Serie

Desarrollo del pensamiento matemático

Nº 3

La adición

372.7
And.
Desarrollo del pensamiento matemático:
La Adición
Federación Internacional Fe y Alegría, 2004.
30 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-6418-68-9
Adición, Suma, Resolución de Problemas.

“La educación actual está concebida para que el individuo rinda cuentas sobre resultados del saber y no para que acceda a pensar en los procesos que condujeron a ese saber. Esta forma de educación le ahorra a uno la angustia de conocer, lo cual es un pésimo negocio, tanto en la educación como en cualquier otro campo del saber”

Estanislao Zuleta

Equipo editorial
Antonio Pérez Esclarín, María Bethencourt

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Serie: Adición, número 3
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del **«Programa Internacional de Formación de Educadores Populares»** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.

Diseño y diagramación: Juan Bravo
Portada e ilustraciones: Juan Bravo
Corrección de textos: Margarita Arribas

Edita y distribuye: Federación Internacional Fe y Alegría.
Esquina de Luneta, Edif. Centro Valores, piso 7, Altagracia,
Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212) 5645624 / 5645013 / 5632048
Fax (58) (212) 5646159
web: www.feyalegria.org

© Federación Internacional Fe y Alegría
Depósito Legal: lf 60320047003669
ISBN: 980-6418-68-9
Caracas, noviembre 2004

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis
Instituto Internacional para la Educación Superior
en América Latina y el Caribe (IESALC)

A modo de

introducción…

… y para desperezarnos un poco, ahí van unas cuestiones sencillas para entrar en materia y en calor. Tratemos de resolverlas antes de seguir adelante.

*La suma de tres números impares consecutivos es **81**. ¿Cuál es el menor de ellos?*

Si tengo una suma indicada, con los sumandos alineados en columna y ordenados, ¿es posible sumar de izquierda a derecha? ¿Tiene alguna utilidad sumar así?

*¿Qué significan los términos **numerador** y **denominador**?*

¿Qué número sigue en la secuencia: 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, __?

*¿Es posible la suma de **0,0157 millones** y **26,83 decenas**? Y de serlo, ¿en qué unidades puedo dar el resultado?*

Entre los números 300 y 600, ¿cuántos números hay, tales que la suma de los tres dígitos sea el doble de la cifra de las centenas del propio número?

*¿Para qué sirven las propiedades **conmutativa**, **asociativa** y **de existencia de elemento neutro** de la suma? ¿Simplemente para aprenderlas?*

¿Qué le ocurre a la suma de dos sumandos si a cada sumando se le añade una decena? ¿Y si al primero se le agrega una unidad y al segundo se le quita una unidad? ¿Qué puedo hacerles a los sumandos si deseo que la suma aumente en 3 unidades?

1. *¿Cuál es la cifra que aparecerá en el lugar de las **decenas** al realizar la siguiente suma: 6 + 66 + 666 + … + 6.666.666?* **(*)**

Bien, ya tenemos nuestras respuestas, que iremos contrastando con las indicaciones y ejercicios que plantearemos a lo largo de las líneas que siguen.

(*) Aviso a los navegantes: Las respuestas a los ejercicios precedidos por un número en negrita aparecen al final del Cuaderno. Las respuestas a los ejercicios que no se encuentran precedidos por un número no las encontrarás en este Cuaderno. Dichas respuestas son para que las construyas y valides con tu grupo de trabajo.

Y un segundo recordatorio:

La sugerencia que formulábamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento– y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo tales, que abran ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico ma-

temático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales…– que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel– ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno.

1. ¿Qué es la adición (o suma)?

La primera respuesta que se nos ocurre es que, evidentemente, se trata de un objeto matemático. Y si le entramos con un poco más de precisión, es una operación aritmética. Como tal, y en el ámbito de una matemática formalizada, la adición puede entenderse como una aplicación de N x N en N

N es el conjunto de los números naturales: **0, 1, 2, 3…**
N x N es el conjunto de todos los pares posibles de números naturales. Son elementos de este conjunto, por ejemplo, los pares (**0 , 1**), (**15 , 26**), (**2 , 1**), (**0 , 0**), (**3 , 3**), etc.

según la cual, a cada par de números naturales se le hace corresponder otro número natural: su suma. Así, al par (**0 , 1**) se le hace corresponder el número **1** (0 + 1); al par (**15 , 26**), el número **41** (15 + 26), etc.

La anterior es una manera “formal” de decir las cosas, pero con esto no nos aclaramos mucho, ya que debemos precisar cómo es que se suma, es decir, cómo es que se llega a 41 partiendo de 15 y de 26. Para ello vamos a referirnos a dos conjuntos, **A** y **B**. Supongamos que A cuenta con 15 elementos y B con 26, y que no comparten ningún elemento en común. En términos formales se dice que el *cardinal* de A es 15, que el de B es 26, y que los conjuntos A y B son *disjuntos*. La suma de 15 más 26 expresa el cardinal de la *unión de los conjuntos* A y B. Es decir, si se reúnen los elementos de A y de B en un solo conjunto (el conjunto unión de A y B), éste contará con 41 elementos: 41 es la suma de 15 y 26.

Así que, para pensar en la suma de dos números, debemos imaginarnos que hay dos conjuntos; que uno de ellos posee tantos elementos como lo indica uno de los números; que el otro posee tantos elementos como lo indica el otro número a sumar; que no hay elementos compartidos entre ambos conjuntos; que se unen los dos conjuntos en uno solo; y que se cuentan los elementos de este nuevo conjunto. El resultado de este conteo es la suma de los dos números iniciales.

La suma de dos números naturales representa, pues, el cardinal de la unión de dos conjuntos disjuntos, en el supuesto de que los dos números representan inicialmente –uno cada uno– los cardinales de los dos conjuntos.

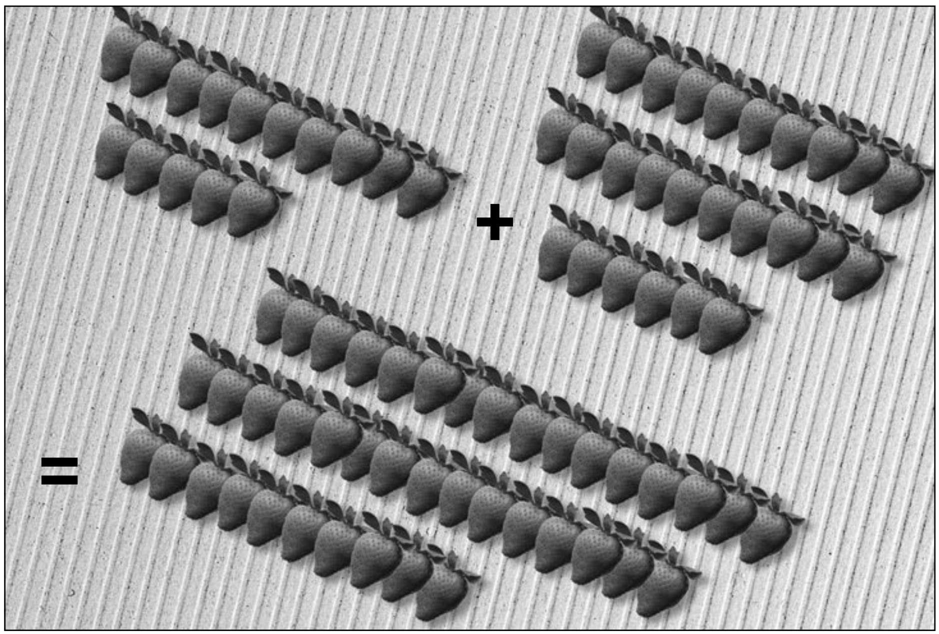
Insistimos: lo que va hasta aquí es la respuesta formal a la pregunta de qué es la adición. Pero, afortunadamente, ésta no es la única respuesta. Porque la adición también puede ser vista como un *modelo de situaciones* de la vida diaria, o de situaciones lúdicas, o de otras áreas del saber. En este sentido, la adición se convierte en una herramienta que nos permite interpretar matemáticamente las situaciones que se presentan en nuestra vida.

¿Y cuáles, o de qué naturaleza, son estas situaciones para las que la adición puede presentarse como modelo? Fundamentalmente, dos:

1. Situaciones de *agrupar*, reunir, juntar… lo que aportan varios simultáneamente.

2. Situaciones de *agregar*, añadir… algo a lo que ya existe.

Estas situaciones suelen venir caracterizadas –en la interpretación verbal



que de ellas hace el sujeto– por verbos tales como recibir, agregar, ganar, reunir, adquirir, obtener, acumular, guardar… y otros similares. En estas circunstancias, la operación aritmética de la adición nos ayuda a llegar al resultado de calcular el total de las cantidades recibidas, agregadas, ganadas, reunidas, etc.

En resumen, hay dos formas de considerar la adición: como un *modelo de situaciones de la vida diaria* y como un *objeto de estudio formal* dentro de la matemática (**Vergnaud**, 1991; **Gadino**, 1996).

Obsérvese que no hay contradicción entre ambas formas de considerar la suma, sino más bien complementariedad. Basta fijarse en que la situación de juntar, reunir, se corresponde perfectamente con el concepto formal de suma como se definió anteriormente (formar la unión de los dos conjuntos y contar el número de sus elementos). Pero sí conviene resaltar que en el proceso de adquisición del concepto, de los procedimientos y de las destrezas propias de la suma, es preferible entrar por la vía del modelo de situaciones, y considerar el estudio formal –con su lenguaje específico– como una meta posterior.

Y justamente al tomar esa vía percibimos que en las situaciones de reunir o de agregar de las que es modelo la adición, resulta imprescindible que los elementos que se reúnen o agregan sean de la misma naturaleza.

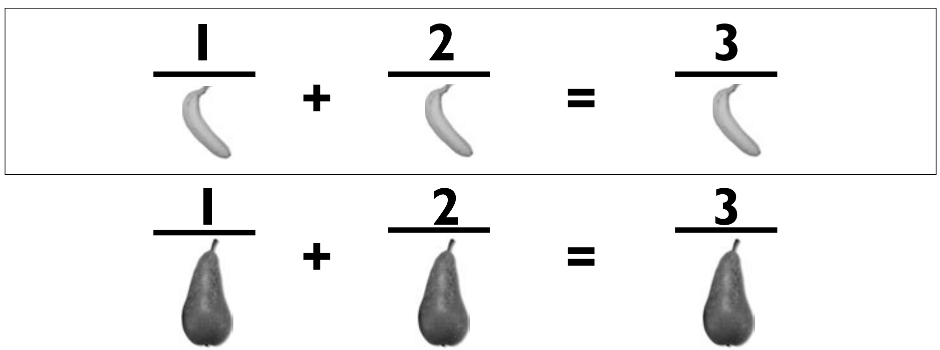
2. Numeradores y denominadores

Más de un(a) lector(a) avispado(a) se estará preguntando: pero bueno, si estamos hablando de suma de números naturales, ¿para qué evocar aquí, de repente, las fracciones? Si nos pica la curiosidad, sigamos leyendo.

Cuando en un ambiente matemático –curso, taller, seminario, etc.– se pregunta qué significa “numerador”, habitualmente suele contestarse: “el número que va en la parte superior de las fracciones”. Y de una forma análoga se responde para el caso del término “denominador”. Algunas respuestas intentan ser un poco más precisas y se refieren, por ejemplo, al denominador como “el número que expresa la cantidad de partes iguales en que se ha dividido la unidad, cuando se habla de las fracciones”.

Ahora bien, tratemos de responder a estas otras preguntas: ¿Qué significa “conductor”? Sencillamente, el que conduce. ¿Y “extractor”? El –o lo– que extrae. ¿“Animador”? El que anima. ¿“Relator”? El que relata. Y así siguiendo.

Volvamos ahora a nuestros dos términos. ¿Qué significa *numerador*? Lo que numera, lo que sirve para numerar; en particular, cada término o expresión que se utiliza para numerar. Y *denomi-*



$$\frac{1}{100} + \frac{2}{100} = \frac{3}{100}$$

nador, lo que denomina o sirve para denominar; y en particular, cada término o expresión que se utiliza para denominar.

Si repasamos ahora la gramática, encontramos que existe una parte de la oración que se refiere a los términos utilizados para numerar: son los *adjetivos numerales* (dos, cinco, etc.). Y otra que se refiere a los términos utilizados para denominar o nombrar cualquier objeto o entidad: son los *sustantivos* o *nombres comunes* (casa, mesa, decena, manzana, niña, kilo, metro, hora, etc.).

De esta forma, cada vez que en nuestro hablar expresamos un adjetivo numeral seguido de un sustantivo, estamos utilizando un binomio numerador-denominador. Así, en la locución "tres sillas", tres es el numerador; sillas, el denominador. Análogamente, al hablar de "cinco centenas". Como puede apreciarse, la aparición de los términos numerador y denominador en el discurso matemático no debe reservarse para el momento en que se entra en el terreno de las fracciones, sino justamente desde que se mencionan cantidades referidas a alguna entidad particular.

Estas precisiones tienen su aplicación inmediata en el ámbito de la suma. En efecto, si tengo 3 bananos, los puedo sumar con otros 5 para llegar a un total de 8 bananos. ¿Por qué puedo efectuar esta suma? Porque en ambos casos tenemos el mismo denominador: bananos. En cambio, si tengo 3 bananos y 7 peras, no puedo realizar la suma inmediatamente. Pero nuestro(a) lector(a) avispado(a) ya ha llegado a una respuesta: si reúno todo, tengo 10… frutas. ¿Por qué puedo dar esta nueva respuesta? Porque he encontrado un *denominador común* para bananos y peras: frutas.

2 /  + 3 /  = NO

$$\frac{2}{\text{Frutas}} + \frac{3}{\text{Frutas}} = \frac{5}{\text{Frutas}}$$

En situaciones concretas, sólo se pueden sumar cantidades referidas a un mismo denominador. En otros términos, sólo se pueden sumar numeradores referidos a un denominador común (y no estamos hablando solamente de fracciones…).

Pero no podemos quedarnos sólo con las situaciones concretas. La suma también es un objeto de estudio matemático y, como tal, abstracto. Necesitamos estudiar la suma en el terreno de lo abstracto. Y el primer paso hacia ese terreno consiste en prescindir de los objetos o entidades que se suman, es decir, de los denominadores. Y así llegamos a las *expresiones simbólicas* de la adición. Por ejemplo, $3 + 7 = 10$, con sus símbolos numéricos (numeradores) 3 y 7, y sus signos de relación "más" e "igual".

El uso adecuado de las expresiones simbólicas requiere dominar dos aspectos: el conceptual y el procedimental. El dominio del aspecto conceptual significa entender lo que está expresado ahí, en los símbolos numéricos y en los signos de relación. Para nosotros los adultos no hay mayor problema; todo esto ya es parte de nuestra cultura básica. Pero, para quienes están asimilando estos conceptos por primera vez, resulta fundamental la referencia a lo concreto, a situaciones concretas.

En otras palabras, quien empieza a construir sus conocimientos sobre la suma no puede entrar de una vez al terreno abstracto de lo simbólico; necesita experimentar antes en el terreno de las situaciones concretas –con numeradores y denominadores–. Sólo después puede aventurarse con los numeradores aislados de los denominadores, y con las expresiones simbólicas.

Y si experimenta dificultades de comprensión en este terreno de lo simbólico, resulta inútil intentar resolverlas en el mismo terreno: hay que *regresar a lo concreto*, hay que agregar denominadores a los numeradores que se suman, pues sólo de esta manera se *dota de significado a lo simbólico*.

Decíamos más arriba que el uso adecuado de las expresiones simbólicas requiere dominar también el aspecto procedimental. Debemos hablar, pues, de los algoritmos de la suma, de los procedimientos para sumar. Y en este preciso momento, el sistema decimal de numeración nos está pidiendo permiso para entrar en escena. Adelante.

3. Sumar en el sistema decimal de numeración

Si no dispusiéramos de sistemas de numeración, la suma quedaría reducida a una operación de apilamiento y conteo de elementos. Pero el aporte fundamental de los sistemas –poder representar numéricamente las cantidades– resulta de vital importancia para operar con números. Y más todavía si se trata del sistema decimal de numeración, por su transparencia interna.

Lo primero que debemos tomar en cuenta es que todas las unidades de los diversos órdenes –en virtud de la "democracia" que reina dentro del sistema decimal– tienen rango de "denominadores". Como decíamos antes, podemos hablar de 5 centenas, 13 décimas, etc. Por consiguiente, en principio sólo podemos sumar directamente cantidades referidas a unidades del mismo orden –de igual denominador–. Así, 5 centenas + 12 centenas + 0,31 centenas nos da como resultado 17,31 centenas.

Por cierto, esta es la razón –muchas veces silenciada– de por qué suele sugerirse la norma de "ordena y suma" cuando se trata de resolver sumas con los sumandos escritos verticalmente…

Afortunadamente, ya sabemos que todo número puede tener múltiples lecturas, al poder referirse a cualquiera de los órdenes de unidades del sistema decimal. Es decir, cualquier número puede adoptar un nuevo denominador, modificando adecuadamente el numerador dado. Así, **5 centenas** puede convertirse en:

50 **decenas**
500 **unidades**
5.000 **décimas**
0,5 **unidades de mil**
0,05 **decenas de mil**
0,0005 **millones**
etc.

De esta forma, siempre puede sumarse cualquier conjunto de números, con tal de que se reduzcan a un denominador común, el que se desee o el que más convenga. En esta tarea, el cartel de posición se convierte en un aliado eficaz, sobre todo al comienzo del aprendizaje.

Tomemos, por ejemplo, el ejercicio propuesto al comienzo del Cuaderno: ¿Es posible la suma de **0,0157 millones** y **26,83 decenas**? Y de serlo, ¿en qué unidades puedo dar el resultado? Llevemos estos números al cartel de posición y coloquémoslos en las dos primeras filas, reservando la tercera para el resultado de la suma –resultado que, intencionalmente, se escribirá sin ninguna coma–:

Parte entera Orden y nombre de las unidades							Parte decimal Orden y nombre de las unidades					
6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
Millón	Centena de mil	Decena de mil	Unidad de mil	Centena	Decena	Unidad	Décima	Centésima	Milésima	Diez-milésima	Cien-milésima	Millo-nésima
		1	5	7								
				2	6	8	3					
		1	5	9	6	8	3					

El resultado admite diversas lecturas (diversos binomios numerador-denominador):

0,0159683 **millones**
15,9683 **unidades de mil**
1.596,83 **decenas**
15.968,3 **unidades**
1.596.830 **centésimas**
(agregue alguno más…)

4. El asunto de la "llevada"

Un segundo aspecto en el que debemos tomar en cuenta las características del sistema decimal de numeración es el de la "llevada", es decir, cuando la suma de dos dígitos correspondientes al mismo orden de unidades sobrepasa el valor de 9. Aquí entra en juego el propio ser del sistema decimal, ya que su esencia consiste precisamente en que al llegar a tener 10 unidades de un orden, estas se convierten en 1 unidad del orden inmediatamente superior. Así, 10 decenas equivalen a 1 centena, 10 milésimas equivalen a 1 centésima, 10 centenas de mil equivalen a un millón, etc.

Este principio, tan básico y tan sencillo en su formulación, tarda en ser asimilado y llevado a la práctica. Los errores de los niños –y de algunos adultos– al respecto son frecuentes y, generalmente, producto de un aprendizaje mecánico, privado de significado. Errores graves, por cuanto denotan que no se comprende el funcionamiento del sistema decimal.

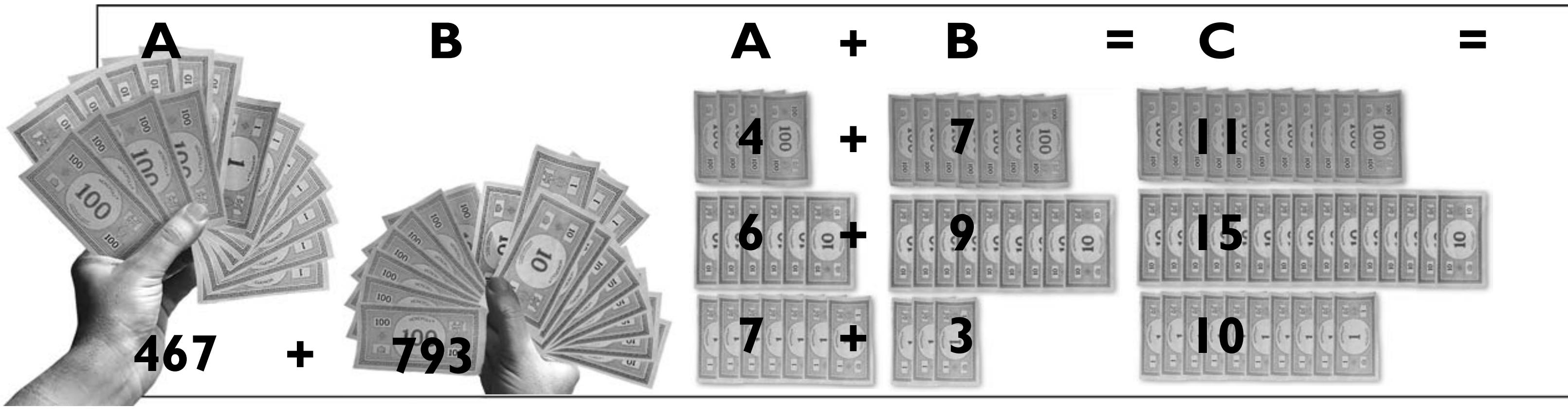
Lo peor del caso es que habitualmente se intenta corregirlos sobre el propio esquema numérico escrito en que se propone la suma

(por ejemplo: 467
____________793 +)

insistiendo en fijarse en las sumas parciales en las que hay "llevada", fijarse en que hay que colocar un "1" sobre las columnas a las que "se lleva", etc., sin percatarse de que los errores cometidos al utilizar los esquemas simbólicos –esquemas que son abstractos–, sólo pueden corregirse retornando al terreno de lo concreto, que es donde se puede alcanzar el significado de la suma.

¿Cuál puede ser este terreno concreto en el que se respete la esencia del sistema decimal? Puede ser el de los billetes de denominación decimal (1, 10, 100, 1.000, 0,1, 0,01, etc.). Por ejemplo, en el caso de la suma anterior, sumar **467 + 793** significa, en primer lugar, entender cada uno de los números: 467 es un número "complejo", compuesto por **4 centenas**, **6 decenas** y **7 unidades**; y análogamente lo es **793**.

Sumar ambos números significa que voy a recibir, primero, **4** billetes de **100**, **6** de **10** y **7** de **1**, y después, **7** billetes



de **100**, **9** de **10** y **3** de **1**. Agrupados por "denominadores", voy a disponer de **11** billetes de **100**, **15** de **10** y **10** de **1**. El proceso de "ir al banco" para cambiar billetes produce los siguientes resultados:

Los 10 billetes de 1 se convierten en **1** de **10**; no me queda ningún billete de 1 y tengo 1 billete más de 10, con lo que el número de éstos llega a **16**. Llevados **10** de estos billetes al banco, se convierten en **1** de **100**; me quedan **6** de **10** y tengo 1 billete más de 100, con lo que el número de éstos llega a **12**. Finalmente, estos últimos se convierten en **1** billete de **1.000**, al cambio de 10 de 100, y 2 sobrantes de 100. Al final del proceso de cambios tengo: **1** billete de **1.000**, **2** de **100**, **6** de **10** y ninguno (**0**) de **1**. La composición de estas partes me lleva al número suma, **1.260**.

Todo este proceso puede simbolizarse de la siguiente forma (**UM**, **C**, **D** y **U** representan, respectivamente, Unidades de Mil, Centenas, Decenas y Unidades):

UM	C	D	U	
	4	6	7	
	7	9	3	+
		1	0	unidades (de sumar 7 + 3)
	1	5		decenas (de sumar 6 + 9)
1	1			centenas (de sumar 4 + 7)
1	**2**	**6**	**0**	

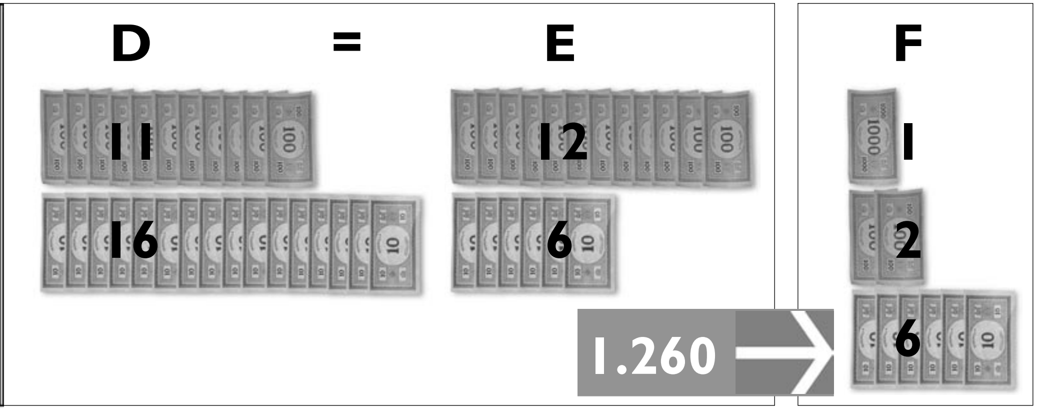
Pero obsérvese que esta suma, así desglosada, puede realizarse en cualquier orden:

UM	C	D	U	
	4	6	7	
	7	9	3	+
1	1			centenas (de sumar 4 + 7)
	1	5		decenas (de sumar 6 + 9)
		1	0	unidades (de sumar 7 + 3)
1	**2**	**6**	**0**	

UM	C	D	U	
	4	6	7	
	7	9	3	+
	1	5		decenas (de sumar 6 + 9)
1	1			centenas (de sumar 4 + 7)
		1	0	unidades (de sumar 7 + 3)
1	**2**	**6**	**0**	

De modo que –y respondiendo a una de las preguntas iniciales del Cuaderno– sí es posible sumar de izquierda a derecha (y después veremos su utilidad, las circunstancias en que conviene sumar de este modo).

Pero lo que más importa resaltar, siguiendo la línea del discurso anterior, es que este recurso a lo concreto –billetes decimales– y a la diversidad de los esquemas operativos simbólicos, debe preceder al ejercicio de la suma de números dispuestos en columna, tal como se propone habitualmente. Y debe

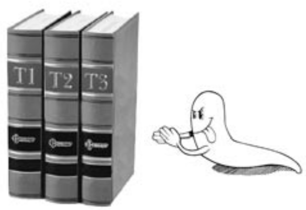


quedar ahí, disponible, para dotar de significado a dicho ejercicio cada vez que el aprendiz presente dificultades o cometa errores en su realización.

2. *En los ejercicios que siguen, efectuaremos la suma de los respectivos números A y B (entre paréntesis, el orden de unidades en que formularemos la respuesta):*

a) A: *173 unidades y 48 milésimas*
B: *37 centenas, 907 décimas y 3 milésimas (en décimas)*
b) A: *0,136 decenas de mil*
B: *68 decenas y 2 décimas (en decenas)*
c) A: *356 diezmilésimas*
B: *39 décimas y 5 milésimas (en unidades)*
d) A: *1.003 centésimas*
B: *40,89 décimas (en milésimas)*
e) A: *23 centenas de mil, 805 decenas*
B: *un millón y 46 centenas (en unidades de mil)*

3. Una enciclopedia está compuesta de tres tomos que se almacenan en un estante de la biblioteca del siguiente modo (lo que vemos son los lomos de los libros):



Cada tomo contiene 800 páginas. Cada hoja tiene un espesor de 0,005 cm, y cada tapa, de 3 mm. Un comején (un gusanito come-libros) se ubica entre la tapa delantera y la página 1 del tomo 1, e inicia desde ahí su banquete atravesando los tomos hasta la última página del tomo 3. ¿Cuánto habrá recorrido al final de su banquete? (Recuerde que cada 2 páginas constituyen 1 hoja).

5. El desarrollo de destrezas para sumar

Todo lo expresado en los dos puntos anteriores hace referencia a la consideración de la suma en el ámbito del sistema decimal de numeración. Su aplicación más inmediata se ubica en los casos de suma escrita en la que los sumandos se colocan verticalmente. Pero aquí no termina todo lo que se puede decir acerca de esta operación aritmética. Podemos explorar, por ejemplo, el terreno de la adquisición de destrezas –no sólo de reglas– para sumar.

Para ello contamos con las *propiedades de la adición*, tan sabidas como poco utilizadas:

1. *Conmutativa:* El orden en que se consideran dos sumandos no modifica su suma. Por ejemplo, sumar 5 a 8 ó sumar 8 a 5 produce el mismo resultado.

2. *Asociativa:* Si hay más de dos sumandos, el orden progresivo en que “entran” en la suma es indiferente: el resultado siempre es el mismo. Por ejemplo, si hay que sumar 15, 37 y 25, puede hacerse en cualquier orden: 15 más 37 y luego más 25, ó 37 más 25 y luego más 15, ó 25 más 15 y luego más 37 (mejor de esta última manera, ¿no?), etc.

3. *Disociativa* (es decir, la misma propiedad asociativa, pero al revés):

Todo sumando puede descomponerse en partes o sumandos menores de la forma que se quiera, siempre que su "asociación" equivalga al sumando inicial. Por ejemplo, si hay que sumar 117 y 23, se facilita la suma si 117 se disocia (mentalmente, en la práctica) en 110 + 7, y 23 en 20 + 3, lo que permite un reacomodo en la suma: 117 + 23 = 110 + 20 + (7 + 3) = 130 + 10 = 140.

4. *Existencia de elemento neutro:* Es decir, el 0; cuando se suma a una cantidad, ésta no varía. Con lo cual se puede romper la falsa creencia de que sumar dos números siempre produce un resultado mayor que ambos sumandos…

De lo anterior tiene que quedarnos algo bien claro (y con esto respondemos a otra de las preguntas iniciales del Cuaderno): las propiedades de la suma no son simplemente para aprenderlas –porque forman parte de lo que hay que saber–, sino sobre todo para utilizarlas. Porque las propiedades están ahí para *facilitarnos la operación de la suma*, para darnos mayor *libertad* a la hora de sumar.

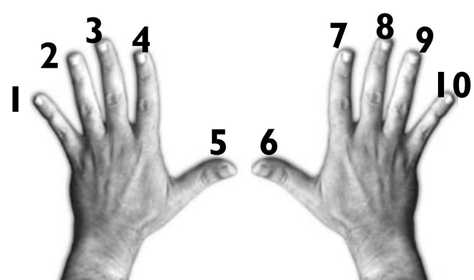
Estamos a las puertas del *cálculo mental* (y de la *estimación*, como veremos más tarde), que no es simplemente el cálculo que se hace "con la cabeza" –es decir, sin papel ni lápiz pero visualizando y simulando mentalmente el mismo proceso de la suma escrita–, sino el cálculo que se hace *utilizando las propiedades de la suma*.

Atención:

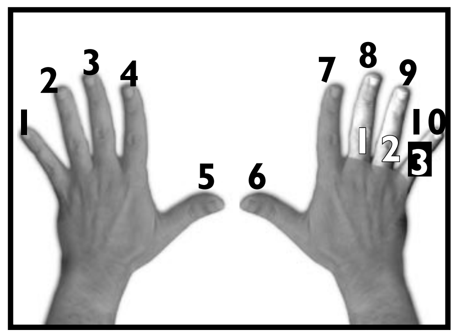
Todo lo que se va a decir ahora no es sólo para entenderlo. Es, sobre todo, para practicarlo. Pero no un par de veces, y ya. La ejercitación frecuente y abundante es requisito indispensable para desarrollar destrezas de cálculo mental. Y esto es muy importante, porque, si no las poseemos, no podremos construirlas con nuestros alumnos.

¿Por dónde puedo empezar la práctica del cálculo mental, es decir, la adquisición de las destrezas para sumar? Por los dedos de las manos. En primer lugar, puedo asociar cada número del 1 al 10 con un dedo específico. Para ello, extiendo las manos (con las palmas hacia abajo) ante mí y numero mentalmente los dedos desde 1, empezando con el meñique de la mano izquierda y terminando en 10, con el meñique de la mano derecha.

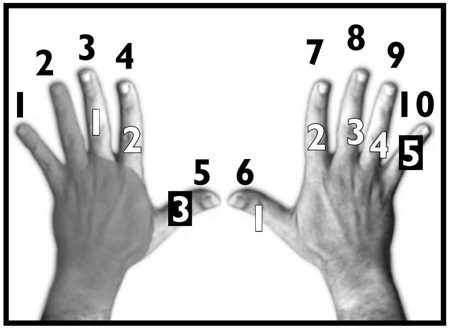
Los dedos de la mano izquierda "van" de **1** a **5**, y los de la derecha, de **6** a **10**. Al tocar un dedo de la mano derecha debo acostumbrarme a descomponerlo en 5 (todos los dedos de la mano izquierda) más el número complementario de dedos de la mano derecha. Así (lo estoy visualizando), **9** equivale a **5 más 4**. Si toco un dedo de la mano izquierda, puedo fijarme en cuántos dedos faltan para completar esa mano. Así (y lo vuelvo a visualizar), a **1** le faltan **4** para llegar a **5**. La práctica debe pasar de lo físico a la visualización de lo físico, y de aquí a lo mental. Obsérvese, de paso, que estamos utilizando la propiedad disociativa…



Una vez que hayamos adquirido esa destreza, podemos pasar a la siguiente: tocar un dedo y ver en ese toque dos cosas: el número que corresponde a ese dedo y el número que corresponde a los dedos que faltan hasta 10 (todos los que se encuentran a su derecha). Si se trata de un dedo de la mano derecha, es más sencillo: si toco el dedo **7**, faltan **3** para llegar a **10**.



Si se trata de un dedo de la mano izquierda, puedo ver cuántos faltan para llegar al pulgar de esa mano (es decir, hasta **5**) y luego agregarle 5 por los dedos de la mano derecha. Así, si toco el dedo **2**, faltan **3** para completar la mano izquierda, y los **5** de la mano derecha, es decir, **8** (8 pensado como **5 + 3**) dedos.



La idea orientadora de esta práctica consiste en acostumbrarnos –si trabajamos con los dígitos del 1 al 9– a ver con cada uno de ellos su complemento a 10. Y esto, de una forma inmediata y espontánea.

En definitiva, al tocar un dedo de la mano izquierda tengo que:

- identificar el número que le corresponde,
- asociar el número que le falta para 5,
- asociar el número que le falta para 10.

Y al tocar uno de la mano derecha:

- identificar el número que le corresponde,
- disociar el número como 5 + …,
- asociar el número que le falta para 10.

En resumen, se trata de adquirir las siguientes destrezas asociativas y disociativas (particularmente, estas últimas):

1+4 = 5	2+3 = 5	3+2 = 5	4+1 = 5
1+9 = 10	2+8 = 10	3+7 = 10	4+6 = 10
5+5 = 10			

5 = 1+4	5 = 2+3	5 = 3+2	5 = 4+1
6 = 5+1	7 = 5+2	8 = 5+3	9 = 5+4
10 = 9+1	10 = 8+2	10 = 7+3	10 = 6+4
	10 = 5+5		
10 = 4+6	10 = 3+7	10 = 2+8	10 = 1+9

Otra de las destrezas que es conveniente alcanzar temprano es la de los *dobles* de los dígitos menores que 5. Para ello pueden juntarse las dos manos, palma con palma y dedo con dedo, y contar: si considero 1 dedo de cada mano, tengo 2 dedos; si considero 2 dedos de cada mano, tengo 4 dedos; y así sucesivamente.

El doble de 1 es **2**; el de 2, **4**; el de 3, **6**; el de 4, **8**; el de 5, **10**.

10 es el doble de **5**; 8, el de **4**; 6, el de **3**; 4, el de **2**; 2, el de **1**.

Tomando como base las destrezas anteriores, podemos pasar a la situación de sumar dos dígitos cualesquiera. Veamos algunos casos (en la práctica, los cálculos no se escriben, sino que se realizan mentalmente; aquí los escribimos para ilustrar la marcha del proceso mental).

Sumar 3 + 4 (dos dígitos menores que 5). Podemos:
- disociar 4 en 3 +1; calcular el doble de 3 (6) y sumar 1
- disociar 4 en 2 + 2; asociar 3 con 2 (5) y sumar 2
- disociar 3 en 2 +1; asociar 4 con 1 (5) y sumar 2

Sumar 2 + 5 (5 y un dígito menor que 5). El resultado es inmediato: es una destreza ya adquirida.

Sumar 7 + 5 (5 y un dígito mayor que 5). Podemos:
- disociar 7 en 2 + 5; asociar 5 con 5 (10) y sumar 2
- disociar 5 en 3 + 2; asociar 7 con 3 (10) y sumar 2

Sumar 8 + 6 (dos dígitos mayores que 5). Podemos:
- disociar 6 en 2 + 4; asociar 8 con 2 (10) y sumar 4
- disociar 8 en 5 + 3 y 6 en 5 + 1; asociar 5 con 5 (10) y sumar 3 + 1
- disociar 8 en 4 + 4; asociar 4 con 6 (10) y sumar 4

Sumar 9 + 9 (el doble de los dígitos mayores que 5). Podemos:

- disociar 9 en 5 + 4 dos veces; asociar 5 con 5 (10) y sumar el doble de 4
- disociar un 9 en 1 + 8; asociar el otro 9 con 1 (10) y sumar 8

A partir de la ejercitación de estas destrezas, y como resultado de las mismas, podemos ahora (no antes) construir las *tablas de la suma* (el número en cada casilla es la suma de los dígitos que encabezan la columna y la fila correspondientes a esa casilla; por otro lado, cada columna, o cada fila, es la tabla de sumar correspondiente al dígito que la encabeza):

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Estas tablas deben llegar a ser aprendidas de memoria, porque este es el modo adulto de manejarlas. Pero esto no significa que aprenderlas de memoria sea el punto de partida; más bien es el punto de llegada. El punto de partida está en la adquisición de las destrezas que, mediante conmutaciones, asociaciones, disociaciones y otras propiedades de los sumandos, nos permiten llegar a los resultados mentalmente.

Estas destrezas, además, no deben perderse aun cuando se lleguen a dominar las tablas de memoria. Y no sólo porque pueden auxiliarnos en un instante de duda u olvido momentáneo, sino sobre todo porque poseen un gran valor matemático intrínseco, por lo que suponen de dominio de las propiedades de la suma (**Mialaret**, 1977).

Incluso, antes de aprenderlas de memoria, todavía podemos sacarles mucho jugo a estas tablas observando y destacando las *regularidades* que se hallan presentes. Una muy interesante es ver, en sus casillas interiores, cómo los números se repiten "diagonalmente" (de la parte superior hacia la inferior y, a la vez, de derecha a izquierda). Esto nos ayuda a resaltar la propiedad disociativa de la suma. Por ejemplo, observamos cómo el 8 puede desglosarse en la suma de 0 y 8, de 1 y 7, de 2 y 6, etc., y así en los demás casos.

También podemos observar que la diagonal principal –la que se inicia en la parte superior izquierda con el 0 y llega a la parte inferior derecha con el 18– contiene los dobles de los dígitos. Igualmente, que esa diagonal funciona como un eje de simetría para los números que se ubican a sus lados. Es decir, que si la tabla total fuera exactamente cuadrada y se doblara por esa diagonal, los números de las casillas de una de las caras dobladas "caerían" exactamente sobre los mismos números de la otra cara doblada –por ejemplo, el 13 de 8 + 5 coincidiría con el 13 de 5 + 8–. Esta situación expresa gráficamente la propiedad conmutativa de la suma.

Otra observación –aparentemente tonta, pero que en algún momento puede tener su interés– es percibir que la suma de dos dígitos nunca llega a 20 y que, por consiguiente, cuando se trata de dos sumandos, las "llevadas" no pueden ser mayores que 1.

Hemos hablado de destrezas utilizables a la hora de sumar dígitos. No está de más decir que, puesto que hablamos de dígitos, estas destrezas pueden aplicarse al caso de la suma de las unidades, de las decenas, de las centésimas, etc., es decir, de las unidades de cualquiera de los órdenes del sistema decimal de numeración.

De esta forma podemos extender el cuadro de las destrezas asociativas y disociativas antes presentadas:

10 + 90 = **100**	20 + 80 = **100**	30 + 70 = **100**	40 + 60 = **100**
50 + 50 = **100**	100 + 900 = **1.000**	200 + 800 = **1.000**	etc.
0,1 + 0,9 = **1**	0,2 + 0,8 = **1**	0,3 + 0,7 = **1**	0,4 + 0,6 = **1**
0,5 + 0,5 = **1**	0,001 + 0,009 = **0,01**	0,002 + 0,008 = **0,01**	0,003 + 0,007 = **0,01**

etc.

100 = **90 + 10**	100 = **20 + 80**	100 = **30 + 70**	100 = **40 + 60**	100 = **50 + 50**
1 = **0,9 + 0,1**	1 = **0,8 + 0,2**	1 = **0,7 + 0,3**	1 = **0,6 + 0,4**	1 = **0,5 + 0,5** etc.

Como puede apreciarse, la norma básica consiste en utilizar las propiedades conmutativa, asociativa y disociativa para buscar –y encontrar– el valor de 10 ó de las potencias de 10 (100, 1.000, etc.), y también para saber "romper" estas potencias en los sumandos más adecuados en cada caso. Un ejemplo sencillo de aplicación inmediata, incluso en sumas escritas, puede verse en la realización de la siguiente:

```
  73
 144
  55
 316 +
  67
  51
______
```

Habitualmente solemos proceder sumando la columna de las unidades, luego la de las decenas, etc. Esta práctica está justificada por la propiedad disociativa de la suma, aplicada a todos los sumandos. Ahora bien, dentro de cada columna podemos utilizar la propiedad conmutativa (sumar en cualquier orden), lo que nos permite asociar los sumandos que se complementan para obtener 10: visualmente asocio el 3 con el 7, el 4 con el 6 (ya llevo 20) y percibo que me quedan sin asociar el 5 y el 1. Así, la suma de las unidades es 26: escribo el 6 y "llevo" 2 decenas (no 2, simplemente, sino 2 decenas).

De un modo análogo, en la columna de las decenas asocio rápidamente el 4 con el 6, el 5 con el 5, y el 7 y el 1 con el 2 de la llevada, lo que me da un total de 30 decenas: escribo el 0 y "llevo" 3 centenas. La suma de éstas es más fácil, 7. La suma total es 706.

Volviendo a casos más generales –no sólo a los de las sumas dispuestas verticalmente– y partiendo de la base de las destrezas descritas, es posible precisar algunas sugerencias para facilitar las operaciones mentales de sumar (en lo que sigue, se mostrarán de nuevo los cálculos escritos como una orientación del proceso mental, pero tales cálculos no se escriben en la práctica).

1. *Acercar alguno(s) de los sumandos a potencias o múltiplos de 10*. Por ejemplo, al sumar 156 + 199 = 156 + (200 – 1) = 156 + 200 – 1 = 356 – 1 = 355. O también, 412 + 84 = 400 + 10 + 2 + 80 + 4 = 400 + 90 + 6 = 496.

2. *"Prestarse" entre los sumandos para formar potencias o múltiplos de 10.* Por ejemplo: 46 + 88 = 44 + 2 + 88 = 40 + 4 + 90 = 130 + 4 = 134. O también: 137 +

63 = 137 + 3 + 60 = 140 + 60 = 100 + 40 + 60 = 200. O en el caso del ejercicio propuesto anteriormente, 156 + 199 = 155 + 1 + 199 = 155 + 200 = 355.

3. *Sumar de izquierda a derecha, siempre que no resulte complicado.* Por ejemplo, si se observa que en la suma no va a haber “llevadas”: 603 + 195 = 600 + 100 + 90 + 3 + 5 = 798.

Cuando trabajemos el siguiente Cuaderno, dedicado a la sustracción, ampliaremos otras estrategias de cálculo mental para las sumas y las restas.

6. El apoyo de otras representaciones gráficas

Además del conjunto de las tablas de sumar antes presentadas, es posible elaborar otras que nos permiten visualizar la aplicación de las propiedades de la suma y, además, fomentar el desarrollo de destrezas a la hora de efectuar diversas sumas. La primera de estas representaciones es la tabla de los números de 1 a 100:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

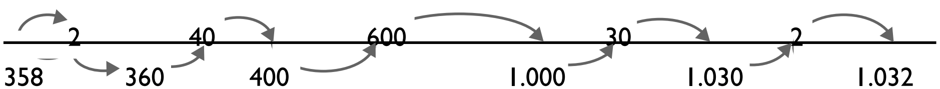
En ella podemos detectar las regularidades, los patrones que se hallan presentes en esta distribución de números. Por ejemplo, todos los números de cada columna tienen la misma cifra en la posición de las unidades (¿y los números de cada fila?). Asimismo, si se observa cada fila, el paso de un número a su siguiente a la derecha significa la adición de una unidad. Análogamente para cada columna, el paso a cada número inferior –“bajar un piso”– representa la adición de una decena.

De acuerdo con este par de criterios, si se quiere sumar, por ejemplo, 36 + 58, nos ubicamos en uno de los dos números (sea 58); agregarle 36 significa “bajar 3 pisos (llegar a 88) y correrse 6 números a la derecha (2 hasta 90, y 4 más hasta 94)”, o bien “correrse 6 números a la derecha (2 hasta 60, y 4 más hasta 64) y bajar 3 pisos (llegar a 94)”. De una forma análoga se procede si nos ubicamos inicialmente en 36. Como puede verse, hay cuatro formas de “visualizar” una sola suma…

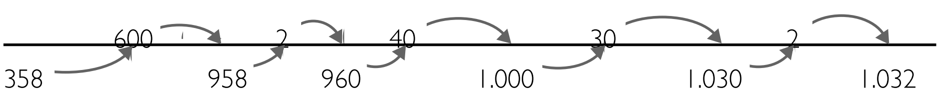
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	**58**	59	60
61	62	63	64	65	66	67	**68**	69	70
71	72	73	74	75	76	77	**78**	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	95	96	97	98	99	100

Otra de las representaciones gráficas –sin las limitaciones que impone la tabla anterior, en la que la suma no puede pasar de 100– utiliza la recta numérica como soporte visual. Sea, por ejemplo, la suma **358 + 674**. Ubicamos uno de los números (sea 358) en un punto cualquiera de la recta. Ahora disociamos convenientemente el otro sumando, de tal forma que busquemos oportunamente, a partir de 358, llegar a números que representen potencias o múltiplos de 10, o bien agreguemos sumandos que sean potencias o múltiplos de 10.

En la primera de las gráficas percibimos cómo vamos avanzando "por saltos" a medida que vamos añadiendo "pedacitos" del número 674 (que se rompió progresivamente en **2 + 40 + 600 + 30 + 2**, a medida que se veía la conveniencia del siguiente sumando):



Hay varias alternativas para efectuar esta suma por saltos, tantas como disociaciones adecuadas podamos obtener del segundo sumando. Una de estas alternativas es la siguiente:



Como dijimos antes, el uso de estas representaciones gráficas nos permite visualizar la aplicación de las propiedades de la suma y, además, fomentar el desarrollo de destrezas a la hora de efectuar diversas sumas. El proceso debe partir de la construcción de tales representaciones para ir, poco a poco, hacia una imagen mental de las mismas.

En definitiva, y como puede apreciarse, existe una diversidad de caminos para llegar al resultado de la suma. No es conveniente cerrarnos en uno solo, por lo que dijimos en el Cuaderno 1. Es preferible exponer todos los que se puedan y dejar que nuestra creatividad –y la de nuestros alumnos– pueda hallar otros. Después, cada quien terminará por seleccionar el que mejor se acomode a la situación propuesta o el que mejor vaya con su estilo personal de hacer las cosas: una diversidad abierta a la posibilidad de elegir…

Efectúe mentalmente las siguientes sumas (hágalo de todas las formas que se le ocurran):

a) *9 + 7* ***b)*** *13 + 8* ***c)*** *4 + 21*
d) *27 + 14* ***e)*** *35 + 56* ***f)*** *71 + 22*
g) *65 + 37*

h) *148 + 454* ***i)*** *602 + 399*
j) *65 + 44 + 32* ***k)*** *225 + 176*
l) *599 + 87*

m) *415 + 186* ***n)*** *48 + 973*
ñ) *134 + 807 + 59* ***o)*** *806 + 199*
p) *123 + 987*

Invéntese otra serie de ejercicios similares a los anteriores y resuélvalos.

7. Estimar el valor de la suma

Que, en este caso, no significa querer, tener aprecio por lo que dé la suma…, sino *dar el resultado aproximado de la suma*. Y eso, ¿por qué y para qué? Porque muchas veces no es necesario el valor exacto de la suma, sino que resulta suficiente una aproximación adecuada a nuestros intereses o a la naturaleza del problema.

*Voy a una tienda de ropa con **20.000** pesos en el bolsillo. Veo una blusa que vale **7.990** pesos, una falda por **5.399** pesos y un pantalón que cuesta **6.495** pesos. ¿Me alcanza la plata para comprar las tres prendas?*

Una salida sería la de sumar las tres cantidades y comparar el resultado con los 20.000 pesos. Esto es necesario si, por ejemplo, quiero saber con exactitud el vuelto que me van a dar. Pero para responder a la pregunta formulada, puedo pensar de otra manera.

Primero redondeo los precios y los llevo a **8.000**, **5.400** y **6.500**, respectivamente (para facilitar mis cálculos mentales). Ahora empiezo a sumar por la izquierda, por las unidades de orden más alto, que son las más determinantes en cuestión de precios: **8 + 5 + 6** me dan **19.000** pesos. Ahora, las centenas son las protagonistas: **4 + 5** son **9** centenas. Conclusión: el precio anda alrededor de **19.900** pesos, por lo que deduzco que sí me alcanza la plata para la compra de las prendas.

Veamos qué competencias se ponen de manifiesto al estimar el valor de una suma. En primer lugar, se produce un análisis inicial de la situación, análisis que lleva a la conclusión de la pertinencia del uso de la estimación. Ya dentro del proceso, se "leen" las cantidades y se toma en cuenta su valor global, lo que permite redondearlas sin mayor riesgo. Esa lectura permite también dar su verdadero sentido al valor de posición de cada cifra; así, por ejemplo, en el caso del pantalón, 6 no es "seis", sino "seis mil".

Por otro lado, la suma de izquierda a derecha permite, desde el comienzo, dotar de sentido real al valor de la suma: apenas se suman las unidades de mil, ya sabemos que el resultado alcanza los 19.000 pesos. Esta es la razón fundamental que justifica el sumar de izquierda a derecha.

Como puede observarse –además de permitirnos responder a preguntas como la formulada en el problema–, desde el punto de vista del desarrollo de destrezas y competencias por parte de las personas, todo es ganancia a la hora de estimar.

Con el fin de facilitarnos las tareas de estimación en el caso de la suma, presentamos algunas estrategias recomendadas por la experiencia de los buenos estimadores:

1. *Redondear el valor de los sumandos*, bien sea por exceso o por defecto, según lo recomiende la situación (véase el caso de las prendas de vestir). Por ejemplo, la suma **3.015 + 692 + 11.890**, puede llevarse a **3.000 + 700 + 12.000**, o bien a **3.000 + 700 + 11.900**, según sea el margen de aproximación que nos podamos permitir.

2. *Compensar el valor de la suma.* Volviendo al ejemplo anterior, podemos optar por la primera aproximación: **3.000 + 700 + 12.000**, que es más fácil de calcular, y llegar al resultado de **15.700**. Pero advertimos que **11.900** es una mejor aproximación al tercer sumando (11.890) que 12.000. Entonces, al resultado obtenido (15.700) le restamos los **100** de exceso que llevaba 12.000 sobre 11.900 y llegamos a un resultado más ajustado, **15.600**.

3. *Compensar entre sí los valores de los sumandos.* Obsérvese la siguiente suma:

38.465	
40.719	
42.174	+
37.002	
41.945	

Aquí la observación inicial (que es fundamental) nos permite percibir que los cinco sumandos están alrededor del valor de **40.000** y que el exceso de unos con respecto a ese valor puede compensar la falta de otros. Esta percepción puede llevarnos a calcular el valor aproximado de la suma simplemente multiplicando **40.000 por 5**, es decir, **200.000**. (Verifique el valor exacto de la suma y califique la aproximación obtenida con 200.000…).

> *Estime mentalmente el valor de las siguientes sumas (hágalo de todas las formas que se le ocurran):*
>
> ***a)** 295 + 3.016 + 9.940*
> ***b)** 1.189 + 915 + 7.090*
> ***c)** 523 + 471 + 546 + 450*
> ***d)** 29,75 + 18,90 + 104,15*
> ***e)** 0,105 + 0,93 + 1,87 + 0,16*
> ***f)** 398 + 3.980 + 39.800*
> ***g)** 6.050 + 978 + 2.844 + 9.485*

Invente una serie de ejercicios similares a los anteriores y resuélvalos.

8. Tengo ante mí una situación de suma; y ahora, ¿qué hago?

1. *Observo la situación* y decido si necesito un resultado exacto o me basta con una aproximación. En el segundo caso procedo por la vía de la estimación, tal como se ha presentado.

2. Si necesito un resultado exacto, *veo* si hay 2 ó más *sumandos*; además, los "leo" y observo si son grandes o pequeños, y si se van a producir –o no– llevadas.

3. En función del análisis anterior, *decido la vía* que voy a utilizar para *realizar* la suma (alguna de las siguientes):

- La visualizo y resuelvo sobre la tabla de números del 1 al 100.
- La visualizo y resuelvo sobre la recta numérica.
- Aplico las diversas estrategias de cálculo mental.
- Resuelvo la suma en forma escrita, colocando ordenadamente los sumandos uno sobre otro y procediendo de derecha a izquierda o en cualquier otro orden pertinente.

4. *Reviso el resultado obtenido.* Para ello, en primer lugar evalúo su verosimilitud, es decir, si a la vista de los sumandos dados, el resultado tiene sentido (obsérvese que este es un ejercicio de estimación…). Y para validar la exactitud de la suma, puedo seguir una vía distinta a la utilizada.

Este proceso puede seguirse tanto si se trata de un ejercicio directo de suma o de estimación –con lo cual el paso 1 queda decidido–, como si se trata de una situación problema que implique la adición como modelo adecuado.

Lo que sí conviene destacar es que, escritos los sumandos para hacer la suma, sea que se dispongan horizontal o verticalmente, *este* "espacio" del ejercicio escrito no es necesariamente el espacio en el que se realiza efectivamente la suma. La suma puede realizarse con toda libertad por cualquiera de las vías propuestas, y algunas de ellas no necesitan recursos para escribir (papel y lápiz, o pizarra y tiza…), sino una mente activa. *El "espacio" del ejercicio escrito es simplemente el espacio en el que se leen los sumandos y en el que luego se escribe la respuesta*.

9. La resolución de «problemas de suma»...

Los «problemas de suma» adoptan diversas formas. A veces se trata de situaciones sencillas de la vida diaria que, por ejemplo, se refieren a acumulaciones de gastos al comprar, a cantidades de objetos que se agrupan, etc., es decir, a situaciones en las que la adición aflora sin dificultad como la operación matemática que sirve de modelo oportuno.

Otras veces, el formato de la situación puede ser un poco más complejo e, incluso, presentar un carácter lúdico, o referirse a regularidades o características que presentan algunos números o series de números. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Lo que sugerimos a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia, antes de revisar la vía de solución que se propone posteriormente.

a) *Tenemos reunidas a las señoras Amelia, Beatriz y Claudia. La suma de las edades de las dos primeras es de* ***85*** *años; la de las señoras Beatriz y Claudia,* ***80*** *años; y la de las señoras Amelia y Claudia,* ***75*** *años. ¿Cuántos años tiene la más joven de las señoras?*

b) A la elección para Madrina del Deporte de la escuela se presentaron **6** candidatas. Se recogieron **400** votos válidos. Se sabe que todas obtuvieron un número diferente de votos. ¿Cuál es el menor número de votos que puede haber obtenido la ganadora?

c) *Alberto está lanzando dardos sobre una diana que presenta* ***5*** *anillos circulares con sus respectivas puntuaciones:* ***1****,* ***3****,* ***5****,* ***7*** *y* ***9****. Alberto lanza* ***6*** *dardos, que se clavan todos sobre la diana. ¿Pudo haber obtenido un total de* ***31*** *puntos? ¿Y un total de* ***28*** *puntos? ¿De cuántas maneras pudo haber alcanzado este último total?*

d) En la suma

$$\begin{array}{r} A\ A\ A \\ B\ B\ B + \\ \hline A\ A\ A\ C \end{array}$$

Si A, B y C representan tres dígitos diferentes, ¿cuáles son estos dígitos?

e) *Considere todos los números de* ***4*** *cifras que se pueden formar con los dígitos* ***1*** *y* ***2*** *(p. ej., 2.112, 1.111, 1.222, etc.). ¿Cuál es la cifra de las unidades de la suma de todos ellos?*

f) Si juntamos **6** montones de arena con **3** montones de arena, ¿cuántos montones de arena tendremos al final?

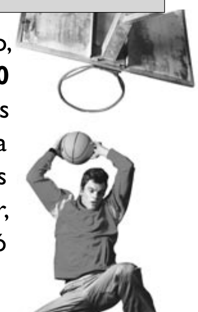
g) *En la suma* ***IRA + ARO + ORA*** *las letras representan los dígitos* ***1****,* ***3****,* ***8*** *y* ***9*** *(cada letra un dígito distinto) ¿Cuál es la mayor suma posible? ¿Y la menor?*

h) Un padre le da a su hijo **15.000** pesos, mientras que otro padre le da al suyo **10.000** pesos. Al reunirse los dos hijos se dan cuenta de que sólo han aumentado su capital conjunto en 15.000 pesos. ¿Cómo puede ser esto?

i) *¿Cuál es el mayor número de buzones que se necesitan para distribuir* ***105*** *cartas, si cada buzón guarda por lo menos* ***1*** *carta y todos ellos deben tener un número diferente de cartas?*

j) La suma de tres números impares consecutivos es **81**. ¿Cuál es el menor de ellos?

k) *¿Qué número sigue en la secuencia:* ***1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31,*** *__?*



l) Jugando al baloncesto, Daniel ha encestado **40** balones durante **5** días consecutivos. Si cada día logró encestar **3** balones más que el día anterior, ¿cuántas cestas consiguió el primer día?

m) *Entre los números* ***300*** *y* ***600****, ¿cuántos números hay, tales que la suma de los tres dígitos sea el doble de la cifra de las centenas del propio número?*

n) Cuando Ana cumplió **16** años, notó que si invertía las cifras de su edad, obtenía la de su abuelita. ¿Cuántos años deben transcurrir para que se repita una situación análoga?

ñ) *Si **A** y **B** son dos cifras escondidas diferentes de **0**, ¿cuántas cifras debe tener la suma **9.876 + A32 + B1**?*

o) Si el número que hay en cada casilla es la suma de los números que se esconden tras los símbolos en las dos casillas inmediatas –a los lados o arriba y abajo–, ¿cuál es la suma total de los 4 números escondidos tras los símbolos? (La casilla central se considera vacía).

✻	25	♠
39		23
▲	37	□

Vamos, pues, a reportar algunas vías de solución para poder contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a) Primero, observamos los datos. Por la configuración de las tres parejas, parece que Claudia es la señora de menor edad, puesto que aparece en las dos últimas parejas, que son las de menor edad conjunta. Un razonamiento análogo nos indica que Beatriz es la de mayor edad, porque aparece en las dos primeras parejas. Por otro lado, no parece descabellado pensar que las tres edades pueden ser múltiplos de **5**, ya que las tres sumas parciales lo son.

Con estas pequeñas intuiciones y ayudas, lo que sigue es aventurar posibles edades para las tres señoras. Podemos pensar en que Beatriz tiene **50** años, con lo que Amelia tendría **35** y Claudia **30**, pero la suma de estas dos últimas edades no nos daría 75. Por consiguiente, Beatriz debe tener menos edad (¿por qué?). Si le asignamos **45** años, Amelia tendría **40** y Claudia **35**, edades que sí satisfacen las condiciones propuestas.

b) Aquí tenemos que imaginarnos posibles situaciones para poder precisar qué debemos hacer. Imaginémonos que la candidata ganadora «barrió» en las elecciones. Es decir, que las demás sacaron **1**, **2**, **3**, **4** y **5** votos (**15** votos en total). Esto le daría a la ganadora **385** votos. Evidentemente, esta no es la respuesta, puesto que nos piden el menor número de votos posible para ganar. Si, por ejemplo, suponemos que las no ganadoras obtuvieron **30**, **40**, **50**, **60** y **70** votos (**250** votos en total), esta situación deja **150** votos para la ganadora. Lógicamente, se puede ganar con menos votos.

¿Hasta dónde puedo bajar el techo para ganar? Probablemente ya se nos ha ocurrido que esa situación podría pensarse para el caso extremo en que todas las candidatas hayan obtenido cantidades consecutivas de votos. Tengo que buscar, pues, «disociar» **400** en **6** sumandos consecutivos: este es mi modelo matemático de suma para esta situación.

Una primera aproximación consiste en pensar que todas las votaciones están en **60 y pico** votos: ya esto nos garantizaría un total de más de **360** votos, **cerca** del total de los **400**. Ahora es cuestión de ensayar con más cuidado, sabiendo que los «picos» que vamos a añadir deben acercarse a **40**. Una asignación de 64 a 69 votos nos da una suma de **399** votos. Como nos falta 1 voto, debemos agregárselo a la ganadora (¿por qué no a ninguna de las otras 5 candidatas?). Así que **70** votos es el mínimo de votos que se deben obtener para ganar como Madrina del Deporte en esa escuela (con lo cual –ojo– tampoco se garantiza ganar, pero con menos es imposible).

c) Pues, la verdad, no puede haber totalizado 31 puntos, porque estaría sumando seis números impares, y una suma así debe ser par. Para un total de 28 puntos, es cuestión de ensayar con combinaciones de sumandos (en cada combinación habrá, al menos, un sumando que se repite). Aquí ya es cuestión de hacer las cosas con orden.

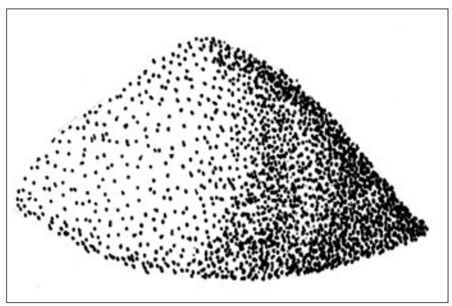
Por ejemplo, si sumamos los **5** puntajes de los anillos, obtenemos **25** puntos; basta entonces con asignar **3** puntos al otro lanzamiento. Una forma sería, pues, **1 + 3 + 3 + 5 + 7 + 9** (en cualquier orden de obtención). No existe otra forma de obtener 28 con un solo número repetido (verifíquelo...).

Debemos pasar, pues, a considerar más de un número repetido, lo que lleva a la situación de que no todas las puntuaciones de los anillos van a aparecer en la cuenta. El número de casos con que ensayar es mayor. Por ejemplo, si dos números van a estar repetidos, podríamos tener: **1 + 1 + 5 + 5 + 7 + 9**; **1 + 1 + 3 + 7 + 7 + 9**; **1 + 1 + 3 + 5 + 9 +9**; **1 + 3 + 5 + 5 + 7 + 7,** etc. El asunto está en llevar las cosas con orden, porque faltan todavía algunas respuestas.

d) Aquí –como en todo...– lo primordial es observar con cuidado. Ni **A** ni **B** pueden ser **0**, porque si no, en la suma de las unidades (**A + B**) debería obtenerse **B** (si A fuera 0) o **A** (si B fuera 0). Como la suma posee una **A** en la posición de las unidades de mil, el dígito escondido debe ser **1**, proveniente de la última llevada. Por otro lado, si **A = 1** y las sumas de los dígitos de las centenas y de las decenas (**A + B**) reportan un **1** en el resultado, es porque **B** debe valer **9**. De esta forma **C = 0**. Los números que se suman son **111 + 999**, y el resultado es **1.110**.

e) La idea para resolver el problema parece sencilla: hay que formar todos los números posibles constituidos por los dígitos **1** y **2**. Y una manera de hacerlo es escribirlos ordenadamente desde el menor (**1.111**) hasta el mayor (**2.222**). De esta forma se obtienen 16 números: la mitad de ellos acaba en 1, y la otra mitad en 2. Por consiguiente, la cifra que aparecerá en la posición de las unidades será **4** (**8 veces (1 + 2)**) es igual a **24**: dejaremos el 4 en las unidades y «llevaremos» 2 decenas).

f) Pues no, no tendremos 9 montones de arena: tendremos **uno solo**, eso sí, de mayor tamaño. Este no es un ejercicio tonto, sino una situación para prevenirnos contra ciertas «fijaciones» de lenguaje: no siempre «juntar» se traduce por sumar. Hay que estar pendientes de las características de la situación...



g) Coloquemos las cantidades en forma vertical, para observarlas mejor:

```
  I R A
  A R O +
  O R A
```

Vemos que en la posición de las centenas aparecen **I**, **A** y **O**; que **R** está repetida tres veces en las decenas, y que en las unidades aparecen **A**, **A** y **O.** Para obtener la mayor suma posible, lo que nos interesa es que los sumandos de las centenas sean los mayores. Por consiguiente, los valores **3**, **8** y **9** deben ser asignados a **I**, **A** y **O** (todavía no sabemos en qué orden); además, **R = 1**. Si ahora nos fijamos en las unidades, conviene que **A** sea el dígito mayor (**9**) y **O** el siguiente (**8**), con lo que **I = 3**. Los números que se están sumando son: **319 + 918 + 819** y su suma, **2.056**. De una forma análoga se puede razonar para el caso de la menor suma posible.

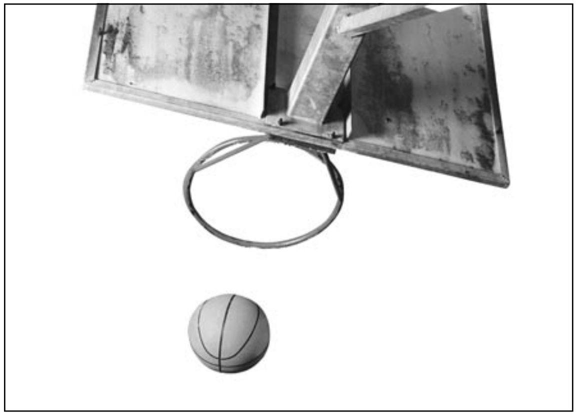
h) Sencillo, ¿no? En esta historia no hay cuatro personas, sino tres: un abuelo, su hijo y su nieto. Ojo con las características de cada situación... La observación inicial es fundamental.

i) En las condiciones señaladas y para obtener el mayor número de buzones necesarios, lo mejor es empezar progresivamente desde **1** (un buzón con 1 sola carta), añadirle **2** (un buzón con 2 cartas), etc. La suma **1 + 2 + 3 +...** se interrumpe cuando su resultado llegue a **105**. Efectivamente, el mayor número de buzones necesarios es de **14**.

j) Basta con aproximarnos por tanteo. Se llega al valor de **25** (**25 + 27 + 29 = 81**).

k) Este es también un ejercicio que exige observación para tratar de descubrir el patrón (la regularidad) que rige la formación de esta serie de números. Los tres primeros son iguales, lo que nos sugiere que el patrón de formación no puede descubrirse si no buscamos una relación de estos tres con los que siguen. Así, se puede llegar a ver que, a partir del **3**, cada número es la suma de los tres anteriores. El número solicitado es **57** (**9 + 17 + 31**).

l) Una forma sencilla de proceder es tantear a partir de un número pequeño para el primer día y formar así la serie de **5** sumandos, distanciados **de 3 en 3**, cuya suma sea **40**. El ensayo debe llevarnos a **2** cestas el primer día.



m) Otro caso muy sencillo. Se trata de hallar los números «trescientos» tales que la suma de los dígitos de las decenas y las unidades sumen **3** (¿por qué?). Ellos son: **303**, **312**, **321** y **330**. Análogamente con los «cuatrocientos» (que sumen **4**) y con los «quinientos» (que sumen **5**).

n) Éste es también un proceso de tanteo y de observación. Se va probando con los números de las edades siguientes (17, 18, etc., para Ana, y los correspondientes de la abuelita: 62, 63, etc.) y verificando si se cumple la relación de escritura «inversa». Esta se obtiene a los **27** años de Ana, es decir, 11 años más tarde. ¿Cuándo sería la siguiente vez? ¿Se cumple alguna regularidad?

ñ) Como puede observarse, se trata de saber si el 9 de las unidades de mil recibirá, o no, una unidad de «llevada» de las centenas. Las cifras que ocupan esta posición son 8 y A. Si **A** vale **más que 1**, habrá llevada y 5 cifras en la respuesta. El caso crítico se presenta cuando **A** valga **1**. En este caso, tenemos que mirar hacia las decenas, cuyos dígitos son 7, 3 y B: sea cual sea el valor de B, la suma de estos dígitos es mayor que 10 decenas, lo que producirá 1 centena de llevada; a su vez, las centenas llegarán a 10, y con la unidad de mil de llevada tendremos 10 unidades de mil. De cualquier modo, pues, la suma tendrá siempre 5 cifras.

o) Podemos abordar este problema dando un valor arbitrario a uno de los símbolos y, a partir de ahí, deducir los de los demás. Por ejemplo, si hacemos ♠ = **10**, entonces, □ = **13**, ❋ = **15** y ▲ = **24**, y la suma de todos ellos es **62**. Otra asignación puede ser: □ = **2**, de donde: ▲ = **35**, ❋ = **4** y ♠ = **21**; también en este caso la suma de los cuatro es **62**. Cualquier otra asignación de valores da el mismo resultado. Usted puede descubrir la razón de esta regularidad si observa que la suma de los valores opuestos en las casillas también da 62 (**39 + 23** y **25 + 37**).

No podemos terminar esta parte dedicada a los problemas de suma sin hacer una reflexión sobre la forma en que los hemos abordado y resuelto. He aquí algunas conclusiones, que seguramente compartimos todos:

1. El método que aparece como más utilizado y eficiente es el del *tanteo razonado*, sobre todo en los tipos de situaciones en que, dada la suma, hay que descubrir los sumandos. Identificamos el método como de *tanteo* ya que, efectivamente, se adelanta una posible solución que –esto es lo importante– debe ajustarse a las condiciones iniciales expuestas en el enunciado. El ensayo (acierto o error) nos indica hacia dónde debe variar la solución –hacia sumandos mayores, menores, etc.–, lo que justifica el calificativo de *razonado*, no a ciegas.

Tenemos que insistir en la pertinencia de este método, muchas veces desterrado del aprendizaje y de la enseñanza de la matemática por no se sabe qué prejuicio sin fundamento acerca de una supuesta «exactitud» y «formalidad» propias de la disciplina, en la que «no se debe jugar al ensayo y error». Quien afirma esto desconoce la historia de la matemática y de la ciencia en general.

No debemos dejarnos llevar por estos prejuicios sin sentido, sino, más bien, practicar y enseñar el tanteo razonado. En definitiva, es un método científico excelente, que nos acostumbra a formular hipótesis razonables –ajustadas a las condiciones de la situación– y a verificarlas en la práctica. Todo esto refleja un proceso permanente de toma de decisiones, así como de control sobre la propia actividad. ¿Y no es esto lo que queremos de nosotros mismos y de nuestros alumnos?

2. La valoración del método de tanteo razonado no debe excluir la consideración y práctica de *otros métodos* a la hora de resolver problemas. Por ejemplo, algunos de los problemas que acaban de trabajarse podían haberse planteado y resuelto por la vía algebraica, es decir, utilizando incógnitas y ecuaciones. Es más, así es la forma en que habitualmente se procede en la escuela, y ésta es la razón por la que tales problemas no aparecen sino en el contexto de aplicación de las ecuaciones algebraicas y no antes, en el contexto de la aritmética.

Nuestra intención no es invalidar el uso de los métodos algebraicos –que valoraremos oportunamente–, sino fomentar la diversidad en la utilización de tales métodos de resolución. Vale lo aritmético y vale lo algebraico... y vale lo geométrico. Lo importante es capacitarnos para el uso de todos y cada uno de ellos.

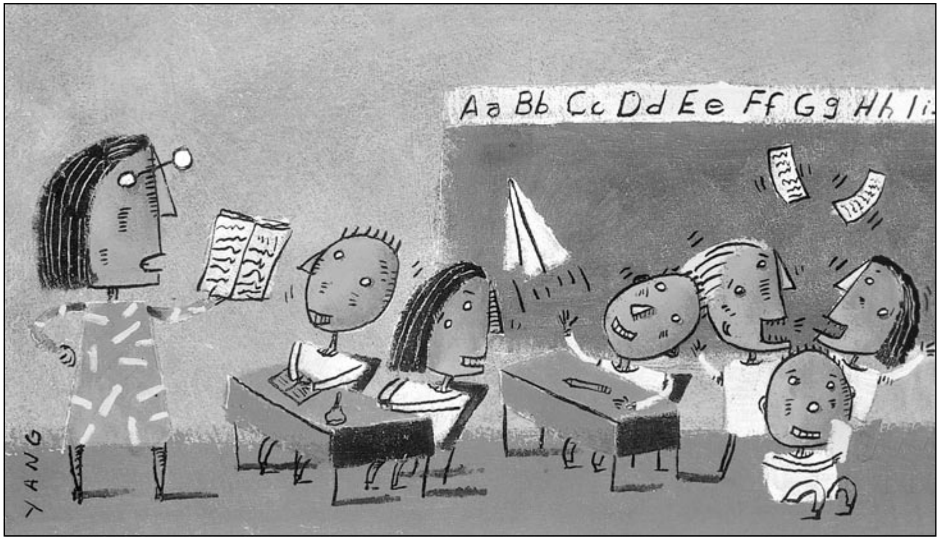
3. Volviendo a las formas en que hemos trabajado los problemas anteriores, nunca insistiremos demasiado acerca del valor de la *observación*: observar el enunciado de la situación, las condiciones que afectan a las variables, los casos posibles, las hipótesis que formulamos, los resultados parciales que vamos obteniendo...

4. Otro punto a destacar es la presencia de ciertas *técnicas* que van apareciendo en determinados problemas: a veces, hay que inducir casos generales o regularidades a partir de casos particulares, pero otras veces hay que considerar todos los casos posibles... Es la práctica de resolver problemas por vías aritméticas la que nos enseñará la selección oportuna de la vía más adecuada en cada caso.

5. Finalmente, debemos subrayar la *atención* que siempre hay que prestar al enunciado de la situación. No hay que dejarse llevar por ciertas expresiones: «juntar», «juntos», «más», y similares, como si su presencia garantizara automáticamente la aplicación de la suma como modelo de la situación y como operación que, aplicada a los datos, nos lleva indefectiblemente a la respuesta.

10. Y en la escuela, de la suma, ¿qué?

Este es un punto para reflexionar individualmente y para discutir colectivamente. Hay que llegar a acuerdos acerca de lo que se tiene que hacer con este tema en la escuela, en los diversos grados. No vamos a entrar en detalle –porque éste no es el lugar para ello–, pero ya los lectores deben haber quedado claros: hay mucho que hacer, más allá de las habituales y rutinarias "cuentas", y más allá de los primeros grados. Saber sumar es mucho más que eso, como se habrá apreciado.



• Hay que abrir el campo, ampliamente, al cálculo mental, porque nos interesa el desarrollo de destrezas. Este puede ser el punto de partida.

• Las sumas escritas pueden venir posteriormente y más dosificadas, en menor cantidad. Eso sí, se debe alcanzar la competencia necesaria en este punto.

• Trabajar con la suma debe basarse –y a la vez, proporcionar un fortalecimiento– en el dominio del sistema decimal de numeración.

• Ante una suma propuesta, la primera tarea debe ser la de observar y leer los sumandos y estimar el resultado. Luego puede obtenerse el resultado exacto, bien sea efectuando la suma escrita, bien sea por la vía del cálculo mental o bien utilizando la calculadora (ésta puede ser muy útil en tareas de verificación…), y validarlo. Uno de los objetivos de la obtención de la respuesta exacta debe ser el de juzgar la estimación hecha, con el fin de ir afinando dicho proceso.

• La resolución de problemas debe propiciar el planteamiento de ejercicios y problemas motivadores, al estilo de los propuestos aquí. No tengamos miedo de exigir a nuestros alumnos; más bien, ellos están esperando que lo hagamos.

Una última sugerencia. Quizá sea éste un buen momento para revisar el contenido del Cuaderno nº 1 y profundizar en lo que significa la matemática que debemos aprender y enseñar…

11. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"…

4. *Un libro tiene 100 páginas. ¿Cuántos dígitos se necesitan para escribir todos los números de las páginas? ¿Cuál es el dígito que más veces se utiliza?*

5. ¿Qué número debe añadirse a **45 + 25** para duplicar la suma de estos números?

6. *En la expresión:* ***YA + YA + YA + YA + YA = HOY****, cada letra diferente esconde un dígito diferente comprendido entre el* ***1*** *y el* ***6****. ¿Qué dígito corresponde a cada letra?*

7. ¿Cuántos números hay de **cuatro** cifras, tales que la suma de sus dígitos sea **3**?

8. *Luis tiene* ***19*** *palillos. ¿De cuántas formas diferentes puede agruparlos en* ***tres*** *montones, de tal manera que cada montón tenga un número* ***impar*** *de palillos? ¿Y si, ahora, las cantidades de cada montón tienen que ser diferentes?*

9. En una carrera infantil de bicicletas y triciclos hay **7** "pilotos" y **19** ruedas. ¿Cuántos triciclos participan?

10. *¿Cuántas páginas tiene un libro si para numerar todas sus páginas se utilizaron* ***3.093*** *dígitos?*

11. ¿Cuántos años transcurrieron entre el 01/01/325 a.C. y el 01/01/325 d.C.?

12. *Se tienen* ***tres*** *números tales que, sumados en parejas diferentes, dan como resultados* ***38, 52*** *y* ***44****. ¿Cuál es el mayor de los tres números iniciales?*

13. En un período de 12 horas, ¿durante cuántos minutos el número de la hora es mayor que el número de los minutos?

14. *La suma de* ***5*** *números enteros diferentes es* ***147****. Si* m *es el mayor de los 5 números, ¿cuál es el menor valor que puede tener* m*?*

15. Al lanzar **tres** dados, las caras superiores suman **13**; ¿cuánto suman sus caras opuestas?

Numera los ***8*** *vértices de un cubo con los dígitos del* ***1*** *al* ***8****, de tal forma que la suma de los vértices de cada una de las seis caras del cubo sea* ***18****.*

16. ¿De cuántas maneras puede expresarse **15** como suma de números naturales consecutivos?

17. *¿Cuánto vale la suma de los* ***50*** *primeros números pares (empezando en 0)? ¿Cómo puedo usar este resultado para obtener la suma de los 50 primeros números impares?*

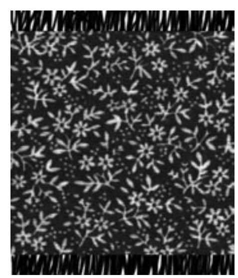
Una diana presenta **cinco** anillos circulares con sus respectivas puntuaciones: **16**, **17**, **23**, **24** y **39**. En seis tiradas, Julián ha conseguido un total de **100** puntos, pero no sabemos si en alguna de ellas el dardo cayó fuera de la diana. ¿Puede indicar al menos una forma –sin importar el orden– en que Julián pudo obtener esa puntuación?

18. *En la expresión:*

```
  C O B R E
E S T A Ñ O +
-------------
B R O N C E
```

cada letra diferente esconde un dígito diferente. ¿Cuál es el dígito que corresponde a cada letra para que la suma sea correcta?

19. Un grupo de artesanos tejedores adquiere el compromiso de entregar **14.950** mantas a una empresa mayorista, en lotes **diarios**, de lunes a viernes. El acuerdo es el siguiente: la primera semana, llevarán **100** mantas diarias, y en cada una de las semanas que sigan, incrementarán en **25** –con respecto a la semana anterior– la cantidad diaria a entregar. Si empiezan la entrega el lunes 1 de septiembre, ¿llegarán a tenerlas listas para el viernes 28 de noviembre?



Observe esta distribución:

3	*9*	*5*	*1*	*4*	*3*
8	*6*	*2*	*7*	*5*	*8*
9	*7*	*1*	*8*	*3*	*1*
4	*5*	*3*	*9*	*7*	*6*
2	*6*	*8*	*6*	*1*	*2*
7	*4*	*5*	*2*	*9*	*4*

*Trate de dividir la tabla en seis regiones –no necesariamente tienen que ser de la misma forma– de **seis** casillas consecutivas cada una, de tal manera que la suma de los dígitos de las seis casillas de cada región sea exactamente **30**.*

20. En la siguiente distribución:

♠	♠	♣
♣	♥	♦
♣	♦	♠

La suma de los símbolos de la 1ª fila es **10**; de los de la 3ª fila, **9**; de los de la 1ª columna, **8**; y de los de la 2ª columna, **12**. ¿Qué valor tiene cada símbolo?

Seleccione tres números diferentes comprendidos entre 3,01 y 3,02 y efectúe su suma.

Y como despedida, la indicación de que en el siguiente Cuaderno, dedicado a la operación de sustracción, volveremos a plantear estrategias y problemas referentes a la suma.

Referencias bibliográficas

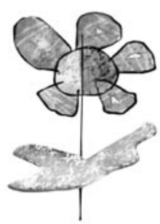
- Gadino, A. (1996). *Las operaciones aritméticas, los niños y la escuela*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

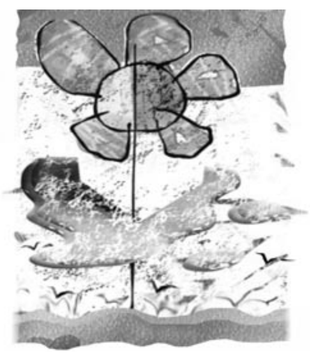
- Mialaret, G. (1977). *Las matemáticas, cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Madrid: Pablo del Río.

- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. 0 **2.** 39.637,51 décimas / 204,02 decenas / 3,9406 unidades / 141.119 milésimas / 3.312,65 unidades de mil **3.** 3,2 cm **4.** 192 dígitos **5.** 70 **6.** A = 3, Y = 5, O = 6, H = 2 **7.** 10 **8.** 10 formas / 5 formas **9.** 5 triciclos **10.** 1.050 páginas **11.** 649 años **12.** 29 **13.** 78 minutos **14.** 32 **15.** 8 **16.** 3 maneras **17.** 2.450 **18.** 40.736 + 689.510 **19.** Sí **20.** ♠ = 4, ♦ = 3, ♣ = 2, ♥ = 5





Este libro se terminó de imprimir
en el mes de abril de 2005.

Índice