

MATEMATICAS

 \times $=$ $\frac{2}{4}$ $\sqrt{\quad}$ \div $+$

25

IMPORTANCIA DEL TRIANGULO RECTANGULO



SENA

SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE
MINISTERIO DE TRABAJO Y SEGURIDAD SOCIAL

SENA
DIRECCION GENERAL
SUBDIRECCION TECNICO PEDAGOGICA

**IMPORTANCIA DEL TRIANGULO
RECTANGULO**

Bogotá, 26 de julio de 1982

CONTENIDO

OBJETIVO TERMINAL	5
Importancia del triángulo rectángulo	7
Teorema de Pitágoras	12
Relaciones métricas del triángulo rectángulo	36
EVALUACION FINAL	43

OBJETIVO TERMINAL

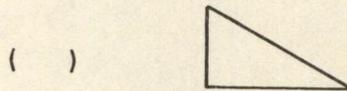
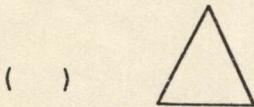
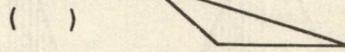
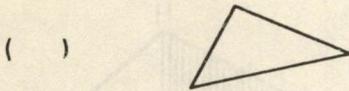
Al finalizar esta Unidad, usted estará en capacidad de:

- 1. Calcular cualquier lado de un triángulo rectángulo, con el auxilio del teorema de Pitágoras.**
- 2. Localizar un triángulo rectángulo y sus cotas en una figura dada, para calcular un lado de la figura.**
- 3. Resolver problemas que tengan que ver con la aplicación de las relaciones métricas de los triángulos rectángulos.**

IMPORTANCIA DEL TRIANGULO RECTANGULO

Como usted recordará, un triángulo rectángulo es aquel que tiene uno de sus ángulos rectos.

Marque con una (X) el triángulo rectángulo entre las siguientes figuras:



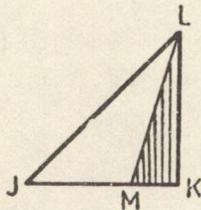
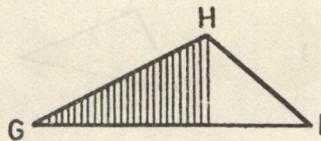
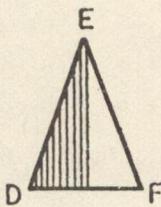
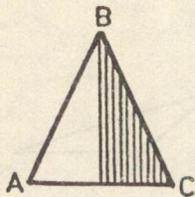
El primero y el _____ son triángulos _____

Los triángulos rectángulos son de gran utilidad en las mediciones indirectas, como también en la verificación de perpendiculares.

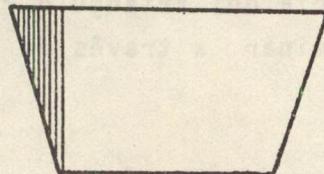
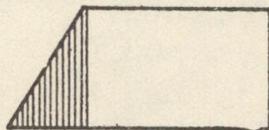
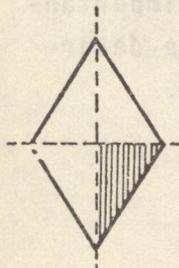
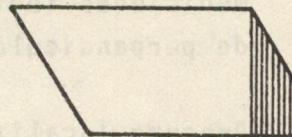
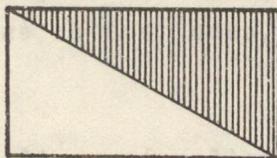
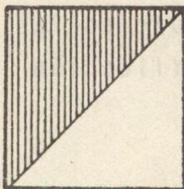
Procure localizar el triángulo rectángulo en cada ejemplo que sigue. Así tendrá una idea de la importancia del triángulo rectángulo, y lo que se puede determinar a través de él.

En las figuras geométricas

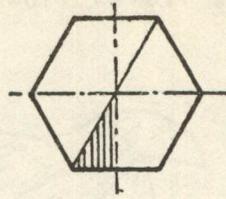
a) Los triángulos



b) Los cuadriláteros

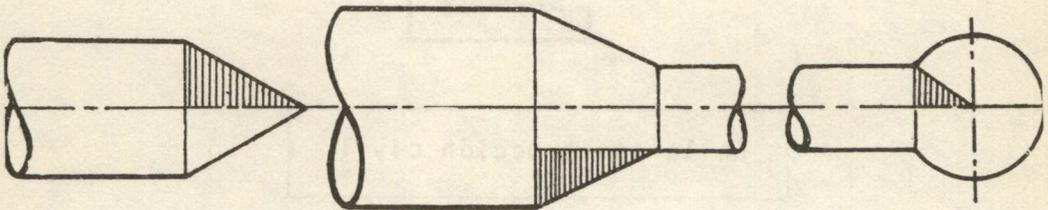


- c) Los polígonos regulares,
por ejemplo: el exágono
regular.

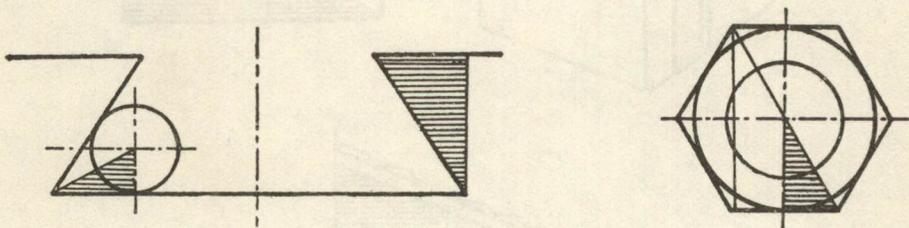


En los talleres

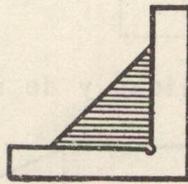
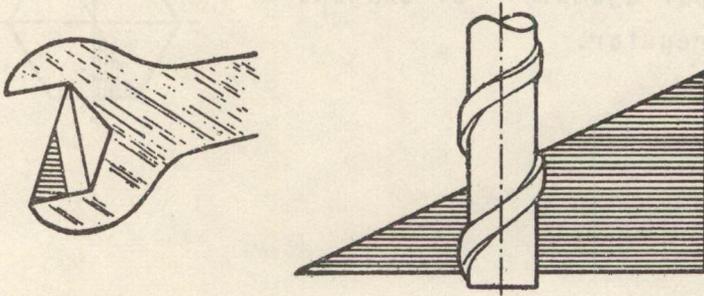
- a) Las piezas cónicas y de revolución



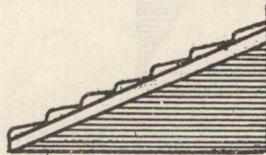
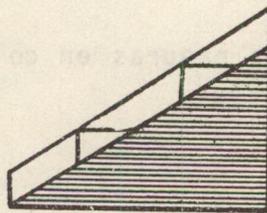
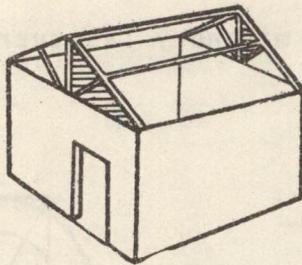
- b) Las ranuras en cola de milano y las tuercas



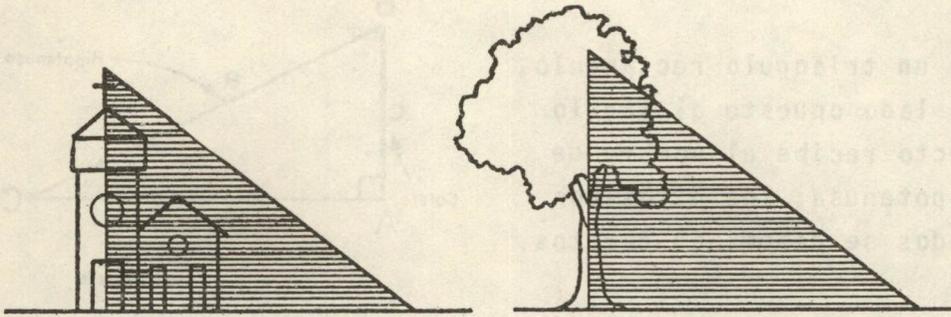
c) Las llaves fijas, los tornillos y las escuadras.



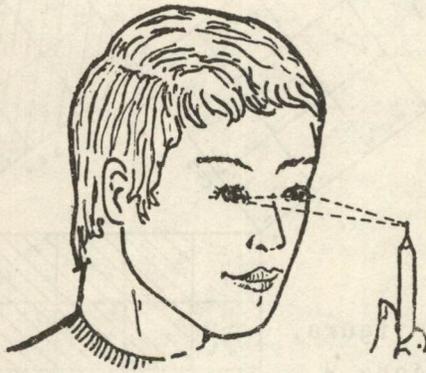
En la construcción civil



La proyección de las sombras

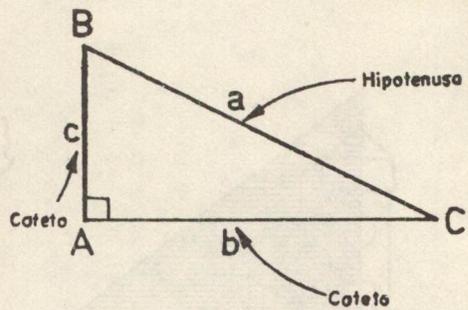


Y hasta cuando se usa el cálculo visual para medir cierta distancia.

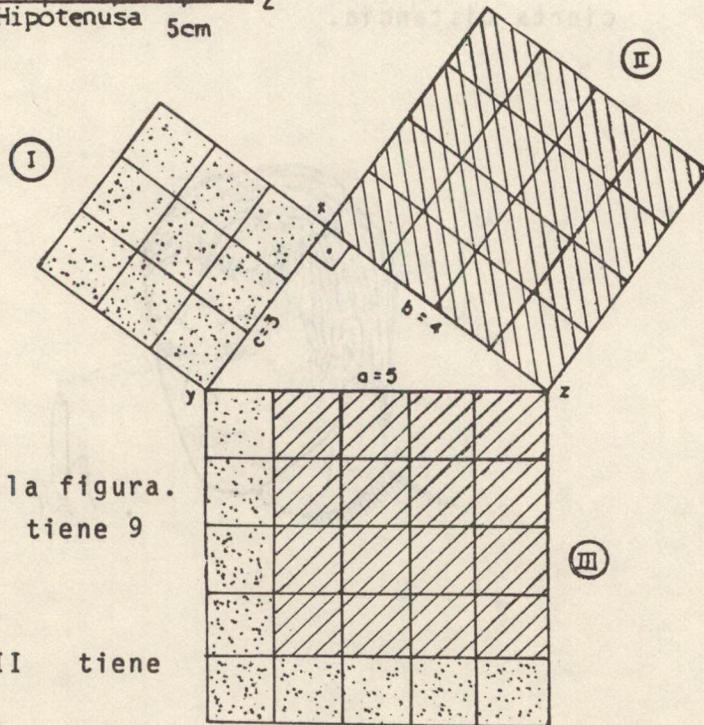
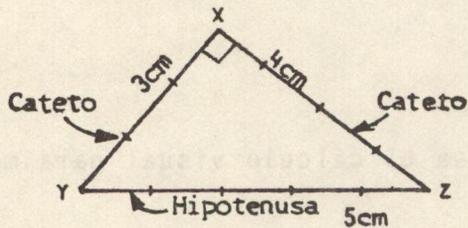


TEOREMA DE PITAGORAS

En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto recibe el nombre de hipotenusa; los otros dos lados se denominan catetos.



Observe el siguiente triángulo rectángulo



Observe ahora la figura.
El cuadrado I tiene 9
cuadritos.

El cuadrado II tiene
16 cuadritos.

El cuadrado III tiene el cuadrado I más el cuadrado II que da un total de 25 cuadrados.

Realmente:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16$$

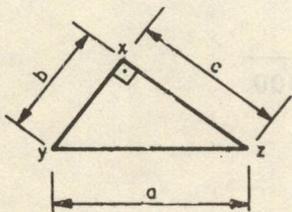
La comprobación de estas igualdades nos lleva a concluir el siguiente enunciado:

El cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos.

O expresado de otra manera

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{que es el teorema de Pitágoras}$$

Resumiendo:

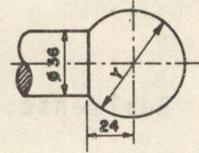


a	medida de la hipotenusa	
b	medida del cateto menor	$a^2 = b^2 + c^2$
c	medida del cateto mayor	$b^2 = a^2 - c^2$ $c^2 = a^2 - b^2$

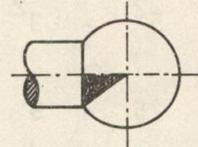
Aplicación del teorema de Pitágoras

En el siguiente ejemplo, observe con atención los pasos que se han de seguir.

Calcule la cota en el dibujo siguiente:



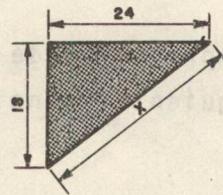
-Localice el triángulo rectángulo.



-Determine las cotas

-Escriba simbólicamente el enunciado:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



-Sustituya las letras por los valores numéricos

$$x^2 = 18^2 + 24^2$$

-Eleve al cuadrado los valores numéricos

$$x^2 = 324 + 576$$

-Adicione las potencias $x^2 = 900$

-Extraiga la raíz cuadrada $x = \sqrt{900}$

$$x = 30$$

-Efectúe, si es necesario, otros cálculos

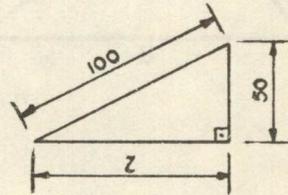
$$Y = 2 \times 30 \qquad Y = 60$$

Respuesta: $Y = 60 \text{ mm}$

Ahora complete los espacios vacíos:

Calcular el cateto Z de un triángulo cuya hipotenusa mide 100 mm y el otro cateto 50 mm

Dibuje el triángulo rectángulo



Escriba, simbólicamente, el teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Sustituya las letras por los valores numéricos:

$$\text{-----} = 50^2 + Z^2$$

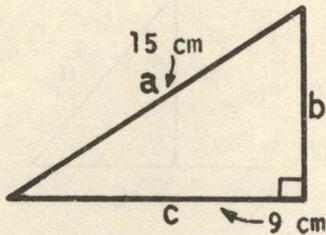
Eleve los valores numéricos al cuadrado

$$10000 = \text{-----} Z^2$$

Sustraiga las potencias $Z^2 = 10000 \text{-----}$

Extraiga la raíz cuadrada $Z = \sqrt{7500} \approx 86,6$

3. Calcular el cateto b en el triángulo rectángulo siguiente:

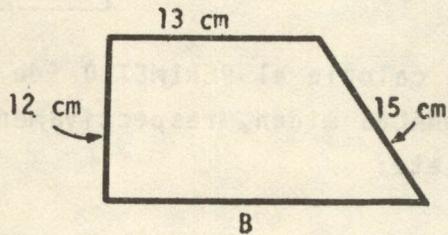


Respuesta: $b = \text{---}$

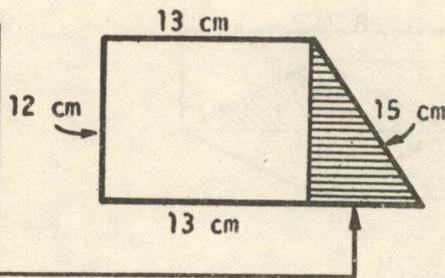
$$\begin{aligned}
 a^2 &= \dots\dots \\
 15^2 &= b^2 + \dots\dots \\
 \dots\dots &= b^2 + 81 \\
 225 &= \dots\dots = b^2 \\
 144 &= b^2 \\
 b^2 &= 144 \\
 b &= \sqrt{144} \\
 b &= 12
 \end{aligned}$$

El teorema de Pitágoras se aplica también en casos en los cuales el triángulo rectángulo no aparece, aparentemente, en una figura. Veamos algunos ejemplos:

a) Se desea calcular la BASE MAYOR del trapecio:

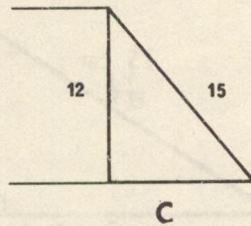


PRIMERO SE IDENTIFICA EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO.



Posteriormente se calcula el cateto c

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 \\
 15^2 &= 12^2 + c^2 \\
 \dots &= \dots + c^2 \\
 225 &= 144 = c^2 \\
 \dots &= c^2 \text{ o } c^2 = 81 \\
 c &= \sqrt{\dots} \\
 c &= \dots \text{ cm}
 \end{aligned}$$

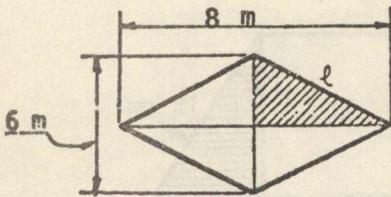


Calculando la base B del trapecio, tenemos:

$$B = 13 + 9$$

$B = 22 \text{ cm}$

- b) Ahora calcule el PERIMETRO de un ROMBO cuyas DIAGONALES miden, respectivamente, 6 y 8 m Complete:



$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 \\
 l^2 &= \dots + \dots \\
 l^2 &= \dots + \dots \\
 l^2 &= \dots \\
 l &= \sqrt{\dots} \\
 l &= \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= 4 \times 1 \\ &= 4 \times 5 = 20 \end{aligned}$$

$P = 20 \text{ m}$

EJERCICIOS

1. Complete las siguientes afirmaciones

Triángulo rectángulo es el triángulo que posee un ángulo _ _ _ _ _

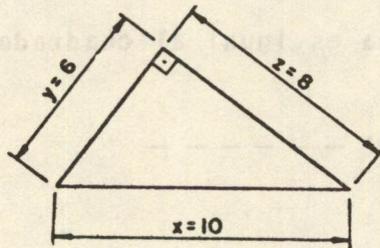
En el triángulo rectángulo, el lado de mayor medida se llama _ _ _ _ _ y los otros dos _ _ _ _ _

En cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados _ _ _ _ _

Observación

Cuando las cotas de los dibujos en los ejercicios no tienen unidades expresas, significa que la unidad de longitud utilizada es el milímetro.

2. Observe ahora el dibujo para responder las preguntas que siguen:



¿Cuánto mide el cuadrado sobre la hipotenusa?

Respuesta: _____ mm²

¿Cuánto mide el cuadrado sobre el cateto mayor?

Respuesta _____ mm²

¿Cuánto mide el cuadrado sobre el cateto menor?

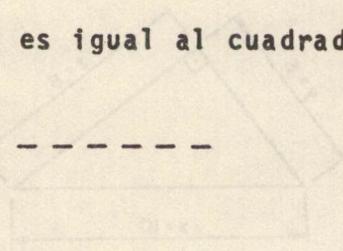
Respuesta: _____ mm²

¿A qué es igual la suma de los cuadrados de los catetos?

Respuesta: _____ mm²

¿Esta suma es igual al cuadrado sobre la hipotenusa?

Respuesta: _____



¿Cuál es la diferencia entre el cuadrado sobre la hipotenusa y el cuadrado sobre el cateto mayor?

Respuesta _ _ _ _ _ mm²

¿Esta diferencia es igual al cuadrado del cateto menor?

Respuesta: _ _ _ _ _

¿Cuál es la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del cateto menor?

Respuesta _ _ _ _ _ mm²

¿Esta diferencia es igual al cuadrado del cateto mayor?

Respuesta: _ _ _ _ _

Señale la alternativa correcta

() $x^2 = y^2 + z^2$

() $y^2 = x^2 - z^2$

() $z^2 = x^2 - y^2$

() Las tres alternativas anteriores no están correctas.

Compare sus respuestas

1. recto - hipotenusa - catetos - sobre los catetos

2. 100; 64; 36; $64 + 36 = 100$; Sí

$$100 - 64 = 36; \text{ Sí}$$

$$100 - 36 = 64; \text{ Sí}$$

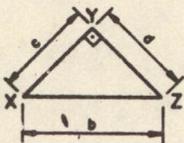
$$(X) \quad x^2 = y^2 + z^2$$

$$(X) \quad y^2 = x^2 - z^2$$

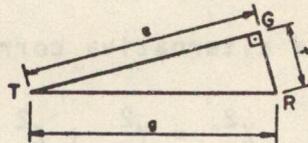
$$(X) \quad z^2 = x^2 - y^2$$

Continúe...

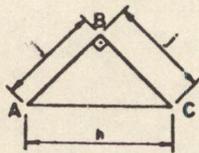
3. Observe los dibujos y complete las igualdades.



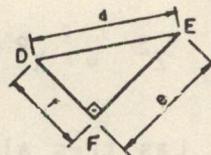
a) $b^2 = d^2 + c^2$



b) $g^2 = e^2 + f^2$



c) $h^2 = \dots + \dots$



d) $d^2 = \dots + \dots$

Conociendo el teorema de Pitágoras, es posible calcular uno de los lados de un triángulo rectángulo, conociendo los otros dos lados.

Cálculo de la hipotenusa

Estos ejemplos le servirán para resolver sus dudas.

¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos iguales a 16 y 12?

$$a^2 = b^2 + c^2$$

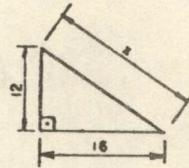
$$x^2 = 12^2 + 16^2$$

$$x^2 = 144 + 256$$

$$x^2 = 400$$

$$x = \sqrt{400}$$

$$x = 20 \text{ mm}$$



Otro ejemplo

¿Cuánto mide la hipotenusa del triángulo rectángulo siguiente?

$$a^2 = b^2 + c^2$$

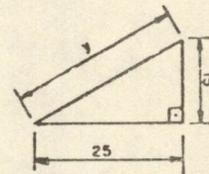
$$y^2 = 15^2 + 25^2$$

$$y^2 = 225 + 625$$

$$y^2 = 850$$

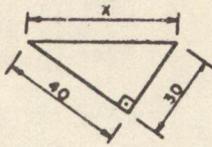
$$y = \sqrt{850}$$

$$y \approx 30 \text{ mm}$$



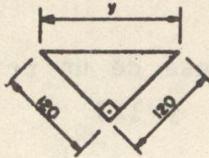
4. Calcule la longitud de la hipotenusa de los siguientes triángulos rectángulos.

a)



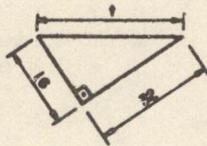
La cota X mide _____ mm

b)



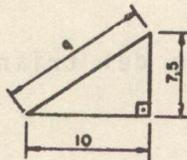
La cota Y mide _____ mm

c)



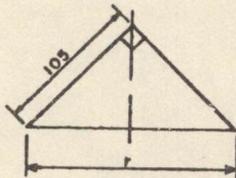
La cota t mide _____ mm

d)



La cota q mide _____ mm

e)



La cota r mide _____ mm

Cálculo de los catetos

Estos ejemplos le servirán para solucionar sus dudas:

¿Cuánto miden las cotas desconocidas Y y Z de los triángulos rectángulos siguientes?

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$2,5^2 = 2^2 + y^2$$

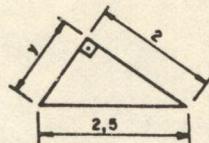
$$6,25 = 4 + y^2$$

$$y^2 = 6,25 - 4$$

$$y^2 = 2,25$$

$$y = \sqrt{2,25}$$

$$y = 1,5 \text{ mm}$$



La cota y mide 1,5 mm

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$45^2 = 27^2 + z^2$$

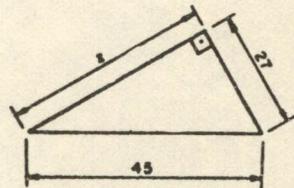
$$2025 = 729 + z^2$$

$$z^2 = 2025 - 729$$

$$z^2 = 1296$$

$$z = \sqrt{1296}$$

$$z = 36 \text{ mm}$$

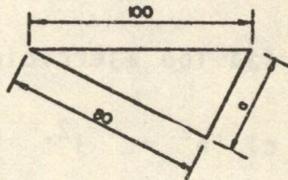


La cota z mide 36 mm

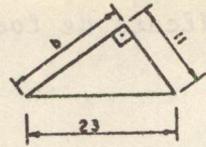
Calcule las cotas desconocidas de los siguientes triángulos rectángulos

a)

La cota a mide _ _ _ _ _ mm

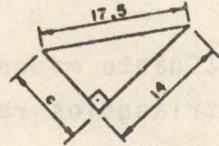


b)



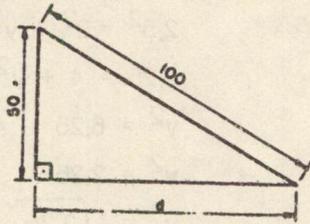
El cateto b mide _____ mm

c)



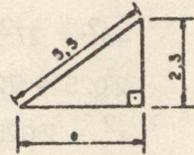
El cateto c mide _____ mm

d)



El cateto d mide _____ mm

e)



El cateto e mide _____ mm

Corrija los ejercicios 3 y 4

3. c) $h^2 = j^2 + j^2$

d) $d^2 = e^2 + f^2$

4. a) $x = 50 \text{ mm}$

b) $y \approx 169 \text{ mm}$

c) $t \approx 35 \text{ mm}$

d) $q = 12,5 \text{ mm}$

e) $r \approx 148 \text{ mm}$

Cálculo de los catetos

a) $= 60$

b) ≈ 20

c) $= 10,5$

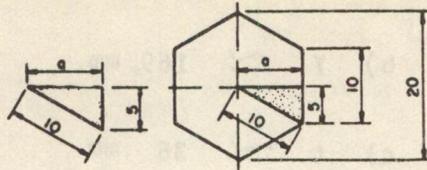
d) $\approx 86,6$

e) $\approx 4,9$

PROBLEMA

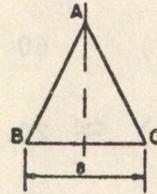
Calcule la apotema de un exágono regular inscrito en una circunferencia de 20 mm de diámetro (apotema es la perpendicular trazada desde el centro de un polígono regular a uno de sus lados).

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 \\
 10^2 &= 5^2 + a^2 \\
 100 &= 25 + a^2 \\
 a^2 &= 100 - 25 \\
 a^2 &= \sqrt{75} \\
 a &\approx 8,66 \text{ mm}
 \end{aligned}$$



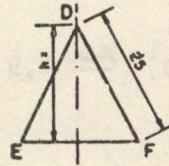
5. El perímetro del triángulo isósceles A B C es 28 mm. Determine su altura.

La altura mide _ _ _ _ mm



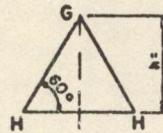
6. El perímetro del triángulo isósceles D E F es 80 mm. ¿Cuál es su altura?

La altura mide _ _ _ _ mm

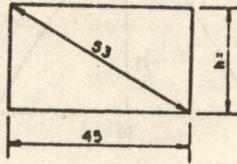


7. El perímetro del triángulo GHI es 300 mm. Determine la altura.

La altura mide _ _ _ _ mm

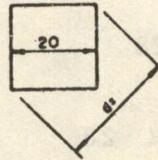


8. ¿Cuánto mide la altura del rectángulo siguiente?



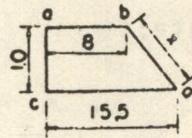
La altura del rectángulo mide _____ mm

9. ¿Cuál será la diagonal de un cuadrado que tiene de lado 20 mm?



La diagonal del cuadrado mide aproximadamente _____ mm

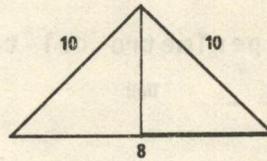
10. ¿Cuánto mide el Perímetro del trapecio siguiente?

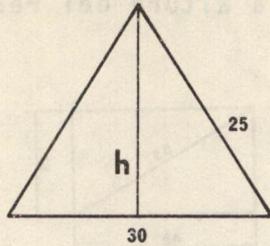


El perímetro del trapecio mide _____ mm

Antes de seguir corriamos

5. h \approx 9





6. $h \approx 20$

7. $h \approx 86$

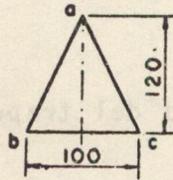
8. $h = 28$

9. $d \approx 28$

10. Perímetro = 46

Continúe...

11. Calcule el perímetro del triángulo isósceles ABC siguiente:

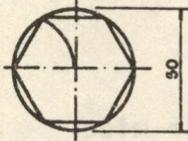


El perímetro del triángulo isósceles ABC es _____
 _____ mm

12. Calcular la altura de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide 120 mm.

La longitud de la altura del triángulo es _____
 _____ mm

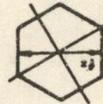
13. ¿Cuánto mide la apotema del exágono representado en la figura?



La apotema del exágono mide _____ mm

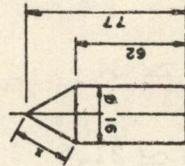
14. El perímetro de un exágono regular mide 240 mm. Calcule la cota f.

La cota f mide _____ mm

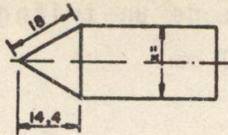


15. Una cuña de acero va a ser torneada de acuerdo con el dibujo. ¿Cuánto debe medir la cota x?

La cota x mide _____ mm

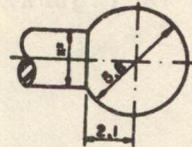


16. ¿Cuánto mide el diámetro de la pieza que sigue?



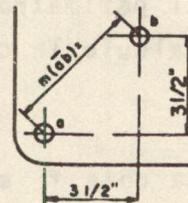
El diámetro mide _____ mm

17. Calcule la medida del diámetro menor del dibujo que se presenta.



El diámetro menor mide _____ mm

18. Calcule la distancia entre los centros de los orificios A y B en el dibujo siguiente:



m (A B) = _____ mm

RESPUESTAS

11. $P = 360$

12. $h \approx 34$

13. $ap \approx 21,6$

14. $f \approx 68$

15. $x = 17$

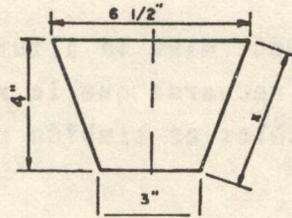
16. $x = 21.6$

17. $x = 4$

18. $m(AB) \approx \frac{9.9}{2} \approx 4 \frac{1.9}{2} \approx 4 \frac{15}{10}$

Continúe...

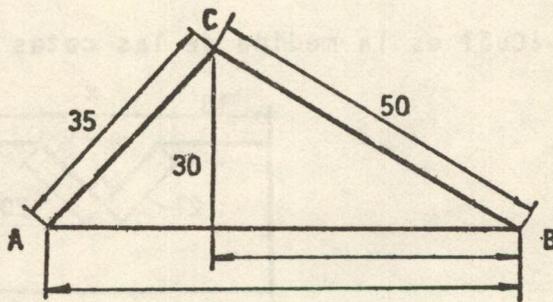
19. Determine el valor de la cota x en la pieza representada en la siguiente figura.



La cota x mide _ _ _ _ _

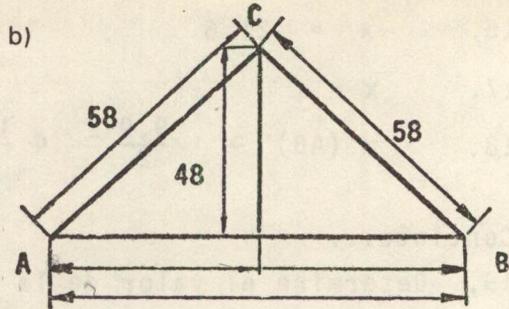
20. Calcule la distancia \overline{AB} de los siguientes dibujos.

a)



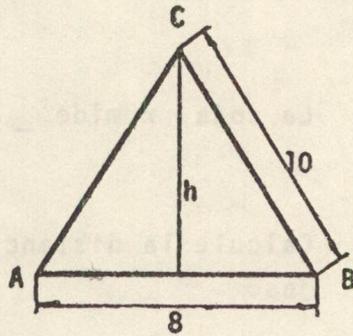
La cota \overline{AB} mide _ _ _ _ _ mm

b)



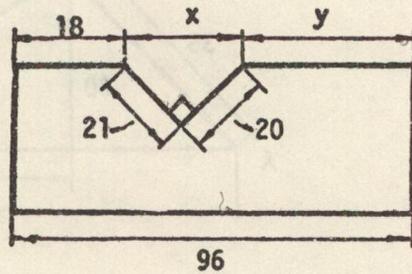
\overline{AB} mide _____ mm

21. Determine la altura de los triángulos isósceles (recuerde que la altura de los triángulos isósceles es también mediana)



La altura mide _____ mm

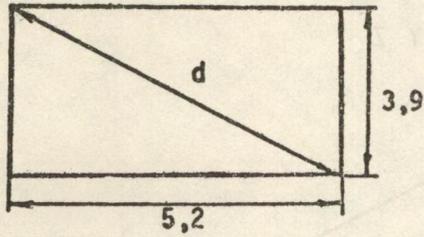
22. ¿Cuál es la medida de las cotas X y Y?



x = _____ mm

y = _____ mm

23. ¿Cuánto mide la diagonal del rectángulo?

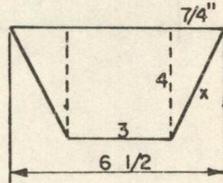


d = ----- mm

RESPUESTAS

19.

$$x \approx \frac{17,5}{4} \approx 4 \frac{1,5}{4} \approx 4 \frac{3}{8}$$



20. a) $\overline{AB} = 58 \text{ mm}$

b) $\overline{AB} = 64 \text{ mm}$

21. $h \approx 9 \text{ mm}$

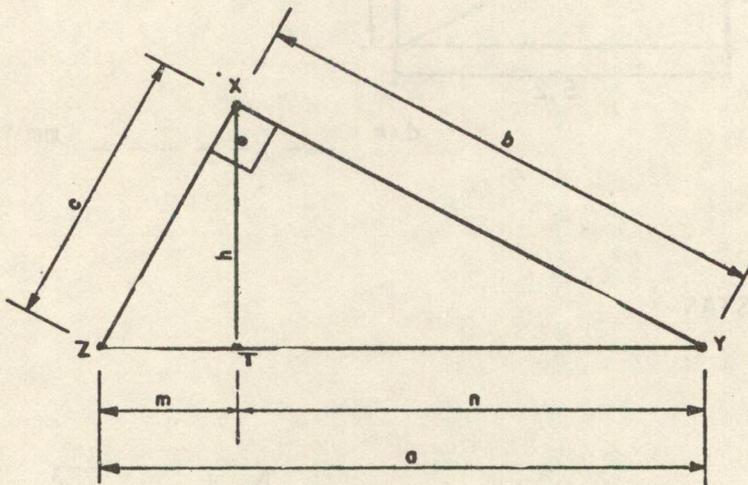
22. $x = 29 \text{ mm}$

$y = 49 \text{ mm}$

23. $d = 6,5 \text{ mm}$

RELACIONES METRICAS DEL TRIANGULO RECTANGULO

Tomemos el triángulo X Y Z



$$a = m (\overline{YZ})$$

$$b = m (\overline{XY})$$

$$c = m (\overline{XZ})$$

$$h = m (\overline{XT})$$

$$m = m (\overline{ZT})$$

$$n = m (\overline{TY})$$

YZ = hipotenusa

XZ y XY = catetos

Tenemos tres triángulos rectángulos, o sea:

$$\Delta XYZ = \Delta TXY + \Delta TZX$$

Si tomamos el $\triangle XYZ$ y $\triangle TZX$, tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \quad \text{entonces} \quad \boxed{b^2 = an}$$

La medida de cada cateto es media proporcional entre la medida de la hipotenusa y la de su segmento determinado en la hipotenusa.

Si tomamos el $\triangle XYZ$ y $\triangle TXZ$, tenemos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{m} \quad \text{entonces} \quad \boxed{c^2 = am}$$

La medida de cada cateto es media proporcional entre la medida de la hipotenusa y la de su segmento determinado sobre la hipotenusa.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \quad \text{entonces} \quad \boxed{bc = ah}$$

El producto de las medidas de los catetos es igual al producto de la medida de la hipotenusa por la medida de la altura con relación a la hipotenusa.

Si tomamos el $\triangle TXY$ y $\triangle TXZ$ tenemos:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \quad \text{entonces} \quad \boxed{h^2 = mn}$$

La medida de la altura, en relación con la hipotenusa, es media proporcional entre las medidas de los segmentos que ella determina sobre la hipotenusa.

Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

Los teoremas vistos anteriormente: $b^2 = an$ y

$$c^2 = am \quad \text{sumados}$$

obtenemos:

$$b^2 = an$$

$$c^2 = am$$

$$b^2 + c^2 = an + am$$

Factorizando el segundo miembro tenemos:

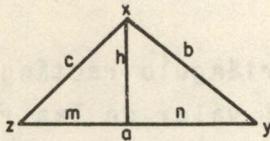
$$b^2 + c^2 = a(n+m)$$

pero, $n + m = a$ entonces $= b^2 + c^2 = a \cdot a$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Teorema de Pitágoras

Resumiendo:



$$b^2 = an$$

$$c^2 = am$$

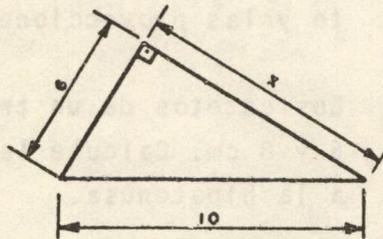
$$bc = ah$$

$$h^2 = mn$$

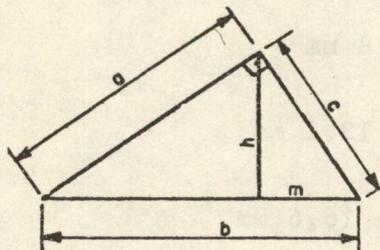
$$a^2 = b^2 + c^2$$

EJERCICIOS

1. Determine x.:



2. Calcule a, b, c para $h = 8$ mm y $m = 6$ mm



3. En los problemas siguientes, dibuje y acote los triángulos rectángulos, antes de resolverlos.

- a) La altura de un triángulo rectángulo determina sobre la hipotenusa segmentos de 4 y 16 cm. Calcule la altura
- b) La altura de un triángulo rectángulo determina sobre la hipotenusa dos segmentos, uno mide 32 dm y el otro 18. Calcule los catetos.
- c) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 m. Calcule el valor de las respectivas proyecciones sobre la hipotenusa.
- d) En un triángulo rectángulo, un cateto es igual a 15 cm y la altura respecto a la hipotenusa 12 cm. Determine la hipotenusa, el otro cateto y las proyecciones sobre la hipotenusa.
- e) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 cm. Calcule la altura con relación a la hipotenusa.

Corrija sus respuestas

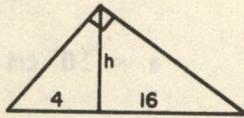
1. $X = 8 \text{ mm}$

2. $a = 13,2 \text{ mm}$

$b = 16,6 \text{ mm}$

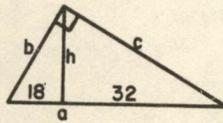
$c = 10 \text{ mm}$

3. a)



$$h = 8 \text{ mm}$$

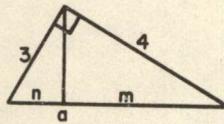
b)



$$b = 30 \text{ dm}$$

$$c = 40 \text{ dm}$$

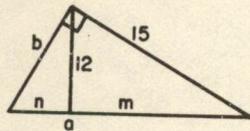
c)



$$m = 3,2 \text{ m}$$

$$n = 1,8 \text{ m}$$

d)



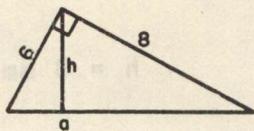
$$R = a = 25 \text{ cm}$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$m = 9 \text{ cm}$$

$$n = 16 \text{ cm}$$

e)

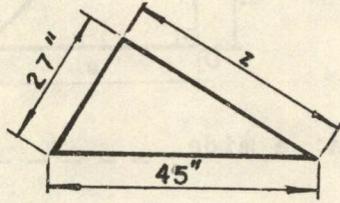


$$a = 10 \text{ cm}$$

$$h = 4,8 \text{ cm}$$

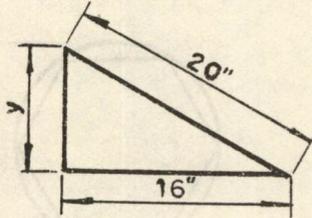
EVALUACION FINAL

1. ¿Cuánto mide la cota Z en el siguiente triángulo rectángulo?



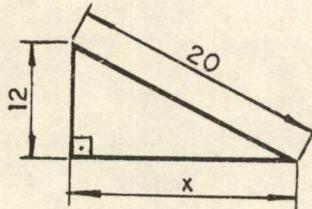
Respuesta: Z mide _____ Valor 20%

2. ¿Cuánto mide el cateto desconocido del triángulo siguiente?



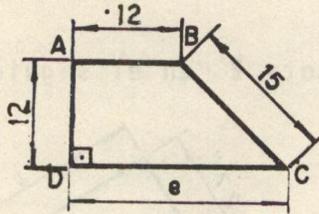
Respuesta: Y mide _____ " Valor 20%

3. ¿Cuánto mide la cota X en el siguiente triángulo?



Respuesta: X mide _____ mm Valor 20%

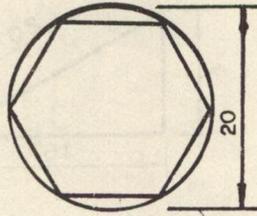
4. Calcule la longitud de la base mayor del trapecio ABCD



Respuesta: e mide _____ mm

Valor 20%

5. Calcule la apotema del exágono regular inscrito en una circunferencia de 20 mm de diámetro



Respuesta: ap mide _____ mm

Valor 20%

RESPUESTAS A LA EVALUACION FINAL

1. Cota Z = 36"
2. Y = 12"
3. X = 16 mm
4. Base mayor = 21 mm
5. ap 8,66 mm

Esta unidad fue traducida y adaptada por el SENA con la
autorización de SENAI.