

MATEMATICAS

\times

$=$

$\frac{2}{4}$

$\sqrt{\quad}$

\div

$+$

15

**PARALELAS
CORTADAS
POR UNA
TRANSVERSAL**



SENA

SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE
MINISTERIO DE TRABAJO Y SEGURIDAD SOCIAL

SENA
DIRECCION GENERAL
SUBDIRECCION TECNICO PEDAGOGICA

**PARALELAS CORTADAS
POR UNA
TRANSVERSAL**

Bogotá, 16 de julio de 1982

CONTENIDO

OBJETIVO TERMINAL	5
Paralelas cortadas por una transversal	7
Angulos alternos internos	8
Angulos alternos externos	9
Angulos correspondientes	9
Angulos colaterales internos	11
Angulos colaterales externos	11
Adición de medidas angulares	18
Sustracción de medidas angulares	21
EVALUACION FINAL	27

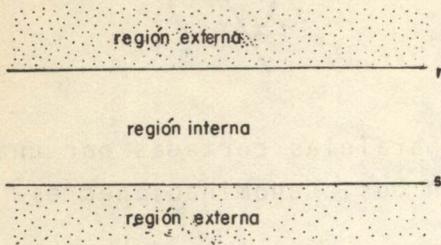
OBJETIVO TERMINAL

Al finalizar esta Unidad, usted será capaz de:

1. Dadas dos rectas paralelas cortadas por una transversal, identificar ángulos
 - a. Alternos Internos
 - b. Alternos Externos
 - c. Colaterales Internos
 - d. Colaterales Externos
 - e. Opuestos por el vértice
 - f. Correspondientes
2. Adicionar medidas de ángulos expresadas en grados, minutos y segundos.
3. Sustraer medidas de ángulos expresadas en grados, minutos y segundos

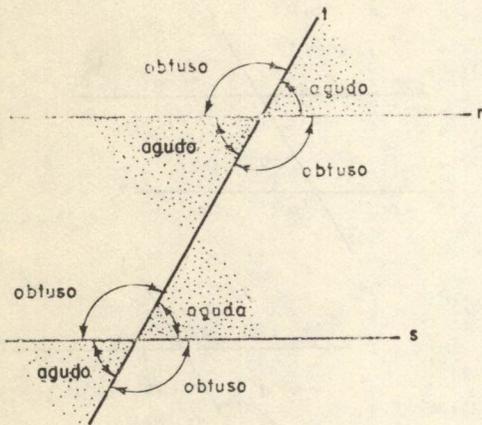
PARALELAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL

Vamos a considerar dos rectas paralelas r y s



La región comprendida entre " r " y " s " será llamada REGION INTERNA, y las otras REGION EXTERNA.

Consideremos ahora las dos rectas paralelas cortadas por una transversal " t "



Observe que la transversal forma con las rectas paralelas:

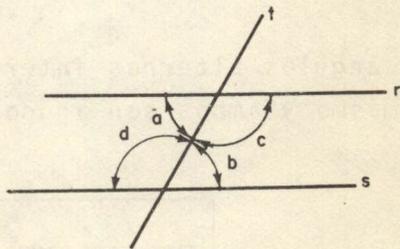
- Cuatro ángulos AGUDOS iguales (de la misma medida).
- Cuatro ángulos OBTUSOS iguales (de la misma medida)

De esos ocho ángulos :

- Cuatro son INTERNOS, pues pertenecen a la región interna.

ejemplo:

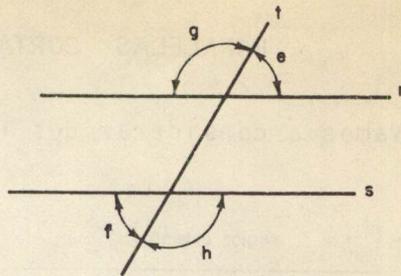
$$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$$



- Cuatro son EXTERNOS, pues pertenecen a la región externa.

Ejemplo:

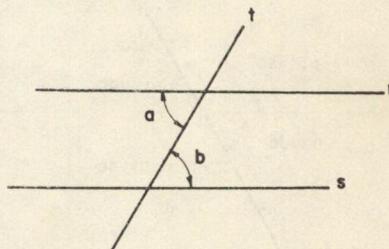
\hat{e} , \hat{f} , \hat{g} , \hat{h}



Los ángulos formados por dos paralelas cortadas por una transversal reciben, de dos en dos, denominaciones especiales, así:

ANGULOS ALTERNOS INTERNOS

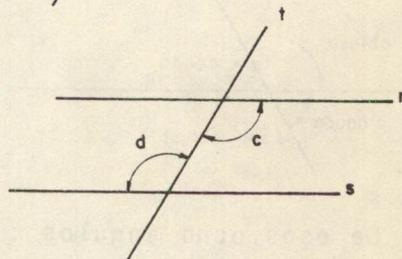
Son dos ángulos internos, ambos agudos o ambos obtusos y situados a cada lado de la transversal.



Ejemplo:

\hat{a} y _____

\hat{c} y _____



Los ángulos alternos internos son iguales, porque miden lo mismo y ambos son agudos o ambos obtusos.

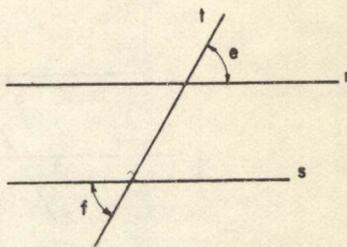
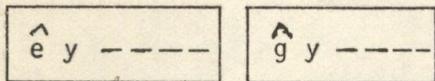
_____ = \hat{b}

_____ = \hat{d}

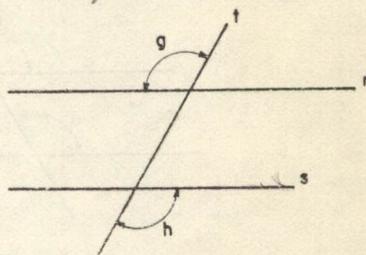
ANGULOS ALTERNOS EXTERNOS

Son dos ángulos externos, ambos agudos o ambos obtusos, situados uno a cada lado de la transversal.

Ejemplo

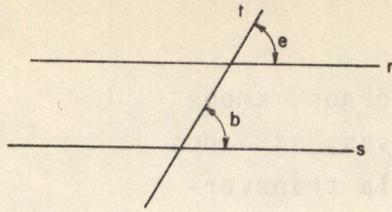


Los ángulos alternos externos son iguales.

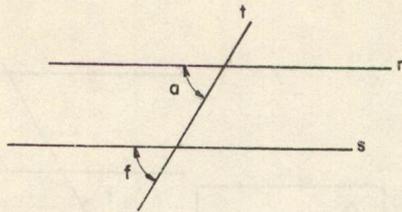


ANGULOS CORRESPONDIENTES

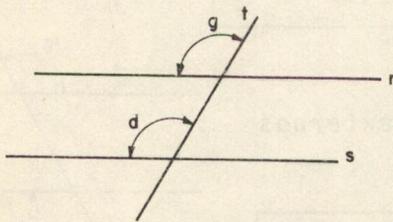
Son ángulos iguales, uno interno y otro externo, ambos agudos o ambos obtusos, situados al mismo lado de la transversal.



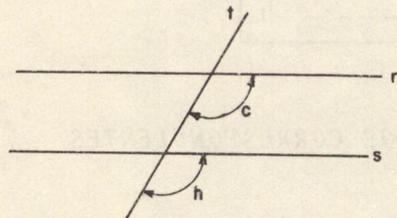
$\hat{e} \quad y \quad \hat{b}$



$\hat{a} \quad y \quad _ _$



$_ _ \quad y \quad \hat{d}$



$_ _ \quad y \quad _ _$

$$\hat{e} = \hat{b}$$

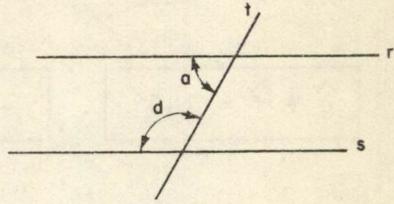
$$\hat{a} = \hat{f}$$

$$\hat{g} = \hat{d}$$

$$\hat{c} = \hat{h}$$

ANGULOS COLATERALES INTERNOS

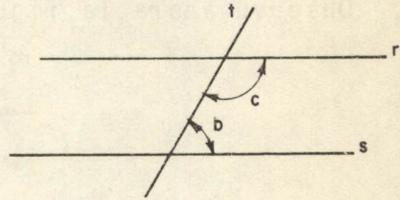
Dos ángulos internos, uno agudo y otro obtuso, ambos situados del mismo lado de la transversal.



Ejemplo

$$\hat{a} \text{ y } \hat{d}$$

$$\hat{c} \text{ y } \dots$$



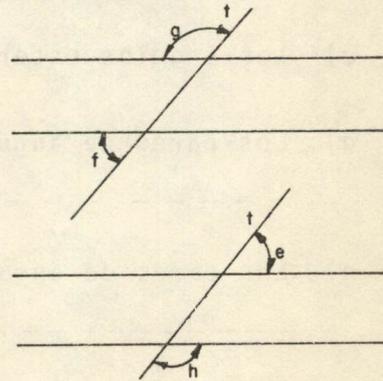
Los ángulos colaterales internos son suplementarios, es decir, que la suma es igual a 180°

$$\hat{a} + \hat{d} = 180^\circ$$

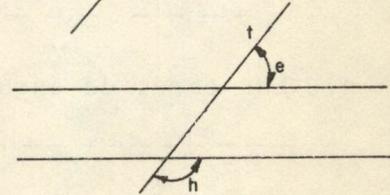
$$\hat{c} + \hat{d} = \dots$$

ANGULOS COLATERALES EXTERNOS

Son dos ángulos externos, uno agudo y otro obtuso, ambos situados al mismo lado de la transversal.



Ejemplo



$$\hat{g} \text{ y } \hat{f}$$

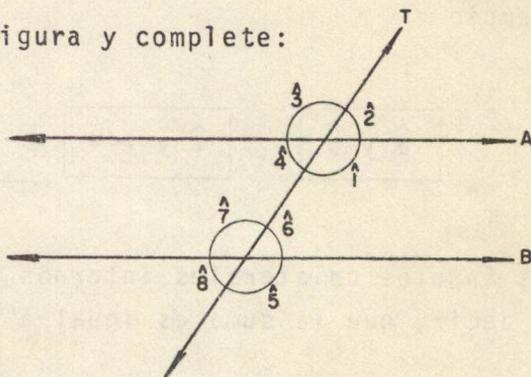
$$\text{----- y } \hat{h}$$

Los ángulos colaterales externos son suplementarios

$$\hat{g} + \hat{f} = 180^\circ$$

$$\text{-----} + \text{-----} = 180^\circ$$

1. Observe ahora la figura y complete:



- a) Dos rectas paralelas, cuando son cortadas por una transversal, forman ----- ángulos
- b) Los ángulos internos son: -----, -----, -----

- c) Los ángulos externos son: -----, -----, -----
- d) Los pares de ángulos correspondientes son: -----

- e) Los pares de ángulos alternos internos son: -----

f) Los pares de ángulos alternos externos son:

g) Los pares de ángulos opuestos por el vértice son: -----

h) Cite dos ángulos internos que sean suplementarios y dos externos que también lo sean:

ángulos internos: -----

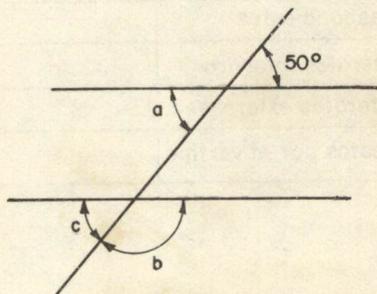
ángulos externos: -----

2. Observe también la figura siguiente y determine los ángulos:

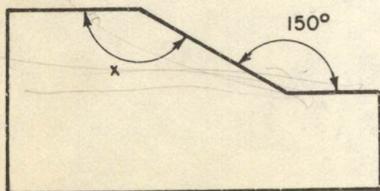
$\hat{a} =$

$\hat{b} =$

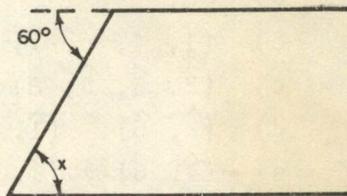
$\hat{c} =$



3. Determine el valor de X

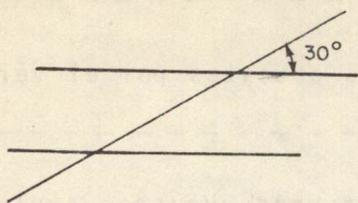


X =



X =

4. En la figura siguiente responde:

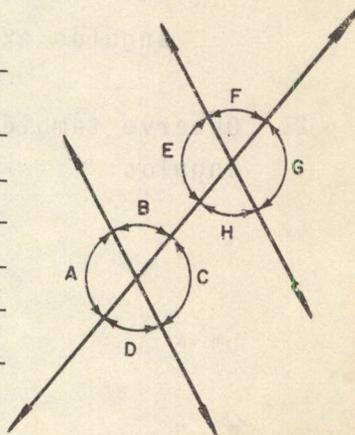


-¿Cuál es la medida de cada ángulo agudo?

-¿Cuál es la medida de cada ángulo obtuso?

5. Complete el cuadro observando el dibujo y el ejemplo

Alternos Internos	\hat{B} e \hat{A} , \hat{C} e \hat{E}
Alternos externos	
Correspondientes	
Colaterales internos	
Colaterales externos	
Opuestos por el vértice	



RESPUESTAS

1. a) 8
- b) $(\hat{1}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{7})$
- c) $(\hat{2}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{8})$
- d) $(\hat{2}, \hat{6})$; $(\hat{1}, \hat{5})$; $(\hat{8}, \hat{4})$, $(\hat{3}, \hat{7})$
- e) $(\hat{4}, \hat{6})$ y $(\hat{1}, \hat{7})$
- f) $(\hat{3}, \hat{5})$ $(\hat{2}, \hat{8})$
- g) $(\hat{1}, \hat{3})$ $(\hat{2}, \hat{4})$; $(\hat{6}, \hat{8})$ y $(\hat{5}, \hat{7})$
- h) $(\hat{6}, \hat{7})$ $(\hat{5}, \hat{8})$ (hay varias respuestas posibles)

2. $\hat{a} = 50^\circ$ $\hat{b} = 130^\circ$ $\hat{c} = 50^\circ$

3. $X = 150^\circ$ $X = 60^\circ$

4. 30° 150°

5.

	\hat{D} y \hat{F} , \hat{A} y G
	\hat{D} y \hat{H} , \hat{C} y G , \hat{A} y \hat{E} , \hat{B} y \hat{F}
	\hat{E} y \hat{B} , \hat{C} y H
	\hat{A} y F , \hat{D} y \hat{G}
	\hat{B} y \hat{D} , \hat{A} y \hat{C} , E y G , F y H

Continúe...

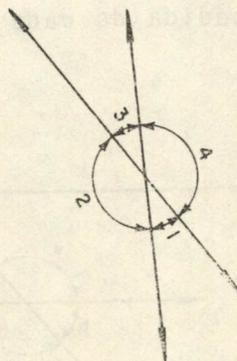
6. Determine la medida de los ángulos sin auxilio del transportador, observando el dibujo.

$\hat{1} = 32^\circ$

$\hat{2} =$

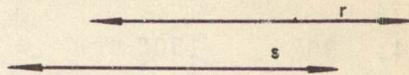
$\hat{3} =$

$\hat{4} =$

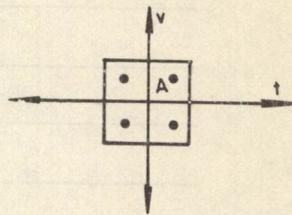


7. Dé el nombre de los pares de rectas representados en el dibujo:

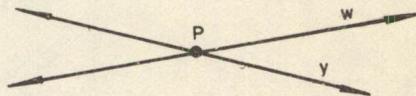
Rectas _____



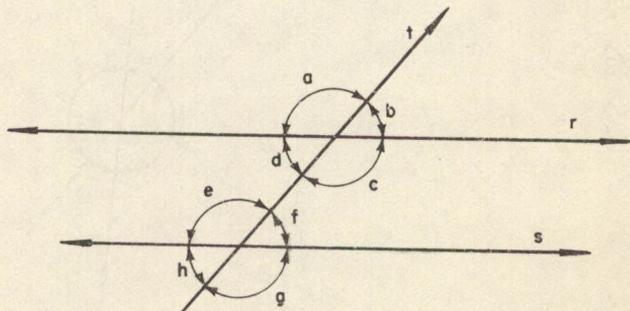
Rectas _____



Rectas _____



8. Determine la medida de cada uno de los ángulos desconocidos.

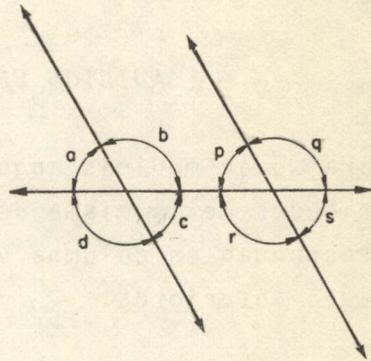


$$\begin{aligned}\hat{a} &= 130^\circ \\ \hat{b} &= \text{---} \\ \hat{c} &= \text{---} \\ \hat{d} &= \text{---}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{e} &= \text{---} \\ \hat{f} &= \text{---} \\ \hat{g} &= \text{---} \\ \hat{h} &= \text{---}\end{aligned}$$

9. Complete observando la figura:

$$\begin{aligned}\text{Si } \hat{b} &= 70^\circ \text{ entonces } \hat{r} = \\ \text{Si } \hat{c} &= 65^\circ \text{ entonces } \hat{p} = \\ \text{Si } \hat{s} &= 65^\circ \text{ entonces } \hat{a} = \\ \text{Si } \hat{q} &= 80^\circ \text{ entonces } \hat{d} = \\ \text{Si } \hat{a} &= 20^\circ \text{ entonces } \hat{p} =\end{aligned}$$



RESPUESTAS

$$\begin{aligned}6. \quad 2 &= 148^\circ \\ 3 &= 32^\circ \\ 4 &= 148^\circ\end{aligned}$$

7. paralelas, perpendiculares, concurrentes

$$\begin{aligned}8. \quad \hat{b} &= 50^\circ & \hat{e} &= 130^\circ \\ \hat{c} &= 130^\circ & \hat{f} &= 50^\circ \\ \hat{d} &= 50^\circ & \hat{g} &= 130^\circ \\ & & \hat{h} &= 50^\circ\end{aligned}$$

$$9. \hat{r} = 70^\circ$$

$$\hat{p} = 65^\circ$$

$$\hat{a} = 65^\circ$$

$$\hat{d} = 80^\circ$$

$$\hat{p} = 20^\circ$$

A continuación usted practicará las operaciones con ángulos

ADICIÓN DE MEDIDAS ANGULARES

Para sumar medidas angulares, usted debe colocar las unidades de la misma denominación (de modo que se correspondan en columna vertical) tal como se vio en unidades anteriores.

Observe la operación siguiente:

32° 17' 30"	Sólo se pueden sumar cantidades
+ 19° 13' 15"	de la misma especie, esto es,
51° 30' 45"	segundos con segundos, minutos
	con _ _ _ _ _ y grados con _
	_ _ _ _ _ .

No obstante, en la adición de medidas angulares, a veces se hace necesario usar la relación existente entre las unidades de medida.

$$\begin{array}{r}
 17^{\circ} \ 36' \\
 35^{\circ} \ 45' \\
 \hline
 52^{\circ} \ 81'
 \end{array}$$

1 GRADO (°) 60 MINUTOS (')
 1 MINUTO (') 60 SEGUNDOS (")

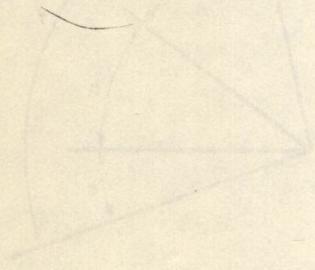
Esta adición da en su resultado 81 minutos, esto es, un grado y veintiún minutos (1°21')

Tenemos que dar entonces nueva forma a la suma (resultado), es decir, pasará a ser: 53°21'. Veamos por qué:

Dividimos 81' por 60' y el cociente nos dará el número de grados. El residuo, si lo hay, nos indica el número de minutos.

$$\begin{array}{r}
 1^{\circ} \\
 17^{\circ} 36' \\
 + 35^{\circ} 45' \\
 \hline
 52^{\circ} 81' \\
 53^{\circ} 21'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 81 \overline{) 60} \\
 21 \overline{) 1}^{\circ}
 \end{array}$$

Observe ahora estos otros ejemplos:



$$\begin{array}{r}
 1^{\circ} \\
 35^{\circ} 16' \\
 + 45^{\circ} 45' \\
 \hline
 80^{\circ} 61' \\
 81^{\circ} 1'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1' \\
 17^{\circ} 42'' \\
 + 20^{\circ} 41'' \\
 \hline
 37^{\circ} 83'' \\
 38^{\circ} 23''
 \end{array}$$

EJERCICIOS

1. Adicionar las siguientes medidas angulares:

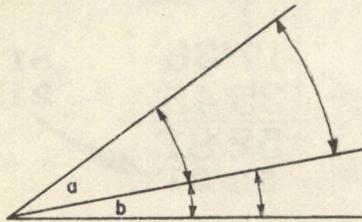
a) $31^\circ 17' + 3^\circ 38'$

b) $105^\circ 18' + 25^\circ 17' + 10^\circ 25' =$

c) $21' 30'' + 2^\circ 13' 40'' =$

d) $2^\circ 45' + 10^\circ 10'' =$

2. Calcule la medida del ángulo X :



$$\hat{a} = 27^\circ 25'$$

$$\hat{b} = 16^\circ 13'$$

$$\hat{x} = \hat{a} + \hat{b} =$$

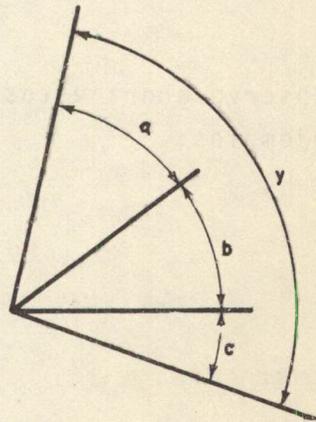
3. ¿Cuál es la medida del ángulo Y ?

$$\hat{a} = 42^\circ$$

$$\hat{b} = 36^\circ$$

$$\hat{c} = 19^\circ$$

$$\hat{y} = \text{---}$$



Corrija los resultados

1. a) $34^\circ 55'$

b) 141°

c) $2^\circ 35' 10''$

d) $12^\circ 45' 10''$

2. $43^{\circ} 38'$

3. 97°

SUSTRACCION DE MEDIDAS ANGULARES

Para la sustracción de medidas angulares se procede del mismo modo que para la adición, haciendo corresponder en columna las unidades de la misma denominación y, cuando sea necesario, teniendo en cuenta la relación existente entre las mismas.

Observe la operación

$$\begin{array}{r} 49^{\circ} 20' \\ 20^{\circ} 14' \\ \hline 29^{\circ} 6' \end{array}$$

¿Cuándo es posible hacer una sustracción?

Es posible hacer una sustracción cuando las cantidades del minuendo son mayores o iguales a las del sustraendo.

Pero, ¿cómo se resolvería la sustracción siguiente?

$$\begin{array}{r} 74^{\circ} 5' \\ - 18^{\circ} 16' \\ \hline ? \end{array}$$

De $5'$ no se puede sustraer $16'$...

En casos como éste la sustracción se hará de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 73^\circ 65' \\ - 74^\circ 5' \\ \hline 18^\circ 16' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73^\circ 65' \\ 74^\circ 5' \\ - 18^\circ 16' \\ \hline 55^\circ 49' \end{array}$$

Se presta un grado (60') a los 74° y se le suma a los 5'. El minuendo queda convertido en 73° 65'.

Dicho de otra manera, de los 74° fue retirado 1' quedando entonces 73°.

Este grado fue transformado en minutos (1° = 60') que se le suma a los 5' existentes.

60' + 5' = 65' y así sí es posible la sustracción.

Observe con atención los ejemplos y complete donde haga falta:

a)
$$\begin{array}{r} 12^\circ 76' \\ 13^\circ 16' \\ - 8^\circ 27' \\ \hline 4^\circ 49' \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 34^\circ 85' \\ 35^\circ 25' \\ - 17^\circ 35' \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 12' 16'' \\ - 9' 40'' \\ \hline 2' 36'' \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} \text{---} \\ 10' 25'' \\ - 8' 45'' \\ \hline \end{array}$$

9 85
8 45
1140

e)
$$\begin{array}{r} 74' 78'' \\ 11^\circ 75' \\ 12^\circ 15' 18'' \\ - 9^\circ 20' 25'' \\ \hline 2^\circ 54' 53'' \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{r} \text{---} \\ 20^\circ 10' 35'' \\ - 18^\circ 15' 30'' \\ \hline \text{---} \end{array}$$

Corrija sus respuestas

b) $17^{\circ} 50'$

c) $11'76''$

d) $9' 85''$

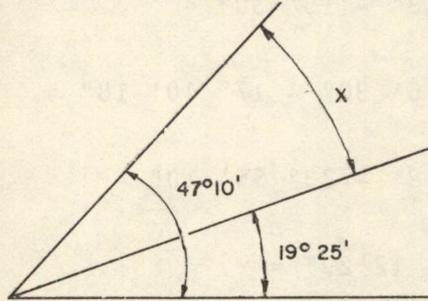
d) $1' 40''$

f) $19^{\circ} 70'$

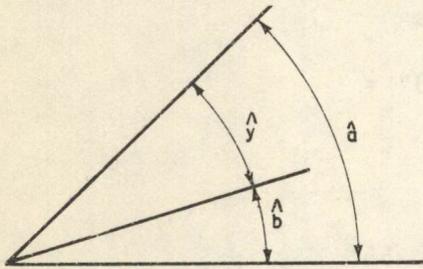
f) $1^{\circ} 55' 5''$

Continúe

1. Calcule la medida del ángulo X :



2. ¿Cuál es la medida del ángulo Y?

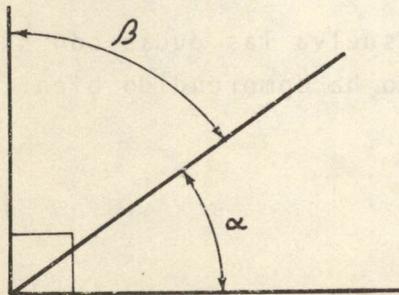


$$\hat{a} = 35^{\circ}$$

$$\hat{b} = 10^{\circ} 15''$$

$$\hat{y} = a - b$$

3. Halle la medida β (beta)



$$\hat{\alpha} = 35^{\circ} 25'$$

$$\hat{\beta} = 90^{\circ} - \alpha$$

4. Calcule:

a) $45^{\circ} 30' - 22^{\circ} 15' =$

b) $53^{\circ} - 19^{\circ} 45' =$

c) $65^{\circ} 17' - 42^{\circ} 36'' =$

d) $20' 18'' - 15' 30'' =$

e) $28^{\circ} 16' 30'' - 17^{\circ} 40' 18'' =$

f) $47^{\circ} 48' - 23^{\circ} 55' 10'' =$

g) $45^{\circ} - 12' 29'' =$

h) $36' - 18' 30'' =$

i) $56^{\circ} 17'' - 5^{\circ} 10' 10'' =$

5. Efectúe:

$18^{\circ} 36' - 15^{\circ} 42' 37'' + 3^{\circ} 55'$

Corrija sus respuestas. Resuelva las dudas con su Instructor. No siga si aún no ha comprendido bien.

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 46^\circ 70' \\
 \quad 47^\circ 10' \\
 \quad \underline{19^\circ 25'} \\
 X = 27^\circ 45'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2. \quad 34^\circ 59' 60'' \\
 \quad \underline{10^\circ \quad 15''} \\
 Y = 24^\circ 59' 45''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3. \quad 89^\circ \\
 \quad 90^\circ 60' \\
 \quad \underline{35^\circ 25'} \\
 \beta = 54^\circ 35'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4. \quad a) \quad 45^\circ 30' \\
 \quad \underline{22^\circ 15'} \\
 \quad 23^\circ 15'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 b) \quad 52^\circ \\
 \quad 53^\circ 60' \\
 \quad \underline{19^\circ 45'} \\
 \quad 33^\circ 15'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \quad \quad \quad 16' \\
 c) \quad 65^\circ 17' 60'' \\
 \quad \underline{42^\circ \quad 36''} \\
 \quad 23^\circ 16' 24''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 d) \quad 19' 78'' \\
 \quad 20' 18'' \\
 \quad \underline{15' 30''} \\
 \quad 4' 48''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 e) \quad 27^\circ 76' \\
 \quad 28^\circ 16' 30'' \\
 \quad 17^\circ 40' 18'' \\
 \quad \underline{\quad \quad \quad} \\
 \quad 10^\circ 36' 12''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{f)} \quad 107' \\
 46^\circ \quad 47' \\
 47^\circ \quad 48' \quad 60'' \\
 \hline
 23^\circ \quad 55' \quad 10'' \\
 \hline
 23^\circ \quad 52' \quad 50'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{g)} \quad 44^\circ \\
 45^\circ \quad 59' \quad 60'' \\
 \hline
 \quad \quad 12' \quad 29'' \\
 \hline
 44^\circ \quad 47' \quad 31''
 \end{array}$$

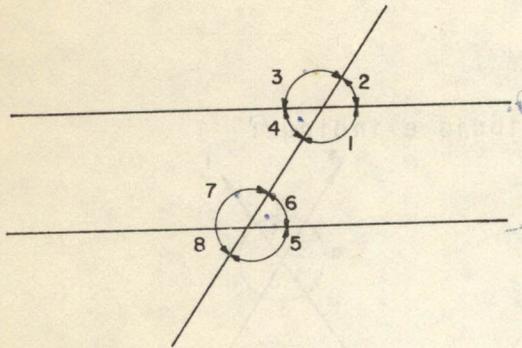
$$\begin{array}{r}
 \text{h)} \quad 35' \\
 36' \quad 60'' \\
 \hline
 18' \quad 30'' \\
 \hline
 17' \quad 30''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{i)} \quad 55^\circ \\
 56^\circ \quad 60' \quad 17'' \\
 \hline
 \quad \quad 5^\circ \quad 10' \quad 10'' \\
 \hline
 50^\circ \quad 50' \quad 7''
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5. \quad \quad \quad 95' \\
 17^\circ \quad 35' \\
 - \quad 18^\circ \quad 36' \quad 60'' \\
 \hline
 15^\circ \quad 42' \quad 37'' \\
 \hline
 \quad \quad 2^\circ \quad 53' \quad 23'' \\
 + \quad \quad 3^\circ \quad 55' \\
 \hline
 \quad \quad 5^\circ 108' \quad 23'' \\
 \quad \quad 6^\circ \quad 48'
 \end{array}$$

EVALUACION FINAL

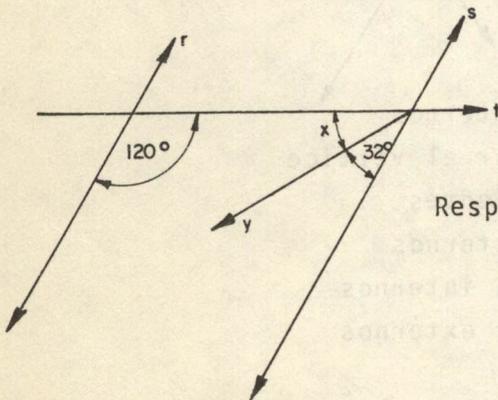
1. Determine la medida de los ángulos desconocidos siendo $r \parallel s$. (\parallel) paralela



- 1 =
2 =
3 =
4 = 75°
5 =
6 =
7 =
8 =

Valor 35%

2. Halle el valor de X



Respuesta =

Valor 15%

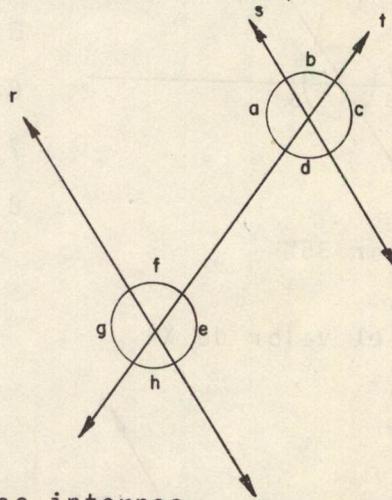
3. Realice las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{r} \text{a) } 35^\circ \quad 27' \quad 36'' \\ - 23^\circ \quad 43' \quad 52'' \\ \hline \end{array}$$

Valor 20%

$$\begin{array}{r} \text{b) } 35^\circ \quad 27' \quad 36'' \\ + 23^\circ \quad 43' \quad 52'' \\ \hline \end{array}$$

4. Observe el siguiente dibujo e indique:



- 1) ángulos alternos internos
- 2) ángulos opuestos por el vértice
- 3) ángulos correspondientes
- 4) ángulos alternos externos
- 5) ángulos colaterales internos
- 6) ángulos colaterales externos

Valor 30%

RESPUESTAS A LA EVALUACION FINAL

1. 1 = 105°

2 = 75°

3 = 105°

4 = 75°

5 = 105°

6 = 75°

7 = 105°

8 = 75°

2. X = 28°

3. a) $11^\circ 43' 44''$

b) $59^\circ 11' 28''$

4. 1) a y e; f y d

2) a y c; b y d; f, h; g, e

3) a y g; b y f; c y e; d y h

4) b y h; g y c

5) a y f; d y e

6) c y h; g y b

Esta unidad fue traducida y adaptada por el SENA con la
autorización de SENAI.