

MATEMATICAS

X

=

$\frac{2}{4}$

√

÷

+

2

**MINIMO COMUN
MULTIPLO
Y
MAXIMO COMUN
DIVISOR**



SENA

SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE
MINISTERIO DE TRABAJO Y SEGURIDAD SOCIAL

SENA
DIRECCION GENERAL
SUBDIRECCION TECNICO PEDAGOGICA

**MINIMO COMUN MULTIPLO
Y
MAXIMO COMUN DIVISOR**

Bogotá, 14 de julio de 1982

CONTENIDO

OBJETIVO TERMINAL	5
Múltiplos y divisores de un número	7
Múltiplos de un número	7
Método abreviado para hallar el M.C.M.	12
Divisores de un número	13
Criterios de divisibilidad	15
Método abreviado para hallar el M.C.D.	29
EVALUACION FINAL	36

OBJETIVO TERMINAL

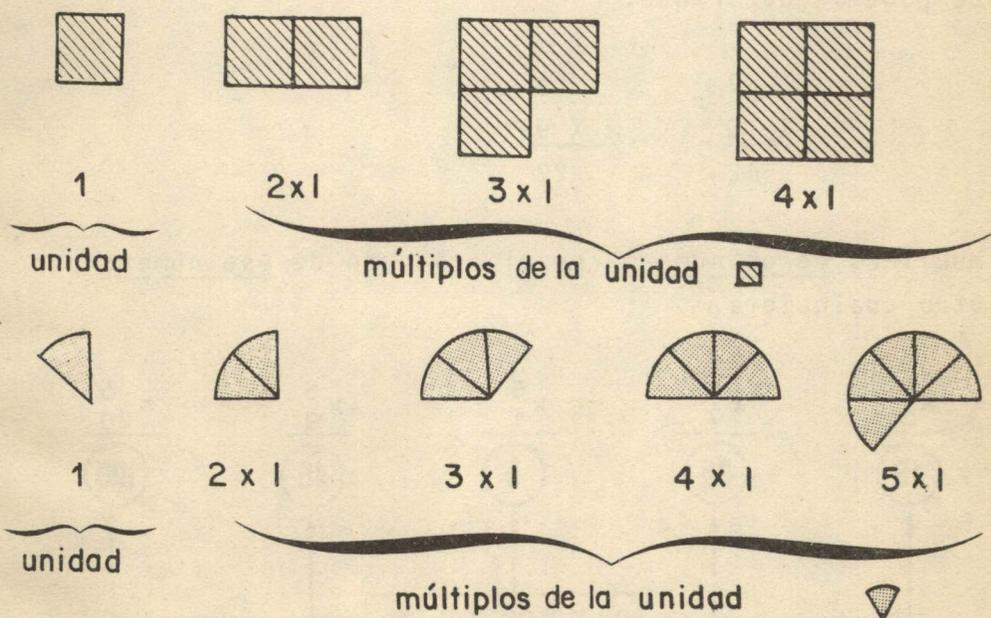
Al finalizar esta Unidad, usted estará en capacidad de calcular el Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor, entre dos o más números dados.

MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NUMERO

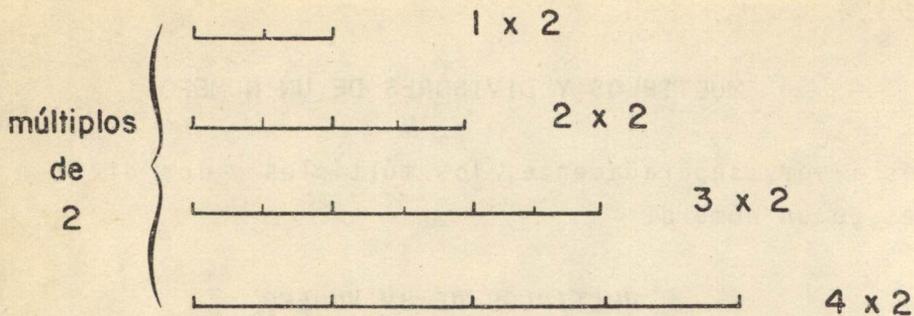
Vamos a ver, separadamente, los múltiplos y los divisores de un número.

MÚLTIPLOS DE UN NUMERO

Observe:



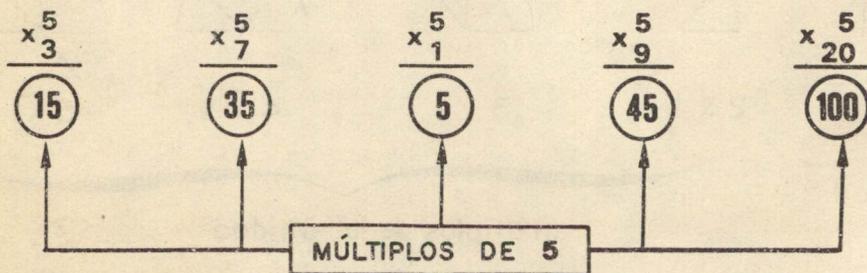
Tomemos ahora el número 2 como unidad y representémosla con un segmento ($\overline{\quad}$); entonces:



Ahora usted ha entendido qué es un múltiplo. Igualmente podemos decir que:

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 6 \\ \hline 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ \times 9 \\ \hline 27 \end{array}$$

MÚLTIPLO de un número es el producto de ese número por otro cualquiera.



Escriba algunos múltiplos de 2

$$M(2) = 2, 4, 6, \dots$$

Complete en cada caso, con 4 múltiplos más

$$M(3) = 3, 6, 9, 12, 15$$

$$M(4) = 4, 8, 12,$$

$$M(5) = 5, 10, 15,$$

$$M(10) = 10$$

Observe que:

Todo número es múltiplo de sí mismo.

Atención: El conjunto de los múltiplos de un número es infinito.

Si usted observa los múltiplos de 2, 3, 4, 5, 10, etc. se dará cuenta de que hay múltiplos comunes. Puede verificar ésto en el ejercicio de arriba.

Así, pues, podemos afirmar que un *múltiplo común* de dos o más números es otro número que se puede dividir exactamente por los números dados.

Consideremos, por ejemplo, los múltiplos de 6 y 10

Múltiplos de 6:	6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48,
	54, 60
Múltiplos de 10:	10, 20, 30, 40, 50, 60, 70,
	80, 90, 100.

Los múltiplos comunes son: _____ y _____

Ahora observe: 30 es el menor múltiplo común.

Ese es entonces el *Mínimo Común Múltiplo* (MCM)

Llámanse *Mínimo Común Múltiplo* de dos o más números al menor número, diferente de cero, que los contiene exactamente.

NOTA: No olvide que un número es divisible por otro solamente cuando la división es exacta, es decir, cuando el residuo es cero.

Ejemplo

12 es divisible por 3, porque
$$\begin{array}{r} 12 \ / \ 3 \\ \underline{0} \ 4 \end{array}$$

45 es divisible por 9, porque
$$\begin{array}{r} 45 \ / \ 9 \\ \underline{0} \ 5 \end{array}$$

46 No es divisible por 7, porque
$$\begin{array}{r} 46 \ / \ 7 \\ \underline{4} \ 6 \end{array}$$

Escriba ahora los múltiplos de 2 y 3

M (2) = __, __, __, __, __, __, __, __, __, __

M (3) = __, __, __, __, __, __, __, __, __, __

Los múltiplos comunes son: _ _ _ _

Luego: el $\boxed{\text{M.C.M. (2,3) = 6}}$

Calcule ahora:

a. $M(6) =$

$M(8) =$

M.C.M. (6,8) =

b. $M(5)$

$M(10)$

M.C.M. (5,10) =

c. $M(3)$

$M(7)$

M.C.M. (3, 7) =

Sus respuestas deben ser: a = 24

b = 10

c = 21

METODO ABREVIADO PARA HALLAR EL M.C.M.

El M.C.M. por descomposición en factores se puede hallar más rápidamente si realizamos una descomposición simultánea.

Paso 1

Se descomponen *simultáneamente* los números dados por sus divisores primos (de menor a mayor), hasta obtener que todos los cocientes sean 1.

Hallar el M.C.M. de 30, 60 y 190

30	60	190	2
15	30	95	2
15	15	95	3
5	5	95	5
1	1	19	19
1	1	1	

NOTA: El número que no es divisible por un factor primo se sigue colocando debajo, como se ha hecho dos veces con 95, hasta que sea divisible.

Paso 2

Se halla el producto de los factores primos resultantes y así se obtiene el M.C.M.

$$\text{M.C.M.} = 2^2 \times 3 \times 5 \times 19 = 1.140$$

El M.C.M. es el producto de todos los divisores primos encontrados.

Ejercicio

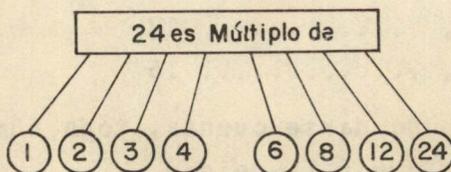
Hallar el M.C.M. de 48, 36, 54 y 72

48	36	54	72		2
24	18	27	36		2
12	9	27	18		2
6	9	27	9		2
3	9	27	9		3
1	3	9	3		3
1	1	3	1		3
1	1	1	1		

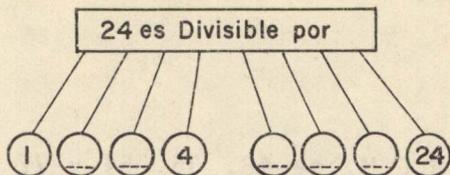
$$\begin{aligned} \text{M.C.M.} &= 2^4 \times 3^3 \\ &= 16 \times 27 \\ &= 432 \end{aligned}$$

DIVISORES DE UN NUMERO

En primer lugar escribamos algunos números de los cuales 24 es múltiplo.



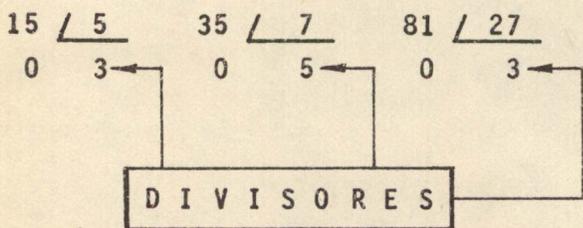
Podemos entonces decir que



Así, pues, podemos decir también que: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24 dividen a 24.

O lo que es lo mismo: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 son divisores de 24.

Un número es divisor de otro cuando este último contiene exactamente al primero.



Escriba los divisores de 8, 12 y 15

D (8) = 1, 2, 8

D (12) = 1, 12

D (15) = 1, 15

Como usted pudo darse cuenta, todo número es divisible por sí mismo y por la unidad.

Ejemplo:

8 es divisible por 8, y también

8 es divisible por 1

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Cuando efectuamos una división, podemos verificar si un número es divisible por otro. Recordemos la divisibilidad de algunos números:

2 Un número es divisible por 2 cuando termina en cero (0) o en cifra par (2, 4, etc.)

Ejemplo:

10 es divisible por 2 (termina en 0).

212 es divisible por 2 (par).

193 *no es* divisible por 2, porque no es par.

3 Un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras da 3 o múltiplos de 3

Ejemplo:

216 es divisible por 3, porque $2+1+6 = 9$, y

9 es divisible por 3.

314 no es divisible por 3, porque $3+1+4 = 8$ y 8 no es divisible por 3.

<p>5 Un número es divisible por 5 cuando termina en cero o en 5</p>	<p>Ejemplo: 620 es divisible por 5, porque termina en cero. 325 es divisible por 5, porque termina en cinco. 316 no es divisible por 5.</p>
<p>10 Un número es divisible por 10 cuando termina en cero.</p>	<p>Ejemplo: 1.600 es divisible por 10, porque termina en cero. 1.723 no es divisible por diez.</p>

Procure tener presente estos conocimientos. Los necesitará más adelante.

NOTA: El conjunto de divisores es *finito*, o sea, que tiene un límite.

Dos o más números pueden tener divisores comunes.

Ejemplo:

$$D(8) = 1, 2, 4, 8$$

$$D(12) = 1, 2, 3, 4, 6, 12$$

Luego los divisores comunes son: _____ y _____.

Ahora bien, 4 es el mayor divisor entre los divisores comunes de 8 y 12. Es, pues, el *Máximo Común Divisor* (M.C.D.) de los dos números.

Veamos otro ejemplo:

Los divisores de 42 son: ①, ②, 3, 6, ⑦, ⑭,
21 y 42.

Los divisores de 70 son: ①, ②, 5, ⑦, 10, ⑭,
35 y 70.

El mayor de los divisores comunes de 42 y 70 es 14.
Por tanto, podemos decir que 14 es el *Máximo Común Divisor* de 42 y 70, o sea: $M.C.D. (42, 70) = \underline{\hspace{2cm}}$

Se denomina *Máximo Común Divisor* de dos o más números, al mayor divisor común de esos números

Escriba los divisores comunes de los siguientes números.

a. D (12) = __, __, __, __, __, __, __,

D (15) = __, __, __, __, __, __, __,

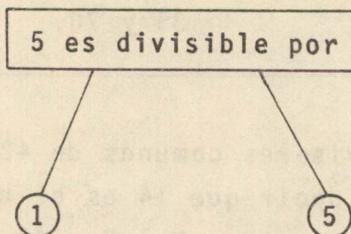
M.C.D. (12, 15) =

- b. D (10) =
D (15) =
D (30) =

$$\text{M.C.D. (10, 15, 30) =}$$

Sus respuestas debieron ser: a) 3
b) 5

Ahora preste atención a lo siguiente:



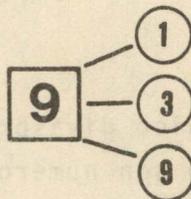
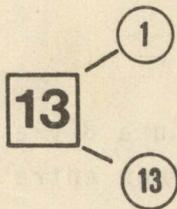
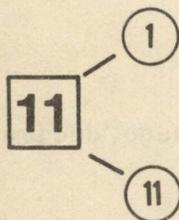
En este caso 5 es divisible por sí mismo y por la unidad.

Decimos entonces que 5 es un *número primo*. 6, en cambio, no es número primo, ya que puede dividirse por 2 y por 3 (además, por sí mismo y por la unidad).

De la misma forma, *no* son números primos 8, 9, 10, 12 y muchos más.

Números Primos, son todos aquellos números que tienen únicamente dos divisores diferentes: La unidad y el mismo número.

Observe los siguientes números y sus divisores:



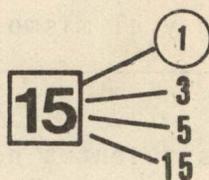
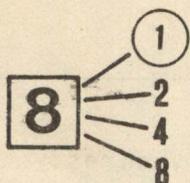
El número 11 es primo porque apenas tiene dos divisores: la unidad (1) y él mismo (11). El número 13 también es primo, porque tiene solamente dos divisores: __, __.

No sucede lo mismo con el número 9, porque tiene más de dos divisores: __, __ y __.

Los cuatro primeros números primos son:
2, 3, 5 y 7.

Cite otros dos números primos: __, __.

Observe ahora estos ejercicios:



1 es el único divisor común a 8 y a 15. Luego, decimos que 8 y 15 son números primos entre sí.

Dos o más números son primos entre sí, cuando sólo admiten como divisor común la unidad.

Ejemplo:

8 y 9 son primos entre sí, porque sólo admiten como divisor común la unidad. Pero 6 y 8 *no* son primos entre sí, ya que además de la unidad tienen como divisor común el 2.

Dé un ejemplo de dos números primos entre sí: __, __,

Bien. Ya ha repasado los números primos. A continuación veamos algo sobre FACTORIZACION.

Podemos escribir:

$$30 = 5 \times 6$$

↙ ↘
Factores

Escribir un número en forma de producto, y factorizar este número, es lo mismo que descomponer un número.

30 fue factorizado o descompuesto en un producto, cuyos factores son 5 y 6. Pero 30 tiene también otros factores. Veamos:

$$30 = 2 \times 15$$

$$30 = 1 \times 30$$

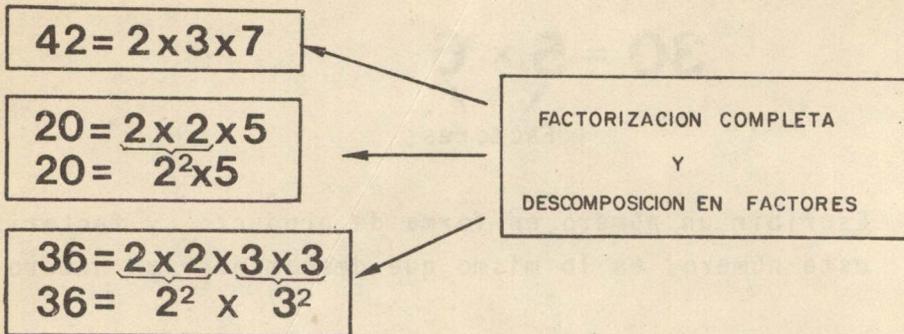
$$30 = 3 \times 10$$

30 se puede descomponer también en los factores primos: 2, 3, 5,...

$$30 = _, _, _, _, _, _.$$

Cuando un número se descompone en un *producto de factores primos*, se dice que es una factorización completa.

Ejemplos:



Escriba la factorización completa de 18: _____

Una forma de encontrar los factores primos de un número es por medio de las divisiones sucesivas.

Ejemplo:

30	2	← El menor divisor primo de 30 y 2 $30 \div 2 = 15$
	15	← El menor divisor primo de 15 y 3 $15 \div 3 = 5$
	5	← El menor divisor primo de 5 y 5 $5 \div 5 = 1$
	1	

$30 = 2 \times 3 \times 5$

Otro ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Completar:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & \end{array}$$

$$40 = \underline{\quad \quad \quad}$$

En resumen, ¿qué hicimos?

- Factorizamos un número dividiéndolo por su menor divisor primo.
- Dividimos el cociente obtenido por su menor divisor primo.
- Así continuamos hasta encontrar un cociente igual a 1.

Ahora haga los siguientes ejercicios:

1. Los 5 primeros números primos son: , , , y .
2. Encierre en círculo los números primos:
77 - 101 - 71 - 81 - 99 - 97 - 28 - 59 - 123
3. Busque los números primos entre sí:
a) 2 y 3 b) 4 y 12 c) 2 y 15

4. Descomponga 12 en un producto de factores primos.

$$12 = _ _ _ _ _$$

5. Factorice los números dados, y escríbalos como un producto de números primos.

$$\begin{array}{|l} 6 \\ \hline \end{array}$$

$$15$$

Respuestas =

$$6 =$$

$$15 =$$

$$\begin{array}{|l} 72 \\ \hline \end{array}$$

$$128$$

Respuestas =

$$72 =$$

$$128 =$$

6. Descomponga los siguientes números en producto de factores primos:

$$144 =$$

$$90 =$$

$$100 =$$

7. ¿Cuál es el menor divisor de un número?

$$R =$$

8. ¿Cuál es el mayor divisor de un número?

R =

9. 12 es múltiplo de __, __, __, __, __ y __.

10. Marque con una X los divisores de los números, conforme al ejemplo:

No efectúe la división:

Números	Divisores				
	1	2	3	5	10
552	x	x	x		
1.620					
3.045					
1'236463					
883					
24.015					

11. Busque los números divisibles:

a. por dos: 7.120 - 621 - 162 - 615 - 398 - 197 -
1.009 - 74.

b. por tres: 4.414 - 173 - 315 - 771 - 222 - 302 -
706 - 207.

c. por cinco: 217 - 345 - 1642 - 700 - 325 - 801 -
12.434 - 97.

d. por diez: 153 - 140 - 1000 - 315 - 304 - 12360
712.

12. Escriba en el cuadro el número que sea necesario para que el formado sea divisible por lo que se le pida.

a. por dos:

b. por tres:

c. por dos y por tres:

d. por cinco:

e. por diez:

f. por cinco y diez:

g. por tres: , ,

h. por tres y cinco: , ,

Antes de continuar corrija sus respuestas. Si tiene dudas consulte al Instructor.

1. 1, 2, 3, 5 y 7

2. 77 - (101) - (71) - 81 - 99 - (97) - 28 - (59) - 123

3. a) c)

4. $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

5. $6 = 2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

$72 = 2^3 \times 3^2$

$128 = 2^7$

6. $144 = 2^4 \times 3^2$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$

$100 = 2^2 \times 5^2$

7. 1

8. El propio número

9. 1, 2, 3, 4, 6 y 12

10.

Números	Divisores				
	1	2	3	5	10
552	x	x	x		
1.620	x	x	x	x	x
3.045	x		x	x	
1'236'463	x				
883	x				
24015	x		x	x	

11. a. 7120 - 162 - 398 - 74
b. 315 - 771 - 222 - 207
c. 345 - 700 - 325
d. 140 - 1000 - 12360

12. a. 2
b. 1
c. 2
d. 5
e. 0
f. 0
g. 2, 1, 1
h. 0, 5, 0

NOTA

Las respuestas a los ejercicios a, b, c, d y g pueden ser diferentes.

Para determinar el máximo común divisor de varios números, usted puede utilizar el método abreviado.

METODO ABREVIADO PARA HALLAR EL M.C.D.

Procedimiento

El M.C.D. por descomposición en factores se puede hallar más rápidamente si realizamos una descomposición simultánea.

Paso 1

Se descomponen simultáneamente los números dados en sus divisores primos (de menor a mayor) pero el factor primo tiene que ser común a *todos* los números (a diferencia del M.C.M.) hasta que el único común divisor sea 1. Es decir, los factores deben ser Números Primos entre sí.

Ejemplo

24	60	90	2
12	30	45	3
4	10	15	

Paso 2

Se halla el producto de los factores primos resultantes y así se obtiene el M.C.D.

$$\text{M.C.D. (24, 60 y 90)} = 2 \times 3$$

$$\text{M.C.D.} = 6$$

Calcule el M.C.D. de 140 y 120

140	120		2
70	60		2
35	30		5
7	6		

M.C.D. (140 y 120) =

M.C.D. =

Determine el M.C.D. de 70, 120, 40, 100.

NOTAS

- El M.C.D. de un grupo de números primos es la unidad. Ejemplo: M.C.D (5, 11, 13) = 1
- El M.C.D. de dos números, en los cuales el mayor es múltiplo del menor, el menor es el M.C.D. de los dos. Ejemplo: M.C.D. (24,6) = 6

Ahora realice los ejercicios sobre el M.C.M y el M.C.D

1. Calcule, usando el método abreviado:

- El M.C.D. (48, 60) es :
- El M.C.D. (18, 12) es :
- El M.C.D. (36, 48) es :

4. a. 10
b. 16
c. 120
d. 64
e. 420
5. a. M.C.D. (80, 60) = 20
M.C.M. (80, 60) = 240
- b. M.C.D. (24, 16, 72) = 8
M.C.M. (24, 16, 72) = 144
- c. M.C.D. (18, 20) = 2
M.C.M. (18, 20) = 180
- d. M.C.D. (40, 64) = 8
M.C.M. (40, 64) = 320
- e. M.C.D. (25, 50, 100, 125) = 25
M.C.M. (25, 50, 100, 125) = 500

Hay problemas que pueden ser resueltos por medio del M.C.M. o el M.C.D. Veamos algunos ejemplos:

1. Tres jóvenes estudian periódicamente en una biblioteca. El primero va cada 3 días, el segundo cada 4 días y el tercero cada 6 días.
¿A los cuántos días estarán nuevamente juntos los tres jóvenes en la biblioteca?

Ayúdese con el M.C.M. Respuesta:

2. Tres ciclistas parten de un mismo punto y en un mismo sentido. El primero da una vuelta a la pista en 20 minutos, el segundo en 24 minutos y el tercero en 30 minutos. ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán los tres en el punto de partida?

Respuesta =

3. Si en el perímetro de una chapa de forma trapezoidal, cuyos lados miden respectivamente 320 mm, 104 mm, 396 mm y 84 mm, se desea colocar puntos de soldadura, equidistantes uno del otro, ¿cuál es la mayor distancia en que pueden ser colocados los puntos?

Respuesta =

4. ¿Cuáles son los dos menores números por los cuales debemos dividir 364 y 468 para obtener el mismo cociente?

Respuesta =

Por favor, procure resolver los problemas solo y compare sus respuestas. Si el resultado no es el mismo, corríjalos. Tenga presente que este tipo de problemas le ayudan al raciocinio.

RESPUESTAS:

1. A los 12 días los 3 jóvenes estarán juntos nuevamente en la biblioteca.
2. A los 120 minutos, o sea, a las 2 horas, se encontrarán en el punto de partida.
3. La mayor distancia entre los puntos de soldadura es 4 mm.
4. Los dos números son: 91 y 117, porque el M.C.D. (364 y 468) = 4

EVALUACION FINAL

1. Hallar sin factorizar, el M.C.M. de

a) 3 y 6

b) 4, 16 y 32

Valor: 20%

2. Hallar el M.C.M. utilizando el método abreviado de:

a) 32 - 64 - 128

b) 150 y 360

Valor: 20%

3. Hallar sin factorizar el M.C.D. de:

a) 4 - 16 - 32

b) 3 - 9 - 15

Valor: 20%

4. ¿Cuál es la menor capacidad de un estanque que se puede llenar en un número exacto de minutos por cualquiera de tres llaves que vierten: La primera 12 litros por minuto, la segunda 18 litros por minuto y la tercera 20 litros por minuto.

Valor: 20%

5. ¿Cuál será la menor longitud de una varilla que se puede dividir en trozos de 8 cm, 9 cm y 15 cm de longitud, sin que sobre ni falte nada, y cuántos trozos de cada longitud se podrán sacar de esa varilla?

Valor: 20%

RESPUESTAS A LA EVALUACION FINAL

1. a) 6
b) 32

2. a) 128
b) 1800

3. a) 4
b) 3

4.

R = 180 litros

5. R = 360; 45 de 8; 40 de 9 y 24 de 15.

Esta unidad fue traducida y adaptada por el SENA con la
autorización de SENAI.