

MATEMATICAS

 \times $=$ $\frac{2}{4}$ $\sqrt{\quad}$ \div $+$

21

**NUMEROS
REALES**



SENA

SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE
MINISTERIO DE TRABAJO Y SEGURIDAD SOCIAL

SENA
DIRECCION GENERAL
SUBDIRECCION TECNICO PEDAGOGICA

NUMEROS REALES

Bogotá, 19 de julio de 1982

CONTENIDO

OBJETIVO TERMINAL	5
Números reales	7
Adición	16
Sustracción	22
Multiplicación de números reales	28
División de los números reales	29
EVALUACION FINAL	40

OBJETIVO TERMINAL

Al finalizar esta Unidad, usted será capaz de:

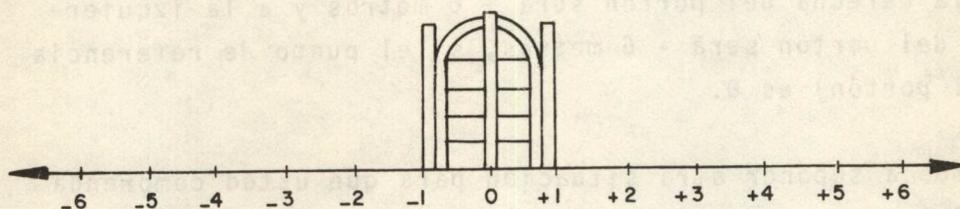
1. Representar con números reales, magnitudes que pueden variar en dos sentidos (positivo y negativo)
2. Adicionar números reales del mismo signo y de signos diferentes.
3. Sustraer números reales
4. Multiplicar números reales
5. Dividir números reales

NUMEROS REALES

NOCION

Para que usted comprenda mejor este asunto, vamos a suponer la siguiente situación:

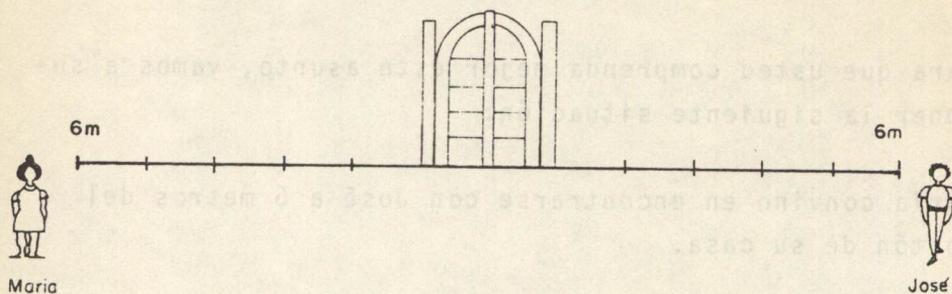
María convino en encontrarse con José a 6 metros del portón de su casa.



¿Es posible que se encuentren fácilmente?

No, porque José debió haber explicado si los 6 metros se contaban hacia la izquierda o hacia la derecha del portón, y es posible que ella se coloque en situación opuesta, como muestra el dibujo.

Hay varios modos de representar la situación. Si tomamos una recta numerada (metrizada) con un origen, que en este caso será el portón. Así:



A la derecha del portón será + 6 metros y a la izquierda del portón será - 6 metros, si el punto de referencia (el portón) es 0.

Vamos a suponer otra situación para que usted comprenda mejor.

Pensemos en un juego. Usted sabe que en un juego hay puntos perdidos y puntos ganados. Tomamos como referencia:

Señal positiva (+) para indicar puntos ganados.

Señal negativa (-) para indicar puntos perdidos.

Supongamos que usted ya ha comenzado a jugar con su compañero y que aún no se anota ningún punto; entonces, tanto él como usted están:

0 (cero) puntos

En el momento en que su adversario tiene un punto perdido, representado por -1 , usted tendrá un punto ganado, representado por $+1$.

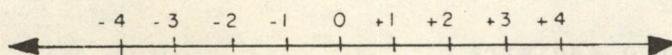
Si el adversario tiene -2 usted tendrá $+2$.

Complete entonces:

Si su adversario tiene -3 , usted tendrá _____

Si su adversario tiene ____ usted tendrá $+4$,
y así sucesivamente.

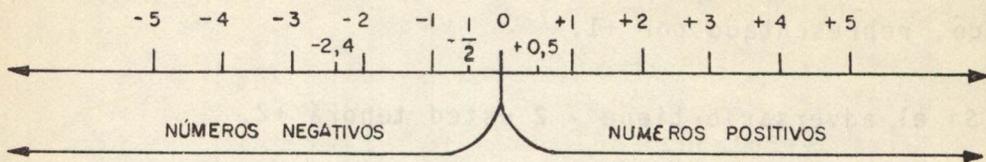
La forma más cómoda de representar esta situación, es también la recta numérica.



Los números indicados se extienden indefinidamente, tanto para el lado derecho, como para el izquierdo, constituyendo el conjunto de números reales.

Luego, los números positivos son los mayores que el cero y los números negativos son los menores que el cero.

Observe esta representación:

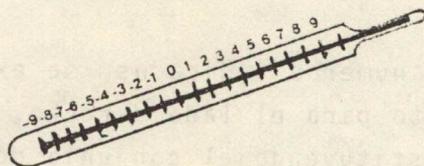


Usted encuentra aplicación de los números reales en cualquier situación en que aparecen variaciones en sentidos opuestos, como por ejemplo: Temperatura, caminar con relación a un punto, hacia arriba o hacia abajo, el dinero se divide en tener, en no tener y en deber, etc.

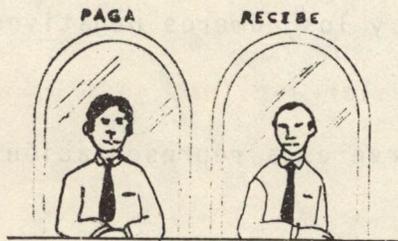
De ahí que:

- Un termómetro registra temperaturas por encima de cero, luego serán:

positivos/negativos
o por debajo de cero; en
este caso serán -----
----- en relación al
al cero de la escala.

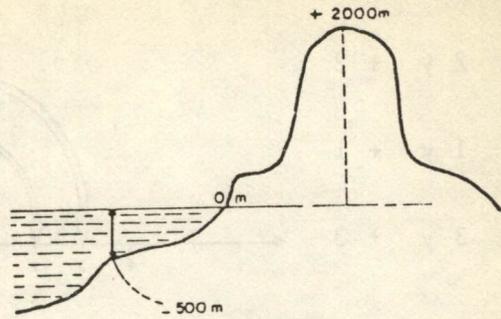


- Las transacciones comerciales constan de créditos, o sea, las ----- y de débitos, o sea, las

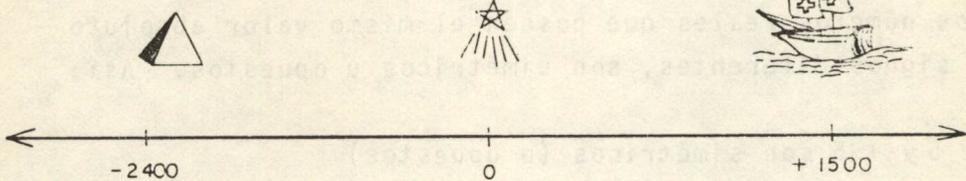


negativas.

- Las altitudes (por encima o por debajo del nivel del mar) son marcadas empleando números positivos o



- Los datos de los acontecimientos históricos, antes y después de Cristo, también pueden ser representados con números reales, así:



Valor absoluto de un número real, es el valor del número sin tener en cuenta el signo.

Ejemplo:

El valor absoluto de -3 es 3 $|-3|=3$

El valor absoluto de +8 es $|\quad|$; $|\quad|=$

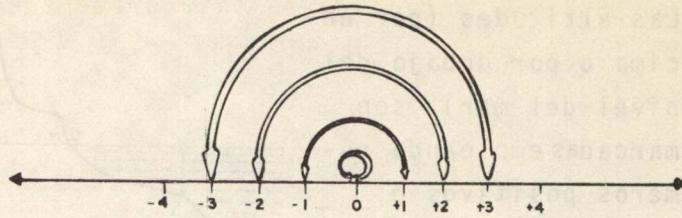
El $|\quad|$ de $-\frac{5}{8}$ es $\frac{5}{8}$; $|\quad|=$

Los pares de números reales, tales como:

- 2 y + 2

- 1 y + 1

- 3 y + 3



que corresponden a puntos situados a igual distancia del origen 0, y en semi-rectas opuestas, son denominados SIMÉTRICOS u OPUESTOS.

Podemos también decir que:

Dos números reales que poseen el mismo valor absoluto y signos diferentes, son simétricos u opuestos. Así:

- 5 y + 5 son simétricos (u opuestos)

- $\frac{1}{3}$ y + $\frac{1}{3}$ son simétricos (u opuestos)

- 0,9 y _____ son simétricos (u opuestos)

Ahora escriba en orden creciente (de menor a mayor).

- 8, + 104, $-\frac{5}{3}$ ó + 1 $\frac{1}{2}$ + 68, - 1

Respuestas: _____

Por convención, los números positivos pueden tener el signo positivo entendido en la representación. Así:

+ 3 es lo mismo que 3

+ 0,7 es lo mismo que _ _ _

_ _ _ _ es lo mismo que $\frac{1}{4}$

Ejercicios de refuerzo:

1. Escriba en los paréntesis V cuando sea verdadero y F cuando sea falso.

() Los números de la derecha del cero son negativos.

() Los números de la izquierda del cero son afectados por el signo menos.

() No se escribe + 0, tampoco - 0

() Cualquier número positivo es mayor que cero.

() Cualquier número negativo es menor que cero

() El número - 7 es mayor que cero

() El número + 15 es mayor que - 20

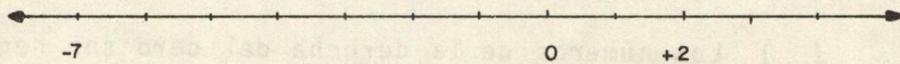
2. Coloque el signo de calificación, considerando las piezas defectuosas como negativas y las piezas perfectas como positivas.

7 piezas defectuosas _ _ _ _ _

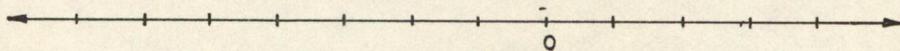
17 piezas defectuosas _ _ _ _ _

5 piezas perfectas _ _ _ _ _

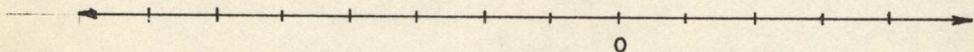
3. Represente en la recta siguiente, los números -6 -5, -4, -3, -2, -1 y los simétricos.



4. Escriba los números enteros negativos comprendidos entre -6 y -2 (inclusive). Representélos en la recta.



5. Escriba los números enteros positivos comprendidos entre -2 y +4 (inclusive). Representélos en la recta.



6. Represente con números positivos o negativos o con cero, las siguientes temperaturas en grados centígrados ($^{\circ}\text{C}$)

- a) 8 bajo cero
- b) 41 a la sombra
- c) Agua hirviendo
- d) Agua helada

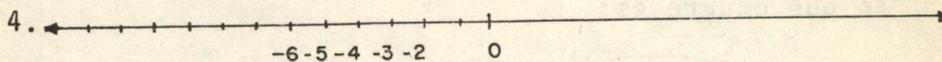
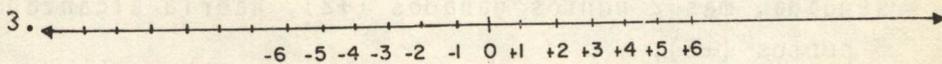
7. Ahora represente:

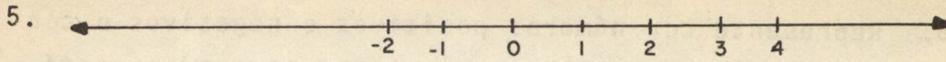
- a) Débito de \$500
- b) Crédito de \$180
- c) Situación a paz y salvo.

Antes de continuar con los números reales, corrija sus respuestas:

1. (F) (V) (V) (V) (V) (F) (V)

2. - 7; -17; +5





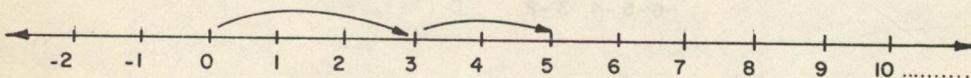
6. a) -8°C
 b) $+41^{\circ}\text{C}$
 c) $+100^{\circ}\text{C}$
 d) 0°
7. a. -500
 b. 180
 c. 0

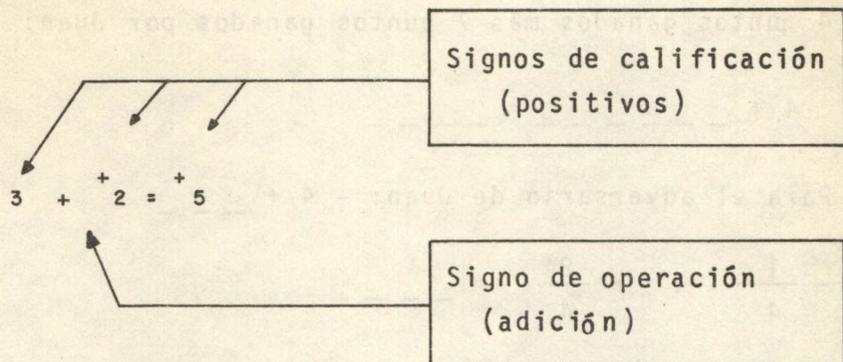
ADICION

Vamos a suponer en primer lugar los números con el mismo signo. Retomemos la situación del juego del principio de esta Unidad.

- Si el contendor tuviera 3 puntos ganados (+3) y en seguida, más 2 puntos ganados (+2), habría alcanzado 5 puntos (+5).

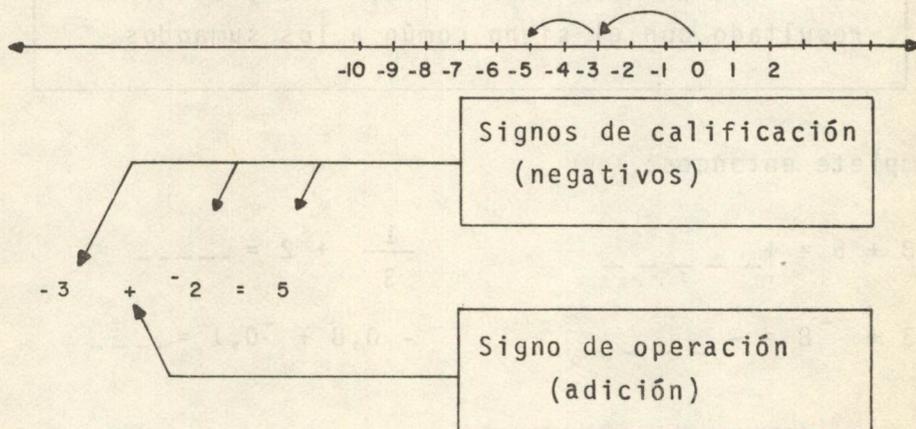
Usted se da cuenta que, reunir es adicionar; entonces, lo que ocurre es:





El adversario tenía primero tres puntos perdidos (-3) y, después, más 2 puntos perdidos (-2); en total, 5 puntos perdidos (-5).

Aquí también ocurre una adición, a saber:



Siga los dos ejemplos anteriores y complete:

a) 4 puntos ganados más 7 puntos ganados por Juan:

$$4 + \text{-----} = \text{-----}$$

b) Para el adversario de Juan: $-4 + \text{-----}$

c) $-\frac{1}{4} + +\frac{2}{4} = \text{-----}$

Conclusión

Para adicionar números reales del mismo signo, se adicionan los valores absolutos y se da el resultado con el signo común a los sumandos.

Complete entonces:

$$+3 + +5 = +\text{-----}$$

$$\frac{1}{3} + 2 = \text{-----}$$

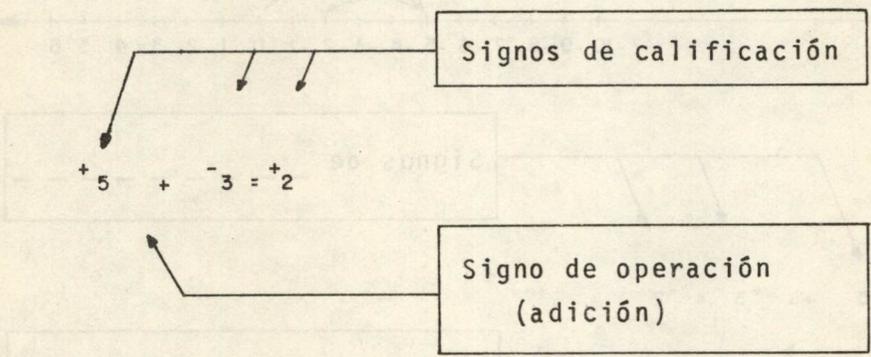
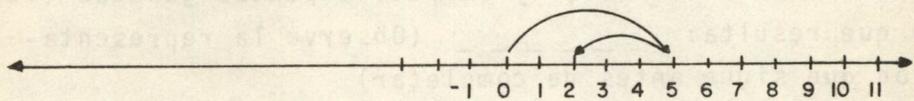
$$-3 + -8 = -\text{-----}$$

$$-0,8 + -0,1 = \text{-----}$$

Vamos a suponer ahora que los números tienen signos contrarios.

- Si Antonio ganó 5 puntos, pero enseguida perdió 3 puntos, la situación será de: + 5 (puntos ganados) y - 3 (puntos perdidos). Luego, el resultado son dos puntos ganados (+2).

La representación será:



Corrija, y llene los vacíos que encuentre:

a) $4 + 7 = 11$

b) $- 4 + - 7 = - 11$

c) $-\frac{3}{4}$

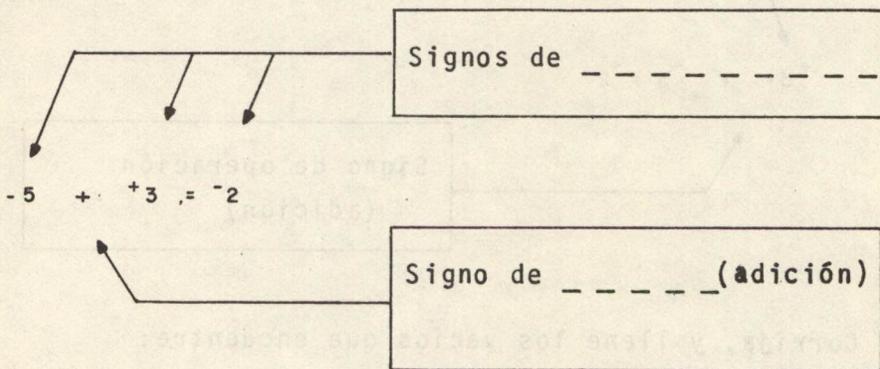
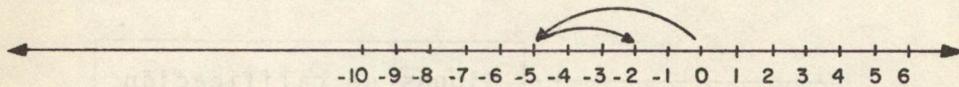
Complete:

$$+ 8 = + 2 \frac{1}{3}$$

$$- 11 = - 0,9$$

Por otra parte, los puntos de su adversario son:

5 puntos perdidos (-5) y después 3 puntos ganados (+3)
lo que resulta: _____ (Observe la representa-
ción que sigue antes de completar)



Complete ahora colocando el signo correcto al resultado

a) $- 0,6 + + 2,8 = \text{-----}$

b) $+ 8 + - 12 = \text{-----}$

Conclusión

Para adicionar dos números reales de signos contrarios, se sustraen los valores absolutos y se coloca en el resultado el signo correspondiente a la mayor de las cifras.

Complete:

$$+ 8 + - 5 = + (8 - 5) = + 3$$

$$- 12 + + 9 = - (12 - 9) = \text{---}$$

$$- \frac{1}{3} + + \frac{1}{4} = \text{---}$$

$$+ 5,2 + - 0,8 = \text{---}$$

SUSTRACCION

Es la operación inversa de la adición, esto es, del resultado de la adición, usted sustrae uno de los sumandos y debe dar el otro sumando.

Esto también ocurre en los números reales. Observe los ejemplos:

a) $+3 + +2 = +5$ $+5 - +2$ debemos retornar

a $+3$

Así: $+5 - +2 = +3$ Signos que indican el valor del número.

Signo de _ _ _ _ (sustracción)

Aquí se confirma la situación de perder dos puntos ganados. Como perder dos puntos ganados es lo mismo que adicionar los puntos perdidos, he ahí la sustracción.

$+ 5 - + 2$	\longleftrightarrow	$+ 5 + - 2 =$	$= + 3$
-------------	-----------------------	---------------	---------

- b) También $-3 + -2 = -5$ es la operación inversa de $-5 - -2$ cuyo resultado es -3 .

Eso es lo mismo que adicionar a $-5 + 2$:

$$-5 - -2 \iff -5 + +2 = \text{-----}$$

- c) La operación inversa de $+5 + -3 = +2$ es

$+2 - -3 = +5$, lo que equivale a hacer:

$$+2 + +3 = \text{-----}$$

$$+2 - -3 = +2 + +3 = +5$$

- d) También de $-5 + +3 = -2$, la operación inversa es $-2 - +3 = -5$, lo que equivale a decir:

$$-2 - +3 = -2 + -3 = \text{-----}$$

Conclusión

Para sustraer dos números reales, se cambia el signo operacional (signo de sustracción) por el de la adición, o se cambia el signo que indica el valor del sustraendo y se procede como una adición.

Observación:

Si el sustraendo es una suma, cada sumando cambiará su signo. Por ejemplo:

$$8 - (+ 7 + - 5 + + 2 + - 1) = 8 + - 7 + + 5 + - 2 + + 1 = 5$$

Realice estos ejercicios

a) $6 - (- 5) = \text{-----}$

b) $- 6 - + 2 = \text{-----}$

c) $- 8 - - 6 = \text{----}$

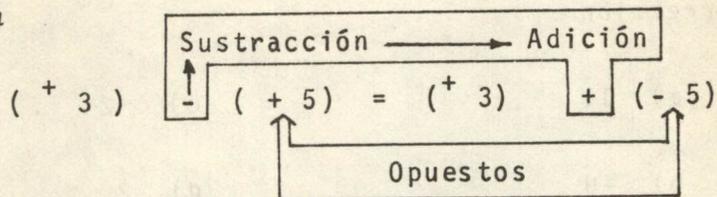
d) $7 - (+ 5) = \text{----}$

e) $9 - (- 2 + + 10 + - 7) = \text{-----}$

Nota: (-5) es lo mismo que -5

$(+5)$ es lo mismo que $+5$

Conclusión



Observe con atención el esquema y entenderá

EJERCICIOS

1. Complete:

a) $7 + 8 =$

j) $4 + -2 =$

b) $0 + 6 + 4 =$

k) $38 + -40 =$

c) $4 + 13 + 1 =$

l) $-200 + 160 =$

d) $6 + -2 =$

m) $-47 + 18 =$

e) $-2 + -2 =$

n) $-5 + 12 + -85 =$

f) $-1 + -5 + -4 =$

o) $28 + 7,4$

g) $25 + -25 =$

p) $70 + -25 =$

$$h) -7 + 3 =$$

$$q) -73 + -12 + -12 =$$

$$i) -1 + 0 =$$

$$r) -4 + \frac{2}{5} =$$

Corrección

$$a) 11$$

$$c) -2$$

$$b) -8$$

$$d) 2$$

$$e) 8$$

$$1. a) 15$$

$$j) 2$$

$$b) 10$$

$$k) -2$$

$$c) 13$$

$$l) -40$$

$$d) -8$$

$$m) -29$$

$$e) -4$$

$$n) -78$$

$$f) -10$$

$$o) 20,6$$

$$g) 0$$

$$p) 45$$

$$h) -4$$

$$q) -97$$

$$i) -1$$

$$r) -\frac{18}{5}$$

CONTINUE...

2. Complete:

a) $8 - 11 =$

c) $-15 - 3 =$

b) $6 - 2 =$

d) $0,8 - 6 =$

3. Calcule resolviendo primero los paréntesis

a) $9 - (-5 + 3) =$

b) $-15 - (4 + -8 + -5) =$

c) $\frac{3}{8} - (-\frac{5}{3} + \frac{1}{2}) =$

d) $4,6 - (\frac{5}{3} + \frac{1}{3}) =$

e) De cero, sustraiga la suma indicada:

$$4\frac{1}{9} + -8 \frac{5}{9} =$$

4. Resuelva:

a) $-0,8 - (0,5 + 0,3) =$

b) $-0,8 + (-0,3 - -0,5 + 1) - (3 + -0,7) =$

Corrección:

2. a) -3

c) -18

b) 4

d) $-5,2$

3. a) 11

b) -6

c) $1\frac{13}{24}$

d) 2,6

e) $4\frac{4}{9}$

4. a) -1

b) $-1,9$

MULTIPLICACION DE NUMEROS REALES

El producto de dos números reales, es un número real tal que:

1. Será positivo si ambos números tienen el mismo signo
2. Será negativo si ambos números tienen signo diferente.
3. Tendrá como resultado cero si uno de los dos números es cero.

El producto de dos números reales de signo contrario es negativo.

DIVISION DE LOS NUMEROS REALES

La división es la operación inversa de la multiplicación, esto es, que del producto de dos factores dividido por el segundo de dichos factores debe resultar el primer factor.

Ejemplos:

$$a) \quad 3 \times ^{-}4 = -12 \longrightarrow -12 \div ^{-}4 = 3$$

$$b) \quad -5 \times 4 = -20 \longrightarrow -20 \div 4 = -5$$

$$c) \quad 2 \times 5 = 10 \longrightarrow 10 \div 5 = 2$$

$$d) \quad -7 \times ^{-}4 = 28 \longrightarrow 28 \div ^{-}4 = -7$$

Los ejemplos a y c resultaron positivos y los otros, b y d, negativos.

Examinemos con ejemplos cada caso:

1. $(+2) \times (+4) = 8$ más por más da más

$(-2) \times (-3) = +6$ Menos por menos da más

2. $(-2) \times (+3) = 6$

pues $(-2) + (-2) + (-2)$

$(-4) + (-2)$

$- 6$

Más por menos da menos

$(+2) \times (-3) = - 6$ Menos por más da menos

el mismo raciocinio

Podemos escribir como conclusión:

El producto de dos números reales del mismo signo es positivo.

Resumiendo

$+$	$.$	$-$	$=$	$-$	$+$	$:$	$-$	$=$	$-$	Signos contrarios da _____
$-$	$.$	$+$	$=$	$-$	$-$	$:$	$+$	$=$	$-$	
$+$	$.$	$+$	$=$	$+$	$+$	$:$	$+$	$=$	$+$	Signos iguales da _____
$-$	$.$	$-$	$=$	$+$	$-$	$:$	$-$	$=$	$+$	

EJERCICIOS

1. Calcule los siguientes productos:

a) $3 \cdot 5 =$

c) $200 \cdot ^{-}2 =$

b) $^{-}8 \cdot ^{-}10 =$

d) $^{-}1 \cdot 45 =$

2. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $^{-}6 : 3 =$

c) $0 : 3 =$

b) $^{-}8 : ^{-}1 =$

d) $200 : ^{-}2 =$

3. Escriba en forma de potencia y dé el resultado:

Ejemplo:

a) $(-3) \cdot (-3) = (-3)^2 = 9$

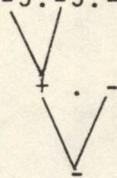
b) $0 \cdot 0 \cdot 0 =$

c) $(5) \cdot (5) \cdot (5) =$

3. b) 0

c) $(5)^3 = 125$

d) $(-5)^3 = -125$ porque: $(-5 \cdot -5 \cdot -5)$



4. a) -8

b) 1

c) 16

d) -78

5. a) $(12)^2 = 144$

b) $(-6)^1 = -6$

c) $(-6)^0 = 1$

En la potenciación:

Cuando el exponente es par, la potencia es positiva (+)

Cuando el exponente es impar, la potencia tiene el signo de la base.

Resuelva entonces los ejercicios y verifique:

6. a) $(2)^5 =$

f) $(-1)^8 =$

b) $(2)^3 =$

g) $(-1)^9 =$

c) $(-3)^2 =$

h) $(-\frac{1}{3})^3 =$

d) $(-2)^3 =$

e) $(\frac{1}{2})^2 =$

7. Resuelva:

a) $^{-}5 \cdot 8 = \text{---}$

b) $^{-}3 \cdot ^{-}7 = \text{-----}$

c) $6 \cdot \frac{^{-}1}{5} = \text{-----}$

d) $\frac{3}{12} \cdot \frac{^{-}4}{^{-}3} =$

e) $\frac{16}{9} \cdot ^{-}0,5 \cdot 3 =$

f) $38 \cdot \frac{1}{19} \cdot ^{-}4 =$

g) $^{-}0,8 \cdot 0,002 =$

h) $^{-}6 \cdot 7 \cdot \frac{4}{5} =$

8. Resuelva:

a) $(8) + (-5) =$

b) $-8 + ^{-}8 =$

c) $8 - ^{-}3 =$

d) $-6 - 8 =$

e) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$

f) $\frac{1}{3} - ^{-}1 =$

g) $-5 + ^{-}2 - ^{-}4 =$

h) $\frac{1}{8} + \frac{-1}{3} - \frac{1}{4} =$

9. Resuelva:

a) $40 : ^{-}5 =$

b) $^{-}3,2 : ^{-}0,8 =$

c) $\frac{5}{4} : 0,12 =$

d) $72 : 6 =$

e) $^{-}48 \cdot \frac{-6}{36} =$

$$f) 3 \cdot ^{-}5 =$$

$$g) -847 : -100 =$$

La sustracción auxiliada por la multiplicación

Como 1 es el elemento neutro (módulo) de la multiplicación, entonces $^{+}1$ también lo es.

Por lo tanto:

$$a) 5 - 2 = 5 - \underbrace{^{+}1 \times (2)} = ^{+}5 + ^{-}1 \times (^{+}2)$$

se cambia
por la primera
regla de la
multiplicación

$$= +5 + ^{-}2 = _ _ _$$

$$b) -6 - (^{-}7 + 4 + ^{-}1) = -6 + ^{+}7 + ^{-}4 + ^{+}1 = -2$$

Compruebe resolviendo antes los paréntesis

Recuerde:

Al sustraer una adición indicada, se cambia el signo de la operación que antecede a los paréntesis y todos los signos que le dan valor (califican) a los números dentro del paréntesis.

10. Resuelva, cambiando el signo de cada sumando de los paréntesis:

a) $9 - 1 - (-5 + 3) =$

b) $-15 - (4 + -8 + -5) =$

c) $\frac{3}{8} - (-\frac{5}{3}) + (\frac{1}{2}) =$

d) $4,6 - \frac{5}{3} + \frac{1}{2} =$

e) De cero sustraiga la suma indicada

$$4 \frac{1}{9} + -8 \frac{5}{8} =$$

11. Desarrolle los items a, b y c del ejercicio anterior, resolviendo antes los paréntesis.

Confronte los resultados con los del ejercicio anterior.

a)

b)

c)

Corrijamos estos ejercicios

6. a) 32 e) $\frac{1}{4}$
b) 8 f) 1
c) 9 g) -1
d) -8 h) $-\frac{1}{27}$
7. a) -40 e) $-2\frac{2}{3}$
b) 21 f) - 8
c) $-1\frac{1}{5}$ g) - 0,0016
d) $\frac{1}{3}$ h) $33\frac{3}{5}$
8. a) 3 e) $\frac{1}{2}$
b) - 16 f) $1\frac{1}{3}$
c) 11 g) -3
d) - 14 h) $-\frac{11}{24}$

9. a) - 8

e) 8

b) 4

f) - 15

c) $10\frac{5}{12}$

g) 8,47

d) 12

10. a) 10

d) $3\frac{13}{30}$

b) - 6

e) $4\frac{37}{72}$

c) $2\frac{13}{24}$

11. a) 10

b) - 6

c) $2\frac{13}{24}$

Acuda al Instructor para aclarar sus dudas.

EVALUACION FINAL

1. a) Escriba el simétrico de:

1) $4 \rightarrow$ simétrico =

2) $-7 \rightarrow$ simétrico =

3) $-2 \rightarrow$ simétrico =

4) $5 \rightarrow$ simétrico =

b) Represente en la recta numérica los 4 ejercicios anteriores.

Valor: 20%

2. Dé el valor de las siguientes adiciones:

a) $(-3) + (5) + (-7) =$

b) $(8) + (-5) + (4) + (3) =$

c) $(9) + (-7) + (8) + (1) + (-10) =$

d) $(12) + (51) + (-179) + (-95) + (-2) =$

Valor: 20%

3. Realice las siguientes sustracciones:

a) $(-3) - (5) - (8) =$

b) $(-10) - (8) - (-2) =$

c) $(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{8}) - (-\frac{1}{4}) =$

d) $(-3,3) - (-1,2) - (7,1) =$

Valor: 20%

4. Calcule los siguientes productos:

a) $(-4) \cdot (2) \cdot (-1) =$

b) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-5) =$

c) $(-\frac{1}{3})^3 =$

d) $(0,25) \cdot (-3,45) =$

Valor 20%

5. Resuelva las siguientes operaciones:

a) $(\frac{1}{2}) : (\frac{1}{3}) =$

b) $(\frac{1}{3}) : (-\frac{1}{3}) =$

c) $(-\frac{1}{2}) : (-\frac{1}{3}) =$

d) $(-\frac{1}{2}) : (\frac{1}{3}) =$

Valor: 20%

RESPUESTAS A LA EVALUACION FINAL

1. a)

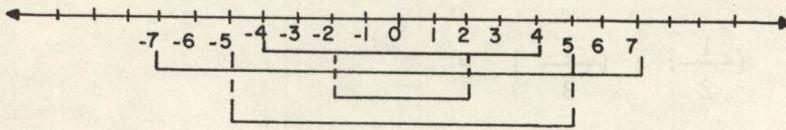
1) - 4

2) 7

3) 2

4) - 5

b)



2. a) - 5

b) 10

c) 1

d) - 213

3. a) - 16

b) - 16

c) - $\frac{1}{8}$

d) - 9,7

4. a) 8

b) - 45

c) - $\frac{1}{27}$

d) - 0,8625

5. a) $\frac{3}{2}$

b) -1

c) $\frac{3}{2}$

d) $-\frac{3}{2}$

Esta unidad fue traducida y adaptada por el SENA con la autorización de SENAI.

