áreas lateral y total de prismas				
Calculo áreas lateral y total de pirámides				
Realizo conversiones de unidades de volumen				
Realizo conversiones de unidades de peso				
Realizo conversiones de unidades de capacidad				

Autoevaluación "Participo y aprendo"

Participo y aprendo	Superior	Alto	Básico	Bajo
Realizo construcciones en clase				
Comparto con mis compañeros en los grupos de trabajo				
Ayudo a buscar soluciones a situaciones problemáticas				
Colaboro a mis compañeros con explicaciones				
Repaso en casa lo trabajado en el colegio				
Propongo problemas o actividades para resolver en clase				
Respeto la opinión de mis compañeros				
Comparto mis saberes y dudas con mis compañeros				

Introducción al Álgebra

Resolvamos

Te has preguntado: ¿Para qué sirve el álgebra?
La palabra **álgebra** proviene del vocablo árabe **"alchebr"**, que significa reducción.

El álgebra es una rama de las matemáticas; es una generalización de la aritmética. Esto significa que se aplica en álgebra todo lo aprendido en aritmética.

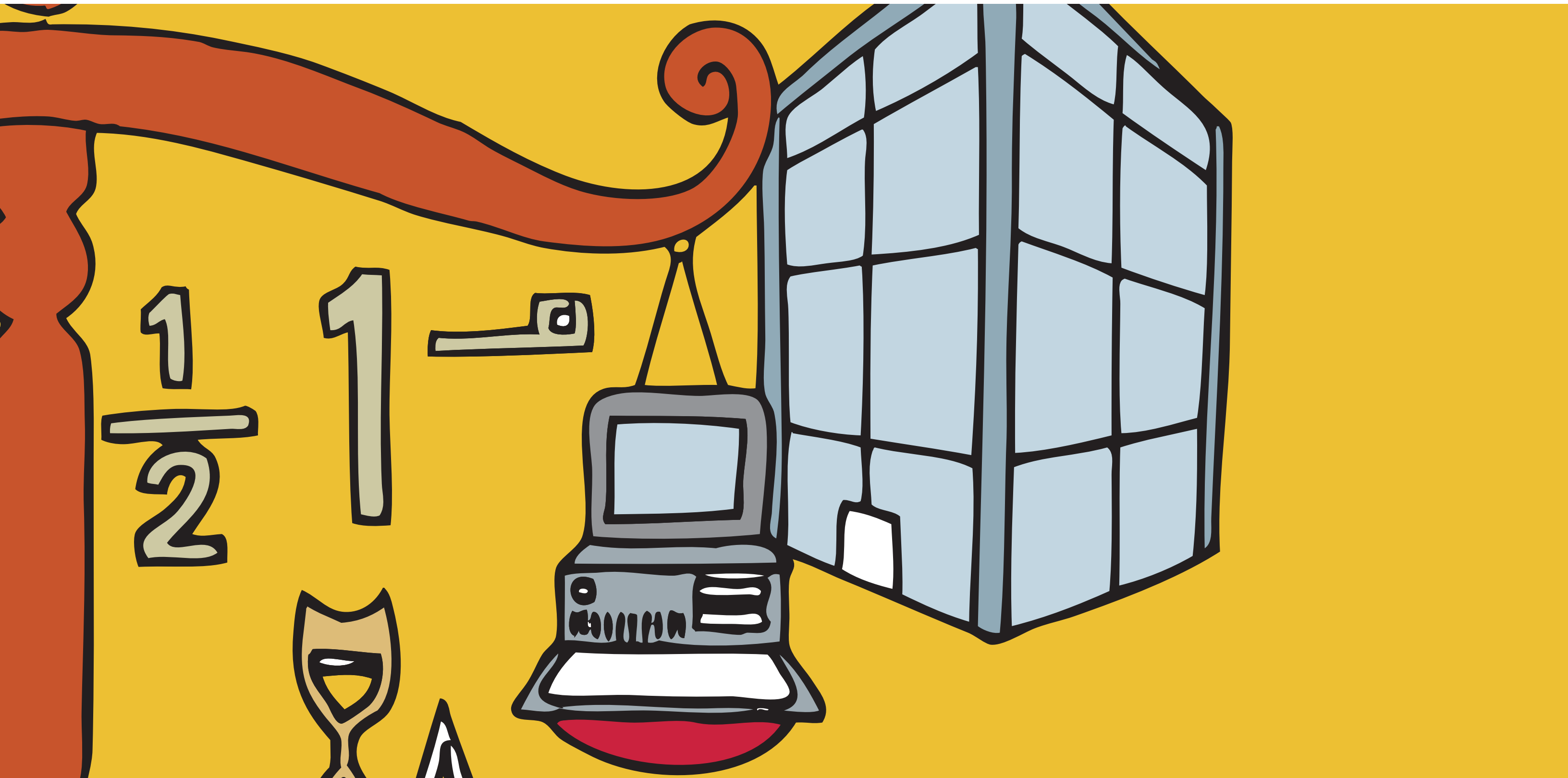
El lenguaje que usamos en operaciones aritméticas en las que solo intervienen números se llama lenguaje numérico y el lenguaje en el que intervienen números, letras y signos se conoce como lenguaje algebraico.

El lenguaje algebraico tiene características muy especiales. Es un lenguaje simbólico muy práctico, porque nos ayuda a simplificar y generalizar.

En ocasiones empleamos letras para representar cualquier número desconocido, realizamos operaciones aritméticas con ellas e, incluso, las incluimos en expresiones matemáticas para poder calcular su valor numérico.

Una forma de representar esta rama de las matemáticas es:

Referentes de calidad	Capítulos
Estándares	1. Lenguaje algebraico: La comunicación con símbolos. 2. Ecuaciones lineales.
Describo y represento situaciones de variación, relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	
Utilizo métodos informales (de ensayo y error y de complementación) en la solución de ecuaciones.	
Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	
Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.	
Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.), en relación con la situación que representan.	



Lenguaje algebraico: La comunicación con símbolos

El lenguaje es esencial para la comunicación.

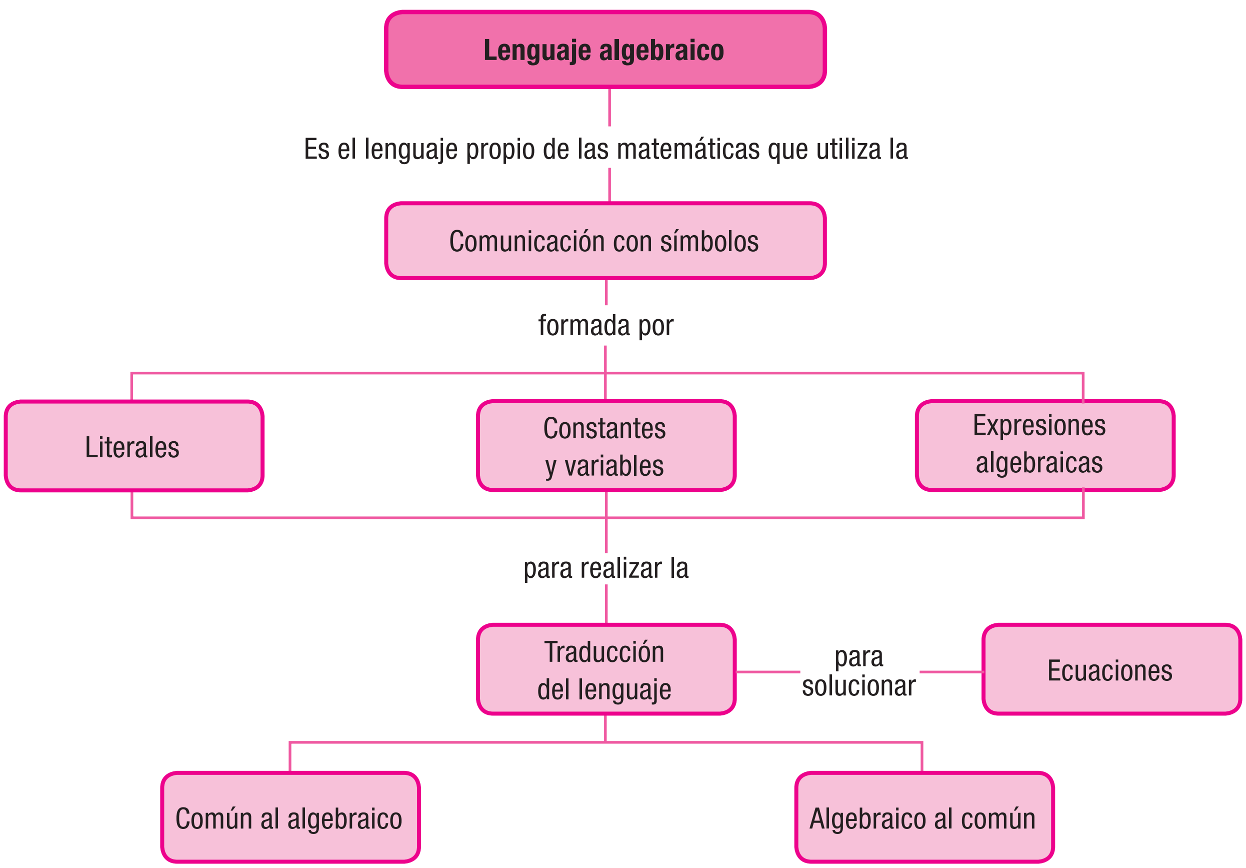
Cuando hablas de una misma cosa en diferentes idiomas, las cosas no cambian, lo que cambia es la forma de decirlas.

Ahora vas a descubrir un lenguaje con el cual podrás hablar de las cosas, pero "matemáticamente".

Uno de los lenguajes de gran importancia para la ciencia es el lenguaje matemático.
Las matemáticas son un lenguaje universal, o sea, que es igual aquí y en cualquier parte del mundo.

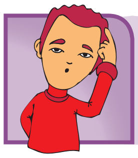
Así que para plantear y solucionar problemas, se requiere de un lenguaje simbólico, mediante el cual se señalen tanto los datos conocidos como aquellos que se desean encontrar.

El estudiante de séptimo grado, ya ha estudiado aritmética durante los años anteriores, ahora se estudiará otra rama de las matemáticas que se llama **álgebra** y que es considerada como una generalización y extensión de la aritmética.



Tema 1. Traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico

Indagación



En alguna ocasión, Luisito se vio enfrentado a una situación problemática en la que se preguntó: ¿cuál es el número que falta?

$\boxed{?} - 9 = 5$

Es decir: ¿cuál es el número que al restarle 9 da como resultado 5?

Piénsalo y discútelo con tus compañeros.

Conceptualización

En álgebra no podemos usar espacios vacíos o cuadros, sino que usamos una letra que puede ser cualquiera de nuestro abecedario, para representar una incógnita.

En lugar de escribir:

$\boxed{?} - 9 = 5$

Se escribe algebraicamente $a - 9 = 5$ o $x - 9 = 5$ o el dato desconocido se designa por cualquier otra letra a la que se le quita 9 y da como resultado 5.

La letra, en este caso la a o la x, solo quiere decir "aún no sabemos cuál número es" y se le llama incógnita o variable. Cuando ya se encuentra el valor que satisface la condición de quitarle 9 y que dé 5 se escribe: $a = 14$ o $x = 14$.

Consideremos, ahora, algunas expresiones del lenguaje común, pasadas al lenguaje simbólico:

Lenguaje común	Lenguaje simbólico
Un número cualquiera	a
Otro número cualquiera	b
El doble de un número	$2x$
El triple de un número	$3y$
La suma de dos números	$a + b$
La diferencia de dos números	$a - b$
El cuadrado de un número	a^2
El cuadrado de otro número	b^2
El cubo de un número	w^3
El cociente de dos números	z / v
El producto de dos números	(rs)
La suma de los cuadrados de dos números	$a^2 + b^2$
La diferencia de los cuadrados de dos números	$a^2 - b^2$

En el trabajo matemático, es muy importante el lenguaje algebraico. Ya hemos dicho que álgebra es una rama de las matemáticas que tiene entre sus principales objetivos simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números.

Para la comprensión y el trabajo algebraico, es necesario tener presente todo lo aprendido en aritmética.

Además, que las expresiones matemáticas que representan el lenguaje algebraico están formadas por números, letras y signos de operación.

El lenguaje que utiliza letras en combinación con números y signos, tratándolos como números, en operaciones con propiedades, se llama lenguaje algebraico.

Lee con mucha atención las situaciones que se presentan a continuación:

1. Analicemos la expresión siguiente:
   "La edad de Pedro es el doble de la edad de Juan".
   Como no se conoce la edad de ninguno de los dos, entonces, una de las dos edades puede representarse con una letra y la otra edad se expresará de acuerdo con la letra elegida. Así por ejemplo, llamemos x a la edad de Juan. Como la edad de Pedro es el doble de la edad de Juan, entonces, la edad de Pedro será $2x$.

En este proceso se ha utilizado el lenguaje algebraico,porque se ha combinado un número con un signo.
Una manera de escribirlo algebraicamente es:
Edad de Juan = x
Edad de Pedro = $2x$

Otra manera de expresar la situación es de la siguiente forma:
Si y es la edad de Pedro, entonces la edad de Juan viene a ser la mitad. Algebraicamente se escribe:
Edad de Pedro = y
Edad de Juan = $\frac{1}{2}y$

2. Por dos prendas de vestir se han pagado $450,000.

Como no se conoce el costo de cada prenda, se utilizan dos letras para representar los precios.Sean, por ejemplo, a y b las letras que representan el costo de las prendas de vestir. Entonces, en el lenguaje algebraico se escribirá:
$a + b =$ **$450,000**

En la resolución de este tipo de problemas, se requiere sustituir los datos que se plantean por letras (literales) según el enunciado y realizar las operaciones indicadas. Esto es muy frecuente en geometría cuando se realiza el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes y también ocurre en otras ramas de las matemáticas.

En el lenguaje algebraico, puedes utilizar cualquier letra del alfabeto para representar la incógnita o variable.

Aplicación

Copia en tu cuaderno los siguientes ejercicios; luego, resuélvelos y compara con algunos de tus compañeros:

1. Expresa en lenguaje simbólico cada una de las expresiones siguientes:

   a. El triple o duplo de un número:
   ____

   b. La mitad de un número:
   ____

   c. El cuádruplo de un número:
   ____

   d. Un tercio de un número:
   ____

   e. Dos números consecutivos (seguidos):
   ____

   f. Un cuarto de un número:
   ____

   g. La suma de dos números es 24:
   ____________________.

2. En un jardín se ha podado un prado en forma de pentágono que mide 3 m por lado y 2 m de apotema. Se pregunta cuál es su área.

3. Un edificio tiene 6 pisos y en cada piso hay igual número de apartamentos. Si en total hay 24 apartamentos, ¿cuántos son los apartamentos que hay en cada piso?

4. 8 niños juntan sus juguetes, aportando 4 juguetes cada uno. El total de juguetes es ______________.
   Luego se pierden algunos juguetes y quedaron 25. ¿Cuántos se perdieron?

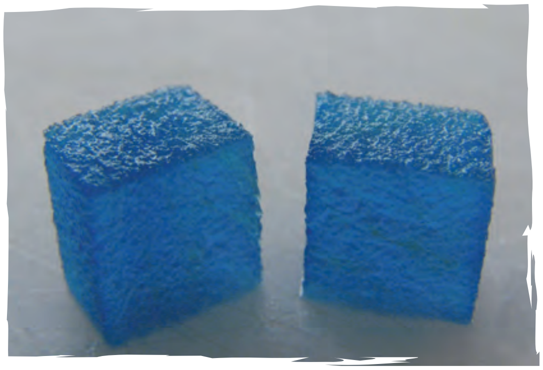
5. De una extensión de tierra se dispuso 1 hectárea para cultivo de pasto, 3 para sembrar caña de azúcar y el resto para sembrar algodón. Expresa esta situación algebraicamente o simbólicamente.

6. Expresar en términos algebraicos las expresiones:

   a. María tiene 19 años más que su hijo.
   b. Pedro se casó hace 3 años cuando tenía 25 años. ¿Cuántos años tiene ahora?
   c. Luis, Alejo y Jairo reunieron $120,000.
   d. ¿Cuál es el perímetro del piso del salón de clases, que es de forma cuadrada y mide 5 metros por cada lado?
   e. En un viaje se gastaron 5 horas más 3 horas de espera en la ciudad. Averiguar cuánto tiempo gastó en total sumando el tiempo de regreso.

Entendemos por…

Cúbica una figura que tiene forma de cubo, es decir, que tiene tres dimensiones (largo, ancho y alto) de igual tamaño. También puede referirse a una variable elevada a la 3, por ejemplo, m al cubo se escribe m^3.



Diversión matemática

Reúnete con tres compañeros para trabajar en grupo según las instrucciones siguientes:

1. Cada uno piense y escriba en su cuaderno 3 expresiones verbales (del lenguaje común), que puedan expresarse en el lenguaje simbólico (algebraico).
2. Cada integrante del grupo se asigna como nombre una letra por ejemplo: W, K, P, F…
3. Por ejemplo, W lee su primera expresión verbal o común y de manera individual K, P y F la escriben en lenguaje simbólico o algebraico.
4. Luego, comparan entre todos las respuestas. Así se repite con cada integrante del grupo hasta terminar las 12 expresiones.

Día a día

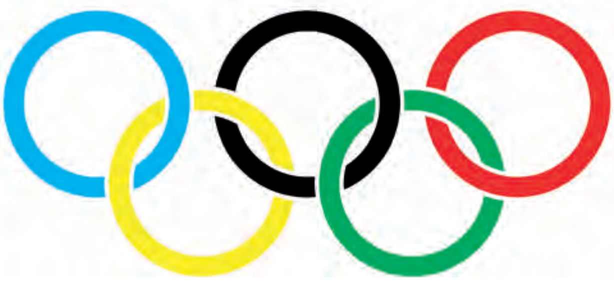
Símbolo de los Juegos Olímpicos

El signo olímpico consiste en cinco anillos que representan los cinco continentes del mundo: África, América, Asia, Europa y Oceanía. Están entrelazados para simbolizar la amistad deportiva de todos los pueblos.

Los anillos olímpicos son el signo de los Juegos Olímpicos y uno de los emblemas más reconocidos en todo el mundo.

Los Juegos Olímpicos u Olimpíadas son eventos deportivos multidisciplinarios en los que participan atletas de diversas partes del mundo. En la Antigua Grecia eran dedicados los Juegos a los dioses Zeus y Afrodita.

La primera celebración de los llamados Juegos Olímpicos de la Era Moderna se realizó en Atenas, capital de Grecia. Desde aquella oportunidad, los Juegos Olímpicos de Verano han sido realizados cada cuatro años en diversas partes del Planeta, siendo las únicas excepciones en 1916, 1940 y 1944, debido al estallido de la Primera y Segunda Guerra Mundial.



Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Juegos_Ol%C3%ADmpicos

Tema 2. Traducción del lenguaje algebraico al lenguaje común

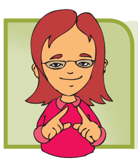
Indagación

Aprender a traducir al lenguaje común el lenguaje algebraico nos va a permitir entender y comprender mejor muchas situaciones que parecen ocultas.

Un día fui al mercado y compré unas rosas que me costaron $10,000.

¿Podrás averiguar cuántas flores compré? Discútelo con algunos de tus compañeros.

Tal vez no podamos saber cuántas flores me dieron por ese dinero, pero sí puedo expresar la situación algebraicamente, así: x flores = $10,000.



Conceptualización

Sabemos que el conjunto de los números naturales 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,... son símbolos y cada uno de ellos representa una cantidad concreta, por lo tanto, con ellos, no es posible generalizar.

Para comprender este lenguaje, analicemos las siguientes situaciones:

Supongamos que ♦ es un número natural.

Al hacer esta afirmación, se debe entender que ♦ representa cualquier integrante de la serie de los números naturales que es infinita. Es decir, ♦ puede representar el 0, o el 1 o el 2 o cualquier otro número del conjunto de los números naturales.

Se puede operar con ♦ como se opera normalmente con los números naturales.

Si sumamos ♦ con él mismo, tenemos:

♦ más ♦ = 2 veces ♦

Simbólicamente se escribe: **♦ + ♦ = 2♦**

La expresión 2♦ es el doble de ♦.

Por lo tanto, 2◆ está representando el doble de cualquier número natural. Entonces, con la expresión 2◆ se está generalizando la forma de representar el doble de un número natural cualquiera.

Así, si ◆ fuera 0, entonces:
◆ + ◆ = 0 + 0.

Si fuera 5, entonces: **◆ + ◆ = 5 + 5**,
y así con cualquier valor natural.

Ahora, si se multiplica ◆ por sí mismo, es decir, ◆ por ◆, se obtiene ◆^{2} y como ◆ es cualquier número natural, entonces, la expresión ◆^{2} representa el cuadrado de cualquier número natural.

Puede pensarse también en dividir a ◆entre 2 y en este caso, la expresión representa la mitad de cualquier número natural.

Consideremos dos símbolos diferentes, como ◆ y ■, para representar dos números naturales diferentes cualesquiera y, entonces, operar con ellos. Así, ◆ + ■ representa, de una manera general, la suma de dos números naturales cualesquiera.

De igual forma ◆ – ■ está representando la diferencia de dos números naturales cualesquiera.

(◆ + ■)^2 será la representación del cuadrado de la suma de dos números naturales cualesquiera.

Universalmente, se ha convenido en utilizar las letras del alfabeto (a, b, c, x, y, z), para la representación algebraica.

Por ejemplo, si k es un número natural cualquiera, entonces, 2k representa el doble de ese número natural.

Las variables y las constantes

En la vida diaria es común escuchar expresiones como: **"El tiempo está muy variable"**, refiriéndose al pronóstico del clima.

Esto significa que el clima puede cambiar de calor a frío o que puede llover de un momento a otro.

Hablando de la temperatura de un enfermo, es común escuchar: **"La temperatura se ha mantenido constante durante las últimas 24 horas"**.

Esto da idea de que la temperatura corporal del paciente no ha variado durante ese tiempo.

Si por ejemplo tenemos **$7,000**, realizamos un trabajo por el que nos pagaron **m pesos** y queremos saber cuánto reunimos, escribiremos la expresión matemática: **7,000 + m**, en donde **7,000** es una *constante* y **m** es una *variable*, porque no conocemos su valor.

Significa que a **7,000** vas a sumarle un valor desconocido **m**.

Si por ejemplo, **m** fuera **$30,000**, entonces reuniría **7,000 + 30,000**, pero si **m** fuera **$25,000**, entonces reuniría **7,000 + 25,000**, y así sucesivamente.

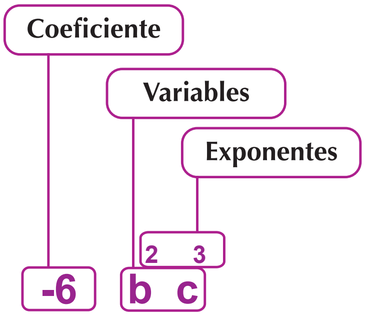
De todo lo anterior, se concluye lo siguiente:

Un símbolo que representa un valor no definido, se denomina variable. Un símbolo que representa un valor definido o conocido se denomina constante.

Partes de un término

Tomemos el término **$-6\,b^2\,c^3$** y observemos los nombres de sus partes:

Una expresión matemática llamada **término** tiene varias partes:



- Un valor fijo ya sea positivo o negativo, que se llama **coeficiente**.
- Una parte literal (una o más letras) que se llama **variable** o variables.
- **Exponentes** al número de veces según la potencia a la cual se eleven las variables.

Un término puede constar de solo un número, es decir, de un término sin parte literal.

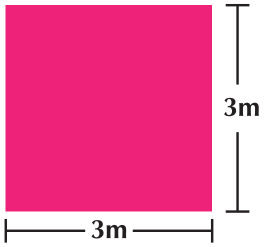
Este se llama **constante**.

Por ejemplo 9 podría ser una constante.

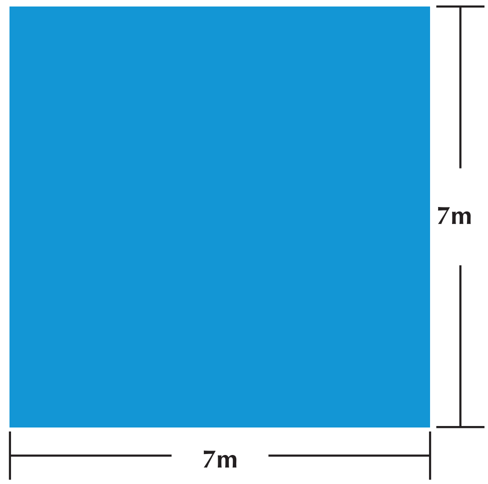
Las expresiones o fórmulas

Hemos estudiado algunas fórmulas geométricas que repasaremos a continuación:

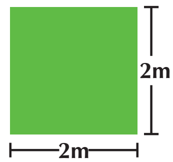
1. Hallemos el perímetro de un cuadrado que mide 3 m de lado.
   Al aplicar la fórmula del perímetro P del cuadrado de lado c,
   tenemos: $P = 4c.$
   Sustituyendo: $P = (4)\,(3\text{ m})$
   $P = 12\text{ m}.$



2. Encontremos el perímetro de un cuadrado que mide 7 m de lado.
   Al aplicar la fórmula del perímetro P del cuadrado de lado c,
   tenemos: $P = 4c$.
   Sustituyendo: $P = (4)\ (7\ m)$
   $P = 28\ m$



3. Hallar el perímetro de un cuadrado que mide 2 m de lado.
   Al aplicar la fórmula,
   tenemos: $P = 4c$
   Sustituyendo: $P = (4)\ (2\ m)$
   $P = 8\ m$



Observando los ejemplos, es notorio que el lado c y el perímetro P variaron de acuerdo con las dimensiones del cuadrado, pero 4 no varió, es decir, 4 permaneció constante.
Resumiendo los datos en una tabla tenemos:

Lado c		Perímetro P
(3 m) (4)	=	12 m
(7 m) (4)	=	28 m
(2 m) (4)	=	8 m

En estos casos, c y P son variables y 4 es constante.

Existen muchos símbolos en el lenguaje algebraico y es conveniente saber distinguirlos con seguridad.

Podemos analizar otras situaciones como la longitud de una circunferencia, el área del círculo, el perímetro de un rectángulo, el área del rectángulo, el perímetro de un polígono regular o el área de un polígono regular, resumiéndolas en el cuadro siguiente:

Polígono	Fórmula del perímetro **P**	Fórmula del área **A**
Cuadrado de lado c	$P_c = c + c + c + c = 4c$	$A_c = c + c + c + c = 4c$
Rectángulo de lados a, b	$P_r = a + b + a + b = 2a + 2b$	$A_r = ab$
Polígono regular de lado *l* y apotema a	$P = l + l + \ldots = nl$ en donde n es el número de lados	$\frac{P\ .\ a}{2}$
Circunferencia y círculo de radio r	$L_c = 2\pi r$	$A_c = 2\pi r^2$

Estudiando la tabla anterior, vemos que:

- El perímetro del cuadrado varía según el valor del lado c.
- El área del cuadrado varía según el valor del lado c.
- El perímetro del rectángulo varía según los valores de sus lados a y b.
- El área del rectángulo varía según los valores de sus lados a y b.
- El perímetro del polígono regular varía según el valor del lado l.
- El área del polígono regular varía según el valor del lado l y la apotema a.
- La longitud de la circunferencia varía según el valor del radio r.
- El área del círculo varía según el valor del radio r.

El lenguaje algebraico permite generalizar expresiones verbales y solucionar diversas situaciones.

El lenguaje algebraico permite usar expresiones con elementos indeterminados en situaciones como, por ejemplo, cuando una persona dice **"x día de la semana"** o **"x o y cosas"**, se observa que usó una y dos letras del abecedario; respectivamente.

En los problemas matemáticos, se acostumbra a sustituir por letras los símbolos que representan números.

Pero en matemáticas también hay ocasiones en que las letras y los signos se usan para representar algunas operaciones, es decir, que por medio de estos símbolos se generaliza un proceso.

Por ejemplo, para hallar el perímetro de un polígono regular, se aplica la siguiente fórmula:

$P = nl$, en donde n es el número de lados del polígono y l es la longitud del lado.

Estos símbolos indican que el perímetro del polígono se obtiene multiplicando el número de lados de dicha figura por la medida de uno de ellos.

Esta interpretación de la fórmula se conoce como traducción del lenguaje algebraico al lenguaje común.

Aplicación

Copia los siguientes ejercicios en tu cuaderno y después de resolverlos compara tus resultados con los obtenidos por algunos de tus compañeros:

1. Expresa en lenguaje común o verbalmente las expresiones comunes siguientes:

   a. $m - 3$
   b. $(s + k) \div 8$
   c. $d^2 \div 5$
   d. $v + (w - 9)$

e. $(e + s)(e - s)$
f. $z - t$
g. $9v^3$
h. $\sqrt{x}$
i. $x^2 + x - 9$

2. Si la letra x valiera –5 y la letra z valiera 0, cuánto valdría:

a. $2x - 9z$
b. $(95z + 9x) - 72$
c. $x^2 - z^2$
d. $(z)(x)$
e. $2z \div z^5$
f. $(5z + 5x) - 5$

3. Se tiene un terreno de forma rectangular que mide 4 m de largo y 3 m de ancho. ¿Cuál es la medida de su contorno?

Encuentra los resultados según las condiciones dadas:

4. Si m = 3, entonces:

a. (m) (m) =	$m^2 =$
b. (m) (m) (m) =	$m^3 =$

5. Si w = 2 y x = 3, entonces:

a. (w) (x) =
b. (2w + x) =

6. Encuentra el área (A) de algunos triángulos, conocida la fórmula y dados los valores de la base (b) y la altura (h):

Fórmula:

$$A_{triangulo} = \frac{bh}{2}$$

a. b = 3 cm	h = 8 cm	A =
b. b = 7 m	h = 12 m	A =
c. b = 9 cm	h = 7 cm	A =

7. Dado un término matemático, indica el coeficiente, las variables y su exponente.
Ejemplo:
El término $\mathbf{-5xa^3}$ indicado en la tabla:

Término	Coeficiente	Variables	Exponentes
$-5xa^3$	-5	xa	1 y 3
$4y^2$			
$-19k^5l^7$			
W			
2			

8. Expresa en lenguaje simbólico cada situación siguiente y encuentra una solución al problema:

   a. Héctor tiene cierta cantidad de dinero. Si recibe $200,000, la cantidad que tiene Héctor se triplica. ¿Cuánto tiene originalmente Héctor?
   b. Alejandra tenía $90,000 ahorrados. Para su cumpleaños entre su abuelo y su padre, como regalo, le duplicaron el valor del que gastó solo un tercio. ¿Cuánto dinero le quedó en total?

9. Halla los valores numéricos de la expresión algebraica $2x–1$, si:

   a. $x = 1$
   b. $x = -1$
   c. $x = - 3$
   d. $x = 5$

10. Relaciona la columna del lenguaje algebraico con la columna del lenguaje común, colocando en cada paréntesis la letra correcta.

a. $2u$	( ) El cuadrado de la suma de dos números.
b. $(c – d) – 7$	( ) El cociente de dos números.
c. $(x + y)^2$	( ) El doble de un número.
d. $\frac{f}{g}$	( ) La diferencia de dos números menos 7.

Entendemos por…

Término la expresión algebraica elemental formada por números y letras.
El número se llama coeficiente y las letras conforman la parte literal.
Por ejemplo, -2xy es un término algebraico; su coeficiente es -2 y su parte literal es xy.
Término independiente es el que consta de solo un valor numérico y no tiene parte literal.
Por ejemplo: -5 o +9 son términos independientes, porque no tienen letras (parte literal).

Diversión matemática

Completa la tabla resolviendo la casilla vacía según el valor dado al símbolo:

Por ejemplo, si ● **= 8** , entonces, **3 +** ● **= 3 + 8 = 11**

Símbolo	●	★	☺
Valor	8	-5	25
Expresión	3 + ●	★ + ★ - ●	38 - ☺
Resultado	3 + 8 = 11		

Día a día

El código morse o clave morse

El código morse o también conocido como alfabeto morse es un sistema de representación de letras y números, mediante señales emitidas de forma intermitente.

Fue desarrollado por Alfred Vail, mientras colaboraba en 1834 con Samuel Morse en la invención del telégrafo eléctrico. Vail creó un método según el cual cada letra o número era transmitido de forma individual con un código consistente en rayas y puntos. Morse reconoció la idoneidad de este sistema y lo patentó junto con el telégrafo eléctrico. Fue conocido como «American Morse Code» y fue utilizado en la primera transmisión por telégrafo.

En sus comienzos, el alfabeto morse se empleó en las líneas telegráficas mediante los tendidos de cable que se fueron instalando. Más tarde, se utilizó también en las transmisiones por radio, sobre todo en el mar y en el aire, hasta que surgieron las emisoras y los receptores de radiodifusión mediante voz.

En la actualidad, el alfabeto morse tiene aplicación casi exclusiva en el ámbito de los radioaficionados, siendo muy exigible su conocimiento para la obtención de la licencia de radioperador aficionado.

Además se utiliza en la aviación instrumental. En las cartas de navegación está indicada la frecuencia y una señal morse.

http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_morse

A	• —	U	• • —
B	— • • •	V	• • • —
C	— • — •	W	• — —
D	— • •	X	— • • —
E	•	Y	— • — —
F	• • — •	Z	— — •
G	— — •		
H	• • • •		
I	• •		
J	• — — —		
K	— • —	1	• — — — —
L	• — • •	2	• • — — —
M	— —	3	• • • — —
N	— •	4	• • • • —
O	— — —	5	• • • • •
P	• — — •	6	— • • • •
Q	— — • —	7	— — • • •
R	• — •	8	— — — • •
S	• • •	9	— — — — •
T	—	0	— — — — —

Observa la oración siguiente y su escrito en clave morse.

Un abrazo y un beso para ti

••— —• •— •— —••• •—• •— ——•• ——— —•—— ••— —• —••• • •• ——— •——• •— •—• •— — •—•—•—

Este capítulo fue clave porque

- Puedo reconocer el álgebra como una generalización de la aritmética.
- Aprendí a expresar una idea del lenguaje común al lenguaje algebraico.
- Aprendí a expresar una idea del lenguaje algebraico al lenguaje común.
- Reconozco las variables y las constantes de un término.
- Sé aplicar una fórmula dados los valores que han de tomar las variables.
- Planteo problemas que involucran ecuaciones lineales.
- Soluciono problemas que requieren del manejo de ecuaciones lineales.

Conectémonos con El Lenguaje

La criptografía

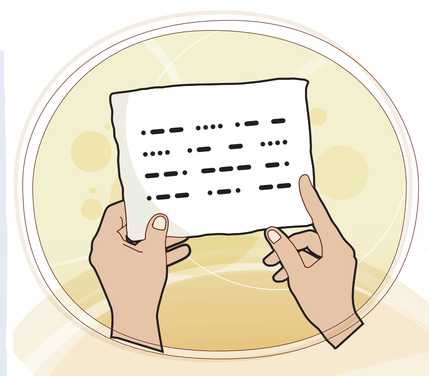
Criptografía es un vocablo que viene del griego κρυπτός "oculto" y de γραφή "grafía". Literalmente significa "escritura oculta".

La palabra criptografía es un término genérico que describe todas las técnicas que permiten cifrar mensajes o hacerlos ininteligibles sin recurrir a una acción específica. El verbo asociado es cifrar.

La criptografía se funda en la aritmética: En el caso de un texto consiste en transformar las letras que conforman el mensaje en una serie de números (en forma de bits que son utilizados por los computadores en su sistema binario) y, luego, realizar cálculos con estos números para modificarlos y hacerlos incomprensibles. El resultado de esta modificación (el mensaje cifrado) se llama texto cifrado, en contraste con el mensaje inicial, llamado texto simple.

Para qué sirve la criptografía

Los seres humanos siempre han sentido la necesidad de ocultar información, mucho antes de que existieran los primeros equipos de informática y las calculadoras.



La criptografía se usa tradicionalmente para ocultar mensajes de ciertos usuarios. En la actualidad, esta función es incluso más útil, ya que la información de Internet circula por infraestructuras cuya fiabilidad y confidencialidad no pueden garantizarse. La criptografía se usa no solo para proteger la confidencialidad de los datos, sino también para garantizar su integridad y autenticidad.

Desde su creación, Internet ha evolucionado hasta convertirse en una herramienta esencial de la comunicación. Sin embargo, esta comunicación implica un número creciente de problemas estratégicos relacionados con las actividades de las empresas en la web, por ejemplo, las transacciones que se realizan mediante la red pueden ser interceptadas y, sobretodo, porque actualmente, como es el caso de Colombia, no existe una legislación sobre Internet. Entonces, la seguridad de esta información debe garantizarse: este es el papel de la criptografía.

http://es.wikipedia.org/wiki/Criptograf%C3%ADa

Ecuaciones lineales

El hombre, en su infatigable deseo de investigación, descubre el número con el cual representa medidas de todo lo que le rodea. Sus estudios lo llevan a abstraer, y con ello logra la generalización de expresiones matemáticas.

Documentos antiguos muestran que los egipcios manejaban ecuaciones algebraicas en los cálculos que realizaban. A los árabes se les atribuye el desarrollo del álgebra y en su lengua la palabra álgebra significa ecuación, restauración o transposición de términos negativos.

El álgebra es el pilar de ramas de la matemática como la geometría y la trigonometría y su uso se ha extendido a otras áreas de la ciencia.

En el desarrollo del presente capítulo, realizaremos un análisis de lo que son las expresiones algebraicas, su identificación, sus características y su aplicación práctica en la solución de problemas.

La ecuación es sumamente útil en la resolución de una infinidad de problemas que por métodos aritméticos sería bastante laborioso resolver. En cambio, utilizando el lenguaje algebraico y planteando una ecuación que representa el enunciado del problema se llega más directa y fácilmente a la solución.

Las ecuaciones se usaron desde más de 16 siglos a.C. en las civilizaciones más antiguas y su utilidad sigue vigente, con los grandes avances de la ciencia y la tecnología.

Ecuaciones lineales

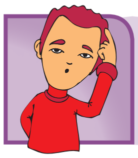
se presentan los casos

$a + x = b$ y $a - x = c$

$ax = b$ y $\frac{a}{x} = c$

$ax + b = cx + d$

Tema 1. Diferentes formas de ecuaciones lineales



Indagación

¿Serías capaz de dar respuesta a los siguientes ejercicios?:

1. Si a un número se le suma su simétrico, ¿cuál es el resultado?
2. El inverso aditivo de un número ¿cómo se obtiene?
3. ¿Cómo representas la expresión: un número cualquiera disminuido en 4 unidades?
4. Calcula:

   a. (–3) – [(–5) + (+3)] + [(+7) – (+11)]
   b) (+22) – [(+38) – (–57) – (+14)]
   c) 8 – (–8) + [(–3) – (+3)] – [(+1) – (–1)]

Reúnete con algunos compañeros, exponles tus opiniones sobre los anteriores ejercicios y escucha las de ellos.

5. Ahora, lean mentalmente el problema siguiente, luego planteen en sus cuadernos la ecuación correspondiente y resuélvanla:
   Sebastián tenía 82 canicas. Regaló algunas a su hermano y ahora tiene 53. ¿Cuántas canicas regaló?

Conceptualización

La igualdad

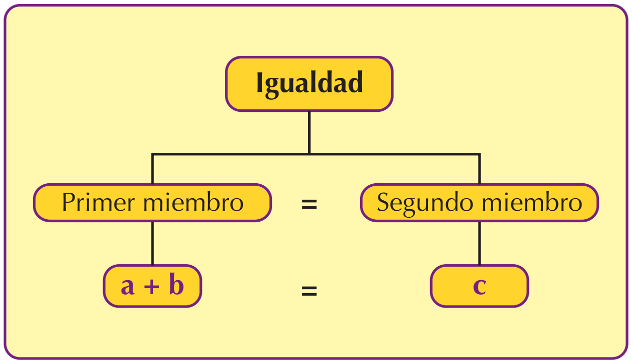
Comúnmente se escucha decir que dos cosas son iguales y eso es verdad cuando existe una relación de equivalencia entre ellas; esa relación, llamada **igualdad**, es muy importante en los conceptos matemáticos y se denota con el signo igual (=).

Esta relación se establece frecuentemente entre los números.

Por lo cual podemos concluir lo siguiente:

La igualdad se establece cuando dos expresiones representan el mismo valor.

En general:



Son ejemplos de igualdades:

a. $90 = (45)(2)$
b. $2+5+3^2 = 2^3 - 9 + 17$
c. Un número que multiplicado por 7 da 84.
   Simbólicamente se escribe: $x(7) = 84$.
   También puede escribirse: $7x = 84$.
d. Las edades de Martín y Cleofe suman 33.
   Simbólicamente es escribe: $x + y = 33$.

Propiedades de la igualdad

La igualdad, por ser la relación de comparación entre dos partes llamadas miembros, tiene unas características que derivan en las llamadas **propiedades de las igualdades**.

Observemos y analicemos cómo podemos identificarlas:

1. Si comparamos dos expresiones por medio de la igualdad, ¿podemos decir que **5** es igual a **5**? o que ¿**23 + 8 = 23 + 8**?
   Cuando establecemos que toda cantidad o expresión tiene una relación de igualdad consigo misma, nos referimos a la propiedad **idéntica o reflexiva**.

   Todo número es igual a sí mismo.

   Simbólicamente: **a = a**.

2. Al estudiar una igualdad, se puede afirmar que si el primer miembro es igual al segundo, entonces el segundo también es igual al primero.
   Así: si **12 + 6 = 18**, entonces **18 = 12 + 6**
   Esta propiedad la llamamos **simétrica**.
   Dicho en otras palabras:

   Los miembros de una igualdad pueden permutar sus lugares.

   Simbólicamente: **Si a = b, entonces b = a**.

3. Cuando se establece que una expresión es igual a otra y esta es igual a una tercera, la primera, por tanto, es igual a la tercera. Es decir, **si $a + b = c$** y **$d - e = c$**, entonces **$a + b = d - e$**.
   A esta propiedad la llamamos **transitiva** y también puede expresarse como sigue:

   Si dos igualdades tienen un miembro común, los otros dos son iguales.

   Simbólicamente: **Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$**.

4. También hemos observado:
   Si **$3 + 5 = 8$**, entonces **$(3 + 5) - 4 = 8 - 4$**.

   Si **$3 \times 4 = 12$**, entonces $\frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2}$.

   Si **$z = y$**, entonces **$z + a = y + a$**.
   A esta propiedad de la igualdad la llamamos **uniforme**.
   Resumiendo:

   Si a los dos miembros de una igualdad se les aumenta, disminuye, multiplica o divide entre la misma cantidad, la igualdad se conserva.

   Simbólicamente:

   $$\textbf{Si } a = b, \textbf{ entonces: } \begin{cases} a + k = b + k \\ a - k = b - k \\ a(k) = b(k) \\ a \div k = b \div k. \end{cases}$$

5. También hemos visto casos como el que sigue:
   Dado: **$8 \times 3 = 24$**.
   Si **$8 \times 3 + 6 = 24 + 6$**, entonces **$8 \times 3 = 24$**.
   Dado: **$(5 - 2) = 3$**
   Si **$(5 - 2) - 3 = 3 - 3$**, entonces **$5 - 2 = 3$**.

   Dado: **$a = c$**
   Si **$a + b = c + b$**, entonces **$a = c$**.

   Hablamos entonces de la propiedad **cancelativa**. Entonces:

   Se pueden suprimir sumandos o factores iguales en los dos miembros de una igualdad y el resultado es otra igualdad.

Las propiedades de la igualdad son aplicables en cualquier grupo de números y son indispensables en la resolución de ecuaciones.

Saber cómo plantear ecuaciones a partir de una situación cotidiana es una herramienta muy importante que se puede emplear para solucionar problemas que requieran la aplicación de cálculos matemáticos.

Realicemos ahora el análisis de los problemas siguientes:

Situación 1

Enrique va a la papelería y compra una resma de papel; paga con un billete de **$10,000** y recibe de cambio **$5,400**. ¿Cuál es el costo del papel?

En el problema se observa que:

a. El costo del papel más el cambio es igual al valor del billete.
b. El valor del billete y el cambio recibido son valores conocidos.
c. El valor del papel se desconoce.

A partir de estos datos se obtiene la ecuación:

$$\mathbf{x + 5{,}400 = 10{,}000.}$$

El análisis de los problemas permite determinar correctamente la ecuación que los soluciona.

Para resolverlos, se aplica la ***propiedad uniforme***, empleando los inversos aditivo y multiplicativo:

x + 5,400 = 10,000 es la ecuación planteada.

x + 5,400 (5,400) = 10,000 (5,400), en la que se suma el inverso aditivo de **5,400** a ambos miembros para así dejar sola la **x**.

Entonces, **x = 4,600**, realizando la sustracción.

Luego a Enrique el papel le costó **$4,600**.

Comprobación:

Es posible comprobar si el resultado es correcto sumando el valor encontrado con el cambio recibido.

4,600 + 5,400 = 10,000

Situación 2

El señor Martínez reparte una caja de chocolates entre sus seis hijos. Si a cada uno de ellos le tocaron ocho chocolates, ¿cuántos chocolates traía la caja?

Haciendo un análisis del problema se tiene que:

a. Al hablar de una repartición, la operación involucrada es una división.
b. La división se plantea: el número total de chocolates de la caja entre el número de hijos del señor Martínez.
c. El cociente de esa división es 8.
d. En la división los datos conocidos son el divisor y el cociente; el dato desconocido es el dividendo, por tanto, este es la incógnita.

De donde se obtiene la ecuación $\frac{x}{6} = 8$, la cual se soluciona aplicando la ***propiedad uniforme***, así:

la ecuación planteada es $\frac{x}{6} = 8$ y multiplicando por el inverso multiplicativo de ambos miembros de la ecuación tenemos $\frac{x}{6}(6) = 8\ (6)$.

Ahora, efectuando la multiplicación resulta finalmente: **x = 48**.
Con lo cual se concluye que la caja tenía 48 chocolates.

Por medio de la comprobación se tiene: $\frac{48}{6} = 8$.

Para representar un problema por medio de una ecuación, deben tomarse en cuenta los siguientes puntos:

a. Leer varias veces el problema con la finalidad de entender el problema y localizar las ideas principales.
b. Identificar los datos que proporciona el problema y la relación que guardan entre ellos.
c. Establecer cuáles son los datos conocidos y cuáles los desconocidos.
d. Encontrar la ecuación que representa el problema.
e. Buscar su solución.
f. Comprobar el resultado.

El análisis de los problemas nos lleva a resolverlos por medio de un planteamiento más seguro y una solución más directa.

Ecuaciones de la forma a + x = b y a – x = c

Analicemos la situación siguiente:
Al ir a pagar la reparación de su carro, le presentaron al señor Juan la siguiente cuenta que estaba manchada de tinta:

TALLER AUTOMOTRIZ
“VELÁZQUEZ”

CUENTA DE GASTOS DE REPARACIÓN
MODELO 2001
PROPIETARIO: Sr. Juan

Repuestos originales _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ **$ 1,985,000**
Mano de obra: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
Total: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ **$ 2,400,000**

¿Se podrá saber cuánto le cobraron de mano de obra al señor Juan?
Reúnete con varios compañeros para proponer una solución al problema.
Para saber el costo de mano de obra, planteamos la siguiente situación:

$\$1,985,000 + \boxed{} = \$2,400,000.$

¿Qué número sumado con $1,985,000 da como resultado $2,400,000?

Para contestar esta pregunta, se tiene que hacer una resta de la siguiente forma:

2,400,000	Total
- 1,985,000	Repuestos originales
415,000	Mano de obra

Comprueba que el número 415,000 sumado con $1,985,000, da como resultado $2,400,000.

Por tanto, se puede concluir que le cobraron $415,000 por mano de obra, porque $1,985,000 + $415,000 = $2,400,000.

Una expresión como $1,985,000 + $\boxed{}$ = $2,400,000 recibe el nombre de **ecuación**.

Una ecuación cualquiera, como la anterior, se puede escribir de la forma:

1,985,000 + x = 2,400,000,

en donde se utiliza una letra o variable, en este caso la **x**, para representar el número desconocido (la incógnita), en lugar de utilizar el recuadro.

Obsérvese los siguientes ejemplos:

1. Dada la ecuación 28 - x = 12, $\underbrace{\mathbf{28}}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{\mathbf{x - 12}}_{\text{segundo miembro}}$

2. En la ecuación x + 20 = 45, $\underbrace{\mathbf{x + 20}}_{\text{primer miembro}} = \underbrace{\mathbf{45}}_{\text{segundo miembro}}$

Una ecuación es una igualdad que solo se satisface para determinado valor o determinados valores de la variable o las variables que en ella intervienen. Al sustituir la variable o las variables por valores numéricos, se obtiene el mismo resultado para cada uno de los dos miembros o términos de la ecuación.

Propiedades de las igualdades

Tomemos una igualdad sencilla **4 + 15 = 19**.

1. Si **4 + 15 = 19**, entonces, **19 = 7 + 12**.

2. Si **4 + 15 = 7 + 12**, entonces, **7 + 12 = 4 + 15**.

3. Si **4 + 15 = 19** y **19 = 10 + 9**, entonces, **4 + 15 = 10 + 9**.

4. Si **85 = (50 + 35)**, entonces, **85 + 100 = (50 + 35) + 100**.

5. Si **85 = (50 + 35)**, entonces, **85 – 100 = (50 + 35) – 100**.

Una balanza de brazos iguales, que esté en equilibrio, simula una igualdad.

Cada platillo corresponderá a un término o miembro de la igualdad.
Podemos resumir las propiedades de la igualdad así:

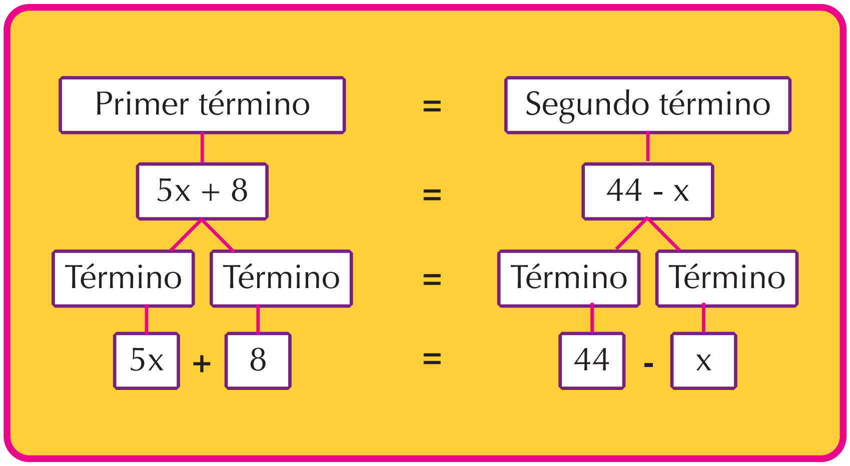
1. Los miembros de una igualdad pueden permutar sus lugares, es decir, pueden intercambiar su lugar.
   Si a + b = c, entonces, c = a + b (propiedad simétrica).

2. Si un número es igual a otro y este a su vez es igual a un tercero, entonces el primero es igual al tercero.
   Si a = b y b = c, entonces, a = c (propiedad transitiva).
   Si dos igualdades tienen un miembro común, los otros dos miembros son iguales.
   Si a + b = c y c = d + f, entonces, a + b = d + f (propiedad transitiva).

3. Si a los dos miembros de una igualdad se les suma o se les resta el mismo número la igualdad se conserva.
   Si a = b, entonces, a + c = b + c
   Si a = b, entonces, a – c = b – c (propiedad uniforme).
   Si a los dos miembros de una igualdad se les multiplica o se les divide por el mismo número, la igualdad se conserva.
   Si a = b, entonces, ac = bc
   Si a = b, entonces, a ÷ c = b ÷ c (propiedad uniforme).
   Con esta propiedad se puede resolver cualquier ecuación de la forma **a + x = b** o **a – x = c**, en donde **a**, **b** y **c** son constantes y **x** es la variable o incógnita.

Ecuaciones

Sabemos que una ecuación es una igualdad en la que se desconoce algún valor.
Dada la ecuación **5x + 8 = 44 – x**, observamos sus dos partes esenciales: el primer miembro se localiza a la izquierda del signo igual, en este caso es **5x + 8**, y el segundo miembro, ubicado a la derecha del signo igual, es **44 – x**.



En las ecuaciones lineales diferenciamos tres formas, a saber:

$$\mathbf{a + x = b \;\; y \;\; a - x = c}$$
$$\mathbf{ax = b \;\; y \;\; a \div x = c}$$
$$\mathbf{ax + b = cx + d}$$

Ecuaciones de las forma $ax = b$ y $a \div x = c$

Pedro está estudiando para su examen y se encuentra con este problema:

Un automóvil viaja de Bogotá a Manizales con una velocidad constante de 90 km/h.

¿Cuánto tiempo tarda en llegar a Manizales si entre las dos ciudades hay una distancia de 270 km?

En sus apuntes encuentra que cuando un transporte terrestre viaja con velocidad constante (v), la distancia (d) que recorre es igual a la velocidad (v) por el tiempo (t):

$$\mathbf{d = vt.}$$

Las unidades en que se mide la velocidad son km/h y la distancia, km. Por comodidad, estas no se manejan durante el procedimiento para resolver la ecuación, solamente se trabaja con los números y al final se escribe la unidad correspondiente al resultado.

Retomando, entonces, el problema del viaje entre Bogotá a Manizales, la expresión es una ecuación en la cual el primer miembro es **90** y el segundo es **270 ÷ x**, esto es:

$$\mathbf{90 = 270 \div x}.$$

La igualdad cumple la propiedad simétrica que dice: los dos miembros de una igualdad pueden cambiar sus lugares, sin que esta se altere. Así que se puede expresar así:

Como **90 = 270 ÷ x** es lo mismo que **270 ÷ x = 90**, entonces, se trata de una ecuación de la forma **a ÷ x = c**, donde **a** y **c** representan cantidades conocidas y **x** una cantidad desconocida.

Por tanto, es una división en la que se conoce el dividendo **270** y el cociente **90**, pero se desconoce el divisor **x**:

270	÷	x	=	90
dividendo		divisor		cociente

En toda división, el dividendo es un producto de dos factores: el divisor y el cociente.

Por lo tanto, el dividendo **D**, entre el divisor **d**, es igual al cociente **c**:

$$D \div d = c.$$

Y el dividendo entre el cociente es igual al divisor

$$D \div c = d.$$

Como en la ecuación se desconoce el divisor, al aplicar

$D \div c = d$, se tiene: $270 \div 90 = c$.

Por la propiedad simétrica de la igualdad

$x = 270 \div 90$
$x = 3.$

Por tanto, el tiempo que tarda el automóvil, viajando con velocidad constante, desde Bogotá hasta Manizales es 3 horas.

Lo cual se puede comprobar, porque

$$(90)(3) = 270.$$

Ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$

Existen situaciones problemáticas cuya solución puede encontrarse planteando una ecuación.

Por ejemplo:

Sandra y Josefina recibieron una gratificación al terminar su trabajo.

A Sandra le entregaron **6** vales y **$10,000** y Josefina recibió **4** vales y **$50,000**. Si los vales son de la misma denominación y las dos recibieron igual pago,

a. ¿De qué valor son los vales?
b. ¿Cuánto recibió de compensación cada trabajadora?

Al interpretar algebraicamente esta situación, se tiene:

Gratificación de Sandra $6x + 10{,}000$
Gratificación de Josefina $4x + 50{,}000$,

donde **x** representa el valor de cada vale.

Como la gratificación de ambas es igual, se obtiene la ecuación:

$$6x + 10{,}000 = 4x + 50{,}000$$

Obsérvese que en uno y otro miembro aparecen los términos con la incógnita **x** que representa el valor de un vale y los términos independientes no tienen **x**.

Un proceso para resolver esta ecuación puede ser de la siguiente forma:

Reunir en el primer miembro los términos que contienen a la incógnita **x** y en el segundo miembro, los términos independientes (los que no tienen **x**).

Para ello, se debe identificar los términos que hay que cambiar de lugar (**10,000** y **4x**) y sumar el inverso aditivo de cada uno en ambos miembros, ellos son: **-10,000** y **-4x**, respectivamente.

$$6x + 10{,}000 = 4x + 50{,}000$$
$$6x + 10{,}000 - 10{,}000 - 4x = 4x + 50{,}000 - 10{,}000 - 4x$$

Se agrupan términos semejantes en cada miembro.

$$(6x - 4x) + (10{,}000 - 10{,}000) = (4x - 4x) + (50{,}000 - 10{,}000)$$
$$2x + 0 = 0 + 40{,}000$$

Despejar la incógnita dividiendo ambos miembros de la igualdad entre el coeficiente de la incógnita **x**, que es 2. De esta manera, **x = 20,000**, que corresponde a la solución.

Comprobación

a. Sustituyendo el valor de **x** en la ecuación original:

$$6x + 10{,}000 = 4x + 50{,}000$$
$$6(20{,}000) + 10{,}000 = 4(20{,}000) + 50{,}000.$$

b. Haciendo operaciones en cada miembro:

$$120{,}000 + 10{,}000 = 80{,}000 + 50{,}000$$
$$130{,}000 = 130{,}000.$$

Como se llegó a una igualdad, entonces, la solución es correcta.

La ecuación ha sido resuelta y verificada, pero aún no se han respondido las preguntas del problema.

a. En este caso, como **x** representa el valor de los vales, cada uno de ellos cuesta **$20,000**.
b. Como Sandra y Josefina recibieron lo mismo, la igualdad a la que se llegó en la verificación representa el monto de su gratificación; esto es, cada una recibió **$130,000**.

De acuerdo con lo anterior, se puede concluir lo siguiente:

Para resolver cualquier ecuación de la forma $a + x = b$, basta con aplicar el inverso aditivo de un número.
Recuérdese que el inverso aditivo de un número es aquel número que sumado con el número original da como resultado cero.

Aplicación

Copia en tu cuaderno cada situación y resuélvela para luego comparar con algunos de tus compañeros.

1. Relaciona, de manera individual, la columna de la izquierda con la de la derecha y anota entre los paréntesis la letra o las letras correspondientes de acuerdo con la propiedad aplicada:

a. Si $3 + 5 = 8$, entonces $8 = 3 + 5$	Reflexiva ( )
b. $4 + 6 = 10$	
	Transitiva ( )
c. $7(4 + 5) = 7(9)$	
d. Si $4 + 8 - 3 = 12 - 3$, entonces, $4 + 8 = 12$	Cancelativa ( )
e. Si $d = e$ y $e = g$, entonces $d = g$	Uniforme ( )
f. $4 + 6 = 4 + 6$	Simétrica ( )

2. ¿Es **27** la solución de cada una de las siguientes ecuaciones? Compruébalo en cada caso.

   a. $x + 39 = 66$
   b. $475 + g = 500$
   c. $298 = 271 + c$

3. Analiza las siguientes expresiones y anota la propiedad de la igualdad que se podría ilustrar con estas situaciones:

   a. Juan es hermano de Pepe y Pepe es hermano de Miguel, por lo tanto, Juan es hermano de Miguel.

b. El señor Ruiz y la señora González tenían en el banco $40,000 cada uno. Si ambos depositan $60,000 en su respectiva cuenta, tendrán la misma cantidad.
c. De una balanza cuyos pesos están equilibrados se quita una pesa de cada lado de 200 g cada una.
d. Gloria es igual de alta que Elsa y Elsa es igual de alta que Gloria.

4. Se calcula que una cosecha será de x toneladas de maíz. Si debido a una sequía solo se cosecharon 450 toneladas y se sabe que se perdieron 85, ¿cuánto maíz se habría cosechado si no hubiese habido sequía?

5. El área de un terreno de forma rectangular es de 140 m y su altura es de 7 m, ¿cuánto mide de base el terreno?

6. Antes de ponerse a dieta, una señora pesaba z kilogramos. Si en la dieta reduce 15 kg y llega a pesar 56 kg, ¿cuál era su peso inicial?

7. Si a un número se le resta **0,52**, el resultado es **5,24**, ¿cuál es el número?

8. Resuelve cada una de las ecuaciones y comprueba las soluciones:

   a. $11x - 4 = 8x + 14$

   b. $1 - 215 = a - 59$

   c. $(-36) + x = -15$

   d. $56 = 27x$

   e. $-125\ m = 448$

   f. $\dfrac{-180w}{15} = 205$

   g. $11x - 4x = 8x + 14$

   h. $80a + 1{,}215 = a - 59$

   i. $(-36x) + 8x = -15x$

9. Una granja tiene cerdos y pavos; en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay en total?

10. Inventa un problema que origine la siguiente ecuación: $x - 8 = 43$.

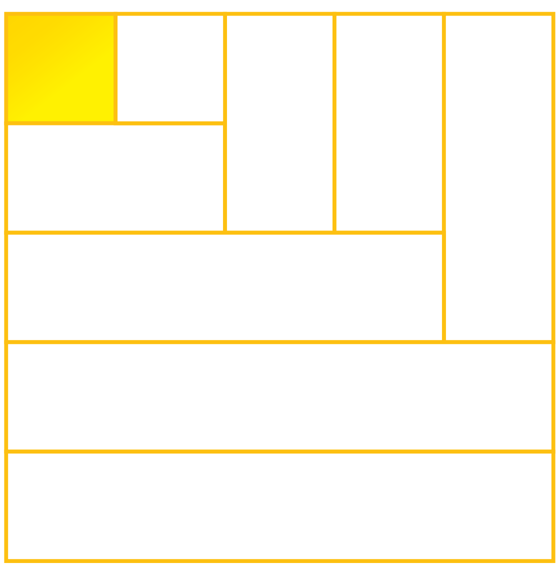
Entendemos por…

Transitividad el proceso según el cual se transfiere un elemento a otro.
En matemáticas, existe la ley transitiva cuya acción pasa entre expresiones lógicas o algebraicas.
Por ejemplo: Si el precio de un libro es igual al precio de un celular y el precio de ese celular es igual al precio de unas zapatillas, entonces el precio del libro es igual al precio de las zapatillas.

Diversión matemática

Las unidades cuadradas del cuadrado

El cuadradadito amarillo es tomado como unidad de medida.



¿Sabes cuántas unidades cuadradas mide el cuadrado grande?
Busca una solución y discútela con tus compañeros.

Día a día

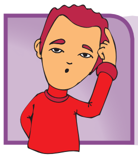
Reportaje

Las matemáticas ocultas en la vida cotidiana

Algunos expertos se reunieron en Madrid y subrayaron las aplicaciones prácticas de su respectivo avance en su lenguaje abstracto:
"La gente está acostumbrada a que las cosas funcionen solas, pero detrás hay algo que las hace funcionar", explica Zuazua. Por ejemplo, al introducir una palabra en un buscador de Internet como Google, los resultados tampoco son casuales. "Los matemáticos imaginamos la Red como un montón de canicas colocadas sobre una superficie. Hay que identificar quiénes son los que miran y quiénes los que son mirados, buscar la palabra que se pide y jerarquizar los resultados –si buscas la palabra Kleinberg, quieres encontrar a Jon Kleinberg, el científico que acaba de obtener el premio Nevanlinna, no al señor Kleinberg que vive no sé dónde–". Todo eso se hace por medio de algoritmos que contemplan todas esas variables.
"–El casco de los ciclistas y el [automóvil] que menos consume. En los últimos años, la forma de los cascos de los ciclistas, al menos los que usan en una contrarreloj, ha cambiado: redondeados por delante, acabados en pico por detrás..., y no se trata de una cuestión estética, sino de aerodinámica, que intenta mejorar el rendimiento de los deportistas. Mediante ecuaciones, se simula el comportamiento de un objeto sólido (el casco, la bicicleta...) en interacción con un fluido (el aire) hasta dar con el diseño más eficiente (en este caso, el que ponga menos resistencia al aire). En los aviones, los coches o los barcos se utiliza el mismo procedimiento, y el diseño variará en función del objetivo: que sea más rápido, más estable o que gaste menos combustible–".

http://www.elpais.com/articulo/futuro/matematicas/ocultas/vida/cotidiana/elpepusocfut/20060906elpepifut_2/Tes

Tema 2.
Los paréntesis en las ecuaciones



Indagación

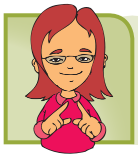
En el aprendizaje del álgebra es muy frecuente el manejo de expresiones que contienen paréntesis.

Para simplificarlas, es necesario realizar las operaciones indicadas por el signo de agrupación.

Por ejemplo, dada la ecuación **$15(x - 7) = -45$**

Un número seguido por un paréntesis indica multiplicación, por lo tanto **$15(x - 7)$** significa que **15** multiplica a **$(x - 7)$.**

Intenta proponer una solución y discútela con algunos de tus compañeros.



Conceptualización

Existen ecuaciones que originalmente contienen paréntesis, los cuales han de eliminarse para simplificarlas y después para resolverlas.

Analicemos la resolución del siguiente problema:

Entre Javier y Alex tienen **$10,000**. Si Javier gasta **$4,000**, el doble de lo que le queda equivale al triple de lo que tiene Alex. ¿Cuánto tiene cada uno?

Al leer el problema se observa que las incógnitas son las cantidades que tienen Javier y Alex; uno de los datos es que la suma de las dos es **$10,000**.

Se puede elegir como incógnita principal la cantidad que tiene Javier, pues con fundamento en ella se obtiene la de Alex.

Entonces los datos del problema se representan de la siguiente manera:

Datos:
$ que tiene Javier + $ que tiene Alex = **$10,000**
$ que tiene Javier = **x**
$ que tiene Alex = **10,000 – x**

Para formar la ecuación, se toma en cuenta que a lo que tiene Javier se le debe restar **$4,000** y duplicar esta cantidad. Además, lo anterior es igual al triple de lo que tiene Alex.

Entonces, la ecuación queda así:

$$2\,(x - 2{,}500) = 3\,(10{,}000 - x)$$

Solución:
Resolvemos los paréntesis aplicando la ley distributiva del producto con respecto a la multiplicación, que ya hemos estudiado antes.

$$2\,(x - 2{,}500) = 3\,(10{,}000 - x)$$
$$2\,(x) - 2\,(2{,}500) = 3\,(10{,}000) - 3\,(x)$$
$$2x - 5{,}000 = 30{,}000 - 3x$$

Sumamos **3x** a cada lado de la igualdad y obtenemos:

$$2x + 3x - 5{,}000 = 30{,}000 - 3x + 3x$$
$$5x - 5{,}000 = 30{,}000$$

Ahora, sumamos **5,000** a cada lado de la igualdad y obtenemos:

$$5x - 5{,}000 + 5{,}000 = 30{,}000 + 5.000$$
$$5x = 35{,}000$$

Dividiendo cada lado entre **5** nos resulta:

$$5x \div 5 = 35{,}000 \div 5$$
$$1x = 7{,}000$$

que equivale al valor de **x**:

$$x = 7{,}000$$

Para resolver un problema es necesario traducirlo al lenguaje algebraico.

Lo que la traducción proporciona es una ecuación.

Al resolver esta ecuación, se conoce la solución del problema; por tanto, es muy importante saber resolver las ecuaciones.

En la resolución de problemas usando ecuaciones es importante, entonces, tener en cuenta los siguientes aspectos:

- ***Leer el problema hasta comprender cuáles son los datos y los números desconocidos o las incógnitas.***
- ***Escribir los números desconocidos utilizando una sola letra.***
- ***Formar la ecuación de acuerdo con los datos conocidos y desconocidos que son equivalentes.***
- ***Resolver y comprobar la ecuación.***
- ***Escribir la solución del problema para encontrar los datos desconocidos.***

Aplicación

Copia en tu cuaderno los ejercicios que se proponen a continuación, soluciónalos y compara tus respuestas con algunos de tus compañeros.

1. Analiza las siguientes ecuaciones, elimina los paréntesis y después resuelve las ecuaciones:

   a. $\mathbf{5(x + 2) = 20}$
   b. $\mathbf{9 + (x - 4) = 15}$
   c. $\mathbf{5 - (x + 2) = -3}$

2. Completa el proceso para solucionar cada una de las ecuaciones siguientes:

   a. $\mathbf{4 - 2(x + 1) = 8}$
   Proceso de solución:
   $\mathbf{4 - 2(\quad) - 2(\quad) = 8}$
   $\mathbf{4 - 2 - 2(\quad) = 8}$
   $\mathbf{2 - 2x = 8}$
   $\mathbf{-2x = 8 - \_\_\_\_\_}$
   $\mathbf{x = \_\_\_\_\_}$

   b. $\mathbf{2(x + 1) + 3(x + 2) = 24}$
   $\mathbf{2x + 2 + \_\_\_\_ + 6 = 24}$
   $\mathbf{2x + 2 - 2 + 3x + 6 - 6 = 24 - \_\_\_\_ - 6}$
   $\mathbf{2x + 3x = \_\_\_\_}$
   $\mathbf{\_\_\_\_ = 16}$
   $\mathbf{x = \_\_\_\_}$

3. Se tienen dos números relacionados de tal forma que el segundo es 24 unidades mayor que el primero. Si la suma de los dos números es igual a 134, encuentra los números.
4. La suma de dos números enteros consecutivos es 27. ¿Cuáles son los números?
5. Si la suma de tres números consecutivos es 24, ¿cuáles son estos números?
6. El triple de un número más cinco equivale a este número menos dos.
7. La suma de tres números es 130. El segundo es 4 unidades mayor que el menor y el tercero es 6 veces mayor que el menor. ¿Cuáles son los números?
8. La base de un rectángulo mide el doble de la longitud de su altura. Si la base aumenta 3 cm y la altura disminuye 3 cm, el área quedaría igual. ¿Cuáles son las dimensiones de la base y de la altura?
9. Recordemos que los números son consecutivos cuando su diferencia dé 1, es decir, uno de ellos es 1 unidad mayor que el otro. Por ejemplo 5 y 6 son consecutivos. 16 y 17 también son consecutivos.
   En general si x es un número cualquiera, $x + 1$ es el consecutivo de x.
   Soluciona este problema:
   Dos números consecutivos suman 51. Encuentra esos dos números.

Entendemos por…

Clave aquellos signos empleados para expresar en forma sintética ciertas palabras o asuntos para abreviar su escritura o para evitar que trascienda su significado.
También las **claves** son un instrumento musical de percusión que ayudan en la medida de la pieza musical.

Tomado de http://www.siisarh.com/glosario/glosario-seguro-social.html

Diversión matemática

Tomando como clave o código la palabra AGUJERITO con sus respectivas equivalencias numéricas, realiza un escrito y preséntaselo a algunos compañeros para que lo traduzcan, a la vez que tú traduces los escritos de ellos.

A	G	U	J	E	R	I	T	O
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Por ejemplo, tenemos la afirmación siguiente:
En clave AGUJERITO:
C31ND9 N9 5S 875MP9 D5 C9S5CH1, 1S7S89 1 CL1S5S.
En lenguaje común del español:
Cuando no es tiempo de cosecha, asisto a clases.

Día a día

Un **logotipo** (coloquialmente conocido en forma de acortamiento, ***logo***) es un elemento gráfico que identifica a una persona, una empresa, una institución o un producto. Los logotipos suelen incluir signos -normalmente lingüísticos- claramente asociados a quienes representan.

Ministerio de Educación Nacional
República de Colombia
Libertad y Orden

Históricamente, los artesanos del barro, del cristal, los canteros, los fabricantes de espadas y artilugios de hierro fino, los impresores, utilizaban marcas para señalar su autoría.
Los reyes, además de firmar, cruzaban los documentos legales con un logotipo de su creación, a mano o con un sello.
Al igual que en la ecuación, la variable tiene valor o significado, los logotipos tienen también su significado según lo que representen.

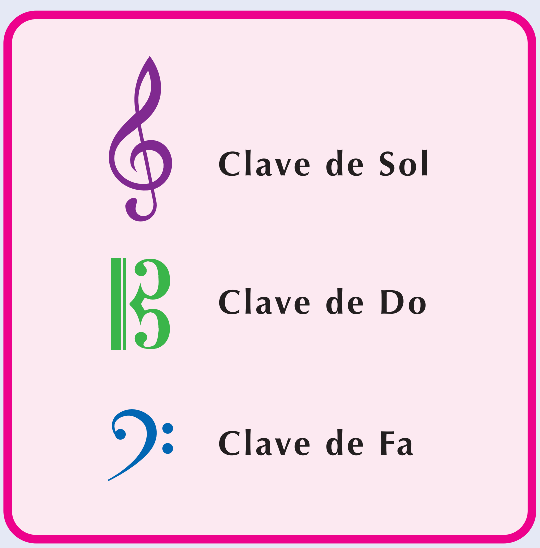
http://es.wikipedia.org/wiki/Logotipo

Este capítulo fue clave porque

- Aprendí a identificar las ecuaciones lineales.
- Reconozco las ecuaciones de la forma $a + x = b$ y $a - x = c$, en donde x es la variable.
- Reconozco las ecuaciones de la forma $ax = b$ y $a \div x = c$, en donde x es la variable.
- Reconozco las ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$, en donde x es la variable.
- Sé aplicar las propiedades de las igualdades.
- Soy capaz de proponer problemas que requieren el planteamiento de ecuaciones.
- Doy solución a problemas que involucran ecuaciones lineales.

Conectémonos con La Música

El lenguaje de la música



La **clave** es un símbolo usado en notación musical, cuya función es asociar las notas musicales con las líneas o espacios del pentagrama.

Así como sucede en las ecuaciones lineales en las que existen valores para sus variables.

Una clave asocia una nota en concreto con una línea del pentagrama, de manera que a las notas siguientes les corresponderán los espacios y líneas adyacentes.

Existen tres símbolos distintos para representar a las distintas claves: la clave de sol, la clave de fa y la clave de do, que llevan el nombre de la nota que designan a la segunda línea de los pentagramas.

http://es.wikipedia.org/wiki/Clave_(notacion_musical

Repasemos lo visto

Al iniciar la unidad nos preguntábamos: ¿Para qué sirve el álgebra?

A lo largo de la unidad pudimos corroborar que el álgebra tiene gran importancia en la vida de las personas y que es un idioma universal, pues sus símbolos son los mismos en cualquier país del mundo.

Además, sabes que el álgebra es la rama de las matemáticas que generaliza la aritmética.

Nos quedó claro que el lenguaje algebraico es aquel en el que intervienen números, letras y signos.

El álgebra es un lenguaje simbólico muy práctico, porque nos ayuda a simplificar y generalizar.

Se puede pasar una expresión verbal o del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa.

Estudiamos y analizamos problemas cuyo planteamiento nos lleva a proponer ecuaciones lineales de las formas $\mathbf{a + x = b}$ y $\mathbf{a - x = c}$, $\mathbf{ax = b}$ y $\mathbf{a \div x = c}$ y $\mathbf{ax + b = cx + d}$.

También reconocemos que la generalización de situaciones nos lleva a exponer fórmulas que se aplican en geometría, tales como perímetros y áreas de diferentes polígonos.

El álgebra es aplicada en otras ciencias como física, química, geometría, trigonometría y cálculo. Por medio del álgebra, se da solución a problemas propios de estas disciplinas, que sin la existencia del álgebra sería imposible resolver.

Mundo rural

Pastoreo y producción lechera

Aun con excelentes manejos de pastoreo y con forrajes de muy buena calidad, las vacas consumen solo cierta cantidad de materia seca para suplir sus necesidades energéticas o hasta llenar su sistema digestivo.

Las vacas en pastoreo incrementan sus requerimientos energéticos, debido a su incremento de actividad al caminar, lo que hace aún más importante tener un excelente manejo de praderas.

Un estudio demostró que animales en pastoreo consumen 20% menos material seca comparado con animales alimentados de otras formas.

Otro estudio determinó que las vacas lactantes pueden pastorear muy poco, de 5 a 6 horas al día; esto puede ser muy interesante, pues el costo de alimento es muy bajo y las producciones de leche también son reducidas.

Una solución lógica sería la suplementación con mezcla de granos o concentrados; esto es generalmente utilizado para mejorar la producción de leche, debido a la cantidad de energía disponible y a que la cantidad de material seca ingerida aumenta considerablemente.

El reto para el ganadero es encontrar cuál es el punto de balance para saber cuánto grano suplementar.

De acuerdo con los estudios, los tratamientos de grano fueron 4 kilogramos por día por animal. Luego 8 kilogramos y 12 kilogramos por día, así el grano se duplicó y se triplicó en la dieta, pero la producción de leche solo aumentó a 44 lb para la ración de 4 kg, a 47 lb para la ración de 8 kg y a 50 lb para la ración de 12 kg. Sin embargo, hubo un incremento de costo significativo en las raciones, siendo el más alto la ración de 12 kg y muy lejos de justificar el incremento mínimo de 6 litros de leche.

Escribe en tu cuaderno un comentario de aproximadamente 10 a 15 renglones y compártelo con algunos de tus compañeros.

http://jairoserrano.com/2011/02/pastoreo-y-produccion-lechera/

Dato curioso

El cubo de Rubik

El arquitecto y catedrático, Ernö Rubik de Hungría, inventó en 1976 el cubo de Rubik (5,5 x 5,5 x 5,5 cm), el cual ha vendido millones.

Quería darle a sus alumnos una mejor noción de lo tridimensional.

Como rompecabezas tiene su precedente en 1873 con el clásico "Rompecabezas 15" de Sam Loyd, el cual, desde luego, es una especie de sucesor en tres dimensiones.

El cubo de Rubik tiene mucha matemática en sus aristas.

Dibuja en tu cuaderno el cubo de Rubik, coloréalo, comenta con tus compañeros el número de colores que tiene y describe los posibles colores de las caras de un cubo de Rubik armado.

http://www.disfrutalasmatematicas.com/juegos/parejas-matematicas.html

¿En qué vamos?

Reflexiono y trabajo con mis compañeros

Copia en tu cuaderno cada uno de los ejercicios siguientes, resuélvelos y compáralos luego con tus compañeros.

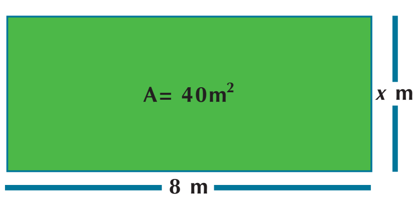
1. Escribe simbólicamente:

   a. Dos helados del mismo precio valen $800.
   b. El costo de un lápiz y una pluma es de $4,800.
   c. La diferencia de la edad de Luis menos la de Elsa es de 25 años.
   d. La mitad de un número menos el triple de otro.
   e. La raíz cuadrada de un número cualquiera.
   f. El doble de un número, más la raíz cuadrada de otro, menos el cubo de un tercer número.

2. Escribe en lenguaje común:

   a. $x + y$
   b. $x - y = 32{,}000$
   c. $x + x + x$
   d. $A = bh$
   e. $a + b + c = 45$

3. Busca una expresión para indicar la situación problemática siguiente:
   Se tiene un lote de 40 m² de área. El lote tiene forma rectangular y uno de sus lados mide 8 m.



   ¿Cuánto medirá el otro lado?

4. Identifica las constantes y las variables de cada una de las expresiones algebraicas siguientes:

   a. $\dfrac{6 - n}{5m}$ b. $\dfrac{t - r}{w + m}$

   c. $\dfrac{2b^3 - 8v}{5bv^2}$ d. $5x + \dfrac{a^3 - 8b^2}{7c} + 4$

5. Escribe un enunciado para cada ecuación dada:

   a. $x + 37 = 82$
   b. $x + 258 = 396$

6. Completa el siguiente cuadro:

a	b	a – b	a – (–b)
+9	+5		
–15	–3		
–9	+7		
+8	5		
+5	–2		
–4	+6		

7. Relaciona la columna de la izquierda con la de la derecha y anota en el paréntesis la letra que concuerde con la ecuación señalada:

a. El costo de tres litros de leche es de $5,700.	$x + 2y = 45$	( )
b. Se compran tres lápices y se paga con un billete de $2,000; el cambio que se recibe es de $850.	$3r + 850 = 2{,}000$	( )
c. La edad de Aurora más el doble de la edad de Pilar es de 45 años.	$3x = 5{,}700$	( )
d. Si a 245 le restamos un número, la diferencia es 189.	$245 - x = 189$	( )

8. Relaciona un enunciado del lado izquierdo con su(s) correspondiente(s) propiedad(es) del lado derecho, escribiendo la(s) letra(s) entre paréntesis:

a. Si **3 + 5 = 8**, entonces **8 = 3 + 5**	Reflexiva	( )
b. **4 + 6 = 10**	Transitiva	( )
c. **7(4 + 5) = 7(9)**	Cancelativa	( )
d. Si **4 + 8 - 3 = 12 - 3**, entonces **4 + 8 = 12**	Uniforme	( )
d. Si **d = e** y **e = g**, entonces **d = g**	Simétrica	( )
e. **4 + 6 = 4 + 6**		

9. El número de días que trabajó Juan es 4 veces el número de días que ha trabajado Carlos. Si Juan hubiera trabajado 9 días menos y Carlos 15 días más, los dos habrían trabajado igual número de días. ¿Cuántos días trabajó cada uno?

10. La edad de Jesús es el triple de la edad de Lalo. La edad de Jesús hace 5 años era el doble de la edad de Lalo más 10 años. ¿Qué edad tienen actualmente?

Le cuento a mi profesor

Con tu profesor, resuelve la siguiente rejilla.
Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Establezco relaciones entre letras y números.				
Expreso enunciados comunes o verbales en lenguaje algebraico.				
Expreso enunciados que se encuentran en lenguaje algebraico en lenguaje común o verbal.				
Identifico las propiedades de las igualdades.				
Realizo ejercicios en los cuales aplico las propiedades de las igualdades.				
Dado un término algebraico, identifico sus constantes.				
Dado un término algebraico, reconozco sus variables.				
Identifico los términos de una ecuación.				
Reconozco la utilidad de las ecuaciones.				
Identifico los distintos tipos de ecuaciones lineales.				
Planteo enunciados matemáticos que originan ecuaciones.				
Calculo el valor numérico de una expresión algebraica.				
Soluciono ecuaciones lineales del tipo **a + x = b** y **a – x = c**.				
Soluciono ecuaciones lineales del tipo **ax = b** y **a ÷ x = c**.				
Soluciono ecuaciones lineales del tipo **ax + b = cx + d**.				
Resuelvo ecuaciones lineales que llevan paréntesis.				
Expreso enunciados de problemas en ecuaciones con paréntesis.				

Autoevaluación

Participo y aprendo	Superior	Alto	Básico	Bajo
Permito la libre discusión de soluciones de ejercicios algebraicos.				
Participo activamente en clase.				
Cuando un compañero manifiesta dudas sobre algún concepto algebraico y yo lo tengo claro, le ofrezco mis explicaciones.				
Colaboro con la disciplina del curso.				
Resuelvo ejercicios en clase.				
Propongo actividades para resolver en clase.				
Dedico tiempo para repasar en casa.				
Me gusta trabajar en grupo.				
Soy responsable en el cumplimiento de mis deberes escolares.				
Reconozco la colaboración que me brinda mi profesor.				
Me gusta que mis compañeros progresen en matemáticas.				
Manifiesto agrado por el álgebra.				
Soy consciente de la importancia del álgebra para el avance del curso.				
Acepto las correcciones cuando me equivoco.				
Avanzo en mi trabajo personal.				

Unidad 4

Estadística Descriptiva y Probabilidad

Resolvamos

Te has preguntado: ¿para qué sirve la estadística? y/o ¿para qué sirve la probabilidad?

Tradicionalmente los gobiernos han llevado registros de la totalidad de población, nacimientos, defunciones, ocupaciones, producción y de todo tipo de actividades que se realizan en su jurisdicción.

El conteo y la medición de tales hechos generan gran cantidad de información.

En la actualidad, los medios masivos de comunicación, con reportajes y noticias, principalmente, proporcionan información de manera constante.

En grandes empresas, microempresas, proyectos agrícolas y agropecuarios, lo mismo que en almacenes y tiendas, se hace necesario organizar información relacionada con las compras, ventas, pérdidas y ganancias.

Una buena parte de esa información se da a conocer por medio de tablas y gráficas; esto hace resaltar la importancia del tratamiento de la información.

Todo ello con miras a tener balances juiciosos que permitan tomar decisiones.

Actualmente, los procedimientos utilizados en la teoría de la probabilidad, así como en la estadística, han adquirido gran relevancia, pues son instrumentos muy útiles en investigaciones científicas como en los casos del estudio de fenómenos sociales, económicos, agrícolas, etc.

Aún en la vida cotidiana, con frecuencia se aplican los principios estadísticos y de probabilidad.

Referentes de calidad	Capítulos
Estándares	1. Tratamiento de datos. 2. Combinatoria y probabilidad.
Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.	
Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos (diagramas de barras, diagramas circulares).	
Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística.	
Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes como prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas.	
Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.	
Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar el comportamiento de un conjunto de datos.	
Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir la posibilidad de ocurrencia de un evento.	
Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.	

Tratamiento de datos

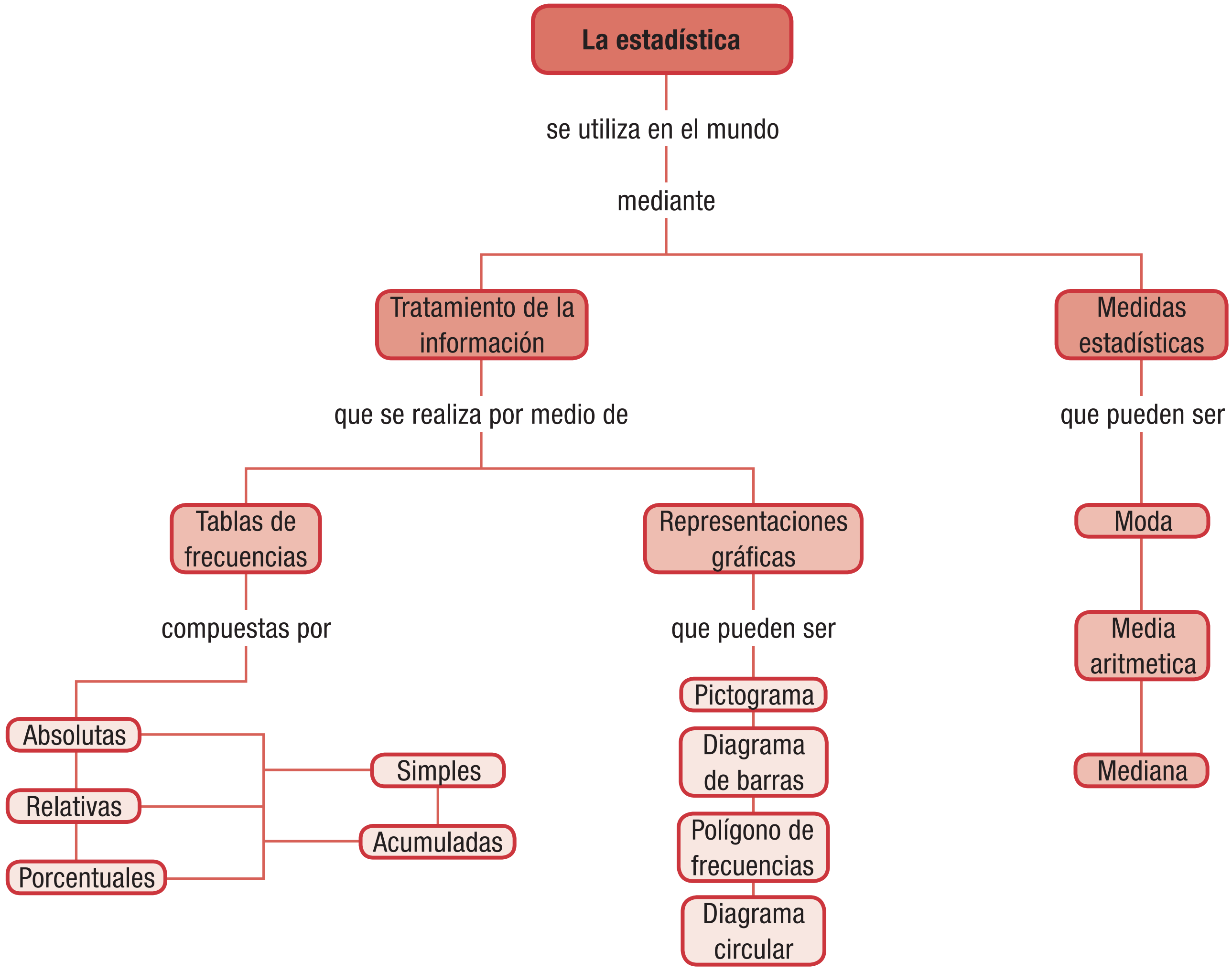
Se encontraron evidencias de que existió formas sencillas de estadística en la Antigüedad.

Se cree que:

- Los babilonios usaban pequeñas tablillas de arcillas para recopilar datos acerca de la producción agrícola y sobre los trueques o cambios de artículos que realizaban, hace unos 5 000 años.
- Los egipcios recolectaban datos de la población y la renta del país.
- Aproximadamente 500 años a.C., los griegos realizaban censos con miras a cobrar impuestos.
- En la China se han encontrado evidencias de registros numéricos que se remontan con anterioridad al año 2 000 a.C.
- El imperio romano reunió datos sobre superficies, población y renta.

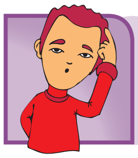
Hoy se considera la estadística como un excelente método para describir con exactitud informaciones de todo tipo.

Por medio de la estadística organizamos y analizamos los datos y tomamos decisiones.



Tema 1.
Presentación y tratamiento de la información

Indagación

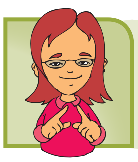


Reúnete con un compañero para buscar en una revista, en un periódico o en un texto de la biblioteca información que esté presentada en una tabla o en una gráfica estadística.

Analícenla y escriban algunas conclusiones que puedan obtenerse de acuerdo con en esa información observada.

Comparen su trabajo con el de otra pareja y discutan acerca de la importancia de las conclusiones obtenidas según la interpretación de la información.

Conceptualización



¿Alguna vez has recibido una muestra gratis de algún producto para que lo pruebes? Eso lo hacen para que conozcas la calidad que tiene el producto, pues una muestra representa la generalidad.

Pues bien, esta es una manera de promocionar el producto, de hacerlo conocer y de tomarlo como una inversión.

Población y muestra

Ya hemos estudiado en el curso anterior estos conceptos, ahora recordémoslos con el caso siguiente:

En muchas ocasiones es necesario realizar investigaciones en las que se estudian las características o los valores de una población determinada, pero debido a las limitaciones de tiempo o de recursos o por la magnitud no se trabaja con la totalidad de la población sino con una parte.

Por ejemplo: supóngase que se desea saber el grado de infestación de 10 hectáreas cultivadas en café, que han sido atacadas por roya. Implicaría un gasto excesivo en tiempo y dinero, revisar una por una todas las matas de las 10 hectáreas y el análisis de los resultados sería dificultoso. En este caso, se toma una muestra que sea representativa.

En situaciones como esta, es necesario utilizar un método estadístico llamado muestreo, el cual se usa en encuestas, diseño y análisis de experimentos, control de calidad, etcétera.

Se le llama ***población al grupo o conjunto de individuos, características u objetos que se examinan***.

En el ejemplo anterior, la población sería todos los alumnos de secundaria del departamento y debido a que es muy difícil examinarla, se elige una ***muestra***, que es ***una parte pequeña de la población que se toma como representativa del conjunto***.

Para tener validez, la muestra elegida debe cumplir con los siguientes requisitos:

a. Debe representar a la población, esto es, ha de pertenecer a esta y ser elegida en forma aleatoria, es decir, al azar, para que todos los elementos de la población tengan la misma probabilidad de ser considerados.
b. Debe ser confiable, es decir, los resultados que se obtengan deben poder generalizarse a toda la población con cierto grado de precisión.
c. Debe ser práctica; en otras palabras, debe ser sencilla de llevar a cabo.
d. Debe ser eficiente, esto es, debe proporcionar la mayor información al menor costo.

Ahora bien, ¿de qué tamaño debe ser la muestra? Esta varía dependiendo del tamaño de la población y de las características propias de la investigación; por ejemplo, si la población es muy grande puede tomarse el 1% para formar una muestra, pero si la población es pequeña se toma un 20%.

El tamaño de la población se denota con N y el de la muestra con n.

De acuerdo con lo anterior, en el ejemplo de los alumnos de secundaria del departamento, si estudian aproximadamente 100 000 alumnos, se recomienda, por tanto, escoger una muestra de por lo menos 1 000 de ellos para entrevistarlos. Entonces, sería **N** = 100 000 y **n** = 1 000.

Tablas de frecuencias

También vimos en el curso anterior que para realizar el estudio estadístico de los datos, es necesario organizarlos en tablas de frecuencias ya sea nombrando cada dato o agrupándolos, cuando el conjunto de datos es muy grande y son muy dispersos. Cuando se nombra cada elemento, se denomina datos no agrupados y cuando se toman en pequeños grupos o intervalos o clases se llama datos agrupados.

Analicemos los siguientes ejemplos:

1. Treinta estudiantes de un curso presentaron un examen de inglés, con valor de 10 puntos, obteniendo los resultados siguientes:

6	5	9	8	7	5	2	9	2	7
7	3	5	1	4	2	9	9	8	8
7	5	8	6	8	9	6	8	6	7

Nos piden:

a. Ordenar de menor a mayor el conjunto de calificaciones.
b. Elaborar la tabla de frecuencias que contenga frecuencias absolutas simples.
c. Elaborar la tabla de frecuencias que contenga frecuencias absolutas simples y frecuencias relativas simples.
d. Elaborar la tabla de frecuencias que contenga frecuencias absolutas simples, frecuencias relativas simples y frecuencias porcentuales simples.
e. Elaborar la tabla de frecuencias que contenga todas las frecuencias simples y las frecuencias acumuladas.

Solución

a. Ordenando el conjunto de calificaciones, de menor a mayor nos queda:

1 2 2 2 3 4 5 5 5 5 6 6 6 6 7
7 7 7 7 8 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9

b. Para elaborar la tabla de frecuencias absolutas simples, tomamos 3 columnas. En la primera van los datos y los llamamos $\mathbf{x_i}$. En esta columna, escribimos cada dato diferente, una sola vez. Se llaman datos no agrupados. En la segunda columna va el conteo, asignando un palito por cada dato que se nombre (|) y haciendo montones de 5 palitos (卌) para la facilidad al contar. Y en la tercera columna se registran las frecuencias absolutas simples $\mathbf{f_i}$, en la que cada una corresponde al número total de palitos que hay en la columna del conteo:

<table>
<tr><th>Calificaciones x_i</th><th>Conteo</th><th>Frecuencias absolutas simples f_i</th></tr>
<tr><td>1</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>卌</td><td>5</td></tr>
<tr><td>8</td><td>卌 |</td><td>6</td></tr>
<tr><td>9</td><td>卌</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Total**</td><td>**30**</td></tr>
</table>

c. A partir de la tabla anterior, agregamos la columna de las frecuencias relativas simples $\mathbf{f_r}$, dividiendo cada frecuencia absoluta simple $\mathbf{f_i}$ entre 30 que es el total de datos (N = 30):

<table>
<tr><th>Calificaciones x_i</th><th>Conteo</th><th>Frecuencias absolutas simples f_i</th><th>Frecuencias relativas simples $f_r = h_i$ $h_i = \frac{f_i}{N}$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>|</td><td>1</td><td>1/30 = 0.033</td></tr>
<tr><td>2</td><td>|||</td><td>3</td><td>3/30 = 0.099</td></tr>
<tr><td>3</td><td>|</td><td>1</td><td>1/30 = 0.033</td></tr>
<tr><td>4</td><td>|</td><td>1</td><td>1/30 = 0.033</td></tr>
<tr><td>5</td><td>||||</td><td>4</td><td>4/30 = 0.133</td></tr>
<tr><td>6</td><td>||||</td><td>4</td><td>4/30 = 0.133</td></tr>
<tr><td>7</td><td>卌</td><td>5</td><td>5/30 = 0.166</td></tr>
<tr><td>8</td><td>卌 |</td><td>6</td><td>6/30 = 0.200</td></tr>
<tr><td>9</td><td>卌</td><td>5</td><td>5/30 = 0.166</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Totales**</td><td>**N = 30**</td><td>**0.996 Aproximadamente 1**</td></tr>
</table>

Observa que la suma de las frecuencias absolutas simples es 30, esto es, el total de datos N, y que las frecuencias relativas suman 1 o cerca de 1 cuando se desprecian decimales de las divisiones que se hacen.

d. A la tabla anterior agregamos otra columna para las frecuencias porcentuales simples, tomando cada frecuencia relativa y multiplicándola por 100:

Calificaciones x_i	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i	Frecuencias relativas simples $f_r = h_i$ $h_i = \frac{f_i}{N}$	Frecuencias porcentuales simples $f_{\%} = h_i\,(100)$
1	|	1	1/30 = 0.033	3.3
2	|||	3	3/30 = 0.099	9.9
3	|	1	1/30 = 0.033	3.3
4	|	1	1/30 = 0.033	3.3
5	||||	4	4/30 = 0.133	13.3
6	||||	4	4/30 = 0.133	13.3
7	卌	5	5/30 = 0.166	16.6
8	卌 |	6	6/30 = 0.200	20.0
9	卌	5	5/30 = 0.166	16.6
Totales		**N = 30**	**0.996 Aproximadamente 1**	**99.6 Aproximadamente 100**

Observa que la suma de las frecuencias absolutas simples es 30 que corresponde al total de datos N, las frecuencias relativas suman 1 o cerca de 1 cuando se desprecian decimales de las divisiones que se hacen y las frecuencias porcentuales suman 100 o cerca de 100 si se han despreciado decimales.

e. Elaborar la tabla de frecuencias que contenga todas las frecuencias simples y las frecuencias acumuladas:

Calificaciones x_i	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i	Frecuencias relativas simples $f_r = h_i$ $h_i = \frac{f_i}{N}$	Frecuencias porcentuales simples $f_{\%} = h_i\,(100)$	Frecuencias absolutas acumuladas $F_i = f_1 + f_2 + \ldots$	Frecuencias relativas acumuladas $Fr = h_1 + h_2 + \ldots$	Frecuencias porcentuales acumuladas $F_{\%} = h_i(100)$
1	|	1	1/30 = 0.033	3.3	1	0.033	3.3
2	|||	3	3/30 = 0.099	9.9	1 + 3 = 4	0.132	13.2
3	|	1	1/30 = 0.033	3.3	4 + 1 = 5	0.165	16.5
4	|	1	1/30 = 0.033	3.3	5 + 1 = 6	0.198	19.8
5	||||	4	4/30 = 0.133	13.3	6 + 4 = 10	0.331	33.1
6	||||	4	4/30 = 0.133	13.3	10 + 4 = 14	0.464	46.4
7	卌	5	5/30 = 0.166	16.6	14 + 5 = 19	0.630	63.0
8	卌 |	6	6/30 = 0.200	20.0	19 + 6 = 25	0.830	83.0
9	卌	5	5/30 = 0.166	16.6	25 + 5 = 30	0.996	99.6
Totales		**N = 30**	**0.996 Aproximadamente 1**	**99.6 Aproximadamente 100**			

Observa que solo totalizamos las frecuencias simples y que el último renglón de cada frecuencia acumulada es igual al total de su correspondiente frecuencia simple. Así:

La suma total de las frecuencias absolutas simples es igual a 30 y el último valor en la columna de las frecuencias absolutas acumuladas también es 30 (sombreado de color rosado).

La suma total de las frecuencias relativas simples es de 0.996, se aproxima a 1 debido a que en cada división se dejaron algunas cifras decimales, y el último valor en la columna de las frecuencias relativas acumuladas también es 0.996, que también se aproxima a 1 (sombreado de color azul).

La suma total de las frecuencias porcentuales simples es de 99.6, se aproxima a 100 porque en cada división se dejaron algunas cifras decimales y el último valor en la columna de las frecuencias porcentuales acumuladas también es 99.6, el cual se aproxima a 100 (sombreado de color gris).

En este ejercicio se han trabajado los datos ***no agrupados***, es decir, nombrando los datos uno a uno.

Cuando son muchos datos y muy dispersos, es muy dispendioso nombrar cada uno, entonces, es necesario manejarlos en grupos que llamaremos ***intervalos o clases***.

2. El profesor Sánchez midió el peso, en kg, de 35 alumnos del colegio Simón Bolívar en Bogotá. Registró los resultados así:

49	36	38	48	40	38	36	37	42	43
39	40	41	41	39	40	39	40	42	43
45	46	39	49	36	37	44	47	36	36
39	36	45	40	43					

Luego, el profesor Sánchez organiza los resultados de la siguiente manera:

a. Ordena los datos de menor a mayor.
b. Elabora la tabla de frecuencias para datos agrupados.

Solución

a. Organización de datos:

36	36	36	36	36	36	37	37	38	38
39	39	39	39	39	40	40	40	40	40
41	41	42	42	43	43	43	44	45	45
46	47	48	49	49					

b. Al igual que en el ejercicio anterior, se construye la tabla con las mismas columnas, ubicando cada dato en el grupo o intervalo correspondiente.

Para elaborar la tabla de frecuencias de datos agrupados, se forman grupos llamados intervalos.

El tamaño o la amplitud del intervalo se calcula dividiendo el rango (dato mayor – dato menor) entre el número de grupos o intervalos que se van a formar, así:

$$\text{Amplitud} = \frac{\text{Rango}}{\#\text{ de intervalos}} = \frac{\text{Dato mayor - dato menor}}{5} =$$

$$\frac{49-36}{5} = \frac{13}{5} = 2.6, \text{ que aproximamos a } 3$$

Empezando en 36, que es el primer registro (dato menor), contamos de 3 en 3, de tal modo que en el primer intervalo quedan los valores 36, 37 y 38, pero en la tabla se escribe 36-38. En el segundo intervalo quedan 39, 40 y 41, escribiendo en la tabla 39–41, y así sucesivamente hasta terminar.

Otra manera es calculando el número de intervalos que se van a formar dividiendo el rango entre la amplitud elegida (tamaño elegido), por ejemplo, si queremos formar intervalos de tamaño 3, procedemos así:

$$\#\text{ de intervalos} = \frac{\text{Rango}}{\text{Amplitud}} = \frac{\text{Dato mayor - dato menor}}{3} =$$

$$\frac{49-36}{3} = \frac{13}{3} = 4.333, \text{ lo aproximamos a } 5$$

Entonces, la tabla de frecuencias para datos agrupados queda así:

Peso en Kg	Punto medio o de clase	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i	Frecuencias relativas simples $f_r = h_i$ $h_i = \frac{f_i}{N}$	Frecuencias porcentuales simples $f_{\%} = h_i\,(100)$	Frecuencias absolutas acumuladas $F_i = f_1 + f_2 + \ldots$	Frecuencias relativas acumuladas $F_r = h_1 + h_2 + \ldots$	Frecuencias porcentuales acumuladas $F\% = h_i(100)$
36-38	37	~~||||~~ ~~||||~~	10	0.29	29	10	0.29	29
39-41	40	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12	0.34	34	22	0.63	63
42-44	41	~~||||~~ |	6	0.17	17	28	0.80	80
45-47	46	||||	4	0.11	11	32	0.91	91
48-50	49	|||	3	0.09	09	35	1.00	100
Totales			**35**	**1.00**	**100**			

Representaciones gráficas

Ante la gran cantidad de datos que se utilizan al realizar un estudio estadístico, se hace necesario resumir toda la información en unos pocos datos.

Las gráficas estadísticas son un medio visual, utilizado para presentar los datos de la totalidad de la información, reconocer lo importante y comparar resultados entre sí.

Existen diferentes tipos de gráficas estadísticas, entre ellos:

Diagramas de barras

Para realizar la representación gráfica del diagrama de barras, primero se organizan los datos en una tabla que nos proporcione las frecuencias absolutas simples.

La construcción del diagrama de barras se realiza en el plano cartesiano: En el eje horizontal se anotan los datos (variable) y en el eje vertical, las frecuencias absolutas.

Vamos a graficar en barras las dos situaciones anteriores:

Recordemos:

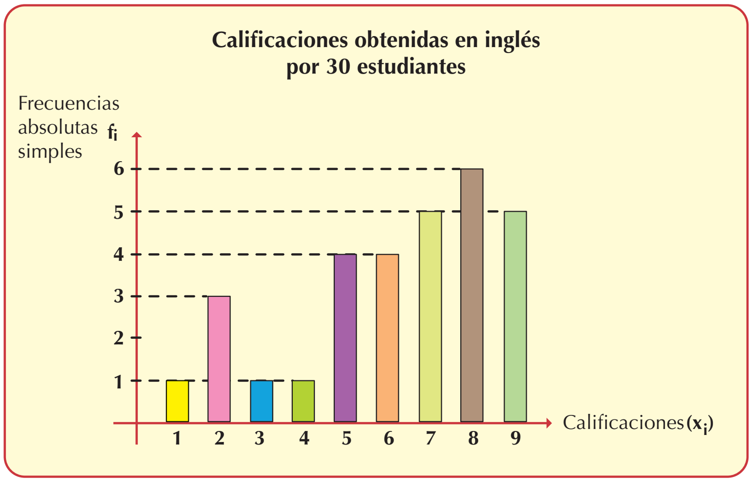
1. Treinta estudiantes de un curso presentaron un examen de inglés, con valor de 10 puntos, en el que se obtuvieron los resultados siguientes:

6 5 9 8 7 5 2 9 2 7 7 3 5
1 4 2 9 9 8 8 7 5 8 6 8 9
6 8 6 7

Calificaciones x_i	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i
1	|	1
2	|||	3
3	|	1
4	|	1
5	||||	4
6	||||	4
7	~~||||~~	5
8	~~||||~~ |	6
9	~~||||~~	5
Total		**30**

Toda gráfica estadística debe tener su título, los ejes debidamente marcados y con sus nombres.

Tomamos un plano cartesiano. En el eje horizontal (x) ubicamos la variable, en este caso nota del examen, y en el eje vertical (y) ubicamos las frecuencias absolutas simples (f_i):



Observa que en el diagrama de barras hay una separación entre cada columna. Las separaciones entre barras deben ser iguales y las barras deben ser del mismo ancho.

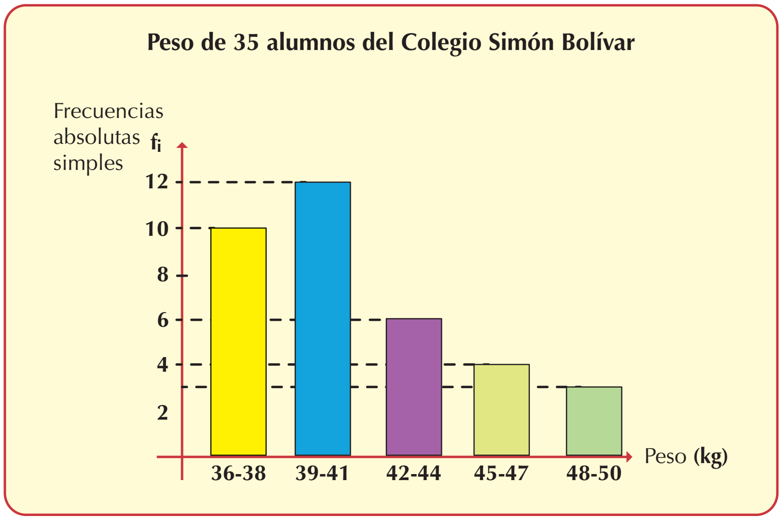
2. El profesor Sánchez midió el peso, en kg, de 35 alumnos del colegio Simón Bolívar en Bogotá, y registró los siguientes resultados:

49 36 38 48 40 38 36 37 42 43 39 40 41 41 39
40 39 40 42 43 45 46 39 49 36 37 44 47 36 36
39 36 45 40 43

Como los datos se agrupan (en intervalos), entonces, la tabla de frecuencias es:

Peso en Kg	Punto medio de clase	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i
36-38	37	𝍸 𝍸	10
39-41	40	𝍸 𝍸 ||	12
42-44	43	𝍸 |	6
45-47	46	||||	4
48-50	49	|||	3
Totales			**35**

El diagrama de barras, entonces, queda así:

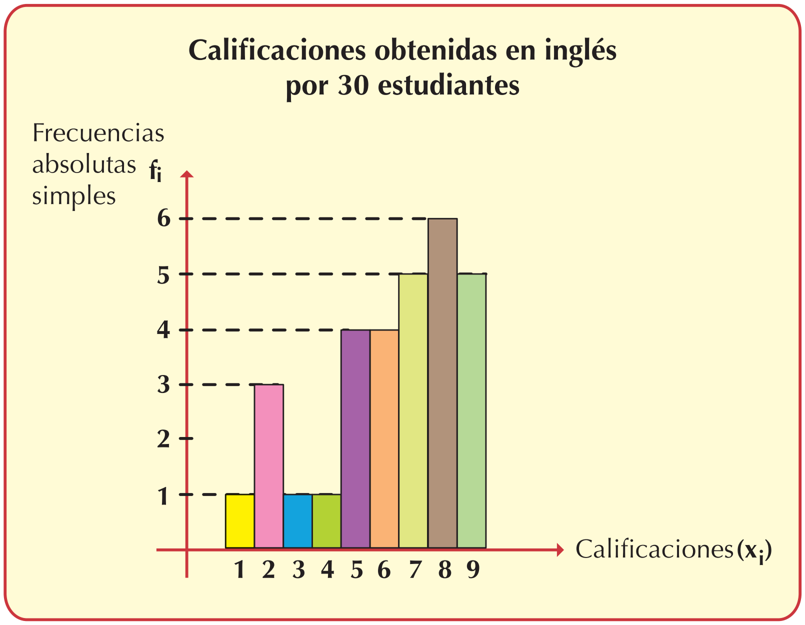


Histograma

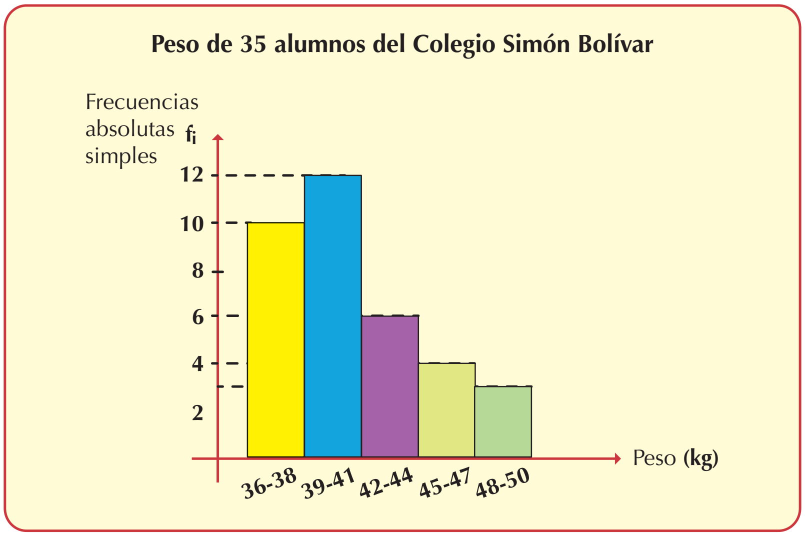
Una gráfica de barras a la que le suprimimos los espacios que las separa es llamada *histograma*.

En nuestros dos ejemplos que estamos estudiando, los histogramas quedarían así:

1. Histograma del caso de las calificaciones del examen de inglés:



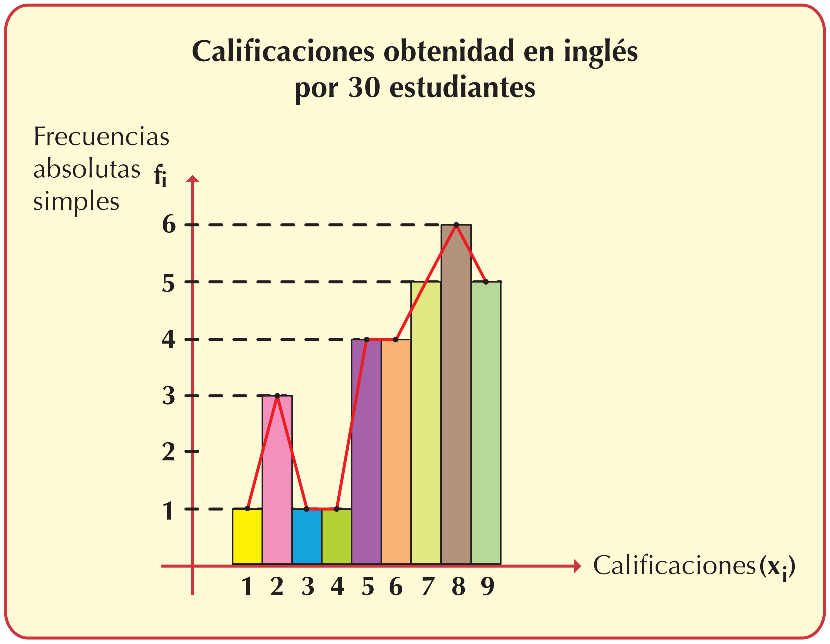
2. Histograma del caso de los pesos de los alumnos del profesor Sánchez:



Polígono de frecuencias

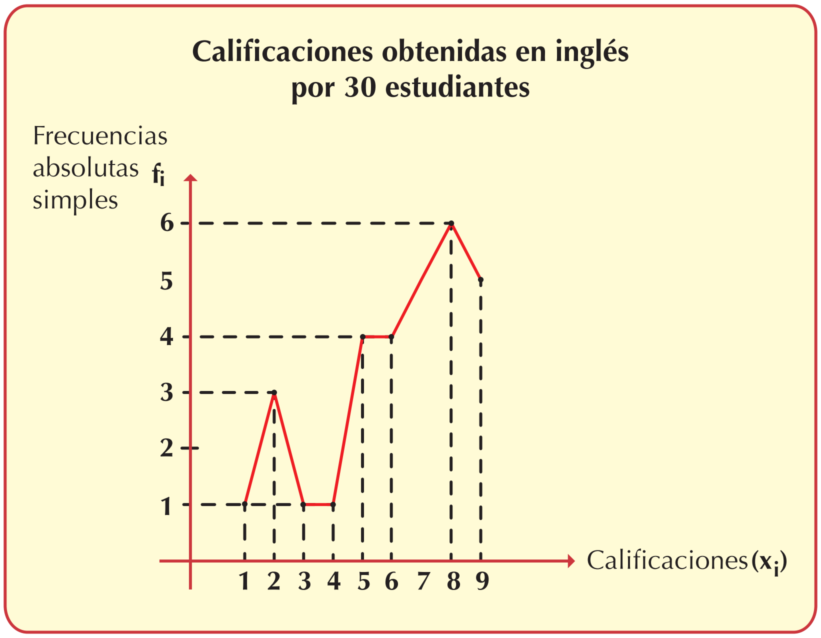
De acuerdo con en el histograma, podemos trazar el polígono de frecuencias uniendo los puntos medios del lado superior de cada barra.

1. Polígono de frecuencias del caso de las calificaciones del examen de inglés:

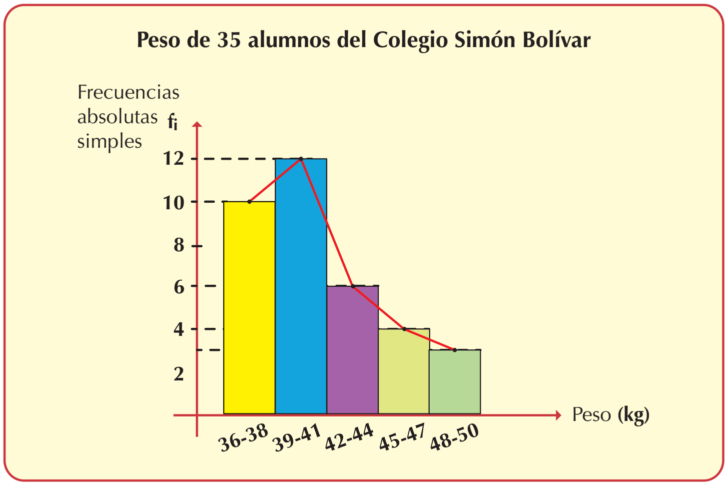


Para trazar el polígono de frecuencias, se unen, con segmentos, los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos (barras) del histograma.

El polígono de frecuencias también puede realizarse de la siguiente manera: en el eje de las **x** se ubican los datos (la variable nota del examen) y en el eje **y** se ubican las frecuencias absolutas simples. Luego se localizan los puntos y se unen:



2. Polígono de frecuencias del caso de los pesos de los alumnos del profesor Sánchez:



Si no se prefiere hacer el polígono de frecuencias de acuerdo con en el histograma, entonces puede trazarse con los puntos medios de clase. Recordemos la tabla:

Peso en Kg	Punto medio de clase	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i
36-38	37	~~||||~~ ~~||||~~	10
39-41	40	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
42-44	43	~~||||~~ |	6
45-47	46	||||	4
48-50	49	|||	3
Totales			**35**

En el eje de las **x** se ubican los puntos medios de clase y en eje **y** se ubican las frecuencias absolutas simples; después se unen los puntos, quedando así el polígono de frecuencias:

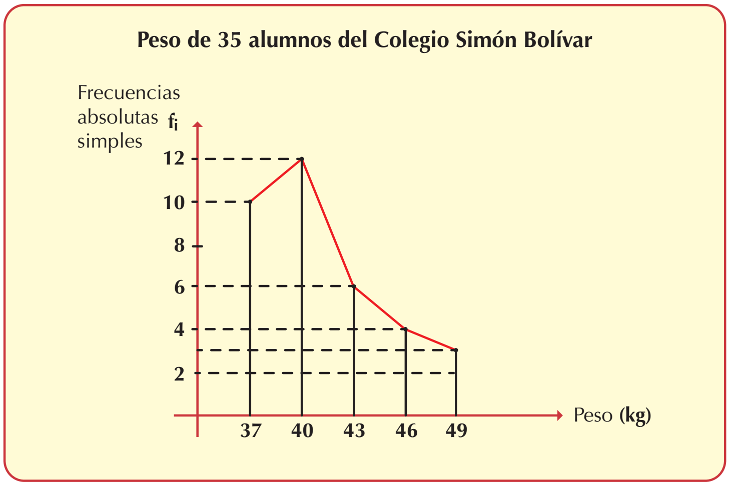


Diagrama circular

Las gráficas circulares son denominadas también gráficos de pastel o gráficas del 360%.

Se utilizan para mostrar porcentajes y proporciones.

Para realizar el diagrama, se puede utilizar un transportador de ángulos o se grafica de manera automática, por ejemplo, mediante el programa Excel.

Vamos a expresar en gráficas circulares las dos situaciones anteriores (caso de las notas del examen de inglés y caso del peso de los estudiantes del profesor Sánchez). Para ello, utilizamos las frecuencias porcentuales.

Recordemos la información de la tabla de frecuencias porcentuales simples ($f_{\%}$) de cada caso:

1. Caso de las calificaciones del examen de inglés.

   El círculo completo mide 360° y equivale al 100% de los datos, entonces, calculamos proporcionalmente el número de grados para cada calificación.

   Puede ser planteando y resolviendo una regla de tres simple directa para cada frecuencia porcentual así:

$$\begin{array}{l} 100\% \longrightarrow 360° \\ 3.3\% \longrightarrow x \end{array} \qquad x = \frac{(3.3\%)(360°)}{100\%} = \frac{1{,}188°}{100} = 11.88°\text{, aproximadamente } 12°$$

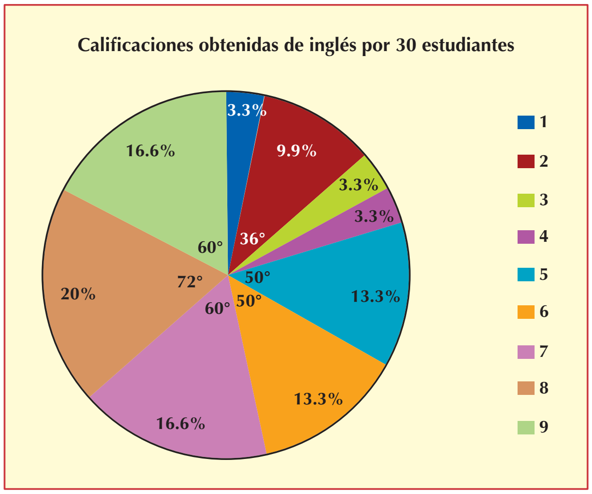
$$\begin{array}{l} 100\% \longrightarrow 360° \\ 9.9\% \longrightarrow x \end{array} \qquad x = \frac{(9.9\%)(360°)}{100\%} = \frac{3{,}654°}{100} = 35.64°\text{, aproximadamente } 36°$$

$$\begin{array}{l} 100\% \longrightarrow 360° \\ 13.3\% \longrightarrow x \end{array} \qquad x = \frac{(13.3\%)(360°)}{100\%} = \frac{4{,}788°}{100} = 47.88°\text{, aproximadamente } 48°$$

$$\begin{array}{l} 100\% \longrightarrow 360° \\ 16.6\% \longrightarrow x \end{array} \qquad x = \frac{(16.6\%)(360°)}{100\%} = \frac{5{,}976°}{100} = 59.76°\text{, aproximadamente } 60°$$

$$\begin{array}{l} 100\% \longrightarrow 360° \\ 20\% \longrightarrow x \end{array} \qquad x = \frac{(20\%)(360°)}{100\%} = \frac{7{,}200°}{100} = 72°$$

Calificaciones de inglés	Frecuencias porcentuales simples $f_{\%} = h_i(100)$
1	3.3%
2	9.9%
3	3.3%
4	3.3%
5	13.3%
6	13.3%
7	16.6%
8	20.0%
9	16.6%
Total	**99.6% Aproximadamente 100**



2. Caso del peso de 35 alumnos del profesor Sánchez.

Realizamos los cálculos para obtener los grados que corresponden a cada frecuencia porcentual:

$100\% \longrightarrow 360°$
$29\% \longrightarrow x$ $\quad x = \dfrac{(28\%)(360°)}{100\%} = \dfrac{10{,}440°}{100} = 104.40°$, aproximadamente 104°

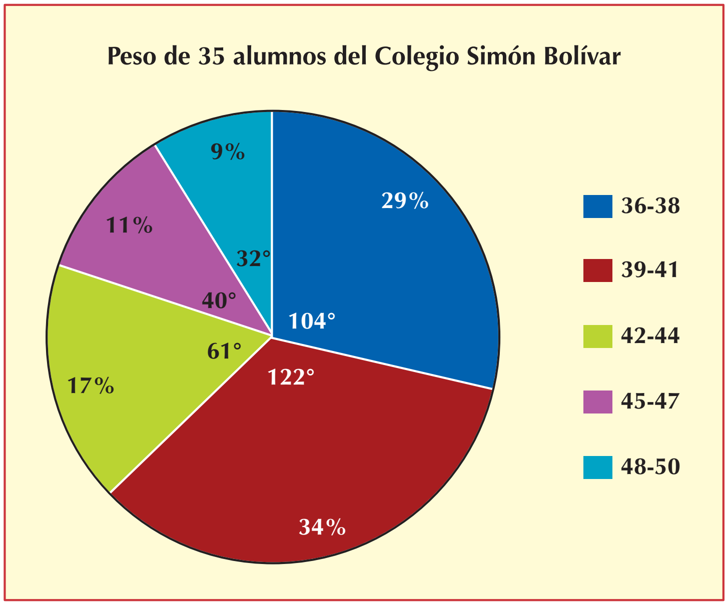
$100\% \longrightarrow 360°$
$34\% \longrightarrow x$ $\quad x = \dfrac{(34\%)(360°)}{100\%} = \dfrac{12{,}240°}{100} = 122.40°$, aproximadamente 122°

$100\% \longrightarrow 360°$
$17\% \longrightarrow x$ $\quad x = \dfrac{(17\%)(360°)}{100\%} = \dfrac{6{,}120°}{100} = 61.20°$, aproximadamente 61°

$100\% \longrightarrow 360°$
$11\% \longrightarrow x$ $\quad x = \dfrac{(11\%)(360°)}{100\%} = \dfrac{3{,}960°}{100} = 39.60°$, aproximadamente 40°

$100\% \longrightarrow 360°$
$9\% \longrightarrow x$ $\quad x = \dfrac{(9\%)(360°)}{100\%} = \dfrac{3{,}240°}{100} = 32.40°$, aproximadamente 32°

Peso en Kg	Frecuencias porcentuales simples $f_{\%} = h^i(100)$
36-38	29%
39-41	34%
42-44	17%
45-47	11%
48-50	9%
Totales	**100%**



Aplicación

Copia los ejercicios siguientes en tu cuaderno, resuélvelos y compara tus respuestas con algunos de tus compañeros.

1. Un grupo de 40 mujeres dijo su talla de vestido, en una encuesta que se realizó.

Los datos anotados son los siguientes:

34 42 36 28 34 30 32 40 32 34 32 28 32 40 34 30 28 32 40 42
32 38 34 36 32 34 38 43 38 36 30 43 38 36 32 28 36 34 30 34

a. Ordénalos de menor a mayor.
b. Elabora la tabla de frecuencias simples y acumuladas.
c. Construye el diagrama de barras que muestre la situación.
d. Dibuja el histograma correspondiente.
e. Representa el polígono de frecuencias.

2. Se tabularon los datos referentes a la estatura en centímetros de los miembros de un equipo de fútbol, integrado por 25 jugadores (titulares y reservas), así:

Estaturas en centímetros	Conteo	Frecuencias absolutas simples
140	ǀǀ	2
141	ǀ	1
146	ǀǀ	2
147	ǀǀ	2
148	ǀǀǀǀ	4
149	ǀǀ	2
150	ǀ	1
152	𝍸	5
155	ǀǀ	2
157	ǀǀ	1
160	ǀǀǀ	3
Total		**25**

a. Ordénalos de mayor a menor.
b. Construye el polígono de frecuencias que muestre la situación.

3. El entrenador de un equipo de baloncesto registró el número de puntos que cada uno de sus doce jugadores (titulares y reservas) anotó en total durante la temporada que recientemente terminó.

97 85 62 64 85 64 93 64 72 64 72 72

a. Ordénalos de menor a mayor.
b. Elabora la tabla de frecuencias simples y acumuladas.
c. Construye el histograma que muestre la situación.
d. Dibuja la gráfica circular correspondiente.

En tu cuaderno, completa las tablas de los ejercicios 4 al 8, que reúnen las informaciones sobre las ventas de un producto, realizadas por una compañía durante los 5 días hábiles de una semana.

4.

Puntaje de ventas	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i
47	𝍸 ǀ	
53	ǀǀǀǀ	
61	ǀ	
82	𝍸 𝍸	
97	𝍸 ǀǀ	
Total		

5.

Puntaje de ventas	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i	Frecuencias relativas simples $f_r = h_i$ $h_i = \frac{f_i}{N}$
47	𝍸 ǀ		
53	ǀǀǀǀ		
61	ǀ		
82	𝍸 𝍸		
97	𝍸 ǀǀ		
Total			

6.

Puntaje de ventas	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i	Frecuencias relativas simples $f_r = h_i$ $h_i = \frac{f_i}{N}$	Frecuencias porcentuales simples $f_{\%} = h_i(100)$
47	𝍸 𝍷			
53	𝍷𝍷𝍷𝍷			
61	𝍷			
82	𝍸 𝍸			
97	𝍸 𝍷𝍷			
Total				

7.

Puntaje de ventas	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i	Frecuencias relativas simples $f_r = h_i$ $h_i = \frac{f_i}{N}$	Frecuencias porcentuales simples $f_{\%} = h_i(100)$	Frecuencias absolutas acumuladas $F_i = f_1 + f_2 + \ldots$
47	𝍸 𝍷				
53	𝍷𝍷𝍷𝍷				
61	𝍷				
82	𝍸 𝍸				
97	𝍸 𝍷𝍷				
Total					

8.

Puntaje de ventas	Conteo	Frecuencias absolutas simples f_i	Frecuencias relativas simples $f_r = h_i$ $h_i = \frac{f_i}{N}$	Frecuencias porcentuales simples $f_{\%} = h_i(100)$	Frecuencias absolutas acumuladas $F_i = f_1 + f_2 + \ldots$	Frecuencias relativas acumuladas $F_r = h_1 + h_2 + \ldots$	Frecuencias porcentuales acumuladas $F_{\%} = h_i(100)$
47	𝍸 𝍷						
53	𝍷𝍷𝍷𝍷						
61	𝍷						
82	𝍸 𝍸						
97	𝍸 𝍷𝍷						
Total							

9. Elabora un polígono de frecuencias, que represente las frecuencias absolutas registradas en la siguiente tabla, en la que se relacionan las visitas a sitios importantes de una ciudad de Colombia:

Visitas	Conteo	Frecuencia absoluta simple
Museos	||||	4
Parques	||	2
Empresas	|||	3
Zoológicos	|	1
Bibliotecas	||	2
Oficinas públicas	~~||||~~	5
	Total	**17**

10. Un médico familiar de una institución de seguridad social atendió durante una semana a cierto número de pacientes con síntomas de diversos padecimientos, los cuales se enumeraron en la tabla que aparece a continuación:

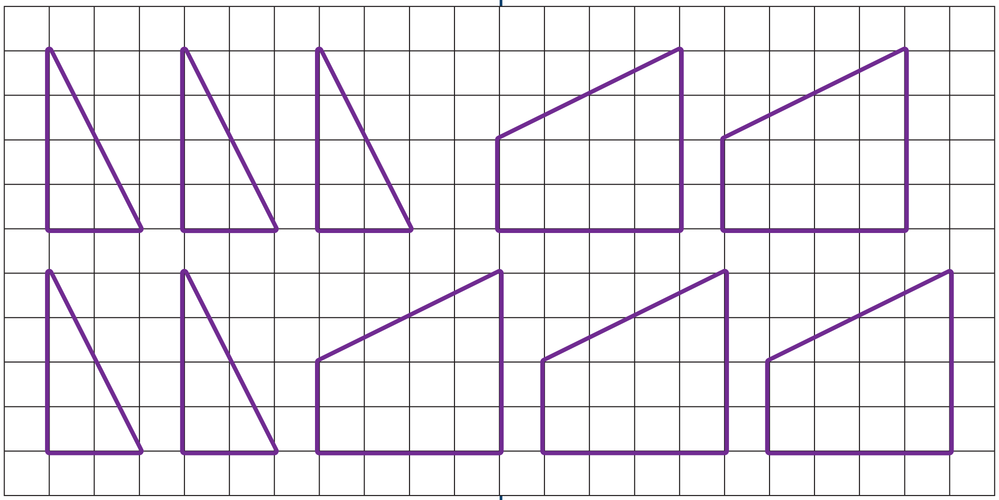
Motivo de la consulta	Conteo	Frecuencia absoluta simple
Gripe	~~||||~~ ||||	9
Luxación	~~||||~~ |	6
Heridas	||||	4
Quemaduras	~~||||~~	5
Hepatitis	|||	3
Diabetes	~~||||~~ |||	8
Afección renal	~~||||~~ |	6
Gastritis	~~||||~~ ||||	9
	Total	**50**

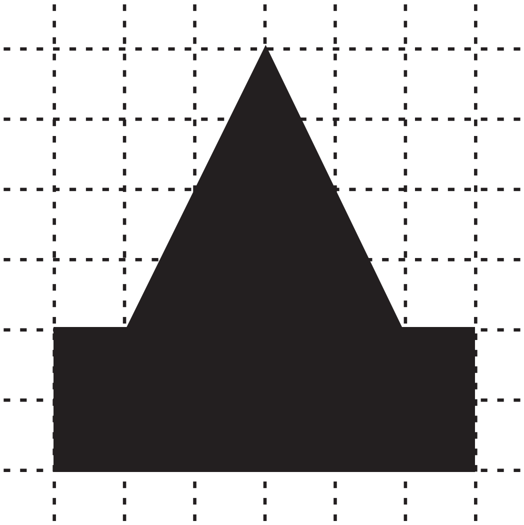
Entendemos por…

Variable estadística aquella característica o cualidad que poseen los elementos o individuos de una población. La variable puede ser: **cualitativa**, cuando indica una cualidad que caracteriza el objeto, por ejemplo, color de ojos, estado civil, gusto musical, etc., o **cuantitativa**, cuando se expresa mediante un número. La variable **cuantitativa** puede ser: **discreta**, cuando es un número entero, pues no admite valores intermedios entre dos valores específicos, como por ejemplo, el número de hermanos de una persona, o **continua**, cuando puede tomar valores comprendidos entre dos números, esto es, tiene decimales, por ejemplo, la estatura de las personas que se mide en metros con centímetros.

Diversión matemática

Calca y recorta las figuras, y después forma el polígono dado:





Día a día

Utilidad de las gráficas estadísticas

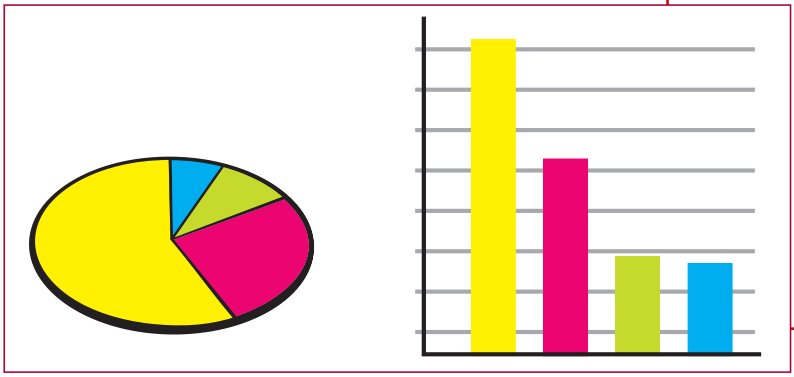
El propósito de un gráfico es ayudar a la comprensión y comunicación de la evidencia aportada por los datos, respecto a una hipótesis en estudio. Una gráfica de carácter científico debe servir para representar la "realidad".

La llegada de los ordenadores y de programas para la generación de gráficos y presentaciones ha puesto en manos del usuario común una herramienta poderosa

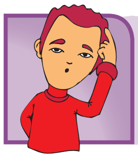
Las gráficas son una herramienta de presentación de datos; es un medio para comunicar.

La calidad de una gráfica estadística consiste en comunicar ideas complejas con precisión, claridad y eficiencia, de tal manera que:

- Induzca a pensar en el contenido más que en la apariencia
- No distorsione la información proporcionada por los datos
- Presente mucha información (números) en poco espacio
- Favorezca la comparación de diferentes grupos de datos



Tema 2.
Medidas estadísticas



Indagación

Pepe realizó en una semana varios trabajos por los que recibió diferentes cantidades de dinero.

Por el trabajo del día lunes recibió $20,000, por el del día martes recibió $30,000, por el del día miércoles recibió $25,000, por el del día jueves recibió $28,000, por el del día viernes recibió $32,000 y por el del día sábado recibió $30,000.

Si a Pepe le hubieran pagado igual cantidad de dinero por cada día de trabajo, ¿cuánto tendrían que haberle pagado cada día de la semana que trabajó para que el total de dinero recibido sea el mismo?

Reúnete con algún compañero y ayúdale a Pepe a solucionar ese interrogante.

Conceptualización

En estadística se utilizan diferentes medidas. Unas medidas de las más utilizadas son las medidas de centralización que indican valores con respecto a los datos que parecen agruparse alrededor de un valor determinado.

Analicemos los dos ejercicios estudiados anteriormente:

1. El caso de las calificaciones del examen de inglés. Recordemos que treinta estudiantes de un curso presentaron un examen de inglés, con valor de 10 puntos, quienes obtuvieron los resultados siguientes:

6	5	9	8	7	5	2	9	2	7	7	3	5	1	4
2	9	9	8	8	7	5	8	6	8	9	6	8	6	7

Observa que el dato que más se repite es el 8. A este valor se le denomina **MODA**: Mo = 8.

Al organizar los datos ya sea de menor a mayor o de mayor a menor, buscamos el dato o valor que se encuentra exactamente en la mitad. Veamos:

1 2 2 2 3 4 5 5 5 5 6 6 6 6 **7 | 7** 7 7 7 8 8 8 8 8 8 9 9 9 9 9

Como son 30 elementos, en la mitad del conjunto ordenado quedan dos elementos que promediamos, es decir, sumamos y dividimos entre dos:

$$Me = \frac{7+7}{2} = \frac{14}{2} = 7.$$

Si el número de datos fuera impar, quedaría un dato exactamente en el centro.

A ese dato se le llama **MEDIANA** y se simboliza **Me**.

Ahora, si sumamos todos los datos y los dividimos entre 30 que es el total de calificaciones del examen de inglés, tenemos:

$$\frac{1+2+2+2+3+4+5+5+5+5+6+6+6+6+7+7+7+7+7+8+8+8+8+8+8+9+9+9+9+9}{30}$$

$= \frac{186}{30} = 6.2$, se aproxima a 6.

A este valor lo llamamos **MEDIA** o **MEDIA ARITMÉTICA** o **PROMEDIO** y lo simbolizamos con $\bar{x}$.

2. El profesor Sánchez midió el peso, en kg, de 35 alumnos del colegio Simón Bolívar.
   Registró los resultados siguientes:

49 36 38 48 40 38 36 37 42 43 39 40 41 41 39 40 39 40 42 43
45 46 39 49 36 37 44 47 36 36 39 36 45 40 43

Observemos que hay: 6 veces el número 36,
2 veces el número 37,
2 veces el número 38,
5 veces el número 39,
5 veces el número 40,
2 veces el número 41,
2 veces el número 42,
3 veces el número 43,
1 veces el número 44,
2 veces el número 45,
1 veces el número 46,
1 veces el número 47,
1 veces el número 48,
2 veces el número 49,

El número que más se repite es 36, esa es la *moda*: Mo = 36.

Como son 35 datos (número impar), la Me es el dato que ocupa el centro del conjunto ordenado, es decir, el 40 es la mediana: Me = 40:

$$\underbrace{36\ 36\ 36\ 36\ 36\ 36\ 37\ 37\ 38\ 38\ 39\ 39\ 39\ 39\ 40}_{17\text{ datos}}\quad 40\ \overset{\text{Me}}{\boxed{\mathbf{40}}}\quad \underbrace{40\ 40\ 41\ 41\ 42\ 42\ 43\ 43\ 43\ 44\ 45\ 45\ 46\ 47\ 48\ 49\ 49}_{17\text{ datos}}$$

Si sumamos todos los datos y dividimos entre 35 (total de alumnos), obtenemos la media aritmética o promedio o media ($\bar{x}$).

$$\frac{36+36+36+36+36+36+37+37+38+38+39+39+39+39+39+40+40+40+40+40+41+41+42+42+43+43+43+44+45\text{-}45+46+47+48+49+49}{35}$$

$= \frac{1{,}429}{35} = 40.8$, se aproxima a 41. Decimos entonces que la $\bar{x} = 41$.

Resumimos el significado de las medidas de centralización o medidas de tendencia central así:

La MODA (Mo) de un conjunto de datos es el valor que más se repite.
En un conjunto pueden existir 1, 2 o más modas o incluso no haber moda.
La MEDIANA (Me) es el dato que se encuentra en el centro de un conjunto ordenado.
La MEDIA ARITMÉTICA, llamada también PROMEDIO o simplemente MEDIA, es el valor que resulta de sumar todos los valores y dividirlos entre el número total de ellos.

Aplicación

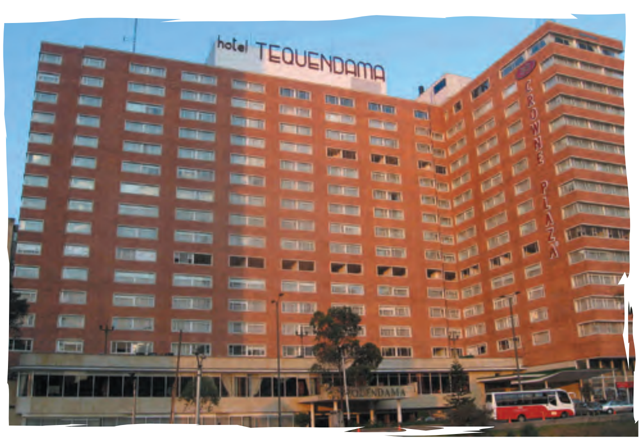
Los hoteles están clasificados por estrellas de 1 a 5 de acuerdo con la ubicación, atención servicios y lujos que proporcione al turista. En una ciudad se hizo la relación de hoteles según la siguiente lista de estrellas:

3, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3,

3, 3, 2, 1, 3, 3, 3, 2, 3, 2,

2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3,

2, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 1.



1. Ordena el conjunto de estrellas y encuentra la mediana (Me).
2. Identifica la moda o modas que hay en la distribución de estrellas.
3. Calcula la media aritmética de la distribución dada.
4. construye el polígono de frecuencias para datos no agrupados y señala en él la Mo, la Me y la $\bar{x}$.

En una fábrica de llantas hay 25 trabajadores cuyas edades se relacionan a continuación:

28, 24, 29, 37, 25, 27, 35, 30,
35, 30, 27, 38, 24, 29, 37, 25,
35, 30, 25, 32, 28, 24, 29, 25, 32.

5. Elabora una tabla de frecuencias para datos agrupados.
   La tabla debe tener columnas: intervalos de tamaño 3 (intervalos de 3 en 3, empezando en 24; ejemplo 24-26 es el primer intervalo de tamaño 3), conteo y frecuencias absolutas simples.
6. Encuentra la Mo, la Me y la $\bar{x}$ de las edades de los trabajadores de la fábrica de llantas.
7. Construye el histograma de frecuencias y en él señala:

   a. El intervalo de mayor frecuencia absoluta
   b. El intervalo que contiene la Mo
   c. El intervalo que contiene la Me
   d. El intervalo que contiene la $\bar{x}$

La tabla siguiente muestra la distribución de tamaños, en centímetros, de una población de tilapias.

Tamaño, en centímetros, de una población de tilapias	
x_i	f_i
25 cm	14
30 cm	29
35 cm	46
40 cm	31

8. Calcula la media o promedio.
9. Identifica la moda.
10. Busca la mediana o valor central.

Entendemos por…

Distribución de frecuencias a la ordenación de los datos, en forma de tabla, asignando a cada uno de ellos su frecuencia correspondiente.

Diversión matemática

Juego del promedio

Daniel tiene unos datos con los que quiere jugar.
El dinero de su hermano es $5,000 más de lo que él tiene, pero entre los dos tienen $25,000.
Su prima, además, quiere aportar $11,000 y saber quién ganaría y quién perdería al promediar, esto es, repartir por partes iguales.
¡Ayúdalos y diviértete!

Día a día

Diez consejos para estar a la moda

Para las mujeres, estar a la moda no es tan simple como parece.
La moda va y viene y muchas veces no nos percatamos de ello.
Por ello nos ofrecen 10 consejos o tips para que estén siempre a la moda, sin importar cuál sea la tendencia:

1. Los tonos más oscuros hacen ver a la mujer más estilizada.
2. Si se quiere usar un color claro, se debe usar ese mismo color de la cabeza a los pies para una figura más estilizada.
3. Las botas son geniales para minimizar las caderas y la cintura y para darle a los hombros una apariencia más sexy.
4. Los colores claros realzan la atención en algunas áreas, por eso se deben usar solo en las zonas que se desea resaltar.
5. Los zapatos de tacón hacen ver las piernas más bonitas.
6. Un bolso pequeño llevado sobre el hombro y por debajo del brazo da un toque muy elegante.
7. Se debe combinar el color del bolso con los zapatos.
8. Una blusa con cuello da al rostro una forma ovalada.
9. No se debe dejar que la ropa interior se marque en el jean o pantalón; no es elegante.
10. Si las prendas separadas no combinan exactamente, hay que variar un poco de tono y se verá mejor.

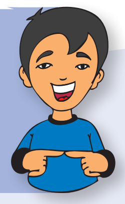
Mujer, con estos 10 consejos top, tu estilo nunca pasará de moda.

Tomado de http://www.mujeresypunto.com/10-consejos-para-estar-a-la-moda.html

Este capítulo fue clave porque

- Aprendí a organizar los datos de una observación o estudio estadístico.
- Sé construir las tablas de frecuencias de un conjunto de datos.
- Identifico los diferentes tipos de diagramas o representaciones gráficas.
- Puedo obtener conclusiones de informaciones presentadas gráficamente.
- Analizo el comportamiento de los datos ubicando las medidas de centralización.

Conectémonos con La Contabilidad



La contabilidad y las finanzas han adquirido importancia gracias a las exigencias científicas y tecnológicas que impulsan el desarrollo de la gestión económica y financiera de un país.

Debido a que la contabilidad trabaja directamente sobre los cambios sociales, políticos y económicos de una sociedad, hace que la contabilidad y las finanzas se mantengan siempre vigentes.

En tal sentido, el profesional de contabilidad y finanzas tiene una visión empresarial y humanística capaz de diseñar y gestionar sistemas de información que ayudan al desarrollo empresarial y a la toma de decisiones.

Así mismo está en la capacidad de diseñar e innovar procesos para gestionar con buena fe la información en distintos tipos de organizaciones y mantener el honor, la dignidad y la capacidad profesional, la vocación de servicio y el espíritu emprendedor, contribuyendo así a la mejora de la calidad de vida de las personas y la sociedad.

En particular, toda persona debe llevar un orden en sus finanzas: programar sus compras y pagos tanto en su vida personal como en sus proyectos productivos y en la administración de sus bienes.

Combinatoria y probabilidad

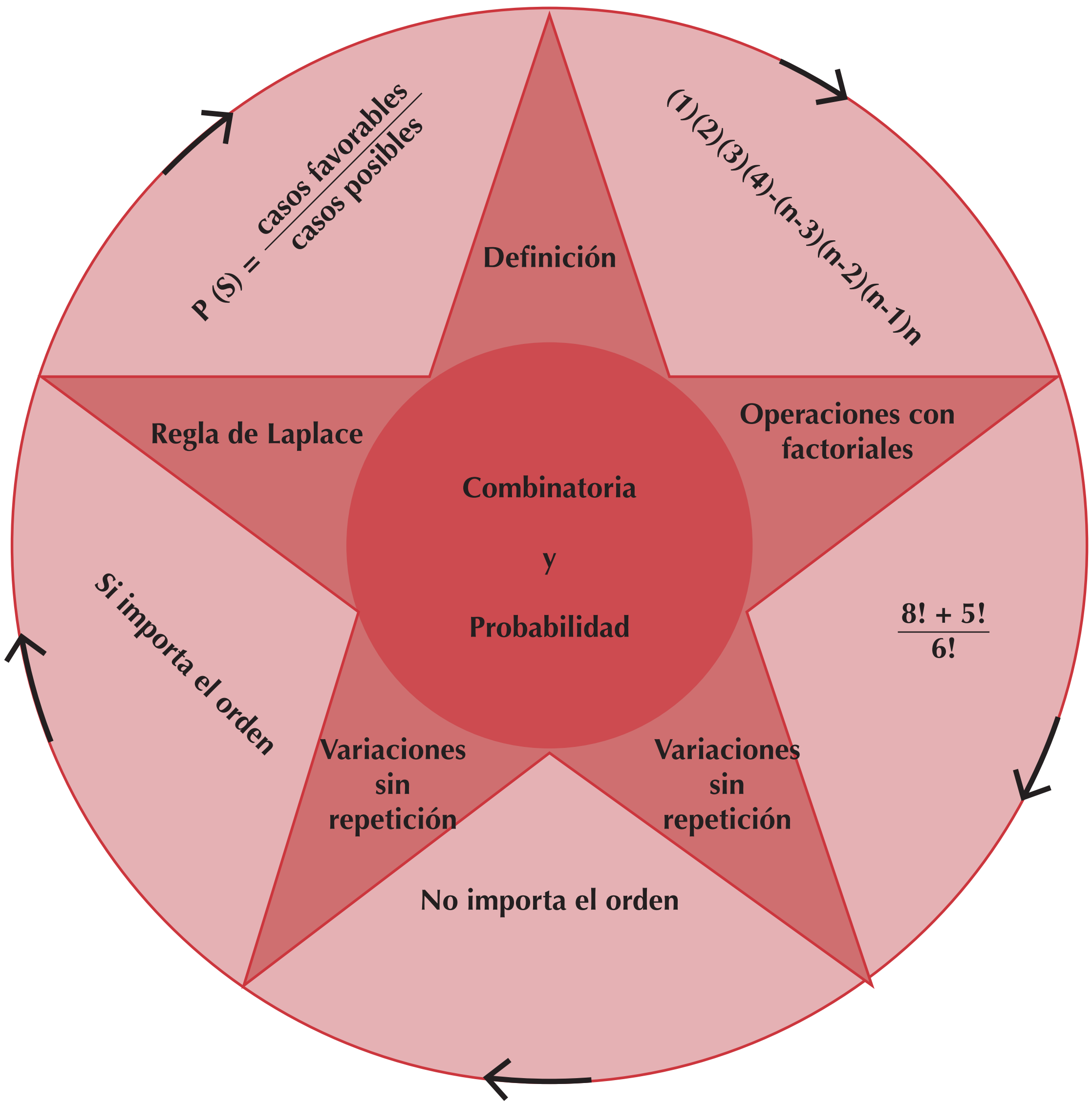
En el mundo en que vivimos existen muchas situaciones que implican incertidumbre. Estas situaciones van desde los juegos de azar hasta problemas que se presentan en otros campos de gran importancia como las ciencias físicas, las ciencias sociales, la industria y los seguros.

La probabilidad se encarga de ese tipo de situaciones, es decir, estudia fenómenos puramente azarosos o aleatorios. La palabra probabilidad indica la posibilidad de que ocurra un evento o de que se obtenga cierto resultado.

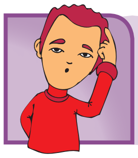
Para calcular probabilidades, primero es necesario estudiar un poco de variación.

En este capítulo se examinará los posibles resultados de una experiencia aleatoria.

Además, se realizarán experimentos que serán útiles para comparar los resultados esperados con los resultados reales.



Tema 1. Los factoriales



Indagación

¿Te gusta la ensalada de frutas?

Describe en tu cuaderno cómo es la ensalada de frutas que te gustaría comer ahora.

En un recipiente se prepara una ensalada de frutas con uvas, manzanas y bananos.

¿Será igual la ensalada si se depositan primero las uvas o primero los bananos o en cualquier otro orden?

Analízalo con algunos compañeros.

Conceptualización

Hay ocasiones de nuestra vida en las que podemos utilizar elementos sin importar el orden en que se tomen y otras en las que el orden sí es importante.

Por ejemplo, cuando preparamos una ensalada de frutas, no importa el orden en que las pongamos en el recipiente, pues nos queda la misma ensalada.

Es decir, el orden de las frutas no importa.

Pero si tenemos un candado de clave y esta es, por ejemplo, 375, no podemos cambiar el orden de las cifras porque el candado no abriría. Aquí el orden sí importa.

El caso de la ensalada de frutas es un caso de **combinación**, mientras que el caso de la clave del candado es un caso de **permutación**.

Recordemos que la combinatoria es la parte de las matemáticas que se ocupa de la solución de problemas en los que hay elección y disposición de los elementos de un conjunto, de acuerdo con unas reglas.

Es decir, en la combinatoria tienen sentido preguntas como:

¿Qué posibilidades tengo de ganarme el baloto que compré hoy?

¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en 5 asientos alrededor de una mesa?

¿Cuántos vestidos puedo formar con dos pantalones y tres camisas?

El objetivo principal de la combinatoria es calcular cuántos tipos de muestras de un determinado tamaño se pueden extraer de cierta población.

Para resolver situaciones de combinatoria y permutación, es necesario tener claro el concepto de número factorial o factorial de un número. Veamos:

Queremos saber cuántos números de dos cifras se pueden formar con los números 9 y 7. Podemos formar rápidamente los números 99, 97, 79 y 77.

Si quisiéramos saber de cuántas formas se pueden sentar 20 personas en un bus o una flota de 30 asientos, no tendríamos una respuesta rápida y si nos pusiésemos a contar, incluso, acabaríamos por desistir. Sería interesante, entonces, conocer una serie de técnicas que nos faciliten el cálculo y nos puedan ayudar a responder ese tipo de preguntas como las anteriores.

Factorial de un número

El número factorial o factorial de un número natural **n**, simbolizado **n!**, representa el número de formas distintas de ordenar **n** objetos distintos.

Por definición **0! = 1**.

¿Cuántos números diferentes pueden formarse con un dígito dado?

Ejemplo: Con el número 5, solo puede escribirse 5.

Con un dígito, puede formarse 1 número de una cifra. Por tanto:

1! = 1.

¿Cuántos números diferentes de dos cifras pueden formarse con dos dígitos dados, sin repetir dígito?

Ejemplo: Sin repetir dígito, con los números 7 y 9, pueden escribirse **2** números: el 79 y el 97.

Con dos dígitos, pueden formarse **2** números de dos cifras, sin repetir dígito. Entonces:

2! = 1 x 2 = 2.

¿Cuántos números diferentes de tres cifras pueden formarse con tres dígitos dados, sin repetir dígito?

Ejemplo: Sin repetir dígito, formemos números de tres cifras con los dígitos 3, 5 y 8:

$$3 \begin{cases} 5 \rightarrow 8 \leftrightarrow \mathbf{358} \\ 8 \rightarrow 5 \leftrightarrow \mathbf{385} \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} 3 \rightarrow 8 \leftrightarrow \mathbf{538} \\ 8 \rightarrow 3 \leftrightarrow \mathbf{583} \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 3 \rightarrow 5 \leftrightarrow \mathbf{835} \\ 5 \rightarrow 3 \leftrightarrow \mathbf{853} \end{cases}$$

Por tanto: **3! = 1 x 2 x 3 = 6**.

Veamos el cálculo del factorial de algunos números:

Número N.º	Factorial de n (n!)	Operación	Resultado
0	**0!**		1
1	**1!**		1
2	**2!**	1 x 2	2
3	**3!**	1 x 2 x 3	6
4	**4!**	1 x 2 x 3 x 4	24
5	**5!**	1 x 2 x 3 x 4 x 5	120
6	**6!**	1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6	720
7	**7!**	1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7	5,040
8	**8!**	1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8	40,320
9	**9!**	1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9	362,880
10	**10!**	1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9 x 10	3,628,800
15	**15!**	1 x 2 x 3 x 4 x 5 x 6 x 7 x 8 x 9 x 10 x 11 x 12 x 13 x 14 x 15	1,307,674,368,000

En general: **n! = 1** x **2** x **3** x **4** x **5** x… x **(n-2)** x **(n-1)** x **(n)**.

El factorial de un número n es el producto de todos los factores decrecientes a partir de él hasta llegar a la unidad.
El factorial de un número se escribe n!, siendo n cualquier número entero positivo.

Con los factoriales podemos realizar operaciones. Observa detenidamente cada paso:

1. 3! x 2!
   Desarrollamos el factorial de cada sumando:
   3! + 2! = (1 x 2 x 3)(1 x 2).
   Resolvemos cada paréntesis:
   = (1 x 2 x 3)(1 x 2)
   = 6 x 2 = 12.
2. Detalla paso a paso:
   (4!)(3!) = (1 x 2 x 3 x 4)(1 x 2 x 3)
   = 24 x 6
   = 144.
3. Presta atención a las simplificaciones que realizamos en la solución siguiente:

$$(3!)\left(\frac{2!}{5!}\right) = \cancel{(1 \text{ x } 2 \text{ x } 3)}\left(\frac{1 \text{ x } 2}{\cancel{1 \text{ x } 2 \text{ x } 3} \text{ x } 4 \text{ x } 5}\right)$$

$$= \frac{1 \text{ x } 2}{4 \text{ x } 5}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{20}} = \frac{1}{10}$$

Explica en tu cuaderno el proceso realizado en cada paso del ejercicio anterior y coméntalo con algunos de tus compañeros.

Variaciones

Analicemos los casos siguientes:

1. Una baraja española consta de 40 cartas. ¿De cuántas formas pueden elegirse 2 cartas, extraídas sucesivamente y sin repetir?
   La primera se puede elegir de 40 formas.
   La segunda, al no poder repetir, solo se puede elegir de 39 maneras.
   Por tanto, en total hay (40)(39) = 1,560 posibilidades.

   Simbólicamente:
   Llamemos **V** al número de posibilidades, entonces, **V = n(n-1)**.
   Para este caso de las cartas de la baraja, tenemos: **V = 40(39) = 1,560**.

2. En una competencia, seis ciclistas se disputan la llegada a la meta. ¿De cuántas maneras se pueden llegar a los tres primeros puestos?
   Como no hay repetición, es decir, hay un ciclista para el primer puesto, otro ciclista diferente para el segundo puesto y otro diferente para el tercer puesto, entonces:

- Para el primer puesto hay 6 posibilidades.
- Para el segundo, solo 5 posibilidades.
- Para el tercero, quedan 4 opciones.

Por tanto, llamando **V** al número de posibilidades, tenemos:

$$\mathbf{V = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)}$$
$$\mathbf{V = 6(5)(4)}$$
$$\mathbf{V = 120.}$$

En total hay 120 maneras como 6 ciclistas pueden ocupar los tres primeros puestos en la competencia.

Por consiguiente, si de una población de tamaño **n**, queremos extraer una muestra ordenada y sin repetición de tamaño determinado, razonamos así:

- El primer elemento lo podemos elegir entre **n** elementos.
- El segundo, al no poder repetir, podemos elegirlo entre **n–1** elementos.
- El tercero, al no poder repetir, podemos elegirlo entre **n–2** elementos.
- El cuarto, al no poder repetir, podemos elegirlo entre **n–3** elementos.
- Y así sucesivamente hasta el tamaño determinado.

Un arreglo ordenado y sin repetición se denomina variación ordinaria o variación sin repetición.

Ahora analicemos el primer ejemplo, pero con repetición:

Una baraja española consta de 40 cartas, ¿de cuántas formas pueden elegirse 2 cartas, no necesariamente distintas?

La primera se puede elegir de 40 formas.

Como se puede repetir, significa que la primera carta sacada se ve y se devuelve al montón, de tal modo que la segunda carta se puede elegir de 40 maneras también.

En total hay (40)(40) = 1,600 formas.

Simbólicamente:

Llamemos **V´** al número de posibilidades con repetición, entonces **V´ = n(n)**.

Para este caso de las cartas de la baraja tenemos:

V´ = 40(40) = 1,600.

Un arreglo ordenado y con repetición se denomina variación con repetición.

Aplicación

1. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5?
2. En una carrera de 100 metros participan 8 corredores. ¿De cuántas formas diferentes se podrían repartir las medallas de oro, plata y bronce?
3. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4 y 5?
4. Un vendedor quiere visitar 5 ciudades que marca con las letras A, B, C, D y E.
   Si no quiere repetir ciudades, ¿cuántas rutas distintas puede elaborar si puede empezar y acabar en cualquiera de las ciudades?
5. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir tres premios distintos entre Luis, Teresa, Paola, Jorge y Marta?
6. Con las letras de la palabra libro, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?

Realiza las operaciones de los ejercicios 7 a 10. Siempre que sea posible simplifica.

7. $5! - 3! =$

8. $(2!)(2!)(2!) =$

9. $6! + 3! - 5! =$

10. $\frac{2!}{4!} - \frac{4!}{3!} =$

Entendemos por…

Arreglo a los conjuntos formados por los elementos de un conjunto dado, que se
diferencian en al menos un elemento o en el orden en que se tomen los elementos.
Por ejemplo, dado el conjunto {a, b, c, d} podemos tener los arreglos {a, b, c, d}, {b, c, d, a}, {c, a, b, d}, {b, a, d, c}, entre otros.

Diversión matemática

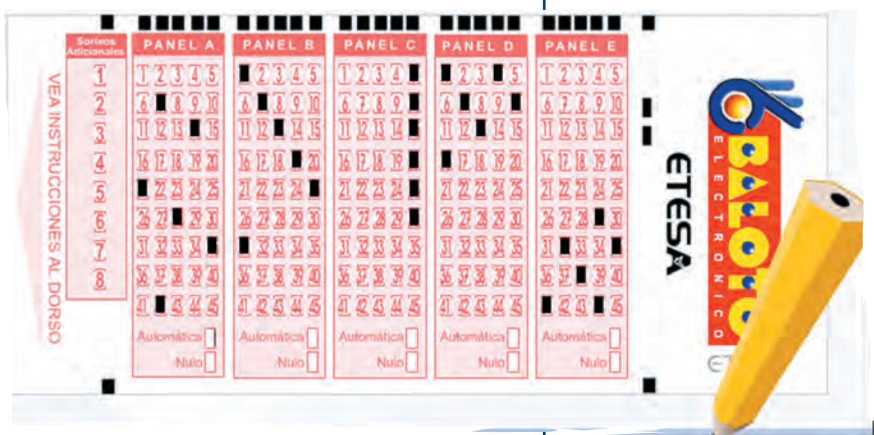
El baloto colombiano

El juego del baloto es un juego de azar que se realiza en Colombia los días miércoles y sábado. Consiste en escoger 6 números comprendidos entre 1 y 45.

Si se acierta, entonces, se gana el acumulado que generalmente es de varios miles de millones de pesos.

Preguntémonos cuál es la probabilidad de ganarse el baloto haciendo una apuesta.

Entabla un diálogo con tus compañeros, para explicar por qué la probabilidad de ganarse el baloto es de 1 entre 8,145,060 diferentes combinaciones posibles.



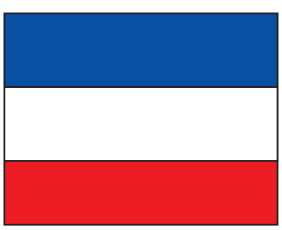
Día a día

Actualmente, existen tres países que tienen sus banderas muy parecidas, pero que en realidad son diferentes.

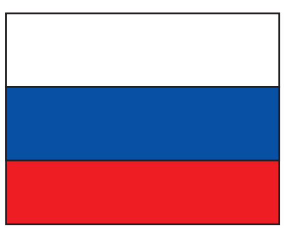
Con los colores azul, blanco y rojo, se han elaborado las banderas que pertenecen a Luxemburgo, Rusia y Yugoslavia.

Los colores en las tres banderas son los mismos, con las mismas proporciones, pero cada una es diferente y representa a un país:

Yugoslavia



Rusia



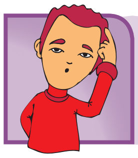
Luxemburgo

En este caso, ¿importa el orden?

¿Habrá otras posibilidades de combinar esos colores para hacer otras banderas, conservando el estilo y la proporcionalidad?

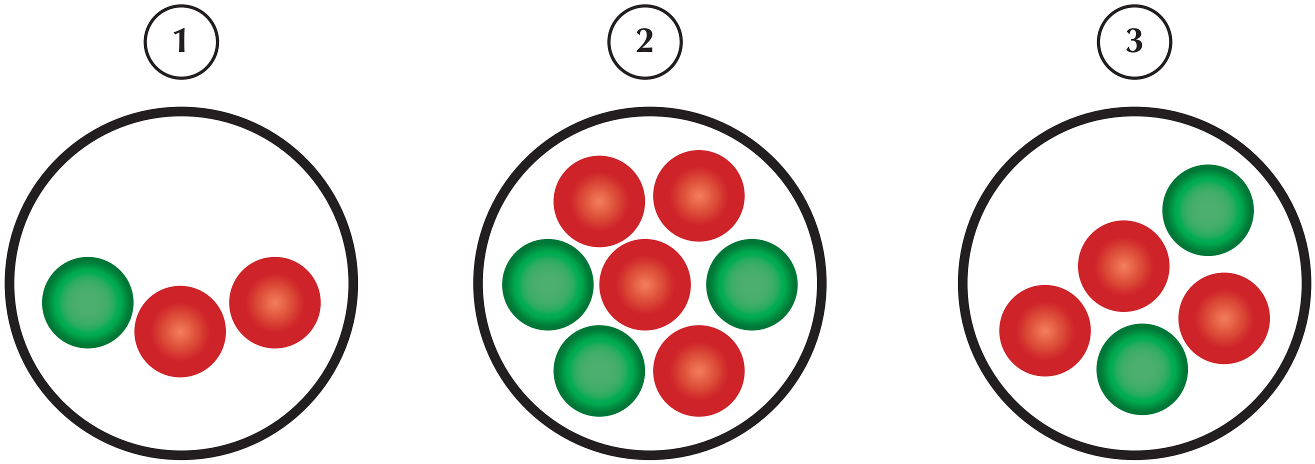
Comparte tus ideas con tus compañeros y escucha las de ellos.

Tema 2.
Cálculo de probabilidades



Indagación

Tenemos tres recipientes con bolas verdes y rojas:



¿En cuál de ellos es más probable sacar una bola roja?
Ten en cuenta que:
En el recipiente número 1 hay 2 bolas rojas de un total de 3.
En el recipiente número 2 hay 4 bolas rojas de un total de 7.
En el recipiente número 3 hay 3 bolas rojas de un total de 5.
Discute tu respuesta con algunos de tus compañeros.

Conceptualización
Probabilidad clásica

En la vida cotidiana, generalmente estamos haciendo predicciones con base en probabilidades.

Por ejemplo:
¿Qué probabilidad hay de que te ganes la lotería comprando solo un billete?
¿Qué probabilidad habrá de que ganes un premio en una rifa?
¿Qué probabilidad hay de que el día de tu cumpleaños llueva?

Probabilidad de ocurrencia de un evento

¿Cara o sello? Es lo que generalmente se pregunta al lanzar una moneda al aire.

¿Quién conoce la respuesta correcta?

Nadie, pues esta solo se sabe hasta que cae la moneda.

¿Será niño o niña? Es la pregunta típica cuando una mujer se encuentra embarazada.

Preguntas como las anteriores y muchas más del mismo estilo forman parte del estudio de la probabilidad.

A cada posible resultado de lanzar la moneda al aire se le conoce como evento (ya sea que caiga cara o sello) y al conjunto de esos eventos se le conoce como *espacio de eventos* o *espacio muestral* (EM).

$$EM = \{cara, sello\}.$$

De igual forma, el resultado del alumbramiento solo podrá ser niño o niña y cada uno de estos resultados será el *evento* y el conjunto de ambas posibilidades será el *espacio muestral* (EM), solo en el caso en el que se sepa con antelación que va a tener un único hijo (ni gemelos, ni mellizos):

$$EM = \{niño, niña\}.$$

Pero no siempre un espacio muestral (EM) se compone de dos eventos como en los casos anteriores; su dimensión dependerá del tipo de experimento que se realice.

Así, se tiene que al lanzar un dado, el espacio muestral estará formado por todos los posibles resultados: 1, 2, 3, 4, 5 y 6 y cada uno de ellos será un evento:

$$EM = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

De lo anterior, se puede concluir:

El espacio muestral (EM) es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento.

Por otra parte, para determinar la probabilidad de que suceda un evento, se puede hacer el siguiente análisis:

Para el lanzamiento de una moneda solo existe la probabilidad de que caiga cara o sello (una a la vez), por lo que la probabilidad de cualesquiera de los dos es uno entre dos: $\frac{1}{2}$.

Para el lanzamiento de un dado, se tienen los posibles resultados 1, 2, 3, 4, 5 o 6 (solo uno a la vez), por lo que la probabilidad de que caiga cualquiera de ellos será uno entre seis y se escribe: $\frac{1}{6}$.

Para un partido de fútbol, un equipo tiene tres posibilidades: ganar, perder o empatar. La probabilidad de cualquiera de los resultados es uno entre tres: $\frac{1}{3}$

De lo expuesto, se puede decir lo siguiente:

La probabilidad teórica de que suceda un evento (cuando solo puede ocurrir uno a la vez) es igual a la unidad (el evento) entre el número de eventos que forman el espacio muestral.

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar al aire un dado se obtenga un número par?

El EM = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Entonces, el número del EM es n(EM) = 6 que es el número de casos o resultados posibles.

Los números pares del dado son A = {2, 4, 6}.

Entonces, el número de pares es n(A) = 3 que son los casos o resultados favorables.

Por tanto, como se tienen 3 casos favorables de un total de 6, entonces, la probabilidad es 3 de 6, es decir, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

Fue Pierre Simón de Laplace quien formuló la definición clásica de la probabilidad, proveniente de los juegos de azar, que se emplea cuando los espacios muestrales (EM) son finitos (número determinado) y tienen resultados igualmente probables (equiprobables).

Regla de Laplace:
La probabilidad de que ocurra un suceso A es igual a:

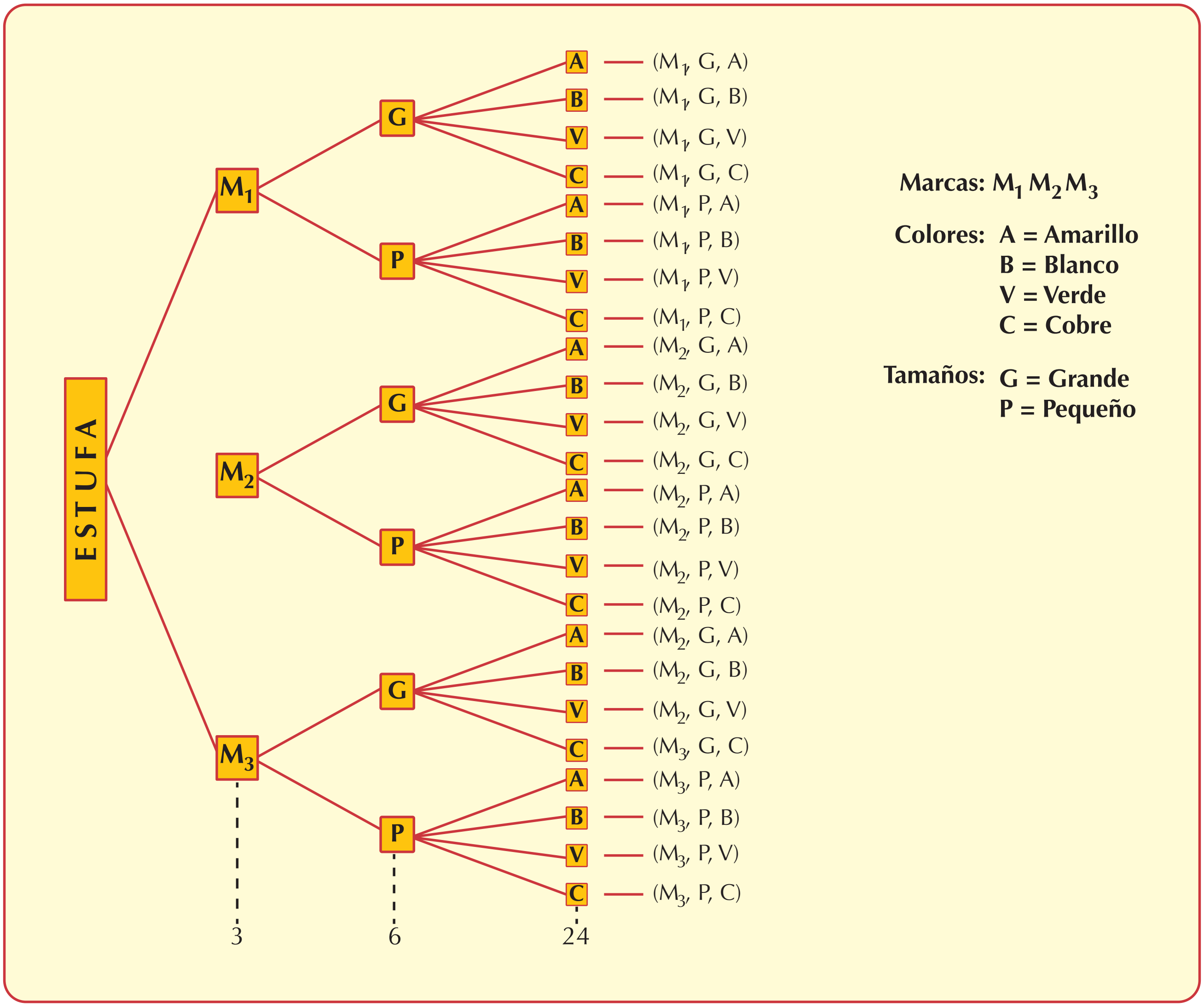
$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}.$$

Diagrama de árbol

Veamos cómo tratar la situación siguiente:

Una tienda de aparatos domésticos ofrece al cliente tres marcas de estufas, cada marca con dos tamaños y en cuatro colores diferentes. ¿Cuántas estufas diferentes existen para escoger, según la marca, el tamaño y el color?

Observemos en el diagrama de árbol la representación de tal situación:



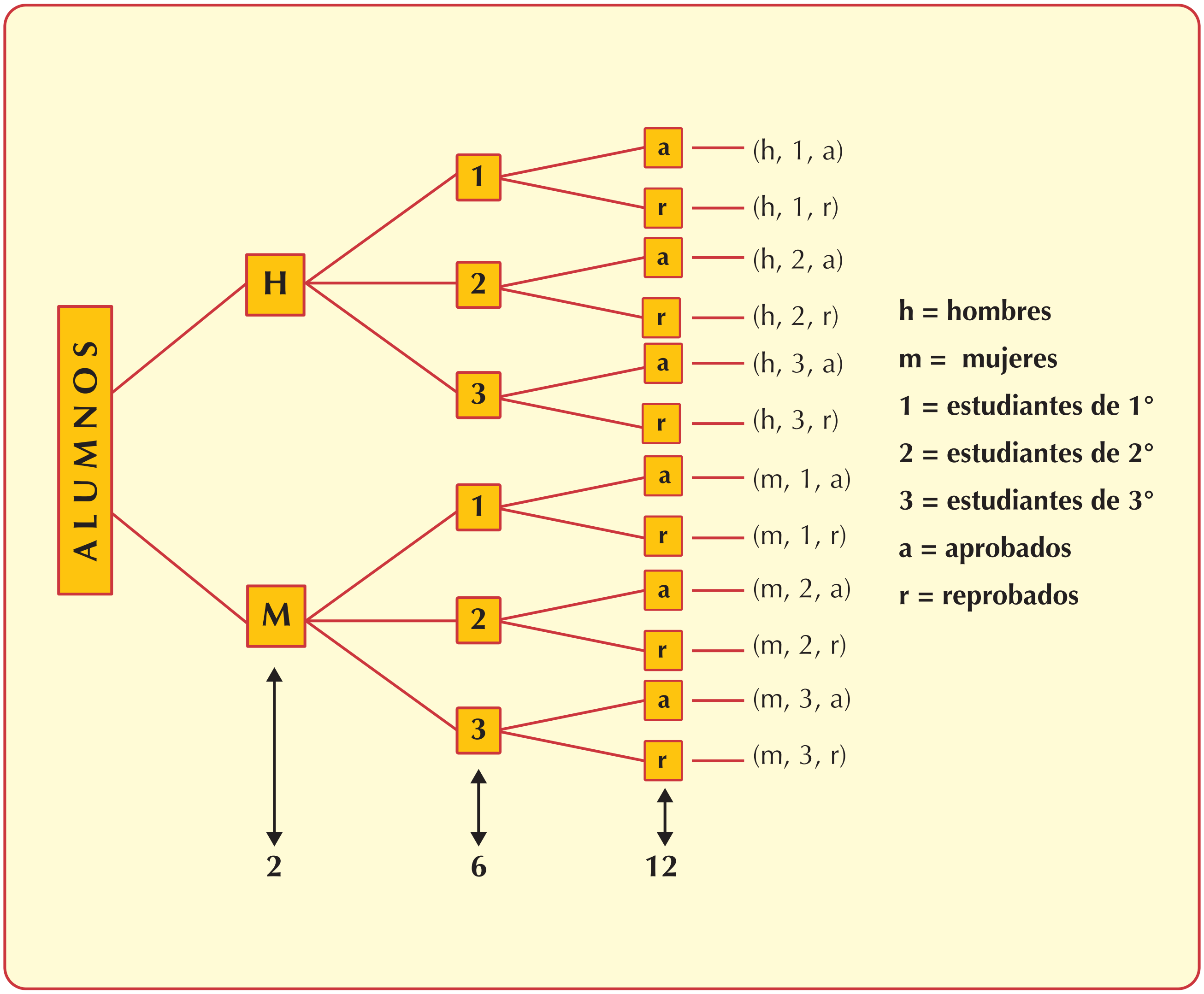
En el diagrama de árbol se observa que al final hay 24 ramificaciones; esto significa que existen 24 estufas diferentes para que el cliente pueda escoger la que más le guste, por ejemplo, una estufa de la marca 1, grande y amarilla (M_1, G, A) o una estufa de la marca 2, pequeña y cobre (M_2, P, C).

El diagrama de árbol es un medio básico de conteo para determinar espacios muestrales y para contar todos los posibles resultados una sola vez.

Veamos ahora el siguiente ejemplo:

Un maestro de matemáticas clasifica a sus alumnos como hombres (h), mujeres (m), estudiantes de primero (1), estudiantes de segundo (2), estudiantes de tercero (3), aprobados (a) y reprobados (r); ¿cuál es el número de clasificaciones posibles y cuáles son?

Para responder construyamos el diagrama de árbol:

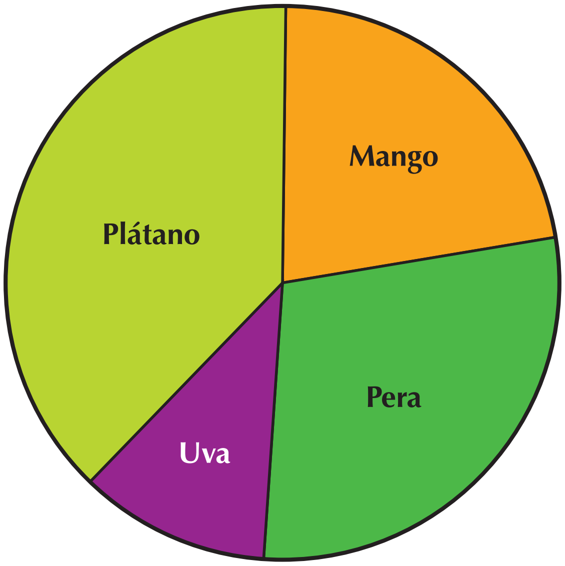


Resultaron 12 clasificaciones que son los paréntesis del lado derecho del diagrama de árbol.

Aplicación

En tu cuaderno, copia los ejercicios siguientes, resuélvelos y compara con algunos compañeros.

1. El administrador de un supermercado presentó el informe de la existencia de 4 frutas en el gráfico:



Analiza y responde sí o no en el paréntesis:

a. El 50% de la oferta lo constituyen mangos y peras ....( )
b. El 75% de la oferta está representado por uvas, peras y mangos...( )
c. La mayor oferta la constituyen uvas, peras y mangos....................( )
d. El plátano y la pera se llevan más del 50% de la oferta.................( )

2. Se tiene una bolsa con cinco pares de medias de color negro y cinco pares de medias azules.
Considera para cada evento que la bolsa contiene 10 pares.

a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un par de medias negras?
b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un par de medias azules?

3. Se hace una rifa con 15 boletos.

a. ¿Qué probabilidad hay de ganar si se compra un boleto?
b. ¿Cuál será la probabilidad si se compran cinco boletos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se compran todos los boletos?
d. ¿Cuál es la probabilidad si no se compran boletos?

4. Si haces girar una pirinola tiene las opciones pon uno, pon dos, todos ponen, toma 1, toma 2 y toma todo.

   a. ¿Qué probabilidad hay de que caiga en la opción todos ponen?
   b. En el dominó hay 28 fichas y siete de ellas tienen el mismo número en ambos extremos.
      Si se escoge una ficha, ¿qué probabilidad hay de que sea la que tiene en ambos extremos cuatro puntos?

5. ¿Qué probabilidad hay de que se abra en la página 15 un libro de 100 páginas?

   Los cálculos de los ejercicios 6 a 10 se realizan con la información siguiente:

   La baraja española consta de 40 cartas así:
   1 o as de oros, 2 de oros, 3 de oros, 4 de oros, 5 de oros, 6 de oros, 7 de oros, 10 o sota de oros, 11 o caballo de oros y 12 o rey de oros.
   1 o as de copas, 2 de copas, 3 de copas, 4 de copas, 5 de copas, 6 de copas, 7 de copas, 10 o sota de copas, 11 o caballo de copas y 12 o rey de copas.
   1 o as de espadas, 2 de espadas, 3 de espadas, 4 de espadas, 5 de espadas, 6 de espadas, 7 de espadas, 10 o sota de espadas, 11 o caballo de espadas y 12 o rey de espadas.
   1 o as de bastos, 2 de bastos, 3 de bastos, 4 de bastos, 5 de bastos, 6 de bastos, 7 de bastos, 10 o sota de bastos, 11 o caballo de bastos y 12 o rey de bastos.

   Calcula la probabilidad de sacar cada vez y de todo el paquete:

6. Indicar el número de elementos del espacio muestral (EM).
7. El as de oros
8. Un rey cualquiera.
9. Una carta de copas con número par.
10. Una carta de cualquier denominación.

Entendemos por…

Fenómeno determinístico aquel caso en el que es posible que se pueda predecir si un suceso va a ocurrir o no. Es decir, un fenómeno determinístico es predecible. Cuando no se puede predecir el resultado, decimos que se trata de un **evento aleatorio**.

Diversión matemática

Juegos de azar

Una máquina tragamonedas a lo largo de un día ha dado los siguientes premios, en pesos colombianos:

Premios en pesos colombianos	Número de veces
$ 0	625
$ 5,000	10
$ 10,000	3
$ 20,000	1

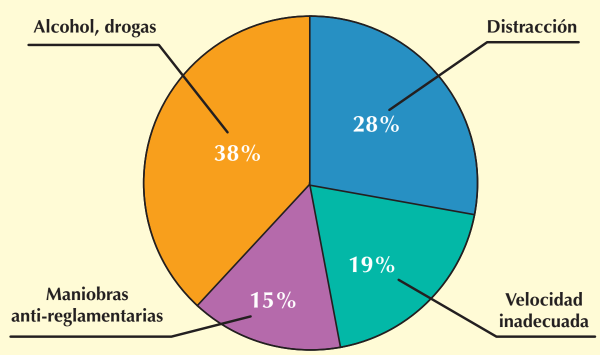
Resuelve con algún compañero estos interrogantes:
¿Cuántas veces han jugado con la máquina?
¿Cuál es la probabilidad de que la máquina no dé ningún premio?
¿Cuál es la probabilidad de obtener un premio de $50,000?

Día a día

Accidentes de tránsito en una ciudad capital

Una Secretaría de Tránsito presentó su informe sobre las causas de muerte en accidentes ocurridos durante el mes, en esta gráfica:

CAUSAS DE ACCIDENTES MORTALES



Total muertes: 3,212

Fuente: DGT

Tomado de http://www.publicatuslibros.com/fileadmin/Biblioteca/Libros/Tecnicos/

Con dos o tres compañeros, analiza la gráfica para descubrir el total de muertes por cada una de las causas expuestas.
cotidianidad y por lo tanto es significativo.

Este capítulo fue clave porque

- Ahora conozco la importancia que tiene el cálculo de probabilidades en las investigaciones científicas y en la predicción de resultados en problemáticas de otras ramas del saber.
- Me di cuenta de cómo en nuestra vida cotidiana aplicamos principios estadísticos y de probabilidad para predecir eventos.
- Reconozco la regla de Laplace en el cálculo de probabilidades.

Conectémonos con La Historia

En el siglo XVII (1600-1699), el llamado filósofo, escritor y jugador, Chevalier de Méré, escribió al matemático Blaise Pascal solicitando algunos informes sobre el juego de dados.

A su vez, Pascal escribió al matemático Pierre de Fermat.

En tal correspondencia se estableció los inicios de la teoría de la probabilidad.

Aunque las primeras ideas referidas a la teoría de la probabilidad que surgieron en relación con los juegos de azar, tales como los dados, las cartas y la lotería, estas dieron lugar a la creación de un campo temático esencial en las matemáticas, que se conoce como "probabilidad".

Además de Pascal, otros distinguidos científicos como Bernoulli y Laplace dieron gran impulso al estudio de la probabilidad.

Pierre Simón de Laplace fue quien formuló la definición clásica de la probabilidad, proveniente de los juegos de azar, que se emplea

cuando los espacios muestrales son finitos y tienen resultados igualmente probables.

Actualmente, la probabilidad contribuye de manera importantísima a facilitar los estudios de las ciencias naturales y sociales, así como a la solución de muchos problemas prácticos en los negocios, la industria, el gobierno, etcétera.

Repasemos lo visto

Al inicio de la unidad te decíamos:

Te has preguntado: ¿Para qué sirve la estadística? y/o ¿para qué sirve la probabilidad?

Ahora ya tienes algunas ideas en las que de pronto antes no te fijabas en que pudieran tener un fondo matemático y especialmente estadístico o probabilístico.

Resaltemos las ideas siguientes:

- Desde tiempos antiguos los gobiernos han llevado numerosos registros de sus actividades como datos sobre población, nacimientos, defunciones, ocupaciones y producción.
- Una información bien recolectada y organizada, en tablas y gráficas, sirve para predecir consecuencias o para tomar decisiones.
- Las medidas en estadística permiten tener una mejor visión sobre el comportamiento de los datos en un problema, fenómeno o experimento.
- Actualmente, la probabilidad tiene gran importancia en investigaciones científicas como por ejemplo en el estudio de fenómenos sociales, económicos y agrícolas.
- Aún en nuestra vida cotidiana, frecuentemente se aplican los principios estadísticos y de probabilidad para predecir consecuencias o tomar decisiones importantes.

Mundo rural

Las cabañuelas

Las "cabañuelas" son una antiquísima manera que tiene el pueblo para pronosticar el clima durante todo el año siguiente; tradición de gran importancia para los campesinos, por ser la herencia común que les legaron los antiguos pobladores aborígenes.

Los expertos en cabañuelas debaten sobre cuál es el mes que sirve de indicador del clima para todo el año. En América por ejemplo toman el mes de enero, mientras que en Europa el indicador es el mes de agosto.

Para predecir el fenómeno atmosférico, el experto se funda en indicadores como la formas de las nubes, la dirección del viento y las características del sol, de la luna, de las estrellas, de la niebla, del rocío de la mañana, del arco iris o del granizo.

El comportamiento de los animales también es utilizado como pronóstico de lluvia; así tenemos la aparición de hormigas aladas, el orejeo de las mulas, que los palomos se bañen, el gato lavándose la cara, el gallo que cante de día (posible cambio de tiempo); gatos que corren y saltan (señal de viento). Aunque pareciera inviable, las personas también tenían que ver con el pronóstico, si tuviera picor o le doliera una antigua cicatriz, sería posible cambio de tiempo. Signos de lluvia podrían ser los crujidos y sonidos de muebles, el hollín que cae de la chimenea, olor de los desagües, siembra "retorcida", humedad en las baldosas de las habitaciones, el sarmiento que "llora" estando seco, entre otros.

El experto en cabañuelas, que suele ser por costumbre una persona del campo, recurre a la observación de los primeros 24 días de enero o de agosto de cada año, para pronosticar qué tiempo será el que se disfrutará en los próximos doce meses, siendo los primeros doce días pronósticos de los meses en orden ascendente y los siguientes doce días, los meses en orden descendente siendo conocidos estos últimos días como retorno.

Desde día 1 hasta el día 12 de enero de cada año, se cuentan los meses en orden ascendente, es decir, empezando por enero hasta diciembre, y del día 13 al día 24, se cuentan los meses en orden descendente, empezando por diciembre hasta enero.

El primer tratado científico occidental sobre el tiempo lo escribió Aristóteles, en el que describe varios métodos de predicción a largo plazo.

A partir de la aparición de la meteorología científica y de la elaboración de predicciones, las cabañuelas han ido perdiendo popularidad. Actualmente, la meteorología considera que, aunque la predicción a corto plazo mediante el saber popular y la experiencia es perfectamente factible que ocurra, no sucede así con la predicción a largo plazo.

Tomado de:
http://www.ciudad-real.es/cultura/cabanuelas/cabanuelas2012.php
http://semblanzasconmassielle.blogspot.com/2011/01/las-cabanuelas.html

Dato curioso

El error de Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz fue un filósofo, jurista, matemático y estadista alemán (1646-1716).

Su padre, profesor de filosofía moral en la universidad de Leipzig, falleció cuando Leibniz contaba con seis años de edad.

Leibniz escribió poemas en latín a los ocho años y a los doce empezó a interesarse por la lógica aristotélica mediante el estudio de la filosofía escolástica.

En 1666 obtuvo un doctorado en leyes y después estudió matemáticas.

Leibniz desarrolló varios aspectos de la lógica simbólica como la formulación de las propiedades principales de la suma lógica y la multiplicación lógica, entre otros.

Su contribución más notable a las matemáticas, junto con Newton, fue la creación del cálculo infinitesimal.

Aparentemente, el concepto de probabilidad es uno de los temas más sencillos de entender de las matemáticas, pero la historia demuestra que puede llegar a confundir incluso a los más ilustres matemáticos. Leibniz, por ejemplo, era aficionado a los juegos de dados y estaba convencido de que era igual de difícil conseguir 11 puntos que 12, argumentando que ambas puntuaciones solo se podían conseguir mediante una combinación de dos dados: 6 y 5 en el primer caso, y 6 y 6 en el segundo.

En realidad se equivocaba Leibniz, porque 11 se puede obtener de dos formas: con un 5 en el primer dado y un 6 en el segundo o con un 6 en el primero y un 5 en el segundo.

Haz la prueba tirando los dados muchas veces y comprobarás que salen más a menudo 11 puntos que 12.

Tomado de
http://www.publicatuslibros.com/fileadmin/Biblioteca/Libros
http://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/leibniz.htm

¿En qué vamos?

Coevaluación “Reflexiono y trabajo con mis compañeros”

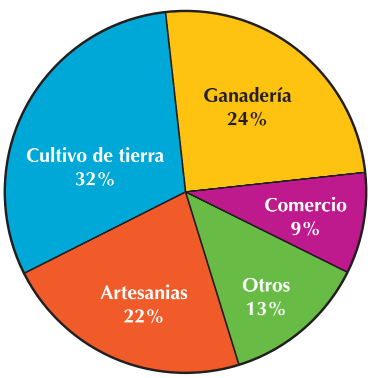
Copia en tu cuaderno cada uno de los ejercicios siguientes, resuélvelos y compáralos luego con tus compañeros:

1. La estatura en centímetros de los miembros de un grupo de la tercera edad son los siguientes:

160 169 155 157 152 153 160 161 160 156
157 152 155 159 150 156 158 152 160 155
157 152 160 168 159.

Construir la tabla de frecuencias para datos no agrupados que contenga conteo y frecuencias absolutas simples.

2. El trabajo de un detective consiste en investigar datos, interpretarlos, y así reproducir algún suceso. A partir de la gráfica dada y como si fuéramos detectives, reconstruyamos los hechos:



En la gráfica se puede observar que:

a. La mayoría de las personas se dedican a…
b. La ocupación en la que participan menos personas es en...
c. Se puede observar que la comunidad es eminentemente productora de materias primas, ya que la mayoría de su población se dedica a...
d. La segunda actividad más importante en el lugar es...

Los ejercicios 3 a 6 se resuelven con la información siguiente:

Si se tiene una caja con 10 canicas blancas, 6 azules, 4 verdes y 2 negras:

3. ¿Cuál es el total de canicas en la caja?
4. Si se extrae una al azar y se desea que sea blanca:

a. ¿Cuál es la probabilidad de éxito?
b. ¿Cuál es la probabilidad de fracaso?

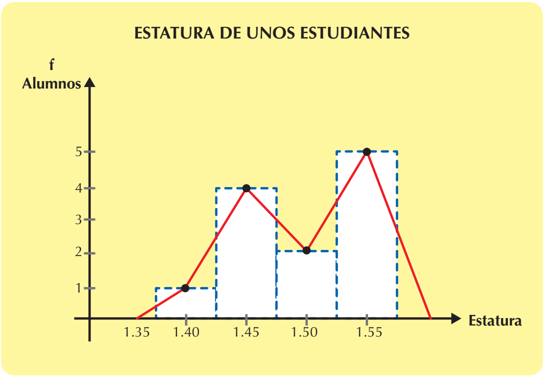
5. Si al extraer una y se desea que sea negra:

a. ¿Cuál es la probabilidad de éxito?
b. ¿Cuál es la probabilidad de fracaso?

6. Si se desea que no sea verde:

a. ¿Cuál es la probabilidad de éxito?
b. ¿Cuál es la probabilidad de fracaso?

7. De acuerdo con el siguiente diagrama sobre las estaturas de unos alumnos, contesta las preguntas:



a. ¿Cuál es el punto medio del intervalo en donde está la estatura de mayor frecuencia?
b. ¿Cuál es el punto medio del intervalo en donde está la estatura de menor frecuencia?

Para los ejercicios 8 a 10, debes analizar la tabla que sigue:

x_i	f_i
6	4
7	8
8	7
9	19
10	2
Total	**40**

8. Identifica la Mo con su frecuencia.
9. Identifica la Me.
10. Identifica la $\bar{x}$.

Heteroevaluación “Le cuento a mi profesor”

Con tu profesor, resuelve la siguiente rejilla.
Lee el enunciado y señala con una x la categoría correspondiente, según lo que has aprendido.

Qué sé hacer	Superior	Alto	Básico	Bajo
Explico el significado de algunos términos estadísticos y de probabilidad				
Recopilo información en tablas de frecuencias				
Represento información en diagramas de barras				
Represento información en histogramas				
Represento información en polígonos de frecuencias				
Represento información en diagramas circulares				
Identifico la moda (Mo) en un conjunto de datos				
Identifico la mediana (Me) en un conjunto de datos				
Calculo la media aritmética o promedio de un conjunto de datos				
Describo el espacio muestral de experimentos aleatorios				
Reconozco la regla de Laplace				

Autoevaluación

Participo y aprendo	Superior	Alto	Básico	Bajo
Observo detenidamente las situaciones matemáticas que se me presentan, antes de proponer una solución				
Permito la participación de mis compañeros en las discusiones sobre la solución de ejercicios				
Valoro la asesoría de mi profesor				
Solicito aclaraciones de mis dudas a mis compañeros				
Colaboro con la disciplina del grupo				
Concedo la razón a quien la tiene				
Saco tiempo en casa para repasar lo aprendido en el colegio				
Propongo problemas o actividades para resolver en clase				
Participo en las actividades programadas en el colegio				

Unidad 1

1.

a. 2
b. 2
c. $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$

2.

a. 4
b. 12
c. $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

3.

a. =
b. =
c. >
d. =
e. >
f. =

4. Como se puede amplificar o simplificar, las respuestas pueden variar. Ejercicio libre. Compara tusrespuestas con uno o dos de tus compañeros.

5.

a. =
b. ≠
c. =
d. =

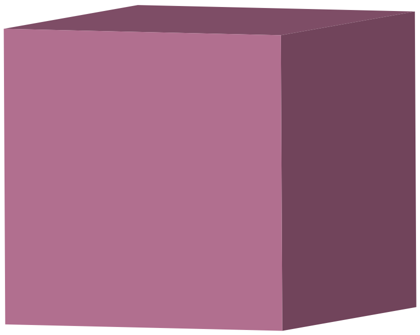
6. Lote 1 (el más pequeño).
Lote 4 (el más grande).

7. Elaborando una tabla, se tiene:

Número de Artículos	De 0 a 10	De 11 a 50	De 51 a 100	De 101 a 500	De 501 a 1 000
Descuentos	0%	10%	20%	30%	40%
Precio según el descuento		$ 50 000	$ 50 000	$ 50 000	$ 50 000
	$ 50 000	-	-	-	-
		$ 5 000	$ 10 000	$ 15 000	$ 20 000
		$ 45 000	$ 40 000	$ 35 000	$ 30 000

8.

$$V= \frac{125}{64}\,dm^3$$



$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{5}{4}$, porque $\frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{125}{64}$

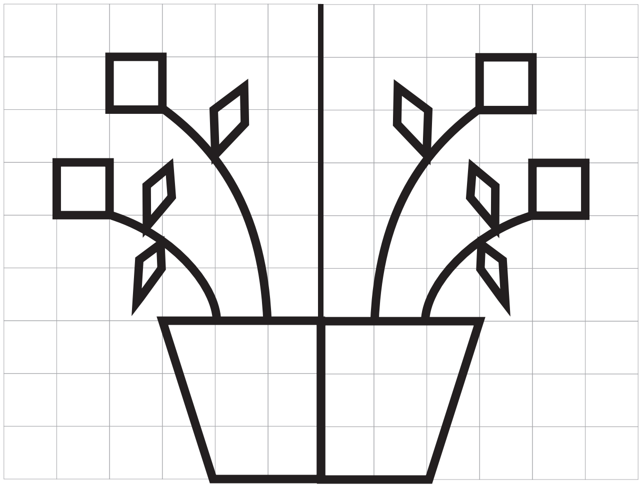
El lado del cubo mide $\frac{5}{4}\,dm$.

Unidad 2

1.

a. 1 eje de simetría;
b. 1 eje de simetría;
c. 1 eje de simetría;
d. 6 ejes de simetría.

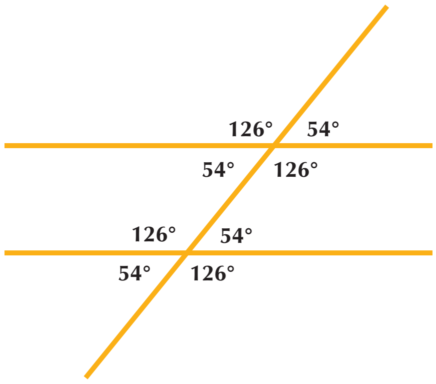
2.



3. (2), (5), (4), (3), (1).
4.

a. Sí, porque es un paralelogramo cuyos ángulos interiores son rectos.
b. No, porque por ejemplo un rectángulo cuyos lados miden 3 y 4 cm no es cuadrado.
c. Sí pues el cuadrado es un paralelogramo, cuyos lados tienen igual medida.
d. Sí, ya que todos son paralelogramos.

5.



6.

a. 0.04 kg
b. 5,750 mg
c. 0.082 g

7.

a. 0.015500 kl
b. 5 cl
c. 4.56 hl

8.

a. 33,000,000,000 m^3
b. 0.000000001200 hm^3
c. 4,500,000 mm^3

Unidad 3

1.

a. 2x = 800
b. x + y = 4 800
c. m – n = 25
d. $\frac{1}{2}x - 3y$ o también $\frac{x}{2} - 3y$
e. $\sqrt{w}$
f. $2g + \sqrt{h} - s^3$

2.

a. La suma de dos números
b. La diferencia de dos números es 32,000
c. La suma de tres veces un número
d. Área igual a base por altura
e. La suma de tres números diferentes es 45

3. x = 5 m

4. Constantes — Variables

	Constantes	Variables
a.	n, m	6, 5
b.	t, r, w, m	
c.	b, v	2, 8, 5
d.	x, a, b, c	5, 8, 7, 4

5.

a. Un número sumado con 32 da 82
b. Un número sumado con 258 da 396

6.

a	b	a - b	a – (– b)
+9	+5	4	14
–15	–3	–12	– 18
–9	+7	–16	– 2
+8	–5	+13	+3
+5	– 2	+7	+3
–4	+6	–10	+2

7.

(c)
(b)
(a)
(d)

8.

(f)
(e)
(d)
(b, c)
(a)

9. Juan 32 días; Carlos 8 días.
10. Jesús 45 años; Lalo 15 años.

Unidad 4

1.

Estaturas en cm	Conteo	Frecuencia absoluta simple f_i
140	||	2
141	|	1
146	||	2
147	||	2
148	||||	4
149	||	2
150	|	1
152	~~||||~~	5
155	||	2
157	|	1
160	|||	3

2.

a. Cultivo de tierras.
b. Comercio.
c. Cultivo de tierras, ganadería y artesanías.
d. Ganadería.

3. 22 canicas.

4.

a. $\frac{10}{22}$

b. $\frac{12}{22} = \frac{6}{11}$

5.

a. $\frac{2}{22} = \frac{1}{11}$

b. $\frac{20}{22} = \frac{10}{11}$

6.

a. $\frac{18}{22} = \frac{9}{11}$

b. $\frac{4}{22} = \frac{2}{11}$

7.

a. 1.55
b. 1.40.

8. Mo = 9 con frecuencia de 19.
9. Me = 9.
10. $\bar{x} = 8.175$ y se aproxima a 8.

DAINTITH J. (1998). Diccionario de matemáticas. México: Norma Editorial, pp. 82-115.

ECHEVERRY, C. H., OBANDO, G. J., y TROCHEZ, J. E. (1998). Aritmética. Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

GALDÓS, L. (2005). Dominando las matemáticas. Madrid: Cultural S. A.

NEWMAN, J. R. (1981). Sigma. El mundo de las matemáticas (vol. 1). España: Editorial Grijalbo.

BEILER, R. A. (1966). Recreations in the Theory of Numbers. New York: Dover Publications Inc.

DAVIDSON, L. J., et al. (1995). Problemas de matemática elemental. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación Nacional

MEN (2008). Documento 3: Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Revolución educativa Colombia aprende. Bogotá.

MEN (2008). Lineamientos Curriculares Básicos para el área de Matemáticas. Bogotá.

VASCO, C. E. (1994). Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas (vols. I y II). Serie Pedagogía y Currículo. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Geometría

JURGENSEN, Donnelly y DOCIANI. (1992). Geometría moderna, estructura y método. México: Publicaciones Cultural.

Probabilidad y Estadística

JOHNSON, R. y KUBY, P. (2004). Estadística elemental. México D. F.: Internacional Thomson Editores.

Didáctica

ABRANTES, Paulo, *"El papel de la resolución de problemas en un contexto de Innovación Curricular "*, en: Revista Uno Nº 8, Año III, Grao Educación de Serveis Pedagógics, Barcelona, 1996.

AEBLI, Hans, *Doce formas básicas de enseñar*, Madrid, Nacea S. A. de Ediciones, 1988.

Aprendizaje de las Matemáticas", en: *Revista Educación Matemática, Vol. 4, Nº 2* , México D. F., Grupo Editorial Iberoamérica, S.A., 1992.

ARBELÁEZ, G., ANACONA, M., y RECALDE, L. (1998). Número y magnitud: una perspectiva histórica. Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

Internet

http://antarticos.blogspot.com/2006/01/se-reanudan-las-perforaciones-para.html

http://elinventor.galeon.com/letra_f.htm

http://es.wikibooks.org/wiki/Sistema_Binario

http://es.wikipedia.org/wiki/Computadora

http://es.wikipedia.org/wiki/Pulgada

http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada

http://fraccionmania.blogspot.com/2008/07/la-utilidad-de-las-fracciones-en-la.html

http://huertasdelencuentro.bligoo.com/content/view/674153/F

http://matematica100x100.blogspot.com/

http://platea.pntic.mec.es/jescuder/numeros.htm

http://www.atinco.com.co/esp/ventas/asister.htm

http://www.crecenegocios.com/como-elaborar-un-balance-personal/Enlaces patrocinados http://www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/cociente.html

http://www.elsecretodelasalud.com/Enfermedad/Salmonella

http://www.mamutmatematicas.com/lecciones/porcentaje-incremento.php

http://es.wikipedia.org/wiki/Costumbres_del_Antiguo_Egipto

http://laescueladeateanas.wordpress.com/2008/10/17/los-solidos-de-platon-i/

http://los-pulmones.blogspot.com/2009/04/arbol-bronquial.html

http://perso.wanadoo.es/getn/dicc/letra/nnn.htm

http://www.anatomiahumana.ucv.cl/morfo2/vasos.html

http://www.educarecuador.ec/_upload/Libro%20Salud%20y%20ambiente16.pdf

http://www.espaciodepurativo.com.ar/depuracioncorporal/higado_termometro.php

http://www.iesaguilarycano.com/dpto/fyq/mat/volumen.htm

http://www.rena.edu.ve/SegundaEtapa/tecnologia/volumenm.html

http://www.taringa.net/posts/imagenes/1355399/Las-piramides-de-Egipto.html

http://www.unibol.net/conversion_pvc.php

http://es.wikipedia.org/wiki/Clave_(notacion_musical)

http://es.wikipedia.org/wiki/Computadora

http://es.wikipedia.org/wiki/Criptograf%C3%ADa

http://es.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_morse

http://es.wikipedia.org/wiki/Juegos_Ol%C3%ADmpicos

http://es.wikipedia.org/wiki/Logotipo

http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_binario

http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada http://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_elementalTérmino

http://jairoserrano.com/2011/02/pastoreo-y-produccion-lechera/

http://platea.pntic.mec.es/jescuder/numeros.htm

http://thiagoonweb.com/?tag=computadorelectricidad

http://www.disfrutalasmatematicas.com/definiciones/cociente.html

http://www.disfrutalasmatematicas.com/juegos/parejas-matematicas.html

http://www.educar.org/educacionfisicaydeportiva/historia/juegosolimpicos.asp

http://www.kalipedia.com/matematicas-algebra/tema/lenguaje-algebraico.html?x=20070926klpmatalg_5.Kes

http://www.mamutmatematicas.com/lecciones/porcentaje-incremento.php

http://www.rinconesdelatlantico.com/num2/permacultura.html

http://www.siisarh.com/glosario/glosario-seguro-social.html

http://semblanzasconmassielle.blogspot.com/2011/01/las-cabanuelas.html

http://thiagoonweb.com/?tag=computadorelectricidad

http://www.biografiasyvidas.com/biografia/l/leibniz.htm

http://www.ciudad-real.es/cultura/cabanuelas/cabanuelas2012.php

http://www.mujeresypunto.com/10-consejos-para-estar-a-la-moda.html

http://www.publicatuslibros.com/fileadmin/Biblioteca/Libros/Tecnicos/

http://www.tuveras.com/estadistica/estadistica02.htm#disper

Unidad 1

http://www.nature-wallpaper.in/wp-content/uploads/Winter-wallpaper5.jpg

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1329889

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1170739

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=378031

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1151008

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=609061

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1123374

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1351858

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1374040

http://financialawakenings.com/wp-content/uploads/2012/01/BalanceScaleUneven.jpg

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=295013

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=912661

http://www.digital-meters.com/WebRoot/ePagesForSAPlarge/Shops/digital-meters/4D9D/A845/56EA/7C71/BA43/0A0C/05E8/2266/8861__16255_zoom.gif

http://2.bp.blogspot.com/_chHSqcW5RyM/TU8LvA_bZFI/AAAAAAAAAFQ/7alOaN2Dp94/s1600/monedas_euros_centimos_apiladas_dinero.jpg

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=614635

Unidad 2

http://4.bp.blogspot.com/-8wKtLtsiC3U/Tam6pmIsuiI/AAAAAAAAAzA/pZjqWXl6kl8/s1600/cometa+4.jpg

http://imagenes.miparcela.com/users_v2/486/ 486500600708684849515 65350534550/ 365970600727495652695448526945555-987-Jose%20 Luis%20Nieto%20sin%20cable%20baja%20resolucion.jpg

static.panoramio.com/photos/original/4962336.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/aa/Br%C3%BAjula_01.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c9/Pythagore_Villa_Borghese.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3c/Br%C3%BAjulaN.svg/1024px-Br%C3%BAjulaN.svg.png

http://la-philosophie.com/wp-content/uploads/2010/09/rene_descartes.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d6/Mandelbrot_set_spiral_-_Wacker_Art_Fractal_Generator.jpg

http://www.forodefotos.com/attachments/fotos-de-montanas/8888d1248383406-cordillera-de-los-andes-fotos.jpg

http://www.gardenshowblog.com/wp-content/uploads/2010/12/Conifers-Korean-fir-cone-PS.jpg

http://www.elroldesiempreonline.com/imagenes/juegos/star-wars.jpg

http://images.wikia.com/fanon/images/6/6b/Enterprise.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0d/F18-6.jpg?uselang=es

http://2.bp.blogspot.com/_PrfV-6h14SY/TLsNvRWT4eI/AAAAAAAAA0M/nS2rwid_u_g/s1600/vitral7.jpg

http://jugandoenpareja.files.wordpress.com/2011/09/img_4462.jpg

http://4.bp.blogspot.com/-O7OuREM9UnA/Tfuth2w3kII/AAAAAAAAA5w/Tn-1F5LPHtTY/s1600/Las%2BPir%25C3%25A1mides%2Bde%2BEgipto.jpg

http://www.technomet.com.ar/fotos/Imagen1_96.jpg

http://1.bp.blogspot.com/_cCiqiuF3zdU/S8-M5zYocnI/AAAAAAAAACU/Fwn3HPWqL3g/s1600/5.JPG

http://campus.usal.es/~histologia/museo/Laboratorio/Laboratorio16/Balanza1900a.gif

http://2.bp.blogspot.com/_K_WMVZJnY-4/S_k1zplkplI/AAAAAAAAAaY/Fs-fWHIIi360/s1600/MUSICA+Y+BAILE+EGIPCIO-DINASTIAXVIII-TUMBA-RAMOSE-1440-1300AC.jpg

http://sistemasolarnuestro.blogspot.com

http://cronodon.com/PlanetTech/Venus.html

http://observatorio.info/2009/12/tethys-luna-helada-desde-la-cassini-que-orbita-saturno/

http://unduezero.files.wordpress.com/2009/12/marte.jpg

http://blog.sondasespaciales.com/2010/05/recordando-un-grandioso-jupiter-visto-desde-marte/

http://chileliterario.blogspot.com/2011/10/el-hombre-que-orbito-saturno.html

http://observatoriodel9.blogspot.com/2010_09_01_archive.html

http://bitacoradegalileo.files.wordpress.com/2011/05/neptuno1.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e5/Dice_%28typical_role_playing_game_dice%29.jpg?uselang=es

Unidad 3

http://alwayssummerinmyworld.blogspot.com

http://www.lamargaritaseagita.com/blog/files/2011/01/manzana-azul-a-vacio.jpg

http://www.abetas.com/crisis.jpg

http://cartelparanoolvidar.files.wordpress.com/2011/10/adc3a1n_paredes_-barrera_001.jpg

http://blog.inmigrantetv.com/wp-content/uploads/2011/06/balanza1.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a6/Claves_hg.jpg

http://cadenasyredestroficas.wordpress.com/2009/02/

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ee/Rubik%27s_Cube_cropped.jpg

Unidad 4

http://administracionzonalloschillos.files.wordpress.com/2011/11/dsc09376.jpg http://2.bp.blogspot.com/_AmF1GPXKNKI/S6wYyAdD2CI/AAAAAAAAAHU/i7gDAoNmh8g/s1600/Degustacion1.jpg

http://3.bp.blogspot.com/_9F-tbRa0DlA/R1KkSKfi1dI/AAAAAAAAAAw/rPAfFw5kSGM/s1600-R/Examen.JPG

http://www.bogotabiketours.com/wp-content/uploads/2009/09/Tequendama-Hotel.jpg

http://ubik-t.com/wp-content/uploads/2011/06/Yokohama_ADVAN_Tires_WTCC_2006.jpg.jpeg

http://schoolphotoproject.com/pix_large/animal-photo-tilapias-l.jpg

http://4.bp.blogspot.com/-3DUx4ZwmcPw/TzBO3ljIHqI/AAAAAAAAAcI/yqS8mif0Nqk/s1600/DSC08653.JPG

http://www.cursosdedireccion.com/moodle/file.php/1/plan%20viabilidad.jpg

http://www.moonmentum.com/blog/wp-content/uploads/2011/02/ensalada-fruta.jpg

http://cdn.webshopapp.com/f/zzqa6c/image.jpg

http://agrega.educacion.es/galeriaimg/06/es_20071227_1_5037168/es_20071227_1_5037168_captured.jpg

http://www.subaru.cl/App_Uploads/Eventos/724210_081.jpg.jpg

http://api.ning.com/files/7k5h9gHaTBygPEU6IEExmMTQsOy7N2quPOAkYRcFkxu7OpK2MSs1zVyM5-N8mPOJf14C-3YKTEDwjXxlraBk93pc*1ycEb5K/balotoprogresion.JPG

http://cecorex.org/imagenes/monedas.jpg

http://cundinamarca-bogota.colombia.nexolocal.com/nl_imagenes/nl_posting/3/6/785/4755707/1297473536_4511557.jpg

http://es.royalvegas.com/blog/wp-content/uploads/2011/08/Ruleta.jpg

http://1.bp.blogspot.com/-9Dlsch8WZB4/TmgV_LG8W3I/AAAAAAAAAHg/76KU80qJlos/s1600/290825_165687033511289_146249828788343_342458_249296542_o.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0d/Gottfried_Wilhelm_Leibniz_c1700.jpg