



**SEP**

SECRETARÍA DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA

EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR A DISTANCIA

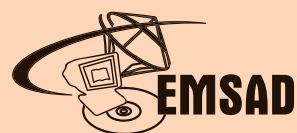
# Matemáticas II

CUADERNILLO DE ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE.

Con la colaboración de:  
Alma Isabel Espinoza López  
Claudia Arellano Camacho  
Maricela Gutiérrez Carbajal  
Juan Carlos Reséndiz Medina  
Alicia Suárez Martín

**sems**

**DGB**



## MATEMÁTICAS I. Cuadernillo de actividades de aprendizaje

Este cuadernillo forma parte de un ejercicio de actualización de la penúltima edición de junio, 2006.

En la que colaboraron:

- Alma Isabel Espinoza López
- Claudia Arellano Camacho
- Maricela Gutiérrez Carbajal
- Juan Carlos Reséndiz Medina
- Alicia Suárez Martín

Dirección General del Bachillerato

Dirección de Coordinación Académica

Dirección de Sistemas Abiertos

©Secretaría de Educación Pública. México, noviembre de 2009.

Subsecretaría de Educación Media Superior Dirección General del Bachillerato Educación Media Superior a Distancia

ISBN: En trámite Derechos Reservados

	BLOQUE I	9
Utiliza triángulos, ángulos y relaciones métricas	BLOQUE II	23
Comprende la congruencia de triángulos	BLOQUE III	30
Resuelve problemas de semejanza de triángulos y Teorema de Pitágoras	BLOQUE IV	39
Reconoce las propiedades de los polígonos	BLOQUE V	54
Emplea la circunferencia	BLOQUE VI	64
Describe las relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos	BLOQUE VII	82
Aplica funciones trigonométricas	BLOQUE VIII	101
Aplica las leyes de senos y cosenos	BLOQUE IX	118
Aplica la estadística elemental	BLOQUE X	133
Emplea los conceptos elementales de probabilidad		
	Respuestas	144



# PRESENTACIÓN

La asignatura de Matemáticas II, tiene como propósito introducirte en el estudio de la Geometría, Trigonometría, Estadística y Probabilidad; lo cual te ayudará a visualizar y analizar geométrica y estadísticamente los problemas que se presentan en tu entorno, así como en la construcción de modelos matemáticos para su estudio y posible solución. Desde el punto de vista práctico, la Geometría y la Trigonometría te proporcionan herramientas útiles para estudiar diversas situaciones o fenómenos desde una o ambas perspectivas, según la información disponible y la conveniencia de tales representaciones; por otro lado la Estadística y Probabilidad te servirán para analizar y comprender el comportamiento de cierta información. De esta forma, posibilita que apliques dichos conocimientos en la modelación de fenómenos, en la asignatura de Física I y en el estudio de la Geometría Analítica del tercer semestre, así como del Cálculo Diferencial e Integral, del V y VI semestres.

También serán útiles para resolver problemas parecidos a los que afrontan los Ingenieros civiles cuando tienen que diseñar puentes o carreteras, o los Arquitectos cuando quieren conjugar belleza con funcionalidad al diseñar casas o edificios. Los Geógrafos, por su parte, se benefician de estos conocimientos cuando estudian los diversos accidentes geográficos y sus implicaciones; los marinos logran calcular con exactitud el rumbo mediante la aplicación de conocimientos trigonométricos; los Economistas los emplean para analizar el comportamiento y tendencia de los indicadores económicos, etc.

La Asignatura de Matemáticas II comprende diez Bloques que van de lo más simple a lo relativamente complejo.

En los bloques I, II y III recordarás y revisarás los aspectos básicos de ángulos y triángulos, así como sus aplicaciones más simples, además de servirte como punto de partida para el estudio de los siguientes bloques.

Los bloques IV y V te llevarán por el estudio de las propiedades de Polígonos y Circunferencia, con estas figuras geométricas podrás identificar con exactitud todos sus elementos distintivos.

En los bloques VI y VII encontrarás las Funciones trigonométricas, estudiarás los conceptos básicos de las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo conocidas como funciones trigonométricas, utilizando tanto el círculo unitario como las coordenadas cartesianas rectangulares; con ello sentarás las bases necesarias para el abordaje de diversos fenómenos físicos.

Continuando con el bloque VIII titulado Las leyes de senos y cosenos, verás la definición de cada una de ellas y su aplicación para determinar diversos elementos de triángulos que no poseen ningún ángulo recto y que de manera genérica se describen como triángulos oblicuángulos.

Por último los bloques IX y X te presentan una introducción a la estadística y probabilidad donde podrás ver el comportamiento de la información e identificar fenómenos implicados en la toma de decisiones.

Se abordarán, problemas del medio circundante (económicos, sociales, ambientales, demográficos, etc.) y de diferentes campos del saber, que propicien el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo (en el ámbito matemático y en el contexto social).

Finalmente resolverás problemas geométricos, trigonométricos, estadísticos y probabilístico de carácter teórico o de aplicación práctica, provenientes del ámbito escolar o de la vida cotidiana, mediante el uso de técnicas, conceptos y procedimientos de la geometría plana y la trigonometría, que favorezca la deducción del comportamiento gráfico de las figuras formadas por líneas en el plano (Geometría Euclidiana) y una aplicación correspondiente a la medición de triángulos (Trigonometría), además de un manejo adecuado de las medidas de tendencia central y la probabilidad clásica mostrando interés científico y actitudes críticas, reflexivas y responsables, que te permitan un buen desenvolvimiento.

Para facilitar su manejo, todos los Cuadernillos de Actividades de Aprendizaje EMSAD están estructurados a partir de cuatro secciones básicas en cada Bloque:



### ¿Que voy a aprender?

Conocerás como están organizados los contenidos temáticos en cuanto a tópicos y subtópicos, así como los aprendizajes que debes alcanzar al finalizar cada uno de los bloques. También te explicamos el qué y el para qué de los tópicos y actividades que se te proponen. Finalmente, encontrarás sugerencias de material de apoyo bibliográfico, hemerográfico y multimedia que te permitan ampliar tu conocimiento y reforzar tu aprendizaje.



### ¿Qué aprendo?

En este rubro pondrás en práctica las unidades de competencia establecidas en cada bloque, para lo cual es necesario tu compromiso y esfuerzo constante por aprender, ya que se propondrán actividades que tendrás que ir realizando a lo largo del curso: en forma individual, por parejas, en equipos o en forma grupal (contando siempre con el apoyo de tu asesor). Ellas están enfocadas a que desarrolles competencias genéricas y disciplinares básicas; de tal forma que al término del curso, podrás expresar mejor tus ideas, opiniones y sentimientos en forma escrita; también mejorarás tu ortografía y léxico, lo cual será de gran utilidad en tu vida diaria y en el ámbito escolar.



Asimismo, dentro de esta sección, y a partir de las actividades a realizar, deberás ir conformando tu **portafolio de evidencias**, que formará parte importante de tu evaluación. Cuando localices esta viñeta, significa que deberás ingresar ese producto de aprendizaje a tu portafolio de evidencias. De igual forma, habrán otras relacionadas con la **coevaluación**, es decir, a través de ellas evaluarás el desempeño de algún compañero y éste a su vez te evaluará.



### ¿Qué he aprendido?

Una de las características del modelo EMSAD consiste en presentarte actividades que permitirán autoevaluarte, tales como cuestionarios y ejercicios que tendrás que resolver sin la ayuda de nadie; lo cual te permitirá saber qué aspectos debes repasar o reforzar y cuáles ya dominas o se te facilitan. Después podrás verificar al final del cuadernillo, las respuestas correctas de cada ejercicio.



### Quiero saber más

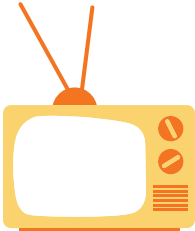
Al final de cada unidad se encuentra la sección Quiero saber más, que te permitirá conocer los tópicos con mayor profundidad, a través de diversos materiales didácticos actualizados y de calidad, los cuales son muy importantes para los estudiantes de EMSAD. Es por ello que en esta sección encontrarás varias sugerencias de estos materiales, que te permitirán descubrir e investigar otros aspectos a aprender, que de algún modo complementarán lo ya aprendido.



¿En qué puedes apoyarte para aprender sobre los tópicos de Matemáticas II? En cualquier libro que tengas a tu alcance y que trate sobre Geometría Plana y Trigonometría. Recomendamos la consulta de los siguientes textos que además de ser actualizados, desarrollan todos los aprendizajes a desarrollar durante el curso:



- García, Miguel y Manuel Rodríguez. Matemáticas 2, Bachillerato. México. ST Editorial. 2005
- Ruiz Basto, Joaquín. Matemáticas II, Bachillerato General. México. Publicaciones Cultural, 2005
- Ortiz Campos, Francisco. Matemáticas II, Geometría y Trigonometría. México. Publicaciones Cultural, 2005



### Programas de televisión educativa

De la serie de programas de televisión educativa para apoyar la Asignatura de Matemáticas 2 te recomendamos observar los siguientes para profundizar en los contenidos:

#### **Programa 1.- Área, volumen y unidades de medición**

Este programa te ayudará a entender algunos de los conceptos básicos y aplicaciones de la Geometría y del Sistema Métrico Decimal.

#### **Programa 2.- Longitud y generación de curvas**

Los contenidos de este programa tienen como propósito que aprendas a identificar los tipos básicos de curvas, a conocer los métodos de medición de curvas y sus aplicaciones, así como el surgimiento de la geometría fractal.

#### **Programa 3.- Medición del área de una curva**

Este programa es una ayuda para identificar las diferencias del área plana y el área espacial; para comprender la importancia de utilizar el geoplano en la medición de áreas y algunas aplicaciones de la medición de áreas.

#### **Programa 4.- Curva y circunferencia**

En este programa se proporcionarán elementos para conocer las propiedades del círculo y de la circunferencia, las maneras de calcular el área de un círculo y la longitud de una circunferencia, así como algunas aplicaciones prácticas de estos conocimientos.

#### **Programa 5.- Cálculo de áreas y volúmenes**

Podrás conocer más de cerca los procedimientos matemáticos del cálculo de áreas y volúmenes, el fundamento matemático del teorema de Arquímedes y de las aportaciones del matemático Cavalieri.

#### **Programa 6.- Construcción y uso de poliedros.**

Con la observación del programa de televisión educativa “Construcción y uso de poliedros” profundizarás en los conocimientos de la geometría del espacio y el uso de los poliedros en la vida cotidiana.

#### **Programa 7.- La recta.**

El programa de televisión educativa “La recta” sirve para conocer las formas para medir la pendiente de una recta y la función de los triángulos dentro de la medición de una recta. Te invitamos a observarlo con atención en tu Centro de Servicios

### **Programa 8.- “Clasificación del triángulo”**

El triángulo tiene múltiples y varios usos en la vida cotidiana. Para conocer más de este tópico te invitamos a observar el programa de televisión educativa “Clasificación del triángulo”.

### **Programa 9.- “Medición de ángulos y lados del triángulo”**

¿Te cuesta trabajo entender que es el “seno” o el “coseno” de un ángulo? ¿Cual fue la mayor aportación de Pitágoras a las Matemáticas? Estas y otras preguntas podrás contestarlas al observar el programa de televisión educativa “Medición de ángulos y lados del triángulo”.

Recuerda que en cada Bloque de Aprendizaje y en cada sección, siempre puedes contar con el apoyo y tutela de tu asesor.





¿Qué voy a aprender?



## BLOQUE I.

### UTILIZA TRIÁNGULOS, ÁNGULOS Y RELACIONES MÉTRICAS

#### UNIDAD DE COMPETENCIA

» Construye e interpreta modelos geométricos de ángulos y triángulos, al resolver problemas derivados de situaciones reales, hipotéticas o teóricas. Cuantifica y representa magnitudes angulares y de longitud en ángulos y triángulos identificados en situaciones reales, hipotéticas o teóricas. Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de ángulos y triángulos.

Para este primer bloque estudiarás la definición, elementos principales y clasificación de los ángulos; ya sea por la posición de sus lados (opuestos por el vértice, adyacentes, formados por dos secantes, etc.) o por la suma de sus medidas (suplementarios y complementarios) además de su representación gráfica con la ayuda de un juego de geometría (escuadras, compás y transportador) para que realices todos los trazos que se piden en las actividades. Esto te será de mucha utilidad para lograr aprendizajes significativos.

Clasificarás los triángulos por la medida de sus lados o sus ángulos, y también los visualizarás de manera gráfica para tener una mejor perspectiva del por qué de cada clasificación.

En cualquier caso, sean ángulos o triángulos, podrás distinguirlos, hacer inferencias y deducciones acerca de sus propiedades no sólo de manera teórica, también al observarlos en representaciones de figuras, objetos o imágenes.

Finalmente aplicarás las propiedades de ambos para la resolución de problemas y modelar situaciones geométricas para apreciar en su totalidad la utilidad de los conceptos de ángulos y triángulos.



### Fuentes de consulta:

- García, Miguel y Manuel Rodríguez. Matemáticas 2, Bachillerato. México. ST Editorial. 2005
- Ruiz Basto, Joaquín. Matemáticas II, Bachillerato General. México. Publicaciones Cultural, 2005
- Ortiz Campos, Francisco. Matemáticas II, Geometría y Trigonometría. México. Publicaciones Cultural, 2005



### Sitios Web recomendados

<http://www.arrakis.es/~bbo/geom/trian1.htm> (Un sitio muy interesante donde encontraras información de los polígonos, cuerpos con volumen, biografías y fichas de trabajo).

<http://www.arrakis.es/~bbo/geom/trian1.htm> (Contiene un tutorial de Geometría plana elemental).

<http://platea.pntic.mec.es/%7eablancog/index.htm> (Puedes interactuar manipulando las figuras y observando cómo se ubican los diferentes elementos, rectas notables de triángulos construcción, etc. Te lo recomendamos ampliamente).

<http://www.acienciasgalilei.com/mat/formularios/form-triangelos.htm>. (Formularios, tablas y constantes matemáticas).



## ¿Qué aprendo?

Para comenzar, el asesor hará la introducción de la asignatura explicando brevemente los tópicos a tratar, lo relacionado al aprendizaje basado en competencias, la forma de evaluar, los lineamientos de evaluación y las políticas generales de clase (entrega de productos, respeto a horarios, etc.).

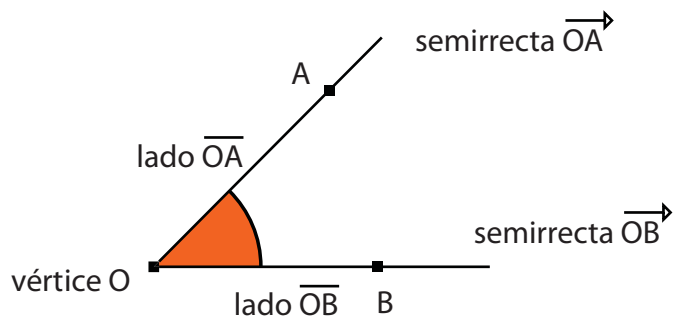
Iniciarás resolviendo problemas teóricos y prácticos relacionados con ángulos en el plano, mediante la identificación, clasificación y medición de los mismos.

### 1.1 Definición de ángulo

De manera individual investiga, ya sea en Internet o en la bibliografía a tu alcance, la definición de ángulo y anótala en las líneas siguientes. Acompaña la definición con un esquema que muestre los elementos de un ángulo y la forma de nombrarlos.

Un ángulo es:





## 1.2 Clasificación de los ángulos

Los ángulos se pueden clasificar de diferentes formas, especialmente tanto por sus medidas como por la posición de sus lados. En los cuadros siguientes hemos anotado los nombres. Investiga la descripción y anótala en el cuadro correspondiente.

### Clasificación de los ángulos por sus medidas

Tipo de ángulo	Descripción	Ejemplo
Llano		
Agudo		
Obtuso		
De una vuelta		
Recto		
Cóncavo		
Convexo		



Completa el cuadro siguiente, en el que concentrarás información sobre la clasificación de los ángulos por la posición de sus lados:

### Clasificación de los ángulos por la posición de sus lados

Tipo de ángulo	Descripción	Ejemplo
Adyacentes		
Opuestos por el vértice		



Una clasificación especial incluye a los ángulos complementarios y suplementarios.

### Investiga y completa el cuadro siguiente

Tipo de ángulo	Descripción	Ejemplo
Suplementarios		
Complementarios		

Comenta en plenaria la información que encuentraste, tu asesor ampliará la información sobre este tema, no olvides que puedes apoyarte en él para resolver tus dudas sobre este o los temas que siguen.

## 1.3 Ángulos formados por dos rectas paralelas y una secante

En este apartado veremos el tema de rectas paralelas y una secante, revisa conjuntamente con tu asesor la siguiente información, el te aclarará los puntos en lo cuales tengas dudas, también puede ampliar la información sobre el tema.

Al ser cortadas dos rectas paralelas por una secante se forman ángulos con características especiales de igualdad. Revisa detenidamente la figura y la información que presentamos a continuación.

En la figura 1a se tienen las rectas  $a$  y  $b$  paralelas y la recta  $n$  secante, también llamada transversal, que las corta en los puntos  $M$  y  $N$ .

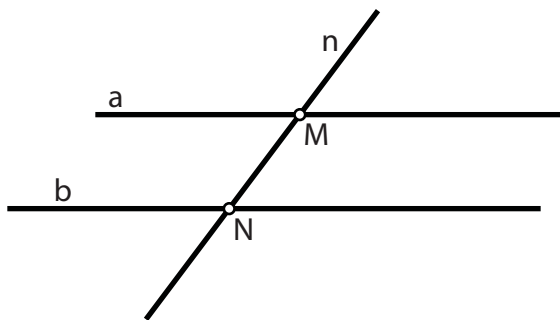


Fig. 1a

Quedan determinados ocho ángulos (ver figura 1b) que reciben nombres de acuerdo a su posición.

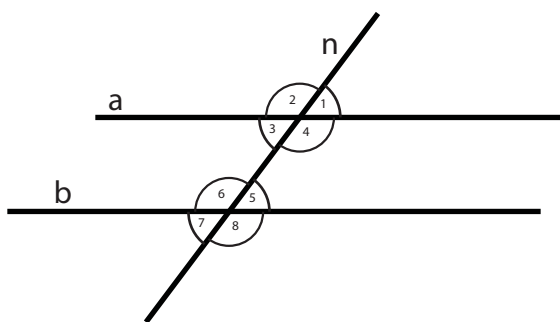


Fig. 1b

- Se llaman ángulos interiores a los que pertenecen al semiplano respecto de la recta  $a$  que contiene al punto  $N$  y al semiplano respecto de  $b$  que contiene al punto  $M$ .

**Ejemplo:** Los ángulos 3, 4, 5 y 6 son ángulos internos.

- Se llaman ángulos exteriores o externos a los ángulos que no son interiores.

**Ejemplo:** Los ángulos 1, 2, 7 y 8 son externos.

- Se llaman ángulos correspondientes entre paralelas cortadas por una secante, a los pares de ángulos no adyacentes ubicados en un mismo semiplano respecto de la secante y de los cuales uno es interno y otro externo.

**Ejemplo:** En la figura 1b los ángulos correspondientes entre paralelas cortadas por una secante son: 1 y 5, 2 y 6; 4 y 8; 3 y 7.

- Se llaman ángulos alternos externos a los pares de ángulos externos no adyacentes que pertenecen a distintos semiplanos respecto de la recta secante.

**Ejemplo:** En la figura 1b, son: 1 y 7, 2 y 8

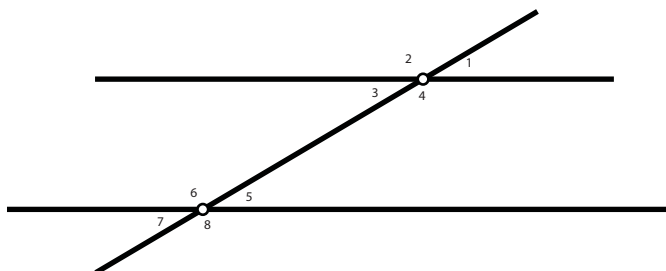
- Se llaman ángulos alternos internos a los pares de ángulos internos no adyacentes que pertenecen a distintos semiplanos respecto de la recta secante.

**Ejemplo:** En la figura 1b, son: 3 y 5, 4 y 6



En parejas resuelvan el siguiente ejercicio, cuando lo terminen elijan al azar una de las parejas para que lo resuelva en el pizarrón, compara tus respuestas y revisa si están correctas o no, si tienes dudas consulta a tu asesor.

Dada la figura 2, y sabiendo que el ángulo  $1 = 35^\circ$ , encuentra el valor de los ángulos que se te piden.



Ángulos correspondientes iguales:

$\angle \_\_\_\_\_\_ = \angle \_\_\_\_\_\_ ; \angle \_\_\_\_\_\_ = \angle \_\_\_\_\_\_ ; \angle \_\_\_\_\_\_ = \angle \_\_\_\_\_\_ ; \angle \_\_\_\_\_\_ = \angle \_\_\_\_\_\_$

Ángulos alternos internos iguales:  $\angle \_\_\_\_\_\_ = \angle \_\_\_\_\_\_ ; \angle \_\_\_\_\_\_ = \angle \_\_\_\_\_\_$

Ángulos alternos externos iguales:  $\angle \_\_\_\_\_\_ = \angle \_\_\_\_\_\_ ; \angle \_\_\_\_\_\_ = \angle \_\_\_\_\_\_$

#### 1.4 Definición y clasificación de los triángulos

Desarrolla de manera individual las actividades de aprendizaje que se te indican:

Busca en libros de Matemáticas o en Internet la definición de triángulo. Anótalas en tu cuaderno y en el espacio siguiente. Comparte tus hallazgos con tus compañeros y con tu Asesor, traten de llegar a una definición que todos comprendan.

Un triángulo es:



#### Clasificación de los triángulos

Los triángulos se clasifican tanto por la longitud de sus lados como por su amplitud.

Llena los cuadros siguientes buscando la información que sea necesaria:

### Clasificación de los triángulos por la longitud de sus lados

Tipo de triángulo	Descripción	Dibujo de ejemplo
Equilátero		
Isóseles		
Escaleno		

### Clasificación de los triángulos por la amplitud de sus ángulos

Tipo de triángulo	Descripción	Dibujo de ejemplo
Rectángulo		
Acutángulo		
Obtusángulo		

## 1.5 Ángulos interiores y exteriores en los triángulos

En tu cuaderno, en una hoja blanca o trozo de cartulina dibuja tres triángulos de formas y medidas diferentes cada uno. Una vez que hayas concluido recorta las figuras y para finalizar corta las tres esquinas de cada triángulo, únelos por los vértices y determina cuántos grados suman juntos los tres ángulos. Haz tus observaciones y conclusiones.

Indaga en la bibliografía a tu alcance o en Internet cuánto suman los tres ángulos interiores de un triángulo. Anota los resultados de tu investigación y compártelos con el resto del grupo y tu asesor para llegar a una definición general:



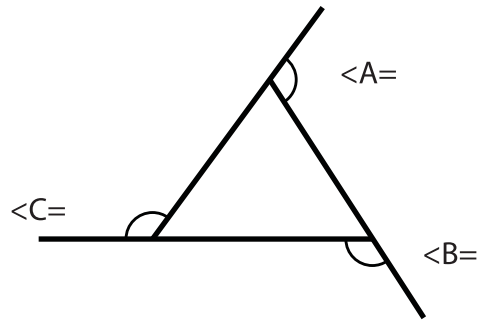
Indaga en la bibliografía a tu alcance o en Internet cuánto suman los tres ángulos interiores de un triángulo. Anota los resultados de tu investigación y compártelos con el resto del grupo y tu asesor para llegar a una definición general:

Los ángulos interiores de un triángulo suman:



Para la siguiente actividad dibuja dos triángulos diferentes en tamaño y forma al que mostramos. Al igual que en éste, prolonga los lados aproximadamente 1.5 cm, marcando los ángulos exteriores y midiéndolos con el transportador.

Anota tus observaciones en cada caso.



Para este triángulo, la suma de los ángulos exteriores es igual a: \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ =

Ahora haz los dos dibujos de triángulos solicitados y efectúa la suma de los ángulos exteriores para cada uno de ellos.





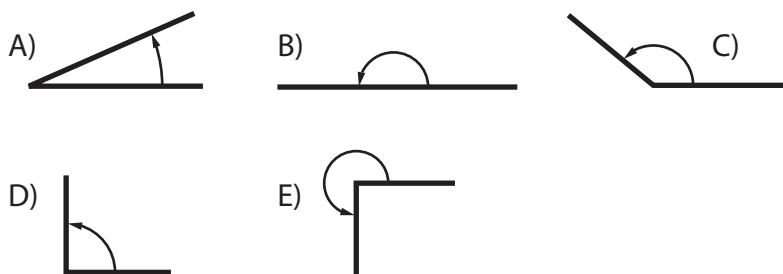


Con base en lo estudiado en el bloque anterior es tiempo de que realices una autoevaluación y resuelvas eligiendo la opción correcta:

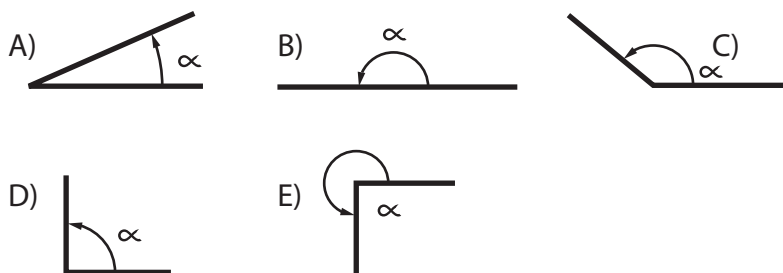
1. Abertura formada por dos semi-rectas con un mismo origen llamado vértice. ( )

- A) Paralelas
- B) Plano
- C) Angulo
- D) Triangulo
- E) Perpendiculares

2. ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde a un ángulo de  $90^\circ$ ? ( )



3. ¿Cuál de las siguientes figuras representa el ángulo que mide  $180^\circ$ ? ( )



4. El ángulo que es menor a  $90^\circ$  o a un cuarto de vuelta, se denomina... ( )

- A) llano.
- B) recto.
- C) agudo.
- D) obtuso.
- E) cóncavo.

5. ¿Cómo se llama el ángulo que mide  $90^\circ$ ? ( )

- A) Recto
- B) Agudo
- C) Obtuso
- D) Cóncavo
- E) Llano

6. El ángulo que es mayor a  $90^\circ$ , pero menor a  $180^\circ$ , se conoce como: ( )

- A) llano.
- B) obtuso.
- C) recto.
- D) cóncavo.
- E) agudo.

7. Angulo que mide  $180^\circ$ . ( )

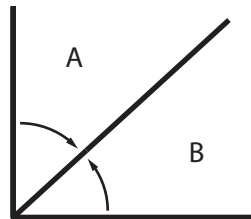
- A) agudo
- B) recto
- C) obtuso
- D) cóncavo
- E) llano

8. Nombre que recibe el ángulo que es mayor a  $180^\circ$  pero menor a  $360^\circ$ . ( )

- A) Obtuso
- B) Cóncavo
- C) Llano
- D) Agudo
- E) Recto

9. Si el valor de  $\angle A$  es de  $35^\circ$ , ¿cuál es el valor del ángulo B? ( )

- A)  $145^\circ$
- B)  $125^\circ$
- C)  $55^\circ$
- D)  $15^\circ$
- E)  $10^\circ$



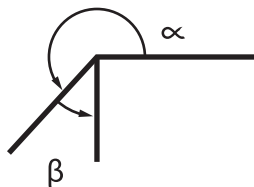
10. Si el valor de  $\alpha$  es de  $125^\circ$ , ¿cuál es el valor del ángulo  $\beta$ ? ( )

- A)  $180^\circ$
- B)  $150^\circ$
- C)  $100^\circ$
- D)  $55^\circ$
- E)  $25^\circ$



11. Si el valor de  $\alpha$  es de  $220^\circ$ , ¿cual es el valor del ángulo  $\beta$ ? ( )

- A)  $50^\circ$
- B)  $100^\circ$
- C)  $140^\circ$
- D)  $270^\circ$
- E)  $360^\circ$



12. ¿Qué nombre recibe la figura geométrica determinada por tres rectas, que se cortan en tres puntos diferentes? ( )

- A) Cuadrado
- B) Triángulo
- C) Rectángulo
- D) Rombo
- E) Trapecio

13. ¿Qué nombre recibe el triangulo cuyos tres lados son desiguales? ( )

- A) Equiángulo
- B) Equilátero
- C) Acutángulo
- D) Isósceles
- E) Escaleno

14. ¿Qué nombre recibe el triángulo que tiene dos lados iguales? ( )

- A) Isósceles
- B) Acutángulo
- C) Equilátero
- D) Rectángulo
- E) Obtusángulo

15. Triángulo que tiene sus tres lados iguales. ( )

- A) Escaleno
- B) Equilátero
- C) Rectángulo
- D) Obtusángulo
- E) Isósceles

16. Triángulo que tiene un ángulo recto. ( )

- A) Equilátero
- B) Acutángulo
- C) Escaleno
- D) Equiángulo
- E) Rectángulo

17. ¿Que nombre recibe el triangulo que tiene tres ángulos agudos? ( )

- A) Acutángulo
- B) Isósceles
- C) Rectángulo
- D) Equiángulo
- E) Obtusángulo

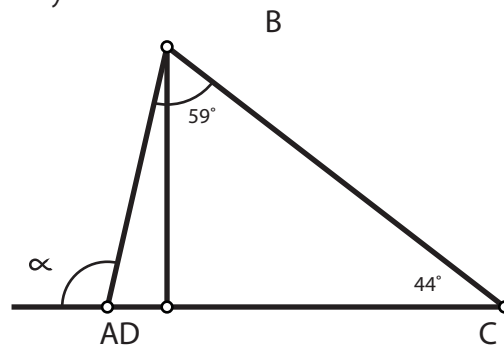
18. Triángulo que tiene un ángulo obtuso. ( )

- A) Rectángulo
- B) Acutángulo
- C) Isósceles
- D) Escaleno
- E) Obtusángulo

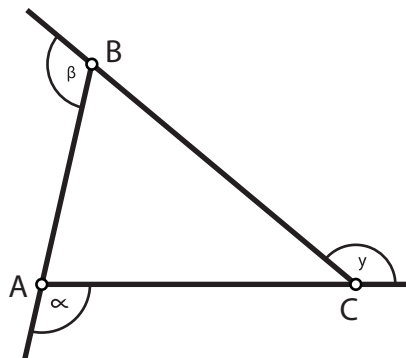


Reúnete en parejas y elabora las siguientes figuras en papel Bond o cartulinas, y resuelve los siguientes ejercicios. Al finalizar, el asesor seleccionará aun representante por equipo para que comparta con todo el grupo su respuesta y justificación.

19. Hallar las medidas de los ángulos  $\alpha$  y  $A$

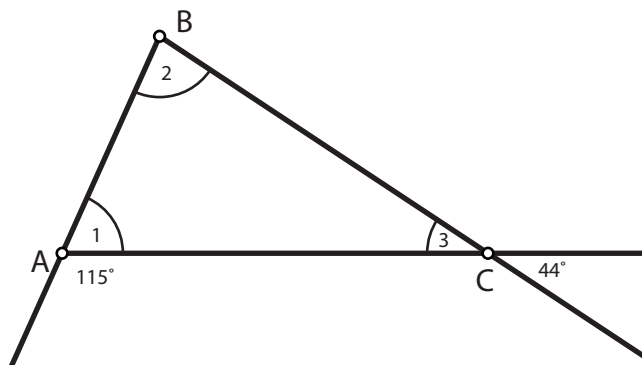


20. De acuerdo con la figura de análisis, completar el cuadro siguiente.

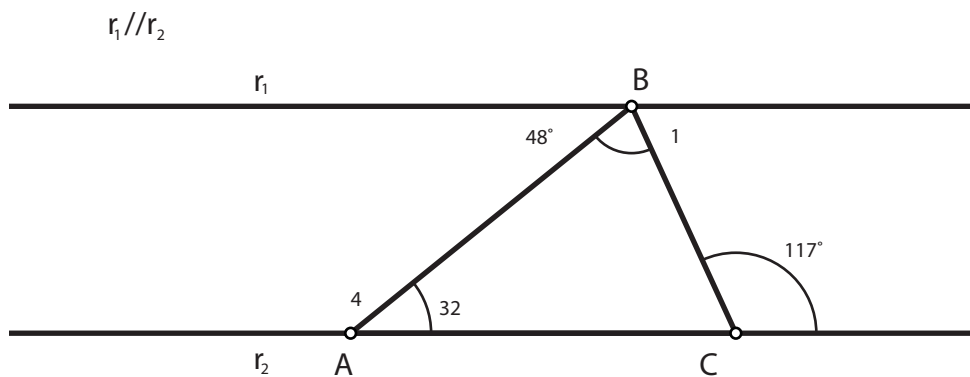


$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{c}$
$32^\circ$	$46^\circ$				
		$20^\circ 25'$	$53^\circ$		
				$145^\circ$	$95^\circ$
$120^\circ 5''$					$145^\circ 16'$

21. Calcula los ángulos numerados:



22. Calcular los ángulos numerados:





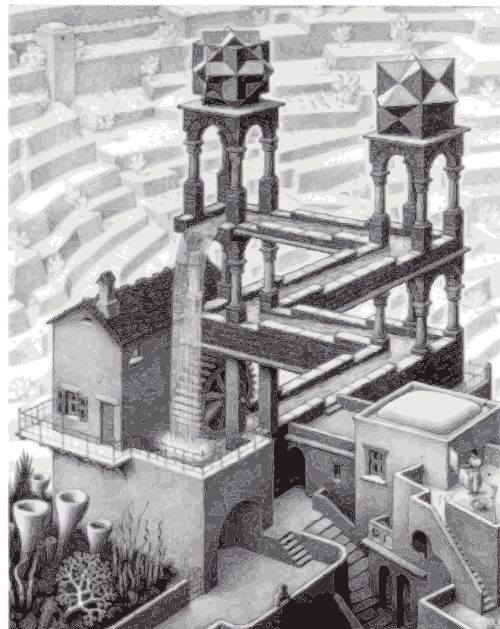
## Quiero saber más

El triángulo de Penrose y el trabajo artístico de M. C. Escher

¿Te gustan las ilusiones ópticas? Observa atentamente la figura que se conoce como triángulo de Penrose ¿Qué observas? ¿Cómo podrías describirlo? ¿Es posible construirlo realmente?



M.C.Escher es el artista que mejor ha reflejado gráficamente el pensamiento matemático moderno. Aún sin ser matemático, sus obras muestran un interés y una profunda comprensión de los conceptos geométricos, desde la perspectiva a los espacios curvos, pasando por la división del plano en figuras iguales. En su obra Cascada (1961) toma como base el triángulo (más conocido como el tribar de Penrose).



Penrose define al tribar como una figura triangular en tres dimensiones imposible porque su existencia está basada en uniones de sus lados formadas por elementos corrientes pero incorrectos. Aunque cada uno de los ángulos que forman este triángulo parece correcto, los tres son rectos y suman  $270^\circ$ . Escher marca el absurdo de la imagen mediante una corriente de agua que sube hasta una cascada desde la cual cae en un perpetuum mobile (movimiento perpetuo).



¿Qué voy a aprender?



## BLOQUE II.

### COMPRENDE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.

#### UNIDAD DE COMPETENCIA

» Aplica las propiedades de los triángulos para proponer, formular, definir y resolver problemas de situaciones teóricas y prácticas. Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de la congruencia de triángulos.

Después de haber estudiado los conceptos y propiedades básicas de triángulos en el bloque anterior, estudiar en este Bloque II la congruencia de los triángulos y cada uno de los postulados (LAL, LLL, ALA) que te permitirán distinguir y visualizar cómo y por qué son congruentes o no los triángulos.

Aprenderás cuál es la relación de igualdad entre los elementos de los triángulos y aplicarás cada uno de los criterios para la resolución de problemas de forma teórica y práctica.



#### Fuentes de Consulta

- García, Miguel y Manuel Rodríguez. Matemáticas 2, Bachillerato. México. ST Editorial. 2005
- Ruiz Basto, Joaquín. Matemáticas II, Bachillerato General. México. Publicaciones Cultural, 2005
- Ortiz Campos, Francisco. Matemáticas II, Geometría y Trigonometría. México. Publicaciones Cultural, 2005



### Sitios Web recomendados

<http://www.arrakis.es/~bbo/geom/trian1.htm> (Encontrarás información de los polígonos, cuerpos con volumen, biografías y fichas de trabajo).

<http://www.arrakis.es/~bbo/geom/trian1.htm> (contiene un tutorial de Geometría plana elemental).

<http://platea.pntic.mec.es/%7eablancog/index.htm> (Puedes interactuar manipulando las figuras y observar cómo se ubican los diferentes elementos, rectas notables de triángulos construcción, etc. Te lo recomendamos ampliamente).

<http://www.acienciasgalilei.com/mat/formularios/form-triangulos.htm>. (Formularios, tablas y constantes matemáticas).



### ¿Qué aprendo?

Te has preguntado alguna vez ¿Cómo se clasifican los triángulos? ¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo? ¿Cuánto vale la suma de sus ángulos exteriores? Ya lo estudiamos en el bloque anterior, y nos será mucha ayuda para el siguiente, para el cual deberíamos hacernos también algunas preguntas ¿bajo qué condiciones dos triángulos son congruentes? ¿Cuando son semejantes dos triángulos? ¿Conoces los postulados de Hilbert? Tratemos de contestar estas cuestiones.

## 2.1 Congruencia de triángulos



Realiza una investigación de los postulados de Hilbert y elabora un cuadro sinóptico con las ideas principales de ellos, entrega este cuadro a tu asesor para obtener una retroalimentación.

Posteriormente comenta en clase y con todo el grupo por qué son importantes estos postulados para el estudio de la congruencia.

Investiga sobre el tema de congruencia y desarrolla lo que se pide a continuación:

Complementa la siguiente descripción:

Dos triángulos son congruentes cuando:





## 2.2 Criterios de Congruencia

Estudiamos los criterios de congruencia, lee junto con tu asesor la siguiente información, analícela y resuelvan lo que se pide.

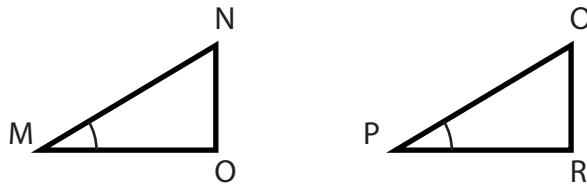
### CRITERIO LAL (lado-ángulo-lado)

El primer criterio de igualdad entre triángulos afirma que si dos lados de un triángulo y el ángulo que forman son iguales respectivamente a los de un segundo triángulo, ambos son congruentes o iguales. Observa las figuras siguientes y complementa lo que falta:

El lado MN es \_\_\_\_\_ al lado \_\_\_\_\_

El lado \_\_\_\_\_ es igual al lado \_\_\_\_\_

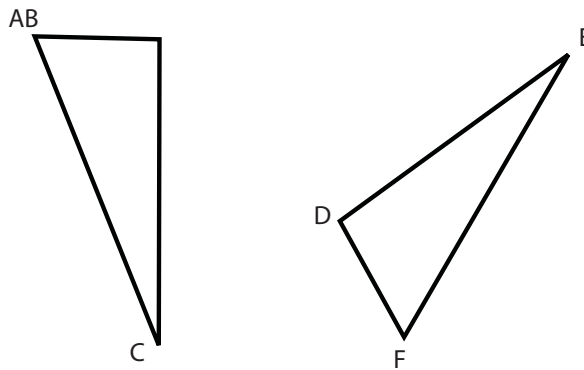
El ángulo \_\_\_\_\_ es \_\_\_\_\_ al  $\angle P$



En conclusión, el  $\triangle MNO$  es \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_ al  $\triangle POR$

### CRITERIO LLL (lado-lado-lado)

El segundo criterio expresa que si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente iguales, ambos triángulos son **correspondientes o iguales** entre sí. Revisa las siguientes figuras, mide los lados de cada una y determina si son correspondientes o iguales.



¿Cuales lados son iguales?

\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

### CRITERIO ALA (ángulo-lado-ángulo)

El tercer criterio afirma que si dos triángulos tienen un lado y dos ángulos iguales, entonces son triángulos congruentes o iguales.



$\angle A \cong \angle D$  ;  $AC \cong DF$  ;  $\angle C \cong \angle F$  ; luego  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

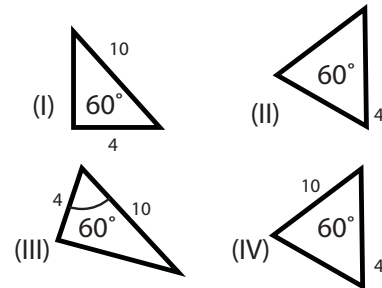


## ¿Qué he aprendido?

Después de haber visto el bloque II es tiempo de que resuelvas unos ejercicios para poder realizar una evaluación de lo estudiado.

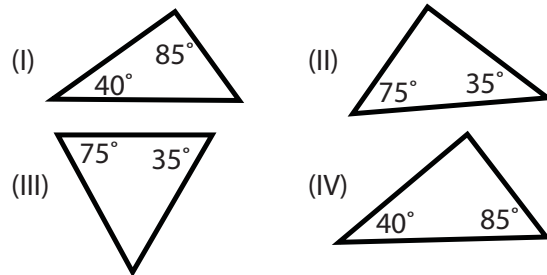
1. ¿Qué triángulos son congruentes de acuerdo al postulado  $L \cdot A \cdot L$ ?

- A) II - IV
- B) I - III
- C) I - II
- D) III - IV
- E) I - IV



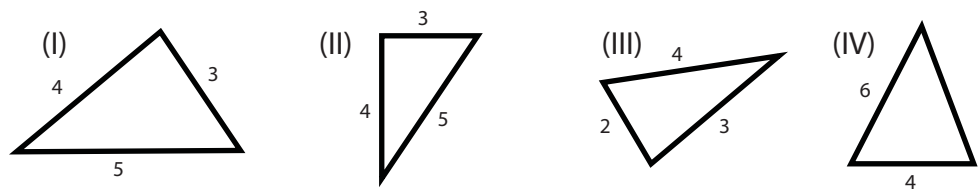
2. ¿Qué triángulos son congruentes de acuerdo al postulado  $A \cdot L \cdot A$ ?

- A) I - II
- B) II - IV
- C) II - III
- D) I - III
- E) I - IV



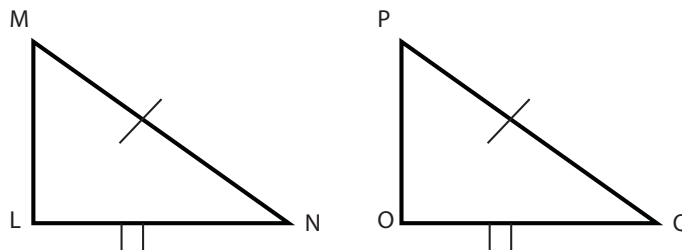
3. ¿Qué triángulos son congruentes de acuerdo al postulado  $L \cdot L \cdot L$ ?

- A) II - IV
- B) II - III
- C) I - III
- D) I - IV
- E) I - II

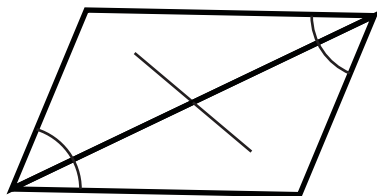


En cada uno de los siguientes pares de figuras los triángulos son congruentes, forma equipos de máximo 4 personas y represéntalos en papel Bond o cartulinas, elije el postulado de congruencia empleado. (LLL, ALA, LAL). Al finalizar tu asesor elegirá algún equipo para que exponga sus conclusiones.

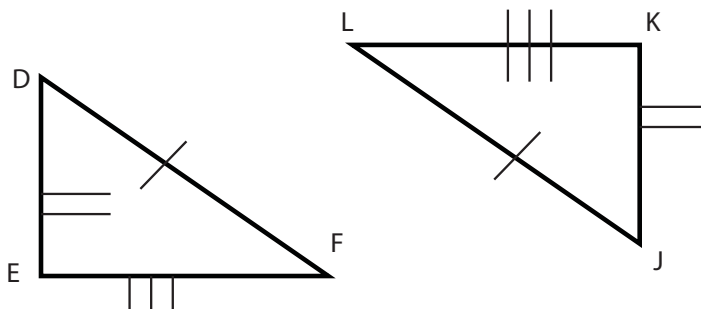
4 )



5 )



6 )

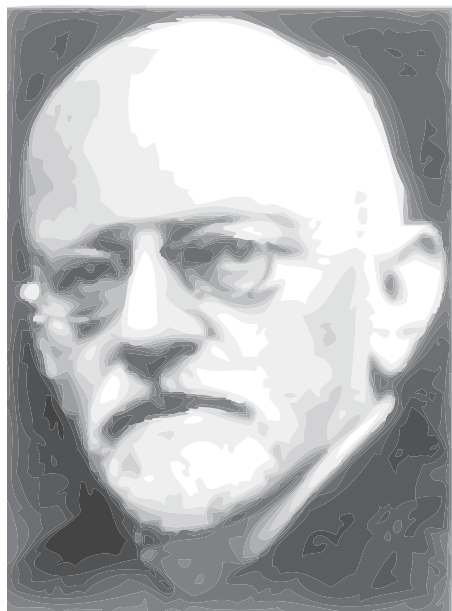


Quiero saber más



### Los postulados de Hilbert

Después de Euclides, Hilbert, ha sido el matemático que más ha influido en la Geometría. Su libro Los fundamentos de la Geometría, publicado en 1899, es un clásico. En este se encuentran los cinco grupos de axiomas de Hilbert:

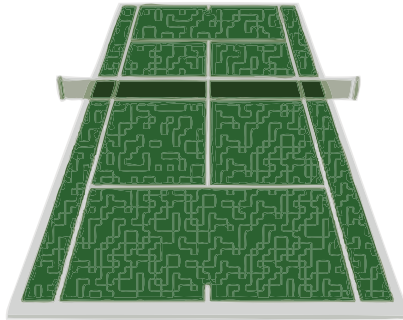


- I. Axiomas de incidencia.
- II. Axiomas de orden.
- III. Axioma de las paralelas.
- IV. Axiomas de congruencia.
- V. Axiomas de continuidad.

Hilbert, al retirarse en 1930, la ciudad de Königsberg le hizo hijo predilecto de la ciudad. En ese acto dio un discurso, que finalizó con seis famosas palabras, *Wir musen wissen, wir werden wissen* ("Debemos saber, de modo que sabremos"), las cuales mostraban su entusiasmo por las matemáticas y una vida dedicada a resolver problemas matemáticos.

### Vida diaria

En una cancha de tenis, los sectores opuestos son congruentes, si tomamos la red como eje de simetría.



Al igual que la cancha de tenis en el terreno de juego para el fútbol posee los sectores opuestos congruentes si se toma la recta del centro de la cancha como eje de simetría.



### Técnica

Triángulos congruentes usados como soporte estructural de un puente.

Para sostener las vigas de un puente es frecuente la utilización de soportes triangulares.

En este caso de la fotografía, el puente tiene todos los lados iguales: son triángulos equiláteros. Todos los triángulos de acero contruidos para sostener este puente son congruentes entre sí.



### Arte

El arte geométrico de Maurits Escher

En las obras de Maurits Escher, se pueden observar figuras congruentes, por ejemplo, los reptiles que se observan en la primera pintura que lleva por nombre Reptiles (litografía de 1943), además de los murciélagos y Ángeles que se observan en la pintura que lleva por nombre Ángeles y demonios.



Las construcciones del viejo mundo

El embaldosado de una superficie utilizando un mismo diseño de baldosa como se muestra en la imagen, se puede observar que contiene figuras geométricas como cuadrados, trapecios y octaedros que son congruentes entre sí.





¿Qué voy a aprender?



## BLOQUE III.

### RESUELVE PROBLEMAS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS Y TEOREMA DE PITÁGORAS.

#### UNIDAD DE COMPETENCIA

» Argumenta la pertinencia de la aplicación de los diversos criterios de semejanza, del teorema de Tales o el teorema de Pitágoras, así como la justificación de los elementos necesarios para su utilidad en la resolución de problemas de su entorno.

¿Cuánto mide la altura de tu casa?, ¿los postes de luz en la calle? ¿cuál es la altura de un gran edificio? Para saber la altura, se necesitaría un gran instrumento de medición, ¿no crees? En realidad puedes hacerlo por medio de los criterios de semejanza, los cuales te brindan una gran ayuda para hacer cálculos que podrían parecer complicados como los anteriores.

En este Bloque III aprenderás los tres criterios de semejanza de triángulos y la relación que guardan con el teorema de Tales para que comprendas este último y puedas aplicarlo en resolución de problemas tanto teóricos como prácticos.

También enunciarás el teorema de Pitágoras y encontrarás las relaciones que existen entre los catetos y la hipotenusa, aprenderás a usarlo en la aplicación y resolución de problemas prácticos.

Visualizarás gráficamente la aplicación del teorema de Tales y el Teorema de Pitágoras para que, usando tu imaginación, puedas relacionarlos con casos de tu entorno.



### Fuentes de Consulta

García, Miguel y Manuel Rodríguez. Matemáticas 2, Bachillerato. México. ST Editorial. 2005  
Ruiz Basto, Joaquín. Matemáticas II, Bachillerato General. México. Publicaciones Cultural, 2005  
Ortiz Campos, Francisco. Matemáticas II, Geometría y Trigonometría. México. Publicaciones Cultural, 2005



### Sitios Web recomendados

<http://www.arrakis.es/~bbo/geom/trian1.htm> (Información de los polígonos, cuerpos con volumen, biografías y fichas de trabajo).

<http://www.arrakis.es/~bbo/geom/trian1.htm> (Contiene un tutorial de Geometría plana elemental).

<http://platea.pntic.mec.es/%7eablanco/gi/index.htm> (Puedes interactuar manipulando las figuras y observando cómo se ubican los diferentes elementos, rectas notables de triángulos construcción, etc. Te lo recomendamos ampliamente).

<http://www.acienciasgalilei.com/mat/formularios/form-triangulos.htm>. (Formularios, tablas y constantes matemáticas).

## ¿Qué aprendo?



Para iniciar este Bloque III realiza una investigación en libros de texto a tu alcance o en Internet sobre la definición de semejanza y sus postulados, teorema de Tales y la relación que pueda existir entre ellos. Con la información recopilada, realiza un mapa mental, el cual deberás entregarlo a tu asesor antes de iniciar con el estudio del bloque.



## 3.1 Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando:

- 1) Tienen, respectivamente, dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido;
- 2) Tienen proporcionales los tres lados, cada uno;
- 3) Tienen, respectivamente, dos ángulos iguales;
- 4) Tienen, respectivamente, dos lados proporcionales e igual el ángulo opuesto al mayor de ellos.

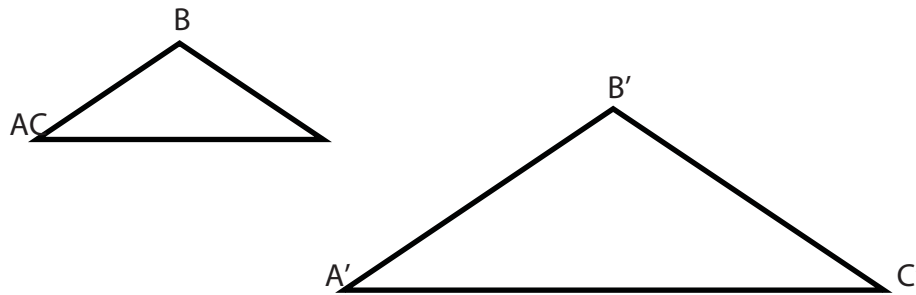
**Nota:**

- a) Dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes.
- b) Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual.
- c) Dos triángulos isósceles que tienen un ángulo igual son semejantes.

Completa el enunciado siguiente:

Se dice que dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos \_\_\_\_\_ y sus lados correspondientes \_\_\_\_\_.

Los triángulos que se muestran son semejantes. Mide los ángulos, los lados y anota lo que hace falta para completar las expresiones que demuestran la semejanza entre ellos.



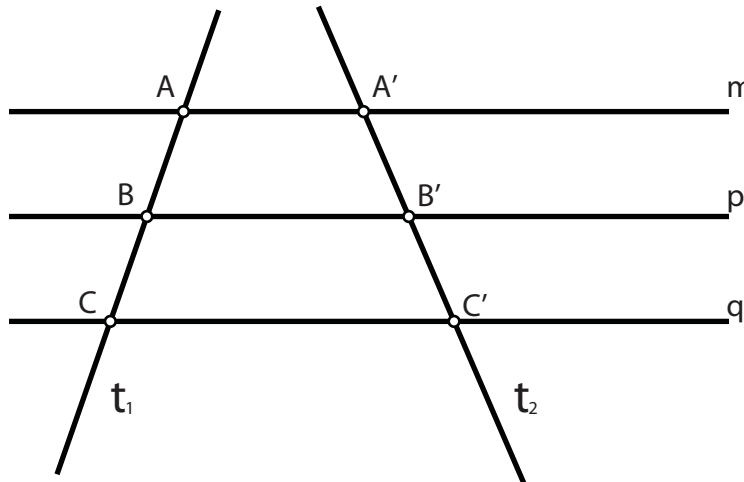
$$\angle A = \angle \_ \quad \angle \_ = \angle \_ \quad \angle \_ = \angle \_$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \_$$

¿Los triángulos son semejantes? ¿Por qué?

### 3.2 Teorema de Tales

Si varias rectas paralelas son cortadas por dos rectas en un plano, los segmentos determinados en una de éstas son proporcionales a los correspondientes de la otra, es decir (ver figura):



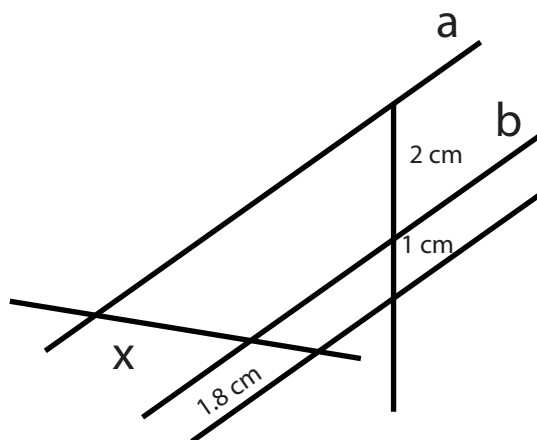


$m \parallel p \parallel q$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}; \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$$

Si los segmentos  $AB$  y  $BC$ , por ejemplo, son proporcionales a  $A'B'$  y  $B'C'$ , entonces las rectas  $m, p, q$  son paralelas.

Sabiendo que las rectas  $a, b$  y  $c$  son paralelas. Calcula el segmento  $x$ , usando los valores de los otros tres segmentos que se dan en la figura, anota tus respuesta y comentarios, si tienes alguna duda acude con tu asesor.

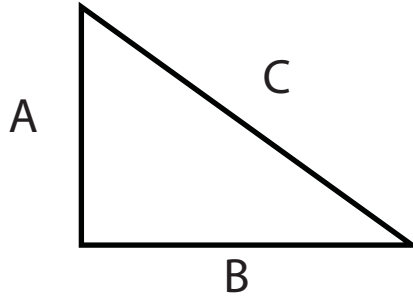


Mi respuesta:



### 3.3 Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Es decir  $C^2 = B^2 + A^2$

Con dicha fórmula podemos hallar A, B o C despejando de la siguiente manera:

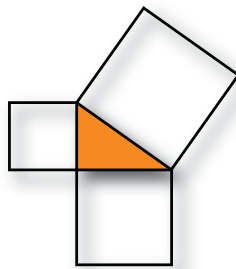
$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$A = \sqrt{C^2 - B^2}$$

$$B = \sqrt{C^2 - A^2}$$

En la siguiente figura, hemos dibujado cuadrados tomando como base las dimensiones de cada uno de los catetos y la hipotenusa. Tu tarea será dividir cada uno de los cuadrados en pequeños cuadrados de aproximadamente 1cm x 1 cm.

Suma el total de cuadritos que aportan los dos catetos y compáralos con los cuadritos que aporta la hipotenusa. Escribe un pequeño comentario sobre lo que aprecias y relaciónalo con la expresión del teorema de Pitágoras.



Mis observaciones:



Utilizando la expresión matemática del teorema de Pitágoras y haciendo los despejes necesarios, recuerda que si tienes alguna duda puedes preguntar a tu asesor, completa la tabla siguiente:

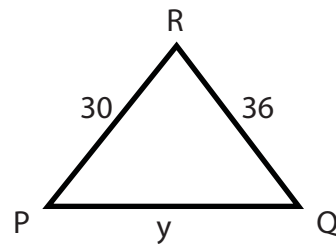
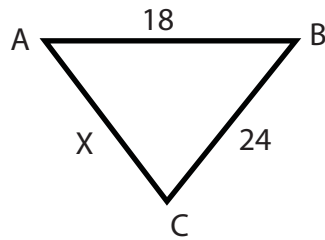
Medida del cateto A	Medida del cateto B	Medida del la hipotenusa
34		
26		
5		8
12		
12		
1	2	

¿Qué he aprendido?



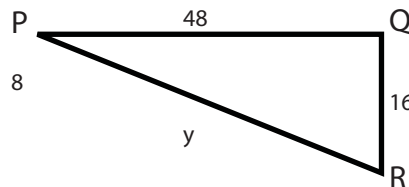
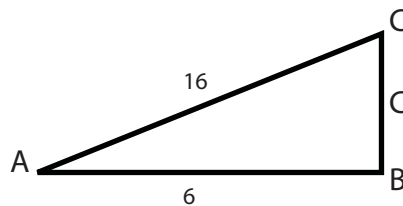
1. Apoyándote en el concepto de semejanza de triángulos, encuentra el valor de las incógnitas "x" y "y".

- A)  $x = 28.8$        $y = 23.5$
- B)  $x = 45$          $y = 14.4$
- C)  $x = 28.8$        $y = 40$
- D)  $x = 20$          $y = 27$
- E)  $x = 27$          $y = 20$



2. Apoyándote en el concepto de semejanza de triángulos, encuentra el valor de las incógnitas.

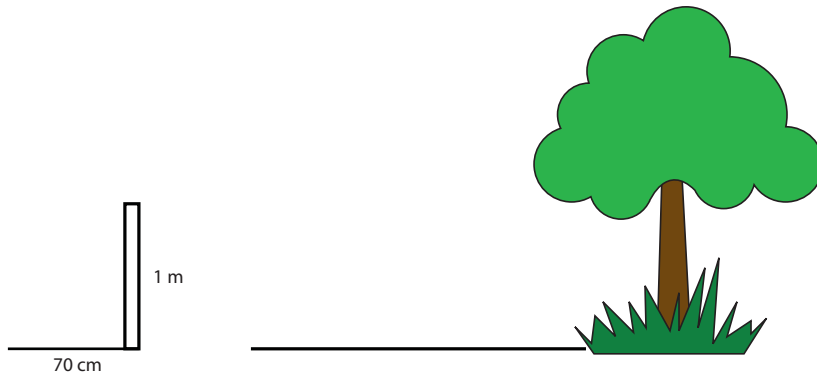
- A)  $x = 6$              $y = 2$
- B)  $x = 2$              $y = 128$
- C)  $x = 48$            $y = 2$
- D)  $x = 128$          $y = 2$
- E)  $x = 2$              $y = 48$



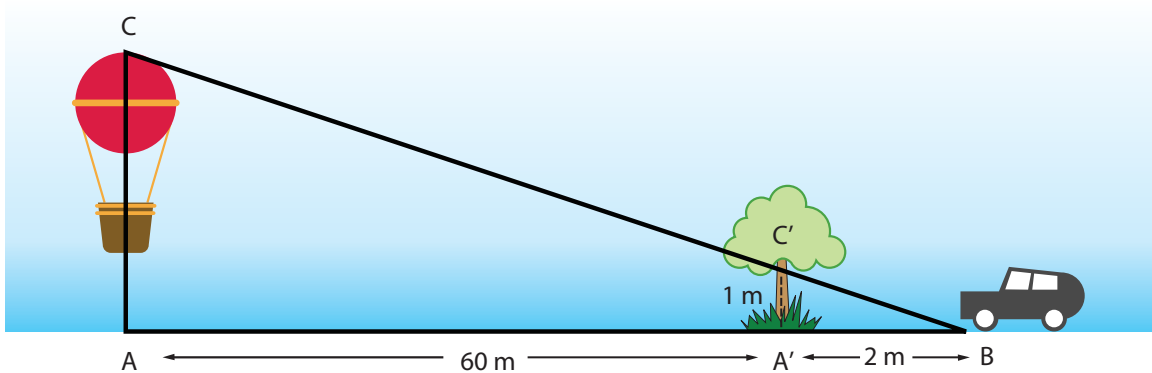
Para los siguientes problemas reúnete en equipos de 5 personas y resuélvanlos haciendo un esquema grafico de su problema en papel Bond o cartulinas para que al finalizar puedan presentar sus resultados ante el resto de la clase y el asesor, no olvides comparar tus respuestas con otros.



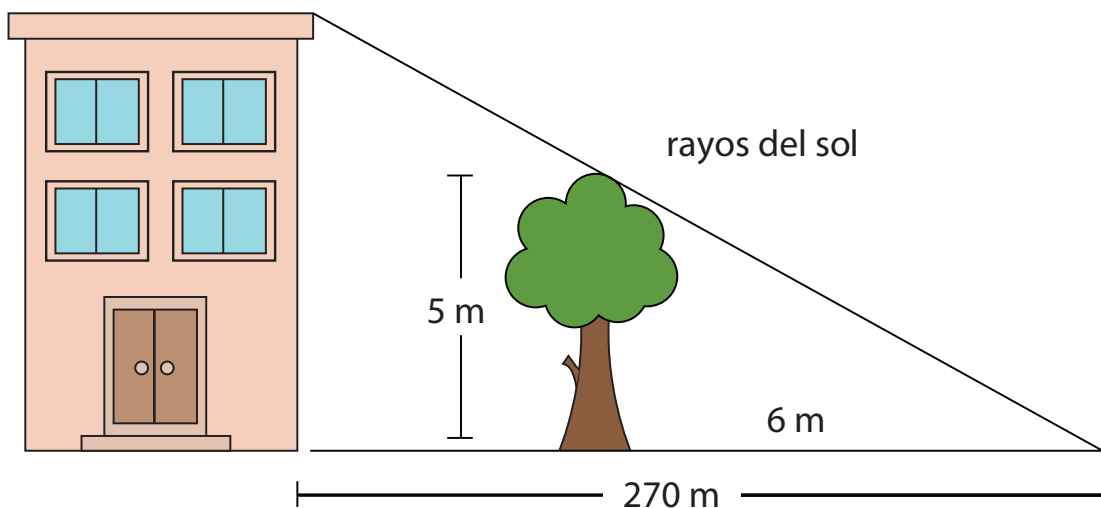
3. Si en un determinado instante del día una estaca de un metro produce una sombra de 70cm de longitud. ¿Cuál será la altura de un árbol que en ese mismo instante produce una sombra de 3.4m de longitud?



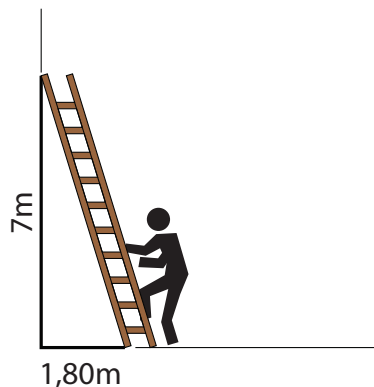
4. Calculemos a qué altura se halla este globo.



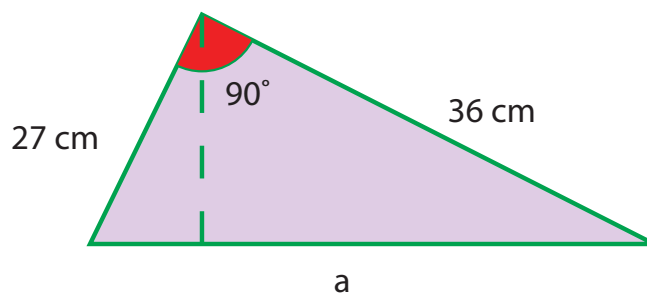
5. Un árbol mide 5 m de altura y, a cierta hora del día, proyecta una sombra de 6 m. ¿Qué altura tendrá el edificio de la figura si a la misma hora proyecta una sombra de 270 m?



6. Calculemos la longitud de una escalera, sabiendo que está apoyada en la pared a una distancia de 1,8 m y alcanza una altura de 7 m.



7. Una antena está sujeta al suelo por dos cables que forman un ángulo recto de longitudes 27 y 36 cm. ¿Cuál es la distancia que separa los dos puntos de unión de los cables con el suelo?



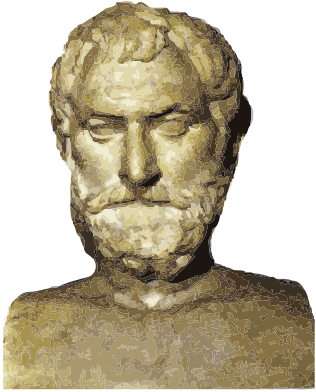
Quiero saber más



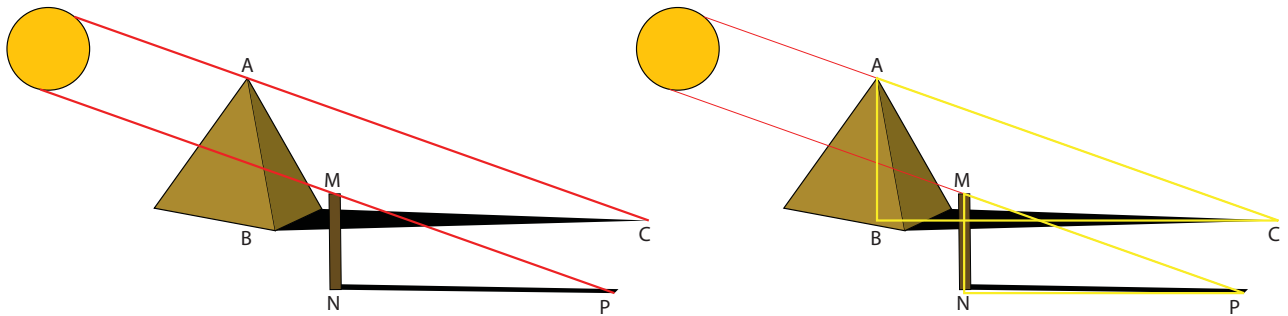
Vamos a remontarnos unos cuantos años atrás, nos situamos en el siglo III A.C. en la ciudad de Alejandría con el gran estudioso de la geometría Euclides.

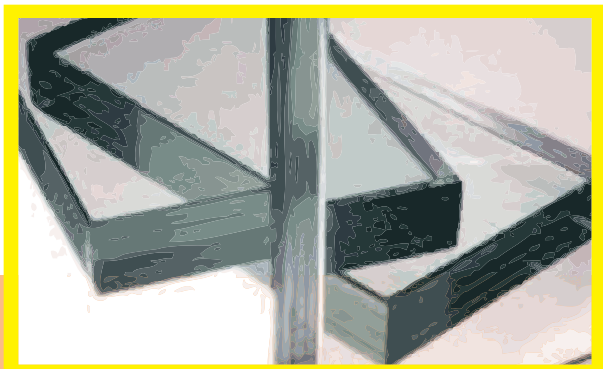


Él hizo un descubrimiento a partir de una idea previa de Tales de Mileto (alrededor de 300 años antes).



Tales consiguió una medida aproximada de la gran pirámide de Keops con la simple ayuda de un bastón y la sombra que proyectaban ambos ya que los rayos del sol inciden en los cuerpos con un mismo ángulo generando dos triángulos semejantes





¿Qué voy a aprender?



## BLOQUE IV.

### RECONOCE LAS PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS.

#### UNIDAD DE COMPETENCIA

» Construye e interpreta modelos en los que se identifican los elementos de los polígonos, mediante la aplicación de sus propiedades, en la resolución de problemas que se derivan de situaciones reales, hipotéticas o teóricas. Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de polígonos.

¿Alguna vez te has preguntado qué conocimientos requieren los arquitectos, ingenieros civiles, carpinteros e ingenieros mecánicos para diseñar y construir casas, puentes, carreteras, muebles o automóviles? En este bloque de aprendizaje conocerás los elementos básicos que ellos utilizan en el diseño de maquinaria, interiores de casas-habitación, equipo, herramientas y para la construcción de muebles, edificios, puentes y jardines.

En el bloque IV distinguirás entre polígonos y poligonales, entre polígonos regulares e irregulares; clasificarás a los polígonos regulares de acuerdo con su número de lados. De ellos conocerás, además, sus elementos básicos: el radio, la apotema y las diagonales que pueden ser trazadas desde cualquiera de sus vértices. Estudiaras, más adelante, la forma de determinar los ángulos interiores y exteriores de cualquier polígono, tópico que se verá reforzado al revisar la triangulación de polígonos. Para finalizar, estudiaras los métodos que se utilizan para calcular correctamente perímetros y áreas de polígonos.

Para obtener aprendizajes sólidos, te sugerimos estudiar nuevamente la clasificación de los ángulos, especialmente la que corresponde a los ángulos complementarios y suplementarios, ya que te serán de gran utilidad para resolver problemas relacionados con la suma de ángulos interiores y exteriores en los polígonos. Otro contenido relevante es el teorema de Pitágoras, por lo que se sugiere que lo vuelvas a poner en práctica. Emplea tu imaginación y creatividad para que desarrolles tus talentos y logres darle una aplicación en tu entorno, haciendo cuanto.

Una de las maneras que te permiten comprobar tus resultados en la geometría plana, es el de hacer los trazos y dibujar cada una de las figuras haciendo uso de tu transportador, escuadras y compás, ya que podrás ubicar los datos e imaginar previamente la posible solución comprobando así los cálculos que realizarás.



### Fuentes de consulta

Como ya se señaló en la presentación del Cuadernillo, no se exige un texto en particular para el desarrollo de las actividades de aprendizaje, sin embargo los que citaremos a continuación te pueden ser de mucha utilidad por su actualidad y apego al Programa de estudios.

- García, Miguel y Manuel Rodríguez. Matemáticas 2, Bachillerato. México. ST Editorial. 2005
- Ruiz Basto, Joaquín. Matemáticas II, Bachillerato General. México. Publicaciones Cultural, 2005
- Ortiz Campos, Francisco. Matemáticas II, Geometría y Trigonometría. México. Publicaciones Cultural, 2005



### Sitios Web recomendados

<http://www.arrakis.es/~bbo/geom/trian1.htm> (Encontraras información de los polígonos, cuerpos con volumen, biografías y fichas de trabajo).

<http://www.arrakis.es/~bbo/geom/trian1.htm> (Contiene un tutorial de Geometría plana elemental).

<http://platea.pntic.mec.es/%7eablanco/gi/index.htm> (Puedes interactuar manipulando las figuras y observando cómo se ubican los diferentes elementos, rectas notables de triángulos construcción, etc. Te lo recomendamos ampliamente).

<http://www.acienciasgalilei.com/mat/formularios/form-triangulos.htm> (Formularios, tablas y constantes matemáticas).



## ¿Qué aprendo?

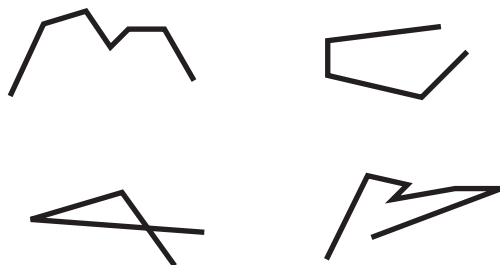
En este Bloque IV los aprendizajes a desarrollar son que conozcas los polígonos y sus características.

### 4.1 Definición De Polígonos

Observa cada una de las figuras con atención, fíjate en aquellas características en las que coinciden y trata de asociarlas con el concepto que las agrupa (poligonal o polígonos). Partiendo de tus observaciones, escribe una definición con tus propias palabras. Posteriormente, investiga en la bibliografía que tengas a tu alcance y discute en grupo tus conclusiones en un ambiente cooperativo para llegar a una definición común.



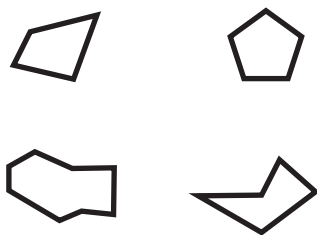
### POLIGONAL



¿Qué es una poligonal?

A large, light-orange rectangular area with rounded corners, intended for the student's response to the question above.

### POLÍGONOS























¿Qué es una poligonal?

A large, light-orange rectangular area with rounded corners, intended for the student's response to the question above.

## 4.2 Clasificación de los polígonos

Lee con atención la siguiente información:

n	Nombre	REGULAR	IRREGULAR
3	TRIÁNGULO		
4	CUADRILATERO		
5	PENTÁGONO		
6	HEXÁGONO		
7	HEPTÁGONO		
8	OCTÁGONO		
9	ENÉGONO		
10	DECÁGONO		
11	ENDECÁGONO		
12	DEDECÁGONO		

Partiendo de la información que acabas de revisar, escribe con tus palabras qué es un:

**a) POLÍGONO REGULAR:**

---

---

---

---

**b) POLÍGONO IRREGULAR**

---

---

---

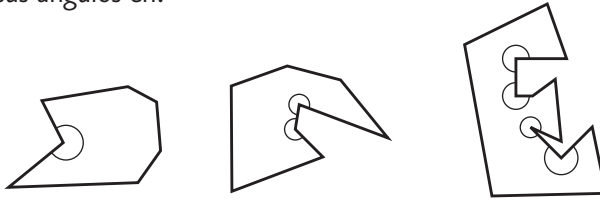
---

Comenta con tu Asesor y tus compañeros las descripciones, traten de llegar a una idea común.

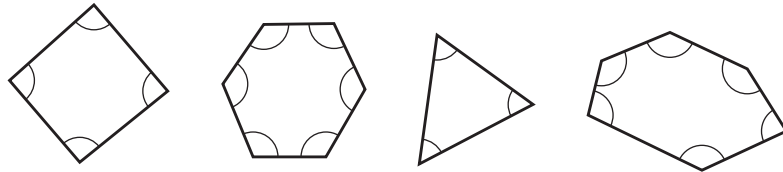
Revisa con atención la información siguiente:

Los polígonos se clasifican según sus ángulos en:

a) Cóncavos



b) Convexos



Responde:

¿Cuál es el criterio para clasificar a un polígono como cóncavo o convexo?

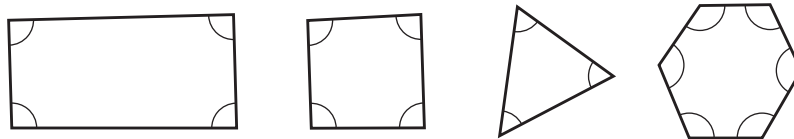
---

---

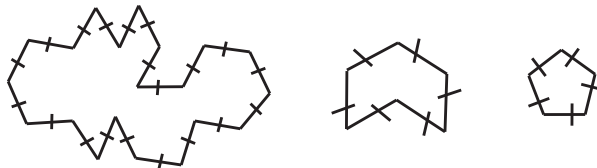
---

Lee con atención:

a) Equiángulos. Aquellos cuyos ángulos son iguales, sean irregulares o regulares, por ejemplo:



b) Equiláteros. Aquellos en los que todos sus lados son iguales, sean regulares o irregulares, por ejemplo:



### 4.3 Elementos de los polígonos

Investiga a qué se le llama radio y a qué se le llama apotema de un polígono.

Anota las definiciones que encuentres:

Radio:

---

---

---

---

Apotema:

---

---

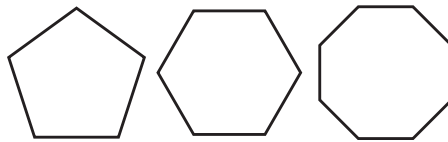
---

---



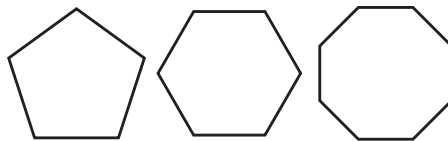
Ahora reúnete con otro compañero para trabajar en parejas las siguientes actividades:

Para cada uno de los siguientes polígonos dibuja tanto el radio como la apotema. Marca con rojo la apotema y con azul el radio.



Para cada uno de los polígonos que te presentamos:

**a)** Toma un vértice del polígono y partiendo de él, dibuja todas las diagonales posibles sin que se crucen entre sí.



**b)** Aplicando la fórmula correspondiente, calcula el total de diagonales y compara el resultado numérico con lo que obtuviste en el inciso (a). Recuerda que en la fórmula  $n$  significa el número de lados que tiene el polígono.



Calculo del total de diagonales ( $n-3$ )

Pentágono	Hexágono	Octágono

Cuando hayan terminado presenten sus resultados en plenaria, el asesor resolverá cualquier duda que se pueda presentar.

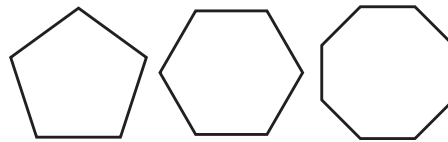
### 4.4 Suma de ángulos interiores y exteriores de un polígono

El asesor te presentará información referente al tema de la suma de ángulos interiores y exteriores de un polígono, atiende a su explicación, y aclara cualquier duda que se vaya presentado.

Terminado su explicación y con la finalidad de poner en práctica lo aprendido, reúnete con otros dos compañeros para que en equipos de tres personas resuelvan las siguientes actividades:



- A) Utilizando escuadras y transportador, marca y mide los ángulos interiores y exteriores de cada polígono.



- B) Concentra tus resultados en la tabla siguiente

Polígono	Medida del ángulo interior	Suma de los ángulos interiores	Suma de los ángulos exteriores	Medida del ángulo exterior
Pentágono				
Hexágono				
Octágono				

Ahora aplica las formulas correspondientes y calcula la suma de los ángulos interiores y la suma de los ángulos exteriores para cada polígono. Compara estos resultados con los que obtuviste en la actividad anterior y comenten con su Asesor y sus compañeros las observaciones acerca de las coincidencias y las diferencias.

Polígono	Medida del ángulo interior	Suma de los ángulos interiores	Medida del ángulo exterior	Suma de los ángulos exteriores
	$\frac{(n-2) 180^\circ}{n}$	$S = (n-2)180^\circ$	$e = \frac{360^\circ}{n}$	$S = n \cdot e$
Hexágono				
Octágono				

## 4.5 Cálculo de perímetros y áreas de polígonos.



Forma parejas e investiga en los libros a tu alcance o internet; contesta lo que se pide:

En términos generales:

- a) ¿Cómo se determina el perímetro de un polígono?,
- b) ¿Qué datos son necesarios para calcular el área de un polígono?
- c) ¿Qué formulas se aplican?



Busca las formulas que se utilizan para calcular el área de los siguientes polígonos:

Polígono	Fórmula para calcular el área	Ejemplo
Triángulo		
Cuadrado		
Pentágono		
Hexágono		
Cualquier polígono regular		

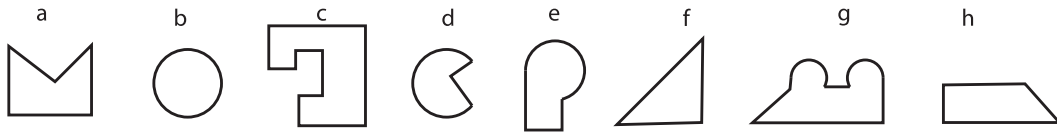
Recuerda que si tienes dudas puedes acudir con tu asesor para despejarlas.



### ¿Qué he aprendido?

Ahora estás listo para aplicar lo que aprendiste a lo largo de este bloque y reafirmar el aprendizaje adquirido; para ello desarrolla los siguientes ejercicios.

1.-Relaciona las figuras con los números romanos.



I. Polígonos

II. No polígonos

- A) I a b c d - II e f g h  
 B) I a c e f - II b d g h  
 C) I a c f h - II b d e g  
 D) I b d g h - II a c e f  
 E) I b d f h - II a c e g

2. Los polígonos \_\_\_\_\_ son los que tienen ángulos y lados iguales y los \_\_\_\_\_ son los de lados y ángulos desiguales.

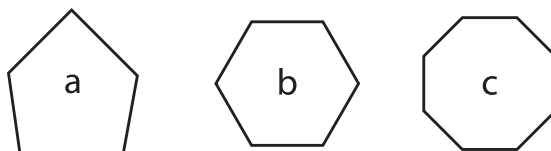
- A) irregulares... regulares  
 B) regulares... irregulares  
 C) cerrados... abiertos  
 D) abiertos... cerrados  
 E) irregulares... cerrados

3. Relaciona la columna de la izquierda con los polígonos de la derecha.

- |                 |                |
|-----------------|----------------|
| I. Regulares    | a) Pentágono.  |
| II. Irregulares | b) Trapecio.   |
|                 | c) Rombo.      |
|                 | d) Hexágono.   |
|                 | e) Rectángulo. |
|                 | f) Octágono.   |
|                 | g) Trapezoide. |
|                 | h) Cuadrado.   |

4. Relaciona las figuras con su nombre:

- I. Pentágono  
 II. Hexágono  
 III. Octágono

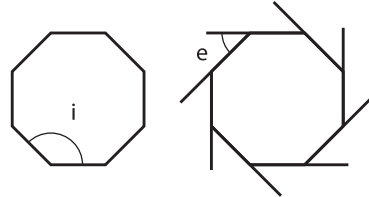


5. Indica el valor del ángulo interior y exterior de un triángulo regular.

- A)  $120^\circ$  y  $60^\circ$
- B)  $135^\circ$  y  $45^\circ$
- C)  $30^\circ$  y  $150^\circ$
- D)  $45^\circ$  y  $135^\circ$
- E)  $60^\circ$  y  $120^\circ$

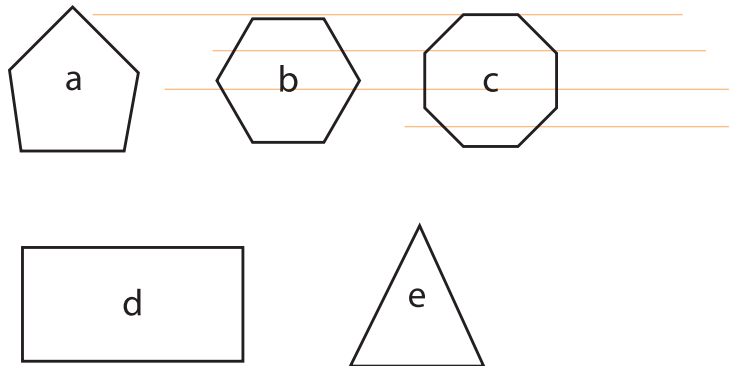
6. Indica el valor del ángulo interior y exterior de un octágono regular.

- A)  $108^\circ$  y  $72^\circ$
- B)  $120^\circ$  y  $60^\circ$
- C)  $135^\circ$  y  $45^\circ$
- D)  $45^\circ$  y  $135^\circ$
- E)  $72^\circ$  y  $108^\circ$

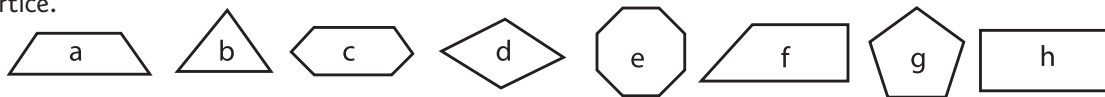


7. Observa los siguientes polígonos y suma sus ángulos internos. Relaciona tu respuesta con las cifras que aparecen con números romanos.

- I.  $1080^\circ$
- II.  $900^\circ$
- III.  $720^\circ$
- IV.  $540^\circ$
- V.  $360^\circ$
- VI.  $180^\circ$



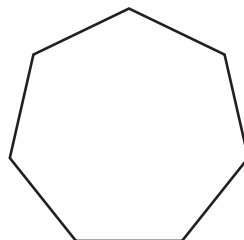
8. Observa las siguientes figuras geométricas e indica en cuáles se puede trazar sólo una diagonal partiendo de un único vértice.



- A) a - b - c - d
- B) a - c - f - g
- C) a - d - e - f
- D) a - d - f - h
- E) a - d - g - h

9. Indica el número de diagonales que se pueden trazar y de triángulos que se pueden formar en un heptágono regular, partiendo de un mismo vértice.

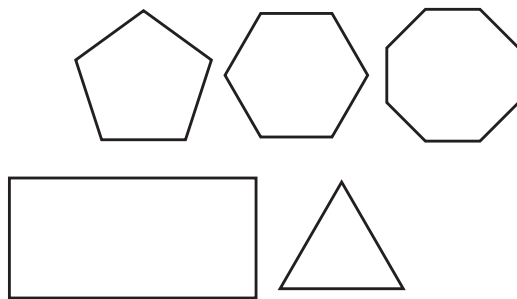
- A) 5 y 4
- B) 5 y 6
- C) 4 y 5
- D) 3 y 4
- E) 4 y 4





**10.** Observa las siguientes figuras geométricas y de acuerdo con el orden en que aparecen, indica el número de triángulos que se forman al trazar sus diagonales desde un vértice.

- A) 3, 5, 4, 2, 2
- B) 3, 4, 5, 2, 1
- C) 3, 6, 4, 2, 2
- D) 3, 4, 7, 2, 1
- E) 3, 4, 6, 2, 0



A continuación se presentan varios ejercicios para que los representes gráficamente, puedes usar papel Bond o cartulinas (o un material semejante), así como plumones o plumas de colores. Forma equipos de 3 personas para trabajar, al final, compara y explica tus resultados ante el grupo.

**11.** Determina para cada uno de los casos siguientes la medida de cada ángulo interior:

- A) Pentágono
- B) Hexágono
- C) Octágono

**12.** Determina el número total de diagonales que se pueden trazar en los siguientes polígonos partiendo de un solo vértice:

- A) Decágono
- B) Hexágono
- D) Heptágono

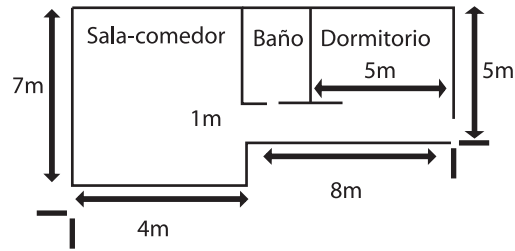
**13.** Determina el número de lados que tiene un polígono regular o irregular cuyos ángulos interiores suman:

- A)  $6840^\circ$
- B)  $4140^\circ$
- C)  $1980^\circ$

**14.** Calcular el perímetro de los siguientes polígonos de acuerdo con los datos mostrados:

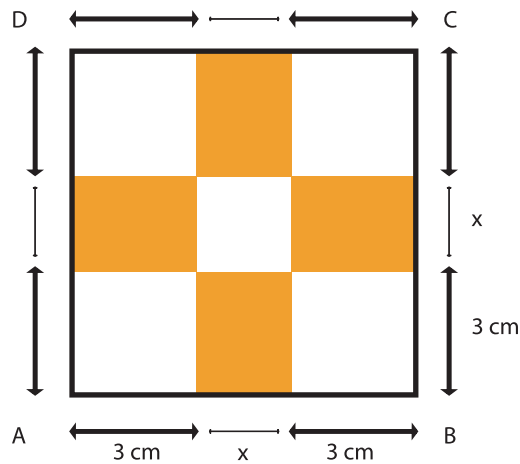
- A) Hexágono de 22 cm de lado y 19 cm de apotema.
- B) Cuadrado inscrito en una circunferencia de 6cm de radio.
- C) Trapecio de 40 y 80 cm de base, respectivamente, y una altura de 10 cm.

15. El Sr. Juan desea colocar mosaico para el piso de su baño, si cada mosaico mide 25cm x 25cm, ¿cuánto le costará ponerle el mosaico si el metro cuadrado cuesta \$20?



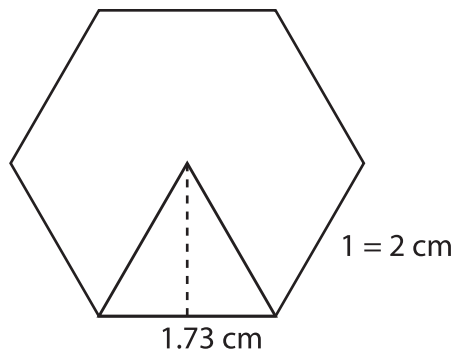
16. De la siguiente figura geométrica se sabe que el área ABCD es de 64 cm<sup>2</sup>, calcula el perímetro de la figura geométrica ABCD así como el área de las partes sombreadas.

- A) 8 cm y 24 cm<sup>2</sup>
- B) 16 cm y 24 cm<sup>2</sup>
- C) 16 cm y 32 cm<sup>2</sup>
- D) 32 cm y 24 cm<sup>2</sup>
- E) 32 cm y 32 cm<sup>2</sup>



17. Calcula el perímetro y el área de un hexágono regular, cuyo lado mide 2 cm y su apotema 1.73 cm.

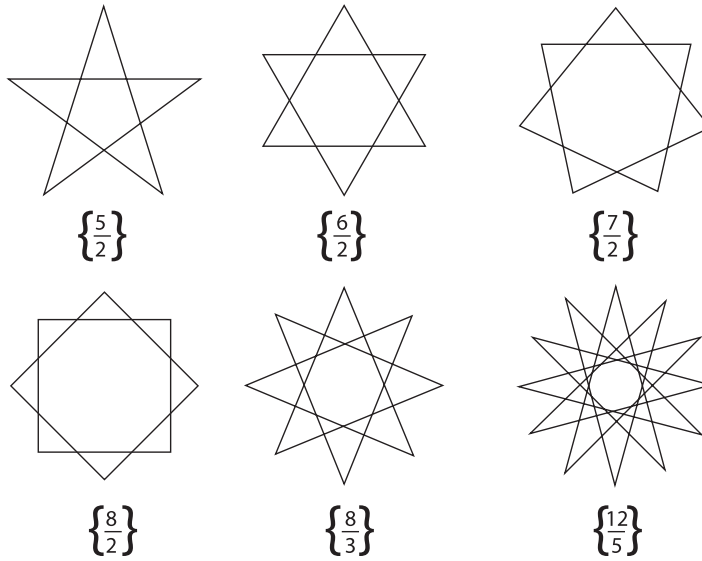
- A)  $P = 8 \text{ cm}$   $A = 6.92 \text{ cm}^2$
- B)  $P = 12 \text{ cm}$   $A = 20.76 \text{ cm}^2$
- C)  $P = 8 \text{ cm}$   $A = 20.76 \text{ cm}^2$
- D)  $P = 12 \text{ cm}$   $A = 10.38 \text{ cm}^2$
- E)  $P = 8 \text{ cm}$   $A = 10.38 \text{ cm}^2$



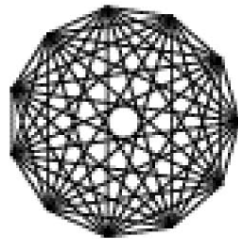
Quiero saber más

Algunos casos de polígonos estrellados:

Un polígono estrellado se obtiene uniendo mediante segmentos cada  $q$  vértices de los  $p$  vértices de un polígono. Para nombrarlos se utiliza el símbolo de L. Schläfli  $\{p/q\}$ .

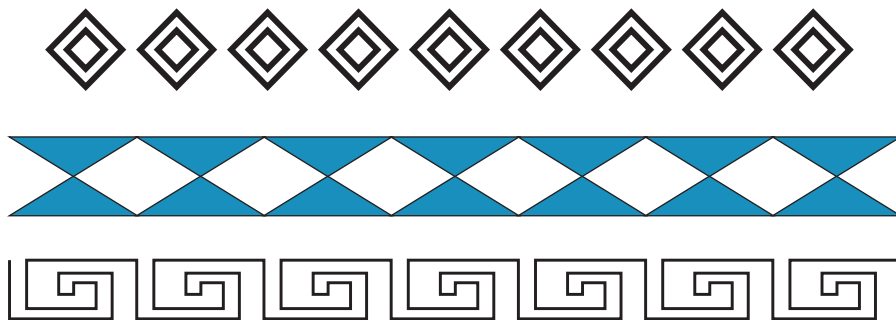


El dibujo de las diagonales de un polígono regular puede dar forma a bonitas figuras:



Cenefas (o frisos):

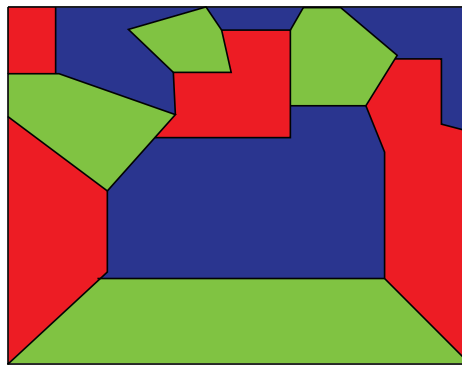
Una cenefa, o friso, es una figura plana obtenida por repetición de un motivo mínimo al que se le aplica una traslación a lo largo de una línea dada y simetrías respecto a un punto de dicha recta, o respecto a ejes paralelos o perpendiculares a la recta dada. Ejemplos:



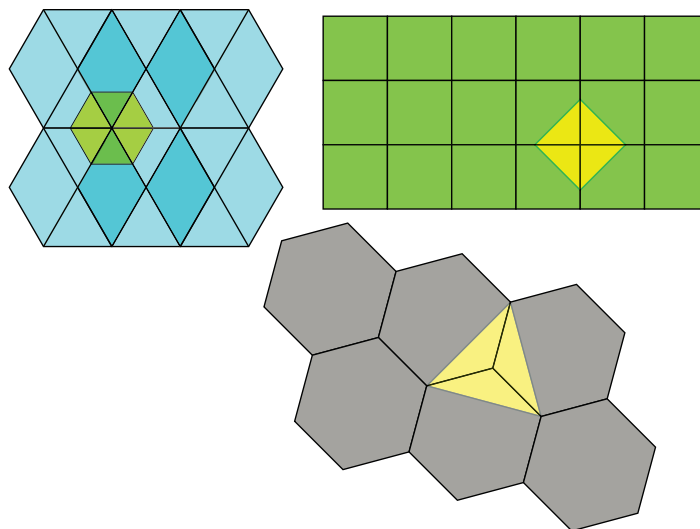
Sólo existen 7 tipos de cenefas (prescindiendo del color), es decir, 7 maneras esencialmente distintas de repetir un motivo en una franja:

Diseños típicos	Transformaciones aplicadas
L L L L L...	1 traslación
L ☒ L ☒ L ☒ ...	1 reflexión horizontal con deslizamiento
V V V V V...	2 reflexiones verticales
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ...	2 semigiros (giros de 180°)
V ☒ V ☒ V ☒ ...	1 reflexión vertical y 1 semigiro
D D D D D...	1 traslación y 1 reflexión horizontal
☒ ☒ ☒ ☒ ☒ ...	2 reflexiones verticales y 1 horizontal

Un mosaico es un recubrimiento (sin huecos ni solapamientos) del plano con polígonos.

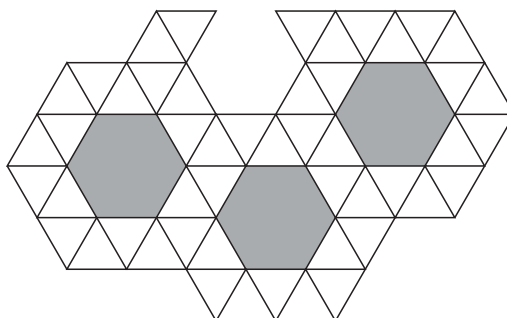
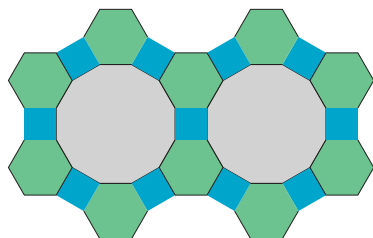
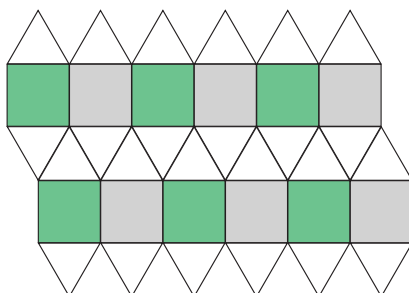
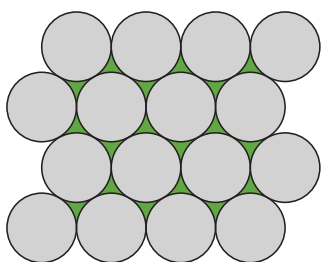
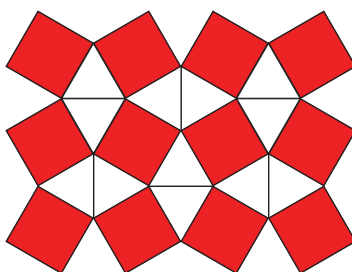
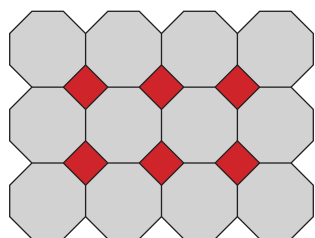
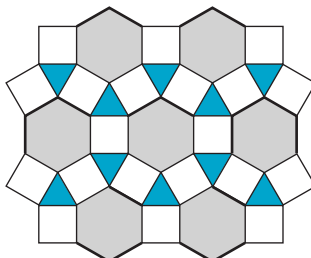
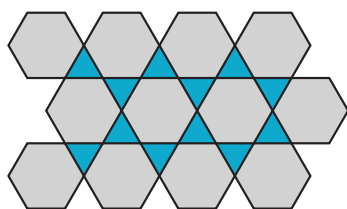


*Mosaicos regulares:* Son los que se obtienen con polígonos regulares iguales, uniendo lado con lado. Hay infinitos polígonos regulares, pero sólo con los de 3, 4 y 6 lados se puede rellenar el plano, sin dejar huecos.



Sólo existen 17 tipos de mosaicos planos, si se utilizan simetrías y giros. Todos ellos pueden observarse en la Alhambra de Granada y en Aragón.

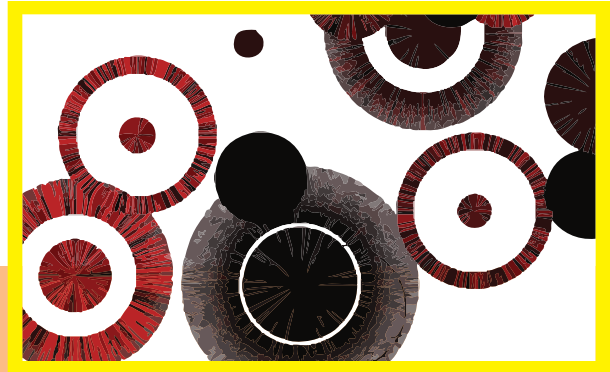
*Mosaicos semirregulares:* Si se mezclan polígonos regulares, se pueden construir ocho mosaicos semirregulares, de modo que los vértices sean todos similares.



Por deformaciones de los polígonos, de modo que se conserve el área, se pueden construir mosaicos más variados.



¿Qué voy a aprender?



## BLOQUE V. EMPLÉA LA CIRCUNFERENCIA

### UNIDAD DE COMPETENCIA

» Construye e interpreta modelos en los que se identifican los elementos de la circunferencia, mediante la aplicación de las propiedades a partir de la resolución de problemas que se deriven en situaciones reales, hipotéticas o teóricas. Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de la circunferencia.

¿Sabías que existen mediciones que al hombre le resultan imposibles hacer de manera directa como el caso de determinar las distancias astronómicas? ¿Cómo pueden, entonces, los astrónomos determinar tales distancias? ¿En qué se basan? ¿Cuáles conocimientos aplican? Sorprendentemente, te darás cuenta de que los cálculos astronómicos tienen su fundamento en los temas que aborda el presente bloque de aprendizaje.

El tópico principal del bloque V se refiere a los conceptos de circunferencia y círculo, con lo cual aprenderás a diferenciarlos; asimismo, conocerás sus elementos (radio, cuerda, tangente, secante, diámetro, arco) y la clasificación de los ángulos en la circunferencia (central, inscrito y circunscrito). Esto te permitirá resolver problemas, comenzando con ejercicios sencillos hasta llegar a aplicarlos en una situación real. Cabe mencionar que la rueda (una aplicación del círculo) no fue inventada por el hombre, sino que solamente la descubrió y se encargó de darle un uso diverso en la industria y en el hogar para satisfacer una múltiple gama de necesidades de la humanidad entera; entre sus aplicaciones podemos mencionar las llantas de automóviles, los sistemas de engranajes, etc.



### Fuentes de consulta

Te proponemos los siguientes textos que pueden ser de mucha utilidad por su actualidad y apego al Programa de estudios.

- García, Miguel y Manuel Rodríguez. Matemáticas 2, Bachillerato. México. ST Editorial. 2005
- Ruiz Basto, Joaquín. Matemáticas II, Bachillerato General. México. Publicaciones Cultural, 2005
- Ortiz Campos, Francisco. Matemáticas II, Geometría y Trigonometría. México. Publicaciones Cultural, 2005



### Sitios Web recomendados

<http://www.arrakis.es/~bbo/geom/trian1.htm> (Encontraras información de los polígonos, cuerpos con volumen, biografías y fichas de trabajo).

<http://www.arrakis.es/~bbo/geom/trian1.htm> (Contiene un tutorial de Geometría plana elemental).

<http://platea.pntic.mec.es/%7eablanco/gi/index.htm> (Puedes interactuar manipulando las figuras y observando cómo se ubican los diferentes elementos, rectas notables de triángulos construcción, etc. Te lo recomendamos ampliamente).

<http://www.acienciasgalilei.com/mat/formularios/form-triangulos.htm> (Formularios, tablas y constantes matemáticas).

### ¿Qué aprendo?



La circunferencia es el punto central de este bloque V, así que empecemos a estudiar su definición y características.

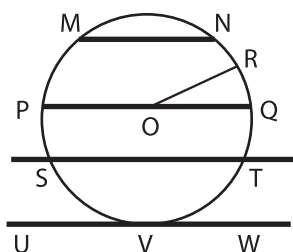
## 5.1 Definición y elementos de la circunferencia y del círculo

Los aprendizajes a desarrollar en este bloque V son que resuelvas problemas teóricos y prácticos de la circunferencia y círculo, aplicando las propiedades y teorías de los ángulos en la circunferencia, mediante la obtención de perímetro y áreas de ambos.

Por lo cual te pedimos que realices una investigación inicial acerca de los conceptos de circunferencia, círculo, radio, diámetro, cuerda, arco, tangentes y secantes. Para que entregues la información a tu asesor por medio de un mapa mental.



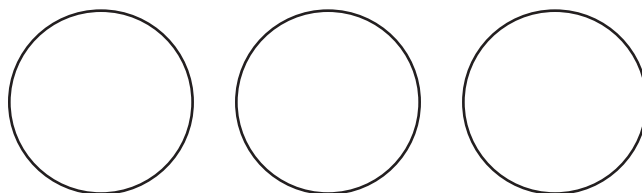
Observa atentamente el diagrama que se presenta a continuación y escribe los nombres de cada uno de los elementos de la circunferencia. Si desconoces alguno, revisa la investigación que hiciste antes o pregúntale a tu asesor.



$\overline{MN}$  : \_\_\_\_\_  $\overline{PQ}$  : \_\_\_\_\_  $\overline{ST}$  : \_\_\_\_\_  
 $\overline{UW}$  : \_\_\_\_\_  $\overline{OR}$  : \_\_\_\_\_  $\overline{O}$  : \_\_\_\_\_

¿Cuántos puntos del círculo toca una recta tangente?

En los siguientes círculos dibuja una, dos y tres rectas tangentes, respectivamente:

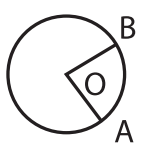


## 5.2 Ángulos en un círculo

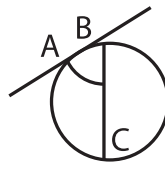
1.- Investiga sobre el tema de ángulos en un círculo en libros a tu alcance o en Internet y completa el cuadro siguiente:

Ángulo	Diagrama de ejemplo	Fórmula para calcular su medida
Central		
Inscrito		
Circunscrito		

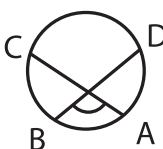
Revisa las siguientes figuras donde se muestran algunos ángulos con sus formulas. Colorea con rojo los arcos y con azul los ángulos correspondientes.



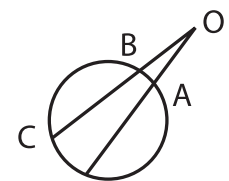
$\angle AOB = \widehat{AB}$



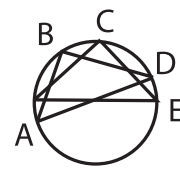
$\angle ABC = \frac{\widehat{AC}}{2}$



$\angle O = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$



$\angle O = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}$



$\angle B = \angle C = 90^\circ$



## 5.3 Perímetros y áreas

Recordemos algunos conceptos que ya habías investigado y otros nuevos, búscalos y utilizando tus palabras describe cada uno en tu cuaderno o en el espacio que hemos destinado en esta página. Te sugerimos dibujar los diagramas que consideres necesarios para complementar la información.



Circunferencia

---

---

---

---

Círculo

---

---

---

---

Pi ( $\pi$ )

---

---

---

---

Diámetro

---

---

---

---

Radio

---

---

---

---

Área del círculo

---

---

---

---

Perímetro de la circunferencia

---

---

---

---

Anota a continuación las formulas para calcular el perímetro y el área de un círculo. Asimismo, copia algún ejemplo de cómo se aplica cada fórmula, colocando el dibujo o diagrama que ilustre la solución.

### Perímetro de un círculo

Fórmula

Ejemplo resuelto con diagrama

### Área de un círculo

Fórmula

Ejemplo resuelto con diagrama



### ¿Qué he aprendido?

Refuerza lo que acabas de aprender resolviendo las preguntas que te proponemos a continuación:

**1.** Curva cerrada y plana donde todos sus puntos equidistan de otro punto interior llamado centro.

- A) Círculo
- B) Radio
- C) Circunferencia
- D) Cuerda
- E) Secante

**2.** A la superficie plana limitada por la circunferencia se le llama...

- A) Radio.
- B) Círculo.
- C) Cuerda.
- D) Secante.
- E) Tangente.

- 3.** Es el segmento de recta que va del centro a un punto de la circunferencia.  
A) Diámetro  
B) Cuerda  
C) Tangente  
D) Circulo  
E) Radio
- 4.** Es el segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia pasando por el centro del círculo.  
A) Radio  
B) Cuerda  
C) Secante  
D) Diámetro  
E) Tangente
- 5.** Es el segmento de recta que NO intersecta el centro y cuyos extremos son puntos de la circunferencia.  
A) Cuerda  
B) Secante  
C) Tangente  
D) Radio  
E) Diámetro
- 6.** Recta que corta en dos cualquiera de sus puntos a la circunferencia.  
A) Tangente  
B) Radio  
C) Cuerda  
D) Secante  
E) Diámetro
- 7.** Recta que toca a la circunferencia en un solo punto.  
A) Radio  
B) Tangente  
C) Secante  
D) Cuerda  
E) Diámetro
- 8.** Segmento de curva marcado o delimitado por dos puntos de la circunferencia.  
A) Arco  
B) Radio  
C) Diámetro  
D) Secante  
E) Tangente
- 9.** Ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios.  
A) Semi-inscrito  
B) Exterior  
C) Interior

- D) Inscrito
- E) Central

**10.** Ángulo que tiene su vértice en la circunferencia y todos sus lados son secantes.

- A) Exterior
- B) Inscrito
- C) Interior
- D) Adyacente
- E) Ex-inscrito

**11.** Ángulo que tiene su vértice en la circunferencia en donde uno de sus lados es una tangente y el otro una secante.

- A) Central
- B) Interior
- C) Ex-inscrito
- D) Semi-inscrito
- E) Exterior

**12.** El ángulo adyacente a un ángulo inscrito se conoce como...

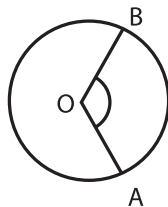
- A) Interior.
- B) Semi-inscrito.
- C) Ex-inscrito.
- D) Central.
- E) Exterior.

**13.** Ángulo cuyo vértice es un punto que está dentro de la circunferencia.

- A) Interior
- B) Exterior
- C) Central
- D) Inscrito
- E) Semi-inscrito

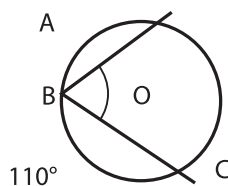
**14.** ¿Cuál es el valor del ángulo central AOB, si el arco vale  $120^\circ$ ?

- A)  $30^\circ$
- B)  $60^\circ$
- C)  $110^\circ$
- D)  $120^\circ$
- E)  $240^\circ$



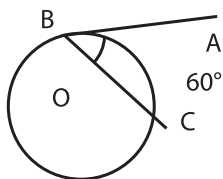
**15.** ¿Cuál es el valor del ángulo inscrito ABC, si el arco vale  $110^\circ$ ?

- A)  $250^\circ$
- B)  $110^\circ$
- C)  $90^\circ$
- D)  $55^\circ$
- E)  $20^\circ$



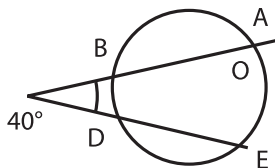
16. ¿Cuál es el valor del ángulo semi-inscrito ABC, si el arco vale  $60^\circ$ ?

- A)  $15^\circ$
- B)  $30^\circ$
- C)  $60^\circ$
- D)  $120^\circ$
- E)  $300^\circ$



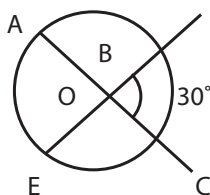
17. ¿Cuál es el valor del ángulo exterior BCD, si el arco vale  $40^\circ$  y el arco vale  $110^\circ$ ?

- A)  $75^\circ$
- B)  $55^\circ$
- C)  $40^\circ$
- D)  $35^\circ$
- E)  $20^\circ$



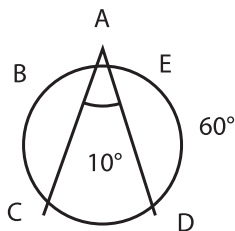
18. ¿Cuál es el valor del ángulo interno DBC, si el arco vale  $30^\circ$  y el arco vale  $120^\circ$ ?

- A)  $75^\circ$
- B)  $60^\circ$
- C)  $45^\circ$
- D)  $30^\circ$
- E)  $15^\circ$



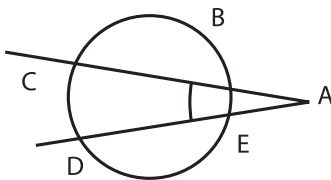
19. Calcula el valor del ángulo exterior EAB, si el arco vale  $60^\circ$  y el arco vale  $10^\circ$ .

- A)  $5^\circ$
- B)  $10^\circ$
- C)  $25^\circ$
- D)  $30^\circ$
- E)  $35^\circ$



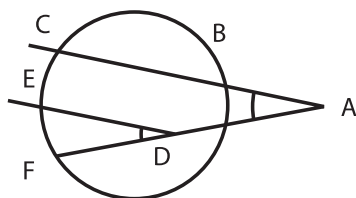
20. Calcula el valor del arco, si el ángulo BAE vale  $80^\circ$  y el arco tiene un valor de  $10^\circ$ .

- A)  $10^\circ$
- B)  $80^\circ$
- C)  $85^\circ$
- D)  $150^\circ$
- E)  $170^\circ$



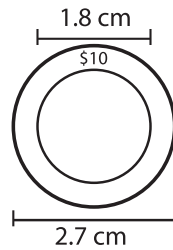
21. Calcula el valor del arco si el segmento de recta es paralela a, el arco vale  $15^\circ$  y el ángulo EDF vale  $25^\circ$ .

- A)  $65^\circ$
- B)  $35^\circ$
- C)  $20^\circ$
- D)  $15^\circ$
- E)  $5^\circ$

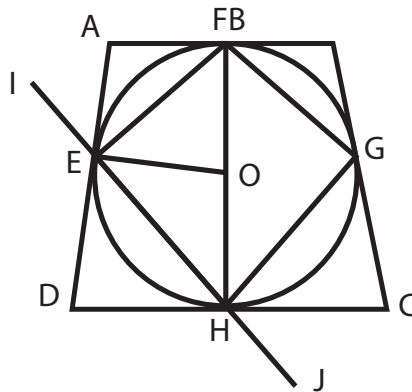


22. Ésta es una moneda antigua de diez pesos, calcula el área de la corona circular donde se lee \$10, Diez Pesos, 1998.

- A) .45 cm<sup>2</sup>
- B) 1.01 cm<sup>2</sup>
- C) 1.41 cm<sup>2</sup>
- D) 2.90 cm<sup>2</sup>
- E) 3.18 cm<sup>2</sup>



23. En el siguiente ejercicio, te pedimos que te reúnas en equipos de 4 personas y elaboren la figura en tamaño mural con la ayuda de papeles de colores o plumones y asocien los términos del lado izquierdo con los nombres del lado derecho:



- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>a. Radio</li> <li>b. Angulo central</li> <li>c. Semicírculo</li> <li>d. Arco menor</li> <li>e. Arco mayor</li> <li>f. Cuerda</li> <li>g. Diámetro</li> <li>h. Secante</li> <li>i. Tangente</li> <li>j. Polígono inscrito</li> <li>k. Polígono circunscrito</li> <li>l. Círculo inscrito</li> <li>m. Círculo circunscrito</li> <li>n. Angulo semi-inscrito</li> <li>p. Angulo Exterior</li> <li>q. Angulo inscrito</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>1. FH</li> <li>2. EF</li> <li>3. Círculo O en ABCD</li> <li>4. Cuadrilátero EFGH</li> <li>5. <math>\angle GCH</math></li> <li>6. FEG arc</li> <li>7. OE</li> <li>8. <math>\angle EOF</math></li> <li>9. IJ</li> <li>10. Arc EF</li> <li>11. BC</li> <li>12. <math>\angle FGH</math></li> <li>13. Arc FGH</li> <li>14. Cuadrilátero ABCD</li> <li>15. Círculo O alrededor de EFGH</li> <li>16. <math>\angle FEA</math></li> </ul> |
|---|---|

Quiero saber más



Según consta por documentos históricos, existieron algunos pensadores griegos que destacaron en diversas ramas del saber. Entre los matemáticos más distinguidos se cuenta a **Herón de Alejandría**; a quien se le debe, entre otras cosas, la invención de la máquina de vapor y de una fórmula para calcular el área de un triángulo a partir de su perímetro. En la nota siguiente te mostramos algunos datos de su biografía.

**Herón de Alejandría (s. I ó II D.C.)** es considerado el inventor de la máquina de vapor. A partir del siglo XVIII muchas máquinas empezaron a funcionar gracias a la energía que se obtiene del vapor de agua. Sin embargo, diecisiete siglos antes, Heron de Alejandría ya había utilizado las posibilidades energéticas del vapor. Su “máquina de vapor” era una esfera hueca a la que se adaptaban dos tubos curvos. Cuando hervía el agua en el interior de la esfera, ésta giraba a gran velocidad como resultado de la ley de acción y reacción, la cual fue formulada como tal hasta muchos siglos después. A pesar de la trascendencia del invento, durante siglos a nadie se le ocurrió darle más utilidad que la construcción de unos cuantos juguetes.

Por otra parte, en su tratado denominado Métrica demostró la fórmula que lleva su nombre:

$$\text{Área del triángulo} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

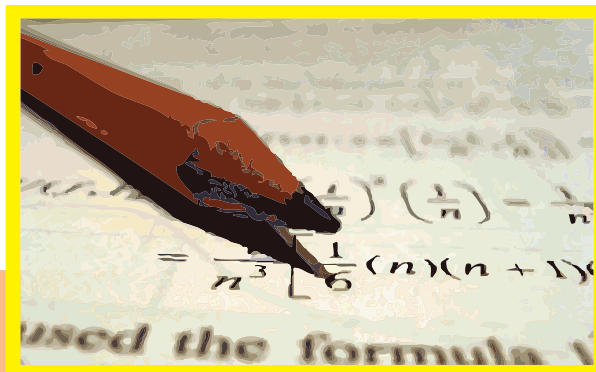
Donde: a, b, c son las medidas de los lados del triángulo, s es el semiperímetro  $s = \frac{(a+b+c)}{2}$

La fórmula, que constituye el principal mérito matemático de Herón, es fácil de demostrar con ayuda de la trigonometría.

En nuestros días, la fama de Herón se debe, sobre todo, a sus tratados sobre autómatas griegos y juguetes hidráulicos, como la paradójica «fuente de Herón», donde un chorro de agua parece desafiar la ley de la gravedad, pues brota más alta que su venero. Era, sobre todo, un ingeniero. Escribió tratados de mecánica en los que describía máquinas sencillas (ruedas, poleas, palancas...).



¿Qué voy a aprender?



## BLOQUE VI.

### DESCRIBE LAS RELACIONES TRIGONÓMICAS PARA RESOLVER TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

#### UNIDAD DE COMPETENCIA

» Construye e interpreta modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos, en representaciones de dos y tres dimensiones al aplicar las funciones trigonométricas en la resolución de problemas que se derivan en situaciones relacionadas con estas funciones. Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de las relaciones trigonométricas.

En el Bloque I tuviste oportunidad de familiarizarte con los triángulos y sus características. Partiendo de tales conocimientos, podrás abordar con mayor facilidad los tópicos que se presentan en este Bloque VI. A través de él (aprenderás a resolver (con el auxilio de la trigonometría) problemas que se presentan en una diversidad de aplicaciones de la vida cotidiana o del trabajo especializado, como es el caso de los ingenieros de la construcción al diseñar estructuras, los topógrafos cuando efectúan el trazo de carreteras en terrenos difíciles de transitar y para calcular distancias entre objetos de manera indirecta, es decir, sin necesidad de medir en el lugar con algún instrumento, más bien empleando un cálculo matemático. También es útil para el diseño de estructuras que van desde un puente hasta el diseño de automóviles.

En el primer tópico aprenderás a realizar conversiones de ángulos expresados en grados sexagesimales a radianes y viceversa; posteriormente estudiarás las razones trigonométricas como una propiedad de los triángulos rectángulos; conocido lo anterior, mediante cualquiera de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, podrás obtener las funciones recíprocas; por medio de la geometría, y el teorema de Pitágoras, calcularás los valores de las funciones trigonométricas para los ángulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ , lo cual te permitirá resolver problemas de triángulos rectángulos. Éstos tienen la finalidad de que calcules distancias o longitudes de ríos, cables, etc., y alturas de edificios, árboles, personas, etc. (con el auxilio de cálculos matemáticos y sin necesidad de mediciones de campo).





### Fuentes de consulta

Para apoyar la resolución de las actividades de aprendizaje puedes utilizar cualquier libro de Geometría o Trigonometría que tengas a tu alcance en el Centro de Servicios. Sin embargo, te sugerimos la consulta de los siguientes textos que por su actualidad y apego puntual al Programa de estudios te pueden ser de utilidad:

- García, Miguel y Manuel Rodríguez. Matemáticas 2, Bachillerato. México. ST Editorial. 2005
- Ruiz Basto, Joaquín. Matemáticas II, Bachillerato General. México. Publicaciones Cultural, 2005
- Ortiz Campos, Francisco. Matemáticas II, Geometría y Trigonometría. México. Publicaciones Cultural, 2005



### Sitios Web recomendados

En las siguientes direcciones electrónicas podrás encontrar información adicional interesante sobre los tópicos discutidos y también sobre otros contenidos de matemáticas:

<http://www.ommm.uaem.mx>  
<http://www.escuela32.com.ar/>  
<http://miayudante.upn.mx/>  
<http://www.amc.unam.mx/lacienciaentuescuela.htm>  
<http://descartes.cnice.mecd.es/index.html>  
<http://puemac.matem.unam.mx/>  
<http://www.mitareanet.com>

### ¿Qué aprendo?



La trigonometría es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Etimológicamente significa 'medida de triángulos'. Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en los que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, es decir, no podía ser medida de forma directa, como la  $\text{distancia}$  que existe entre la Tierra y la Luna. Se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos, como el flujo de corriente alterna. Las dos ramas fundamentales de la trigonometría son la trigonometría plana y la trigonometría esférica.

Para orientarte en el estudio de los tópicos que comprende este bloque de aprendizaje, te sugerimos contestar las siguientes preguntas:

- ¿Qué es un radian? ¿Cuál es la relación entre un grado sexagesimal y el radián?
- ¿Cuáles son las funciones trigonométricas? ¿Cómo se define cada una de ellas?
- ¿Qué valores toman las funciones trigonométricas para ángulos de  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $45^\circ$ ?
- ¿Cómo se calculan los valores de las funciones trigonométricas para ángulos de cualquier medida?

## 6.1 Unidades de medida de ángulos

La unidad de medida de los ángulos se llama grado, y resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales, por lo tanto, un ángulo recto mide  $90^\circ$ . El sistema de medición de los ángulos se llama sexagesimal y está formado por las siguientes medidas menores al grado:

$$\begin{aligned} \text{minuto: } 1^\circ &= 60' \\ \text{segundo: } 1' &= 60'' \end{aligned}$$

El radián se define como el ángulo que limita un arco de circunferencia cuya longitud (curva) es igual a la del radio (recta) de la circunferencia.

La equivalencia entre grados sexagesimales y radianes es:  $\pi \text{ rad} = 180^\circ$

## 6.2 Conversión de ángulos en grados a radianes y viceversa

Revisa en la bibliografía que tengas a tu alcance cómo se efectúa la conversión de ángulos a radianes y viceversa. Toma las notas necesarias y desarrolla las siguientes actividades:

Estudia con atención los ejemplos siguientes sobre el cambio de medidas angulares:

Para cambiar	Multiplicar	por Ejemplos	
Grados a radianes	$\frac{\pi}{180}$	$90^\circ \rightarrow 90 \left[ \frac{\pi}{180} \right] = \frac{\pi}{2}$	$270^\circ \rightarrow 270 \left[ \frac{\pi}{180} \right] = \frac{3\pi}{2}$
Radianes a grados	$\frac{180}{\pi}$	$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \left[ \frac{180}{\pi} \right] = 60^\circ$	$\frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \left[ \frac{180}{\pi} \right] = 210^\circ$

Realizando los cálculos necesarios, completa la siguiente tabla:

Radianes	Grados
0	
	$30^\circ$
$\frac{\pi}{4}$	
	$60^\circ$

$\frac{\pi}{2}$	
	120°
$\frac{3\pi}{4}$	
	150°
$\pi$	
	210°
$\frac{4\pi}{3}$	
	270°
$\frac{5\pi}{3}$	
	330°
$2\pi$	

Examina atentamente los siguientes ejemplos de conversión de ángulos a radianes y viceversa, si aún te quedan dudas, acude con tu asesor:

**a)** Convertir a radianes 39° 15' 45"

Solución:  $45'' \left( \frac{1'}{60''} \right) = .75'$

- Convertimos inicialmente los 45" a minutos:  
Sumamos el resultado a los 15' y efectuamos la conversión a grados:

- Añadimos este resultado a los 39° y realizamos la conversión a radianes:

$$39.2625^\circ \left( \frac{\pi}{180^\circ} \right) = 0.218\pi \text{ rad}$$

Que es el resultado buscado.

**b)** Convertir a grados 1.0532116 Rad.

Solución:

- Multiplicamos por  $\left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}\right)$  para efectuar la conversión de radianes a grados:

$$1.0532116\pi \text{ rad} \left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}\right) = 60.344438^\circ$$

- La fracción de grado se convierte a minutos de la siguiente manera:

$$.344438 \left(\frac{60'}{1^\circ}\right) = 20.6663$$

- Posteriormente, la fracción de minutos se convierte a segundos:

$$.6663 \left(\frac{60''}{1'}\right) = 39.978'' \approx 40''$$

- La solución es, entonces,  $60^\circ 20' 40''$



Practica lo aprendido realizando las conversiones que se piden de manera individual, al final compara tus resultados con el resto del grupo mientras tu asesor supervisa la actividad.

**I.** Convierte a radianes los siguientes ángulos:

- a)  $35^\circ 15' 45''$
- b)  $85^\circ 30'$
- c)  $100^\circ 25' 14''$

**II.** Expresa en grados, minutos y segundos los siguientes ángulos:

- a)  $1.8 \cdot \text{rad}$
- b)  $4 \cdot \text{rad}$
- c)  $\frac{3}{8} \pi \text{ Rad}$

## 6.3 Funciones trigonométricas para ángulos agudos

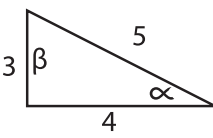
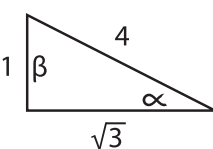
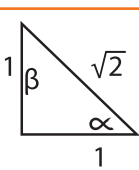
Para esta parte resolverás problemas de funciones trigonométricas para ángulos agudos y su aplicación práctica que involucren conversiones de ángulos y razones, así como funciones trigonométricas, utilizando métodos de resolución de triángulos rectángulos.

Estudia con atención la siguiente información: En un triángulo rectángulo como el que se muestra enseguida, se tiene el ángulo agudo  $\theta$ , respecto del cual se pueden establecer razones entre los lados.

Las primeras tres razones trigonométricas para el ángulo  $\theta$  son:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \cos \theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan \theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

Aplica lo anterior y, partiendo de la información que presentan cada triángulo, obtén los valores del seno, coseno y tangente, para los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ .

Triángulo	sen $\alpha$	cos $\alpha$	tan $\alpha$	sen $\beta$	cos $\beta$	tan $\beta$
						
						
						

Confronta tus respuestas con la de tus compañeros, si tienes errores, corrígelos y consulta a tu asesor para resolver dudas.

## 6.4 Funciones recíprocas

Reúnete con dos o tres de tus compañeros y traten de contestar a las preguntas ¿Qué significa en el lenguaje cotidiano el término “recíproco”? ¿Qué significa en matemáticas? Traten de obtener acuerdos y posteriormente presenten al grupo sus ideas para tratar de obtener en consenso una definición común. Realiza tus anotaciones en el espacio siguiente:

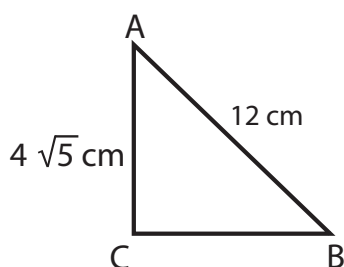


Completa el siguiente cuadro :

Función trigonométrica	Definición	Función Inversa	Definición
Seno	$\text{sen}\theta = \text{_____}$	Cosecante	$\text{csc}\theta = \text{_____}$
Coseno	$\text{cos}\theta = \text{_____}$	Secante	$\text{sec}\theta = \text{_____}$
Tangente	$\text{tan}\theta = \text{_____}$	Cotangente	$\text{cot}\theta = \text{_____}$

De manera individual resuelve las siguientes actividades:

a) Calcula las funciones trigonométricas directas e inversas del ángulo B en el siguiente triángulo rectángulo:



Seno  $\text{sen}\theta = \text{_____}$  Cosecante  $\text{csc}\theta = \text{_____}$

Coseno  $\text{cos}\theta = \text{_____}$  Secante  $\text{sec}\theta = \text{_____}$

Tangente  $\text{tan}\theta = \text{_____}$  Cotangente  $\text{cot}\theta = \text{_____}$

b) Encuentra la función inversa y su valor correspondiente:

$$\text{sen}\theta = \frac{2}{3} \quad \text{cos}\theta = \frac{1}{7} \quad \text{tan}\theta = \sqrt{2}$$

## 6.5 Apoyo de la calculadora para obtener valores de funciones trigonométricas

En estos tiempos es común usar una calculadora científica que nos permita determinar más rápidamente los valores de funciones. Para ello es necesario que en la calculadora presiones la tecla para que aparezcan las siglas (DEG), es decir, ángulo en grados sexagesimales.

Ejemplo:

Para encontrar el valor de  $\text{sen } 35^\circ$  a través de tu calculadora, procede a:

- Encender la calculadora
- Cerciorarte de que en la pantalla aparezca: "DEG"
- Presionar el valor de 35
- A continuación presionar la tecla de "sin" (o "sen")
- Observar que aparece en la pantalla el valor de: 0.573576436
- Para fines prácticos y cálculos matemáticos sólo se toma el valor con cuatro decimales, ésto es:  
 $\text{sen } 35^\circ = 0.5736$



Formen parejas para llevar a cabo la siguiente actividad:

Encuentren los valores de las siguientes funciones trigonométricas, siguiendo los pasos anteriores. Después comparen sus respuestas con sus compañeros de grupo.

Razón trigonométrica	Valor de la calculadora	Razón trigonométrica	Valor de la calculadora
1) $\text{sen } 75^\circ$		13) $\text{cos } 15^\circ$	
2) $\text{cos } 75^\circ$		14) $\text{sen } 15^\circ$	
3) $\text{tan } 75^\circ$		15) $\text{tan } 15^\circ$	
4) $\text{sen } 65^\circ$		16) $\text{cos } 25^\circ$	
5) $\text{cos } 65^\circ$		17) $\text{sen } 25^\circ$	
6) $\text{tan } 65^\circ$		18) $\text{tan } 25^\circ$	
7) $\text{sen } 120^\circ$		19) $\text{sen } 60^\circ$	
8) $\text{cos } 120^\circ$		20) $\text{cos } 60^\circ$	
9) $\text{tan } 120^\circ$		21) $\text{tan } 60^\circ$	
10) $\text{sen } 150^\circ$		22) $\text{sen } 30^\circ$	
11) $\text{cos } 150^\circ$		23) $\text{cos } 30^\circ$	
12) $\text{tan } 150^\circ$		24) $\text{tan } 30^\circ$	

Ahora podrás calcular valores de expresiones como las siguientes.

Ejemplos:

1)  $6 \sin^2 45^\circ + 6 \cos^2 60^\circ$

Procedimiento a seguir	Procedimiento Algebraico
El cuadrado de un ángulo es igual al ángulo elevado al cuadrado	$6(\sin 45^\circ)^2 + 6(\cos 60^\circ)^2 =$
Con la calculadora se obtiene el valor de la función	$6(0.7071)^2 + 6(0.5)^2 =$
Se elevó al cuadrado y se multiplicaron los valores	$6(0.5) + 6(0.25) =$
Se realizan las operaciones indicadas	$3 + 1.5$
Respuesta	4.5

2)  $\frac{16 \cos^2 60^\circ + 4 \sin^2 45^\circ}{4 \sin^2 60^\circ + 2 \cos^2 45^\circ}$

Con el objeto de aprender a resolver expresiones como la que se plantea, te recomendamos seguir los pasos descritos en el ejemplo anterior al realizar las operaciones con tu calculadora.

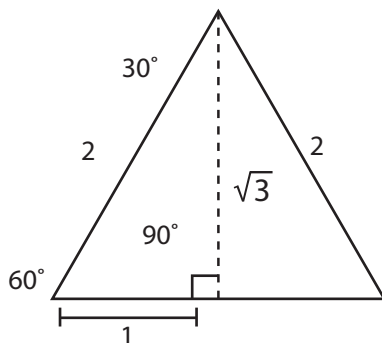
$$\frac{16 \cos^2 60^\circ + 4 \sin^2 45^\circ}{4 \sin^2 60^\circ + 2 \cos^2 45^\circ} = \frac{16(0.5)^2 + 4(0.7071)^2}{4(0.8660)^2 + 2(0.7071)^2}$$

$$\frac{16(0.25) + 4(0.5)}{4(0.75) + 2(0.5)} = \frac{4 + 2}{3 + 1} = \frac{6}{4} = 1.5$$

## 6.6 Cálculo de valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°

Estudia con atención el texto que se presenta a continuación.

En un triángulo equilátero cuyos lados miden 2 unidades cada uno, se ha trazado la altura y, en consecuencia, se han obtenido dos triángulos rectángulos con las dimensiones que se muestran en la figura siguiente:



La dimensión de la altura del triángulo se calculo aplicando el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sustituyendo en la expresión los valores  $c = 2$ ,  $a = 1$  y despejando, se obtiene el valor de  $b$ .

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$b = \sqrt{2^2 - 1^2}$$

$$b = \sqrt{4 - 1}$$

$$b = \sqrt{3}$$

Para obtener los valores de las funciones trigonométricas de 60° se tomará en cuenta que:

$$\text{Cateto opuesto} = \sqrt{3}$$

$$\text{Cateto adyacente} = 1$$

$$\text{Hipotenusa} = 2$$

Con toda esta información obtén los valores que se solicitan:

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \underline{\hspace{2cm}}$$



Lee con atención y resuelve lo que se pide:

Para el ángulo de  $30^\circ$ , los valores que consideraremos serán:

Cateto opuesto = 1

Cateto adyacente =  $\sqrt{3}$

Hipotenusa = 2

Y las funciones trigonométricas correspondientes tendrán los siguientes valores:

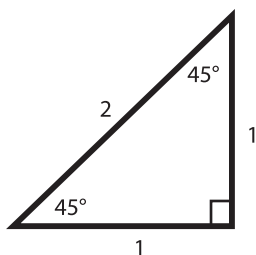
$$\sin 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Investiga porque razón hemos anotado este valor

Para obtener los valores que corresponden a un ángulo de  $45^\circ$ , trazamos un triángulo rectángulo que tiene las medidas que se muestran:



Los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo de  $45^\circ$  serán:

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = 1$$

Concentra en la siguiente tabla los valores para estos ángulos:

Valores del ángulo	Seno	Coseno	Tangente
$30^\circ$			
$45^\circ$			
$60^\circ$			

## 6.7 Resolución de triángulos rectángulos

Estudia atentamente la información que te presentamos. Investiga en la bibliografía a tu alcance sobre el tópico y realiza tus anotaciones en tu cuaderno.

En toda aplicación para la resolución de triángulos se proporcionan datos incompletos o se desconocen algunos de ellos, como en el caso de los ángulos o longitudes de catetos de un triángulo rectángulo. Al procedimiento de encontrar los valores restantes partiendo de los datos originales, se le conoce como “resolución de un triángulo rectángulo”. Para que ésto se cumpla, debes resolver problemas sencillos donde apliques las razones trigonométricas para el uso de triángulos rectángulos y recordar el teorema de Pitágoras.

Un triángulo rectángulo puede resolverse cuando contemos con datos como:

- Dos lados
- Un lado y la hipotenusa.
- Un lado y un ángulo agudo.
- La hipotenusa y un ángulo agudo.

Observa la solución a los ejemplos que se muestran a continuación:

**Ejemplo 1:** Resuelve el siguiente triángulo rectángulo donde se dan como datos un lado y un ángulo agudo.

Datos:

$$m=5$$

$$M=30^{\circ} 20'$$

Incógnitas

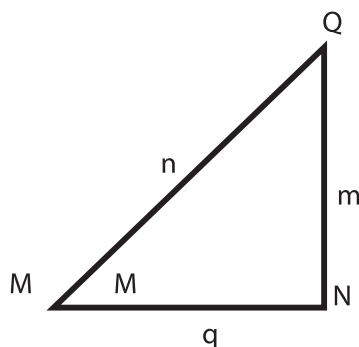
$$n=?$$

$$q=?$$

$$N=?$$

$$Q=?$$

$$S=?$$



Solución

a) Encontraremos primero el ángulo Q, recordando que el ángulo N tiene un valor de  $90^{\circ}$  y que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a  $180^{\circ}$ .

$$M + N + Q = 180^{\circ}$$

$$Q = 180^{\circ} - (N + M)$$

$$Q = 180^{\circ} - (90^{\circ} + 30^{\circ}20') = 59^{\circ}40'$$

b) Para obtener el valor de los lados q y n, utilizaremos las funciones seno y tangente, ya que la primera relaciona el cateto opuesto (m) con la hipotenusa (n) y la función tangente relaciona ambos catetos (m y q).

$$\text{sen}M = \frac{m}{n}$$

Sustituyendo =

$$\operatorname{sen}30^{\circ}20' = \frac{5}{n}$$

Despejando =

$$n = \frac{5}{\operatorname{sen}30^{\circ}20'} = 9.9$$

c) Para obtener el valor de  $q$ , tomando en cuenta que ya conocemos el valor de la hipotenusa ( $n$ ) y el del cateto opuesto ( $m$ ), podemos utilizar tanto el teorema de Pitágoras como la función tangente. Veamos ambos casos.

Utilizando el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} n^2 &= m^2 + q^2 \\ 9.9^2 &= 5^2 + q^2 \\ q^2 &= 9.9^2 - 5^2 \\ q &= \sqrt{9.9^2 - 5^2} \\ q &= \sqrt{98.01 - 25} = \sqrt{73.01} \\ q &= 8.544 \end{aligned}$$

Utilizando la función tangente:

$$\tan M = \frac{5}{q}$$

Sustituyendo =

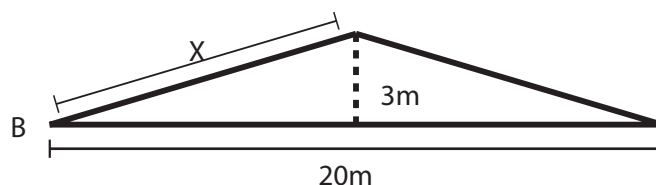
$$\tan 30^{\circ}20' = \frac{5}{q}$$

Despejando =

$$q = \frac{5}{\tan 30^{\circ}20'} = 8.544$$

Como se puede observar, por ambos métodos obtenemos el mismo resultado.

**Ejemplo 2:** El techo de una casa habitación construida a doble agua (ver figura), tiene una distancia horizontal de 20 mts. y una elevación de 3 mts. Calcular la longitud de la parte inclinada del techo y el ángulo de inclinación.



### Solución

La forma del techo puede dividirse en dos triángulos rectángulos, cada uno de ellos mide en su base 10 m. La elevación del techo (que para nuestro problema sería el cateto opuesto al ángulo B), tiene una medida de 3 m. Con estos datos, las incógnitas en nuestro problema serían tanto la hipotenusa como la medida del ángulo B.

Empleamos el teorema de Pitágoras para calcular la dimensión de la parte inclinada del techo:

$$x^2 = 10^2 + 3^2$$

$$x^2 = 100 + 9 = 109$$

$$x = \sqrt{109} = 10.44m$$

Para determinar el valor del ángulo B podemos utilizar indistintamente las funciones seno, coseno y tangente del ángulo, todo depende de cuáles datos utilicemos.

En este ejemplo utilizaremos la función tangente porque relaciona ambos catetos, que fueron los datos originales. En consecuencia:

$$\tan B = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3}{10} = 0.3$$

Como no es de nuestro interés conocer la tangente de B sino la dimensión del ángulo B, realizamos el siguiente despeje:

$$\tan B = 0.3$$

$$B = \tan^{-1}(0.3)$$

Utilizando nuestra calculadora ubicamos el ángulo cuya tangente tiene un valor de 0.3, lo cual nos da el valor de  $16.699^\circ$  (Verifica este resultado en tu calculadora), lo cual también equivale a  $16^\circ 41' 57''$ . Con ésto hemos llegado al final de la solución.



### ¿Qué he aprendido?



Después de haber estudiado el bloque es tiempo de saber cuáles son tus conocimientos sobre el tópico, así que resuelve las siguientes preguntas. Al finalizar intercambia respuestas con tu compañero de lado y verifica cuáles son correctas y cuáles con la ayuda de tu asesor.

1. Determina los valores de las razones trigonométrica del seno, coseno y la tangente del ángulo •

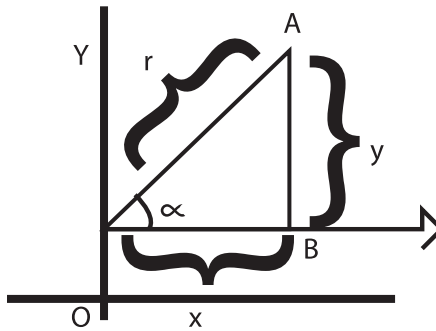
a)  $\text{sen}\alpha = \frac{x}{r}; \cos\alpha = \frac{y}{r}; \tan\alpha = \frac{y}{x}$

b)  $\text{sen}\alpha = \frac{r}{x}; \cos\alpha = \frac{r}{y}; \tan\alpha = \frac{y}{x}$

c)  $\text{sen}\alpha = \frac{r}{y}; \cos\alpha = \frac{r}{x}; \tan\alpha = \frac{x}{y}$

d)  $\text{sen}\alpha = \frac{y}{r}; \cos\alpha = \frac{x}{r}; \tan\alpha = \frac{y}{x}$

e)  $\text{sen}\alpha = \frac{x}{y}; \cos\alpha = \frac{x}{y}; \tan\alpha = \frac{y}{r}$



2. Determina los valores de las razones trigonométricas del seno, coseno y la tangente del ángulo •

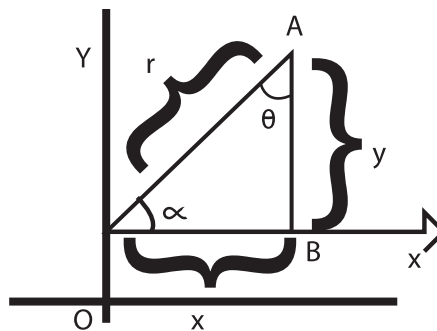
a)  $\text{sen}\theta = \frac{y}{x}; \cos\theta = \frac{x}{r}; \tan\theta = \frac{y}{r}$

b)  $\text{sen}\theta = \frac{x}{r}; \cos\theta = \frac{y}{r}; \tan\theta = \frac{x}{y}$

c)  $\text{sen}\theta = \frac{r}{y}; \cos\theta = \frac{r}{x}; \tan\theta = \frac{y}{x}$

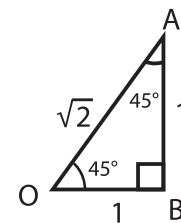
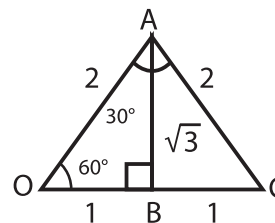
d)  $\text{sen}\theta = \frac{r}{x}; \cos\theta = \frac{r}{y}; \tan\theta = \frac{y}{x}$

e)  $\text{sen}\theta = \frac{y}{x}; \cos\theta = \frac{x}{r}; \tan\theta = \frac{r}{y}$



3. De las siguientes figuras, indica los valores de las funciones trigonométricas del sen•, cos• y tan• para los ángulos notables de 30°, 45°, y 60° y elige la opción que complete el cuadro que aparece abajo.

Ángulo $\alpha$	Función Trigonométrica		
	Sen $\alpha$	Cos $\alpha$	Tan $\alpha$
30°			
45°			
60°			



$$\text{sen} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}$$

a)  $\text{cos} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1$

$$\text{tan} = \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1$$

$$\text{sen} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

b)  $\text{cos} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1$

$$\text{tan} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}$$

$$\text{sen} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}$$

c)  $\text{cos} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1$

$$\text{tan} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \sqrt{3}$$

$$\text{sen} = \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}$$

d)  $\text{cos} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1$

$$\text{tan} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}$$

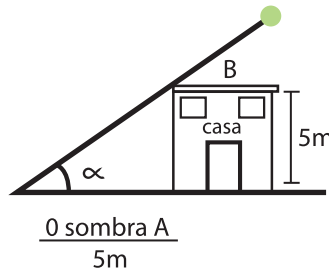
$$\text{sen} = \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e)  $\text{cos} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1$

$$\text{tan} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}$$

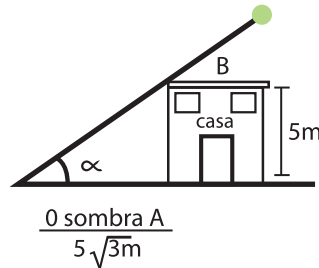
4. Una casa de 5 m de altura proyecta una sombra de 5 m de longitud. Encuentra el ángulo de elevación del Sol.

- A) 15°
- B) 30°
- C) 45°
- D) 60°
- E) 75°



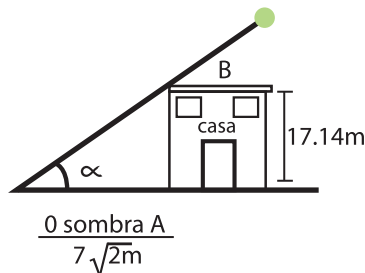
5. Calcula el ángulo de elevación del Sol, si una casa de 5 m de altura proyecta una sombra de  $5\sqrt{3}$  m de longitud.

- A) 15°
- B) 30°
- C) 45°
- D) 60°
- E) 75°

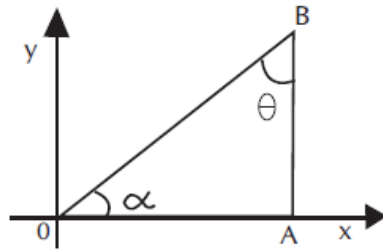


6. Calcula el ángulo de elevación del Sol, si una casa de 17.14 m de altura proyecta una sombra de  $7\sqrt{2}$  m de longitud.

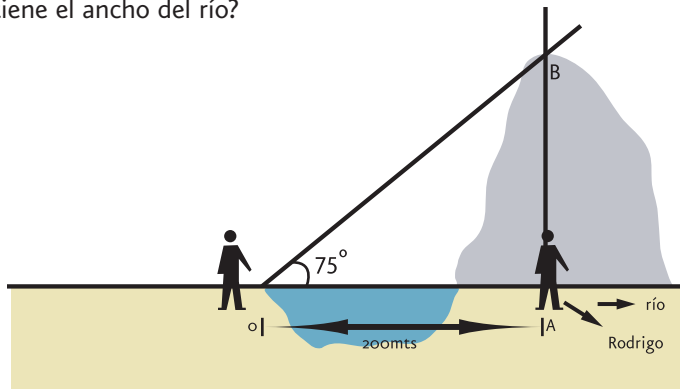
- A) 15°
- B) 30°
- C) 45
- D) 60°
- E) 75°



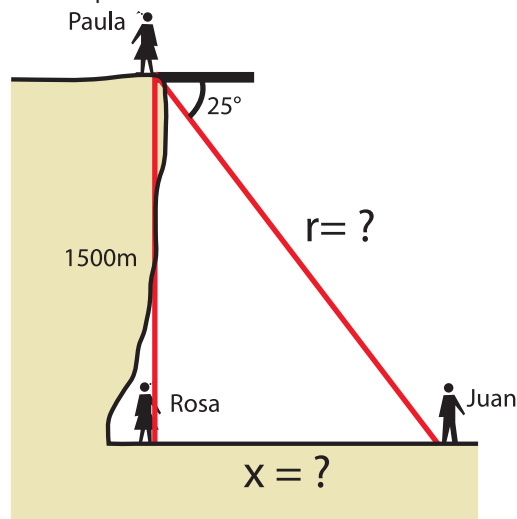
7. Encuentra los valores de las funciones trigonométricas ( $\text{sen}$ ,  $\text{cos}$ ,  $\text{tan}$ ) de los ángulos agudos ( $\alpha$ ,  $\theta$ ) del triángulo OAB, si el ángulo  $OAB=90^\circ$  y los catetos tienen los valores de  $OA = 12\text{cm}$  y  $AB = 6\text{cm}$



8. Para calcular el ancho de un río, Rodrigo tomó como referencia una piedra que se encuentra del otro lado del río (enfrente de él), posteriormente camina 200 metros a la izquierda formando un ángulo de  $75^\circ$ . Con base en esta información, ¿qué medida tiene el ancho del río?



9. Paula, Rosa y Juan necesitan saber hasta qué distancia se puede escuchar un radio transmisor, para ello deciden probarlo y se sitúan de la siguiente manera: En el punto más alto del cerro se ubica Paula directamente por encima de Rosa, el cerro tiene una altura de 1500 m, el ángulo de depresión de Paula hacia Juan que se encuentra cercano a una carretera es de  $25^\circ$ . Calcula la distancia en metros desde donde está situada Rosa hasta donde está Juan y la distancia en donde se encuentra Paula con respecto a Juan. Calcula el alcance del radio con respecto a los tres puntos de referencia.



10. Un avión que está en vuelo, se reporta a la torre de control e indica que está a una altura de 1500 m y empieza a descender a la pista sobre una trayectoria recta que está a  $10.5^\circ$  de depresión. Calcula la distancia horizontal hasta que se hace contacto al piso y la distancia inclinada recorrida en el momento de reportarse hasta tocar con las llantas la pista de aterrizaje

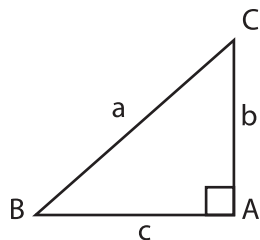


11. Se coloca una escalera de 7m contra un edificio de modo que el extremo inferior está a 1.5m de la base del edificio. ¿Qué ángulo forma la escalera con el piso y cuál es la altura alcanzada de la escalera respecto al edificio?

Reúnete en equipos de 5 personas y calcula el valor de las incógnitas en los siguientes triángulos, realiza su esquema en tamaño mural, y al finalizar preséntalo ante el grupo para una breve exposición de tus resultados.

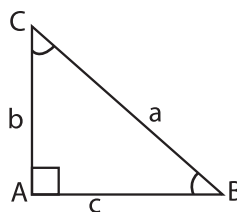
12)

DATOS	ALCULAR
$a=4\text{cm}$	$b=?$
$B=62^{\circ}30'$	$c=?$
$\angle A = 90^{\circ}$	$\angle c = ?$



13)

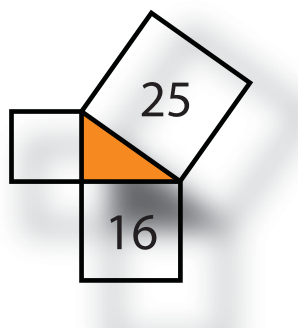
DATOS	ALCULAR
$b=12\text{cm}$	$a=?$
$c=15\text{cm}$	$\angle c=?$
$\angle A = 90^{\circ}$	$\angle c = ?$



### Quiero saber más

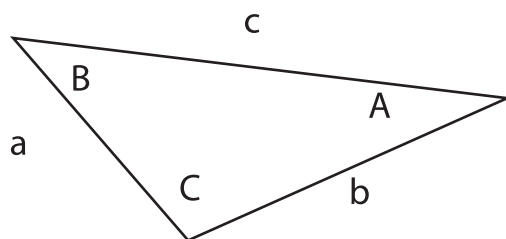
#### El Teorema de Pitágoras

Existen varias demostraciones del teorema de Pitágoras, una de las más comunes es dado un triángulo rectángulo, se trazan cuadrados en cada uno de los lados y se calcula el área de cada uno de estos cuadrados, se observa que el área del cuadrado ubicado en la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados ubicados en los dos catetos; como se muestra en la siguiente figura:

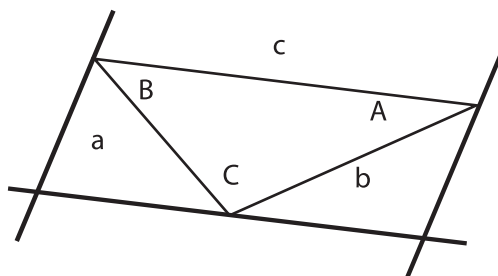


Una demostración más rigurosa es la siguiente, “dado un triángulo rectángulo abc (Fig. 1), Se traza una línea paralela al hipotenusa que pase por el vértice C, y se trazan perpendiculares a esta recta que pasen por los vértices A y B, se construye un rectángulo que contiene al triángulo abc (Fig. 2)”





Observa que se generan dos triángulos más, éstos tienen la misma forma (aunque diferente tamaño) y tienen ángulos iguales por ser triángulos semejantes, un ángulo de  $90^\circ$  (C), y dos ángulos A y B. Ello significa que la proporción de lados correspondientes es igual para los tres triángulos.



Nota que la recta paralela a la hipotenusa se dividió en dos partes, llamemos respectivamente X a la primera y Y a la segunda.

Sabemos que en triángulos semejantes sus lados son proporcionales (Teorema de Tales), y en nuestros triángulos tenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c} \quad \text{y} \quad \frac{y}{b} = \frac{b}{c}$$

También se puede observar que:

$$c = x + y = \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c}$$

Si multiplicamos a esta última expresión por c, tenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Siendo esta última relación precisamente el Teorema de Pitágoras.



¿Qué voy a aprender?



## BLOQUE VII.

### APLICA LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

#### UNIDAD DE COMPETENCIA

» Construye e interpreta modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas de ángulos de cualquier medida en el plano cartesiano empleando las funciones trigonométricas para ángulos de cualquier medida en la resolución de problemas que derivan en situaciones relacionadas con funciones trigonométricas. Cuantifica y representa magnitudes angulares y lineales a partir de la aplicación de funciones trigonométricas. Interpreta y construye gráficas de funciones trigonométricas.

Una vez que se han estudiado las funciones trigonométricas para ángulos agudos, comenzarás a determinar los valores para cualquier otro ángulo; por tal razón, será necesario que sepas ubicar a las funciones trigonométricas en el plano cartesiano para conocer los signos y valores que adoptan según el ángulo de referencia a emplear. Posteriormente será necesario graficar cada una de las funciones para conocer su comportamiento periódico y sus variaciones. Se incluye el círculo unitario para comprobar que las funciones trigonométricas de un ángulo son razones que pueden ser representadas mediante segmentos de recta, y con ellos se mostrará la ventaja de las funciones de un segmento para obtener las funciones trigonométricas de manera sencilla. Por último, se considera el tópico de identidades pitagóricas, las cuales serán de gran utilidad en la resolución de problemas. Esto te apoyará sustancialmente en la asignatura de Física que cursarás en el tercer semestre y te facilitará la simplificación de operaciones.



#### Fuentes de consulta

Te sugerimos la consulta de los siguientes textos que por su actualidad y apego puntual al Programa de estudios te pueden ser de utilidad:

- **García, Miguel y Manuel Rodríguez. Matemáticas 2, Bachillerato. México. ST Editorial. 2005**
- **Ruiz Basto, Joaquín. Matemáticas II, Bachillerato General. México. Publicaciones Cultural, 2005**
- **Ortiz Campos, Francisco. Matemáticas II, Geometría y Trigonometría. México. Publicaciones Cultural, 2005**



### Páginas Web recomendadas

[http://www.edumedia-sciences.com/a348\\_l3-circulo-trigonometrico.html](http://www.edumedia-sciences.com/a348_l3-circulo-trigonometrico.html) (Presenta una interesante animación de la posición de un punto en el círculo trigonométrico, mostrando simultáneamente la grafica del seno y el coseno del ángulo formado).

[www.matebrunca.com/trigonometria/circulo-trigono.doc](http://www.matebrunca.com/trigonometria/circulo-trigono.doc) (Permite descargar un archivo en Word donde se explica de manera muy sencilla la descripción y la aplicación del círculo trigonométrico).

[http://www.dim.uchile.cl/~rgormaz/trigo\\_bas.html](http://www.dim.uchile.cl/~rgormaz/trigo_bas.html) (Sitio generado por la Universidad de Chile y tiene información sobre el círculo trigonométrico y las identidades trigonométricas).

### ¿Qué aprendo?



Las funciones trigonométricas son de gran importancia para el estudio en general de triángulos y, sobretodo, de sus aplicaciones en la vida cotidiana, que veremos más adelante.

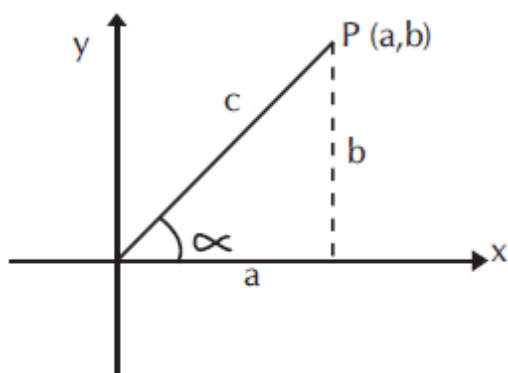
## 7.1 Funciones Trigonómicas Para Ángulos De Cualquier Magnitud

Lee atentamente la información que se presenta enseguida:

Las funciones trigonométricas no se refieren exclusivamente a triángulos rectángulos sino que se aplican con gran provecho en ángulos de cualquier medida como en un plano coordenado.

### Ángulo de referencia

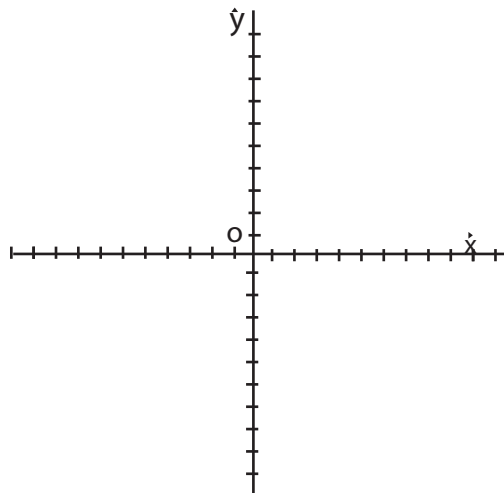
Una manera conveniente de representar un ángulo consiste en colocar su vértice en el origen de los ejes coordenados, el lado inicial en el eje positivo de las "x" y el punto  $P(a, b)$  determinaría la posición del lado terminal.



El ángulo de referencia es aquel que forma el lado terminal con el eje de las "x", sin importar el cuadrante en el que se ubique.

Para comprender mejor estas ideas, ubica los siguientes puntos en el plano utilizando tus escuadras. Una vez realizado lo anterior, traza un segmento de recta del punto al origen e indica el ángulo de referencia:

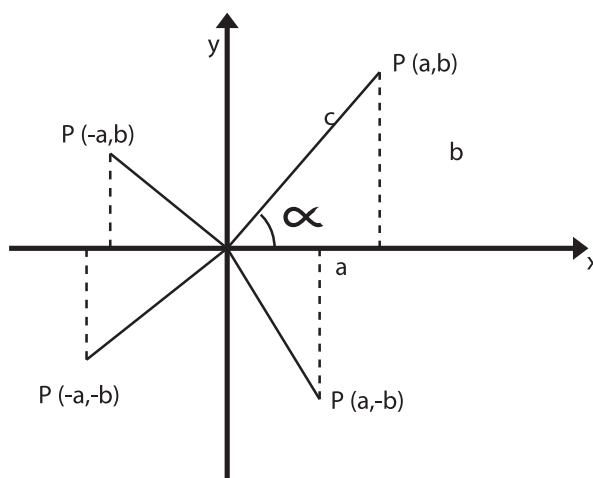
- A (2,3)
- B (-3,2)
- C (-4,-4)
- D (2,-3)



### Signo y valores de las funciones trigonométricas

Lee con atención y resuelve lo que se pide.

El cuadrante en el que se sitúa el punto  $P(a, b)$  determina el signo que presenta cada una de las coordenadas, como se muestra en la figura.

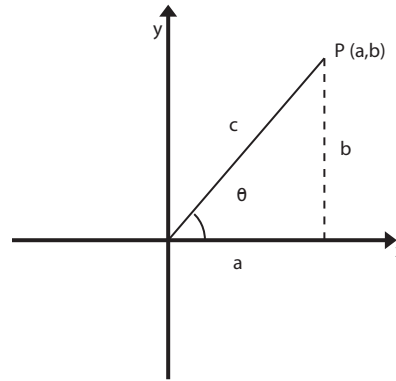


Tomando ésto en cuenta, veamos cuáles son los signos que adoptan las funciones trigonométricas dependiendo del cuadrante en el que se encuentre el lado terminal del ángulo, analiza la información siguiente junto con tu asesor y respondan las preguntas que se presentan:

#### A) Para un ángulo en el primer cuadrante

Aplicando las definiciones, los signos que adopta cada función trigonométrica en el primer cuadrante son:

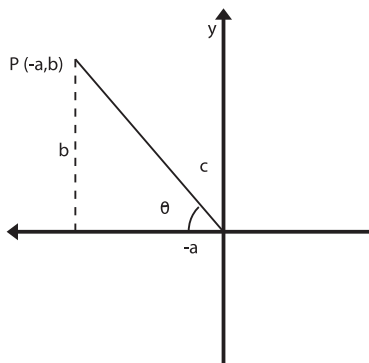
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{+b}{+c} = + & \cot \theta &= \frac{+a}{+b} = + \\ \cos \theta &= \frac{+a}{+c} = + & \sec \theta &= \frac{+c}{+a} = + \\ \tan \theta &= \frac{+b}{+a} = + & \csc \theta &= \frac{+c}{+b} = + \end{aligned}$$



En conclusión, para un ángulo del primer cuadrante, todas las funciones trigonométricas son positivas.

Determina, ahora, los signos para los ángulos en los otros tres cuadrantes:

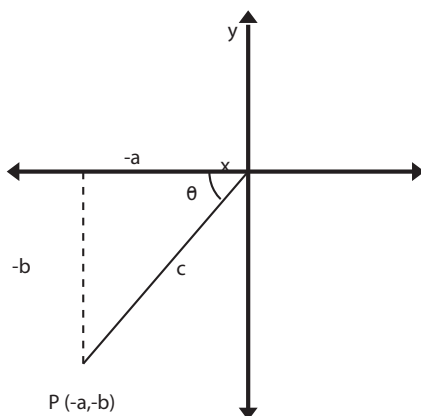
**B) Para un ángulo en el segundo cuadrante**



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{+b}{+c} = + & \cot \theta &= \frac{-a}{+b} = - \\ \cos \theta &= \frac{-a}{+c} = - & \sec \theta &= \frac{+c}{-a} = - \\ \tan \theta &= \frac{+b}{-a} = - & \csc \theta &= \frac{+c}{+b} = + \end{aligned}$$

En conclusión, para un ángulo en el segundo cuadrante, son positivas las funciones \_\_\_\_\_ y negativas las funciones \_\_\_\_\_.

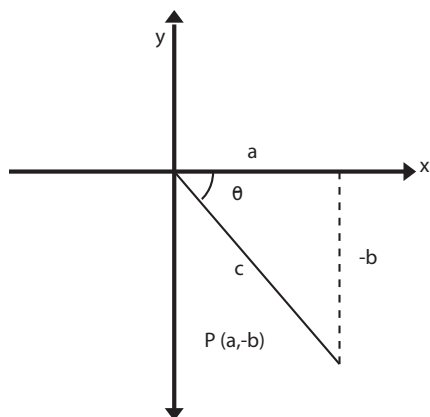
**C) Para un ángulo en tercer cuadrante**



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{-b}{+c} = - & \cot \theta &= \frac{-a}{-b} = + \\ \cos \theta &= \frac{-a}{+c} = - & \sec \theta &= \frac{+c}{-a} = - \\ \tan \theta &= \frac{-b}{-a} = + & \csc \theta &= \frac{+c}{-b} = - \end{aligned}$$

Conclusión: para un ángulo en tercer cuadrante, las funciones trigonométricas con signo positivo son \_\_\_\_\_ y las que presentan signo negativo son \_\_\_\_\_.

**D) Para un ángulo en cuarto cuadrante**



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{-b}{+c} & \cot \theta &= \frac{+a}{-b} = \\ \cos \theta &= \frac{+a}{+c} & \sec \theta &= \frac{+c}{+a} = \\ \tan \theta &= \frac{-b}{+a} & \operatorname{csc} \theta &= \frac{+c}{-b} = \end{aligned}$$

Conclusión: Para un ángulo en el cuarto cuadrante, las funciones trigonométricas con signo positivo son \_\_\_\_\_ y las que presentan signo negativo son \_\_\_\_\_.

Concentra en el cuadro los resultados obtenidos:

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I		
II		
III		
IV		

Estudia con atención los ejemplos siguientes para encontrar valores de funciones trigonométricas y pide a tu asesor ayuda en caso de necesitarla:

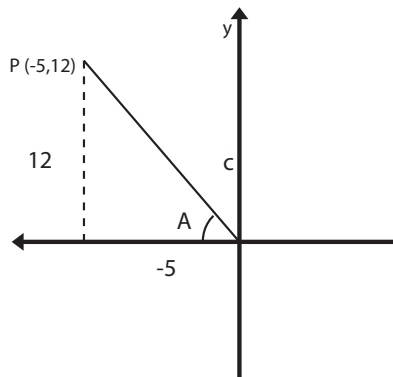
**Ejemplo 1:** Encuentra los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo A, cuyo lado terminal está en el segundo cuadrante y su tangente es  $-\frac{12}{5}$

Solución:

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{+b}{-a} = \frac{12}{-5}$$

Por definición, la tangente del ángulo A es  $\frac{12}{-5}$

Trazamos un diagrama que represente al ángulo A en el segundo cuadrante y con las dimensiones que nos proporciona el valor de la tangente:



Para obtener las dimensiones del lado terminal (que equivale a la hipotenusa del triángulo) utilizamos el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 12^2 + (-5)^2$$

$$c^2 = 144 + 25 = 169$$

Con este valor, las funciones trigonométricas para el ángulo A quedan así:

$$\text{sen} A = \frac{12}{13} \qquad \cot A = \frac{12}{-5} = -\frac{12}{5}$$

$$\cos A = \frac{-5}{13} = -\frac{5}{13} \qquad \sec A = \frac{13}{-5} = -\frac{13}{5}$$

$$\tan A = \frac{-5}{12} = -\frac{5}{12} \qquad \csc A = \frac{13}{12}$$

### Ejemplo 2:

El ángulo A está situado en el tercer cuadrante y su cotangente tiene un valor de 7.

Determina los valores de las demás funciones trigonométricas:

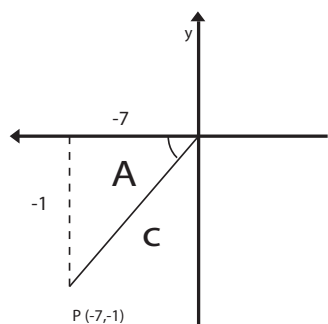
$$\cot A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Por definición,

Y como el ángulo A está en el tercer cuadrante, ambos catetos son negativos, por lo que anotamos:

$$\cot A = \frac{-a}{-b} = \frac{-7}{-1}$$

Dibujamos un diagrama del ángulo:



Calculamos el valor de  $c$  utilizando el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = (-7)^2 + (-1)^2$$

$$c^2 = 49 + 1 = 50$$

$$c = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Las funciones para el ángulo  $A$  son las siguientes (nota cómo hemos aplicado las reglas de los signos, la simplificación y la racionalización cuando la raíz queda en el denominador):

$$\operatorname{sen} A = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{2}}{50} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\operatorname{cos} A = \frac{-7}{5\sqrt{2}} = \frac{-7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{-35\sqrt{2}}{50} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\operatorname{tan} A = \frac{-7}{-1} = 7$$

$$\operatorname{cot} A = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

$$\operatorname{sec} A = \frac{5\sqrt{2}}{-7} = -\frac{5\sqrt{2}}{7}$$

$$\operatorname{csc} A = \frac{5\sqrt{2}}{-1} = -5\sqrt{2}$$



Forma parejas y aplica lo aprendido en cada uno de los siguientes casos, en los que se da una función trigonométrica y el cuadrante. Determina los valores de las demás funciones, al finalizar tu asesor elegirá a alguna pareja para que explique sus resultados.

a)  $\operatorname{tan} A = -\frac{12}{5}$  segundo cuadrante

b)  $\operatorname{sen} A = \frac{8}{17}$  primer cuadrante

c)  $\operatorname{cos} A = \frac{35}{37}$  cuarto cuadrante



## 7.2 En el círculo unitario

El círculo unitario se denomina “unitario” porque su radio es igual a la unidad. Tiene su centro en el origen de los ejes coordenados y su ecuación es

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Posiblemente recuerdes que la fórmula para calcular la circunferencia es  $C = 2 \cdot r$

Y como en el círculo unitario  $r = 1$ , la fórmula se simplifica:

$$C = 2 \cdot$$

Puesto que la circunferencia tiene  $360^\circ$ , por lo que la expresión anterior puede escribirse así:

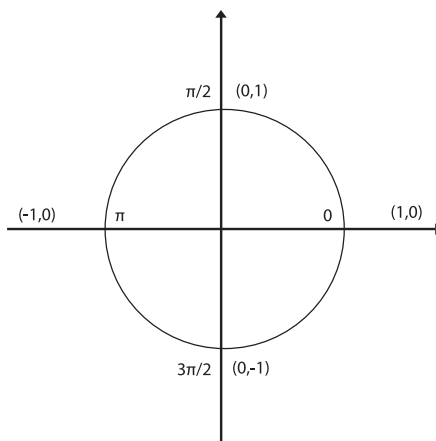
$$360^\circ = 2 \cdot$$

De lo cual se deriva que

$$0^\circ = 0 \qquad 90^\circ = \pi/2 \qquad 180^\circ = \pi \qquad 270^\circ = 3\pi/2, \text{ etc.}$$

En consecuencia, los puntos correspondientes a los ejes coordenados son:

$$\begin{aligned} P(0) &= (1,0) \\ P(\pi/2) &= (0,1) \\ P(\pi) &= (-1,0) \\ P(3\pi/2) &= (0,-1) \end{aligned}$$

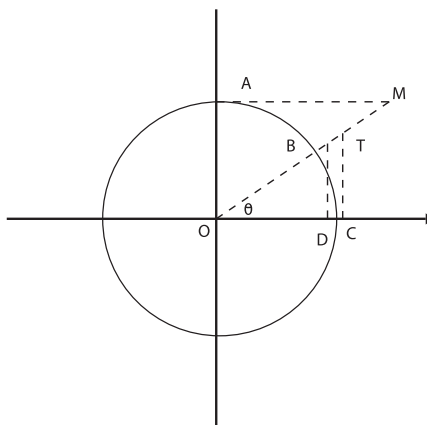


Encuentra, ahora, las coordenadas para los puntos siguientes:

$$P(2\pi) = \qquad P\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \qquad P\left(\frac{-\pi}{2}\right) =$$

### Funciones de un segmento

Otra representación frecuente y útil de las funciones trigonométricas se efectúa con el auxilio del denominado “círculo unitario”. En este círculo las funciones trigonométricas se representan mediante segmentos de recta. Como se observa en la figura, situado un punto (B) en el círculo unitario, se han efectuado algunos trazos que, como se estudiará, representan a las funciones trigonométricas.



Para entenderlo bien, debemos tener en mente algunos supuestos básicos:

Los segmentos de recta son iguales y tienen valor igual a la unidad, es decir:  
 $OA=OB=OC=1$

Hay que notar, además, que los triángulos OBD, OCT y OAM son semejantes.

$$\triangle OBD \approx \triangle OCT \approx \triangle OAM$$

Tomando en cuenta lo anterior, las funciones trigonométricas en el círculo unitario se definen de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{1} = \overline{BD}$$

$$\cot \theta = \frac{\overline{OD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AM}}{1} = \overline{AM}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD}}{1} = \overline{OD}$$

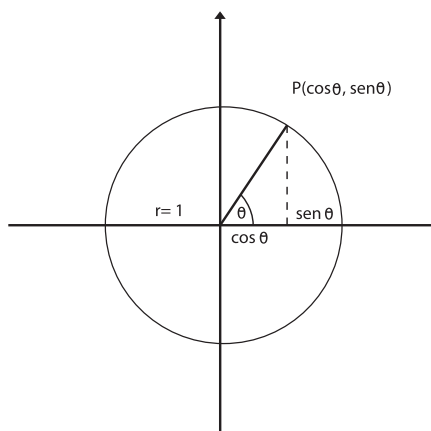
$$\sec \theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

$$\tan \theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{CT}}{1} = \overline{CT}$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \overline{OM}$$

### Identidades Pitagóricas

De acuerdo con lo que acabamos de aprender, el punto P (x, y) se puede representar de la siguiente manera:



¿Recuerdas la expresión matemática del Teorema de Pitágoras?

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Que también puede escribirse:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

De acuerdo con el círculo unitario,  $r=1$ ,  $x = \cos \theta$ ,  $y = \text{sen } \theta$ ; por lo cual podemos escribir:

$$1^2 = (\cos \theta)^2 + (\text{sen} \theta)^2$$

$$1^2 = \cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta \dots \dots \dots (1)$$

Que es la llamada **identidad pitagórica fundamental**.

Si a la expresión (1) la dividimos por  $\cos^2 \theta$ , obtendremos otra relación de gran importancia, tomando en cuenta

que la función recíproca del coseno es la secante y que la  $\tan^2 \theta = \frac{\text{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta}$

$$\frac{\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$= \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \dots \dots \dots (2)$$

Y si dividimos ahora la expresión (1) por  $\text{sen}^2 \theta$  obtenemos la siguiente expresión:

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

En resumen, las tres identidades pitagóricas fundamentales son las siguientes:

$$\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

Estas identidades funcionan para cualquier ángulo. Para comprobarlo, realiza los cálculos que se piden en el cuadro siguiente. Auxíliate con la calculadora para hacer las operaciones.



### Identidades pitagóricas

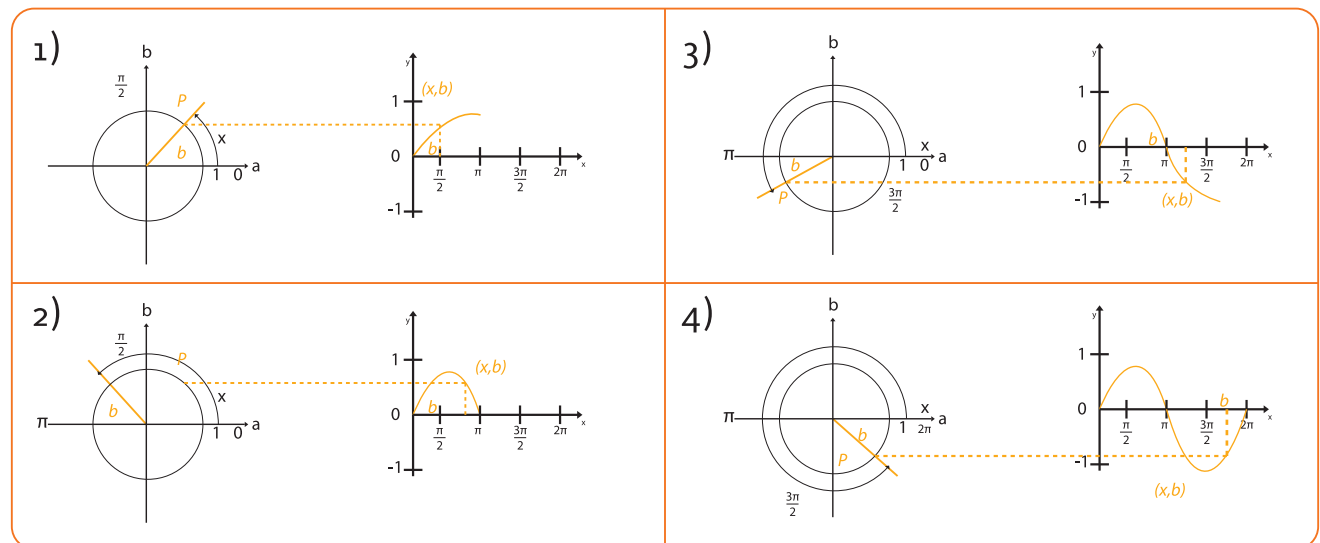
Ángulo	$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 = 1$	$\text{tan}^2 \theta + 1 = \text{sec}^2 \theta$	$1 + \text{cot}^2 \theta = \text{csc}^2 \theta$

## 7.3 Gráficas de las funciones seno, coseno y tangente

Las funciones trigonométricas presentan una variación que se hace evidente cuando se traza su gráfica, tomando como referencia un punto P (x, y) que se desplaza por el círculo unitario.

Para el punto P(x, y), la abscisa (x) representa al coseno del ángulo y la ordenada (y) representa el seno del ángulo de referencia, tomando ésto en cuenta, el punto P(x, y) puede denotarse como P (cos •, sen •). En consecuencia, según cambie la abscisa del punto P al desplazarse por el círculo unitario, de la misma forma cambiará el valor del coseno. Asimismo, al desplazarse el punto P, el valor de la ordenada indicará el valor del seno del ángulo formado.

Observa el diagrama siguiente en el que hemos dividido en ocho partes el círculo unitario y como hemos trazado la gráfica del seno del ángulo. La gráfica formada se llama *senoide*.

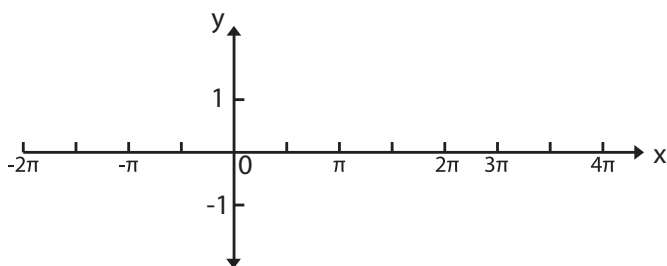


$y = \text{sen } x, 0 < x < 2\pi$

Partiendo del ejemplo que hemos mostrado, forma pareja con otro integrante del grupo y traza las gráficas para el coseno, la tangente, la secante y la cosecante del ángulo • Pueden emplear papel Bond o cartulinas ( o cualquier otro material semejante), así como plumones o colores. Busca información en la bibliografía a tu alcance para comprender mejor las características de cada función y cómo se representan en la gráfica. Pide, como siempre, la ayuda de tu asesor si lo requieres. Al terminar compara tus graficas con las del resto del grupo.

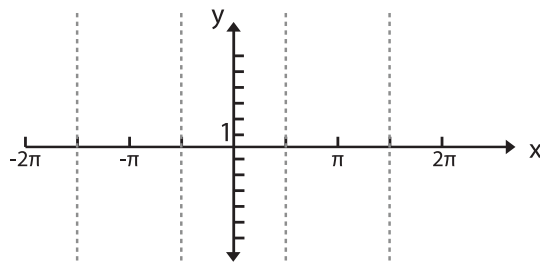


GRÁFICA DE  $y = \cos x$



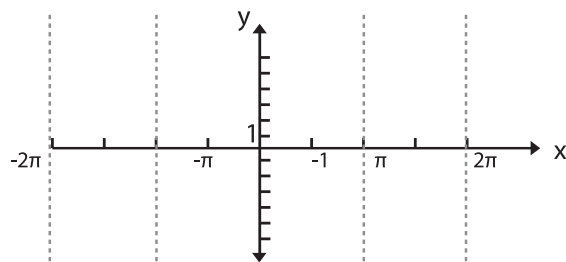
Dominio :  $\mathbb{R}$       rango :  $-1 \leq y \leq 1$       Periodo :  $2\pi$

GRÁFICA DE  $y = \tan x$



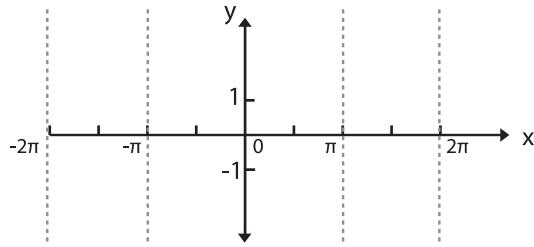
Dominio : el conjunto de todos los números reales  $\mathbb{R}$ , excepto  $\pi/2 + k\pi$ ,  $k$  entero      Rango :  $\mathbb{R}$       Periodo :  $\pi$

GRÁFICA DE  $y = \cot x$



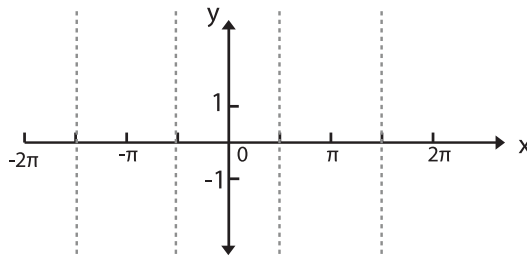
Dominio : el conjunto de todos los números reales  $\mathbb{R}$ , excepto  $\pi/2 + k\pi$ ,  $k$  entero      Rango :  $\mathbb{R}$       Periodo :  $\pi$

GRÁFICA DE  $y = \csc x$



Dominio : el conjunto de todos los números reales  $x = k\pi$ ,  $k$  entero  
 Rango : todos los números reales  $y$ , tales que  $y \leq -1$  o  $y \geq 1$   
 Periodo :  $\pi$

GRÁFICA DE  $y = \sec x$



Dominio : el conjunto de todos los números reales  $x = \pi/2 + k\pi$ ,  
 $k$  entero Rango : todos los números reales  $y$ , tales que  $y \leq -1$  o  
 $y \geq 1$  Periodo :  $2\pi$



### ¿Qué he aprendido?

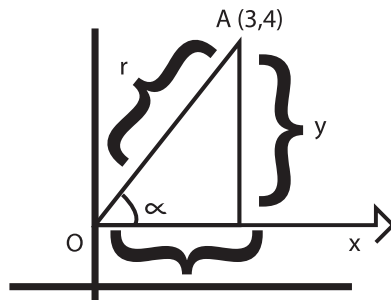
Contesta las siguientes preguntas para saber cómo has aprovechado las actividades y conocimientos del bloque.

1. Si el lado final de un ángulo pasa por A, cuyas coordenadas son (3,4) como lo muestra la siguiente figura, determina las razones trigonométricas de los valores del seno •, coseno •, tangente de • y •.

A)  $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}; \cos \theta = \frac{3}{5}; \tan \alpha = \frac{4}{3}; \tan \theta = \frac{3}{5}$

B)  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}; \cos \theta = \frac{4}{5}; \tan \alpha = \frac{3}{5}; \tan \theta = \frac{3}{4}$

C)  $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}; \cos \theta = \frac{3}{5}; \tan \alpha = \frac{3}{4}; \tan \theta = \frac{4}{3}$



$$D) \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}; \cos \theta = \frac{3}{5}; \tan \alpha = \frac{3}{4}; \tan \theta = \frac{4}{3}$$

$$E) \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}; \cos \theta = \frac{4}{5}; \tan \alpha = \frac{4}{3}; \tan \theta = \frac{3}{4}$$

2. Si el valor de  $\tan \alpha = -\frac{8}{6}$  y el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante, encuentra los valores de las otras dos funciones trigonométricas  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\cos \alpha$ .

$$A) \operatorname{sen} \alpha = -\frac{6}{10}; \cos \alpha = -\frac{8}{10}$$

$$B) \operatorname{sen} \alpha = \frac{8}{10}; \cos \alpha = -\frac{6}{10}$$

$$C) \operatorname{sen} \alpha = -\frac{8}{10}; \cos \alpha = \frac{6}{10}$$

$$D) \operatorname{sen} \alpha = -\frac{6}{10}; \cos \alpha = \frac{8}{10}$$

$$E) \operatorname{sen} \alpha = \frac{6}{10}; \cos \alpha = -\frac{8}{10}$$

3. Si el valor de  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  y es un ángulo del segundo cuadrante, encuentra los valores de las otras dos funciones trigonométricas  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\tan \alpha$ .

$$A) \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}; \tan \alpha = \frac{4}{3}$$

$$B) \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{3}; \tan \alpha = \frac{5}{3}$$

$$C) \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{5}; \tan \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$D) \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{26}}{5}; \tan \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{3}$$

$$E) \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}; \tan \alpha = -\frac{5}{3}$$

4. Calcula las tres funciones trigonométrica (sen, cos y tan) para el ángulo notable de  $60^\circ$ , partiendo del punto A  $(1, \sqrt{3})$  de la figura adjunta.

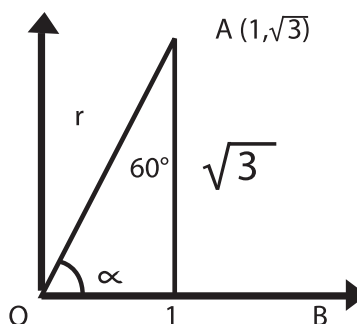
A)  $\text{sen}60^\circ = \frac{1}{2}; \text{cos}60^\circ = \sqrt{3}; \text{tan} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

B)  $\text{sen}60^\circ = \sqrt{3}; \text{cos}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}; \text{tan} \alpha = \frac{1}{2}$

C)  $\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{cos}60^\circ = \frac{1}{2}; \text{tan} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

D)  $\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{cos}60^\circ = \frac{1}{2}; \text{tan} \alpha = \sqrt{3}$

E)  $\text{sen}60^\circ = \frac{1}{2}; \text{cos}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{tan} \alpha = \sqrt{3}$



5. Calcula las tres funciones trigonométricas (sen, cos, y tan) para el ángulo notable de  $30^\circ$ , partiendo del punto A  $(1, \sqrt{3})$  y de la figura adjunta.

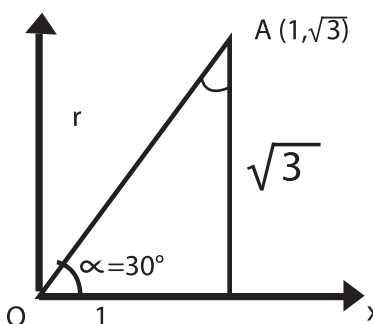
A)  $\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}; \text{cos} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{tan} 30^\circ = \sqrt{3}$

B)  $\text{sen}30^\circ = \frac{1}{4}; \text{cos} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}; \text{tan} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

C)  $\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}; \text{cos} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{tan} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

D)  $\text{sen}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}; \text{cos} \alpha = \sqrt{3}; \text{tan} 30^\circ = \frac{1}{2}$

E)  $\text{sen}30^\circ = \frac{1}{4}; \text{cos} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}; \text{tan} 30^\circ = \sqrt{3}$

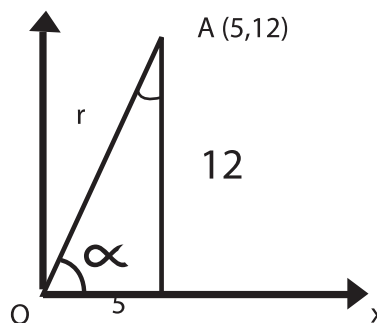


6. Calcula los valores de las funciones trigonométricas de la cotangente, secante y la cosecante del ángulo  $\alpha$ , que se forma con el eje "x" y el lado A  $(5, 12)$ .

A)  $\cot \alpha = \frac{5}{12}; \sec \alpha = \frac{13}{5}; \csc \alpha = \frac{12}{13}$

B)  $\cot \alpha = \frac{5}{12}; \sec \alpha = \frac{5}{13}; \csc \alpha = \frac{12}{13}$

C)  $\cot \alpha = \frac{12}{5}; \sec \alpha = \frac{5}{13}; \csc \alpha = \frac{12}{13}$





$$D) \cot \alpha = \frac{5}{12}; \sec \alpha = \frac{13}{5}; \csc \alpha = \frac{13}{12}$$

$$E) \cot \alpha = \frac{12}{5}; \sec \alpha = \frac{13}{5}; \csc \alpha = \frac{13}{12}$$

7. Si el valor de  $\csc \alpha = \frac{\sqrt{17}}{4}$  y el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, encuentra los valores de las otras dos funciones trigonométricas  $\cot$  y  $\sec$ .

$$A) \cot \alpha = -4; \sec \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$B) \cot \alpha = -\frac{1}{4}; \sec \alpha = \sqrt{17}$$

$$C) \cot \alpha = -\frac{1}{4}; \sec \alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$D) \cot \alpha = -4; \sec \alpha = \sqrt{17}$$

$$E) \cot \alpha = -\frac{1}{4}; \sec \alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

8. Se llama círculo trigonométrico, a aquel cuyo radio vale...

- A) Ciento ochenta grados.
- B) Noventa grados.
- C) Cero.
- D) La unidad.
- E) Dos unidades.

9. Indica con qué cuadrantes son positivas las funciones trigonométricas respecto al seno y cosecante.

- A) Primero y cuarto cuadrante
- B) Primero y segundo cuadrante
- C) Primero y tercer cuadrante
- D) Segundo y tercer cuadrante
- E) Segundo y cuarto cuadrante

10. Indica en qué cuadrantes son positivas las funciones trigonométricas con respecto a la tangente y cotangente.

- A) Tercero y segundo cuadrante
- B) Tercero y cuarto cuadrante
- C) Primero y cuarto cuadrante
- D) Primero y tercer cuadrante
- E) Primero y segundo cuadrante

11. Indica en qué cuadrantes son positivas las funciones trigonométricas respecto al coseno y secante.

- A) Primero y segundo cuadrante
- B) Primero y tercer cuadrante
- C) Primero y cuarto cuadrante
- D) Segundo y tercer cuadrante
- E) Segundo y cuarto cuadrante

12. Identifica si el enunciado es falso (F) o verdadero (V)

Las propiedades reciprocas son ejemplos de identidades trigonométricas. ( )

Es una identidad reciproca:  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$  ; para  $\cos \alpha \neq 0$  . ( )

Es una identidad reciproca  $\operatorname{csc} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$  ; para  $\operatorname{sen} \alpha \neq 0$ . ( )

Es una identidad reciproca del  $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$  ; para  $\cot \alpha \neq 0$  ( )

Es una identidad reciproca del  $\cos \alpha = \frac{1}{\operatorname{csc} \alpha}$  ; para  $\operatorname{csc} \alpha \neq 0$  ( )

Es una identidad reciproca del  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$  ; para  $\cos \alpha \neq 0$  ( )

El seno y el cosecante son identidades reciprocas. ( )

El coseno y la cotangente son identidades reciprocas. ( )

La tangente y la cotangente son identidades reciprocas. ( )

El seno y la secante son identidades reciprocas. ( )

El coseno y la secante son identidades reciprocas ( )

$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$  Representa una identidad de cociente trigonométrica ( )

$\cot \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\tan \alpha}$  Representa una identidad de cociente trigonométrica: ( )

$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$  Representa una identidad de cociente trigonométrica: ( )

$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  Representa una identidad pitagórica trigonométrica: ( )

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$  Representa una identidad pitagórica trigonométrica: ( )

$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{csc}^2 \theta$  Representa una identidad pitagórica trigonométrica: ( )



¿Te has preguntado cómo se construye un triángulo? Parece evidente que sólo necesitamos tener tres rectas y unir las por sus extremos para hacer de ellas un triángulo, el cual es el primer polígono que se puede construir con regla y compás.

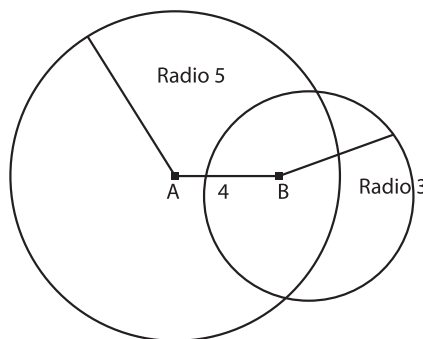
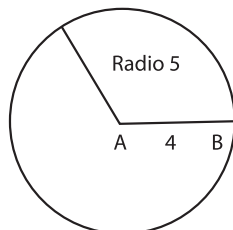
Supongamos que en lugar de darte tres líneas, tienes tres valores numéricos, mi pregunta es ¿serías capaz de decir cuando tres cantidades representan un triángulo y cuando no?

Un método práctico para saber si tres valores forman un triángulo es trazarlos en un plano y haciendo centro en uno de sus lados, trazar circunferencias con radio el valor dado, y ver si esos tres segmentos se pueden unir exactamente, por ejemplo: “Los valores 3, 4, y 5 son llamados una terna pitagórica, ya que cumplen el Teorema de Pitágoras y forman una clase especial de triángulo, un triángulo rectángulo”.

La forma de hacer el triángulo con el método descrito anteriormente es la siguiente: Primero trazo un segmento de longitud cualquiera de las tres cantidades dadas:



Haciendo centro en A, trazo una circunferencia, que tenga de radio 5 unidades.



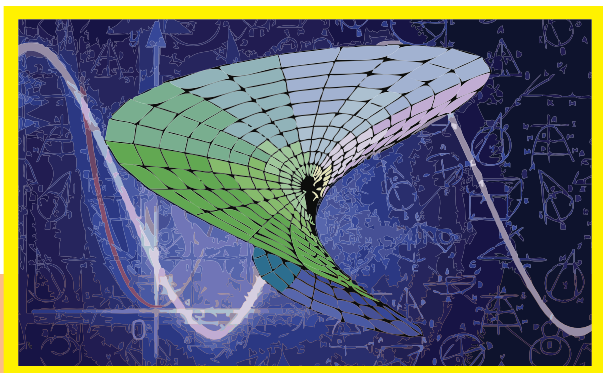
Aún no se observa nada, eso parece, pero si te fijas bien las dos circunferencias trazadas a partir de los puntos A y B se intersecan en un punto, al cual vamos a llamar C (por el momento). ¿Qué distancia crees que tenga el segmento BC?, ¿Qué distancia crees que tenga el segmento AC?, ¿Qué hubiera pasado si en lugar de trazar una circunferencia de 3 unidades de radio la trazo de media o una unidad? O quizás, dejando la de radio 3, trazara una circunferencia de 9, ¿Crees que las dos circunferencias se tocarían o intersestrarían en algún punto?, si estas circunferencias no se tocan ¿Se formaría un triángulo?

Por último vamos a trazar una perpendicular a AB, que pase por el punto B y por el punto C, se observa que se genera un triángulo rectángulo del cual AC es la hipotenusa; sabemos por el teorema de Pitágoras que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Y como sabemos cuánto valen tanto AB, como BC, al hacer las operaciones y obtener la raíz cuadrada se tiene que  $AC = 5$ .

Un último comentario: más adelante, cuando estés en tercer semestre, vas a aplicar las leyes de los senos y cosenos para realizar sumas de vectores y calcular fuerzas, por eso es importante recordar este conocimiento que acabas de aprender.



¿Qué voy a aprender?



## BLOQUE VIII.

### APLICA LAS LEYES DE LOS SENOS Y COSENOS

#### UNIDAD DE COMPETENCIA

» Construye e interpreta modelos en los que se identifican las relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos, en la resolución de problemas que se derivan en situaciones relacionadas con la aplicación de estas leyes. Cuantifica y representa magnitudes angulares y lineales a partir de la aplicación de las leyes de senos y cosenos. Interpreta diagramas y textos con símbolos propios de las relaciones trigonométricas.

En bloques anteriores aprendiste a resolver triángulos rectángulos aplicando el Teorema de Pitágoras y funciones trigonométricas, pero en éste te encontrarás con triángulos que no son rectángulos, a ellos se les conoce como triángulos oblicuángulos, es decir, son aquellos que no tienen ángulos rectos.

Conocerás dos leyes que te ayudarán a resolver triángulos oblicuángulos y estas son:

- A) Ley de Seno
- B) Ley de Coseno

Como una introducción, observarás los dos tipos de triángulos oblicuángulos, que son el triángulo acutángulo y el triángulo obtusángulo, hasta llegar a los elementos que integran al triángulo oblicuángulo en su totalidad.

Tendrás una visión general de las dos leyes de senos y cosenos, primeramente aprenderás a identificar cuándo aplicar cada una de ellas, dependiendo los datos que proporciones el problema.

Ya que sepas identificar cuándo usar cada una de las dos leyes, resolverás problemas teóricos, apoyándote con una serie de problemas resueltos, que de una manera progresiva te mostrarán paso a paso cómo resolver primero un problema incompleto, hasta que se te muestre un problema que resolverás de manera total.

Finalmente, llegarás a aplicar la ley de senos y la ley de cosenos en problemas de la vida cotidiana, atendiendo diversos ámbitos.

Cada tema ha sido cuidadosamente desarrollado, para que de manera didáctica y progresiva desarrolles la habilidad en la resolución de cada problema.



### Fuentes de Consulta

Te recomendamos los siguientes textos que complementarían las actividades de aprendizaje y además te ayudarán a profundizar en los tópicos de tu agrado:

- García, Miguel y Manuel Rodríguez, I. Matemáticas 2. México, ST Editorial, 2005, pp. 195-218.
- Olmos, Raúl y otros. Matemáticas II. México, McGrawHill, 2006, pp. 181-198.
- Ibáñez, Patricia y Gerardo García. Matemáticas II, Geometría y Trigonometría. México, Thomson, 2006, pp. 194-215.



### ¿Qué aprendo?

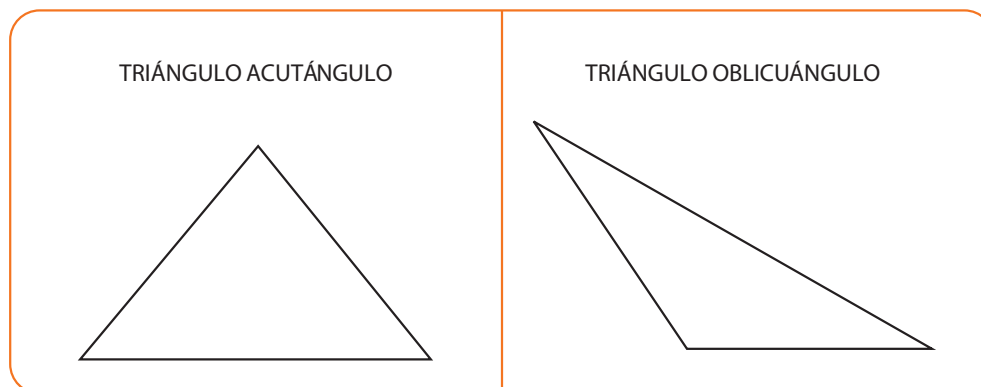
Hemos revisado en general los triángulos y sus características, ahora veremos otras características de triángulos, enfocándonos exclusivamente a los triángulos oblicuángulos.

## 8.1 Ley De Senos Y Cosenos

Para la aplicación de la Ley de Seno y Ley de Coseno debes tener presente lo siguiente:

Un triángulo oblicuángulo es aquel que no presenta un ángulo recto, se denomina de dos formas: triángulo acutángulo si tiene tres ángulos agudos y triángulo obtusángulo si tiene un ángulo obtuso, por lo que no es posible resolverlo si aplicamos el Teorema de Pitágoras.

Ejemplo:



Para efectos prácticos en la resolución de los problemas, se sugiere el siguiente formato de triángulo oblicuángulo.

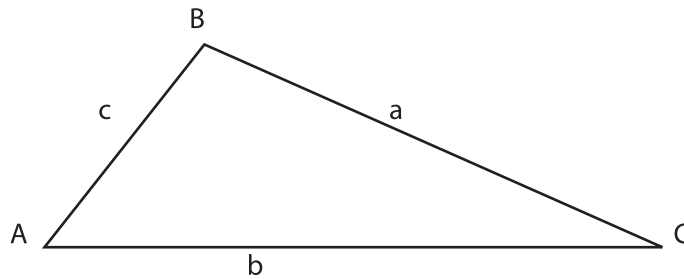
Donde: "A, B y C" representan los ángulos y "a, b y c" representan los lados.

Observa que:

a es el lado opuesto al ángulo A

b es el lado opuesto al ángulo B

c es el lado opuesto al ángulo C



Para resolver triángulos oblicuángulos se utiliza

- Ley de seno.
- Ley de coseno.

Antes de iniciar con el desarrollo de los temas te recomendamos que consultes la siguiente página: <http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/SoftDidactico/acuna/index.html> La cual te proporcionará un panorama general de lo que vas a estudiar en este bloque.

Estudia la información que vamos a presentarte en conjunto con tu asesor.

## 8.2 Ley de Senos

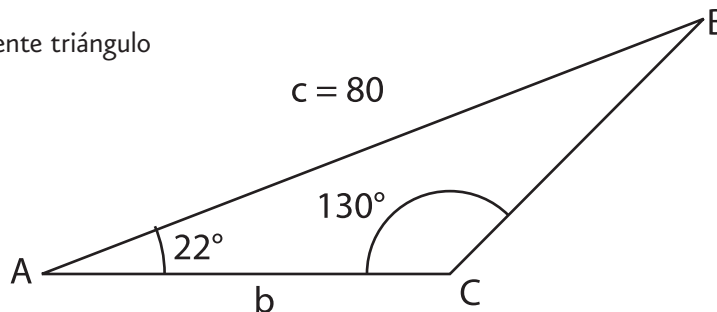
En cualquier triángulo oblicuángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

La ley de seno es muy útil para resolver triángulos oblicuángulos cuando se conocen:

- Un lado y dos ángulos (LAA o ALA)

Ejemplo: Observa el siguiente triángulo



Los ángulos del triángulo están representados por las letras **A**, **B**, **C** y los lados por **a**, **b**, **c**, los datos que proporciona son:

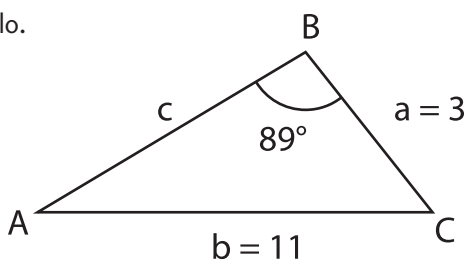
Ángulos	A = 22°	C = 130°
Lados	c = 80	

El lado “c” es opuesto al ángulo “C”, por lo tanto, para resolver este problema puedes aplicar la ley de Seno.

El otro caso para aplicar la ley de seno es cuando:

- Tienes dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA)

Ejemplo: Observa el siguiente triángulo.



Los ángulos del triángulo están representados por las letras **A, B, C** y los lados por **a, b, c**, los datos que proporciona son:

Ángulos  $B = 83^\circ$   
Lados  $a = 8,$   $b = 11$

El ángulo “B” es opuesto al lado “b”, por lo tanto para resolver este problema puedes aplicar la ley de Seno.

### 8.3 Ley de coseno

Seguiremos nuestro estudio en la resolución de los triángulos oblicuángulos. Como recordarás, en el caso de la Ley de Senos, se aplica en los casos cuando sólo conoces un lado del triángulo y dos de sus ángulos, es decir, LAA o ALA; o bien cuando conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, es decir, LLA.

Sin embargo; ahora veremos otros dos casos posibles, cuando de un triángulo oblicuángulo conocemos:

- Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, conocido como LAL.
- Los tres lados, caso conocido como LLL.

Para estos casos utilizarás la Ley de Coseno

La ley de Coseno establece:

En todo triángulo, el cuadrado de un lado, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos la multiplicación del doble producto de ellos, por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

De esta manera, las fórmulas para aplicar la ley de cosenos son las siguientes:

Para encontrar los lados:	Para encontrar los ángulos:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$	$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$





Una vez analizado el texto anterior, identifica que ley aplicar según los datos proporcionados de los siguientes triángulos oblicuángulos. Al finalizar compara tus resultados con el resto del grupo.

Datos		Ley
Ángulo $A = 38^\circ$ $B = 72^\circ$ $C =$	Lado $a =$ $b =$ $c = 11$	
Ángulo $A =$ $B =$ $C = 60^\circ$	Lado $a = 8$ $b = 11$ $c =$	

## 8.4 Resolución de triángulos oblicuángulos

Una vez que ya sabes identificar los casos en los cuales aplicar cada una de las leyes, ahora podrás resolver los triángulos oblicuángulos.

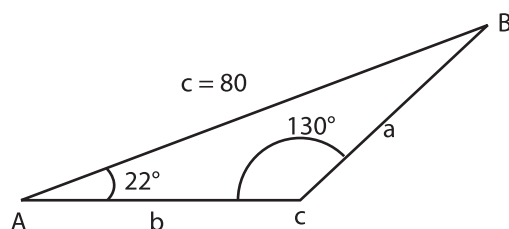
¿A qué se refiere con la resolución de triángulos oblicuángulos?

Pues bien, resolver triángulos oblicuángulos consiste en encontrar los datos que te faltan ya sean lados o ángulos.

Veamos unos ejemplos:

En plenaria resuelve el siguiente triángulo oblicuángulo con la ayuda de tu asesor, con los datos que se dan a continuación.

1)



Primero analizamos los datos que nos proporciona el triángulo oblicuángulo.

Lados	Ángulos
a = ?	A = 22°
b = ?	B = ?
c = 80	C = 130°

¿Qué ley aplicarías?

Si observas los datos que nos proporcionan son dos ángulos y un lado, este caso corresponde a la Ley de seno.

Fórmulas que aplicarás  $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$

Recuerda que: “La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°”

$$A + B + C = 180$$

La Ley Seno se puede descomponer en las siguientes relaciones:

$$1) \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \qquad 2) \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C} \qquad 3) \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Sustituye los datos que te proporciona el problema

$$1) \frac{a}{\text{sen}22^\circ} = \frac{b}{\text{sen}B} \qquad 2) \frac{a}{\text{sen}22^\circ} = \frac{80}{\text{sen}130^\circ} \qquad 3) \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{80}{\text{sen}130^\circ}$$

Observa que la segunda relación solo falta el valor del lado “a”, entonces despejaremos y encontraremos su valor:

$$\frac{a}{\text{sen}22^\circ} = \frac{80}{\text{sen}130^\circ}$$

$$a = \frac{(80)(\text{sen}22^\circ)}{\text{sen}130^\circ}$$

$$a = \frac{(80)(0.3746)}{0.766} = \frac{29.968}{0.766}$$

$$a = 39.12$$

Ahora hay que encontrar el valor del ángulo B

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$22^\circ + B + 130^\circ = 180^\circ$$

$$B = 180^\circ - 22^\circ - 130^\circ$$

$$B = 28^\circ$$

Para encontrar el valor del lado “b” puedes utilizar la relación 1 o 3 para encontrar su valor

$$\frac{b}{\operatorname{sen}28^\circ} = \frac{80}{\operatorname{sen}130^\circ}$$

$$b = \frac{(80)(\operatorname{sen}28^\circ)}{\operatorname{sen}130^\circ}$$

$$b = \frac{80(0.4694)}{0.766} = \frac{37.552}{0.766}$$

$$b = 49.02$$

Por lo tanto los datos faltantes del triángulo oblicuángulo son:

Lados	Angulo
a = 39.12	B = 28°
b = 49.02	

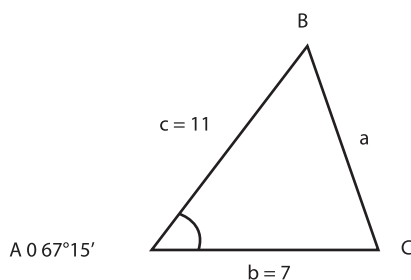
2) Los datos de un triángulo oblicuángulo son:  $A = 67^\circ 15'$ ,  $b = 7$  y  $c = 11$

Primero analizamos los datos que nos proporciona del triángulo oblicuángulo.

Lados	Ángulos
a = ?	A = 67°15'
b = 7	B = ?
c = 11	C = ?

¿Qué ley aplicarías?

Si observas los datos que nos proporcionan son dos lados y un ángulo, en este caso se recomienda que dibujes el triángulo para verificar si el ángulo que te proporcionan está comprendido entre los lados o es opuesto a uno de ellos.



Observa que el ángulo queda comprendido entre los lados, por lo tanto, la ley que ocuparás es la Ley de Coseno.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$a^2 = (7)^2 + (11)^2 - 2(7)(11)\cos 67^\circ 15'$$

Calculamos el lado "a"

$$a^2 = 49 + 121 - (154)(0.3867)$$

$$a^2 = 110.4482$$

$$a = \sqrt{110.4482}$$

$$a = 10.509$$

Calculo del ángulo B utilizando la Ley de Seno.

$$\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{a}{\text{sen}A}$$

$$\frac{7}{\text{sen}B} = \frac{10.509}{\text{sen}67^{\circ}15'}$$

$$\text{sen}B = \frac{7(\text{sen}67^{\circ}15')}{10.509}$$

$$\text{sen}B = \frac{7(0.9222)}{10.509}$$

$$B = \text{sen}^{-1}.6142$$

$$B = 37^{\circ}53'$$

Calculo del ángulo C

$$A + B + C = 180^{\circ}$$

$$67^{\circ}15' + 37^{\circ}53' + C = 180^{\circ}$$

$$C = 180^{\circ} - 67^{\circ}15' - 37^{\circ}53'$$

$$C = 74^{\circ}52'$$

Por lo tanto los datos faltantes del triangulo oblicuángulo son:

Lados	Angulo
a= 10.59	B =37°53'
	C= 74°52'

Ahora se presentan dos problemas incompletos, para que encuentres los datos faltantes de los triángulos oblicuángulos, tomando como base el procedimiento que se te va indicando completa lo que haga falta.

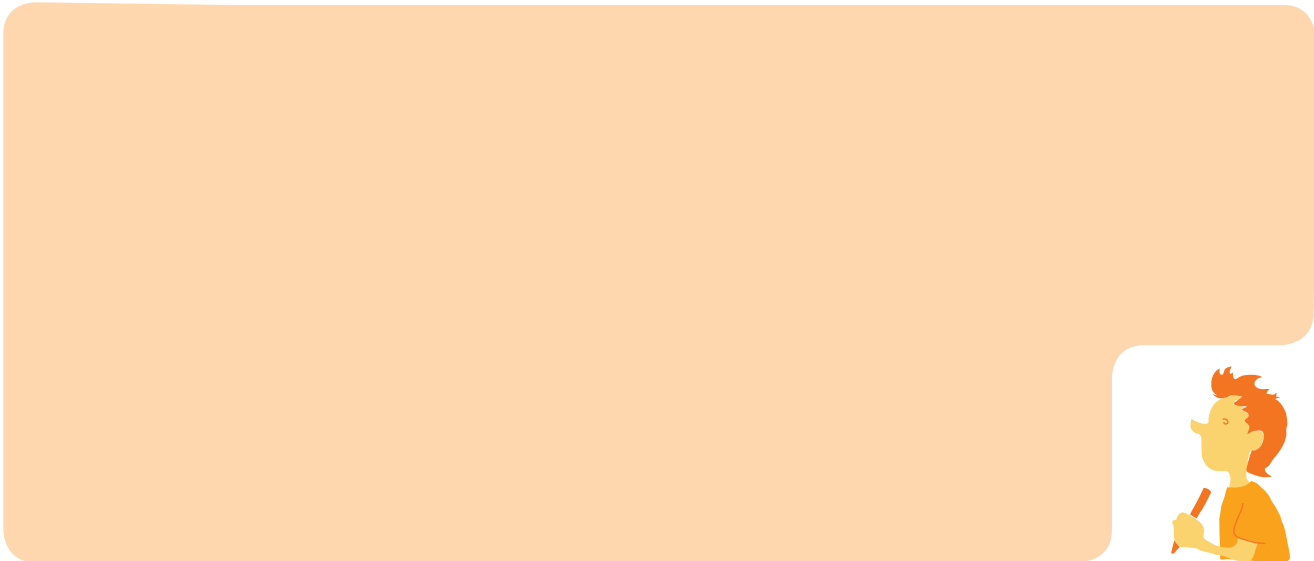
1) Los datos de un triangulo oblicuángulo son: b = 8.5, c = 9.8, A = 52°

Primero analizamos los datos que nos proporciona del triangulo oblicuángulo.

Lados	Ángulos
a =	A =
b =	B =
c =	C =

¿Qué caso es?

Dibuja el triángulo oblicuángulo con sus datos:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Calculamos el lado "a"  $a^2 = ( \quad )^2 + ( \quad )^2 - 2( \quad )( \quad ) \cos 52^\circ$

$$a^2 = ( \quad ) + ( \quad ) - ( \quad )( \quad )$$

$$a^2 = ( \quad ) + ( \quad ) - ( \quad )$$

$$a^2 = ( \quad ) - ( \quad )$$

$$a = \sqrt{\quad}$$

$$a =$$

$$\frac{( \quad )}{\text{sen}B} = \frac{( \quad )}{\text{sen}52^\circ}$$

Cálculo del ángulo

B utilizando la Ley de Seno.

$$\text{sen}B = \frac{( \quad )(\text{sen}52^\circ)}{( \quad )}$$

$$B = \text{sen}^{-1}( \quad )$$

$$B =$$

Cálculo del ángulo C:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$52^\circ + ( \quad ) + C = 180^\circ$$

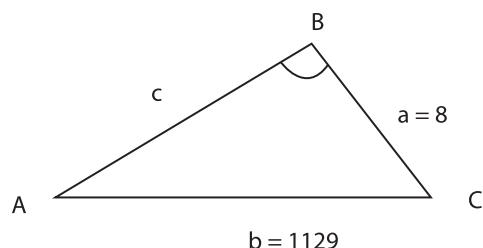
$$C = 180^\circ - 52^\circ - ( \quad )$$

$$C =$$

Por lo tanto, los datos faltantes del triángulo oblicuángulo son:

Lados	Ángulos
a =	A =
b =	B =
c =	C =

2)



Primero analizamos los datos que nos proporciona el triángulo oblicuángulo.

Lados	Ángulos
a =	A =
b =	B =
c =	C =

¿A qué caso corresponde?

Fórmulas que aplicarás

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Recuerda que: “La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°”

$$A + B + C = 180$$

La Ley Seno se puede descomponer en las siguientes relaciones:

1)  $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}$

2)  $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C}$

3)  $\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$

Sustituye los datos que te proporciona el problema

1)  $\frac{(\quad)}{\text{sen}A} = \frac{(\quad)}{\text{sen}(\quad)}$

2)  $\frac{(\quad)}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C}$

3)  $\frac{(\quad)}{\text{sen}(\quad)} = \frac{c}{\text{sen}C}$

Observa que la primera relación solo falta el valor del ángulo “A”, entonces despejaremos y encontraremos su valor:

$$\frac{(\quad)}{\text{sen}A} = \frac{(\quad)}{\text{sen}(\quad)}$$

$$\text{sen}A = \frac{(\quad)\text{sen}83^\circ}{(\quad)}$$

$$\text{sen}A = (\quad)$$

$$A = \text{sen}^{-1}(\quad)$$

$$A =$$

Ahora hay que encontrar el ángulo C

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$(\quad) + (\quad) + C = 180^\circ$$

$$C = 180^\circ - (\quad) - (\quad)$$

$$C =$$

El valor del lado "c"

$$\frac{11.29}{\text{sen}83^\circ} = \frac{c}{\text{sen}(\quad)}$$

$$c = \frac{11.29 \text{sen}(\quad)}{\text{sen}83^\circ}$$

$$c = \frac{11.29(\quad)}{0.9925} = \frac{(\quad)}{0.9925}$$

$$c =$$

Por lo tanto, los datos faltantes del triángulo oblicuángulo son:

Lados	Ángulos
a = <input type="text"/>	A = <input type="text"/>
b = <input type="text"/>	B = <input type="text"/>
c = <input type="text"/>	C = <input type="text"/>

Los resultados compártelos con tu asesor y con tus compañeros.

Si deseas seguir practicando te recomendamos la siguiente página <http://usuarios.lycos.es/calculo21/id364.htm>, en ella puedes encontrar problemas resueltos del libro de Baldor.

## 8.5 Aplicaciones prácticas

La ley de Seno y Coseno juegan un papel fundamental en la solución de problemas prácticos, asimismo te será de apoyo en materias posteriores.

Forma equipos de cinco personas y resuelve los siguientes problemas de triángulos oblicuángulos y presenta tus resultados con el asesor.

**1.-** Dos aviones parten del mismo aeropuerto a la misma hora. El primero viaja a una velocidad de 120 Km. /h en una dirección de  $340^\circ$ . El segundo vuela a una velocidad de 180 Km. /h en una dirección de  $190^\circ$ . Después de 2 horas, ¿a qué distancia se encuentran los aviones entre sí?



2.- Un trozo de alambre de 7.5 m, de longitud, es doblado formando un triángulo. Uno de los lados mide 2.8 m y el otro 3.1 m. Calcula los valores de los ángulos interiores del triángulo.

3.- Quieres encontrar la ubicación de una montaña tomando medidas desde dos puntos que se encuentran a 5 Km. uno de otro. Desde el primer punto, el ángulo formado entre la montaña y el segundo punto es  $76^\circ$ . Desde el segundo punto, el ángulo formado entre la montaña y el primer punto es  $52^\circ$ . ¿Qué tan lejos está la montaña de cada punto?



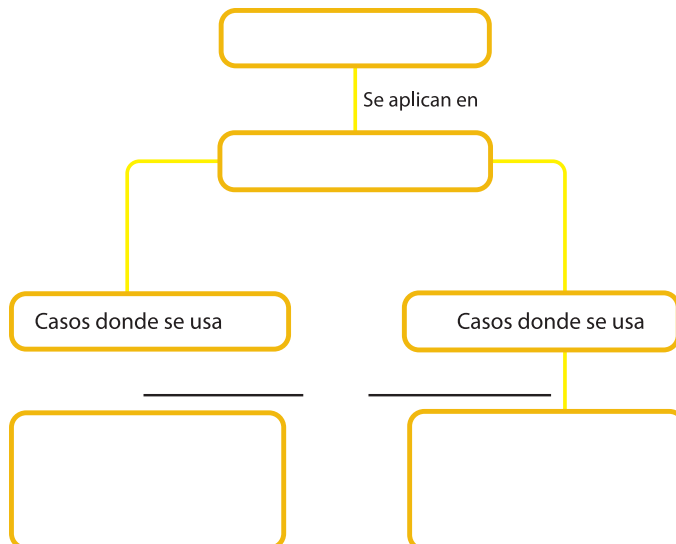
### ¿Qué he aprendido?

Ya estás listo para aplicar lo que aprendiste y reafirmar el aprendizaje adquirido, para ello desarrolla las siguientes actividades, si surgen dudas acude con tu asesor.



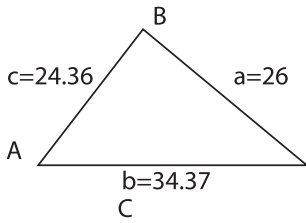
1. Completa el siguiente cuadro sinóptico con las siguientes frases:

Casos donde se usa, un lado y dos ángulos, Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, Triángulos oblicuángulos, Dos lados y el ángulo opuesto a ellos Ley de Seno, Ley de Coseno.

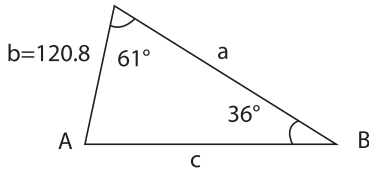




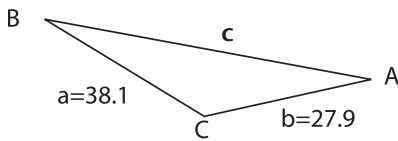
2. Según los triángulos oblicuángulos identifica los datos que te proporcionan e indica según estos cuál Ley debes aplicar para encontrar los datos faltantes.



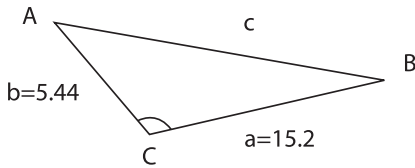
Lados	Ángulos
a =	A =
b =	B =
c =	C =



Lados	Ángulos
a =	A =
b =	B =
c =	C =



Lados	Ángulos
a =	A =
b =	B =
c =	C =



Lados	Ángulos
a =	A =
b =	B =
c =	C =

3. Relaciona las siguientes columnas

1.- Es un triángulo que no presenta ángulo recto, puede ser acutángulo u obtusángulo.

2.- En cualquier triángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

3.- En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de los mismos lados por el coseno del ángulo que forman.

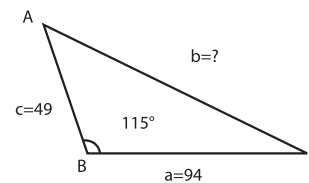
4.- La ley de seno se utiliza si se conoce:

5.- La ley de coseno se utiliza si se conocen:

6.-Según los datos, triángulo que aplica la ley de coseno.

A) Ley de Coseno

B )



C) Dos ángulos y un lado o dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

D) Cuando se conocen los tres lados o cuando se conocen solo dos lados y el ángulo entre ellos.

E) Triángulo Oblicuángulo.

F) Ley de Seno.

4.- Triángulo que tiene tres ángulos agudos:

- A) Rectángulo B) Obtuso C) Oblicuángulo D) Acutángulo

5.- Triángulo que tiene un ángulo obtuso:

- A) Rectángulo B) Obtuso C) Acutángulo D) Obtusángulo

6.- Ley que nos sirve para solucionar Triángulos oblicuángulos:

- A) Ley de Pitágoras B) Ident. Trigonométricas C) Ley de Cotangente D) Ley de senos

7.- Ley que se aplica en un triángulo oblicuángulo cuando se conocen sus tres lados:

- A) Ley de Pitágoras B) Ley de Tangentes C) Ley de cosenos D) Ley de geometría

8.- La ley de seno que se utiliza para encontrar los lados y ángulos de un triángulo oblicuángulo. ¿Cuál es la forma correcta de redactar esta ley?

- A) En cualquier triángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos adyacentes.  
B) En cualquier triángulo oblicuángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos.  
C) En cualquier triángulo oblicuángulo, las longitudes de los lados son diferentes a los senos de los ángulos opuestos.  
D) En cualquier triángulo oblicuángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

9.- La ley de seno se enuncia: “En cualquier triángulo, las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos” y se representa como

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Si los datos de un triángulo son: lado  $c = 80$  m. y los ángulos  $A = 22^\circ$  y  $C = 130^\circ$ . ¿Qué relación utilizas para encontrar el lado  $a$ ?

- a)  $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}$     b)  $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C}$     c)  $\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$     d)  $\frac{\text{sen}A}{a} = \frac{c}{\text{sen}C}$

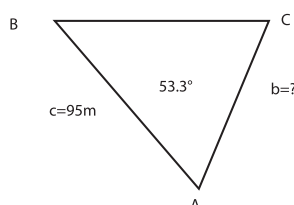
10.- Ley que dice que en todo triángulo el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de los mismos lados por el coseno del ángulo que forman:

- A) Pitágoras B) Ident. Trigonométricas C) Ley de Newton D) Ley de cosenos

11.- Utiliza tu calculadora y desarrolla la ley de senos para que identifiques la respuesta correcta en el siguiente problema:

Dos botes de basura están situados a 80 m uno del otro, y una persona está ubicado a 95m del más alejado. El ángulo que forman las dos visuales de la persona a los botes es de  $53.3^\circ$ . ¿Qué distancia hay de la persona al bote de basura más próximo?

Nota: El resultado ha sido redondeado al número inferior inmediato.



- A) 86 m                      B) 81 m                      C) 67 m                      D) 65 m

**12.-** Utiliza tu calculadora y la ley de seno para que identifiques la respuesta correcta del siguiente problema:

Dos observadores distantes entre sí a 3850 m, observan al mismo tiempo un aeroplano que vuela entre ellos. Los ángulos de elevación, de los observadores B y C hacia el aeroplano fueron de  $38^\circ$  y  $46^\circ$ , respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran los observadores del aeroplano?

- A)  $b = 2784.71$  m                      B)  $b = 2000$  m                      C)  $b = 2784.71$  m                      D)  $b = 3584.71$  m  
      $c = 2383.35$  m                       $c = 2383.35$  m                       $c = 20000$  m                       $c = 2383.35$  m

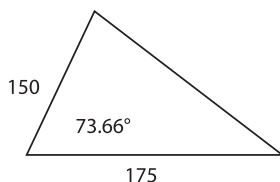
**13.-** Como ya sabes, la ley de coseno se utiliza para encontrar los lados y ángulos de un triángulo oblicuángulo. Las opciones contienen elementos descriptivos de esta ley, pero sólo una la enuncia correctamente. Identifícala.

- A) En todo triángulo oblicuángulo, la longitud de lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de los mismos lados por el coseno del ángulo que forman.  
 B) En todo triángulo oblicuángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los otros dos, menos el doble producto de los mismos lados por el coseno del ángulo que forman.  
 C) En todo triángulo oblicuángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, mas el doble producto de los mismos lados por el coseno del ángulo que forman.  
 D) En todo triángulo oblicuángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de los mismos lados por el coseno del ángulo que forman.

**14.-** Utiliza tu calculadora y la ley de coseno  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  para que identifiques la respuesta correcta del siguiente problema:

El ángulo de una esquina de un terreno triangular mide  $73.66^\circ$  y los lados que se unen en esta esquina miden 175 y 150 m de largo. Calcula la longitud del tercer lado.

Nota: El resultado ha sido redondeado al número superior inmediato.



- A) 156 m                      B) 196 m                      C) 169 m                      D) 200 m

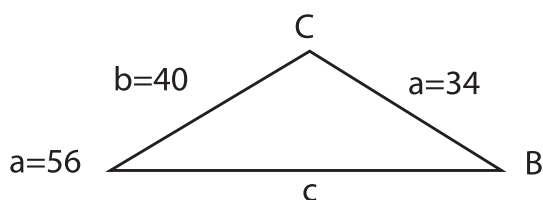
**15.-** De los problemas que se presentan en las opciones y de acuerdo con los datos, identifica en cual opción utilizarías la ley de coseno para resolverlo.

- A) Un terreno triangular tiene lados de 420, 350 y 180 m de longitud. Calcula el ángulo más pequeño entre los lados.  
 B) El ángulo en la base de un triángulo isósceles es de  $40^\circ$  y la altura mide 22 cm. Determina la longitud de sus lados iguales.

C) El pie de una escalera de 12 m, apoyada contra la pared, queda a 5 m de esta, suponiendo que el piso es horizontal, ¿Qué ángulo forma la escalera y el piso?

D) Dos barcas están situadas a 70 m una de la otra, y una boya esta a 85 m de la más alejada. El ángulo que forman las dos visuales de la boya a las barcas es de  $53.3^\circ$ .  
¿Qué distancia hay de la boya a la barca más próxima?

Contesta las preguntas 16, 17 y 18 de acuerdo con los datos que te proporciona el siguiente triángulo.



**16.-** Encuentre el valor del ángulo B

- A)  $29.85^\circ$       B)  $90^\circ$       C)  $180^\circ$       D)  $77.25^\circ$

**17.-** Encuentre el valor del ángulo C

- A)  $46.75^\circ$       B)  $90^\circ$       C)  $180^\circ$       D)  $77.15^\circ$

**18.-** Encuentre el valor del lado "c"

- A)  $29.87^\circ$       B)  $18.90^\circ$       C)  $12.380^\circ$       D)  $17.15^\circ$

Dibuja en tu cuaderno los triángulos oblicuángulos con los datos que se te proporcionan a continuación y resuelve utilizando la Ley de Seno o Coseno según los datos.

**19.**  $A = 133^\circ$ ,  $b = 12$ ,  $c = 15$

**20.**  $B = 38^\circ 57'$ ,  $a = 68.7$ ,  $b = 45$

**21.**  $B = 73^\circ 42'$ ,  $c = 16$ ,  $a = 79$

**22.**  $A = 26^\circ$ ,  $C = 106^\circ$ ,  $c = 18$

**23.**  $a = 6$ ,  $b = 4$ ,  $c = 5$

**24.**  $C = 105.5^\circ$ ,  $a = 42.3$ ,  $c = 83.44$

**25.**  $B = 98^\circ 6'$ ,  $a = 40$ ,  $c = 24.86$

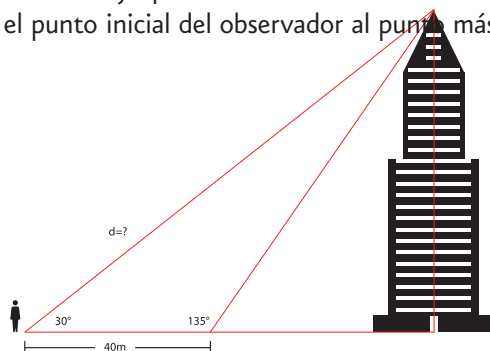
**26.**  $C = 135^\circ$ ,  $a = 6$ ,  $b = 7$

**27.**  $B = 41^\circ$ ,  $C = 120^\circ$ ,  $b = 40$

**28.**  $C = 60^\circ$ ,  $a = 15$ ,  $b = 12$

Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas aplicados y compara con tus compañeros los resultados.

**29.-** Una persona observa un edificio cuya parte más alta forma con el suelo un ángulo de  $30^\circ$ , si avanza 40 metros. Calcula la distancia desde el punto inicial del observador al punto más alto del edificio.



**30.-** El ángulo de una esquina de un terreno triangular mide  $76^\circ$  y los lados que unen a esta esquina miden 120 m y 112 m de longitud. Calcula la longitud del tercer lado.

Quiero saber más



Matemáticas, algo de su historia

Ya se sabe que las matemáticas surgieron al mismo tiempo que la historia del universo, que toda la naturaleza se ha desarrollado de manera matemática.

Es por ello, que hablaremos de algo de la historia de las matemáticas, como ciencia conocida para los humanos y la primera civilización que de manera racional la reconoció como una ciencia, fue la cultura griega.

Ahora te invitamos a que realices la siguientes lecturas:

[http://soko.com.ar/historia/Historia\\_matem.htm](http://soko.com.ar/historia/Historia_matem.htm)

[http://soko.com.ar/historia/Historia\\_matem.htm](http://soko.com.ar/historia/Historia_matem.htm)

<http://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa>

<http://www.geometriadinamica.cl/default.asp?dir=guias&sub=>

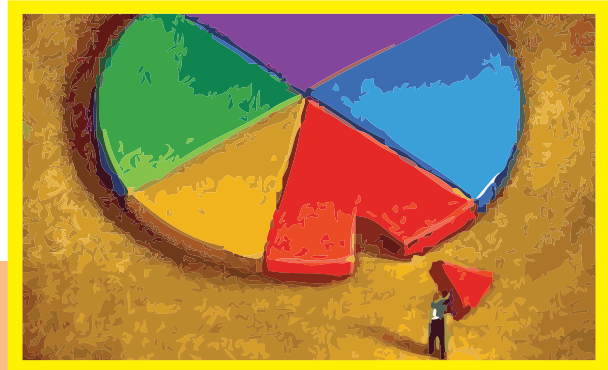
[http://descartes.cnice.mecd.es/Bach\\_CNST\\_1/Resolucion\\_triangulos\\_oblicuangelos/Resolucion\\_TO\\_indice.htm](http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Resolucion_triangulos_oblicuangelos/Resolucion_TO_indice.htm)

<http://www.elosiodelosantos.com/sergiman/div/oblic.html>

<http://usuarios.lycos.es/calculo21/id368.htm>



¿Qué voy a aprender?



## BLOQUE IX.

### APLICA LA ESTADÍSTICA ELEMENTAL

#### UNIDAD DE COMPETENCIA

» Construye e interpreta modelos que representan fenómenos o experimentos de manera estadística, aplicando las medidas de tendencia central y de dispersión. Cuantifica y representa magnitudes mediante la representación en tablas y gráficas de información proveniente de diversas fuentes. Interpreta y comunica la información contenida en tablas y graficas.

En este bloque IX estudiarás la estadística descriptiva, que en su función básica de reducir datos, propone una serie de indicadores que permiten tener una percepción rápida de lo que ocurre en un fenómeno, para esto nos enfocaremos principalmente en dos temas:

- Medidas de Tendencia Central
- Medidas de Dispersión

Los datos o valores que tendrás que analizar se presentarán en dos formas pueden no estar agrupados, es decir, estarán sin ningún orden o acomodo específico; y en forma de datos agrupados, los cuales generalmente se concentran en tablas y deberás de aprender a interpretar.

La primera gama de indicadores corresponde a las “Medidas de Tendencia Central”. Existen varios procedimientos para expresar matemáticamente las medidas de tendencia central, de los cuales, los más conocidos son: la media aritmética, la moda y la mediana. Estas medidas tienen como objetivo el sintetizar los datos en un valor representativo de la información que estás tratando para poder inferir e interpretar las características principales de la información que se esté manejando.

El segundo grupo de indicadores serán “Las medidas de Dispersión” que nos dicen hasta qué punto estas medidas de tendencia central son representativas como síntesis de la información. Las medidas de dispersión cuantifican la separación, la dispersión, la variabilidad de los valores de la distribución respecto al valor central. Distinguimos entre medidas de dispersión el rango, Varianza y Desviación Estándar.



### Fuentes de Consulta

Te recomendamos la consulta de los siguientes textos, que además de ser actualizados, desarrollan todos los tópicos del curso:

- Probabilidad Y Estadística, Ruiz Mc Graw Hill 2006
- Estadística y probabilidad, Jorge Domínguez y Jorge Axel Domínguez, Oxford University press
- Esenciales de Estadística Lápiz-Tinta Editores S.A. de C.V. Santillana

### ¿Qué aprendo?



La estadística es la rama de las matemáticas que se ocupa de reunir, organizar y analizar datos numéricos; ayuda a resolver problemas como el diseño de experimentos y toma de decisiones.

Ya sea en internet o en cualquiera de las fuentes propuestas, busca información referente a los siguientes tópicos y elabora un cuadro sinóptico, recuerda que las definiciones que incluyas deberás ser redactadas con tus propias palabras, de acuerdo con lo que hayas entendido sobre el mismo.

Estadística	Media
Mediana	Moda
Datos Agrupados	Datos no agrupados
Tablas de frecuencia	

En clase elijan a uno de sus compañeros de grupo para que explique ante el grupo su cuadro sinóptico.

## 9.1 Medidas de tendencia central

Son indicadores estadísticos que muestran hacia qué valor (o valores) se agrupan los datos. Esta primera parte la dedicaremos a analizar tres medidas de tendencia central:

- La media aritmética
- La moda
- La mediana

## 9.2 La Media Aritmética

Equivale al cálculo del promedio simple de un conjunto de datos. Para diferenciar datos muestrales de datos poblacionales, la media aritmética se representa con un símbolo para cada uno de ellos: si trabajamos con la población, este indicador será  $\mu$ ; en el caso de que estemos trabajando con una muestra, el símbolo será  $\bar{X}$ .



**Media aritmética ( $\mu$  o  $\bar{X}$ ):** Es el valor resultante que se obtiene al dividir la sumatoria de un conjunto de datos sobre el número total de datos. Solo es aplicable para el tratamiento de datos cuantitativos.

Hay que entender que existen dos formas distintas de trabajar con los datos: sin agruparlos o agrupándolos en tablas de frecuencias. Esta apreciación nos sugiere dos formas de representar la media aritmética.

### A) Media aritmética para datos no agrupados

Podemos diferenciar la fórmula del promedio simple para datos:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Apliquemos esta fórmula para resolver el siguiente caso.

El profesor de la materia de estadística desea conocer el promedio de las notas finales de los 10 alumnos de la clase. Las notas de los alumnos son:

3.2    3.1    2.4    4.0    3.5    3.0    3.5    3.8    4.2    4.0

¿Cuál es el promedio de notas de los alumnos de la clase?

Aplicando la fórmula para datos no agrupados tenemos:

$$\bar{X} = \frac{3.2 + 3.1 + 2.4 + 4 + 3.5 + 3.0 + 3.5 + 3.8 + 4.2 + 4.0}{10}$$

$$\bar{X} = 3.47$$

Cabe anotar que en el ejemplo estamos hablando de una población correspondiente a todos los alumnos de la clase (10 alumnos en total). El promedio de las notas es de 3,47.

Modifiquemos la primera nota por 0,0 y calculemos nuevamente la media aritmética.

$$\bar{X} = \frac{0.0 + 3.1 + 2.4 + 4 + 3.5 + 3.0 + 3.5 + 3.8 + 4.2 + 4.0}{10}$$

$$\bar{X} = 3.15$$

En este caso la media pasa de 3.47 a 3.15. ¿Por qué? Comenta ésto con tus compañeros de clase y tu asesor, relaciona lo anterior con el concepto de datos atípicos y escribe tus conclusiones en el siguiente espacio.



**B) Media aritmética para datos agrupados**

La mayoría de los datos agrupados están concentrados en tablas de frecuencias

Existen varios tipos de tablas de frecuencias y la siguiente tabla sólo presenta dos aspectos a considerar: el dato principal y la frecuencia con la que se repite.

La siguiente tabla de frecuencia muestra el número de preguntas de 81 encuestados sobre un Test que consta de sólo seis preguntas.

Preguntas Correctas	Personas
1	15
2	13
3	8
4	19
5	21
6	5

PASO 1: Realizamos la sumatoria del producto resultante de las clases por su frecuencia absoluta. Para efectos del cálculo de la media, deberíamos sumar 15 veces el valor 1, 13 veces el valor 2, 8 veces el valor 3, hasta llegar a la última clase:

$$\sum_{i=1}^{Nc} X_i \cdot f_i = 1 \cdot 15 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 19 + 5 \cdot 21 + 6 \cdot 5 = 276$$

Donde:

$Nc$  es el Número de clase

$X_i$  es la clase

$f_i$  es la frecuencia de cada clase

PASO 2: Dividir la sumatoria sobre el número total de datos.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{Nc} X_i \cdot f_i}{n} = \frac{276}{81}$$

$$\bar{X} = 3.41$$

En promedio los encuestados contestaron aproximadamente 3 preguntas buenas (el valor exacto es 3,41) .

Calcular la media para los datos distribuidos en la siguiente tabla de frecuencia:

Ni	Lm	Ls	f	Mc
1	40,0	48,1	3	44,1
2	48,1	56,1	8	52,1
3	56,1	64,1	11	60,1
4	64,1	72,1	32	68,1
5	72,1	80,1	21	76,1
6	80,1	88,1	18	84,1
7	88,1	96,1	14	92,1
8	96,1	104,0	1	100,1

Las marcas de clase representan a los intervalos de clase, por ejemplo, suponemos que la marca de clase para el primer intervalo (44.1) se repite 3 veces, al desconocer los 3 valores exactos que están dentro de dicho intervalo.

PASO 1: Realizar la sumatoria del producto resultante entre las marcas de clase por su frecuencia absoluta

$$\sum_{i=1}^{Nc} Mc_i f_i = 44.1 \cdot 3 + 52.1 \cdot 8 + 60.1 \cdot 11 + 68.1 \cdot 32 + 76.1 \cdot 21 + 84.1 \cdot 18 + 92.1 \cdot 14 + 110.1 \cdot 10$$

$$\sum_{i=1}^{Nc} Mc_i f_i = 7890.8$$

PASO 2: Dividir la sumatoria sobre el número total de datos.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{Nc} Mc_i f_i}{n} = \frac{7890.8}{108}$$

$$\bar{X} = 73.06$$

Ahora veamos una comparación entre el cálculo de la media aritmética para datos no agrupados y datos agrupados en tablas.

Calcula la media aritmética a los siguientes datos sin agrupar:

47.8    23.1    12.4    35.4    44.0    26.2    18.6    11.0    32.0    12.4    49.4    41.4  
 18.6    21.0    26.3    11.1    21.4    30.6    12.8    43.1    18.1    38.1    16.8    12.4  
 33.6    40.9    15.2    33.2    48.2    37.0

$$\bar{X} = \underline{\hspace{15em}}$$

$$\bar{X} =$$

Consideremos los mismos datos pero contenidos en la siguiente tabla y calculemos su media aritmética con el fin de comparar ambos resultados:

Ni	Lm	Ls	f	Mc
1	11,00	17,41	8	14,21
2	17,41	23,81	6	20,61
3	23,81	30,21	2	27,01
4	30,21	36,61	5	33,41
5	36,61	43,01	4	39,81
6	43,01	49,40	5	46,21
<b>Total</b>			<b>30</b>	

Realiza la sumatoria del producto resultante entre las marcas de clase por su frecuencia absoluta.

$$\sum_{i=1}^{Nc} Mc_i f_i =$$

Divide la sumatoria sobre el número total de datos.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} M c_i f_i}{n} =$$

$$\bar{X} =$$

Compara ambos resultados y comenta con tus compañeros y asesor el por qué de los resultados y anota tus conclusiones:

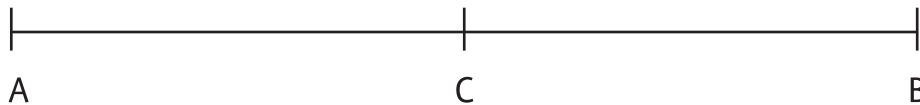


### 9.3 La Mediana

Es un valor que divide una serie de datos en dos partes iguales.

La cantidad de datos que queda por debajo y por arriba de la mediana son iguales.

La definición geométrica se refiere al punto que divide en dos partes a un segmento. Por ejemplo, la mediana del segmento AB es el punto C.



Existen entonces dos segmentos iguales:  $\overline{AC} = \overline{CB}$

#### A) Mediana para datos no agrupados

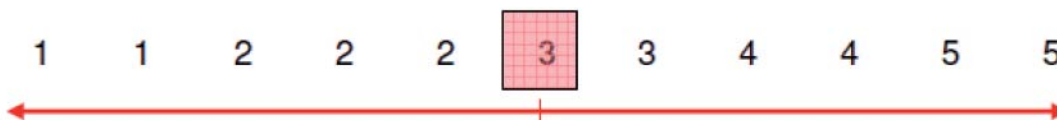
Calcularemos primero la Mediana para datos no agrupados (cantidad de datos impar)

4    1    2    3    4    2    2    1    5    5    3

Ordena los datos de forma ascendente.

1    1    2    2    2    3    3    4    4    5    5

Localiza el valor que divide en dos partes iguales el número de datos.



La mediana es 3, dejando 5 datos a cada lado.

Ahora calculemos la mediana para datos no agrupados (cantidad de datos par)

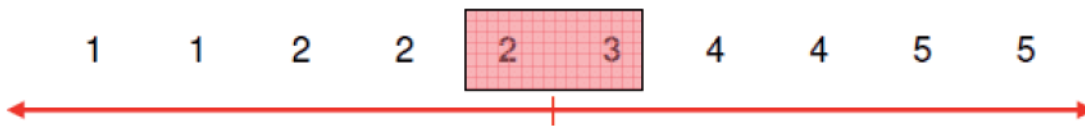
Modifiquemos el ejemplo anterior, eliminando el último dato. Encontrar la mediana:

4    1    2    3    4    2    2    1    5    5

Ordena los datos nuevamente de mayor a menor.

1    1    2    2    2    3    4    4    5    5

Localiza el valor que divide en dos parte iguales el número de datos.



El punto medio se encuentra entre dos valores: 2 y 3, por tanto, el valor de la mediana será 2.5

## B) Mediana para datos agrupados

Tomemos como ejemplo la siguiente tabla para determinar la media de atenciones médicas brindadas por un hospital, adicionando la columna de la frecuencia acumulada estudia el siguiente ejemplo junto con el resto de tu clase y con el apoyo de tu asesor para una mejor comprensión.

**Tabla de frecuencias reportadas por la clínica**

Clases (Datos en años)	Marca de clase $x_i$	Frecuencias de cada clase $f_i$	Frecuencias acumulada $f_{acumulada}$
$10 \leq x < 20$	15	8	8
$20 \leq x < 30$	25	20	28
$30 \leq x < 40$	35	14	42
$40 \leq x < 50$	45	8	50
$50 \leq x < 60$	55	2	52
$60 \leq x < 70$	65	2	54
$70 \leq x < 80$	75	1	55
		55 enfermos atendidos	

Determinemos el dato medio de los datos, como  $n = 55$  entonces  $n/2=27.5$

El intervalo mediano o la clase donde se encuentra la mediana se encuentra en la segunda clase.

$$Li = 20;$$

$$facum(i-1) = 8$$

$$f_{mediana} = 20$$

$$A = 10$$

Sustituyendo en la ecuación tendremos

$$Md = Li + \frac{\frac{n}{2} - facum(i-1)}{f_{mediana}} A$$

$$= 20 + \frac{\frac{55}{2} - 8}{20} 10 = 29.75$$

Por lo que se puede concluir que el 50% de las personas atendidas en un fin de semana por el hospital tienen una edad inferior a los 29.75 años.

## 9.4 La Moda

**Moda (Mo):** indica el valor que más se repite, o la clase que posee mayor frecuencia.

En el caso de que dos valores presenten la misma frecuencia, decimos que existe un conjunto de datos bimodal.

Para más de dos modas hablaremos de un conjunto de datos multimodal.

### A) Moda para datos no agrupados

Los siguientes datos provienen del resultado de entrevistar a 30 personas sobre la marca de gaseosa que más consume a la semana:

Marca 1 Marca 2 Marca 1 Marca 1 Marca 1 Marca 3  
 Marca 1 Marca 3 Marca 1 Marca 2 Marca 1 Marca 1  
 Marca 2 Marca 1 Marca 3 Marca 3 Marca 2 Marca 1  
 Marca 1 Marca 1 Marca 1 Marca 3 Marca 1 Marca 2  
 Marca 3 Marca 1 Marca 3 Marca 3 Marca 2 Marca 3

Primero determina las frecuencias de cada valor de la variable.

La marca 1 se repite 15 veces

La marca 2 se repite 6 veces

La marca 3 se repite 9 veces

La moda representa el valor que más se repite. En este caso es la marca 1.

Mo=Marca 1

## 9.5 Medias de Dispersión.

A los indicadores que vamos a estudiar ahora les llamamos medidas de dispersión, por cuanto que están referidos a la variabilidad que exhiben los valores de las observaciones, ya que si no hubiera variabilidad o dispersión en los datos interés, entonces no habría necesidad de la gran mayoría de las medidas de la estadística descriptiva

## 9.6 El Rango O Recorrido (R):

Es la medida de variabilidad más fácil de calcular. Para datos finitos o sin agrupar, el rango se define como la diferencia entre el valor más alto ( $X_n$  ó  $X_{\max.}$ ) y el más bajo ( $X_1$  ó  $X_{\min}$ ) en un conjunto de datos.

### A) Rango para datos no agrupados

$$R = X_{\max.} - X_{\min} = X_n - X_1$$

Se tienen las edades de cinco estudiantes universitarios de 1er año, a saber: 18, 23, 27, 34 y 25.  
Para calcular el rango se tiene que:

$$R = (X_n - X_1) = 34 - 18 = 16 \text{ años}$$

### B) Rango para datos agrupados

Con datos agrupados no se saben los valores máximos y mínimos. Si no hay intervalos de clases abiertos podemos aproximar el rango mediante el uso de los límites de clases. Se aproxima el rango tomando el límite superior de la última clase menos el límite inferior de la primera clase.

$$R = (\text{lim. Sup. de la clase } n - \text{lim. Inf. De la clase } 1)$$

Si se toman los datos del ejemplo resuelto al construir la tabla de distribución de frecuencia de las cuentas por cobrar de **Cabrera's y Asociados** que fueron los siguientes:

Clases	Mc $X_i$	$f_i$	fr	fa	fra
7.420 - 21.835	14.628	10	0.33	10	0.33
21.835 - 36.250	29.043	4	0.13	14	0.46
36.250 - 50.665	43.458	5	0.17	19	0.63
50.665 - 65.080	57.873	3	0.10	22	0.73
65.080 - 79.495	72.288	3	0.10	25	0.83
79.495 - 93.910	86.703	5	0.17	30	1.00
Total		30	1.00		

$$R = (\text{lim. Sup. de la clase } n - \text{lim. Inf. De la clase } 1) = 93.910 - 7.420 = 86.49$$

Por lo tanto el rango sería de 86.49

## 9.7 La Varianza ( $S_2$ ó $\sigma^2$ ):

La varianza es una medida de dispersión relativa a algún punto de referencia. Ese punto de referencia es la media aritmética de la distribución. Más específicamente, la varianza es una medida de que tan cerca, o qué tan lejos están los diferentes valores de su propia media aritmética. Cuando más lejos están las  $X_i$  de su propia media aritmética, mayor es la varianza; cuando más cerca estén las  $X_i$  a su media menos es la varianza. Y se define y expresa matemáticamente de la siguiente manera:

**A) La varianza para datos no agrupados**

Dado un conjunto de observaciones, tales como  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , la varianza denotada usualmente por la letra minúscula griega  $\sigma$  (sigma) elevada al cuadrado ( $\sigma^2$ ) y en otros casos  $S^2$  según otros analistas, se define como: el cuadrado medio de las desviaciones con respecto a su media aritmética"

Matemáticamente, se expresa como:

$$s^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Se tienen las edades de cinco estudiantes universitarios de 1er año, a saber: 18, 23, 25, 27, y 34. Al calcular la media aritmética, se obtuvo 25.4 años, encontrar la varianza de las edades de estos estudiantes:

Para calcular se utiliza una tabla estadística de trabajo de la siguiente manera:

$X_i$	$(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$
18	$(18 - 25.5) = -7.4$	$(-7.4)^2 = 54.76$
23	$(23 - 25.5) = -2.4$	$(-2.4)^2 = 5.76$
25	$(25 - 25.5) = -0.4$	$(-0.4)^2 = 0.16$
27	$(27 - 25.5) = 1.6$	$(1.6)^2 = 2.56$
34	$(34 - 25.5) = 8.6$	$(8.6)^2 = 73.96$
<b>Total</b>		<b>137.20</b>

$$s^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{137.20}{5} = 27.4$$

Por lo tanto la varianza de las edades es de 27.4 años

**B) La varianza para datos agrupados**

Si en una tabla de distribución de frecuencias. Los puntos medios de las clases son  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ; y las frecuencias de las clases  $f_1, f_2, \dots, f_n$ ; la varianza se calcula así:

$$s^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 f_i}{\sum f_i}$$

Se tienen los datos de una muestra de 30 cuentas por cobrar de la tienda Cabrera's y Asociados dispuestos en una tabla de distribución de frecuencias, a partir de los cuales se deberá calcular la varianza, para lo cual se construye la siguiente tabla estadística de trabajo donde los únicos datos dados inicialmente son las clases, las Marcas de Clase  $X_i$  y las frecuencias de cada clase, los otros se obtienen al seguir la fórmula, además se calculó anteriormente la media aritmética y se fijó en 43.458 .

<i>clases</i>	<i>Mc</i> $X_i$	$f_i$	$X_i - \bar{X}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(X_i - \bar{X})^2 f_i$
7.420 – 21.835	14.628	10	-28.83	831.1689	8311.689
21.835 – 36.250	29.043	4	-14.415	207.792225	831.1689
36.250 – 50.665	43.458	5	0	0	0
50.665 – 65.080	57.873	3	14.415	207.792225	623.376675
65.080 – 79.495	72.288	3	28.83	831.1689	2493.5067
79.495 – 93.910	86.703	5	43.245	1870.13003	9350.65013
<i>Total</i>		30	43.245	3948.05228	21610.3914

$$s^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 f_i}{\sum f_i} = \frac{21610.3914}{30} = 720.34$$

Por lo tanto la varianza es de 720.34

## 9.8 La Desviación Estándar ( $\sigma$ ó S)

Es una medida de la cantidad típica en la que los valores del conjunto de datos difieren de la media. Es la medida de dispersión más utilizada, se le llama también desviación típica. La desviación estándar siempre se calcula con respecto a la media y es un mínimo cuando se estima con respecto a este valor.

Se calcula de forma sencilla, si se conoce la varianza, se le saca la raíz cuadrada positiva de ésta. A la desviación se le representa por la letra minúscula griega "sigma"  $\sigma$  ó por la letra S mayúscula, según otros analistas.

Su cálculo es muy sencillo :

Desviación Estándar:  $\sigma = \sqrt{s^2}$  ó  $S = \sqrt{S^2}$

Del cálculo de la varianza de las edades de cinco estudiantes universitarios de primer año se obtuvo  $s^2=27.44$ , como la desviación estándar es la raíz cuadrada positiva, entonces  $\sigma = \sqrt{27.44} = 5.29$  años.

Igual procedimiento se aplica para encontrar la desviación estándar de las cuentas por cobrar de la Tienda Cabrera's y Asociados, recordemos que la varianza obtenida fue de 720.34, luego entonces la desviación estándar es igual a  $\sigma = \sqrt{720.34} = 26.83$  .



## ¿Qué he aprendido?



Una vez que has estudiado el bloque IX, es tiempo de reafirmar tus conocimientos, por lo tanto, realiza los siguientes ejercicios. En cada uno obtén los resultados que se te piden y da una breve explicación de cómo y por qué se comportan de esa forma los datos.

Para hacer estos ejercicios formen equipos de cuatro personas.

Si tienes alguna duda o pregunta recuerda que puedes acudir con tu asesor.

Compara tus resultados con los de tus compañeros

**1.-** Calcular la media, mediana y moda para los siguientes datos:

11    5    4    8    9    8    6    11    3    7    10    2  
7    3    8

**2.-** Determinar la media, mediana y moda a la siguiente tabla de frecuencia

INTERVALO	Lim. Inferior	Lim. Superior	Frecuencia f
1	100	150.1	1
2	150.1	200.1	2
3	200.1	250.1	15
4	250.1	300.1	16
5	300.1	350.1	21
6	350.1	400.1	14
7	400.1	450.1	11
8	450.1	400	7
Totales			87

**3.-** Para que un producto sea aceptado por su cliente principal, debe cumplir con ciertas especificaciones de calidad. Una de ellas, radica en que el promedio de longitud de los 20 primeros productos este entre 20.0 y 20.9 centímetros. Si las medidas son:

22.3    20.4    19.8    19.9    20.1    20.8    21.6    19.8    20.5    23.4    19.6    21.5    18.5    18.7  
20.9    21.1    20.1    21.5    22.3    17.9

¿Cumple en el proveedor con las especificaciones del cliente?

**4.-** Calcula la media, mediana y moda para los siguientes datos de forma no agrupada y agrupada al final compara los resultados da una conclusión de los datos obtenidos:

22.1    44.4    32.1    56.0    29.4    37.7    32.3    29.0    30.5    45.3    20.7    15.6  
41.1    41.2    39.5    20.8    34.1    31.8    21.9    47.0    25.6

5.- Los ingresos en pesos por hora de 30 hombres elegidos al azar se muestran a continuación:

45.16 79.85 76.91 88.91 62.59 88.61 68.89 54.33 16.60 19.92 19.48 6.37  
 58.42 56.70 37.25 83.61 22.07 65.73 99.49 34.20 41.50 92.22 53.20 62.59  
 58.00 77.41 47.10 42.16 91.46 45.40

- Calcula la media aritmética para todos los datos sin agruparlos.
- Calcula la media aritmética empleando la tabla de frecuencias.
- ¿Cuáles crees que son las razones de las diferencias entre ambas medias?
- ¿Explica mediante este ejemplo, la diferencia entre media, mediana y moda?
- ¿Qué representa para tí la moda y mediana (en término de pesos)?

6.- Calcula el rango, la varianza y la desviación estándar de las observaciones que se presentan a continuación.

63 45 39 55 69 21 50 25 33 25

7.- Un profesor hace un examen a tres estudiantes y las puntuaciones resultantes ( $X_i$ ) son: 73, 75 y 77.

- Hallar la media, la varianza y la desviación estándar de esta población de valores.
- En la clase había un calor terrible, y hubo alarma por la amenaza de incendio durante el examen. El profesor quisiera aumentar las puntuaciones para tener en cuenta estas condiciones desafortunadas de ambientación. Un primer aumento suma 10 puntos a cada puntuación. Encuentra los nuevos valores.
- Un segundo aumento incrementa cada puntuación en un 10%. Encuentra los nuevos valores.

Analiza e infiere que pasa con respecto a los valores originales y a los obtenidos con los aumentos da una conclusión

8.- La distribución de frecuencias que se presenta a continuación muestra el tiempo que se necesita para envolver 130 paquetes que fueron enviados por correo en Macondo.

Calcula el rango, la varianza y la desviación estándar de la siguiente distribución de frecuencias de los datos:

<i>Tiempo (en minutos)</i>	<i>No. de paquetes envueltos</i>
0.5 a menos de 1.0	6
1.0 a menos de 1.5	12
1.5 a menos de 2.0	30
2.0 a menos de 2.5	42
2.5 a menos de 3.0	28
3.0 a menos de 3.5	12
<b>Total</b>	130

9.- El siguiente cuadro muestra la distribución de la renta anual (en miles de pesos) en que incurren 50 viviendas:

Marca de Clase	18.85	21.55	24.25	26.95	29.65	32.35	35.05
Nº de Viviendas	3	2	7	7	11	11	9

Encuentra e interprete el resultado de:  
Media, mediana y moda, Varianza y Desviación estándar.

**10.-** Una compañía requiere los servicios de un técnico especializado. De los expedientes presentados, se han seleccionado 2 candidatos: Antonio y Braulio, los cuales reúnen los requisitos mínimos requeridos. Para decidir cuál de los 2 se va a contratar, los miembros del Jurado deciden tomar 7 pruebas a cada uno de ellos.

Los resultados se dan a continuación:

	Prueba						
	1	2	3	4	5	6	7
Puntaje obtenido por Antonio	57	55	54	52	62	55	59
Puntaje obtenido por Braulio	80	40	62	72	46	80	40

- Halla e interpreta la media, mediana y moda de los dos candidatos.
- Estadísticamente ¿Cuál de los candidatos debe ser contratado? Fundamenta tu respuesta.

**11.-** El DIF desea saber cuál es el índice de natalidad en 2 municipios del estado de México, para lo que encuestó a 10 familias de cada municipio con los siguientes resultados

	Número de hijos por familia									
	3	4	1	4	2	3	1	5	4	3
<b>Ecatepec</b>	3	4	1	4	2	3	1	5	4	3
<b>Toluca</b>	0	6	1	2	3	1	4	3	6	4

- Calcule la media, mediana y moda para cada municipio e interpréталos
- ¿Consideras que en el municipio de Ecatepec, el número de hijos por familia es más uniforme que en el municipio de Toluca?

Quiero saber más



Sabias que la estadística se divide en dos tipos la descriptiva y la inferencial.

### 1.- Estadística descriptiva

La estadística descriptiva se refiere a la parte del estudio que incluye la obtención, organización, presentación y descripción de la información numérica.

### 2.- Estadística inferencial

La estadística inferencial es una técnica mediante la cual se obtiene generalizaciones o se toman decisiones en base a una información parcial o incompleta obtenida mediante técnicas descriptivas.

#### Campo de aplicación:

En la actualidad se aplica en las ciencias sociales, en las ciencias naturales. (físicas, meteorológicas) en la industria (Producción y control de calidad) en la administración industrial (Recursos humanos, materiales, tiempos y movimientos etc.) en la economía, en las finanzas (inversiones, bolsas de valores), en la agricultura (periodo de siembra, calendario de lluvia), en el comercio, en la educación, en la medicina, etc.

**La Estadística responde a las necesidades bélicas y fiscales de los gobernantes.** Ésto se puede conseguir con un conocimiento claro de la población con la que se cuenta. La herramienta es el CENSO DE POBLACIÓN y su hermano pequeño, el PADRÓN MUNICIPAL DE HABITANTES.

La práctica del recuento de la población y de algunas características de esta por los Estados es muy antigua (se remonta a 3000 años antes de Cristo en Egipto y Mesopotamia). En palabras de Bielfed, la Estadística es la ciencia que nos enseña el ordenamiento político de todos los estados del mundo conocido, es decir, está al servicio del Estado, de hecho, la palabra Estadística deriva de Estado.

**La Estadística responde a la actividad planificadora de la sociedad.** Con la Revolución Industrial aparecen nuevos problemas, sobre todo de desigualdades sociales. La Estadística es un instrumento para identificar estas injusticias y para producir información en el llamado Estado del Bienestar.

La Estadística responde a nuevas demandas sociales. Para realizar investigaciones exhaustivas sobre temas sociales surgen tres problemas básicos a la hora del trabajo de campo, como el tiempo que tardaríamos en entrevistar a toda la población y el costo económico y de personal de estas entrevistas. Con las técnicas de MUESTREO se consigue hacer buenas investigaciones sobre una pequeña parte de esa población, obteniendo resultados válidos para toda ella.

**La Estadística responde a las necesidades del desarrollo científico y tecnológico de la sociedad.** Tras la Revolución Industrial se produce un desarrollo de la sociedad en todos sus ámbitos y, en particular, en el Científico y Tecnológico. Las Comunicaciones, la Industria, la Agricultura, la Salud... se desarrollan rápidamente y se exige el máximo rendimiento y la mejor utilización de estos sectores.

Las técnicas de **Investigación de Mercados** permiten saber si un producto cualquiera será bien acogido en el mercado antes de su salida a este, o bien medir la audiencia en Televisión y Radio.

El **Control de Calidad** permite medir las características de la calidad de un producto, compararlas con ciertos requisitos y tomar decisiones correctivas si hay diferencias entre el funcionamiento real y el esperado. Con estudios estadísticos aplicados a la Agricultura y a la Pesca podemos estimar los rendimientos obtenidos en una cosecha, o encontrar bancos de peces.

En **Medicina e Investigación** farmacológica es imprescindible la Estadística, probando nuevos tratamientos en grupos de pacientes, o bien, obteniendo conclusiones sobre ciertas enfermedades observando durante un tiempo un grupo de pacientes (saber si para el tratamiento de cierto tipo de cáncer es más efectiva la cirugía, la radioterapia o la quimioterapia, sin más que observar un grupo de pacientes tratados con estas técnicas).

Con el estudio de los **Procesos Estocásticos** se puede tener una mejor comprensión de fenómenos de comportamiento aleatorio como meteorología, física nuclear, campañas de seguridad...



¿Qué voy a aprender?



## BLOQUE X.

### EMPLEA LOS CONCEPTOS ELEMENTALES DE PROBABILIDAD

#### UNIDAD DE COMPETENCIA

» Construye e interpreta modelos que representan fenómenos o experimentos de manera probabilística, a través de la aplicación de la probabilidad clásica así como de las reglas de la suma y del producto. Cuantifica y representa magnitudes mediante la representación en tablas y gráficas de información proveniente de diversas fuentes. Interpreta y comunica la información contenida en tablas y gráficas.

En la vida cotidiana, por ejemplo cuando lanzas una moneda al aire en un "volado" con los amigos, o cuando tiras un par de dados en un juego, cuando sacas una baraja al azar, cuando metes la mano en una ánfora para sacar un boleto para una rifa o cuando lanzas un dardo esperando dar en el centro, etc. tienen que ver con **probabilidades y estadísticas**, o en otras palabras, todos aquellos eventos en los que existan elementos aleatorios, al azar, basados en información previa que señale patrones y similitudes que permitan predecir un suceso o resultado.

Estas dos disciplinas de las matemáticas, están íntimamente ligadas entre sí, como lo podrás notar en los ejemplos y ejercicios que se encuentran más adelante en este Bloque X.

¿Qué aprendo?



La probabilidad es una parte de las matemáticas que más aplicaciones en la vida cotidiana tiene y, por lo tanto, es necesario reconocer que no sólo se trata de números, sino que también cuenta con características y propiedades que te permitirán interpretar diversos sucesos cotidianos.

## 10.1 Eventos deterministas y aleatorios

Si dejamos caer una piedra o la lanzamos, y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, etc., sabremos con seguridad dónde caerá, cuánto tiempo tardará, etc. Es una experiencia determinista. Si echamos un dado sobre una mesa, ignoramos qué cara quedará arriba. El resultado depende del azar. Es una **experiencia aleatoria**.

La vida cotidiana está plagada de sucesos aleatorios. Muchos de ellos, de tipo sociológico (viajes, accidentes, entre otros); aunque son suma de muchas decisiones individuales, pueden ser estudiados, muy ventajosamente, como aleatorios.

Experimentos o fenómenos aleatorios: son los que pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado en la realización del experimento.

Suceso aleatorio: es un acontecimiento que ocurrirá o no, dependiendo del azar.

Sin embargo, no todos los resultados son al azar, pues si un experimento es cualquier proceso, entonces los resultados pueden tomar cualquier tipo de valor. Por esta razón, se define como experimento aleatorio al proceso en el que se pueden predecir con certeza la ocurrencia de sus eventos, con excepción del seguro o del imposible. Hay que hacer la observación de que esta definición habla en términos generales y no específicamente sobre un experimento.

En cambio, a un experimento no aleatorio se le denomina experimento determinístico porque para que suceda no depende del azar.

Como se puede uno imaginar, existen eventos que siempre, no importa el número de experimentos o su situación, ocurren, y en cambio existen otros que nunca suceden. Los que siempre ocurren son los eventos seguros, y los que nunca son los eventos imposibles pero a ambos se les puede reconocer como eventos determinísticos.

De acuerdo con la lectura anterior menciona 5 ejemplos de eventos probabilísticos y 5 eventos determinísticos.

Probabilísticos:

- 1) \_\_\_\_\_
- 2) \_\_\_\_\_
- 3) \_\_\_\_\_
- 4) \_\_\_\_\_
- 5) \_\_\_\_\_

Determinísticos:

- 1) \_\_\_\_\_
- 2) \_\_\_\_\_
- 3) \_\_\_\_\_
- 4) \_\_\_\_\_
- 5) \_\_\_\_\_

## 10.2 Espacio Muestral

A la colección de resultados que se obtiene en los experimentos aleatorios se le llama espacio muestral.



Espacio muestral es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. En adelante lo designaremos por E.

Por ejemplo: Si se tiene un dado cualquiera, el espacio muestral (EM) es  $EM = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Si existen más de una variable, el espacio muestral está formado por las combinaciones de valores de cada una de las variables.

A aquella variable que está asociada a un experimento de este tipo se le denomina **variable aleatoria**. Cuando hablamos de varios eventos dentro del mismo experimento se pueden dar varios casos. Si dos o más eventos no pueden ocurrir simultáneamente, se llaman **eventos mutuamente excluyentes**, es decir, ocurre el primero o el segundo pero no los dos al mismo tiempo.

Por otro lado, en ocasiones un evento o más eventos dependen de otro previo, es decir, un evento A ocurre dado que ocurrió un evento B. Si existe este tipo de relación entre eventos se dice que son **eventos dependientes o condicionados** (el evento A depende del evento B, o el resultado del evento A está condicionado al resultado del evento B). Por otro lado, si no existe tal relación entre eventos se dice que son **eventos independientes**.

Reúnete en parejas y describan el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios al finalizar intercambien opiniones con el resto del grupo y su asesor:

- a. Lanzar tres monedas.
- b. Lanzar tres dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.
- c. Extracción de dos bolas de una urna que contiene cuatro bolas blancas y tres negras.

Espacio Muestrales.



## 10.3 Probabilidad Clásica

La probabilidad clásica de un evento  $E$ , que denotaremos por  $P(E)$ , se define como el número de eventos elementales que componen al evento  $E$ , entre el número de eventos elementales que componen el espacio muestral:

$$P(E) = \frac{\text{número de eventos elementales del evento } E}{\text{número de eventos elementales del espacio muestral}}$$

Es la definición más utilizada porque supone de antemano, y se necesita como requisito indispensable, que todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Ahora consideremos el experimento de lanzar dos monedas al mismo tiempo.

El espacio muestral sería  $\{AS, SA, SS, AA\}$

Considera el evento de que salga un y solo un SOL.

Por lo tanto 
$$P(sol) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = .5 = 50\%$$

Las probabilidades se pueden representar en forma de fracciones, pero también las puedes expresar como decimales o porcentajes.

Veamos otro ejemplo:

En una baraja española hay 40 cartas las cuales se dividen en Oros, Bastos, Espadas y Copas y están numeradas del 1 al 7 y del 10 al 12 (no consideran los números 8 y 9) ¿cuál es la probabilidad de sacar un 1?, ¿Y de sacar OROS?

$$P(1) = \frac{\quad}{\quad} = \quad = \quad \%$$

$$P(Oros) = \frac{\quad}{\quad} = \quad = \quad \%$$

Se lanzan dos dados equilibrados con seis caras marcadas con los números del 1 al 6.

a) Halla la probabilidad de que la suma de los valores que aparecen en la cara superior sea múltiplo de tres.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los valores obtenidos difieran en una cantidad mayor de dos?

Primero encontramos su espacio muestral

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	( , )	( , )	( , )	( , )	( , )
2	( , )	( , )	( , )	( , )	( , )	( , )
3	( , )	( , )	( , )	( , )	(3,5)	( , )
4	( , )	( , )	( , )	( , )	( , )	( , )
5	( , )	( , )	( , )	( , )	( , )	( , )
6	( , )	( , )	( , )	(6,4)	( , )	( , )





Retomando los conceptos de eventos dependientes o condicionales, se va a definir la **probabilidad condicional** como sigue:

**Propiedad 4.** La probabilidad de que ocurra un evento A dado que ocurrió el evento B (el evento A depende del evento B), denotado  $P(A/B)$  es:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Hay que notar que esta propiedad no es conmutativa  $P(A/B) \neq P(B/A)$ .

Finalmente, el criterio para la independencia de eventos queda como sigue:

**Propiedad 5.** Dos eventos A y B son independientes sí y sólo sí

$$P(A|B) = P(A) \text{ y } P(B|A) = P(B) \text{ o, que es lo mismo: } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Para ejemplificar las propiedades anteriores resolvamos unos ejemplos.

Sean A y B dos sucesos aleatorios con:

$$P(A) = \frac{3}{8} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Hallar

1.-  $P(A \cup B)$  donde usaremos la propiedad 1

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

2.-  $P(A')$  usamos la propiedad 2

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

3.-  $P(B')$  usamos la propiedad 2

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4.-  $P(A/B)$  usamos la propiedad 4

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Analicemos ahora las mismas propiedades pero aplicadas a casos prácticos, si en algún momento te surgen dudas acude con tu asesor.

1.-Aerolíneas Argentinas acaba de proporcionar la siguiente información de sus vuelos de Ciudad de México a Sonora:

Llegada	Frecuencia
Antes de tiempo	100
A tiempo	800
Demorado	75
Cancelado	25
Total	1000

Si A es el evento de que un vuelo llegue antes de tiempo, entonces

$$P(A) = 100 / 1000 = 0.1.$$

Si B es el evento de que un vuelo llegue demorado, entonces

$$P(B) = 75 / 1000 = 0.075.$$

La probabilidad de que un vuelo llegue antes de tiempo o demorado es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = .1 + .075 = 0.175.$$

Notaste que usamos la propiedad 2 y no la propiedad 1. ¿Por qué? ¿Tendrá que ver con el tipo de eventos? Comenta ésto con tus compañeros y asesor y da una breve explicación.

Si C es el evento de que un vuelo llegue a tiempo, entonces

$$P(C) = 800 / 1000 = 0.8.$$

Si D es el evento de que un vuelo sea cancelado, entonces

$$P(D) = 25 / 1000 = 0.025.$$

Busquemos la probabilidad de que un vuelo llegue antes de tiempo (A) o demorado (B). La regla del complemento se utiliza para determinar la probabilidad de que ocurra un evento restando del número 1 la probabilidad de que un evento no ocurra.

$$P(\text{antes o demorado}) = 1 - P(\text{a tiempo o cancelado})$$

Y con fórmula

$$P(A \cup B) = 1 - P(C \cup D) = 1 - [.8 + .025] = .175$$

Comenta con tus compañeros los resultados obtenidos y anota tus conclusiones



En una muestra de 500 estudiantes, 320 dijeron tener un estéreo, 175 dijeron tener una TV y 100 dijeron tener ambos:

Si un estudiante es seleccionado aleatoriamente,  
¿Cuál es la probabilidad de que tenga sólo un estéreo, sólo una TV y uno de cada uno?

$P(S) =$

$P(T) =$

$P(S \text{ y } T) =$

Si un estudiante es seleccionado aleatoriamente,  
¿Cuál es la probabilidad de que tenga un estéreo o una TV en su habitación?

$P(S \cup T)$



### ¿Qué he aprendido?

Realiza los siguientes ejercicios pero tendrás que hacerlo en equipos de 5 personas como máximo.

Deberás exponer tus resultados y conclusiones ante el grupo y tu asesor al final para ver que tan buen manejo de la información posees, ten en cuenta la claridad de tus explicaciones, tu presentación en cuanto a material visual y sobretodo que hallas llegado a la respuesta correcta.

**1.-** Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, una verde y otra negra. Describe el espacio muestral si:

- a) La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda
- b) La primera bola no se devuelve.

2.- Una urna tiene ocho bolas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extrae una al azar. Calcula la probabilidad de que:

- a) Sea roja
- b) Sea verde
- c) Sea amarilla
- d) No sea roja
- e) No sea amarilla

3.- Una urna contiene tres bolas rojas y siete blancas. Se extraen dos bolas al azar. Escribe el espacio muestral si:

- a) Hay reemplazamiento
- b) No hay reemplazamiento

4.- En una clase hay 10 alumnas rubias, 20 morenas, 5 alumnos rubios y 10 morenos, encuentra la probabilidad de que al elegir a un alumno al azar sea:

- a) Hombre
- b) Mujer morena
- c) Hombre o Mujer

5.- Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Calcula:

- a) La probabilidad de que salga el 7
- b) La probabilidad de que el número obtenido sea par
- c) La probabilidad de que el número obtenido sea múltiplo de tres.

6.- Se lanzan tres dados. Encuentra la probabilidad de que:

- a) Salga 6 en todos
- b) Los puntos obtenidos sumen 7

7.- hallar la probabilidad de que al levantar unas fichas de domino se obtenga un número de puntos mayor que 9 o que sea múltiplo de 4

8.- Busca la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

- a) Un número par.
- b) Un múltiplo de tres.
- c) Mayor que cuatro.

9.- Hallar la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas, salgan:

- a) Dos caras.
- b) Dos cruces.
- c) Una cara y una cruz.

10.-En un sobre hay 20 papeletas, ocho llevan dibujado un coche las restantes son blancas. Hallar la probabilidad de extraer al menos una papeleta con el dibujo de un coche:

- a) Si se saca una papeleta.
- b) Si se extraen dos papeletas.
- c) Si se extraen tres papeletas.

11.-Los estudiantes A y B tienen respectivamente probabilidades  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{1}{5}$  de suspender un examen. La probabilidad de que suspendan el examen simultáneamente es de  $\frac{1}{10}$ . Determinar la probabilidad de que al menos uno de los dos estudiantes suspenda el examen.

12.- Una clase consta de 10 hombres y 20 mujeres; la mitad de los hombres y la mitad de las mujeres tienen los ojos castaños. Determinar la probabilidad de que una persona elegida al azar sea un hombre o tenga los ojos castaños.

13.-La probabilidad de que un hombre viva 20 años es  $\frac{1}{4}$  y la de que su mujer viva 20 años es  $\frac{1}{3}$ . Se pide calcular la probabilidad:

- a) De que ambos vivan 20 años.
- b) De que el hombre viva 20 años y su mujer no.
- c) De que ambos mueran antes de los 20 años.

14.-Chris posee dos inventarios independientes uno de otro. La probabilidad de que el inventario A aumente su valor el próximo año es .5. La probabilidad de que el B aumente el suyo es .7

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos aumenten su valor el próximo año?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno aumente su valor el próximo año (esto implica que cualquiera de los dos o ambos aumenten)?



### Quiero saber más

#### El azar y los dados



El desarrollo lúdico de una civilización es un inteligente modo de acercarnos a su historia, sus costumbres y sus normas sociales. El juego, instancia por excelencia en que se **combinan esparcimiento y aprendizaje**, puede introducirnos en el maravilloso mundo del entretenimiento. Lo lúdico siempre queda impregnado en la cultura y deja su huella marcada en muchos aspectos de ella. Se esparce eficientemente **hacia aspectos insospechados**

Los dados (con una génesis ubicada geográficamente en Asia) y su historia son un ejemplo tangible de cómo los juegos de azar nacen empapados de particularidades regionales (**originalmente se construían en marfil y hueso**), se propagan y difunden, adaptándose, a través de los intersticios de la cultura y el lenguaje, pero al mismo tiempo, produciendo impactos y modificaciones tanto en la una como en el otro.

Su denominación en la antigua Roma (**álea**), por caso, resultó clave para la fundación de una palabra hoy día corriente: **aleatorio**. Es así que el concepto de dado y suerte se funden de un modo prácticamente irrevocable. Tirar un dado es, sin dudas, el ejemplo **paradigmático** de lo que la suerte es en sí.

# RESPUESTAS

## BLOQUE I

- c
- d
- b
- c
- a
- b
- e
- b
- c
- d
- a
- b
- e
- a
- b
- e
- a
- e
- A= 77, •=103
- 

A	B	C	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
36	46	98	144	134	82
127	32° 35'	20° 25'	53	147° 25'	159° 35'
60	35	85	120	145	95
120° 5'	144° 44'	34° 44'	59° 55'	35° 11'	145° 16'

- 1=65, 2=81,3=34
- 1=69, 2=63,3=48, 4=132

## BLOQUE II

- d
- e
- e
- postulado LAL
- postulado ALA
- postulado LLL

## BLOQUE III

- d
- b
- 4.85m
- 31m
- 225 m



- 6. 7.22 m
- 7. 45 m

**BLOQUE IV**

- 1. c
- 2. b
- 3. I-a,d,f,h; II-b,c,e,g
- 4. I-a,II-b,III-c
- 5. e
- 6. c
- 7. I-c,III-b,IV-a,V-d,VI-e
- 8. d
- 9. c
- 10. b
- 11. A-108,B-120,C-135
- 12. A-7,B-3,C-4
- 13. A-40,B-25,C-13
- 14. A-1254,B-18,C-600
- 15. \$5760
- 16. d
- 17. d

**BLOQUE V**

- 1. c
- 2. b
- 3. e
- 4. d
- 5. a
- 6. d
- 7. b
- 8. a
- 9. e
- 10. b
- 11. d
- 12. c
- 13. a
- 14. d
- 15. a
- 16. b
- 17. d
- 18. a
- 19. c
- 20. e
- 21. a
- 22. e
- 23. 1-g, 2-f, 3-l, 4-j, 5-p, 6-c, 7-a, 8-b, 9-h, 10-d, 11-i, 12-q, 13-e, 14-k, 15-m, 16-n

## BLOQUE VI

1. c
2. b
3. b
4. c
5. d
6. b

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

7.  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}$$

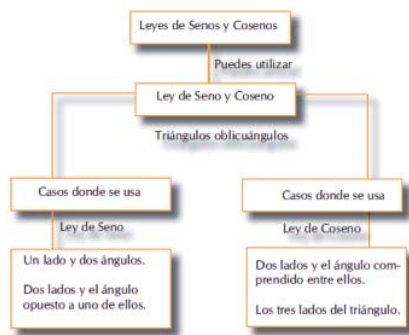
$$\tan \theta = 2$$

8. 746.4
9. 3549.45 m
10. distancia horizontal= 8095m distancia de recorrido 8233 m
11. h=6.8 m
12. b=3.55, c=1.85, C=27° 30'
13. a=19.21 B=38° 39' C=51° 21'

## BLOQUE VII

1. e
2. c
3. a
4. d
5. c
6. d
7. b
8. d
9. b
10. d
11. c
12. v
13. f
14. v
15. v
16. f
17. v
18. v
19. f
20. v

- 21. f
- 22. v
- 23. v
- 24. f
- 25. v
- 26. v
- 27. v
- 28. v



- 1.
- 2. ley de cosenos, ley de senos, ley de senos, ley de cosenos
- 3. 1-e,2-f,3-a,4-c,5-d,6-b
- 4. d
- 5. d
- 6. d
- 7. c
- 8. d
- 9. b
- 10. d
- 11. b
- 12. a
- 13. d
- 14. b
- 15. a
- 16. d
- 17. a
- 18. a
- 19.  $a = 24.78, B = 20.74^\circ, C = 26.26^\circ$
- 20.  $c = 66.07, A = 73.68^\circ, C = 67.37^\circ$
- 21.  $b = 76.07, A = 73.52^\circ, C = 32.78^\circ$
- 22.  $b = 30.51, c = 39.47, B = 48^\circ$
- 23.  $A = 82.81^\circ, B = 41.40^\circ, C = 55.79^\circ$
- 24.  $b = 61.50, A = 29.24^\circ, B = 45.26^\circ$
- 25.  $c = 49.98, A = 52.40^\circ, C = 29.5^\circ$
- 26.  $c = 12.01, A = 24.33^\circ, C = 20.67^\circ$
- 27.  $a = 19.84, b = 52.80, A = 19^\circ$
- 28.  $c = 13.74, A = 70.84^\circ, B = 49.14^\circ$
- 29. 109.28
- 30. 142.93 m



## Matemáticas II

Cuadernillo de actividades de Aprendizaje

Derechos Reservados

Número de registro en trámite

2006 Secretaría de Educación Pública/Dirección General del Bachillerato

