Guía de actividades

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Profesor Fernando Viso

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #86.

Tema: Función cuadrática, parábola – Santillana 9no grado.

Fecha: ___________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

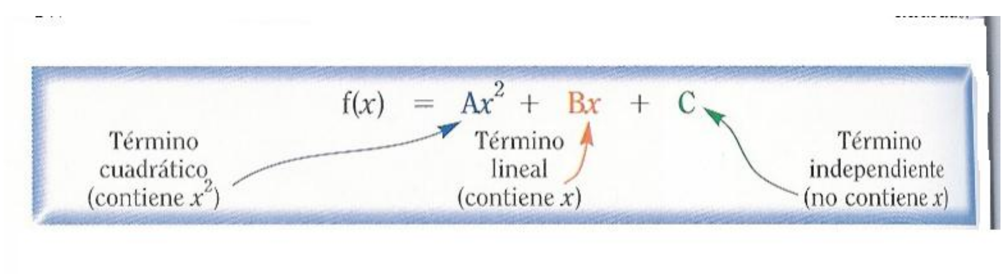
- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

1.- Función cuadrática.

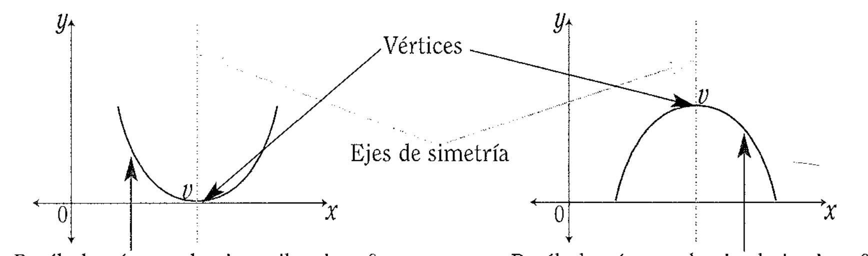
Una función cuadrática es aquella función real de la forma: $y = f_{(x)} = Ax^2 + By + C$; donde los coeficientes $\boldsymbol{A}$**,** $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son números reales con $A \neq 0$ y el dominio de la función es el conjunto ***R***.

En una función cuadrática el término Ax^2 se denomina término cuadrático; el término Bx se denomina término lineal y $\boldsymbol{C}$ es el término independiente.



Raíz de una función cuadrática: Se dice que el número α es cero, o raíz, o solución de la función cuadrática si $f(\alpha) = 0$.

Gráfico de una función cuadrática: El gráfico de una función cuadrática es una parábola vertical que se abre, o es ***cóncava hacia arriba*** si $A > 0$ y tiene un punto más bajo que los demás; en cambio, la parábola se abre, o es ***cóncava hacia abajo***, si $A < 0$ y tiene un punto más alto que los demás.



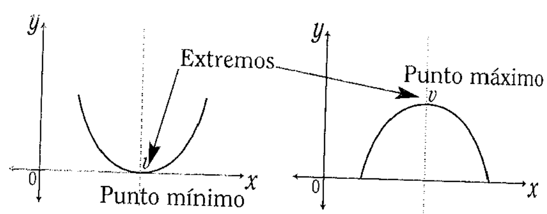
Parábola cóncava hacia arriba: A > 0 Parábola cóncava hacia abajo: A < 0

El punto más bajo o más alto de una parábola vertical se denomina ***Vértice (V)*** de la parábola. Las parábolas verticales son simétricas porque sus puntos son simétricos con respecto a la recta vertical que pasa por su vértice. La recta vertical que pasa por su vértice se llama ***eje de simetría*** de la parábola.

2.- Cálculo del vértice y el rango de una parábola.

Vértice de una parábola.

Dada una función de la forma $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, con $A \neq 0$, las coordenadas del vértice $V(x_0; y_0)$ de la parábola que está representada se obtienen determinando $x_0 = -\frac{B}{2A}$, y $y_0 = \frac{4AC - B^2}{4A}$, de manera que el vértice está dado mediante la siguiente expresión: $V\left(-\frac{B}{2A}; \frac{4AC - B^2}{4A}\right)$



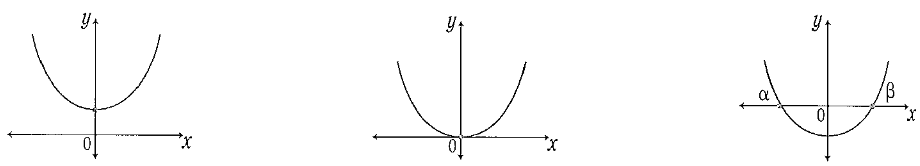
Rango de una parábola.

El rango de una función es el conjunto de las imágenes de los elementos del dominio de la función. En este caso, como el dominio es el conjunto de los números reales, se trata de hallar el conjunto de todas las imágenes. Para ello se halla el vértice $V(x_0; y_0)$ de la parábola: si es un mínimo, el rango está determinado por el intervalo $(y_0;+\infty)$; en cambio, si es máximo, está determinado por el intervalo $(-\infty; y_0)$.

3.- Análisis de una función cuadrática.

Raíces y discriminantes de una función cuadrática.

Cuando se grafica una función cuadrática cuyo dominio es ***R*****,** puede ocurrir que la parábola tenga contacto con el eje ***x*** en dos puntos, o en un solo punto o bien que no tenga contacto. Las abscisas de los puntos de contacto son las raíces reales o ceros de la función. Si no tiene contacto con el eje x, la función no tiene raíces reales. Considera las siguientes parábolas con $A>0$; es decir, parábolas cóncavas hacia arriba.



En las figuras anteriores están representadas las posiciones relativas de la parábola con respecto al eje horizontal. Se sabe que el vértice de la parábola es $V\left(-\frac{B}{2A},\frac{4AC-B^2}{4A}\right)$ y se cumple lo siguiente:

- Si la parábola no corta al eje horizontal, entonces la ordenada del vértice es positiva. Como $A>0$, se sigue que $4AC-B^2>0 \Rightarrow B^2-4AC<0.$
- Si la parábola corta al eje horizontal en un solo punto, entonces la ordenada del vértice es cero y se tiene que $B^2-4AC=0.$
- Si la parábola corta al eje horizontal en dos puntos distintos, entonces la ordenada del vértice es negativa y se tiene que $B^2-4AC>0.$

De este modo se ha visto que la intersección de la parábola vertical, que es cóncava hacia arriba, con el eje horizontal, va a depender del signo de la expresión $B^2-4AC.$ De manera análoga, la posición de la parábola vertical cóncava hacia abajo con respecto al eje horizontal también va a depender del signo de la expresión $B^2-4AC.$

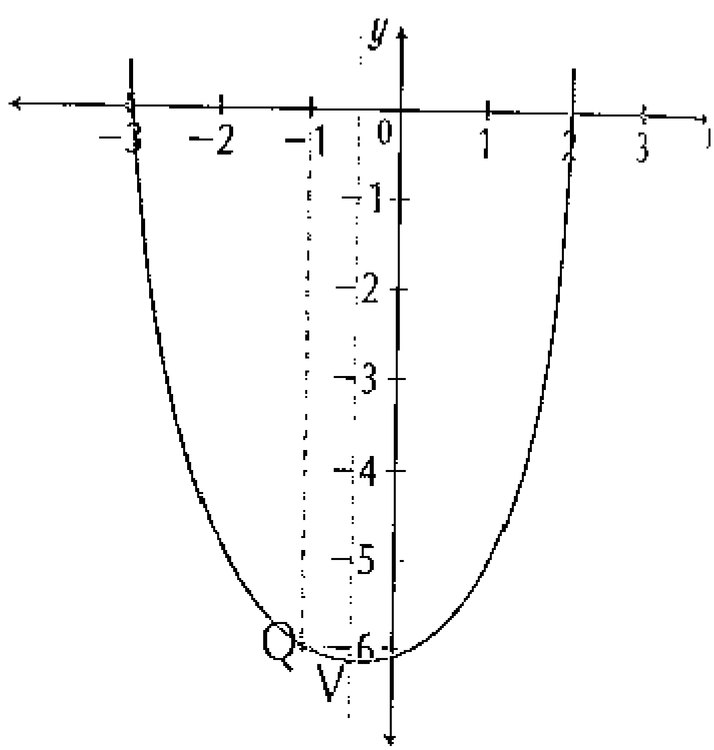
La expresión B^2-4AC nos permite discriminar el tipo de raíces que tiene la función cuadrática, por eso se le denomina ***discriminante***, y se le simboliza con la letra griega $\Delta.$
En conclusión, el gráfico de una función cuadrática no corta al eje horizontal si $\Delta<0,$ lo corta en un solo punto si $\Delta=0$ o lo corta en dos puntos distintos, de abscisas α y β si $\Delta>0.$

Ejemplo #1:

Observa el análisis realizado a la función: $y = f(x) = x^2 + x - 6.$

Solución:

- En esta función $A = 1; B = 1; C = -6.$ Como $A > 0$, la parábola vertical es cóncava hacia arriba, por lo tanto, su vértice es un punto mínimo.
- El discriminante es $\Delta = B^2 - 4AC = (1)^2 - 4\cdot(1)\cdot(-6) = 1 + 24 = 25.$ Como $\Delta > 0$, la parábola corta al eje horizontal en dos puntos distintos.
- La ecuación del eje de simetría es $x = -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{(1)}{2\cdot(1)} = -\dfrac{1}{2}$; y este número es la abscisa del vértice.
- Como $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{25}{4} \Rightarrow V\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{25}{4}\right).$
- La parábola corta al eje vertical en el punto $P(0;-6)$. Su simétrico Q, según el eje de simetría, tiene como ordenada -6, y su abscisa es: $x^2 + x - 6 = -6 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x\cdot(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -1.$ De manera que el simétrico es $Q(-1;-6).$
- El rango de la función cuadrática es $\left(-\dfrac{25}{4}; +\infty\right).$

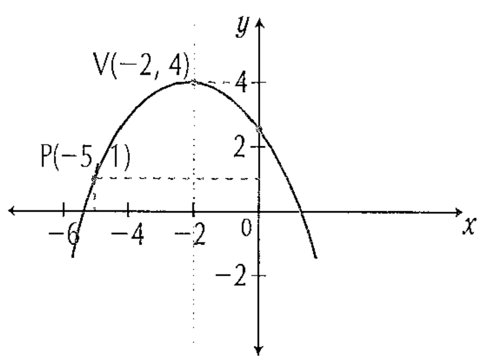


Construcción de una función cuadrática dado el vértice y un punto cualquiera de la parábola.

La fórmula de una función cuadrática también puede expresarse en ***forma canónica,*** así: $f(x) = A\cdot(x - x_v)^2 + y_v$; donde ***A*** es el coeficiente cuadrático y (x_v, y_v) son las coordenadas del vértice. Por ejemplo, $y = -4\cdot(x+1)^2 + 3$ es una función cuadrática en la cual $A = -4$ y el vértice es $V(-1,3)$. Nótese que esta función cuadrática puede escribirse de la forma $Ax^2 + Bx + C$ si se realizan las operaciones de esta manera: $f(x) = -4\cdot(x+1)^2 + 3 = -4\cdot(x^2 + 2x + 1) + 3 = -4x^2 - 8x - 1.$

Ejemplo #2:

Fíjate en la siguiente parábola:



Solución:

a).- Se parte de la fórmula canónica donde se remplazan las coordenadas del vértice V:

$$y = A\cdot\left[x - (-2)\right]^2 + 4 = A(x+2)^2 + 4.$$

b).- Se remplazan las coordenadas de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ por las coordenadas de $\boldsymbol{P}$:

$$1 = A(-5+2)^2 + 4 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$$

Se sustituye el valor de ***A*** en la fórmula canónica para obtener la fórmula general:

$$y=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(x+2)^2+4 \Rightarrow y=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x^2+4x+4\right)+4 \Rightarrow y=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^2-\left(\frac{4}{3}\right)\cdot x+\frac{8}{3}$$

PREGUNTAS:

Ejercicios de función cuadrática. Página # 143 de Santillana 9no grado.

1.- Indica si cada función dada es una función cuadrática. En caso que lo sea, denota cuales son sus coeficientes.

a).- $y=f(x)=-x^2+6$

Solución: Si $A=-1; B=0; C=6.$

b).- $y=g(x)=-3x+5$

Solución: No.

c).- $y=f(x)=x^3-3x^2+2$

Solución: No.

d).- $y=h(x)=(x-1)\cdot(x+4)$

Solución: Si $(x-1)\cdot(x+4)=x^2+3x-4 \Rightarrow A=1; B=3: C=-4$

e).- $y=8+10x-x^2$

Solución: Si $A=-1; B=10; C=8$

f).- $y=(x+5)^2$

Solución: Si $(x+5)^2=x^2+10y+25 \Rightarrow A=1; B=10; C=25$

2.- ¿Qué relación existe entre ***p*** y ***q*** si 1 es cero de $y=f(x)=px^2-3x+q$?

Solución:

$$p\cdot(1)^2-3\cdot 1+q=0 \Rightarrow p+q=3 \Rightarrow p=3-q$$

3.- En cada caso se da una función cuadrática y tres números. ¿Son esos números raíces de la función?

a).- $y = x^2 ----(0; -1; 2)$

Solución:

Sólo 0 es raíz; 1 y 2 no lo son.

b).- $y = -x^2 + 2x ----(0; 2; 1)$

Solución:

0 y 2 son raíces; 1 no lo es.

c).- $y = x^2 + 3x - 5 ----(0; 1; -2)$

Solución: Ninguno de los números dados es raíz.

4.- Traza el gráfico de la función cuadrática $f(x) = -x^2$. Luego, describe la concavidad de la figura, cuál es el eje de simetría, las coordenadas del vértice y el rano de la función.

Solución:

a).- La curva es cóncava hacia abajo.

b).- el eje de la simetría es $x = 0.$ O sea, el eje de las $\boldsymbol{y}$.

c).- El vértice es el punto $(0; 0)$

d).- El rango de la función es $(-\infty; 0)$

Cálculo del vértice y del rango de una parábola. Página 145 de Santillana 9no grado..

1.- Hallar los vértices de las funciones cuadráticas dadas:

a).- $y = -x^2 + 16$

Solución:

$$A=-1; B=0; C=16 \Rightarrow$$
$$x_0=-\frac{B}{2A}=-\frac{0}{2\cdot(-1)}=0$$
$$y_0=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(-1)\cdot(16)-0}{4\cdot(-1)}=16 \Rightarrow V(0;16)$$

b).- $y=-2x^2+4x-12$

Solución:

$$A=-2; B=4: C=-12 \Rightarrow$$
$$x_0=-\frac{B}{2A}=-\frac{4}{2\cdot(-2)}=1$$
$$y_0=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(-2)\cdot(-12)-(4)^2}{4\cdot(-2)}=\frac{96-16}{-8}=-10 \Rightarrow V=(1;-10)$$

c).- $y=x^2+x+12$

Solución:

$$A=1; B=1; C=12 \Rightarrow$$
$$x_0=-\frac{B}{2A}=-\frac{1}{2\cdot(1)}=-\frac{1}{2}$$
$$y_0=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(1)\cdot(12)-(1)^2}{4\cdot(1)}=\frac{48-1}{4}=\frac{47}{4} \Rightarrow V=\left(-\frac{1}{2};\frac{47}{4}\right)$$

d).- $y=(x-1)^2$

Solución:

$$y=x^2-2x+1 \Rightarrow A=1; B=-2; C=1 \Rightarrow$$
$$x_0=-\frac{B}{2A}=-\frac{(-2)}{2\cdot(1)}=1$$
$$y_0=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(1)\cdot(1)-(-2)^2}{4\cdot(1)}=\frac{4-4}{4}=0 \Rightarrow V=(1;0)$$

2.- ¿Dónde corta el gráfico de la función cuadrática $f(x)=x^2+x+1$ al eje vertical?

Solución:

Se busca un valor sobre el eje vertical donde en todos sus puntos $x=0$.

$y=f(0)=(0)^2+(0)+1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow P=(0;1)$

3.- ¿En qué cuadrante está el vértice de la parábola dada por la función $y=f(x)=-x^2-x+2$? . ¿Cortará ese gráfico al eje horizontal?

Solución:

$A=-1; B=-1; C=2$

$$x_0=-\frac{B}{2A}=-\frac{(-1)}{2\cdot(-1)}=-\frac{1}{2}$$

$$y_0=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(-1)\cdot(2)-(-1)^2}{4\cdot(-1)}=\frac{-8-1}{-4}=\frac{9}{4} \Rightarrow V=\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right) \Rightarrow (II)\,cuad.$$

Si corta al eje horizontal porque $\boldsymbol{V}$ está por encima del eje horizontal y además es cóncava hacia abajo ya que $A<0$.

4.- ¿En qué cuadrante está el vértice de la parábola $y=f(x)=-2x^2+6x-3$?

Solución:

$A=-2; B=6; C=-3$

$$x_0=-\frac{B}{2A}=-\frac{6}{2(-2)}=\frac{3}{2}$$

$$y_0=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(-2)\cdot(-3)-(6)^2}{4\cdot(-2)}=\frac{24-36}{-8}=\frac{-12}{-8}=\frac{3}{2} \Rightarrow (I)\,cuad.$$

5.- ¿Hay parte del gráfico de la función $y=f(x)=-x^2+4x$ en el segundo cuadrante?

Solución:

$A=-1; B=4; C=0$

$$x_0=-\frac{B}{2A}=-\frac{4}{2\cdot(-1)}=2$$

$$y_0=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(-1)\cdot(0)-(4)^2}{4\cdot(-1)}=\frac{-16}{-4}=4 \Rightarrow V=(2;4)$$

No tiene parte del gráfico en el segundo cuadrante porque el gráfico corte al eje vertical y en el punto $O=(0;0)$.

6.- ¿Existirán dos números cuya suma sea igual a 9 y su producto sea máximo?

Solución:

$a+b=9 \Rightarrow a=x; b=9-x \Rightarrow y=ab=x\cdot(9-x)=-x^2+9x$ Esta es una parábola vertical cóncava hacia abajo, cuyo punto máximo tiene como abscisa:

$x_0=-\frac{B}{2A}=-\frac{9}{2\cdot(-1)}=\frac{9}{2}$. El otro valor es $9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$.

7.- Los registros de temperatura entre las 0 horas y las 24 horas en una zona rural se ajustan a la función $T(x)=\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot(x-12)^2+10$ donde ***T*** es la temperatura en grados centígrados y ***x*** es la hora del día. Analiza y responde:

a).- ¿Cuál es la temperatura máxima?. ¿Y a que hora se registró?

b).- ¿Qué temperaturas había a las 9 de la mañana?

c).- ¿Qué temperaturas había a las 3 de la tarde?

Solución:
Solución:

a).-

$$y=T(x)=\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot(x-12)^2+10=\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(x^2-24+144\right)+10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{10}x^2+\frac{12}{5}x-\frac{144}{10}+\frac{1}{10}\Rightarrow -\frac{1}{10}x^2+\frac{12}{5}x-\frac{22}{5}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A=-\frac{1}{10}; B=\frac{12}{5}; C=-\frac{22}{5}$$

Como A < 0 la curva es una parábola cóncava hacia abajo con el vértice como punto máximo.

$$x_0 = -\frac{B}{2A} = -\frac{\frac{12}{5}}{2\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)} = 12$$

$$y_0 = \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(-\frac{22}{5}\right) - \left(\frac{12}{5}\right)^2}{4\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)} = \frac{\frac{88}{50} - \frac{144}{25}}{-\frac{4}{10}} = \frac{\frac{88-288}{50}}{-\frac{4}{10}} = 10$$

La temperatura buscada es 10°C y la hora es 12.

b).-

$$T(9) = -\frac{1}{10}\cdot(9)^2 + \frac{12}{5}\cdot(9) - \frac{22}{5} = -\frac{81}{10} + \frac{216}{10} - \frac{44}{10} = \frac{91}{10} = 9{,}1°C$$

c).-

$$T(15) = -\frac{1}{10}\cdot(15)^2 + \frac{12}{5}\cdot(15) - \frac{22}{5} = -\frac{225}{10} + \frac{360}{10} - \frac{44}{10} = \frac{91}{10} = 9{,}1°C$$

Análisis de una función cuadrática. Página 147. Santillana 9no grado.

1.- En cada caso, halla el discriminante de la función e indica la relación que tiene con el eje ***x*****.**

a).- $y = x^2 + x + 2$

Solución:

$\Delta = B^2 - 4AC = (1)^2 - 4\cdot(1)\cdot(2) = 1 - 8 = -7 \Rightarrow \Delta < 0.$ No corta al eje de las ***x*****.**

b).- $y = -x^2 - 2x + 4$

Solución:

$\Delta = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(4) = 4 + 16 = 20 \Rightarrow \Delta > 0$. Corta el eje de las ***x*** en dos puntos distintos.

c).- $y = x^2 - 2x - 3$

Solución:

$\Delta = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \Delta > 0$. Corta al eje de las $\boldsymbol{x}$ en dos puntos distintos.

d).- $y = -x^2 + 3x + 1$

Solución:

$\Delta = B^2 - 4AC = (3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (1) = 9 + 4 = 13 \Rightarrow \Delta > 0$. Corta al eje de las $\boldsymbol{x}$ en dos puntos distintos.

2.- ¿En cuántos puntos la parábola de la función cuadrática $y = f(x) = -2x^2 + 3x - 4$ corta al eje horizontal?

Solución:

$\Delta = B^2 - 4AC = (3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4) \Rightarrow 9 - 32 = -23 \Rightarrow \Delta < 0$. No corta al eje horizontal en ningún punto.

3.- Analiza y grafica cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

$g(x) = -x^2 + 4x$

$h(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$

$t(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{3}{2}$

Para ello, en cada caso, describe o calcula lo siguiente:

a).- Sus coeficientes, su concavidad y su extremo (si es mínimo o un máximo).
b).- El discriminante y la relación de la parábola con el eje horizontal ($\boldsymbol{x}$).
c).- La ecuación del eje de simetría y las coordenadas del vértice, del punto de corte con el eje vertical ($\boldsymbol{y}$).
d).- El rango de la función.

Solución:

A).- $f(x) = x^2 - 5x + 6$

a).- $A = 1; B = -5; C = 6$.Por ser A > 0 la parábola es cóncava hacia arriba y tiene un valor mínimo.

b).- $\Delta = B^2 - 4AC = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \Delta > 0$ La curva corta al eje de las $\boldsymbol{x}$ en dos puntos distintos.

c).- Para obtener la ecuación del eje de simetría, el cual es una recta paralela al eje de las $\boldsymbol{y}$ que pasa por el vértice por consiguiente perpendicular al eje de las $\boldsymbol{x}$, basta con calcular la abscisa del vértice: $x = x_v = -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{(-5)}{2\cdot(1)} = \dfrac{5}{2}$.

$$y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4\cdot(1)\cdot(6) - (-5)^2}{4\cdot(1)} = \frac{24-25}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V\left[\left(\frac{5}{2}\right),\left(-\frac{1}{4}\right)\right].$$

Para obtener el punto de corte de la curva con el eje $\boldsymbol{y}$, se hace $f(0) = (0)^2 - 5\cdot(0) + 6 \Rightarrow f(0) = 6 \Rightarrow P(0,6)$

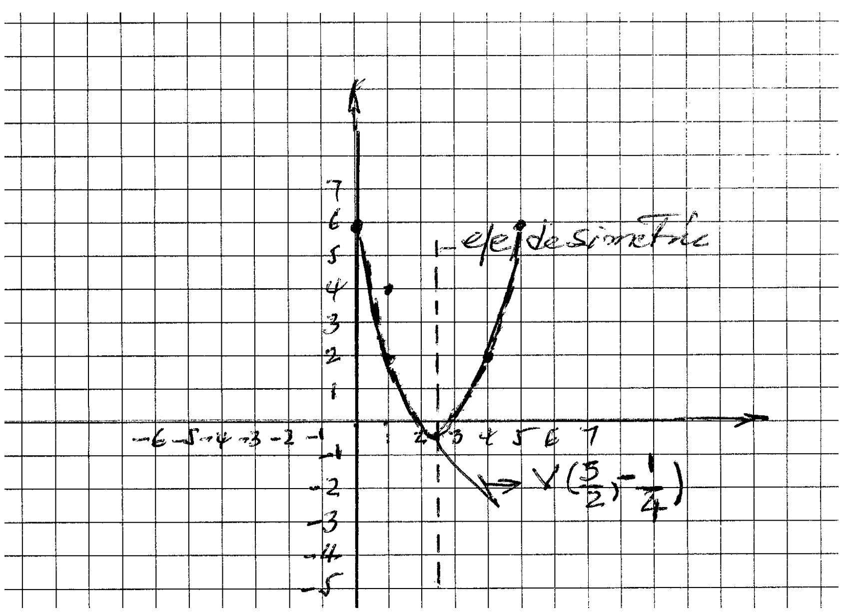
d).- El rango de la función es $\left(-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

Además, para encontrar los ceros de la función:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$

Luego:

x	1	4	0	5	
$f(x)$	2	2	6	6	



B).- $g(x) = -x^2 + 4x$

a).- $A = -1; B = 4; C = 0.$ A < 0, por tanto es una curva cóncava hacia abajo con un punto máximo.

b).- $\Delta = B^2 - 4AC = (4)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(0) = 16 \Rightarrow \Delta > 0.$ La curva corta al eje horizontal en dos puntos distintos.

c).- La ecuación del eje de simetría es:

$$x = x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = 2 \Rightarrow y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_v = \frac{4\cdot(-1)\cdot(0) - (4)^2}{4\cdot(-1)} = 4 \Rightarrow V(2,4)$$

La curva corta al eje de las $\boldsymbol{y}$ en $g(0) = -(0)^2 + 4\cdot(0) = 0 \Rightarrow P(0,0)$

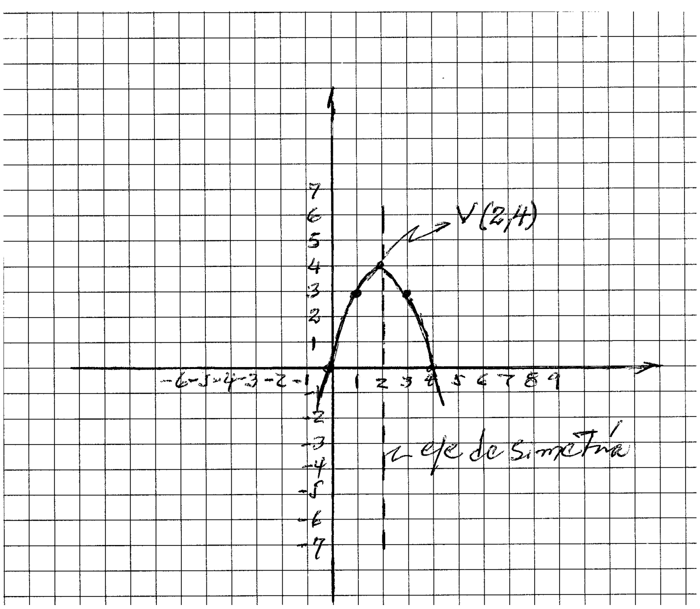
d).- El rango de la curva es $(-\infty, 4)$

Además, para encontrar los ceros de la función:

$$-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x\cdot(4 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 4$$

Luego:

x	1	3	-1	5
$f(x)$	3	3	-5	-5



C).- $h(x)=x^2-x+\dfrac{1}{4}$

a).- $A=1; B=-1; C=\dfrac{1}{4} \Rightarrow A>0.$ La curva es cóncava hacia arriba con un mínimo.

b).- $\Delta = B^2-4AC=(-1)^2-4\cdot(1)\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)=1-1=0 \Rightarrow \Delta=0$ La curva corta al eje horizontal en un solo punto.

c). La ecuación del eje de simetría es:

$$x=x_v=-\frac{B}{2A}=-\frac{(-1)}{2\cdot(1)}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$y_v=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(1)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)-(-1)^2}{4\cdot(1)}=\frac{1-1}{4}=0\Rightarrow V\left(\frac{1}{2},0\right)$$

La curva corta al eje de las $\boldsymbol{y}$ en el punto:

$$h(0)=(0)^2-(0)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow P\left(0,\frac{1}{4}\right)$$

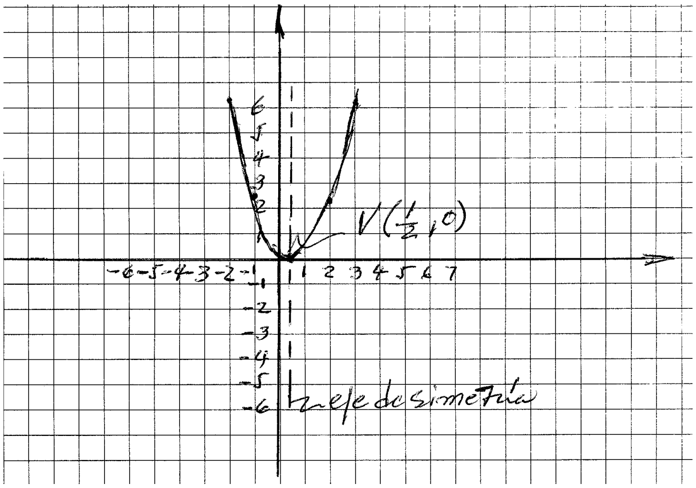
d).- El rango de la función es: $(0,+\infty)$.

Además, para encontrar los ceros de la función:

$$x^2-x+\frac{1}{4}=0\Rightarrow 4x^2-4x+1=0\Rightarrow \frac{4}{4}\cdot\left(4x^2-4x+1\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(4x)^2-4\cdot(4x)+4}{4}=0\Rightarrow \frac{(4x-2)^2}{4}=0\Rightarrow x_1=x_2=\frac{1}{2}$$

x	0	-1	2	-2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{4}$



D).- $t(x)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2+\frac{3}{2}$

a).- $A=-\frac{1}{2};B=0;C=\frac{3}{2}\Rightarrow A<0$. La curva es cóncava hacia abajo y por tanto tiene un máximo.

b).- $\Delta=B^2-4AC=(0)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)=3\Rightarrow\Delta>0$. La curva corta al eje horizontal en dos puntos distintos.

c).- La ecuación del eje de simetría es:

$$x=x_v=-\frac{B}{2A}=-\frac{(0)}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=0\left(eje-simet.=y\right)$$

$$y_v=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-(0)^2}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{2}\Rightarrow V\left(0,\frac{3}{2}\right)$$

La curva corta al eje y en el punto $P\left(0,\frac{3}{2}\right)$

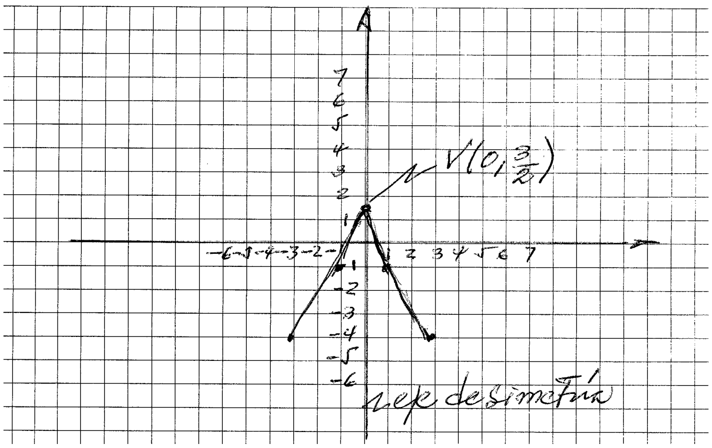
d) El rango de la función es: $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$.

Además, para encontrar los ceros de la función:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2+\frac{3}{2}=0\Rightarrow -x^2+3=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow x_1=-\sqrt{3};x_2=+\sqrt{3}$$

Luego:

x	-1	1	-3	3	
$f(x)$	1	1	-3	-3	



4.- Determina la fórmula de la función cuadrática que cumpla los requisitos pedidos en cada caso.

a).- Su gráfico pasa por el punto $(1,-1)$ y su vértice es el punto $V(-2,3)$.
b).- Su gráfico intercepta al eje y en el punto $(0,3)$ y su vértice es el punto $V(1,2)$.
c).- Una de sus raíces es $x=3$ y el vértice de su gráfico es $V\left(-\frac{1}{2},-2\right)$. Grafica cada función obtenida.

Solución:

$$f(x)=A\cdot(x-x_v)^2+y_v \Rightarrow V(-2,3) \Leftrightarrow y=A\cdot(x+2)^2+3 \Rightarrow$$

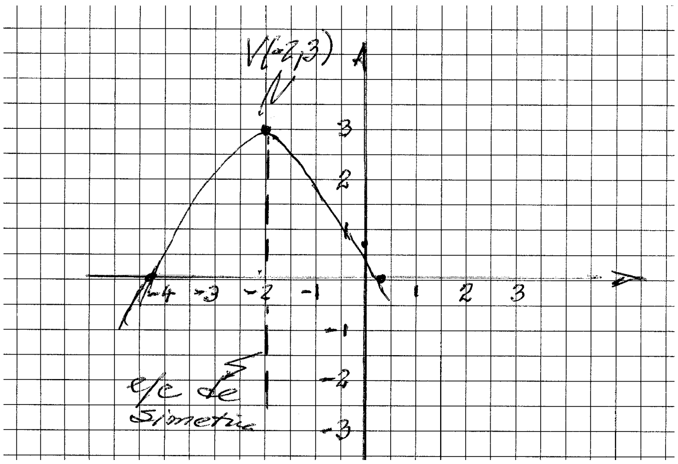
$$\Rightarrow P(1,-1) \Leftrightarrow -1=A\cdot(1+2)^2+3 \Rightarrow -1=9A+3 \Rightarrow A=-\frac{4}{9} \Rightarrow$$

a).- $$\Rightarrow y=\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot(x+2)^2+3=\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(x^2+4x+4\right)+3=$$

$$y=\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot x^2-\frac{16}{9}x-\frac{16}{9}+3=\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot x^2-\frac{16}{9}x+\frac{11}{9}$$

Como A < 0, la curva es cóncava hacia abajo y tiene un punto máximo en $V=(-2,3)$, su eje de simetría satisface la ecuación $x=-2$ y la curva corta al eje de las $\boldsymbol{y}$ en $P\left(0,\frac{11}{9}\right)$.

Ahora, $\Delta = B^2 - 4AC = \left(-\frac{16}{9}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(\frac{11}{9}\right) = \frac{256+176}{81} = \frac{432}{81} = \frac{16}{3} > 0.$ Luego, la curva corta al eje horizontal en dos puntos distintos.

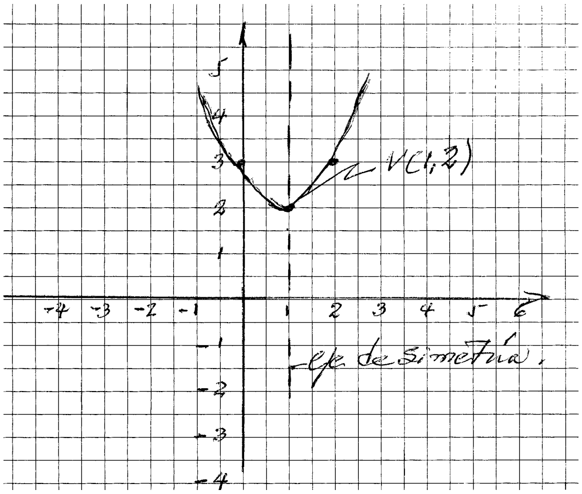


b).-

$$f\left(x\right) = A\cdot\left(x - x_v\right)^2 + y_v \Rightarrow V\left(1,2\right) \Leftrightarrow y = A\cdot\left(x-1\right)^2 + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P\left(0,3\right) \Leftrightarrow 3 = A\cdot\left(0-1\right)^2 + 2 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow$$
$$y = \left(x-1\right)^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 + 2 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 3.$$

Como A > 0, la curva es cóncava hacia arriba y por tanto tiene un mínimo en $V\left(1,2\right)$. El eje de simetría cumple con la ecuación $x = 1$.
Ahora, $\Delta = B^2 - 4AC = \left(-2\right)^2 - 4\cdot\left(1\right)\cdot\left(3\right) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta < 0$. La curva no corta al eje horizontal en ningún punto.

La curva corta al eje $\boldsymbol{y}$ en el punto $P\left(0,3\right)$.



c).

$$f\left(x\right)=A\cdot\left(x-x_v\right)^2+y_v\Rightarrow V\left(-\frac{1}{2},-2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(x\right)=A\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-2\Rightarrow x_1=3\Leftrightarrow 0=A\cdot\left(3+\frac{1}{2}\right)^2-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=A\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\Rightarrow A\cdot\frac{49}{4}=2\Rightarrow A=\frac{8}{49}>0.\Rightarrow$$

$$y=\frac{8}{49}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)-2=\frac{8}{49}\cdot\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-2=$$

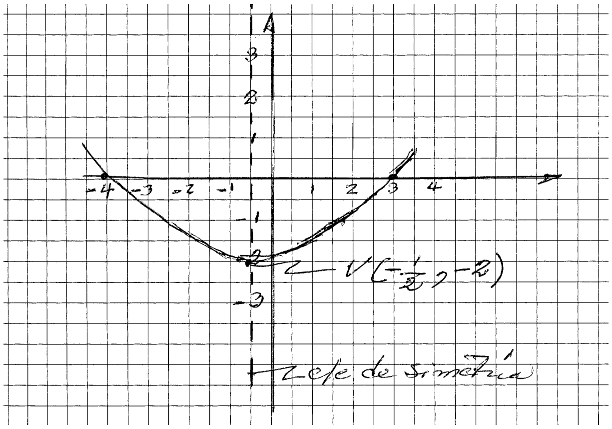
$$y=\frac{8}{49}\cdot x^2+\frac{8}{49}\cdot x+\frac{2}{49}-2=\frac{8}{49}\cdot x^2+\frac{8}{49}\cdot x-\frac{96}{49}$$

Como A > 0, la curva es cóncava hacia arriba con un mínimo en el vértice $V\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ y el eje de simetría satisface la ecuación $x=-\frac{1}{2}$.

Ahora, $\Delta=B^2-4AC=\left(\frac{8}{49}\right)^2-4\cdot\left(\frac{8}{49}\right)\cdot\left(-\frac{96}{49}\right)=\frac{64+3072}{2401}=\frac{3136}{2401}=\frac{64}{49}\Rightarrow\Delta>0.$

Entonces, la curva corta el eje horizontal en dos puntos distintos, uno de los cuales es $Q_1\left(3,0\right)$ y el otro debe ser simétrico con respecto al eje de simetría, o sea $Q_2\left(-4,0\right)$.

La curva corta al eje ***y*** en el punto $P\left(0,-\frac{96}{49}\right)$.



Cuestionario resumen. Santillana 9no grado. Página 148.

1.- Determina cuáles de las siguientes funciones son cuadráticas; luego, en las cuadráticas, cuáles son sus coeficientes:

a).- $y = x^3 - 3$

Solución:

No es cuadrática.

b).- $y = 2x - 1$

Solución:

No es cuadrática.

c).- $y = 2x^2 - 7$

Solución:

Si es cuadrática. $A = 2; B = 0; C = -7.$

d).- $y = x^2 - 5x + 3$

Solución:

Si es cuadrática. $A = 1; B = -5; C = 3.$

e).-
$y = 3x^2 - 5x + 6$.

Solución:

Si es cuadrática. $A=3; B=-5; C=6.$

f).-
$y=\sqrt{x}+3x-2.$

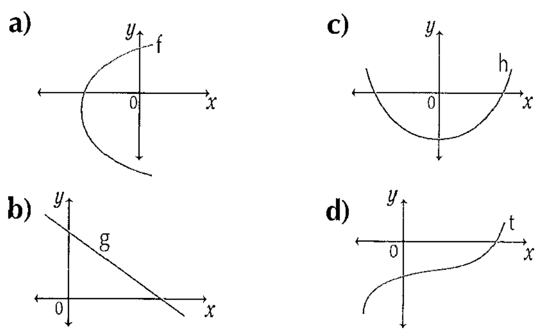
Solución:

No es cuadrática.

g).-
$$y=\frac{x+1}{x-1}$$
Solución:

No es cuadrática.

2.- Indica cuál de las figuras siguientes representa una función cuadrática. ¿Por qué?



Solución:

a).- No lo es. NO tiene simetría vertical.

b).- No lo es, es una línea recta.

c).- Si los. Si tiene simetría vertical.

d).- No loes. NO tiene simetría.

3.- Una pelota es lanzada hacia arriba desde la azotea de un edificio de 80 m. La altura $\boldsymbol{h}$ alcanzada por la pelota sobre el nivel del suelo en un tiempo igual a $\boldsymbol{t}$ segundos después del lanzamiento se expresa en función del tiempo, por: $h(t)=-16t^2+64t+80.$

a).- Determina donde estará la pelota al transcurrir 1s, 2s, 3s, 4s, 5s.

b).- Elabora una representación gráfica con estos datos.

c).- Si la máxima altura donde estará la pelota es igual a 144, ¿cuántos segundos habrá de transcurrir para que la pelota comience a caer?.

d).- ¿Qué tiempo habrá de transcurrir para que la pelota toque el suelo?

Solución:

a). Tener cuidado, darse cuenta que:

$$t = 0 \Rightarrow h(0) = 80m.$$

$$h(t) = -16t^2 + 64t + 80 \Rightarrow t = 1s \Rightarrow -16 \cdot (1)^2 + 64t + 80 = 128m.$$

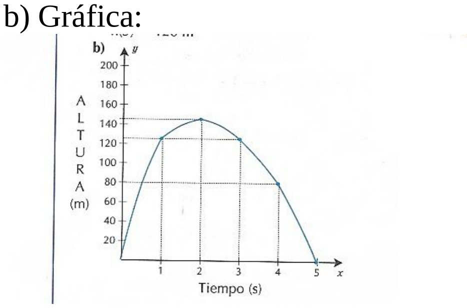
$$\Rightarrow t = 2s \Rightarrow -16 \cdot (2)^2 + 64 \cdot 2 + 80 = -64 + 128 + 80 = 144m.$$

$$\Rightarrow t = 3s \Rightarrow -16 \cdot (3)^2 + 64 \cdot (3) + 80 = --144 + 192 + 80 = 128m.$$

$$\Rightarrow t = 4s \Rightarrow -16 \cdot (4)^2 + 64 \cdot (4) + 80 = -256 + 256 + 80 = 80m.$$

$$\Rightarrow t = 5s \Rightarrow -16 \cdot (5)^2 + 64 \cdot (5) + 80 = -400 + 320 + 80 = 0m.$$

b) Gráfica:



c).-

$$\Rightarrow 144 = 64 = -16t^2 + 64t + 80 \Rightarrow -16t^2 + 64t - 64 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 \cdot (t^2 - 4t + 4) = 0 \Rightarrow -16 \cdot (t-2)^2 \Rightarrow t = 2s$$

d).- Darse cuenta que, en los cálculos anteriores, cuando $\boldsymbol{t = 5s}$ la altura $\boldsymbol{h}$ es igual a cero, o sea la pelota ha llegado al suelo.

4.- Comprueba que α es un cero de la función cuadrática dada:

a).- $\alpha = \sqrt{2};\ f(x) = x^2 - 2$

Solución:

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2-2=2-2=0\Rightarrow SI$$

Coordenadas del vértice:

$$A=1;B=0;C=-2\Rightarrow x_v=-\frac{B}{2A}=-\frac{(0)}{2\cdot(1)}=0;$$

$$y_v=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(1)\cdot(-2)-(0)^2}{4\cdot(1)}=-2\Rightarrow V(0,-2)$$

Punto de corte del eje $\boldsymbol{y}$:

$$f(0)=(0)^2-2=-2\Rightarrow y=-2\Rightarrow P(0,-2).$$

b.-

$$\alpha=-2;\ f(x)=2x^2-5x+2\Rightarrow f(-2)=2\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(-2)=8+10+2=20\Rightarrow NO$$

Coordenadas del vértice:

$$A=2;B=-5;C=2\Rightarrow x_v=-\frac{B}{2A}=-\frac{(-5)}{2\cdot(2)}=\frac{5}{4};$$

$$y_v=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(2)\cdot 2-(-5)^2}{4\cdot(2)}=\frac{16-25}{8}=-\frac{9}{8}\Rightarrow V\left(\frac{5}{4},-\frac{9}{8}\right)$$

Punto de corte del eje $\boldsymbol{y}$:

$$f(0)=2(0)^2-5\cdot(0)+2\Rightarrow y=2\Rightarrow P(0,2)$$

c).-

$$\alpha=\frac{3}{2};\ f(x)=x^2-\left(\frac{1}{2}\right)x-\frac{3}{2}\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{9}{4}-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}=\frac{6}{4}-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0\Rightarrow SI$$

Coordenadas del vértice:

$$A=1; B=-\frac{1}{2}; C=-\frac{3}{2} \Rightarrow x_v=-\frac{B}{2A}=-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\cdot(1)}=\frac{1}{4};$$

$$y_v=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(1)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{4\cdot(1)}=\frac{-6-\frac{1}{4}}{4}=\frac{-25}{16}\Rightarrow V\left(\frac{1}{4},-\frac{25}{16}\right)$$

Punto de corte del eje ***y***:

$$f(0)=(0)^2-\frac{1}{2}\cdot(0)-\frac{3}{2}\Rightarrow y=-\frac{3}{2}\Rightarrow P\left(0,-\frac{3}{2}\right)$$

d).- $\alpha=2; f(x)=(x-1)\cdot(x-2)\Rightarrow(2-1)\cdot(2-2)=0\Rightarrow SI$

Coordenadas del vértice:

$$f(x)=(x-1)\cdot(x-2)=x^2-3x+2\Rightarrow A=1; B=-3; C=2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_v=-\frac{B}{2A}=-\frac{(-3)}{2\cdot(1)}=\frac{3}{2}; y_v=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(1)\cdot(2)-(-3)^2}{4\cdot(1)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_v=\frac{8-9}{4}=-\frac{1}{4}\Rightarrow V\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$$

Punto de corte del eje ***y***:

$$f(0)=(0)^2-3\cdot(0)+2\Rightarrow y=2\Rightarrow P(0,2)$$

e).-

$$\alpha=-5; f(x)=(x-1)\cdot(x-2)+(x-3)\cdot(x-4)\Rightarrow$$
$$f(-5)\Rightarrow(-5-1)\cdot(-5-2)+(-5-3)\cdot(-5-4)\neq 0\Rightarrow NO$$

Coordenadas del vértice:

$$f(x)=(x-1)\cdot(x-2)+(x-3)\cdot(x-4)=x^2-3x+2+x^2-7x+12\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2-10x+14\Rightarrow A=2; B=-10; C=14\Rightarrow x_v=-\frac{B}{2A}=-\frac{(-10)}{2\cdot(2)}=\frac{5}{2};$$

$$y_v=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot(2)\cdot(14)-(-10)^2}{4\cdot(2)}=\frac{112-100}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}\Rightarrow V\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Punto de corte del eje $\boldsymbol{y}$:

$$f(0) = 2\cdot(0)^2 - 10\cdot(0) + 14 \Rightarrow y = 14 \Rightarrow P(0,14)$$

5.- Analiza y grafica cada una de las siguientes funciones cuadráticas:

a).- $f(x) = x^2 - 3$

Solución:

$A = 1; B = 0; C = -3 \Rightarrow A > 0.$ Es una curva cóncava hacia arriba con un mínimo.

Luego: $\Delta = B^2 - 4AC = (0)^2 - 4\cdot(1)\cdot(-3) = 12 \Rightarrow \Delta > 0.$ La curva corta al eje horizontal $\boldsymbol{x}$ en dos puntos distintos.

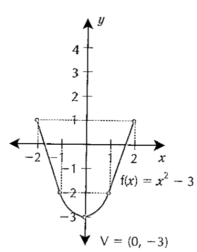
Las coordenadas del vértice son:

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{(0)}{2\cdot(1)} = 0; y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4\cdot(1)\cdot(-3) - (0)^2}{4\cdot(1)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_v = -3 \Rightarrow V(0,-3)$$

El eje de simetría es $x = x_v = 0$

Punto de corte del eje $\boldsymbol{y}$:

$$f(0) = (0)^2 - 3 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow P(0,-3).$$



b).-
$f(x) = -x^2 + 4$

Solución:

$A = -1; B = 0; C = 4 \Rightarrow A < 0.$ La curva es cóncava hacia abajo y por tanto tiene un máximo.

$\Delta = B^2 - 4AC = (0)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(4) = 16 \Rightarrow \Delta > 0.$ La curva corta al eje horizontal en dos puntos distintos.

Las coordenadas del vértice son:

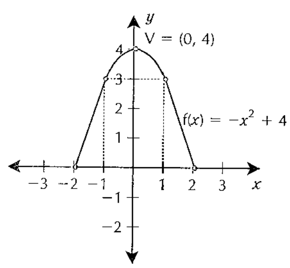
$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{(0)}{2\cdot(-1)} = 0; y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_v = \frac{4\cdot(-1)\cdot(4)-(0)^2}{4\cdot(-1)} = 4 \Rightarrow V(0,4)$$

El eje de simetría satisface la ecuación $x = x_v = 0.$

La curva corta al eje ***y*** en:

$y = f(0) = -(0)^2 + 4 = 4 \Rightarrow P(0,4)$



c).- $f(x) = x^2 - 2x$

Solución:

$A = 1; B = -2; C = 0 \Rightarrow A > 0.$ La curva es cóncava hacia arriba y tiene un mínimo.

$\Delta = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4\cdot(1)\cdot(0) = 4 \Rightarrow \Delta > 0.$ La curva corta al eje horizontal en dos puntos distintos.

Las coordenadas del vértice son:

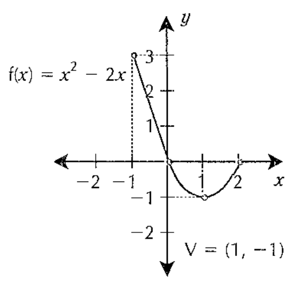
$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-2)}{2\cdot(1)} = 1; y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4\cdot(1)\cdot(0) - (-2)^2}{4\cdot(1)} = -4 \Rightarrow \Delta < 0.$ La curva no corta al eje horizontal.

Las coordenadas del vértice son:

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-2)}{2\cdot(1)} = 1; y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4\cdot(1)\cdot(0) - (-2)^2}{4\cdot(1)} = -1 \Rightarrow V(1,-1)$$

El eje de simetría satisface la ecuación: $x = x_v = 1$.

La curva corta al eje ***y*** en:
$f(0) = (0)^2 - 2\cdot(0) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0,0)$



d).- $f(x) = -x^2 + 3x$

Solución:

$A = -1; B = 3; C = 0 \Rightarrow A < 0.$ La parábola es cóncava hacia abajo con un máximo.

$\Delta = B^2 - 4AC = (3)^2 - 4(-1)\cdot(0) = 9 \Rightarrow \Delta > 0.$ La parábola corta al eje horizontal en dos puntos distintos.

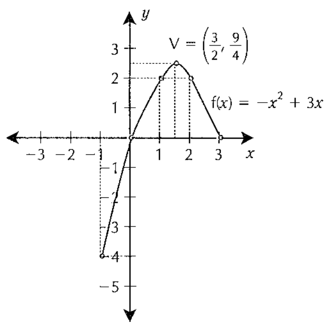
Las coordenadas del vértice son:

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{(3)}{2\cdot(-1)} = \frac{3}{2}; y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4\cdot(-1)\cdot(0) - (3)^2}{4\cdot(-1)} = \frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$$

El eje de simetría satisface la ecuación $x = x_v = \dfrac{3}{2}$

La curva corta al eje $\boldsymbol{y}$ en:

$$f(0) = -(0)^3 + 3\cdot(0) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(0,0)$$



e).- $f(x) = (x-1)\cdot(x-2) + (x-2)\cdot(x-3)$

Solución:

$f(x) = x^2 - 3x + 2 + x^2 - 5x + 6 = 2x^2 - 8x + 8 \Rightarrow\Rightarrow A = 2; B = -8; C = 8 \Rightarrow A > 0.$ La curva es cóncava hacia arriba y tiene un mínimo.

$\Delta = B^2 - 4AC = (-8)^2 - 4\cdot(2)(8) = 64 - 64 = 0 \Rightarrow \Delta = 0.$ La curva corta al eje horizontal en un solo punto.

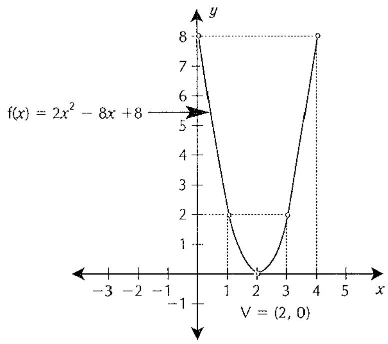
Coordenadas del vértice:

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-8)}{2\cdot(2)} = 2; y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4\cdot(2)\cdot(8) - (-8)^2}{4\cdot(2)} = 0 \Rightarrow V(2,0)$$

El eje de simetría satisface la ecuación $x = x_v = 2$

La curva corta al eje de las $\boldsymbol{y}$ en:

$$f(0) = 2\cdot(0)^2 - 8\cdot(0) + 8 = 8 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow P(0,8)$$



f).- $x^2 - 3x + 1$

Solución:

$A = 1; B = -3 : C = 1 \Rightarrow A > 0.$ La curva es cóncava hacia arriba y tiene un mínimo.

$\Delta = B^2 - 4AC = (-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (1) = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \Delta > 0.$ La curva corta al eje horizontal en dos puntos distintos.

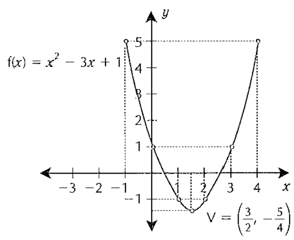
Las coordenadas del vértice son:

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-3)}{2 \cdot (1)} = \frac{3}{2}; y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4 \cdot (1) \cdot (1) - (-3)^2}{4 \cdot (1)} = -\frac{5}{4} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right)$$

El eje de simetría satisface la ecuación $x = x_v = \dfrac{3}{2}$

La curva corta al eje vertical en:

$$f(0) = (0)^2 - 3(0) + 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P(0,1)$$



g).- $f\left(x\right)=x^{2}+5x+1$

Solución:
$A=1;B=5;C=1\Rightarrow A>0.$ La curva es cóncava hacia arriba y tiene un mínimo.

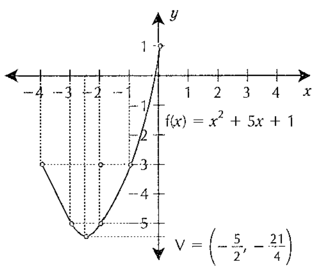
$\Delta=B^{2}-4AC=\left(5\right)^{2}-4\cdot\left(1\right)\cdot\left(1\right)=25-4=21\Rightarrow\Delta>0.$ La curva corta al eje horizontal en dos puntos distintos.

Coordenadas del vértice:

$$x_{v}=-\frac{B}{2A}=-\frac{\left(5\right)}{2\cdot\left(1\right)}=-\frac{5}{2};y_{v}=\frac{4AC-B^{2}}{4A}=\frac{4\cdot\left(1\right)\cdot\left(1\right)-\left(5\right)^{2}}{4\cdot\left(1\right)}=-\frac{21}{4}\Rightarrow V\left(\frac{5}{2},-\frac{21}{4}\right).$$

El eje de simetría satisface la ecuación $x=x_{v}=1.$

La curva corta al eje de las ***y*** en:
$f\left(0\right)=\left(0\right)^{2}+5\left(0\right)+1\Rightarrow y=1\Rightarrow P\left(0,1\right).$



h).- $f\left(x\right)=3x^2-5x+2$

Solución:

$A=3;B+-5;C=2\Rightarrow A>0.$ La curva es cóncava hacia arriba y tiene un mínimo.

$\Delta=B^2-4AC=\left(-5\right)^2-4\cdot\left(3\right)\cdot\left(2\right)=25-24=1\Rightarrow\Delta>0.$ La curva corta al eje horizontal en dos puntos distintos.

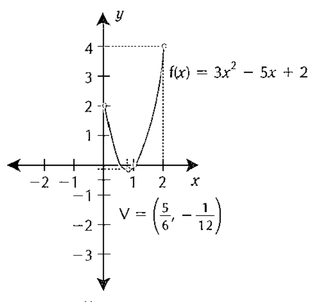
Las coordenadas del vértice son:

$$x_v=-\frac{B}{2A}=-\frac{\left(-5\right)}{2\cdot\left(3\right)}=\frac{5}{6};y_v=\frac{4AC-B^2}{4A}=\frac{4\cdot\left(3\right)\cdot\left(2\right)-\left(-5\right)^2}{4\cdot\left(3\right)}=-\frac{1}{12}\Rightarrow V\left(\frac{5}{6},-\frac{1}{12}\right)$$

El eje de simetría satisface la ecuación $x=x_v=\frac{5}{6}$

La curva corta al eje de las $\boldsymbol{y}$ en:

$$f\left(0\right)=3\cdot\left(0\right)^2-5\cdot\left(0\right)+2=2\Rightarrow y=2\Rightarrow P\left(0,2\right)$$



i).- $f(x) = 5x^2 - 3x - 3$

Solución:

$A = 5; B = -3; C = -3 \Rightarrow A > 0.$ la curva es cóncava hacia arriba por lo que tiene un mínimo.

$\Delta = B^2 - 4AC = (-3)^2 - 4\cdot(5)\cdot(-3) = -51 \Rightarrow \Delta < 0.$ La curva no corta al eje horizontal en ningún punto.

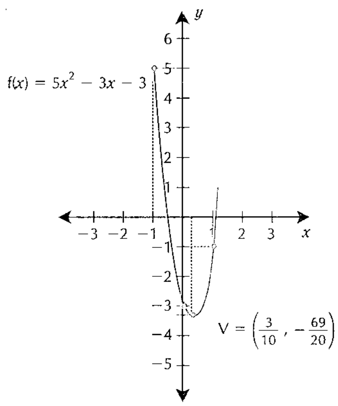
Las coordenadas del vértice son:

$$x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{(-3)}{2\cdot(5)} = \frac{3}{10}; y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} = \frac{4\cdot(5)\cdot(-3) - (-3)^2}{4\cdot(5)} = -\frac{69}{20} \Rightarrow V\left(\frac{3}{10}, -\frac{69}{20}\right)$$

La directriz satisface la ecuación $x = x_v = \frac{3}{10}$

La curva corta al eje y en:

$$f(0) = 5\cdot(0)^2 - 3\cdot(0) - 3 = -3 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow P(0,-3)$$



6.- Halla el valor que se indica en cada caso:

a).- ***m*** si 2 es un cero de la parábola $f(x) = mx^2 + 3mx - 30$.

Solución:

$f(2) = m \cdot (2)^2 + 3m \cdot (2) - 30 = 0 \Rightarrow 10m - 30 = 0 \Rightarrow m = 3.$

b).- ***a*** si la parábola $f(x) = x^2 - 4x + (a-2)$ tiene el vértice en el eje horizontal.

Solución:

$$y_v = \frac{4AC - B^2}{4A} = 0 \Rightarrow 4AC = B^2 \Rightarrow 4(1)\cdot(a-2) = (-4)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4a - 8 = 16 \Rightarrow 4a = 24 \Rightarrow a = 6.$$

c).- m si la parábola $f(x) = mx^2 - 3x + 1$ es cóncava hacia abajo.

Solución:

Para que la curva sea cóncava hacia abajo se debe cumplir que ***A < 0***, por lo que en este caso ***m < 0***.

d).- ***m*** si la parábola $f(x) = mx^2 + 4x - 3$ tiene el extremo en la recta x = 5.

Solución:

$$x = x_v = -\frac{B}{2A} = -\frac{(4)}{2\cdot(m)} = 5 \Rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

7.- Escribe la función cuadrática que cumpla con las condiciones dadas en cada acso.

a).- Su gráfico pasa por el punto $P\left(3, -\frac{1}{2}\right)$ y su vértice es $V(-2,0)$.

Solución:

Se empieza por escribir la ecuación de la parábola en su forma canónica:

$$y = A\cdot(x - x_v)^2 + y_v \Rightarrow y = A\cdot(x+2)^2 + 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2} = A\cdot(3+2)^2 = 25A \Rightarrow A = -\frac{1}{50} \Rightarrow$$
$$f(x) = y = \left(-\frac{1}{50}\right)\cdot(x+2)^2 = \left(-\frac{1}{50}\right)\cdot\left(x^2+4x+4\right) \Rightarrow$$
$$f(x) = \left(-\frac{1}{50}\right)x^2 - \left(\frac{2}{25}\right)x - \frac{2}{25}$$

b).- Su vértice es $V(0,3)$ y $x = 2$ es raíz.

Solución:

$$y = A\cdot(x - x_v)^2 + y_v \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = A\cdot(x-0)^2 + 3 \Rightarrow 0 = A\cdot(2-0)^2 + 3 \Rightarrow 4A + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$A = -\frac{3}{4} \Rightarrow y = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(x)^2 + 3$$

c).- El vértice de su gráfico es $V(-2,1)$ y la ordenada al origen es 4.

Solución:

$$y = A\cdot(x - x_v)^2 + y_v \Rightarrow$$
$$y = A\cdot(x+2)^2 + 1 \Rightarrow P(0,4) \Leftrightarrow 4 = A\cdot(0+2)^2 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 = 4A + 1 \Rightarrow A = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \left(\frac{3}{4}\right)\cdot(x+2)^2 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(x^2+4x+4\right) + 1 \Rightarrow f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)x^2 + 3x + 4.$$

ACTIVA TU INGENIO.

Durante una exhibición, una avioneta realiza una maniobra en forma de parábola, y para ello parte de cierta altura z. la altura h, en metros, que alcanza la avioneta a los t segundos de haber comenzado la maniobra está dada por la función : $h(t)=(0,5)\cdot t^2-40\cdot t+z.$ El piloto no corre riesgo si comienza la maniobra a una altura mayor de cierto valor. ¿ Cuál es esa altura mínima a la cual debe iniciar la maniobra?.

Solución:

La trayectoria de la maniobra de la avioneta es una parábola vertical, cóncava hacia arriba con un vértice cuya coordenada vertical sea mayor que cero. Entonces:

$$A=0,5, B=-40; C=z \Rightarrow y_v=\frac{4AC-B^2}{4A}>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4AC-B^2>0 \Rightarrow 4AC>B^2 \Rightarrow 4\cdot(0,5)\cdot(z)>(40)^2 \Rightarrow$$

$$z>\frac{1600}{2} \Rightarrow z>800m.$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #44.

Tema: La hipérbola.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

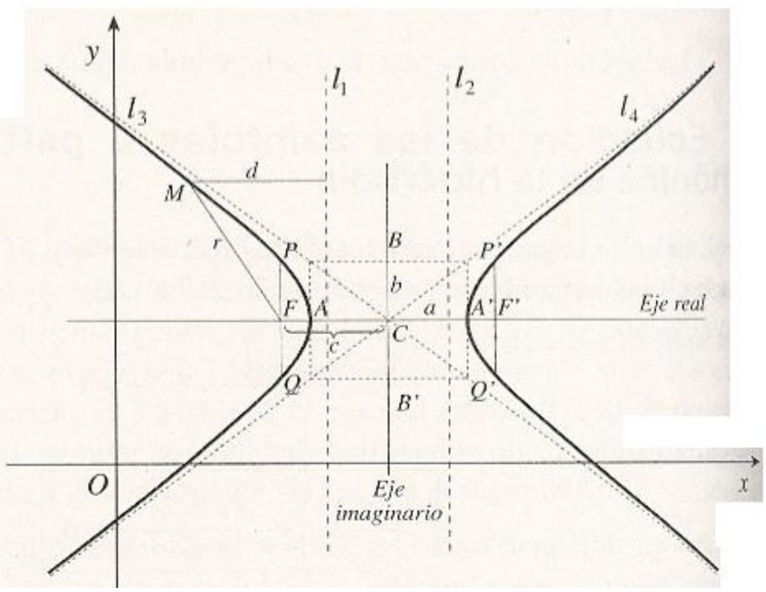
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Hipérbola

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos (tomada en valor absoluto) es constante.



Elementos de la hipérbola:

Centro:	$C(x_0, y_0)$
Focos:	F y F' (se encuentran sobre el eje real)
Vértices:	A, A', B y B'
Eje real:	$d_{(AA')} = 2a$

Semieje real: $\frac{1}{2}d_{(A,A')} = d_{(A,C)} = d_{(A',C)} = a$

Eje Imaginario: $d_{(B,B')} = 2b$

Semieje imaginario: $\frac{1}{2}d_{(B,B')} = d_{(B,C)} = d_{(B',C)} = b$

Distancia focal: $d_{(F,F')} = 2c$

Semidistancia focal: $\frac{1}{2}d_{(F,F')} = d_{(F,C)} = d_{(F',C)} = c$

Directrices: l_1 y l_2

Asíntotas: l_3 y l_4

Lados rectos: PQ y $P'Q'$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{r}{d} \qquad (e > 1)$

Relación entre *a, b* y *c*: $c^2 = a^2 + b^2$

Ecuaciones de las directrices:

Caso I	Caso II
$x = x_0 \pm \frac{a}{e}$	$y = y_0 \pm \frac{a}{e}$

Pendientes de las asíntotas:

Caso I	Caso II
$m = \pm\frac{b}{a}$	$m = \pm\frac{a}{b}$

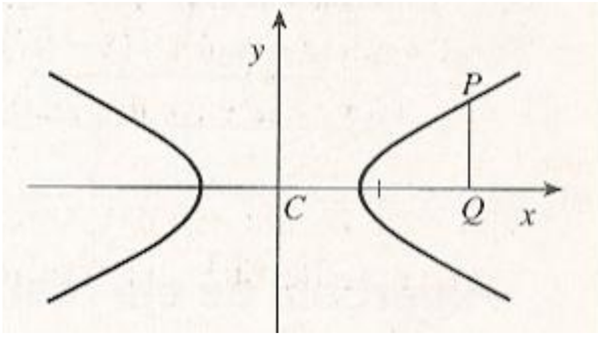
Longitud del lado recto: $d_{(P,Q)} = d_{(P',Q')} = \dfrac{2b^2}{a}$

Pendiente de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$

Caso I	Caso II
$m = \dfrac{b^2(x_1 - x_0)}{a^2(y_1 - y_0)}$	$m = \dfrac{a^2(x_1 - x_0)}{b^2(y_1 - y_0)}$

Propiedad de la hipérbola:

Desde un punto cualquiera $\boldsymbol{P}$ de la hipérbola se traza un segmento $\boldsymbol{PQ}$ perpendicular al eje real. La abscisa de $\boldsymbol{P}$ es igual a la distancia entre $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{Q}$, y su ordenada a la distancia entre $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$.



Abscisa de ***P*** = $d_{(C,Q)}$

Ordenada de ***P*** = $d_{(P,Q)}$

Como las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola, se tiene que:

$$\frac{\left|d_{(C,Q)}\right|^2}{a^2} - \frac{\left|d_{(P,Q)}\right|^2}{b^2} = 1$$

PREGUNTAS:

1.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación canónica es la siguiente:

$$\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$$

Nota importante #1: Se debe tener presente que a^2 está asociada con el ***término positivo***, por lo tanto, $a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$: En este problema, al estar a^2 como denominador del término en ***y***, indica que el eje real de la hipérbola es vertical. Dado el caso, en otro problema, donde el término en ***x*** sea positivo, y a^2 esté asociado con el término en ***x***; entonces, la hipérbola tendría en ese otro caso un eje real horizontal.

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4; c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow c = \sqrt{41}$

Luego, se trata de una hipérbola de eje real vertical con los siguientes valores:

Centro: $C(2;3)$

Focos: $F'\left(2;3+\sqrt{41}\right); F\left(2;3-\sqrt{41}\right)$

Vértices: $A'(2;8); A(2;-2); B'(-2;3); B(6;3)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{5}=\frac{6,4}{5}=1,28$

Longitud del lado recto: $\frac{ab^2}{a}=\frac{2(16)}{5}=\frac{32}{5}$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\frac{a}{e}=3\pm\frac{5}{1,28}=3\pm 3,906$

Ecuaciones de las asíntotas: $(y-3)=\pm\frac{5}{4}(x-2)$

Nota importante #2: Se debe destacar que la relación de los parámetros $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ no es la misma en la elipse que en la hipérbola. Mientras que en la elipse se cumple que $a^2=b^2+c^2$, en la hipérbola se cumple que $c^2=a^2+b^2$.

2.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$25y^2-9x^2-100y-72x-269=0$$

$$25\left(y^2-4y+?\right)-9\left(x^2+8x+?\right)=269\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\left(y^2-4y+4\right)-9\left(x^2+8x+16\right)=269+100-144=225\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{25}{225}(y-2)^2-\frac{9}{225}(x+4)^2=1\Rightarrow\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x+4)^2}{25}=1$$

Es una hipérbola de eje real vertical, $x=-4$, con los siguientes valores:

$$a^2=9\Rightarrow a=3; b^2=25\Rightarrow b=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=9+25=34\Rightarrow c=\sqrt{34}$$

Centro: $C(-4;2)$

Focos: $F'\left(-4;2+\sqrt{34}\right);F\left(-4;2-\sqrt{34}\right)$

Vértices: $A'(-4;5);A(-4;-1);B'(-9;2);B(1;2)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{34}}{3}=1,9436$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(25)}{3} = \frac{50}{3}$

Ecuaciones de las directrices: $y = y_0 \pm \frac{a}{e} = 2 \pm \frac{3}{1,9436} = 2 \pm 1,5435$

Ecuaciones de las asíntotas: $(y-2) = \pm \frac{3}{5}(x+4)$

3.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$81x^2 - 36y^2 = 2916$$

$$\frac{81}{2916}x^2 - \frac{36}{2916}y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{81} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6; b^2 = 81 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 81 = 117 \Rightarrow c = \sqrt{117}$$

Entonces, es una hipérbola de eje real horizontal, $y = 0,$ con los siguientes valores:

Centro: $C(0;0)$

Focos: $F'(\sqrt{117};0); F(-\sqrt{117};0)$

Vértices: $A'(6;0); A(-6;0); B'(0;-9); B(0;9)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{117}}{6} = \frac{10,8166}{9} = 1,8027$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(81)}{6} = 27$

Ecuaciones de las directrices: $x = x_0 \pm \frac{a}{e} = 0 \pm \frac{6}{1,8027} = \pm 3,3283$

Ecuaciones de las asíntotas: $y = \pm\left(\frac{3}{2}\right)x$

4.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 40y - 55 = 0$$

$$9\left(x^2-6x+?\right)-4\left(y^2+10y+?\right)=55\Rightarrow$$
$$9\left(x^2-6x+9\right)-4\left(y^2+10y+25\right)=55+81-100=36\Rightarrow$$
$$\frac{9}{36}(x-3)^2-\frac{4}{36}(y+5)^2=1\Rightarrow\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+5)^2}{9}=1\Rightarrow$$
$$a^2=4\Rightarrow a=2;b^2=9\Rightarrow b=3;c^2=a^2+b^2=4+9=13\Rightarrow c=\sqrt{13}$$

Entonces, se trata de una hipérbola de eje real horizontal, $y=-5$, cuyos valores son los siguientes:

Centro: $C(3;-5)$
Focos: $F'\left(3+\sqrt{13};-5\right);F\left(3-\sqrt{13};-5\right)$
Vértices: $A'(5;-5);A(1;-5);B'(3;-8);B(3;-2)$
Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$
Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{2}=9$
Ecuaciones de las directrices: $x=x_0\pm\frac{a}{e}=3\pm\frac{2}{1,8027}=3\pm1,1094$
Ecuaciones de las asíntotas: $(y+5)=\pm\left(\frac{3}{2}\right)(x-3)$

5.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$y^2-5x^2+20x-50=0$$

$$y^2-5\left(x^2-4x+?\right)=50\Rightarrow y^2-5\left(x^2-4x+4\right)=50-20=30\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{y^2}{30}-\frac{5}{30}(x-2)^2=1\Rightarrow\frac{y^2}{30}-\frac{(x-2)^2}{6}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2=30\Rightarrow a=\sqrt{30};b^2=6\Rightarrow b=\sqrt{6};\Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=30+6=36\Rightarrow c=6$$

Entonces, es una hipérbola de eje real vertical, $x=2$, con los siguientes valores:

Centro: $C(2;0)$

Focos: $F'(2;6); F(2;-6)$

Vértices: $A'\left(2;\sqrt{30}\right); A\left(2;-\sqrt{30}\right); B'\left(2-\sqrt{6};0\right); B\left(2+\sqrt{6};0\right)$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{6}{\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$

Longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(6)}{\sqrt{30}}=\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\dfrac{a}{e}=0\pm5=\pm5$

Ecuaciones de las asíntotas: $y=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}(x-2)=\pm\sqrt{5}(x-2)$

6.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$-4y^2+9x^2-90x-24y=-153\Rightarrow 9x^2-4y^2-90x-24y=-153\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9\left(x^2-10x+?\right)-4\left(y^2+6y+?\right)=-153\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9\left(x^2-10x+25\right)-4\left(y^2+6y+9\right)=-153+225-36=36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9}{36}(x-5)^2-\frac{4}{36}(y+3)^2=1\Rightarrow \frac{(x-5)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=2; b^2=9\Rightarrow b=3; c^2=a^2+b^2=4+9=13\Rightarrow c=\sqrt{13}$$

Entonces, se trata de una hipérbola de eje real horizontal, $y=-3$, con los siguientes valores:

Centro: $C=(5;-3)$

Focos: $F'\left(5+\sqrt{13};-3\right); F\left(5-\sqrt{13};-3\right)$

Vértices: $A'(7;-3); A(2;-3); B'(5;0); B(5;-6)$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}=1,8027$

Longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(9)}{2}=9$

Ecuaciones de las directrices: $x=x_0\pm\dfrac{a}{e}=5\pm\dfrac{2}{1,8027}=5\pm 1,1094$

Ecuaciones de las asíntotas: $(y+3)=\pm\dfrac{3}{2}(x-5)$

7.- Hacer el estudio de la hipérbola, cuya ecuación general es la siguiente:

$$49x^2-25y^2+294x+200y=1184$$

$$49\left(x^2+6x+?\right)-25\left(y^2-8y+?\right)=1184\Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow 49\left(x^2+6x+9\right)-25\left(y^2-8y+16\right)=1184+441-400=1225\Rightarrow$$
$$\frac{49}{1225}(x+3)^2-\frac{25}{1225}(y-4)^2=1\Rightarrow\frac{(x+3)^2}{25}-\frac{(y-4)^2}{49}=1$$

$$a^2=25\Rightarrow a=5;b^2=49\Rightarrow b=7;c^2=a^2+b^2=25+49=74\Rightarrow c=\sqrt{74}$$

Entonces, se trata de una hipérbola de eje real horizontal, $y=4,$ con los siguientes valores:

Centro: $C(-3;4)$

Focos: $F'\left(-3+\sqrt{74};4\right);F\left(-3-\sqrt{74};4\right)$

Vértices: $A'(2;4);A(-8;4);B'(-3;11);B(-3;-3)$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{74}}{5}=1,72$

Longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\left(\sqrt{74}\right)}{5}$

Ecuaciones de las directrices: $x=x_0\pm\dfrac{a}{e}=-3\pm\dfrac{5}{1,72}=-3\pm 2,9069$

Ecuaciones de las asíntotas: $(y-4)=\pm\dfrac{7}{5}(x+3)$

8.- Hacer el estudio de la hipérbola cuya ecuación general es la siguiente:

$$12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0$$

$$12\left(y^2 + 6y + ?\right) - 4\left(x^2 - 4x + ?\right) = -44 \Rightarrow$$

$$12\left(y^2 + 6y + 9\right) - 4\left(x^2 - 4x + 4\right) = -44 + 108 - 16 = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12}{48}\left(y+3\right)^2 - \frac{4}{49}\left(x-2\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\left(y+3\right)^2}{4} - \frac{\left(x-2\right)^2}{12} = 1$$

De la ecuación canónica tenemos:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2; b^2 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12}; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 12 = 16 \Rightarrow c = 4$$

El eje real de la hipérbola es vertical y sus valores son:

Centro: $C\left(2; -3\right)$

Focos: $F'\left(2; 1\right); F\left(2; -7\right)$

Vértices: $A'\left(2; -1\right); A\left(2; -5\right); B'\left(2 - \sqrt{12}; -3\right); B\left(2 + \sqrt{12}; -3\right)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(12\right)}{2} = 12$

Ecuaciones de las directrices: $y = y_0 \pm \frac{a}{e} = 2 \pm \frac{2}{2} = 2 \pm 1$

Ecuaciones de las asíntotas: $\left(y - y_0\right) = \pm \frac{a}{b}\left(x - x_0\right) = \left(y + 3\right) = \pm \frac{2}{\sqrt{12}}\left(x - 2\right)$

9.- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyo centro está en $C(-1;4)$, y donde $a=2; b=3$ y el eje real es horizontal.

$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-4)}{9}=1 \Rightarrow 9(x+1)^2-4(y-4)^2=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\left(x^2+2x+1\right)-4\left(y^2-8y+16\right)=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2+18x+9-4y^2+32y-64=36 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-4y^2+18x+32y-91=0$$

10.- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyo eje real tiene una longitud de 8 unidades y los focos son $F'(0;5); F(0;-5)$.

El enunciado del problema nos dice que: $2a=8 \Rightarrow a=4$. Además, la hipérbola tiene un eje real vertical y su centro es el punto medio del segmento conformado por los focos; es decir: $C(0;0)$ y $c=5 \Rightarrow b^2=c^2-a^2=25-16=9 \Rightarrow b=3$

La ecuación canónica y la ecuación general de la hipérbola será:

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1 \Rightarrow 9y^2-16x^2=144 \Rightarrow 9y^2-16x^2-144=0$$

11.- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyo eje imaginario tiene una longitud de 6 unidades y sus vértices en su eje real son $A'(3;4); A(3;0)$.

Al observar los valores de las coordenadas de los vértices, se deduce que el eje real es vertical, $x=3$, y el centro es el punto medio de los vértices dados, o sea: $C(3;2)$. Además, el enunciado dice que $2b=6 \Rightarrow b=3$.

Luego, se puede encontrar que: $2a=4 \Rightarrow a=2$.

La ecuación canónica y la ecuación general de esta hipérbola serán:

$$\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{9}=1\Rightarrow 9(y-2)^2-4(x-3)^2=36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(y^2-4y+4)-4(x^2-6x+9)=36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9y^2-36y+36-4x^2+24x-36-36=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9y^2-4x^2-36y+24x-36=0$$

12.- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuyos vértices en el eje real son $A'(6;3);A(0;3)$ y un foco es $F'(8;3)$.

Al inspeccionar las coordenadas de los vértices dados se deduce que la hipérbola es de eje real horizontal, $y=3$, y el centro de la hipérbola es el punto medio del segmento conformado por los vértices.; es decir: $C(3;3)$. Luego, se tiene que:
$a=3;c=5\Rightarrow b^2=c^2-a^2=25-9=16\Rightarrow b=4.$

La ecuación canónica y la ecuación general de la hipérbola dada serán:

$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{16}=1\Rightarrow 16(x-3)^2-9(y-3)^2=144\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(x^2-6x+9)-9(y^2-6y+9)-144=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2-96x+144-9y^2+96y-81-144=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2-9y^2-96x+96y-81=0$$

13.- Encontrar la ecuación de la hipérbola equilátera que tiene sus focos en los puntos siguientes: $F'(8;0);F(-8;0)$.

Al inspeccionar las coordenadas de los focos, se deduce que la hipérbola es de eje real horizontal, $y=0$, y su centro es el punto medio de los dos puntos dados; es decir: $C(0;0)$. También, $c=8$ y como en una hipérbola equilátera $a=b$, se puede entonces escribir: $c^2=a^2+b^2=2a^2\Rightarrow 64=2a^2\Rightarrow a^2=b^2=32$

La ecuación canónica de la hipérbola será:

$$\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{32}=1$$

14.- Encontrar la ecuación de la hipérbola cuya asíntota es $2x-9=3y$, su centro es $C(3;-1)$ y uno de sus vértices $A'(6;-1)$.

Inspeccionando las coordenadas del centro y del vértice permite concluir que la hipérbola es de eje real horizontal y que $a=3$.

La asíntota tiene una ecuación como sigue:

$$3y=2x-9 \Rightarrow y=\left(\frac{2}{3}\right)x-3 \Rightarrow m=\frac{b}{a}=\frac{2}{3}=\frac{b}{3} \Rightarrow b=2$$

La ecuación es entonces:

$$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1 \Rightarrow 4(x-3)^2-9(y+1)^2=36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\left(x^2-6x+9\right)-9\left(y^2+2x+1\right)=36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2-9y^2-24x-18y-9=0$$

15.- Encontrar la ecuación general de la hipérbola que pasa por el punto $P(6;5)$, y cuyas asíntotas son $l_3 \equiv 3x-2y+8=0; l_4 \equiv 3x+27-7=0$.

Las dos asíntotas se cruzan en el centro; por tanto, al resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de las dos asíntotas s encuentran las coordenadas del centro: $C(1;2)$.

Asumiendo que el eje real es horizontal, se puede escribir:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-2)^2}{b^2}=1 \text{..(1)}$$

Luego, despejando y en la ecuación $l_3 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{3}{2} \Rightarrow b=\frac{3}{2}a \Rightarrow b^2=\frac{9}{4}a^2$

Entonces, sustituyendo valores en la ecuación (1):

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-2)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)a^2}=1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{4(y-2)^2}{9a^2}=1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9(x-1)^2-4(y-2)^2=9a^2 \Rightarrow \text{................................}(2)$$

Introduciendo ahora las coordinas de $P(6;5)$ en la ecuación (2):

$$9(6-1)^2-4(5-2)^2=9a^2 \Rightarrow 25-4=a^2=21$$

Sustituyendo este valor de $a^2=21$ en la ecuación (2):

$$9(x-1)^2-4(y-2)^2=9(21)=189 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9\left(x^2-2x+1\right)-4\left(y^2-4y+4\right)=189 \Rightarrow$$
$$9x^2-18x+9-4y^2+16y-16-189=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2-4y^2-18x+16y-196=0$$

16.- Encontrar la ecuación general de la hipérbola si una de sus directrices es $l_2 \equiv 13x-131=0$, y las ecuaciones de sus asíntotas son $l_3 \equiv 5x-12y-31=0$ y $l_4 \equiv 5x+12y+41=0$.

El centro de la hipérbola es el punto donde se cruzan las dos asíntotas, por lo que al resolver las dos ecuaciones dadas para dichas asíntotas se encuentran las coordenadas del centro. Sumando las dos ecuaciones l_3+l_4 se tiene:

$10x+10=0 \Rightarrow x=-1$ Introduciendo ahora este valor de $x=-1$ en la ecuación l_3 se tiene: $-5-12y-31=0 \Rightarrow -12y-36=0 \Rightarrow y=-3$. Luego, las coordenadas del centro de la hipérbola es: $C(-1;-3)$.

Ahora, a partir de la ecuación l_3:

$5x-12y-31=0 \Rightarrow 12y=5x-31 \Rightarrow y=\left(\frac{5}{12}\right)x-\frac{31}{12}$; o sea que la pendiente de la asíntota es $m=\frac{b}{a}=\frac{5}{12} \Rightarrow b=\left(\frac{5}{12}\right)a$.

De la ecuación de la directriz se deduce lo siguiente:

$$13x-131=0 \Rightarrow 13x=131 \Rightarrow x=\frac{131}{13}=x_0+\frac{a}{e}=-1+\frac{a^2}{c} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{131}{13}+1=\frac{a^2}{c} \Rightarrow \frac{144}{13}=\frac{a^2}{c} \Rightarrow c=\frac{13}{144}\cdot a^2 \Rightarrow c^2=\frac{(13)^2}{(12)^4}\cdot a^4$$

Utilizando la relación entre los parámetros de la hipérbola:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{(13)^2}{(12)^4} \cdot a^4 = a^2 + \left(\frac{5}{12}\right)^2 \cdot a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(13)^2}{(12)^4} \cdot a^2 = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144} = \frac{(13)^2}{(12)^2} \Rightarrow a^2 = (12)^2 \Rightarrow a = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \left(\frac{5}{12}\right) a = 5$$

La ecuación canónica será, siendo el eje real horizontal porque la directriz dada es vertical:

$$\frac{(x+1)^2}{144} - \frac{(y+3)^2}{25} = 1$$

La ecuación general:

$$25(x+1)^2 - 144(y+3)^2 = 3600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25(x^2 + 2x + 1) - 144(y^2 + 6y + 9) - 3600 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 50x + 25 - 144y^2 - 864y - 1296 - 3600 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 - 144y^2 + 50x - 864y - 4871 = 0$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #43.

Tema: La elipse.

Fecha: ___________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

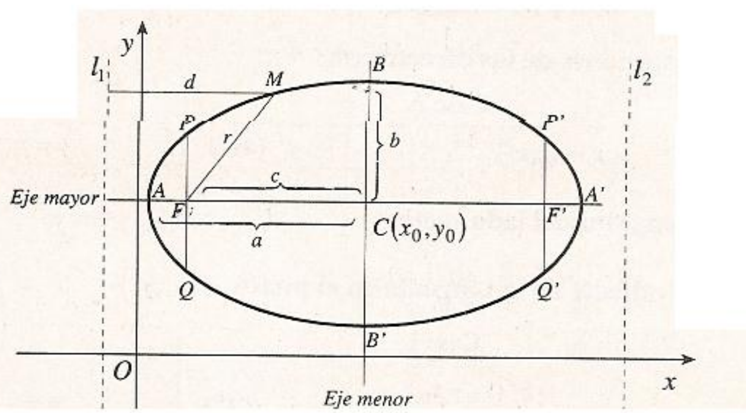
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Elipse

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



Elementos de una elipse:

Centro:	$C(x_0,y_0)$
Focos:	F y F' (se encuentran sobre el eje mayor)
Vértices:	A, A', B y B'
Eje mayor:	$d_{(AA')}=2a$
Semieje mayor:	$\frac{1}{2}d_{(A,A')}=d_{(A,C)}=d_{(A',C)}=a$

Eje menor: $d_{(B,B')} = 2b$

Semieje menor: $\frac{1}{2} d_{(B,B')} = d_{(B,C)} = d_{(B',C)} = b$

Distancia focal: $d_{(F,F')} = 2c$

Semidistancia focal: $\frac{1}{2} d_{(F,F')} = d_{(F,C)} = d_{(F',C)} = c$

Radios focales: $\overline{FM}$ y $\overline{MF}$

Directrices: l_1 y l_2

Lados rectos: PQ y $P'Q'$

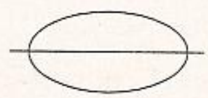
Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{r}{d} \qquad (e < 1)$

Relación entre *a*, *b* y *c*: $a^2 = b^2 + c^2$

Ecuación canónica de la elipse

Caso I

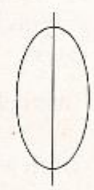
(eje mayor horizontal)



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{(47}^{\textbf{G}}\textbf{)}$$

Caso II

(Eje mayor vertical)



$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \qquad \textbf{(47a}^{\textbf{G}}\textbf{)}$$

Nota: en la ecuación de la elipse, a^2 es siempre el denominador mayor.

Coordenadas del Centro: C es el punto medio de AA', BB' y FF'

Coordenadas de los vértices y de los focos:

	Caso I	Caso II
de A y A':	$(x_0 \pm a, y_0)$	$(x_0, y_0 \pm a)$
de F y F':	$(x_0 \pm c, y_0)$	$(x_0, y_0 \pm c)$
de B y B':	$(x_0, y_0 \pm b)$	$(x_0 \pm b, y_0)$

Ecuaciones de las directrices:

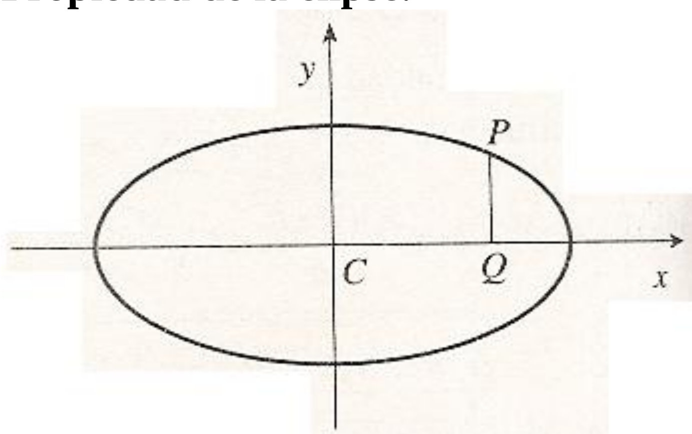
Caso I	Caso II
$x = x_0 \pm \frac{a}{e}$	$y = y_0 \pm \frac{a}{e}$

Longitud del lado recto: $d_{(P,Q)} = d_{(P',Q')} = \dfrac{2b^2}{a}$

Pendiente de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$

Caso I	Caso II
$m = -\dfrac{b^2(x_1 - x_0)}{a^2(y_1 - y_0)}$	$m = -\dfrac{a^2(x_1 - x_0)}{b^2(y_1 - y_0)}$

Propiedad de la elipse:



Desde un punto cualquiera $\boldsymbol{P}$ de la elipse se traza un segmento $\boldsymbol{PQ}$ perpendicular al eje mayor. La abscisa de $\boldsymbol{P}$ es igual a la distancia entre $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{Q}$ y su ordenada a la distancia entre $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$.

Abscisa de P = $d_{(C,Q)}$
Ordenada de P = $d_{(P,Q)}$

Como las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la elipse, se cumple que:

$$\frac{\left|d_{(C,Q)}\right|^2}{a^2} + \frac{\left|d_{(P,Q)}\right|^2}{b^2} = 1$$

PREGUNTAS:

1.-. Encontrar las coordenadas del centro, de los focos y de los vértices y la excentricidad de la elipse dada por la ecuación $4x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$.

$$4x^2-8x+y^2+6y=-9 \Rightarrow 4\left(x^2-2x+?\right)+\left(y^2+6y+?\right)=-9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+6y+9\right)=-9+4+9=4 \Rightarrow 4\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{4}\left(x-1\right)^2+\frac{\left(y+3\right)^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{\left(x-1\right)^2}{1}+\frac{\left(y+3\right)^2}{4}=1$$

La elipse tiene eje mayor vertical, entonces:

De donde: $C\left(1;-3\right); a^2=4; b^2=1 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=4-1=3 \Rightarrow a=2; b=1; c=\sqrt{3}$

Los focos serán: $F'\left(1;\sqrt{3}-3\right); F\left(1;-\sqrt{3}-3\right)$

Los vértices: $A'\left(1;-1\right); A\left(1;-5\right); B'\left(2;-3\right); B\left(0;-3\right)$.

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0,866$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\left(1^2\right)}{2}=1$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\frac{a}{e}=-3\pm\frac{2}{0,866}=-3\pm 2,309$

2.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es $9x^2+4y^2-18x+16y=11$.

$$9x^2-18x+4y^2+16y=11 \Rightarrow 9\left(x^2-2x+1\right)+4\left(y^2+4y+4\right)=11+9+16=36 \Rightarrow$$

$$\frac{9}{36}\left(x-1\right)^2+\frac{4}{36}\left(y+2\right)^2=1 \Rightarrow \frac{\left(x-1\right)^2}{4}+\frac{\left(y+2\right)^2}{9}=1$$

Es una elipse de eje mayor vertical, donde:

$$a^2=9 \Rightarrow a=3; b^2=4 \Rightarrow b=2; c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9-4=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$$

Luego: $C\left(1;-2\right); F'\left(1;-2+\sqrt{5}\right); F\left(1;-2-\sqrt{5}\right); A'\left(1;+1\right); A\left(1;-5\right);$
$B'\left(-1;-2\right); B\left(3;-2\right)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}=0,7453$

Longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(2)^2}{3} = \dfrac{8}{3}$

Ecuaciones de las directrices: $y = y_0 \pm \dfrac{a}{e} = -2 \pm \dfrac{3}{0,7453} = -2 \pm 4,025$

3.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es la siguiente:

$$4y^2 - 8y + 9x^2 - 54x + 49 = 0$$

$$4y^2 - 8y + 9x^2 - 54x + 49 = 0 \Rightarrow 4\left(y^2 - 2y + 1\right) + 9\left(x^2 - 6x + 9\right) = -49 + 4 + 81 = 36 \Rightarrow$$

$$\frac{9}{36}(x-3)^2 + \frac{4}{36}(y-1)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

Es una elipse de eje mayor vertical, con los siguientes valores:

$$C(3;1); a^2 = 9 \Rightarrow a = 3; b^2 = 4 \Rightarrow b = 2; c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Los focos: $F'\left(3;1+\sqrt{5}\right); F\left(3;1-\sqrt{5}\right)$

Los vértices: $A'(3;4); A(3;-2); B'(1;1); B(5;1)$

Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} = 0,7453$

Longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(2)^2}{3} = \dfrac{8}{3}$

Ecuaciones de las directrices: $y = y_0 \pm \dfrac{a}{e} = 1 \pm \dfrac{3}{0,7453} = 1 \pm 4,025$

4.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es la siguiente:

$$18x^2 + 12y^2 - 144x - 48y = -120$$

$$18\left(x^2-8x+?\right)+12\left(y^2-4y+?\right)=-120\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18\left(x^2-8x+16\right)+12\left(y^2-4y+4\right)=-120+288+48=216\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{18}{216}(x-4)^2+\frac{12}{216}(y-2)^2=1\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{\left(\frac{216}{18}\right)}+\frac{(y-2)^2}{\left(\frac{216}{12}\right)}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-4)^2}{12}+\frac{(y-2)^2}{18}=1\Rightarrow a^2=18\Rightarrow a=3\sqrt{2};b^2=12\Rightarrow b=2\sqrt{3}$$

$$c^2=a^2-b^2=18-12=6\Rightarrow c=\sqrt{6}$$

Es una elipse de eje mayor vertical con centro $C(4;2)$

Focos: $F'\left(4;2+\sqrt{6}\right);F\left(4;2-\sqrt{6}\right)$

Vértices: $A'\left(4;2+3\sqrt{2}\right);A\left(4;2-3\sqrt{2}\right);B'\left(4-2\sqrt{3};2\right);B\left(4+2\sqrt{3};2\right)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=0,5773$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(12)}{3\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

Ecuaciones de las directrices: $y=y_0\pm\frac{a}{e}=2\pm\frac{\sqrt{18}}{0,5773}=2\pm 7,349$

5.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es:

$$16x^2+25y^2+32x-150y=159$$

$$16\left(x^2+2x+?\right)+25\left(y^2-6y+?\right)=159\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\left(x^2+2x+1\right)+25\left(y^2-6y+9\right)=159+16+225=400$$

$$\Rightarrow \frac{16}{400}(x+1)^2+\frac{25}{400}(y-3)^2=1\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{8}=1$$

Es una elipse de eje mayor horizontal.

Además:

$C(-1;3); a^2 = 25 \Rightarrow a = 5; b^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2} \Rightarrow$
$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 8 = 17 \Rightarrow c = \sqrt{17}.$

Los focos serán: $F´\left(-1+\sqrt{17};3\right); F\left(-1-\sqrt{17};3\right)$

Los vértices serán: $A´(4;3); A(-6,3); B´\left(-1;3+2\sqrt{2}\right); B\left(-1;3-2\sqrt{2}\right)$

La excentricidad: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{17}}{5} = 0,8246$

La longitud del lado recto: $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2(8)}{5} = \dfrac{16}{5}$

Ecuaciones de las directrices: $x = x_0 \pm \dfrac{a}{e} = 1 \pm \dfrac{5}{0,8246} = 1 \pm 6,0635$

6.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es:

$$9y^2 + 108y + 4x^2 - 56x = -484$$

$$9\left(y^2 + 12y + ?\right) + 4\left(x^2 - 14x + ?\right) = -484 \Rightarrow$$
$$9\left(y^2 + 12y + 36\right) + 4\left(x^2 - 14x + 49\right) = -484 + 324 + 196 = 36$$
$$\frac{9}{36}(y+6)^2 + \frac{4}{36}(x-7)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x-7)^2}{9} + \frac{(7+6)^2}{4} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3; b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Es una elipse de eje mayor horizontal:

$C(7;-6)$

$F'(7+\sqrt{5};-6);F(7-\sqrt{5};-6)$

$A'(10;-6);A(4;-6);B'(7;-4);B(7;-8)$

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}=0,7453$

Longitud de lado recto: $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(4)}{3}=\dfrac{8}{3}$

Ecuaciones de las directrices: $x=x_0\pm\dfrac{a}{e}=7\pm\dfrac{3}{0,7453}=7\pm 4,025$

7.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es la siguiente:

$$x^2+4y^2-6x+24y=-41$$

$$\left(x^2-6x+?\right)+4\left(y^2+6y+?\right)=-41\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(x^2-6x+9\right)+4\left(y^2+6y+9\right)=-41+9+36=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{1}=1\Rightarrow$$
$$a^2=4;b^2=1;c^2=a^2-b^2=4-1=3\Rightarrow c=\sqrt{3}$$

La elipse es de eje mayor horizontal, con los siguientes valores:

$C=(3;-3)$

Focos: $F'(3+\sqrt{3};-3);F(3-\sqrt{3};-3)$

Vértices: $A'(5;-3);A(1;-3);B'(3;-2);B(3;-4)$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0,866$

Longitud de lado recto: $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(1)^2}{2}=1$

Ecuaciones de las directrices: $x = x_0 \pm \frac{a}{e} = 3 \pm \frac{2}{0,866} = 3 \pm 2,309$

8.- Hacer el estudio de la elipse cuya ecuación general es la siguiente:

$$4x^2 + y^2 - 8x - 2y = 1$$

$$4\left(x^2 - 2x + ?\right) + \left(y^2 - 2y + ?\right) = 1 \Rightarrow 4\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) = 1 + 4 + 1 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2 + (y-1)^2 = 6 \Rightarrow \frac{4}{6}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(y-1)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\frac{3}{2}} + \frac{\left(y-1^2\right)}{6} = 1 \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}; b^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Entonces, es una elipse de eje mayor vertical con los siguientes valores:

Centro: $C(1;1)$

Focos: $F'\left(1;1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right); F\left(1;1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

Vértices: $A'\left(1;1+\sqrt{6}\right); A\left(1;1-\sqrt{6}\right); B'\left(1-\sqrt{\frac{3}{2}};1\right); B\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}};1\right)$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$

Longitud del lado recto: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Ecuaciones de las directrices: $y = y_0 \pm \frac{a}{e} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{0,866} = 1 \pm 2,8285$

9.- Encontrar la ecuación canónica de la elipse cuyo centro se encuentra en el origen, $a=8; b=6$ y el eje mayor es paralelo al eje de las y.

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1 \Rightarrow 16x^2+9y^2=576 \Rightarrow 16x^2+9y^2-576=0$$

10.- Encontrar la ecuación canónica y la ecuación general de la elipse cuyo centro es $C(-3;-1)$, la longitud del semieje mayor horizontal es 7 unidades y la longitud del semieje menor es 5 unidades.

$$\frac{(x+3)^2}{(7)^2}+\frac{(y+1)^2}{(5)^2}=1 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{49}+\frac{(y+1)^2}{25}=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25(x+3)^2+49(y+1)^2=1225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25(x^2+6x+9)+49(y^2+2y+1)=1225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2+49y^2+150x+98y=1225-175-49=1001 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2+49y^2+150x+98y-1001=0$$

11.- Encontrar la ecuación de la elipse que tiene una longitud de semieje menor igual a $\frac{2}{3}$ de la longitud del semieje mayor horizontal, el centro está en el origen y $a=6$.

Los datos que conocemos es que la elipse es de eje mayor horizontal y además:

$$C(0;0); a=6; b=\frac{2}{3}a=\frac{2}{3}(6)=4$$

Luego, la ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow 4x^2+9y^2=144 \Rightarrow 4x^2+9y^2-144=0$$

12.- Encontrar la ecuación de la elipse cuyo centro está en el origen de coordenadas, su excentricidad $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$; y la longitud del semieje mayor horizontal es 10 unidades.

El enunciado del problema dice que la elipse tiene un semieje mayor horizontal y además:

$C(0;0); a=10; c=\left(\frac{1}{2}\right)a=5$

Entonces: $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=100-25=75 \Rightarrow b=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1 \Rightarrow 75x^2+100y^2=7500 \Rightarrow 3x^2+4y^2-300=0$$

13.- Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F'(2;0); F(-2;0)$ y $a=7$.

Como las ordenadas de los dos focos son iguales (*cero*) el eje mayor de la elipse es horizontal y por ser los focos equidistantes del centro, éste será $C(0;0)$.

Luego se conoce: $a=7; c=2; b^2=a^2-c^2=49-4=45 \Rightarrow b=3\sqrt{5}$.

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{45}=1 \Rightarrow 45x^2+49y^2=2205 \Rightarrow 45x^2+49y^2-2205=0$$

14.- Encontrar la ecuación de la elipse cuyo semieje mayor tiene una longitud de 4 unidades y los focos son $F'(2;3); F(2;-3)$.

Al inspeccionar las coordenadas de los focos se encuentra que las abscisas de ambos son iguales, por lo tanto el eje mayor es vertical, $x=2$, y el centro será el punto medio del segmento $F'F$, o sea $C(2;0)$.

De los datos del problema se tiene:

$a=4; c=3 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=16-9=7 \Rightarrow b=\sqrt{7}$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{(x-2)^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow 16(x-2)^2+7y^2=112 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16\left(x^2-4x+4\right)+7y^2=112 \Rightarrow 16x^2-64x+7y^2-48=0$$

15.- Encontrar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(4;2)$ y cuyos focos son $F'(1;5); F(1;-1)$.

Al inspeccionar las coordenadas de los focos, se encuentra que las abscisas de ambos son iguales, por lo que el eje mayor será vertical, $x=1$, el centro tendrá de ordenada $\frac{5+(-1)}{2}=2$, o sea $C(1;2)$.

La distancia del centro a los focos será $c=5-2=3$

Por definición de lugar geométrico en el caso de la elipse, la longitud total del eje mayor es igual a la suma de las distancias de un punto cualquiera perteneciente a la elipse a cada uno de los focos; o sea: $2a=d_1+d_2$.

$$d_1=d_{(F',P)}=\sqrt{(1-4)^2+(2-5)^2}=\sqrt{18}$$

$$d_2=d_{(F,P)}=\sqrt{(1-4)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{18}$$

$$2a=\sqrt{18}+\sqrt{18} \Rightarrow a=\sqrt{18} \Rightarrow a^2=18$$

$$b^2=a^2-c^2=18-9=9 \Rightarrow b=3.$$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{18}=1 \Rightarrow 2(x-1)^2+(y-2)^2=18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-4y+4\right)=18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+y^2-4x-4y-12=0$$

16.- Hallar la ecuación general de la elipse cuyas directrices son $l_1 \equiv x+30=0; l_2 \equiv x-24=0;$ y $A(6;2)$ es uno de los vértices del eje mayor.

Al ser verticales las directrices, la elipse tiene el eje mayor horizontal.

El cetro de la elipse debe estar a igual distancia de las directrices. Su abscisa será:

$$x_0=\frac{-30+24}{2}=-3$$

Como ele eje mayor es horizontal, la ordenada del centro será la misma del vértice A:

$$y_0=2$$

Entonces, las coordenadas del centro serán $C(-3;2)$.

El semieje mayor será:

$$a=d_{(A;C)}=6-(-3)=9$$

De l_2 tenemos que $x=24$.

También: $x=x_0+\frac{a}{e}\Rightarrow 24=-3+\frac{9}{e}\Rightarrow e=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\Rightarrow c=\frac{9}{3}=3$

Luego: $a^2=b^2+c^2\Rightarrow b^2=a^2-c^2=81-9=72$

La ecuación canónica será:

$$\frac{(x+3)^2}{81}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

La ecuación general será:

$$8x^2+9y^2+48x-36y-540=0$$

17.- Hallar la ecuación de la elipse cuyas directrices son $l_1\equiv 2y-11=0;l_2\equiv 2y+7;$ y los focos son $F'(2;-1);F(2;3)$.

Tanto por las ecuaciones de las directrices, que son perpendiculares al eje ***y***, como por las abscisas de los focos se puede afirmar que el eje mayor de la elipse es vertical.

La ordenada del centro será:

$$y_0=\frac{3-1}{2}=1$$

Entonces, las coordenadas del centro son:

$C(2;1)$

La semidistancia focal es: $c = 1 - (-1) = 2$

Y la ecuación de las directrices es:

$$y = y_0 + \frac{a}{e} = y_0 + \frac{a^2}{c} \Rightarrow \frac{11}{2} = 1 + \frac{a^2}{2} = \frac{2 + a^2}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11 = 2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

También: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}.$

Entonces, la ecuación canónica será:

$$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

La ecuación general será:

$$9(x-2)^2 + 5(y-1)^2 = 45 \Rightarrow 9\left(x^2 - 4x + 4\right) + 5\left(y^2 - 2y + 1\right) = 45 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2 - 36x + 36 + 5y^2 - 10y + 5 = 45 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2 + 5y^2 - 36x - 10y - 4 = 0$$

18.- Encontrar la ecuación canónica de la elipse cuyos vértices son $A'(5;0); A(-5;0)$ y la longitud del lado recto es $\frac{8}{5}$.

Al inspeccionar las coordenadas de los vértices, se nota que las ordenadas son iguales y por lo tanto el eje mayor es horizontal. El centro, es el punto medio entre los dos vértices; o sea:

$x_0 = \frac{-5+5}{2} = 0$ entonces, las coordenadas del centro son $C(0;0)$.

De los valores conocidos tenemos que $2a = 5 - (-5) = 10 \Rightarrow a = 5$

Ela do recto es $\frac{2b^2}{a} = \frac{2b^2}{5} = \frac{8}{5} \Rightarrow 2b^2 = 8 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

La ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

19.- La **Luna** tiene una órbita elíptica con la **Tierra** en uno de sus focos. La longitud del eje mayor es 478.000,00 millas y la excentricidad es $e = 0,0549$. Encontrar la distancia más corta y la distancia más larga de la **Tierra** a la **Luna**.

La elipse es el paso de la **Lun**a cuando gira alrededor de la T**ierra**. El eje mayor de la elipse va de $V(-a;0)$ hasta $V´(a;0)$, y $F(c;0)$ representa la posición de la **Tierra**.

Los valores son los siguientes:

$$2a = 478.000,00(millas) \Rightarrow a = 239.000,00(millas) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c = a \cdot e = 239.000 \cdot (0,0549) = 13.000,00(millas),$$

Nota: La semidistancia focal ha sido redondeada.

La distancia más corta de la **Tierra** a la **Luna** es:

$$a - c = 239.999,00 - 13.000,00 = 226.000,00(millas)$$

La distancia más larga de la **Tierra** a la **Luna** es:

$$a + c = 239.000,00 + 13.000,00 = 252.000,00(millas)$$

20.- Un puente de forma elíptica atraviesa transversalmente una autopista y sus apoyos están separados 60,0 pies y su altura máxima en el centro es de 30 pies. Calcular la altura del puente correspondiente al borde, brocal, de la autopista, si éste está a 20 pies del centro.

De los datos del enunciado, tomando el centro en el punto donde se presenta la altura máxima, tenemos:

$$C(0,0); 2a = 60 \Rightarrow a = 30 : b = 20$$

Entonces, la ecuación de la elipse de eje mayor horizontal es:

$$\frac{x^2}{(30)^2}+\frac{y^2}{(20^2)}=1 \Rightarrow (20)^2 x^2+(30)^2 y^2=(20)^2\cdot(30^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2=\frac{(20)^2\left[(30)^2-x^2\right]}{(30^2)}$$

Si el borde está a20 pies del eje central de la autopista:

$$y^2=\frac{(20)^2\left[(30)^2-(20)^2\right]}{(30)^2}=\frac{(20)^2(9-4)}{9}=\frac{(20)^2(5)}{(9)}\Rightarrow$$

$$y_b=\frac{20\sqrt{5}}{3}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #42.

Tema: La parábola.

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

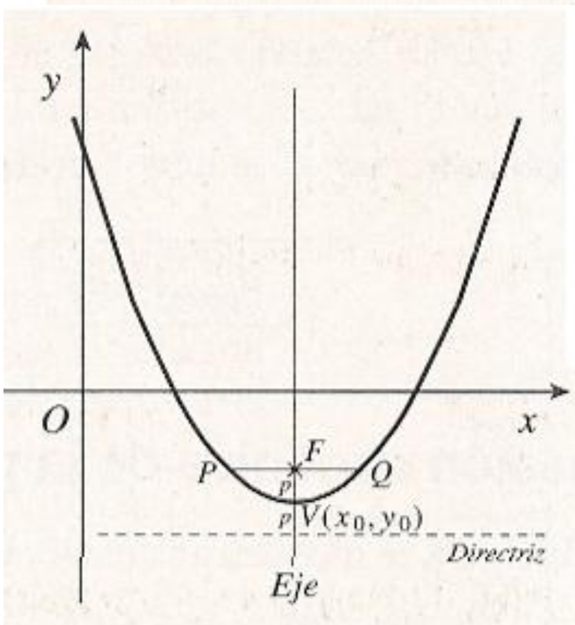
CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Parábola

Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *foco* y de una recta llamada *directriz*.



Elementos de una parábola:

Vértice: $V(x_0, y_0)$

Foco: F

Parámetro: (distancia del foco al vértice) $p = d_{(F,V)}$

Eje: (Contiene a F y V)

Directriz

Lado recto: $PQ = 4p$

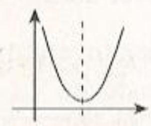
Excentricidad: $e = 1$

Ecuación canónica de la parábola

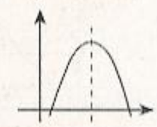
Caso I (Eje vertical)

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

$p > 0$



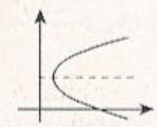
$p < 0$



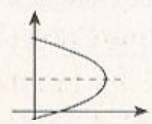
Caso II (Eje real horizontal)

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

$p > 0$



$p < 0$



Coordenadas del foco:

Caso I	Caso II
$(x_0, y_0 + p)$	$(x_0 + p, y_0)$

Ecuación del eje:

Caso I	Caso II
$x = x_0$	$y = y_0$

Ecuación de la directriz

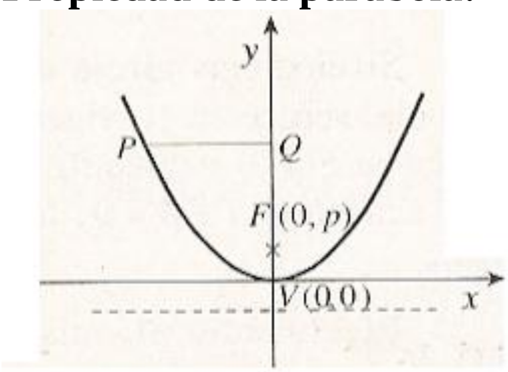
Caso I	Caso II
$y = y_0 - p$	$x = x_0 - p$

Longitud del lado recto: $d_{(P,Q)} = 4p$

Pendiente de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$

Caso I	Caso II
$m = \dfrac{x_1 - x_0}{2p}$	$m = \dfrac{2p}{y_1 - y_0}$

Propiedad de la parábola:



Desde un punto cualquiera ***P*** de una parábola se traza un segmento ***PQ*** perpendicular al eje. La abscisa de ***P*** es igual a la distancia entre ***P*** y ***Q***, y su ordenada a la distancia entre ***Q*** y ***V***.

Abscisa de ***P*** = $d_{(P,Q)}$
Ordenada de ***P*** = $d_{(Q,V)}$

Como las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la parábola, se tiene que:

$$\left|d_{(P,Q)}\right|^2 = 4p\left|d_{(Q,V)}\right|$$

La ecuación general de una parábola de eje vertical que es cóncava hacia arriba (abre hacia arriba) es la siguiente:

$y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$. Es la es la misma forma de una ecuación cuadrática.

La ecuación canónica, o estándar; sin embargo, es:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$, donde el punto (h,k) es el vértice de la parábola, o sea, el punto donde la curva corta al eje de la misma. En una parábola vertical como ésta, el vértice es el punto más bajo de la parábola; y $|p|$ es la distancia entre el vértice y el foco, y entre el vértice y la línea directriz. Entonces, para este caso específico, las coordenadas del foco serán:

$$F(h, k+p)$$

La ecuación de la directriz, para este caso específico, será:

$$y = k - p.$$

La ecuación del eje vertical, para este caso específico, será:

$$x = h.$$

Puede ser demostrado que $h = -\dfrac{b}{2a}$, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son los coeficientes de la ecuación general, y $\boldsymbol{h}$ da la coordenada $\boldsymbol{x}$ de del punto más bajo de la parábola.

El foco, es así llamado porque los rayos de luz viniendo de afuera de la parábola haia el eje central, paralelo al eje de las y, se deben reflejar desde la parábola, siguiendo la dirección del foco. Cualquier punto de la parábola es equidistante del foco y de la directriz, siendo este hecho utilizado muchas veces como definición de la parábola.

El segmento de línea que pasa a través del foco y es perpendicular al eje de la parábola, cortando a la parábola en dos puntos, es llamado el lado recto de la parábola y su longitud es igual a $|4p|$.

PREGUNTAS:

1.- Encontrar las coordenadas del foco, del vértice, la ecuación de la directriz, y el eje de simetría de la parábola cuya ecuación general es: $x^2 - 2y = 0.$

En primer lugar, se debe recordar que la ecuación canónica de la parábola de eje vertical es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \text{ donde } V(h,k).$$

Entonces:

$$x^2 - 12y = 0 \Rightarrow x^2 = 12y \Rightarrow (x-0)^2 = 4(3)(y-0)$$

$p = 3$ y $(h,k) = (0,0)$; o sea, el vértice está en el origen de coordenadas y el eje de la parábola es vertical.

Como el miembro que contiene ***x*** está elevado al cuadrado, la directriz será paralela al eje de las ***x***. Como ***p*** es positivo, la parábola abre hacia arriba. La distancia del vértice al foco es 3 unidades; de tal modo que las coordenadas del foco son $(0,3)$.

El eje de simetría contiene al vértice y al foco, por lo que es la recta $x=0$; o sea, coincide exactamente con el eje de coordenadas vertical ***y***.

Como la parábola es de eje vertical y abre hacia arriba, la ecuación de la directriz será $y=-3$.

2.- Graficar las siguientes funciones: $f(x)=x^2; g(x)=3x^2; h(x)=\frac{1}{2}x^2$, en los mismos ejes de coordenadas.

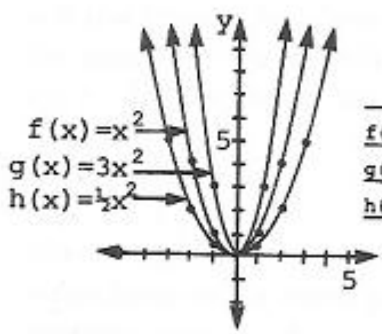
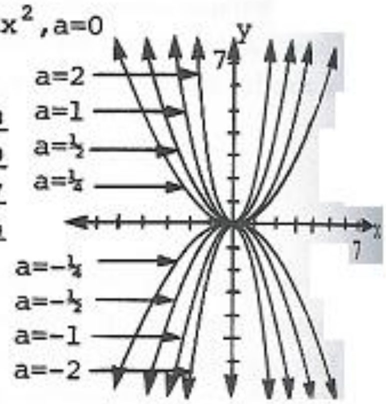


Fig. A

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
$f(x)=x^2$	0	1	1	4	4	9	9
$g(x)=3x^2$	0	3	3	12	12	27	27
$h(x)=\frac{1}{2}x^2$	0	½	½	2	2	4½	4½

Fig. B



Se comenzará por construir una tabla compuesta, mostrando los valores de cada función correspondientes a valores seleccionados de ***x***.

En esta gráfica, se grafican tres diferentes forma de la función $f(x)=ax^2 \Rightarrow a>0$, como se puede ver en la figura ***A***. Se puede notar que variando el valor de la constante ***a***, ésto tiene poco que ver con la forma general de la curva; donde el factor ***a*** es solo un factor de estrechamiento de la curva alrededor del eje de las ***y***. Si ***a*** se hace suficientemente grande, la curva se acerca mucho al eje de las ***y***. Si el valor de ***a*** decrece, la curva se abre y tiende y sus brazos tienden a estar más cerca del eje de las ***x***.

El gráfico de $f(x)=ax^2$, donde $a\neq 0$, se llama una parábola, ver figura ***B***, el punto $(0,0)$ es el vértice y el eje de simetría es vertical, confundiéndose con el eje ***y***. El valor de ***a*** determina la forma de la curva. Para $a>0$ la parábola abre hacia arriba y para $a<0$ la parábola abre hacia abajo.

3.- Hacer el estudio de la parábola siguiente: $y^2 - 4y + 4 = x - 7$.

$y^2 - 4y + 4 = x - 7 \Rightarrow \left(y^2 - 4y + 4\right) = x - 7 \Rightarrow$
$\left(y-2\right)^2 = \left(x-7\right) \Rightarrow 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4} = 0,25$ la parábola es de eje de simetría horizontal y abre hacia la derecha

La parábola es de eje de simetría horizontal, donde:

$$V\left(7,2\right)$$
$$Foco = F\left(7,25;2\right)$$
$$Directriz \Rightarrow x = 6,75$$
$$Eje \Rightarrow y = 2$$

4.- Demostrar que la ecuación cuadrática $y = 2x^2 - 20x + 25$ es la ecuación de una parábola.

En primer lugar, se debe recordar la forma de la ecuación canónica de una parábola en x^2:

$$\left(x-h\right)^2 = 4p\left(y-k\right)$$

Entonces, utilizaremos el método de complementación de cuadrados con la expresión dada:

$$2x^2 - 20x + 25 = 2\left(x^2 - 10x\right) = y - 25 \Rightarrow 2\left(x^2 - 10x + 25\right) = y - 25 + 50 \Rightarrow$$
$$\left(x-5\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(y+25\right) \Rightarrow 4p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{8}$$

Este es la ecuación de una parábola de eje vertical que abre hacia arriba, de vértice $V\left(5,-25\right)$, eje de simetría es $x = 5$, con foco $F\left(5,-25+\frac{1}{8}\right)$, y directriz $y = -25 - \frac{1}{8}$.

5.- Hacer el estudio a de la siguiente parábola: $-4x + 4 = y^2 + 10y + 25$

$$\left(y+5\right)^2 = -4\left(x-1\right)$$

Es una parábola de eje de simetría horizontal, que abre hacia la izquierda ya que $p = -1$.

El vértice $V(1,-5)$, el foco $F(0,-5)$, la ecuación de la directriz es $x=2$, y el eje de simetría es $y=-5$.

6.- Hacer el estudio de la parábola $4x^2-40y-24x-4=0$.

$$4x^2-24x+=40y+4 \Rightarrow 4\left(x^2-6x\right)=40y+4 \Rightarrow 4\left(x^2-6x+9\right)=40y+4+36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-3)^2=40(y+1) \Rightarrow (x-3)^2=10(y+1) \Rightarrow p=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Es una parábola de eje de simetría vertical, que abre hacia arriba por ser $p>0$.

El vértice $V(3,-1)$; el foco es $F\left(3,\frac{3}{2}\right)$; la ecuación de la directriz es $Y=-1-\frac{5}{2}=-\frac{7}{2}$; y el eje de simetría es $x=3$.

7.- Hacer el estudio de la parábola $x^2+4x+2y+10=0$.

$$x^2+4x+2y+10=0 \Rightarrow x^2+4x=-2y-10 \Rightarrow \left(x^2+4x+4\right)=-2y-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)^2=(-2)(y+3) \Rightarrow 4p=-2 \Rightarrow p=-\frac{1}{2}$$

Es una parábola de eje de simetría vertical que abre hacia abajo.

Entonces:

$V(-2,-3); F(-2,-3,5)$
Directriz: $y=-2,5$
Eje de simetría: $x=-2$

8.- Hacer el estudio de la parábola $2x^2-16x+16y+64=0$

$$2x^2-16x+16y+64=0 \Rightarrow 2x^2-16x=-16y-64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(x^2-8x+?\right)=-16y-64 \Rightarrow 2\left(x^2-8x+16\right)=-16y-64+32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-4)^2=-16y-32 \Rightarrow (x-4)^2=-8(y+2) \Rightarrow 4p=-8 \Rightarrow p=-2$$

Es una parábola de eje vertical que abre hacia abajo.
Entonces:

$V(4,-2); F(4,-4)$
Directriz: $y=0$
Eje de simetría: $x=4$

9.- Escribir la ecuación de la parábola cuyo vértice está en el origen, y el foco es $F(-3;0)$. Al observar las ordenadas de los dos puntos dados, éstas son iguales a cero; por lo tanto, se trata de una parábola de eje de simetría horizontal $(y=0)$, y cuyo vértice es $V(0;0)$, además $p=-3,$ por lo que la parábola abre hacia la izquierda.

La ecuación canónica de una parábola es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Luego, con los datos encontrados se puede escribir:

$$(y-0)^2 = 4(-3)(x-0) \Rightarrow y^2 = -12x \Rightarrow y^2 + 12x = 0$$

10.- Escribir la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(2;5)$ y cuya ecuación de su directriz es $x=4.$

El eje de simetría de la parábola es siempre perpendicular a la directriz, por lo que al ser la directriz vertical el eje de simetría deberá ser necesariamente horizontal y tendremos una parábola cuya ecuación canónica es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Ahora, la distancia entre el foco y la directriz es igual a $2p$. También, se debe ver que la directriz está desplazada a la derecha del foco, por lo que la parábola debe abrir hacia la izquierda. Entonces:

$$2p = 2-4 = -2 \Rightarrow p = -1$$

El vértice está a la derecha del foco, sobre la misma horizontal que hace de eje de simetría con $y=5.$ entonces $V(3;5)$.

La ecuación será:

$$(y-5)^2 = 4(-1)(x-3) \Rightarrow (y-5)^2 = -4(x-3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y-5)^2 = -4x+12 \Rightarrow y^2 - 10y + 25 = -4x + 12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 - 10y + 4x + 13 = 0$$

11.- La parábola pasa a través del punto $P(5;2)$ tiene el eje de simetría vertical y tiene un punto máximo a $(4;3)$.

Si el eje de simetría es vertical, su ecuación es $x = 4$; siendo su punto máximo igual a su vértice, que en este caso es $V(4,3)$. Si $\boldsymbol{V}$ es su punto máximo, entonces la parábola debe abrir hacia abajo y $p < 0$.

La propiedad de la parábola dice que si se tiene un punto P de la misma y Q es su proyección sobre el eje de simetría, entonces se cumple:

$$\left|d_{(P,Q)}\right|^2 = 4p\left|d_{(Q,V)}\right| \Rightarrow \left|(5-4)\right|^2 = 4p\left|(3-2)\right| \Rightarrow |p| = \frac{1}{4}$$

Sin embargo, se toma el valor $p = -\frac{1}{4}$ porque ya sabemos que el eje de simetría es vertical y que la curva abre hacia abajo.

Las ecuaciones canónica y general serán:

$$(x-4)^2 = 4\left(-\frac{1}{4}\right)(y-3) \Rightarrow (x-4)^2 = -(y-3) = -y+3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = -y + 3 \Rightarrow x^2 - 8x + y + 13 = 0$$

12.- Encontrar la ecuación de la parábola que pasa a través del punto $P(2;-1)$, tiene su vértice en $V(-7;-5)$ y abre hacia la derecha.

El enunciado nos dice que el eje de simetría es horizontal, con ecuación $y = -5$, y que por abrir hacia la derecha $p > 0$.

Utilizando la propiedad de la parábola:

$$\left|d_{(P,Q)}\right|^2 = 4p\left|d_{(Q,V)}\right| = \left|(-5+1)\right|^2 = 4p\left|(-7-2)\right| = 16 = 4p(9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{4}{9}$$

Ahora, se parte de la ecuación canónica:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \Rightarrow (y+5)^2 = 4\left(\frac{4}{9}\right)(x+7) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y^2+10y+25\right) = \frac{16}{9}(x+7) \Rightarrow 9y^2+90y+175 = 16x+112 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9y^2+90y-16x+63=0$$

13.- Encontrar la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es $x=2$, su foco es $F(2;-6)$ y $p=-2$.

La parábola tiene un eje de simetría vertical y abre hacia abajo por que $p<0$. Su punto máximo será por tanto el vértice, con coordenadas $V(2;-4)$.

Partiendo de su ecuación canónica:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \Rightarrow (x-2)^2 = 4(-2)(y+4) = -8(y+4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4 = -8y-32 \Rightarrow x^2-4x+8y+36=0$$

14.- Encontrar la ecuación de la parábola que tiene un eje de simetría horizontal, y pasa por los siguientes puntos: $O(0;0); P(3;-2); Q(-1;2)$.

Una parábola con eje de simetría horizontal tiene la siguiente ecuación canónica:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Utilizando ahora las coordenadas de los puntos dados pertenecientes a la parábola:

Para

$O(0;0) \Rightarrow (0-k)^2 = 4p(0-h) \Rightarrow k^2 = -4ph$......................$(1)$

$P(3;-2) \Rightarrow (-2-k)^2 = 4p(3-h) \Rightarrow (-1)^2 (2+k)^2 = 4p(3-h) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4+4k+k^2 = 12p-4ph$................................(2)

$Q(-1;2) \Rightarrow (2-k)^2 = 4p(-1-h) \Rightarrow 4-4k+k^2 = -4p-4ph$.............$(3)$

Tomando el valor de k^2 de la ecuación (1) e introduciendo ese valor en (2)

$4+4k-4ph = 12p-4ph \Rightarrow 4+4k = 12p \Rightarrow 1+k = 3p \Rightarrow$

$\Rightarrow k-3p = -1$.............................(4)

Tomando el valor de k^2 de la ecuación (1) e introduciendo este valor en la ecuación (3):

$4-4k-4ph = -4p-4ph \Rightarrow 4-4k = -4p \Rightarrow 1-k+p = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p-k = -1$.........................(5)

Resolviendo (4) y (5), sumando las dos ecuaciones:

$-2p = -2 \Rightarrow p = 1.$

Introduciendo el valor de $p=1$ en la ecuación (4) se obtiene $k=2$; y con los valores conocidos de $P=1$ y $k=2$ introducidos en la ecuación (1) se tiene que $h=-1$.

Entonces, la ecuación de la parábola será:

$$(y-2)^2 = 4(x+1) \Rightarrow y^2-4y+4 = 4x+4 \Rightarrow y^2-4y-4x = 0$$

15.- Encontrar la ecuación de la parábola que tiene un eje de simetría vertical, y pasa por los puntos $O(0;0); P(3;-2); Q(-2;2)$.

Una parábola con eje de simetría vertical tiene la siguiente ecuación canónica:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Utilizando ahora las coordenadas de los puntos dados, pertenecientes a la parábola:

$$O(0;0)\Rightarrow(0-h)^2=4p(0-k)\Rightarrow h^2=-4pk..............................(1)$$

$$P(3;-2)\Rightarrow(3-h)^2=4p(-2-k)\Rightarrow 9-6h+h^2=-8p-4pk.............(2)$$

$$Q(-2;2)\Rightarrow(-2-h)^2=4p(2-k)\Rightarrow 4+4h+h^2=8p-4pk..............(3)$$

Resolviendo (1) y (2), se toma el valor de h^2 de (1) y se introduce en (2):

$$9-4h-4pk=-8p-4pk\Rightarrow 9-6h=-8p\Rightarrow 8p-6h+9=0................(4)$$

Resolviendo (1) y (3), se toma el valor de h^2 de (1) y se introduce en (3):

$$4+4h-4pk=8p-4pk\Rightarrow 4+4h=8p\Rightarrow 1+h=2p\Rightarrow h-2p+1=0...............(5)$$

Resolviendo ahora (4) y (5):

De (5) $h=2p-1$, e introduciendo ahora este valor en (4):

$$8p-6(2p-1)+9=0\Rightarrow 8p-12p+6+9=0\Rightarrow p=\frac{15}{4}$$

Introduciendo este último resultado en (5):

$$h=2p-1\Rightarrow h=2\left(\frac{15}{4}\right)-1=\frac{13}{2}$$

Introduciendo ahora los valores encontrados de $\boldsymbol{h}$ y $\boldsymbol{p}$ en (1):

$$h^2=-4pk\Rightarrow\left(\frac{13}{2}\right)^2=-4\left(\frac{15}{4}\right)k\Rightarrow k=-\frac{169}{60}$$

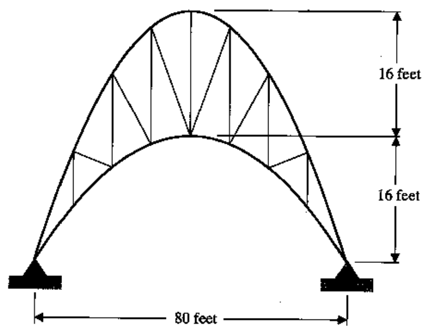
Luego, la ecuación de la parábola será:

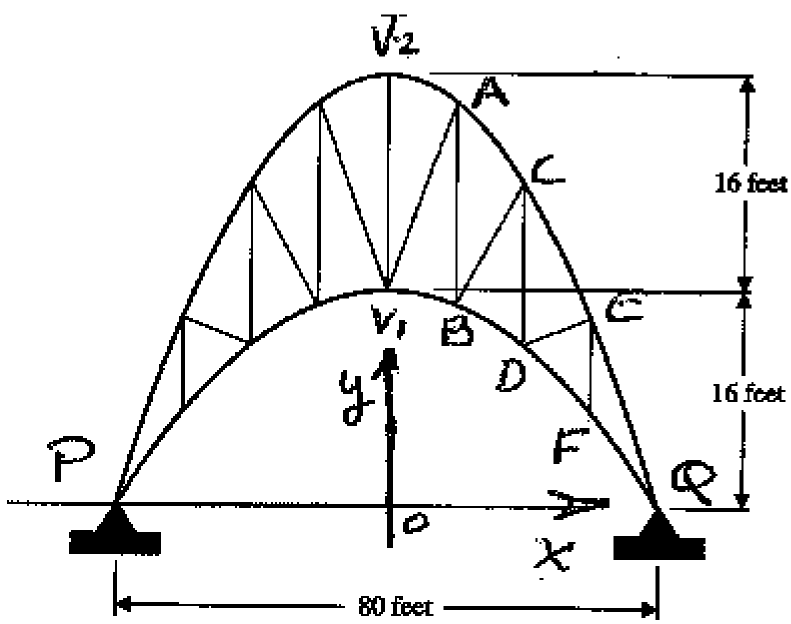
$$\left(x-\frac{13}{2}\right)^2=4\left(\frac{15}{4}\right)\left(y+\frac{169}{60}\right)\Rightarrow\left(x-\frac{13}{2}\right)^2=15\left(y+\frac{169}{60}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-13x+\frac{169}{4}=15y+\frac{169}{4}\Rightarrow x^2-13x-15y=0$$

16.- .- La figura muestra un puente reticulado conformado por dos arcos parabólicos cuyos apoyos se encuentran a 80 pies de distancia. Los refuerzos verticales se encuentran a 10 pies de distancia entre si. Encontrar los longitudes de los refuerzos V_1A y AB.

Gráficas:





Notar que en ambos casos $p < 0$ porque las dos parábolas abren hacia abajo.

Tomando la parábola cuyo vértice es V_1 y pasando el eje de las x por los dos puntos de apoyo y el eje de las y por los vértices V_1 y V_2 se procede a calcular los valores de ***p*** para cada parábola:

Para la parábola de vértice V_1:
Aplicando la propiedad de las parábolas:

$$\left[d_{(PO)}\right]^2 = -4p_1\left[d_{(OV_1)}\right] \Rightarrow [40]^2 = -4p_1[16] \Rightarrow p_1 = -25$$

Para la parábola de vértice V_2:

$$\left[d_{(PO)}\right]^2 = -4p_2\left[32\right] \Rightarrow p_2 = -12,5$$

De acuerdo con los ejes de coordenadas seleccionados, las coordenadas de los vértices son:

$$V_1\left(40,16\right)$$
$$V_2\left(40,32\right)$$

Para el cálculo de los refuerzos se utilizará la ecuación canónica de la parábola de eje vertical:

$$\left(x - x_0\right)^2 = 4p\left(y - y_0\right)$$

Cálculo de las coordenadas del punto $\boldsymbol{A}$:

$$\left(50-40\right)^2 = 4\left(-12,5\right)\left(y_A - 32\right) \Rightarrow 100 = \left(-50\right)\left(y_A - 32\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2 = \left(y_A - 32\right) \Rightarrow y_A = 30$$

Entonces: $A\left(40,30\right)$

Cálculo de las coordenadas de $\boldsymbol{B}$:

$$\left(50-40\right)^2 = 4\left(-25\right)\left(y_B - 16\right) \Rightarrow y_B = 15$$

$$B\left(50,15\right)$$

Como los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ están sobre la misma vertical la longitud de $\boldsymbol{AB}$ será:

$$L_{AB} = 30 - 15 = 15\left(pies\right)$$

Para el cálculo de la longitud de V_1A se deberá aplicar la ecuación para calcular la distancia entre dos puntos:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{\left(50-40\right)^2+\left(30-16\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{100+196}\Rightarrow\sqrt{296}=17,20\left(pies\right)$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41J.

Tema: Ecuación general de la línea recta. (Hoffmann, 5to año-Ejercicio # 107, #108, #109 y #110).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la línea recta y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ siendo $\boldsymbol{a}$ el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ***ecuación de la pendiente*** de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, y además se toma como $P(x,y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Conociendo un solo punto y la ***pendiente***, se puede escribir:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\Rightarrow y-y_1=m\cdot(x-x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x\cos\theta+ysen\theta-\rho=0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2+B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta=\alpha_2-\alpha_1\Rightarrow tg\theta=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta=0\Rightarrow tg\theta=0\Rightarrow m_2-m_1=0\Rightarrow m_1=m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta=90^{o}\Rightarrow tg\theta=\infty\Rightarrow 1+m_1\cdot m_2=0\Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1=m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(m_1\right)\left(m_2\right)=-1 \Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida*** ***d*** entre un punto $P_0\left(x_0, y_0\right)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l \equiv Ax+By+C=0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{(P_0, l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo a como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0; B=0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax + By + C_1; l_2 \equiv Ax + By + C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{(l_1,l_2)} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Si se parte de la ecuación reducida las ecuaciones son $l_1 \equiv y = mx + b_1; l_2 \equiv y = mx + b_2$, entonces, la distancia entre las dos rectas paralelas es:

$$d_{(l_1,l_2)} = \frac{|b_2 - b_1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Las coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada son:

$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right)$ donde $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ y siendo orientados los segmentos considerados.

Bisectrices. Para encontrar las ecuaciones de las bisectrices entre las rectas l_1 y l_2 se debe aplicar que la bisectriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo al cual pertenecen:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Area de un triángulo dadas las coordenadas de sus vértices:

El área del triángulo es el valor absoluto del resultado de la siguiente expresión:

Area del triángulo:

$$\Delta_T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_3 \right) - \left(x_3 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_3 \right) \right]$$

También:

Area del triángulo: $\Delta_T =$

$$\boxed{\frac{1}{2}\times}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}$$

Donde, partiendo de la columna de las *X* los productos diagonales hacia abajo son positivos y los productos diagonales hacia arriba son negativos.

O sea: $\Delta = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1\right) - \left(x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_3\right)\right]$

Area de un polígono dadas las coordenadas de sus vértices:

El área del polígono es el valor absoluto del resultado de la siguiente expresión:
$\Delta_P =$

$$(1/2)\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ . & . \\ . & . \\ X_n & Y_n \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}$$

Es obvio, que dadas las coordenadas de varios puntos, éstos serán colineales si el valor del área que conforman es nulo.

Rectas concurrentes:

Son un grupo de rectas en el mismo plano que se cortan entre si, todas, en el mismo punto.

Sean $l_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 ; l_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 ; l_3 \equiv A_3 x + B_3 y + C_3$ **. Estas tres rectas son concurrentes si se cumple que:**

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

PREGUNTAS:

EJERCICIO #107.

Hallar las ecuaciones generales de las bisectrices de los ángulos que forman l_1 y l_2:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

1.- $l_1 \equiv 3x-4y+5=0; l_2 \equiv 7x-24y+9=0$

$$\frac{3(x)-4(y)+5}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}} = \pm\frac{7(x)-24(y)+9}{\sqrt{(7)^2+(-24)^2}} \Rightarrow \frac{3x-4y+5}{5} = \pm\frac{7x-24y+9}{25}$$

Entonces, existen dos soluciones:

a.- Cuando es positivo el signo del segundo miembro de la igualdad:

$$15x-20y+25=7x-24y+9 \Rightarrow 8x+4y+16=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+y+4 \to (I)$$

b.- Cuando es negativo el signo del segundo miembro de la igualdad:

$$\frac{3x-4y+5}{5} = \frac{7x-24y+9}{-25} \Rightarrow -15x+20y-25=7x-24y+9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 22x-4y+34 \Rightarrow 11x-2y+17=0 \to (II)$$

2.- $l_1 \equiv 21x-20y+40=0; l_2 \equiv 17x+144y-100=0$.

Solución:

$$\frac{21(x)-20(y)+40}{\sqrt{(21)^2+(20)^2}} = \pm\frac{17(x)+144(y)-100}{\sqrt{(17)^2+(144)^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{21x-20y+40}{\sqrt{841}} = \pm\frac{17x+144y-100}{\sqrt{21025}} \Rightarrow \frac{21x-20y+40}{29} = \pm\frac{17x+144y-100}{145}$$

Entonces, se tienen dos soluciones:

a.- Signo positivo en el segundo miembro de la igualdad:

$$3045x-2900y+5800=493x+4176y-2900\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2552x-7076y+8700=0\Rightarrow 22x-61y+75=0\rightarrow(I)$$

b.- Signo negativo en el segundo miembro de la igualdad:

$$3045x-2900y+5800=-493x-4176y+2900\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3538x+1276y+2900=0\Rightarrow 61x+22y+50=0\rightarrow(II)$$

3.- $l_1\equiv 27x-364y+19=0; l_2\equiv 55x+48y-93=0$

Solución:

$$\frac{27(x)-364(y)+19}{\sqrt{(27)^2+(-364)^2}}=\pm\frac{55(x)+48(y)-93}{\sqrt{(55)^2+(48)^2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{27x-364y+19}{\sqrt{133225}}=\pm\frac{55x+48y-93}{\sqrt{5329}}\Rightarrow\frac{27x-364y+19}{365}=\pm\frac{55x+48y-93}{73}$$

Entonces, existen dos soluciones:

a.- El signo positivo en el segundo miembro de la igualdad:

$$1971x-26572y+1387=20075x+17520y-33945\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 18104x+44092y-35332\Rightarrow 62x+151y-121=0$$

b.- El signo negativo en el segundo miembro de la igualdad:

$$1971x-26572y+1387=-20075x-17520y+33945\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 22046x-9052y-32558=0\Rightarrow 151x-62y-223=0\rightarrow(II)$$

4.- $l_1\equiv 15x-8y+33=0; l_2\equiv 21x+220y-45=0$

Solución:

$$\frac{15(x)-8(y)+33}{\sqrt{(15)^2+(-8)^2}}=\pm\frac{21(x)+220(y)-45}{\sqrt{(21)^2+(220)^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{15x-8y+33}{\sqrt{289}}=\pm\frac{21x+220y-45}{\sqrt{48841}}\Rightarrow\frac{15x-8y+33}{17}=\pm\frac{21x+220y-45}{221}$$

Entonces, existen dos soluciones:

a.- El signo positivo en el segundo miembro de la igualdad:

$$3315x-1768y+7293=357x+3740y-765\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2958x-5508y+8058=0\Rightarrow 29x-54y+79=0\rightarrow(I)$$

b.- El signo negativo en el segundo miembro:

$$3315x-1768y+7293=-357x-3740y+765\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3672x-1972y+6528=0\Rightarrow 54x-29y+96=0\rightarrow(II)$$

5.- Hallar la ecuación general de la bisectriz del ángulo que forman $l_1\equiv 4x-3y+8=0$ y $l_2\equiv 24x+7y+20=0$.

Solución:

$$\frac{4(x)-3(y)+8}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}}=\pm\frac{24(x)+7(y)+20}{\sqrt{(24)^2+(7)^2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{4x-3y+8}{\sqrt{25}}=\pm\frac{24x+7y+20}{\sqrt{625}}\Rightarrow\frac{4x-3y+8}{5}=\pm\frac{24x+7y+20}{25}$$

Entonces, existen dos soluciones:

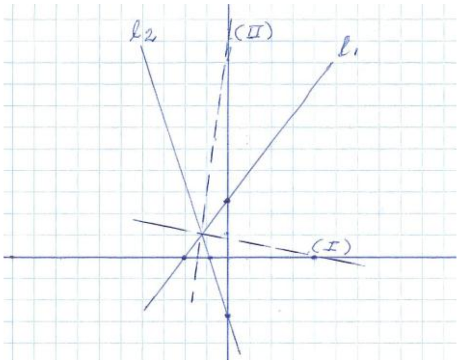
a.- Signo positivo del miembro de la derecha de la igualdad:

$$20x-15y+40=24x+7y+20\Rightarrow 4x+22y-20\Rightarrow 2x+11y-10=0\rightarrow(I)$$

b.- Signo negativo del miembro de la derecha de la igualdad:

$$20x-15y+40=-24x-7y-20\Rightarrow 44x-8y+60=0\Rightarrow 11x-2y+15=0\rightarrow(II)$$

La última ecuación encontrada, la (II), es la solución buscada ya que es la bisectriz del ángulo agudo formado por l_1 y l_2. Ver gráfica.



6.- Sean $l_1 \equiv 5x+12y-30=0$ y $l_2 \equiv 63x-16y-70=0$. Hallar la ecuación general de la bisectriz del ángulo que forman l_2 y l_1.

Solución:

$$\frac{5(x)+12y-30}{\sqrt{(5)^2+(12)^2}} = \pm\frac{63(x)-16(y)-70}{\sqrt{(63)^2+(16)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x+12y-30}{\sqrt{169}} = \pm\frac{63x-16y-70}{\sqrt{4225}} \Rightarrow \frac{5x+12y-30}{13} = \pm\frac{63x-16y-70}{65}$$

Entonces, existen dos soluciones:

a.- Para signo positivo en el segundo miembro de la igualdad:

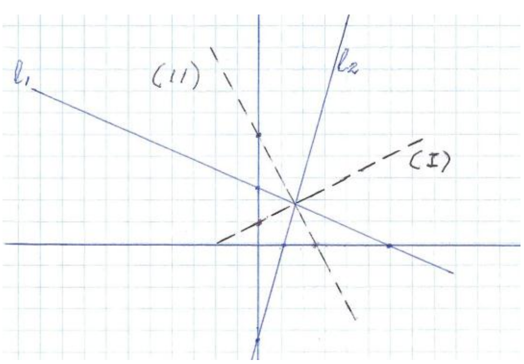
$$325x+780y-1950 = 819x-208y-910 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 494x-988y+1040=0 \Rightarrow 247x-494y+520=0 \rightarrow (I)$$

b.- Para signo negativo del segundo miembro de la igualdad:

$$325x+780y-1950 = -819x+208y+910 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1144x+572y-2860=0 \Rightarrow 2x+y-5=0 \rightarrow (II)$$



La solución buscada es la ecuación (II) y que es la bisectriz correspondiente al menor ángulo, el ángulo agudo.

Hallar en cada caso la ecuación general de la bisectriz del ángulo de vértice A en el triángulo cuyos tres vértices se dan:

7.- $A(1,7);B(6,-5);C(-5,-1)$

Solución:

$$l_1 \equiv \overline{AB} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5-7}{6-1} = -\frac{12}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - y_A = m_{AB}\left(x - x_A\right) \Rightarrow y - 7 = \left(-\frac{12}{5}\right)(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y - 35 = -12x + 12 \Rightarrow l_1 \equiv 12x + 5y - 47 = 0$$

$$l_2 \equiv \overline{AC} \Rightarrow m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1-7}{-5-1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - y_A = m_{AC}\left(x - x_A\right) \Rightarrow (y-7) = \left(\frac{4}{3}\right)(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y - 21 = 4x - 4 \Rightarrow l_2 \equiv 4x - 3y + 17 = 0$$

Ahora, se encuentra la ecuación general de la bisectriz que pasa por $\boldsymbol{A}$:

$$\frac{12(x)+5(y)-47}{\sqrt{(12)^2+(5)^2}} = \pm\frac{4(x)-3(y)+17}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12x+5y-47}{13} = \pm\frac{4x-3y+17}{5}$$

Entonces, se tienen dos soluciones, una de las cuales es la que necesitamos:

a.- Para el signo positivo en el miembro de la derecha de la igualdad:

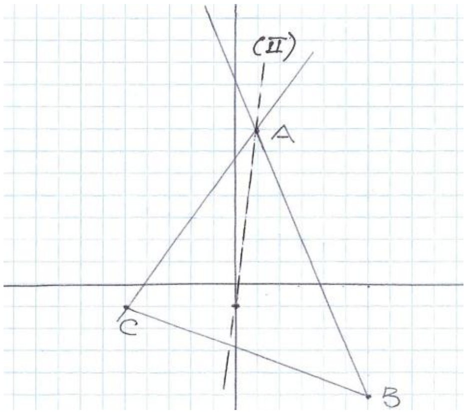
$$60x + 25y - 235 = 52x - 39y + 221 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 64y - 456 \Rightarrow x + 8y - 57 = 0 \rightarrow (I)$$

b.- Para el signo negativo en el segundo miembro de la igualdad:

$$60x + 25y - 235 = -52x + 39y - 221 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 112x - 14y - 14 = 0 \rightarrow l_2 \equiv 8x - y - 1 = 0\,(II)$$



8.- $A(-4,3); B(8,8); C\left(-\frac{20}{9},-4\right)$

Solución:

$$l_1 \equiv \overline{AB} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-3}{8+4} = \frac{5}{12} \Rightarrow y - y_A = m_{AB}\left(x - x_A\right) \Rightarrow$$

$$y - 3 = \left(\frac{5}{12}\right)\left(x+4\right) \Rightarrow \Rightarrow 12y - 36 = 5x + 20 \Rightarrow l_1 \equiv 5x - 12y + 56 = 0$$

$$l_2 = \overline{AC} \Rightarrow m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-4-3}{-\frac{20}{9}+4} = \frac{-7}{\frac{16}{9}} = -\frac{63}{16} = -\frac{63}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - y_A = m_{AC}\left(x - x_A\right) \Rightarrow y - 3 = \left(-\frac{63}{16}\right)\left(x+4\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_2 \Rightarrow 16y - 48 = -63x - 252 \Rightarrow l_2 \equiv 63x + 16y + 204 = 0$$

Ahora, se encuentra la ecuación general de la bisectriz que pasa por $\boldsymbol{A}$:

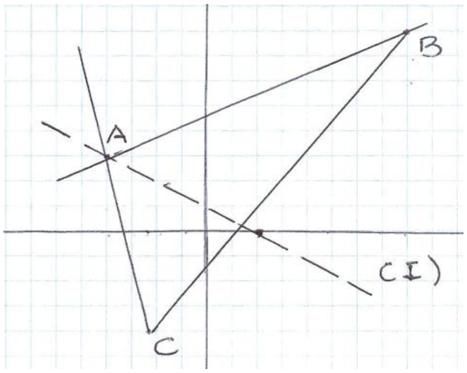
$$\frac{5(x) - 12(y) + 56}{\sqrt{(5)^2 + (-12)^2}} = \pm \frac{63x + 16y + 204}{\sqrt{(63)^2 + (16)^2}} \Rightarrow \frac{5x - 12y + 56}{13} = \pm \frac{63x + 16y + 204}{65}$$

Entonces, se tienen dos soluciones, una de las cuales es la que necesitamos:

a.- Para el signo positivo en el segundo miembro de la igualdad:

$$325x - 780y + 3640 = 819x + 208y + 2652 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 494x + 988y - 988 = 0 \Rightarrow x + 2y - 2 = 0 \rightarrow (I)$$

b.- Para el signo positivo en el segundo miembro de la igualdad:

$$325x-780y+3640=-819x-208y-2652\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1144x-572y+6292=0\Rightarrow 2x-y+11=0\rightarrow(II)$$


La ecuación general (I) corresponde a la bisectriz del ángulo agudo en $\boldsymbol{A}$; por lo tanto, es la solución.

9.- $A(0,3);B\left(3,\frac{23}{5}\right);C\left(\frac{13}{14},-3\right)$

Solución:

$$l_1=\overline{AB}\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{23}{5}-3}{3-0}=\frac{\frac{23-15}{5}}{3}=\frac{8}{15}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_A=m_{AB}(x-x_A)\Rightarrow y-3=\left(\frac{8}{15}\right)(x)\Rightarrow 15y-45=8x\Rightarrow l_1\equiv 8x-15y+45=0$$

$$l_2=\overline{AC}\Rightarrow m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-3-3}{\frac{13}{14}-0}=\frac{-6}{\frac{13}{14}}=-\frac{84}{13}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_A=m_{AC}(x-x_A)\Rightarrow y-3=\left(-\frac{84}{13}\right)(x-0)\Rightarrow l_2\equiv 84x+13y-39=0$$

Ahora, se encuentra la ecuación general de la bisectriz que pasa por $\boldsymbol{A}$:

$$\frac{8(x)-15(y)+45}{\sqrt{(8)^2+(-15)^2}}=\pm\frac{84(x)+13(y)-39}{\sqrt{(84)^2+(13)^2}}\Rightarrow$$
$$\frac{8x-15y+45}{\sqrt{289}}=\pm\frac{84x+13y-39}{\sqrt{7225}}\Rightarrow\frac{8x-15y+45}{17}=\pm\frac{84x+13y-39}{85}$$

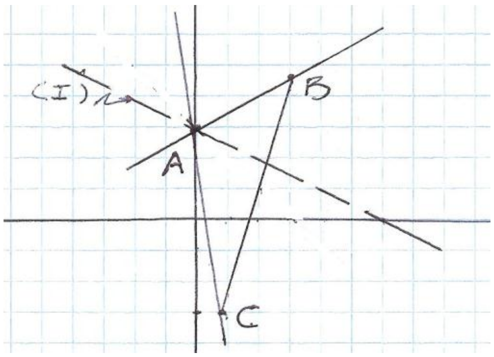
Entonces, se tienen dos soluciones:

a.- Para el signo positivo en el segundo miembro de la igualdad:

$$680x-1275y+3825=1428x+221y-663\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 748x+1496y-4488=0\Rightarrow x+2y-6=0\rightarrow (I)$$

b.- Para el signo negativo en el segundo miembro de la igualdad:

$$680x-1275y+3825=-1428x-221y+663\Rightarrow$$
$$2108x-1054y+3162=0\Rightarrow 2x-y+3=0\rightarrow (II)$$



La ecuación general (I) corresponde a la bisectriz del ángulo agudo en $\boldsymbol{A}$; por lo tanto, es la solución.

10.- Hallar la ecuación general de las bisectrices de cada uno de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $A(-2,-1);B(0,3);C(5,-2)$.

Solución:

En primer lugar se deben encontrar las ecuaciones generales de las rectas que conforman los lados del triángulo:

$$l_1=AB\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3+1}{0+2}=\frac{4}{2}=2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_A=m_{AB}\left(x-x_A\right)\Rightarrow \left(y+1\right)=\left(2\right)\left(x+2\right)=2x+4\Rightarrow l_1\equiv 2x-y+3=0$$

$$l_2=AC\Rightarrow m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-2+1}{5+2}=-\frac{1}{7}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_A=m_{AC}\left(x-x_A\right)\Rightarrow \left(y+1\right)=\left(-\frac{1}{7}\right)\left(x+2\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7y+7=-x-2\Rightarrow l_2\equiv x+7y+9=0$$

$$l_3=BC\Rightarrow m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-2-3}{5-0}=\frac{-5}{5}=-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_B=m_{BC}\left(x-x_B\right)\Rightarrow y-3=\left(-1\right)\left(x-0\right)\Rightarrow l_3\equiv x+y-3=0$$

Ahora buscaremos las ecuaciones de las bisectrices correspondientes a cada vértice del triángulo dado:

A.- Ecuación general de la bisectriz del $\angle A$:

$$\frac{2(x)+(-1)(y)+3}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}=\pm\frac{(1)(x)+(7)(y)+9}{\sqrt{(1)^2+(7)^2}}\Rightarrow\frac{2x-y+3}{\sqrt{5}}=\pm\frac{x+7y+9}{\sqrt{50}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x-y+3}{\sqrt{5}}=\pm\frac{x+7y+9}{5\sqrt{2}}$$

Entonces, se tienen dos soluciones:

a.- Para el signo positivo en el segundo miembro de la igualdad:

$$10\sqrt{2}x-5\sqrt{2}y+15\sqrt{2}=\sqrt{5}x+7\sqrt{5}y+9\sqrt{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(10\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)x-\left(5\sqrt{2}+7\sqrt{5}\right)y+\left(15\sqrt{2}-9\sqrt{5}\right)=0\rightarrow(I)$$

b.- Para el signo negativo en el segundo miembro de la igualdad:

$$10\sqrt{2}x-5\sqrt{2}y+15\sqrt{2}=-\sqrt{5}x-7\sqrt{5}y-9\sqrt{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(10\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)x-\left(5\sqrt{2}-7\sqrt{5}\right)y+\left(15\sqrt{2}+9\sqrt{5}\right)=0\rightarrow(II)$$

La ecuación (I) es la ecuación general correspondiente a la bisectriz del $\angle A$.

B.- Ecuación general de la bisectriz del $\angle B$:

$$\frac{2(x)+(-1)y+3}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}=\pm\frac{(1)(x)+(1)y-3}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}\Rightarrow\frac{2x-y+3}{\sqrt{5}}=\pm\frac{x+y-3}{\sqrt{2}}$$

Entonces, se tienen dos soluciones:

a.- Para el signo positivo en el segundo miembro de la igualdad:

$$2\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+3\sqrt{2}=\sqrt{5}x+\sqrt{5}y-3\sqrt{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)x-\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)y+3\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)=0\rightarrow(III)$$

b.- Para el signo negativo en el segundo miembro de la igualdad:

La ecuación (III) es la ecuación general correspondiente a la bisectriz del $\angle B$.

C.- Ecuación general de la bisectriz del $\angle C$:

$$\frac{(1)(x)+7(y)+9}{\sqrt{(1)^2+(7)^2}}=\pm\frac{(1)(x)+(1)(y)-3}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}\Rightarrow\frac{x+7y+9}{5\sqrt{2}}=\pm\frac{x+y-3}{\sqrt{2}}$$

Entonces, se tienen dos soluciones:

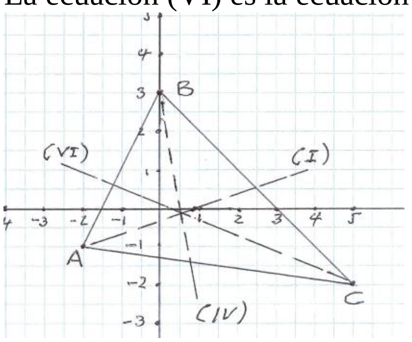
a.- Para el signo positivo en el segundo miembro de la igualdad:

$$\sqrt{2}x+7\sqrt{2}y+9\sqrt{2}=5\sqrt{2}x+5\sqrt{2}y-15\sqrt{2}\Rightarrow 2x-y-12=0\rightarrow(V)$$

b.- Para el signo negativo en el segundo miembro de la igualdad:

$$\sqrt{2}x+7\sqrt{2}y+9\sqrt{2}=-5\sqrt{2}x-5\sqrt{2}y+15\sqrt{2}\Rightarrow x+2y-1=0\rightarrow(VI)$$

La ecuación (VI) es la ecuación general correspondiente a la bisectriz del $\angle C$.



EJERCICIO #108.

Hallar en cada caso la distancia entre las rectas l_1 y l_2:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax+By+C_1; l_2 \equiv Ax+By+C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{l_1,l_2}=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

1.- $l_1 \equiv 5x+12y-7=0, l_2 \equiv 5x+12y+32=0$

Solución:

$$d_{(l_1,l_2)}=\frac{|32-(-7)|}{\sqrt{(5)^2+(12)^2}}=\frac{39}{\sqrt{25+144}}=\frac{39}{13}=3$$

2.- $l_1 \equiv y = 4x - 5; l_2 \equiv y = 4x - 19$

Solución:

$$l_1 \equiv 4x - y - 5 = 0; l_2 \equiv 4x - y - 19$$

$$d_{(l_1,l_2)} = \frac{\left|-19 - (-5)\right|}{\sqrt{(4)^2 + (-1)^2}} = \frac{14}{\sqrt{17}} \Rightarrow \frac{14\sqrt{17}}{17}$$

3.- $l_1 \equiv 3x + 2y + 6 = 0; l_2 \equiv 6x + 4y - 15 = 0$

Solución:

$$\frac{\left|-\frac{15}{2} - 6\right|}{\sqrt{(3)^2 + (2)^2}} = \frac{\left|\frac{-15-12}{2}\right|}{\sqrt{13}} = \frac{\frac{27}{2}}{\sqrt{13}} = \frac{27\sqrt{13}}{26}$$

4.- $l_1 \equiv y = 7x + 23; l_2 \equiv y = 7x - 22$

Solución:

$$l_1 \equiv 7x - y + 23 = 0; l_2 \equiv 7x - y - 22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{(l_1,l_2)} = \frac{\left|-22 - 23\right|}{\sqrt{(7)^2 + (-1)^2}} = \frac{45}{\sqrt{50}} = \frac{45}{5\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

5.- $l_1 \equiv 3x - 6y + 11 = 0; l_2 \equiv 4x - 8y + 17$

Solución:

Multiplicando l_1 por

$$\frac{4}{3} \Rightarrow l_1 \equiv 4x - 8y + \frac{44}{3} \Rightarrow$$

$$d_{(l_1,l_2)} = \frac{\left|17 - \frac{44}{3}\right|}{\sqrt{\left(4^2\right) + (-8)^2}} = \frac{\frac{51-44}{3}}{\sqrt{80}} = \frac{7}{12\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{60}$$

6.- $l_1 \equiv 24x - 7y - 18 = 0; l_2 \equiv 48x - 14y + 9 = 0$

Solución:

Se divide l_2 por 2: $\frac{l_2}{2} \equiv 24x - 7y + \frac{9}{2} = 0$

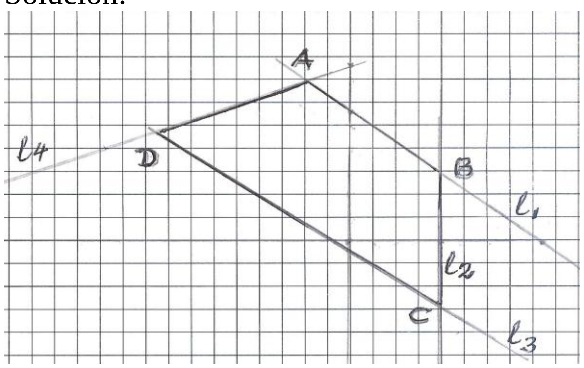
Ahora:

$$\frac{\left|\frac{9}{2}+18\right|}{\sqrt{(24)^2+(-7)^2}}=\frac{\left|\frac{9+36}{2}\right|}{\sqrt{576+49}}=\frac{45}{2\cdot 25}=\frac{9}{10}$$

Hallar en los siguientes ejercicios el área del trapecio que forman las rectas dadas:

7.- $l_1 \equiv 2x+3y-17=0; l_2 \equiv x-4=0; l_3 \equiv 2x+3y+1=0; l_4 \equiv x-3y+23=0.$

Solución:



$$m_{l_1}=m_{l_3} \Rightarrow l_1 \parallel l_3 \Rightarrow h=d_{(l_1,l_3)}=\frac{|1-(-17)|}{\sqrt{(2)^2+(3)^2}}=\frac{18}{\sqrt{13}}=\frac{18\sqrt{13}}{13}$$

Ahora se deben encontrar los puntos de intersección de las rectas. Ver gráfica (sin escala):

a.- Punto $\boldsymbol{A}$, intersección de l_1 y l_4:

$l_1 \equiv 2x+3y-17=0; l_4 \equiv x-3y+23=0.$

Sumando las dos ecuaciones:

$l_1+l_4=3x+6=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow l_1 \Rightarrow 2(-2)+3y-17=0 \Rightarrow y=7 \Rightarrow A(-2,7)$

b.- Punto $\boldsymbol{B}$, intersección de l_1 y l_2:

$l_1 \equiv 2x+3y-17=0; l_2 \equiv x-4=0.$

$l_2 \Rightarrow x=4 \Rightarrow l_1 \Rightarrow 2(4)++3y-17=0 \Rightarrow 3y=9 \Rightarrow y=3 \Rightarrow B(4,3)$

c.- Punto $\boldsymbol{C}$, intersección de l_2 y l_3:

$l_2 \equiv x-4=0; l_3 \equiv 2x+3y+1=0. \Rightarrow$

$l_2 \Rightarrow x=4 \Rightarrow l_3 \Rightarrow 2(4)+3y+1=0 \Rightarrow 3y=-9 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow C(4,-3)$

d.- Punto $\boldsymbol{D}$, intersección de l_3 y l_4:

$l_3 \equiv 2x + 3y + 1 = 0; l_4 \equiv x - 3y + 23 = 0.$

Sumando las dos ecuaciones:

$$l_3 + l_4 = 3x + 24 = 0 \Rightarrow x = -8 \Rightarrow l_4 \Rightarrow -8 - 3y + 23 = 0 \Rightarrow 3y = 15 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow D(-8,5)$$

Entonces, el área del trapecio es $\left(\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\right) \times h,$ donde:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4+2)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(-8-4)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{144+64} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13} \Rightarrow$$

$$Area = \left(\frac{2\sqrt{13} + 4\sqrt{13}}{2}\right) \times \frac{18\sqrt{13}}{13} = \left(3\sqrt{13}\right) \times \frac{18\sqrt{13}}{13} = 54$$

8.- $l_1 \equiv x - 3y + 10 = 0; l_2 \equiv 2x - y - 5 = 0; l_3 \equiv 4x + 3y + 5 = 0; l_4 \equiv 2x - y + 5 = 0$

Solución:

$$m_{l_2} = m_{l_4} \Rightarrow l_2 \parallel l_4 \Rightarrow h = d_{(l_2,l_4)} = \frac{|5 - (-5)|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

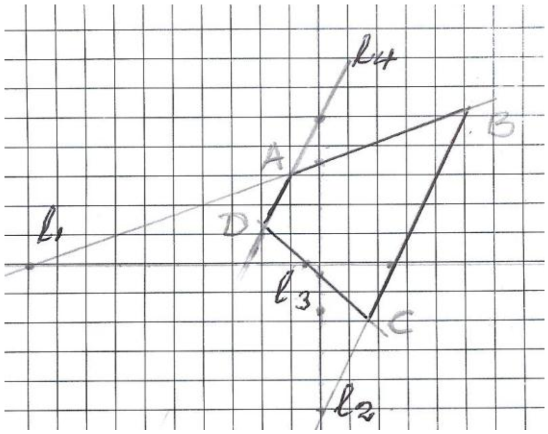
Ahora se deben encontrar los puntos de intersección de las rectas. Ver gráfica (sin escala):

a.- Punto $\boldsymbol{A}$, intersección de l_1 y l_4:

$$l_1 \equiv x - 3y + 10 = 0; l_4 \equiv 2x - y + 5 = 0$$

Multiplicando l_1 por 2 y restándole l_4:

$$2 \cdot l_1 - l_4 = -5y + 15 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow l_1 \Rightarrow x - 3(3) + 10 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow A(-1,3)$$



b.- Punto ***B***, intersección de l_1 y l_2 :

$$l_1 \equiv x-3y+10=0; l_2 \equiv 2x-y-5=0 \Rightarrow 2\cdot l_1 - l_2 \Rightarrow -5y+25=0 \Rightarrow y=5 \Rightarrow x=5 \Rightarrow B(5,5)$$

c.- Punto ***C***, intersección de l_2 y l_3 :

$$l_2 \equiv 2x-y-5=0; l_3 \equiv 4x+3y+5=0$$

$$3\cdot l_2 + l_3 \Rightarrow 10x-10=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow C(1,-3)$$

d.- Punto ***D***, intersección de l_3 y l_4 :

$$l_3 \equiv 4x+3y+5=0; l_4 \equiv 2x-y+5=0$$

$$l_3 - 2\cdot l_4 \Rightarrow 5y-5=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow D(-2,1)$$

Entonces, el área del trapecio es $\left(\dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\right)\times h,$ donde:

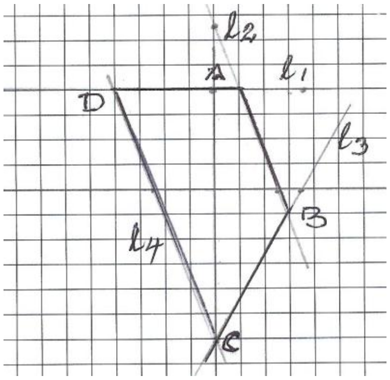
$$\overline{AD} = \sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2} = \sqrt{(-1+2)^2+(1-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(1-5)^2+(-3-5)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$Area = \left(\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{2}\right)\times 2\sqrt{5} = 25$$

9.- $l_1 \equiv y-4=0; l_2 \equiv 5x+2y-13=0; l_3 \equiv 5x-3y-18=0; l_4 \equiv 5x+2y+12=0$

Solución:



$$m_{l_2} = m_{l_4} \Rightarrow l_2 \parallel l_4 \Rightarrow h = d_{(l_2, l_4)} = \frac{|12-(-13)|}{\sqrt{(5)^2+(2)^2}} = \frac{25}{\sqrt{29}} = \frac{25\sqrt{29}}{29}$$

Ahora se deben encontrar los puntos de intersección de las rectas. Ver gráfica (sin escala):

a.- Punto ***A***, intersección de l_1 y l_2:

$$l_1 \equiv y-4=0; l_2 \equiv 5x+2y-13=0. \Rightarrow l_1 \Rightarrow y=4 \Rightarrow l_2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow A(1,4)$$

b.- Punto ***B***, intersección de l_2 y l_3:

$$l_2 \equiv 5x+2y-13=0; l_3 \equiv 5x-3y-18=0 \Rightarrow$$

$$l_2 - l_3 \Rightarrow 5y+5=0 \Rightarrow y=-1; l_2 \Rightarrow x=3 \Rightarrow B(3,-1)$$

c.- Punto ***C***, intersección de l_3 y l_4:

$$l_3 \equiv 5x-3y-18=0; l_4 \equiv 5x+2y+12=0 \Rightarrow$$

$$l_3 - l_4 \Rightarrow -5y-30=0 \Rightarrow y=-6 \Rightarrow l_3 \Rightarrow x=0 \Rightarrow C(0,-6)$$

d.- Punto ***D***, intersección de l_1 y l_4:

$$l_1 \equiv y-4=0; l_4 \equiv 5x+2y+12=0 \Rightarrow l_1 \Rightarrow y=4; l_4 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow D(-4,4)$$

Entonces, el área del trapecio es $\left(\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\right) \times h$, donde:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{29}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2} = \sqrt{(-4-0)^2+(4+6)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Area = \left(\frac{\sqrt{29}+2\sqrt{29}}{2}\right) \times \frac{25\sqrt{29}}{29} = \frac{75}{2}$$

10.- Hallar la ecuación general de la línea recta paralela a $l_1 \equiv 24x-7y+3=0$ y que dista 6 unidades de ella.

Solución:

La recta buscada tiene una ecuación general del tipo: $l_2 \equiv 24x - 7y + k = 0$, entonces:~

$$d_{(l_1,l_2)} = \frac{|k-3|}{\sqrt{(24)^2 + (-7)^2}} = 6 \Rightarrow \frac{k-3}{\pm\sqrt{576+49}} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k-3}{\pm 25} = 6 \Rightarrow k - 3 = \pm 150 \Rightarrow l_2 \equiv 24x - 7y + 153 = 0; l_2^{'} \equiv 24x - 7y - 147 = 0$$

11.- Hallar la ecuación reducida de la línea recta paralela a $l_1 \equiv y = 7x - 6$ y que está a una distancia de $\frac{7\sqrt{2}}{5}$ de ella.

Solución:

La ecuación reducida de la recta es: $y = mx + b$ donde m es la pendiente y b es la ordenada en el origen $(x = 0)$. La recta buscada es $l_2 \equiv 7x + b_2$.
Luego:

$$d_{(l_1,l_2)} = \frac{|b_2 - b_1|}{\pm\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow \frac{|b_2 - (-6)|}{\pm\sqrt{(7)^2+1}} = \frac{7\sqrt{2}}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_2+6}{\pm\sqrt{50}} = \frac{7\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \frac{b_2+6}{\pm 5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{5} \Rightarrow b_2 = \pm 14 - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_2 \equiv y_1 = 7x + 8; l_2^{'} \equiv y_2 = 7x - 20$$

12.- Hallar la ecuación general de la línea recta paralela a $l_1 \equiv 8x + 6y - 11 = 0$ y que está a una distancia $\frac{11}{10}$ de ella.

Solución:

La recta buscada es del tipo $l_2 \equiv 8x + 6y + k = 0$; luego:

$$d_{(l_1,l_2)} = \frac{|C_2 - C_1|}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \Rightarrow \frac{11}{10} = \frac{|k - (-11)|}{\pm\sqrt{(8)^2 + (6)^2}} \Rightarrow \frac{11}{10} = \frac{k+11}{\pm 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k + 11 = \pm 11 \Rightarrow k_1 = 0; k_2 = -22 \Rightarrow$$

$$l_2 \equiv 8x + 6y = 0 \Rightarrow l_2 \equiv 4x + 3y = 0; l_2^{'} \equiv 8x + 6y - 22 = 0 \Rightarrow l_2^{'} \Rightarrow 4x + 3y - 11 = 0$$

13.- Hallar la ecuación reducida de la línea recta paralela a $l_1 \equiv y = \frac{12}{5}x + 9$ y que dista 3 unidades de ella.

Solución:

La ecuación buscada es del tipo $l_2 \equiv \frac{12}{5}x + b_2$. Luego:

$$d_{(l_1,l_2)} = 3 = \frac{|b_2 - 9|}{\pm\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + 1}} \Rightarrow 3 = \frac{|b_2 - 9|}{\pm\sqrt{169}} \times 5 \Rightarrow b_2 - 9 = \pm\frac{39}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2^{'} = 9 + \frac{39}{5} = \frac{45+39}{5} = \frac{84}{5} = \frac{84}{5} \Rightarrow l_2 \equiv \frac{12}{5}x + \frac{84}{5}$$

$$\Rightarrow b_2^{''} = 9 - \frac{39}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow l_2^{'} \equiv \frac{12}{5} + \frac{6}{5}$$

EJERCICIO # 109.

Determinar el área de los triángulos cuyos vértices se dan:

1.- $A(-1,7); B(6,2); C(-4,-4)$

Solución:

$$\Delta_T = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left[(-2-28-24) - (-8+42+4)\right] \Rightarrow$$

$$\Delta_T = \left|\frac{1}{2} \cdot (-54-38)\right| = \left|\frac{1}{2}(-92)\right| = |-46| = 46$$

2.- $A\left(\frac{11}{2}, 2\right); B\left(\frac{3}{2}, -2\right); C(1,5)$

Solución:

$$\Delta_T = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} \frac{11}{2} & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \left|\left(-11 + 2 + \frac{15}{2}\right) - \left(-2 + 3 + \frac{55}{2}\right)\right| =$$

$$\Delta_T = \frac{1}{2} \times \left|\left(-\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{57}{2}\right)\right| = \frac{1}{2} \times |-30| = 15$$

3.- $A\left(-\frac{29}{7}, \frac{1}{2}\right); B\left(\frac{17}{7}, \frac{19}{2}\right); C\left(\frac{39}{7}, -\frac{5}{2}\right)$

Solución:

$$\Delta_T = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} -\frac{29}{7} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{17}{7} & \frac{19}{2} & 1 \\ \frac{39}{7} & -\frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \left| \left(-\frac{551}{14} + \frac{39}{14} - \frac{85}{14} \right) - \left(\frac{741}{14} + \frac{17}{14} + \frac{145}{14} \right) \right| =$$

$$\Delta_T = \frac{1}{2} \times \left| \left(-\frac{597}{14} \right) - \left(\frac{903}{14} \right) \right| = \left| -\frac{1500}{28} \right| = \frac{375}{7}$$

4.- $A\left(5\sqrt{3},4\right); B\left(\sqrt{2},-2\sqrt{6}\right); C\left(-4\sqrt{3},7\right)$

Solución:

$$\Delta_T = \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 5\sqrt{3} & 4 & 1 \\ \sqrt{2} & -2\sqrt{6} & 1 \\ -4\sqrt{3} & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\Delta_T = \frac{1}{2} \times \left| \left(-30\sqrt{2} - 16\sqrt{3} + 7\sqrt{2} \right) - \left(24\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 35\sqrt{3} \right) \right| = \frac{1}{2} \times \left| -51\sqrt{2} - 51\sqrt{3} \right| = \frac{51}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} \right)$$

Determinar el área de los polígonos cuyos vértices se dan:

5.- $A(5,5); B(-3,5); C(-4,1); D(-1,-3)$

Solución:

$\Delta_P =$

$$=(1/2) \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & 5 \\ -4 & 1 \\ -1 & -3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2} \left| (25 - 3 + 12 - 5) - (-15 - 20 - 1 - 15) \right| \Rightarrow$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2} \left| (29) + (51) \right| = \frac{80}{2} = 40$$

6.- $A(-8,1); B(3,-6); C(5,-5); D\left(\frac{11}{2},\frac{3}{2}\right); E\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$

Solución: $\Delta_P =$

$$\begin{vmatrix} -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(1/2)\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 5 & -5 \\ 11/2 & 3/2 \\ 3/2 & 9/2 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2}\left|\left(48-15+\frac{15}{2}+\frac{99}{4}+\frac{3}{2}\right)-\left(3-30-\frac{55}{2}+\frac{9}{4}-36\right)\right| =$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2}\left|\left(33+\frac{15}{2}+\frac{99}{4}+\frac{3}{2}\right)-\left(-63-\frac{55}{2}+\frac{9}{4}\right)\right| =$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{132+30+99+6}{4}\right)-\left(\frac{-252-110+9}{4}\right)\right| =$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2}\left|\frac{(267)+(353)}{4}\right| = \frac{620}{8} = \frac{155}{2}$$

7.- $A(3,4);B(2,5);C(-3,5);D(-4,4);E(-4,-1);F(-3,-2);G(2,-2);H(3,-1)$

Solución:

$\Delta_P =$

$$(1/2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 5 \\ -4 & 4 \\ -4 & -1 \\ -3 & -2 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2}\left|(15+10-12+4+8+6-2+12)-(8-15-20-16+3-4-6-3)\right| =$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2}\left|(41)-(-53)\right| = \frac{94}{2} = 47$$

8.- $A(1,8);B(2,8);C(0,1);D(-6,-3);E(-7,-1)$

Solución:

$\Delta_P =$

$$(1/2)\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 8 \\ 0 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_P = \left(\frac{1}{2}\right)\left|(8+2+0+6-56)-(16+0-6+21-1)\right| =$$

$$\Delta_P = \frac{1}{2}\left|(-40)-(30)\right| = \frac{70}{2} = 35$$

Determinar en cada caso el valor de $\boldsymbol{k}$ para que:

9.- $A(-4,k);B(3,-k);C(1,6)$ sean los vértices de un triángulo de área $\frac{45}{2}$.

Solución:

$$\Delta_T =$$

$$(1/2)\begin{vmatrix} -4 & k \\ 3 & -k \\ 1 & 6 \\ -4 & k \end{vmatrix}$$

$$\Delta_T = \frac{1}{2}\left|(4k+18+k)-(3k-k-24)\right| = \frac{1}{2}\left|3k+42\right| = \frac{45}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3k_1+42=45 \Rightarrow 3k_1=3 \Rightarrow k_1=1.$$

También:

$$3k_2+42=-45 \Rightarrow 3k_2=-87 \Rightarrow k_2=-29$$

10.- $A(k,-3);B(-2,5);C(k-1,-4)$ sean los vértices de un triángulo de área 5.

Solución:

$$\Delta_T =$$

$$(1/2)\begin{vmatrix} k & -3 \\ -2 & 5 \\ k-1 & -4 \\ k & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_T = \frac{1}{2}\times\left|(\quad)-(\quad)\right| = 5 \Rightarrow \left[(5k+8-3k+3)-(6+5k-5-4k)\right] = \pm 10 \Rightarrow$$

$$\Delta_T = k+10 = \pm 10 \Rightarrow k_1=0; k_2=-20$$

11.- $A(-7,0);B(-3k,-1);C(-3,-1);D(2k,0)$ sean los vértices de un cuadrilátero de área 7.

Solución:

$$\Delta_P =$$

$$\begin{vmatrix} -7 & 0 \end{vmatrix}$$

	-3k	-1
(1/2)	-3	-1
	2k	0
	-7	0

$$\Delta_P = \frac{1}{2}\times\left|(7+3k+0+0)-(0+3-2k+0)\right| = 7 \Rightarrow$$

$$(4+5k) = \pm 14 \Rightarrow k_1 = 2; k_2 = -\frac{18}{5}$$

12.- $A(k,7); B(-2,4); C(-3,1); D(-2,0); E(k,3); F(1,5)$ son vértices de un polígono convexo de área 12.

Solución:

$\Delta_P =$

	k	7
	-2	4
	-3	1
(1/2)	-2	0
	k	3
	1	5
	k	7

$$\Delta_P = \frac{1}{2}\times\left|(4k-2+0-6+5k+7)-(-14-12-2+0+3+5k)\right| = 12 \Rightarrow$$

$$\Delta_P = \left[(9k-1)-(5k-25)\right] = \pm 24 \Rightarrow 4k+24 = \pm 24 \Rightarrow$$

$$k_1 = 0; k_2 = -\frac{48}{4} = -12(No-convexo)$$

Demostrar que los puntos que se dan en los siguientes ejercicios pertenecen en cada caso a la misma recta:

13.- $A(0,-1); B(-2,5); C(-3,8)$

Solución: $\Delta = 0$

0	-1
-2	5
-3	8
0	-1

$$\Delta = \left[(0-16+3)-(2-15+0)\right] = -13+13 = 0 \Rightarrow (colineales)$$

14.- $A(6,10); B(4,5); C(0,-5)$

Solución: $\Delta =$

$$\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 5 \\ 0 & -5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\Delta=\left[(30-20+0)-(40+0-30)\right]=[10-10]=0\Rightarrow(colineales)$$

15.- $A(7,1);B(1,2);C\left(-2,\frac{5}{2}\right)$

Solución: $\Delta=0$

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 5/2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta=\left[\left(14+\frac{5}{2}-2\right)-\left(1-4+\frac{35}{2}\right)\right]=\left[\frac{28+5-4}{2}-\frac{-6+35}{2}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Delta=\frac{29}{2}-\frac{29}{2}=0\Rightarrow(colineales)$$

16.- $A(-8,-4);B(-4,-3);C\left(2,-\frac{3}{2}\right);D\left(6,-\frac{1}{2}\right)$

Solución: $\Delta=0$

$$\begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -3 \\ 2 & -(3/2) \\ 6 & -(1/2) \\ -8 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta=\left[(24-6-1-24)-(16-6-9+4)\right]=[-7-5]\neq0\Rightarrow(NO)$$

17.- $A(1,9)';B(2,3);C\left(\frac{7}{3},1\right);D(4,-9)$

Solución: $\Delta=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 3 \\ \frac{7}{3} & 1 \\ 4 & -9 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \left[(3+2-21+36)-(18+7+4-9) \right] = 0 \Rightarrow (colineales)$$

18.- $A(7,2); B\left(4,\frac{7}{4}\right); C\left(-2,\frac{5}{4}\right); D\left(-8,\frac{3}{4}\right)$

Solución: $\Delta = 0$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 7/4 \\ -2 & 5/4 \\ -8 & 3/4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \left[\left(\frac{49}{4} + 5 - \frac{3}{2} - 16 \right) - \left(8 - \frac{7}{2} - 10 + \frac{21}{4} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Delta = \left[\frac{49+20-6-64}{4} - \frac{21-8-14}{4} \right] = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right] = 0(colineales)$$

19.- Determinar ***k*** para que $A(-1,7); B(0,2k); C(2,-k); D\left(\frac{5}{2},-\frac{7}{2}\right)$ están sobre la misma recta.

Solución: $\Delta = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2k \\ 2 & -k \\ \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \left[\left(-2k + 0 - 7 + \frac{35}{2} \right) - \left(0 + 4k - \frac{5k}{2} + \frac{7}{2} \right) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-4k - 14 + 35}{2} \right) - \left(\frac{8k - 5k + 7}{2} \right) = 0 \Rightarrow -4k + 21 - 3k - 7 = 0 \Rightarrow k = 2$$

20.- Determinar k para que $A(-5,k); B\left(1,\frac{1}{2}\right); C(4,3k)$ sean colineales.

Solución: $\Delta = 0$

$$\begin{vmatrix} -5 & k \\ 1 & 1/2 \\ 4 & 3k \\ -5 & k \end{vmatrix}$$

$$\Delta=\left[\left(-\frac{5}{2}+3k+4k\right)-\left(k+2-15k\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{-5+14k}{2}\right)-\left(2-14k\right)=0\Rightarrow\frac{-5+14k-4+28k}{2}=0\Rightarrow 42k=9\Rightarrow k=\frac{3}{14}$$

EJERCICIO #110.

Demostrar en cada caso que l_1, l_2 y l_3 son rectas concurrentes:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$$

1.- $l_1 \equiv 2x+y+1=0; l_2 \equiv 3x+7y-37=0; l_3 \equiv x-y+11=0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -37 \\ 1 & -1 & 11 \end{vmatrix}=\left[\left(154-37-3\right)-\left(7+33+74\right)\right]=114-114=0\Rightarrow\left(SI\right)$$

2.- $l_1 \equiv 2x-7y-3=0; l_2 \equiv x+y-6=0; l_3 \equiv 3x-11y-4=0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 1 & 1 & -6 \\ 3 & -11 & -4 \end{vmatrix}=\left[\left(-8+126+33\right)-\left(-9+132+28\right)\right]=151-151=0\Rightarrow\left(SI\right)$$

3.- $l_1 \equiv 4x+y+4=0; l_2 \equiv 5x+y+7=0; l_3 \equiv 6x+y+10=0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 6 & 1 & 10 \end{vmatrix}=\left[\left(40+42+20\right)-\left(24+50+28\right)\right]=102-102=0\Rightarrow\left(SI\right)$$

4.- $l_1 \equiv 4x+5y=0; l_2 \equiv x+y-1=0; l_3 \equiv 3x+2y-7=0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -7 \end{vmatrix} = \left[\left(-28-15+0\right) - \left(0-35-8\right) \right] = -43+43 = 0 \Rightarrow \left(SI\right)$$

5.- $l_1 \equiv ax + by - a^2 + b^2 = 0; l_2 \equiv bx + ay = 0; l_3 \equiv 3bx - 2ay - 5ab = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & b & -a^2+b^2 \\ b & a & 0 \\ 3b & -2a & -5ab \end{vmatrix} = \left[\left(-5a^3b + 0 + 2a^3b - 2ab^3\right) - \left(-3a^3b + 3ab^3 - 5ab^3 + 0\right) \right] = 0 \Rightarrow \left(SI\right)$$

Hallar en cada caso el valor que debe tomar k para que las rectas l_1, l_2 y l_3 se intersecten en un punto:

6.- $l_1 \equiv x + 2y - 1 = 0; l_2 \equiv x + 3y = 0; l_3 \equiv kx + \left(k-3\right)y - 7 = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & \left(k-3\right) & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left[\left(-21+0-k+3\right) - \left(-3k-14+0\right) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-18-k\right) + \left(3k+14\right) = 0 \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2$$

7.- $l_1 \equiv x - y - 1 = 0; l_2 \equiv 3x - 4y + 4 = 0; l_3 \equiv kx - 2y - 3k - 1 = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 4 \\ k & -2 & -3k-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left[\left(12k + 4 - 4k + 6\right) - \left(4k + 9k + 3 - 8\right) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5k + 15 = 0 \Rightarrow k = 3$$

8.- $l_1 \equiv 2x - 3y - 12 = 0; l_2 \equiv x + ky + k + 1 = 0; l_3 \equiv 2x + 3y = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -12 \\ 1 & k & k+1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left[(0-6k-6-36)-(-24k+0+6k+6)\right]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12k-48=0 \Rightarrow k=4$$

9.- $l_1 \equiv x+ky+5=0 : l_2 \equiv kx-y-15=0; l_3 \equiv 2x+y-5=0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & k & 5 \\ k & -1 & -15 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left[(5-30k+5k)-(-10-5k^2-15)\right]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5k^2-25k+30=0 \Rightarrow k^2-5k+6=0 \Rightarrow (k-2)(k-3)=0 \Rightarrow k_1=2; k_2=3$$

10.- $l_1 \equiv (k-1)x-3y+4=0; l_2 \equiv 5x-(k+1)y-11=0; l_3 \equiv x+(k-2)y-13=0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} (k-1) & -3 & 4 \\ 5 & -(k+1) & -11 \\ 1 & (k-2) & -13 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{\left[13(k^2-1)+33+20(k-2)\right]-\left[-4(k+1)+195-11(k-1)(k-2)\right]\right\}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[13k^2-13+33+20k-40\right]-\left[-4k-4+195-11k^2+33k-22\right]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24k^2-9k-189=0 \Rightarrow 8k^2-3k-63=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{9+1512}}{16} \Rightarrow k_1=\frac{3+39}{16}=\frac{42}{16}=\frac{21}{8}; k_2=\frac{3-39}{16}=-\frac{36}{16}=-\frac{9}{4}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41I.

Tema: Ecuación general de la línea recta. (Hoffmann, 5to año-Ejercicio # 104, #105 y #106).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la línea recta y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

$$m = -\frac{A}{B}; b = -\frac{C}{B}$$

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ siendo ***a*** el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las ***x*** y ***b*** es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las ***y***.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ***ecuación de la pendiente*** de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Conociendo un solo punto y la ***pendiente***, se puede escribir:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}\Rightarrow y-y_1=m\cdot(x-x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x\cos\theta+ysen\theta-\rho=0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2+B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta=\alpha_2-\alpha_1\Rightarrow tg\theta=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta=0\Rightarrow tg\theta=0\Rightarrow m_2-m_1=0\Rightarrow m_1=m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta=90^\circ\Rightarrow tg\theta=\infty\Rightarrow 1+m_1\cdot m_2=0\Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$(m_1)(m_2) = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida*** ***d*** entre un punto $P_0(x_0, y_0)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l \equiv Ax + By + C = 0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{(P_0,l)} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2 + B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C = 0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C = 0; B = 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:
Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax + By + C_1 ; l_2 \equiv Ax + By + C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{l_1,l_2} = \frac{\left| C_2 - C_1 \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Las coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada son:

$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \right)$ donde $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ y siendo orientados los segmentos considerados.

Condiciones de paralelismo y perpendicularidad en ecuaciones de rectas dadas en forma general.

Dadas las rectas: $l_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0; l_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Para que estas rectas sean paralelas se debe cumplir que:

$$m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

Para que estas rectas sean perpendiculares se debe cumplir que:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \left(-\frac{A_1}{B_1} \right)\left(-\frac{A_2}{B_2} \right) = -1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

Angulo entre dos rectas en rectas dadas en forma general:

Dadas las rectas: $l_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0; l_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$

$$tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}$$

PREGUNTAS:
EJERCICIO #104.

Determinar la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes rectas:

1.- $5x-3y+6=0$

Solución:

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{5}{(-3)}=\frac{5}{3}$$

$$b=-\frac{C}{B}=-\frac{6}{(-3)}=2$$

2.- $7x+y-6=0$

Solución:

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{7}{1}=-7$$

$$b=-\frac{C}{B}=-\frac{(-6)}{1}=6$$

3.- $6x+8y-5=0$

Solución:

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

$$b=-\frac{C}{B}=-\frac{(-5)}{8}=\frac{5}{8}$$

4.- $10x-4y+7=0$

Solución:

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{10}{(-4)}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$b=-\frac{C}{B}=-\frac{7}{(-4)}=\frac{7}{4}$$

5.- $3x+9y-11=0$

Solución:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$b = -\frac{C}{B} = -\frac{(-11)}{9} = \frac{11}{9}$$

6.- $px + qy + r = 0$

Solución:

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{p}{q}$$

$$b = -\frac{C}{B} = -\frac{r}{q}$$

Determinar en cada caso si las rectas son paralelas:

7.- $l_1 \equiv 3x + 5y - 1 = 0; l_2 \equiv 6x + 10y - 3 = 0$

Solución

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{3}{5}$$

$$l_2 \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow (SI)\, l_1 \parallel l_2$$

8.- $l_1 \equiv \sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{6} = 0; l_2 \equiv \sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 42 = 0$

Solución:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \neq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow (NO)$$

9.- $\sqrt{5}x + \sqrt{7}y + 1 = 0; l_2 \equiv 5x + \sqrt{35}y - 3 = 0$

Solución:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

$$l_2 = \frac{5}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} \Rightarrow (SI) \Rightarrow l_1 \parallel l_2$$

10.- $l_1 \equiv 2x - 3\sqrt{2}y + 7 = 0; l_2 \equiv 2\sqrt{2}x - 6y + 11 = 0$

Solución:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{2}{\left(-3\sqrt{2}\right)} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$-$

$$l_2 = \frac{2\sqrt{2}}{-6} = \frac{2\sqrt{2}}{-3\cdot 2} = -\frac{\sqrt{2}}{3} (Si) \Rightarrow l_1 \parallel l_2$$

11.- $l_1 \equiv 10x + 14y + 9 = 0; l_2 \equiv 15x + 21y - 10 = 0$

Solución:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

$$l_2 \Rightarrow \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \Rightarrow (Si) \Rightarrow l_1 \parallel l_2$$

12.- $l_1 \equiv 12x - 18y - 7 = 0; l_2 \equiv 3x - 6y + 1 = 0$

Solución:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{12}{-18} = -\frac{2}{3}$$

$$l_2 \Rightarrow \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}(NO)$$

13.- $l_1 \equiv 4x + 5 = 0; l_2 \equiv x - 7 = 0$

Solución:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{4}{0} = \infty$$

$$l_2 \Rightarrow \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow (Si) \Rightarrow l_1 \parallel l_2.$$

Determinar en cada caso si las rectas dadas son perpendiculares entre si:

14.- $l_1 \equiv 2x + 4y - 7 = 0; l_2 \equiv 6x - 3y + 4 = 0$

Solución:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$l_2 \Rightarrow -\frac{B_2}{A_2} = -\frac{(-3)}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow (Si) \Rightarrow l_1 \perp l_2$$

15.- $l_1 \equiv 7x + 14y + 1 = 0; l_2 \equiv 4x + 2y - 9 = 0$

Solución:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

$$l_2 \Rightarrow -\frac{B_2}{A_2} = -\frac{2}{4} \Rightarrow (NO)$$

16.- $l_1 \equiv 8x - 4y - 11 = 0; l_2 \equiv 3x - 6y + 17 = 0$

Solución:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$l_2 \Rightarrow -\frac{B_2}{A_2} = -\frac{-6}{3} = 2 \Rightarrow (NO)$$

17.- $l_1 \equiv 4x - 2y + 7 = 0; l_2 \equiv 3x + 5y - 9 = 0$

Solución:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$l_1 \equiv \frac{A_1}{B_1} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$l_2 \equiv -\frac{B_2}{A_2} = -\frac{5}{3} \Rightarrow (NO)$$

18.- $l_1 \equiv \sqrt{6}x - 3y + 1 = 0; l_2 \equiv \sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 7 = 0$

Solución:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{\sqrt{6}}{-3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$l_2 \Rightarrow -\frac{B_2}{A_2} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow (Si) \Rightarrow l_1 \perp l_2$$

19.- $l_1 \equiv \sqrt{2}x + \sqrt{10}y + 9 = 0; l_2 \equiv 5x - \sqrt{5}y + 4 = 0$

Solución:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$l_2 \Rightarrow -\frac{B_2}{A_2} = -\frac{\left(-\sqrt{5}\right)}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow (Si) \Rightarrow l_1 \perp l_2$$

20.- $l_1 \equiv 5x - 2 = 0; l_2 \equiv 3y + 1 = 0$
Solución:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{5}{0} = \infty$$

$$l_2 \Rightarrow -\frac{B_2}{A_2} = -\frac{3}{0} = -\infty \Rightarrow (Si) \Rightarrow l_1 \perp l_2$$

21.- Determinar el valor de $\boldsymbol{k}$ para que $l_1 \equiv kx + (k+5)y - 1 = 0$ sea paralela a $l_2 \equiv 4x + 3y + 1 = 0.$

Solución:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{k}{k+5}$$

$$l_2 \Rightarrow \frac{A_2}{B_2} = \frac{4}{3}$$

Luego, si l_1 y l_2 son paralelas se cumple que:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow \frac{k}{k+5} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3k = 4k + 20 \Rightarrow k = -20$$

22.- Determinar el valor de $\boldsymbol{k}$ para que $l_1 \equiv (k+1)x + (k-2)y + 3 = 0$ sea perpendicular a $l_2 \equiv 7x - 3y + 1 = 0.$

Solución:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{k+1}{k-2}$$

$$l_2 \Rightarrow -\frac{B_2}{A_2} = -\frac{(-3)}{7} = \frac{3}{7}$$

Luego, si l_1 y l_2 son perpendiculares, se cumple que:

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow \frac{k+1}{k-2} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7k+7 = 3k-6 \Rightarrow 4k = -13 \Rightarrow k = -\frac{13}{4}$$

23.- Determinar el valor de $\boldsymbol{k}$ para que $l_1 \equiv k^2 + (5k-3)y + 3 = 0$ sea paralela a $l_2 \equiv 3x + 4y - 5 = 0$.

Solución:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{k^2}{5k-3}$$

$$l_2 \Rightarrow \frac{A_2}{B_2} = \frac{3}{4}$$

Luego, si l_1 y l_2 son paralelas se cumple que:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow \frac{k^2}{5k-3} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4k^2 = 15k - 9 \Rightarrow 4k^2 - 15k + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{15 \pm \sqrt{225-144}}{8} = \frac{15 \pm 9}{8} \Rightarrow k_1 = \frac{24}{8} = 3; k_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

24.- Determinar el valor de $\boldsymbol{k}$ para que $l_1 \equiv (k^2+1)x - (8k+6)y + 4 = 0$ sea perpendicular a $l_2 \equiv 6x + 2y + 7 = 0$.

Solución:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{k^2+1}{-8k-6}$$

$$l_2 \Rightarrow -\frac{B_2}{A_2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Luego, si l_1 y l_2 son perpendiculares, se cumple que:

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow \frac{k^2+1}{-8k-6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{k^2+1}{8k+6} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3k^2+3 = 8k+6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3k^2 - 8k - 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} \Rightarrow k_1 = 3; k_2 = -\frac{1}{3}$$

25.- Determinar ***k*** para que $l_1 \equiv \left(k^3+5K\right)x + \left(k^4+35k^2+24\right)y - 7 = 0$ sea paralela a $l_2 \equiv x - 10y + 5 = 0.$

Solución:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{k^3+5k}{k^4+35k^2+24}$$

$$l_2 \Rightarrow \frac{A_2}{B_2} = \frac{1}{-10}$$

Luego, si l_1 y l_2 son paralelas se cumple que:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow \frac{k^3+5k}{k^4+35k^2+24} = \frac{1}{-10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^4 + 10k^3 + 35k^2 + 50k + 24 = 0$$

Este polinomio de cuarto grado con todos los coeficientes positivos tendrá cuatro raíces negativas.

Aplicando Ruffini:

	1	10	35	50	24
-1		-1	-9	-26	-24
	1	9	26	24	0
-2		-2	-14	-24	
	1	7	12	0	
-3		-3	-12		
	1	4	0		
-4		-4			
	1	0			

Las soluciones son: $k_1 = -1; k_2 = -2; k_3 = -3; k_4 = -4$

26.- Determinar $\boldsymbol{k}$ para que la recta $l_1 \equiv \left(k^3+17k\right)x+\left(4k^2+5\right)y+11=0$ sea perpendicular a la recta $l_2 \equiv x+2y-1.$

Solución:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1}=-\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

$$l_1 \Rightarrow \frac{A_1}{B_1}=\frac{k^3+17k}{4k^2+5}$$

$$l_2 \Rightarrow -\frac{B_2}{A_2}=-\frac{2}{1}=-2$$

Luego, si l_1 y l_2 son perpendiculares, se cumple que:

$$\frac{A_1}{B_1}=-\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow \frac{k^3+17k}{4k^2+5}=-2 \Rightarrow k^3+8k^2+17k+10=0$$

Es un polinomio de tercer grado con todos los coeficientes positivos, por tanto, tendrá tres raíces negativas.

Aplicando Ruffini:

	1	8	17	10
-1		-1	-7	-10
	1	7	10	0
-2		-2	-10	
	1	5	0	
-5		-5		
	1	0		

Las soluciones son: $k_1=-1; k_2=-2; k_3=-5$

27.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $A(3,-2)$ y es paralela a la recta $l_1 \equiv 6x-2y+7=0.$

Solución:

$$l_1 \equiv 6x-2y+7=0 \Rightarrow m=-\frac{A}{B}=-\frac{6}{-2}=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_A=m\left(x-x_A\right) \Rightarrow y+2=3\left(x-3\right)=3x-9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x+y+11=0 \Rightarrow 3x-y-11=0 \rightarrow (I)$$

28.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $B\left(-4,\frac{5}{2}\right)$ y es perpendicular a la recta $l_1 \equiv 3x - y - 4 = 0$.

Solución:

$$l_1 \equiv 3x - y - 4 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-1} = 3$$

La pendiente de la perpendicular a l_1 es $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3}$

La ecuación general buscada es:

$$y - y_B = m\left(x - x_B\right) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(x + 4\right) \Rightarrow 6y - 15 = -2x - 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + 6y - 7 = 0 \rightarrow \left(I\right)$$

29.- Hallar la ecuación general de la recta paralela a $l_1 \equiv 9x - 6y + 7 = 0$ y que biseca el segmento de extremos $M\left(4,-3\right); N\left(8,7\right)$.

Solución:

El punto medio ***P*** del segmento ***MN*** es:

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{4+8}{2} = 6;\ y_P = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2 \Rightarrow P\left(6,2\right)$$

Luego:

$$l_1 \equiv 9x - 6y + 7 = 0 \Rightarrow m = -\frac{A}{B} = -\frac{9}{-6} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$
$$y - y_P = m\left(x - x_P\right) \Rightarrow y - 2 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(x - 6\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y - 4 = 3x - 18 \Rightarrow 3x - 2y - 14 = 0 \rightarrow \left(I\right)$$

30.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $l_1 \equiv 10x - 15y + 6 = 0$.

Solución:

$$l_1 \equiv 10x - 15y + 6 = 0. \Rightarrow m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{10}{-15} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$P(0,0); l_2 \perp l_1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow y - y_P = m_2(x - x_P) \Rightarrow y - 0 = \left(-\frac{3}{2}\right)(x - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 2y = 0 \rightarrow (I)$$

31.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por la intersección de las rectas: $l_1 \equiv 2x - 3y - 17 = 0; l_2 \equiv 5x + 4y - 8 = 0$ y es perpendicular a $l_3 \equiv 5x - 4y + 10 = 0.$

Solución:

Llamaremos l_4 a la recta buscada.

El punto ***P*** de intersección de l_1 y l_2 :

$$l_1 \equiv 2x - 3y - 17 = 0 \rightarrow (I) \Rightarrow 4 \cdot (I) = 8x - 12y - 68 = 0 \rightarrow (III)$$

$$l_2 \equiv 5x + 4y - 8 = 0 \rightarrow (II) \Rightarrow 3 \cdot (II) = 15x + 12y - 24 = 0 \rightarrow (IV)$$

$$\Rightarrow (III) + (IV) = 23x - 92 = 0 \Rightarrow x = \frac{92}{23} = 4$$

Introduciendo el valor $x = 4$ en $(I) \Rightarrow 2(4) - 3y - 17 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow P(4,-3)$

Luego:

$$l_3 \equiv 5x - 4y + 10 = 0 \Rightarrow m_3 = -\frac{A}{B} = -\frac{5}{-4} = \frac{5}{4} \Rightarrow m_4 = -\frac{1}{m_3} = -\frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_4 \Rightarrow y - y_P = m_4(x - x_P) \Rightarrow y + 3 = \left(-\frac{4}{5}\right)(x - 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y + 15 = -4x + 16 \Rightarrow l_4 \equiv 4x + 5y - 1 = 0$$

32.- Determinar el valor que deben tomar a y b para que las rectas de ecuaciones: $l_1 \equiv (a-b)x + (6b-a)y - 1 = 0$ y $l_2 \equiv 8x + (2a-3b)y + 5 = 0$ sean paralelas y formen ambas con el eje de las abscisas un ángulo de 135º .

Solución:

$$m_1 = m_2 = tg135^{\circ} = -1 \Rightarrow$$
$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{(a-b)}{(6b-a)}; m_2 = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{8}{(2a-3b)} \Rightarrow \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(a-b)}{(6b-a)} = \frac{8}{(2a-3b)} \Rightarrow 2a^2 - 3ab - 2ab + 3b^2 = 48b - 8a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a^2 - 5ab + 3b^2 = 48b - 8a \Rightarrow 2a^2 - 5ab + 3b^2 - 48b + 8a = 0 \rightarrow (I)$$

También:

$$m_2 = -\frac{8}{(2a-3b)} = tg135^{\circ} = -1 \Rightarrow \frac{8}{2a-3b} = 1 \Rightarrow 8 = 2a - 3b \Rightarrow a = \frac{3b+8}{2} \rightarrow (II)$$

Introduciendo el valor de (II) en (I):

$$2 \cdot \left(\frac{3b+8}{2}\right)^2 - 5b\left(\frac{3b+8}{2}\right) + 3b^2 - 48b + 8\left(\frac{3b+8}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9b^2 + 48b + 64 - 15b^2 - 40b + 6b^2 - 96b + 24b + 64}{2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -64b + 128 = 0 \Rightarrow b = 2$$

Ahora:

$$a = \frac{3b+8}{2} = \frac{3(2)+8}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

34.- Demostrar que las rectas:

$$l_1 \equiv 3x - 2y + 11 = 0; l_2 \equiv 2x + 3y - 10 = 0;$$
$$l_3 \equiv 3x - 2y - 2 = 0; l_4 \equiv 2x + 3y + 3 = 0$$

Solución:

$$l_1 \Rightarrow m_1 = \frac{-A_1}{B_1} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}; l_3 \Rightarrow m_3 = -\frac{A_3}{B_3} = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow m_1 = m_3 \Rightarrow l_1 \parallel l_3$$
$$l_2 \Rightarrow m_2 = -\frac{A_2}{B_2} = -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}; l_4 \Rightarrow m_4 = -\frac{A_4}{B_4} = -\frac{2}{3} \Rightarrow m_2 = m_4 \Rightarrow l_2 \parallel l_4$$

Hasta ahora tenemos un paralelogramo.

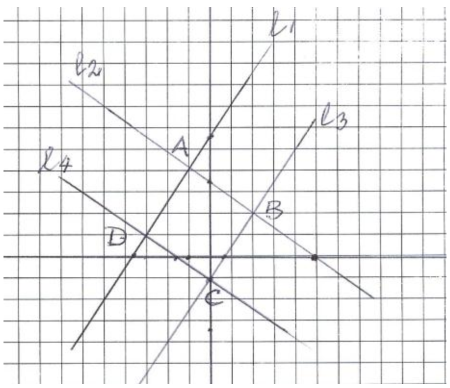
Loa ángulos internos del paralelogramo son todos 90° ya que:

$$m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow l_1 \perp l_2 \Rightarrow \angle A = 90º$$

$$m_2 \cdot m_3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -1 \Rightarrow l_2 \perp l_3 \Rightarrow \angle B = 90º$$

Como en un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales, podemos concluir que tenemos un rectángulo.

Ahora buscaremos las coordenadas de los puntos de intersección de las rectas:



Para el punto ***A***:

$$l_1 \equiv 3x - 2y + 11 = 0; l_2 \equiv 2x + 3y - 10 = 0;$$

$$l_1 \Rightarrow x = \frac{2y - 11}{3} \Rightarrow l_2 \Rightarrow 2\left(\frac{2y - 11}{3}\right) + 3y - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y - 22 + 9y - 30 = 0 \Rightarrow 13y = 52 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = \frac{2(4) - 11}{3} = -1 \Rightarrow A(-1, 4)$$

Para el punto ***B***:

$$l_2 \equiv 2x + 3y - 10 = 0; l_3 \equiv 3x - 2y - 2 = 0$$

$$l_2 \Rightarrow x = \frac{10 - 3y}{2} \Rightarrow l_3 \Rightarrow 3\left(\frac{10 - 3y}{2}\right) - 2y - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30 - 9y - 4y - 4 = 0 \Rightarrow 26 - 13y = 0 \Rightarrow y_B = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B = \frac{10 - 3(2)}{2} = 2 \Rightarrow B(2, 2)$$

Para el punto ***C***:

$$l_3 \equiv 3x - 2y - 2 = 0; l_4 \equiv 2x + 3y + 3 = 0$$

$$l_3 = y = \frac{3x-2}{2} \Rightarrow l_4 \Rightarrow 2x + 3\left(\frac{3x-2}{2}\right) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 9x - 6 + 6 \Rightarrow x_C = 0 \Rightarrow y_C = \frac{3(0)-2}{2} = -1 \Rightarrow C(0,-1)$$

Ahora calcularemos la longitud de los lados recordando que en un rectángulo los lados opuestos son iguales:

$$A(-1,4); B(2,2) \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{AB} = \sqrt{(2+1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}0 = d_{CD}$$

También:

$$B(2,2); C(0,-1) \Rightarrow d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{BC} = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = d_{DA}$$

Todos los lados tienen la misma longitud y todos los ángulos miden 90º, por tanto se trata de un cuadrado.

EJERCICIO #105.

Calcular en los siguientes casos el ángulo que forman las rectas l_1 y l_2 :

1.-
$l_1 \equiv 6x + 7y + 1 = 0; l_2 \equiv 4x = y - 2 = 0$

Solución:

$$tg\theta = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}$$

$$tg\theta = \frac{(6)(1)-(4)(7)}{(6)(4)+(7)(1)} = \frac{6-28}{24+7} = -\frac{22}{31} = -0,7096 \Rightarrow \theta = 144,6404° = 144°38,424'$$

2.- $l_1 \equiv 4x + 9y - 8 = 0; l_2 \equiv\sim x - y + 2 = 0$

Solución:

$$tg\theta = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}$$

$$tg\theta=\frac{(4)(-1)-(1)(9)}{(4)(1)+(9)(-1)}=\frac{-4-9}{4-9}=\frac{-13}{-5}=\frac{13}{5}=2,6\Rightarrow\theta=68,962°=68°57,72'$$

3.- $l_1\equiv 6x+7y+2=0;l_2\equiv 7x-2y+1=0$

Solución:

$$tg\theta=\frac{A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1}{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}$$

$$tg\theta=\frac{(6)(-2)-(7)(7)}{(6)(7)+(7)(-2)}=\frac{-12-49}{42-14}=\frac{-61}{28}=-2,1785\Rightarrow\theta=114,656°=114°39,36'$$

4.- $l_1\equiv\sim 11x-2y+9=0:l_2\equiv 4x-9y-4=0$

Solución:

$$tg\theta=\frac{A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1}{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}$$

$$tg\theta=\frac{(11)(-9)-(4)(-2)}{(11)(4)+(-2)(-9)}=\frac{-99+8}{44+18}=-\frac{91}{62}=-1,4677\Rightarrow 124,268°=124°16,08'$$

5.- $l_1\equiv 4x+5y-2=0;l_2\equiv x-4=0$

Solución:

$$tg\theta=\frac{A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1}{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}$$

$$tg\theta=\frac{(4)(0)-(1)(5)}{(4)(1)+(5)(0)}=-\frac{5}{4}=-1,25\Rightarrow\theta=128,659°=128°39,54'$$

6.- $l_1\equiv 5x-14y+3=0;l_2\equiv 2x+3y-11=0$

Solución:

$$tg\theta=\frac{A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1}{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}$$

$$tg\theta=\frac{(5)(3)-(2)(-14)}{(5)(2)+(-14)(3)}=\frac{15+28}{10-42}=-\frac{43}{32}=-1,34375\Rightarrow\theta=126,656°=126°39,36'$$

7.- Calcular $\boldsymbol{k}$ para que las rectas $l_1\equiv 3x+ky+1=0$ y $l_2\equiv 5x+2y-2=0$ formen un ángulo de 135°.

Solución:

$$tg\theta = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}$$

$$tg\theta = \frac{(3)(2)-(5)(k)}{(3)(5)+(k)(2)} = tg(135°) = -1 \Rightarrow \frac{6-5k}{15+2k} + -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6-5k = -15-2k \Rightarrow 21 = 3k \Rightarrow k = 7$$

8.- Determinar el valor de $\boldsymbol{k}$ para que las rectas $l_1 \equiv 3x-2y+1=0$ y $l_2 \equiv kx+y-2=0$ formen un ángulo de 45°.

Solución:

$$tg\theta = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}$$

$$tg\theta = \frac{(3)(1)-(k)(-2)}{(3)(k)+(-2)(1)} = tg45° = 1 \Rightarrow \frac{3+2k}{3k-2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+2k = 3k-2 \Rightarrow k = 5$$

9.- Determinar los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sabiendo que la recta $l_1 \equiv ax+by-3=0$ y la recta $l_2 \equiv 3x+y+2=0$ forman un ángulo de 78°42’ y que la recta l_1 pasa por el punto $P(-1,-1)$. Tómese $tg78°42' = 5$.

Solución:

$$tg\theta = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}$$

$$tg\theta = tg(78°42') = \frac{(a)(1)-(3)(b)}{(a)(3)+(b)(1)} = 5 \Rightarrow a-3b = 15a+5b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14a-8b = 0 \Rightarrow 7a+4b = 0 \to (I)$$

De l_1 pasa por $P(-1,-1)$:

$$l_1 = a(-1)+b(-1)-3 = 0 \Rightarrow a+b = -3 \to (II)$$

Resolviendo (I) y (II):

$$7(II) \Rightarrow 7a+7b = -21 \Rightarrow (I) - 7(II) \Rightarrow 4b-7b = 21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = -7 : a = 4$$

10.- Determinar los valores de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ sabiendo que las rectas $l_1 \equiv 2x+5y-3=0$ y $l_2 \equiv ax+by-1=0$ forman un ángulo de 63°26' y que l_2 pasa por el punto $P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{9}\right)$. Tomar $tg63°26'=2$.

Solución:

$$tg\theta=\frac{A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1}{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}$$

$$tg\theta=\frac{(2)(b)-(a)(5)}{(2)(a)+(5)(b)}=tg(63°26')=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2b-5a}{2a+5b}=2\Rightarrow 2b-5a=4a+10b\Rightarrow -9a-8b=0\Rightarrow 9a+8b=0\rightarrow(1)$$

Ahora, como l_2 pasa por el punto $P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{9}\right)$:

$$l_2\Rightarrow a\left(\frac{1}{4}\right)+b\left(\frac{1}{9}\right)-1=0\Rightarrow 9a+4b-36=0\rightarrow(II)$$

$$(I)-(II)=4b+36=0\Rightarrow b=-9\Rightarrow(I)\Rightarrow 9a+8(-9)=0\Rightarrow a=8$$

11.- Determinar los valores de a y b sabiendo que las rectas $l_1\equiv 2x+y+5=0$ y $l_2\equiv ax+by-9=0$ forman un ángulo de $81°52'$ y que l_2 pasa por el punto $P(3,-2)$. Tomar $tg(81°52')=7$

Solución:

$$tg\theta=\frac{A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1}{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}$$

$$tg\theta=\frac{(2)(b)-(a)(1)}{(2)(a)+(1)(b)}=\frac{2b-a}{2a+b}=7\Rightarrow 2b-a=14a+7b\Rightarrow$$

$$-15a-5b=0\Rightarrow 3a+b=0\rightarrow(I)$$

Como l_2 pasa por el punto $P(3,-2)$:

$$l_2\Rightarrow(a)(3)+(b)(-2)-9=0\Rightarrow 3a-2b=9\rightarrow(II)\Rightarrow(I)-(II)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3b=-9\Rightarrow b=-3\Rightarrow l_1\Rightarrow 3a+(-3)=0\Rightarrow a=1$$

EJERCICIO #106.

Hallar en cada caso la distancia del punto $\boldsymbol{P}$ a la recta dada:

1.- $P(4,-2); l_1 \equiv 3x-4y+10=0$

Solución:

$$d=\frac{Ax_P+By_P+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$d=\frac{3(4)-4(-2)+10}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{12+8+10}{\sqrt{9+16}}=\frac{30}{5}=6$$

2.- $P(-3,2); l_1 \equiv 8x-6y+1=0$

Solución:

$$d=\frac{Ax_P+By_P+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$d=\frac{8(-3)-6(2)+1}{\sqrt{(8)^2+(-6)^2}}=\frac{-24-12+1}{\sqrt{100}}=\left|\frac{35}{10}\right|=\frac{7}{2}$$

3.- $P(2,-7); l_1 \equiv 12x+5y-2=0$

Solución:

$$d=\frac{Ax_P+By_P+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$
$$d=\frac{12(2)+5(-7)-2}{\sqrt{(12)^2+(5)^2}}=\frac{24-35-2}{\sqrt{144+25}}=\left|\frac{-13}{13}\right|=1$$

4.- $P(-2,-6); l_1 \equiv 3x+y+2=0$

Solución:

$$d=\frac{Ax_P+By_P+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$d=\frac{3(-2)+1(-6)+2}{\sqrt{(3)^2+(1)^2}}=\frac{-6-6+2}{\sqrt{10}}=\left|\frac{-10}{\sqrt{10}}\right|\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

Hallar en cada caso la distancia dirigida del punto $\boldsymbol{P}$ a la recta l_1:

5.- $P(4,2); l_1 \equiv 8x+15y+6=0$

Solución:

$$d_{(P_0,l)} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C = 0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C = 0; B = 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

Luego:

$$\vec{d} = \frac{8(4)+15(2)+6}{-\sqrt{(8)^2+(15)^2}} = \frac{32+30+6}{-\sqrt{64+225}} = -\frac{68}{17} = -4$$

6.- $P(-3,4); l_1 \equiv 21x-20y-2=0$

Solución:

$$d_{(P_0,l)} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C = 0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C = 0; B = 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

Luego:

$$\vec{d}=\frac{21(-3)-20(4)-2}{-\sqrt{(21)^2+(-20)^2}}=-\frac{-63-80-2}{-\sqrt{441+400}}=\frac{145}{\sqrt{841}}=\frac{145}{29}=5$$

7.- $P(5,-2);l_1\equiv 7x-24y+67=0$

Solución:

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

Luego:

$$\vec{d}=\frac{7(5)-24(-2)+67}{-\sqrt{(7)^2+(-24)^2}}=\frac{35+48+67}{-\sqrt{49+576}}=\frac{150}{-\sqrt{625}}=-\frac{150}{25}=-6$$

8.- $P(-5,-10);l_1\equiv 35x+12y+36=0$

Solución:

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

b).- Si $C = 0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C = 0; B = 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

Luego:

$$\vec{d} = \frac{35(-5)+12(-10)+36}{-\sqrt{(35)^2+(-12)^2}} = \frac{-175-120+36}{-\sqrt{1225+144}} = \frac{-259}{-\sqrt{1369}} = \frac{259}{37} = 7$$

9.- $P(4,3); l_1 \equiv x+2y=0$

Solución:

$$d_{(P_0,l)} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C = 0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C = 0; B = 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

Luego:

$$\vec{d} = \frac{(1)(4)+(2)(3)+0}{+\sqrt{(1)^2+(2)^2}} = \frac{4+6}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

10.- $P(3,-2); l_1 \equiv 5x-12y=0$

Solución:

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

$$\vec{d}=\frac{(5)(3)-12(-2)+0}{-\sqrt{(5)^2+(-12)^2}}=\frac{15+24}{-\sqrt{25+144}}=-\frac{39}{13}=-3$$

En los siguientes ejercicios se dan los vértices de un triángulo. Calcular en cada caso la longitud de la altura sobre el lado $\boldsymbol{BC}$, la longitud del lado $\boldsymbol{BC}$ y el área del triángulo:

11.- $A(3,-6);B(4,5);C(1,-2)$

Solución:

$$d_{BC}=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(1-4)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$$

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-2-5}{1-4}=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_B=m_{BC}(x-x_B)\Rightarrow y-5=\left(\frac{7}{3}\right)(x-4)\Rightarrow 3y-15=7x-28\Rightarrow$$

$$l_{BC}\equiv 7x-3y-13=0\Rightarrow h_A=\frac{7x_A-3y_A-13}{\sqrt{(7)^2+(-3)^2}}=\frac{7(-3)-3(6)-13}{\sqrt{58}}=\frac{-52}{\sqrt{58}}\Rightarrow$$

$$h_A=\left|\frac{-52}{\sqrt{58}}\right|=\frac{52}{\sqrt{58}}$$

Area del triángulo $\boldsymbol{ABC}$:

$$\Delta_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot h_A}{2}=\frac{\left(\sqrt{58}\right)\left(\frac{52}{\sqrt{58}}\right)}{2}=\frac{52}{2}=26$$

12.- $A\left(\frac{1}{5},4\right);B(4,-3);C(-8,2)$

Solución:

$$d_{BC}=\sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}=\sqrt{(-8-4)^2+(2+3)^2}=$$
$$d_{BC}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$$

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{2+3}{-8-4}=-\frac{5}{12}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_B=m_{BC}\left(x-x_B\right)\Rightarrow y+3=\left(-\frac{5}{12}\right)(x-4)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12y+36=-5x+20\Rightarrow l_{BC}\equiv 5x+12y+16=0$$

$$h_A=\frac{5\left(\frac{1}{5}\right)+12(4)+16}{\sqrt{(5)^2+(12)^2}}=\frac{1+48+16}{\sqrt{25+144}}=\frac{65}{13}$$

Area del triángulo $\boldsymbol{ABC}$:

$$\Delta_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot h_A}{2}=\frac{\frac{65}{13}\cdot 13}{2}=\frac{65}{2}$$

13.- $A(2,-3);B(-2,-3);C(-4,3)$

Solución:

$$d_{BC}=\sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2}=\sqrt{(-4+2)^2+(3+3)^2}=$$
$$d_{BC}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{3+3}{-4+2}=-\frac{6}{2}=-3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_B=m_{BC}\left(x-x_B\right)\Rightarrow y+3=(-3)(x+2)=-3x-6\Rightarrow \sim$$
$$\Rightarrow l_{BC}\equiv 3x+y+9=0$$

$$h_A=\frac{3(2)+(1)(-3)+9}{\sqrt{(3)^2+1}}=\frac{12}{\sqrt{10}}$$

Area del triángulo $\boldsymbol{ABC}$:

$$\Delta_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot h_A}{2}=\frac{\left(2\sqrt{10}\right)\left(\frac{12}{\sqrt{10}}\right)}{2}=12$$

14.- La distancia dirigida a la recta $l\equiv 6x+8y-7=0$ desde el punto $\boldsymbol{P}$ de ordenada -5 es $-\frac{23}{10}$. Determinar la abscisa de $\boldsymbol{P}$.

Solución:

$l\equiv 6x+8y-7=0$

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

$$d_{P,l}=\frac{6\left(x_P\right)+8\left(-5\right)-7}{\sqrt{\left(6\right)^2+\left(8\right)^2}}=\frac{6x_P-40-7}{\sqrt{36+64}}=-\frac{23}{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x_P-47=-23\Rightarrow 6x_P=24\Rightarrow x_P=4$$

15.- La distancia a la recta $l\equiv 4x-2y+3=0$ desde el punto $\boldsymbol{P}$ de ordenada 3 es $\frac{7\sqrt{5}}{10}$. Determinar la abscisa de $\boldsymbol{P}$.

Solución:

$l\equiv 4x-2y+3=0$

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C = 0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C = 0; B = 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

a.- Se toma la raíz positiva porque no es una distancia dirigida.

$$d_{P,l} = \frac{4(x_P)-2(3)+3}{\sqrt{(4)^2+(-2)^2}} = \frac{4x_P-3}{\sqrt{20}} = \frac{7\sqrt{5}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4x_P-3}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{10} \Rightarrow 4x_P-3 = \frac{14(5)}{10} = 7 \Rightarrow 4x_P = 10 \Rightarrow x_P = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

b.- Se toma la raíz negativa, contraria al signo del término independiente, porque se trata como distancia dirigida.

$$d_{P,l} = \frac{4(x_P)-2(3)+3}{-\sqrt{(4)^2+(-2)^2}} = \frac{4x_P-3}{\sqrt{20}} = \frac{7\sqrt{5}}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4x_P-3}{-2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{10} \Rightarrow 4x_P-3 = -\frac{14(5)}{10} = -7 \Rightarrow 4x_P = -4 \Rightarrow x_P = -1$$

16.- La distancia dirigida a la recta $l \equiv x+7y-3=0$ desde el punto $\boldsymbol{P}$ de abscisa 4 es $-2\sqrt{2}$. Determinar la ordenada de $\boldsymbol{P}$.

Solución:

$$d_{(P_0,l)} = \frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C = 0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C=0; B=0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

$$l \equiv x+7y-3=0 \Rightarrow d_{P,l} = \frac{(1)(4)+(7)(y_P)-3}{+\sqrt{(1)^2+(7)^2}} = -2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4+7y_P-3}{5\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \Rightarrow 1+7y_P = -20 \Rightarrow y_P = -\frac{21}{7} = -3$$

17.- La distancia a la recta $l \equiv 4x-3y+5=0$ desde el punto $\boldsymbol{P}$ de abscisa 4 es 6. Determinar la ordenada de $\boldsymbol{P}$.

Solución:

$$d_{(P_0,l)} = \frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C=0; B\neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C=0; B=0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

a.- No es un problema de recta dirigida.

$$l \equiv 4x-3y+5=0 \Rightarrow d_{P,l} = \frac{(4)(4)+(-3)(y_P)+5}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{16-3y_P+5}{5} = 6 \Rightarrow 21-3y_P = 30 \Rightarrow 3y_P = -9 \Rightarrow y_P = -3$$

b.- Si se toma como recta dirigida, el resultado es:

$$l \equiv 4x-3y+5=0 \Rightarrow \frac{(4)(4)+(-3)(y_P)+5}{-\sqrt{(4)^2+(-3)^2}} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21-3y_P = -30 \Rightarrow 3y_P = 51 \Rightarrow y_P = 17$$

18.- Determinar el valor de $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}$ = entero) si la distancia del punto $P(3,-7)$ a la recta $l \equiv Ax+4y-3=0$ es $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

Solución:

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

a. Se toma como distancia absoluta.

$$l\equiv Ax+4y-3=0\Rightarrow d_{P,l}=\frac{(A)(3)+(4)(-7)-3}{+\sqrt{(A)^2+(4)^2}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3A-31}{\sqrt{A^2+16}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}\Rightarrow(3A-31)^2=\left(\sqrt{A^2+16}\right)^2\cdot\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9A^2-186A+961=\left[\left(\sqrt{A^2+16}\right)\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)\right]^2=\left(A^2+16\right)\left(\frac{125}{4}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36A^2-744A+3844=125A^2+2000\Rightarrow 89A^2+744A-1844=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\frac{-744\pm\sqrt{(744)^2+(4)(89)(1844)}}{178}=\frac{-744\pm\sqrt{1210000}}{178}=\frac{-744\pm 1100}{178}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1=\frac{-744+1100}{178}=\frac{356}{178}=2$$

19.- Determinar el valor de ***B*** (***B*** = entero) si la distancia del punto $P(2,-3)$ a la recta $l\equiv 16x+By+39=0$ es 4.

Solución:

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$l \equiv 16x + By + 39 = 0 \Rightarrow d_{P,l} = \frac{(16)(2)+(B)(-3)+39}{\sqrt{(16)^2+(B)^2}} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{32-3B+39}{\sqrt{(16)^2+(B)^2}} = 4 \Rightarrow (71-3B)^2 = \left[\left(\sqrt{16^2+B^2}\right)(4)\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5041 - 426B + 9B^2 = 16^3 + 16B^2 = 4096 + 16B^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7B^2 + 426B - 945 = 0 \Rightarrow B = \frac{-426 \pm \sqrt{(426)^2+(4)(7)(945)}}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{-426 \pm \sqrt{207936}}{14} = \frac{-426 \pm 456}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{-426-456}{14} = -\frac{882}{14} = -63$$

20.- Determinar el valor de $\boldsymbol{C}$ si la distancia dirigida del punto $P(3,-4)$ a la recta $l \equiv 5x - 2y + C = 0$ es $-\sqrt{29}$.

Solución:

$$d_{(P_0,l)} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C = 0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C = 0; B = 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

$$l \equiv 5x - 2y + C = 0 \Rightarrow d_{P,l} = \frac{(5)(3)+(-2)(-4)+C}{-\sqrt{(5)^2+(-2)^2}} = -\sqrt{29} \Rightarrow$$

$$\rightarrow 15 + 8 + C = 29 \Rightarrow c = 29 - 23 = 6$$

21.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $M(3,1)$ y cuya distancia al punto $P(-1,1)$ es $2\sqrt{2}$.

Solución:

Como la recta pasa por ***M***:

$$y-y_M=m\left(x-x_M\right)\Rightarrow y-1=m\left(x-3\right)=mx-3m\Rightarrow$$
$$\Rightarrow mx-y-\left(3m-1\right)=0\rightarrow\left(I\right)$$

Ahora:

$$d_{\left(P_0,l\right)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

$$d_{P,l}=\frac{\left(m\right)\left(-1\right)-\left(1\right)-3m+1}{\sqrt{m^2+\left(-1\right)^2}}=2\sqrt{2}\Rightarrow\frac{-4m}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(-4m\right)^2=\left[\left(\sqrt{m^2+1}\right)\left(2\sqrt{2}\right)\right]^2=\left(m^2+1\right)\left(8\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16m^2=8m^2+8\Rightarrow 8m^2=8\Rightarrow m=\pm1\Rightarrow m_1=1;m_2=-1$$

a.- Volviendo a la ecuación (I) para $m_1=1$:

$$mx-y-\left(3m-1\right)=0\Rightarrow\left(1\right)x-y-\left[3\left(1\right)-1\right]=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-y-2=0$$

b.- Volviendo a la ecuación (I) para $m_2=-1$

$$mx-y-\left(3m-1\right)=0\Rightarrow\left(-1\right)x-y-\left[3\left(-1\right)-1\right]=0\Rightarrow$$
$$-x-y+3+1=0\Rightarrow x+y-4=0$$

22.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $M\left(3,2\right)$ y cuya distancia al punto $P\left(-4,-4\right)$ es igual a 2.

Solución:

$$y-y_M=m\left(x-x_M\right)\Rightarrow y-2=m\left(x-3\right)\Rightarrow mx-y-\left(3m-2\right)=0\rightarrow\left(I\right)$$

Ahora:

$$d_{\left(P_0,l\right)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

$$l\equiv mx-y-\left(3m-2\right)\Rightarrow d_{P,l}=\frac{\left(m\right)\left(-4\right)-\left(-4\right)-\left(3m-2\right)}{\sqrt{m^2+1}}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-7m+6}{\sqrt{m^2+1}}=2\Rightarrow\left(6-7m\right)^2=\left[2\sqrt{m^2+1}\right]^2=4m^2+4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36-84m+49m^2=4m^2+4\Rightarrow 45m^2-84m+32=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{84\pm\sqrt{\left(84\right)^2-4\left(45\right)\left(32\right)}}{90}=\frac{84\pm\sqrt{7056-5760}}{90}=\frac{84\pm\sqrt{1296}}{90}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{84\pm 36}{90}\Rightarrow m_1=\frac{120}{90}=\frac{4}{3};m_2=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$$

Luego, partiendo de la ecuación (I), se tienen dos soluciones:

a.- Para $m=\frac{4}{3}$:

$$mx-y-\left(3m-2\right)=0\Rightarrow\frac{4}{3}x-y-\left(3\cdot\frac{4}{3}-2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{4}{3}x-y-2=0\Rightarrow 4x-3y-6=0$$

b.- Para $m=\frac{8}{15}$:

$$mx-y-\left(3m-2\right)=0\Rightarrow\frac{8}{15}x-y-\left(3\cdot\frac{8}{15}-2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x-15y-\left(24-30\right)=0\Rightarrow 8x-15y+6=0$$

23.- Hallar la ecuación general de la recta que dista 2 unidades del punto $P(3,-4)$ y pasa por el punto $M(-2,6)$.

Solución:

$$y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-6=m(x+2)\Rightarrow mx-y+(2m+6)=0\rightarrow(I)$$

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

$$l\equiv mx-y+(2m+6)=0\Rightarrow d_{P,l}=\frac{m(3)-(-4)+2m+6}{\sqrt{m^2+1}}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5m+10=2\left(\sqrt{m^2+1}\right)\Rightarrow 25m^2+100m+100=4m^2+4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21m^2+100m+96\Rightarrow m_{1,2}=\frac{-100\pm\sqrt{10000-8064}}{42}=$$

$$\Rightarrow m_{1,2}\frac{-100\pm 44}{42}\Rightarrow m_1=\frac{-144}{42}=-\frac{24}{7};m_2=-\frac{56}{42}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$$

Luego, partiendo de la ecuación (I), se tienen dos soluciones:

a.- Para $m=-\frac{24}{7}$:

$$mx-y+(2m+6)=0\Rightarrow -\frac{24}{7}x-y+\left(2\cdot\frac{-24}{7}+6\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -24x-7y-48+42=0\Rightarrow 24x+7y+6=0$$

b.- Para $m=-\frac{4}{3}$:

$$mx-y+(2m+6)=0\Rightarrow -\frac{4}{3}x-y+\left(2\cdot\frac{-4}{3}+6\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x-3y+10=0\Rightarrow 4x+3y-10=0$$

24.- Hallar la ecuación general de la recta que dista $3\sqrt{5}$ del punto $P(3,5)$ y pasa por el punto $M(2,-2)$.

Solución:

$$y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y+2=m(x-2)\Rightarrow mx-y-(2m+2)=0\rightarrow(I)$$

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$l\equiv mx-y-(2m+2)=0\Rightarrow d_{P,l}=\frac{m(3)-(5)-(2m+2)}{\sqrt{m^2+1}}=3\sqrt{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m-7=3\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}\Rightarrow m^2-14m+49=45m^2+45\Rightarrow 44m^2+14m-4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{(14)^2+4(44)(4)}}{88}=\frac{-14\pm\sqrt{196+704}}{88}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{900}}{88}=\frac{-14\pm 30}{88}\Rightarrow m_1=\frac{16}{88}=\frac{2}{11};m_2=-\frac{44}{88}=-\frac{1}{2}$$

Luego, partiendo de la ecuación (I), se tienen dos soluciones:

a.-

$$mx-y-(2m+2)=0\Rightarrow\frac{2}{11}x-y-\left(2\cdot\frac{2}{11}+2\right)=0\Rightarrow 2x-11y-26=0$$

b.- Para $m=-\frac{1}{2}$:

$$mx-y-(2m+2)=0\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}\right)x-y-\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)+2\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-2y-2=0\Rightarrow x+2y+2=0$$

25.- Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $-\frac{3}{4}$ que dista 4 unidades del punto $P(3,-7)$.

Solución:

$$y=mx+b\Rightarrow y=\left(-\frac{3}{4}\right)x+b\Rightarrow l\equiv 3x+4y-4b=0\rightarrow(I)$$

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$l \equiv 3x+4y-4b=0 \Rightarrow d_{P,l} = \frac{3(3)+4(-7)-4b}{\sqrt{(3)^2+(4)^2}} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9-28-4b}{\pm\sqrt{9+16}} = 4 \Rightarrow -19-4b = \pm 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -19-4b = 20 \Rightarrow b_1 = -\frac{39}{4}$$

$$\Rightarrow -19-4b = -20 \Rightarrow -4b = -1 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{4}$$

a.- Para $b = -\frac{39}{4}$:

$$l \equiv 3x+4y-4b=0 \Rightarrow 3x+4y-(4)\left(-\frac{39}{4}\right) \Rightarrow$$

$$l \equiv 3x+4y+39=0$$

b.- Para $b = \frac{1}{4}$:

$$l \equiv 3x+4y-(4)\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow l \equiv 3x+4y-1=0$$

26.- Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $-\frac{11}{2}$ y cuya distancia al punto $P(-2,5)$ es $\sqrt{5}$.

Solución:

$$y = mx+b \Rightarrow y = \left(-\frac{11}{2}\right)x+b \Rightarrow 2y = -11x+2b \Rightarrow 11x+2y-2b=0 \to (I)$$

$$l \equiv 11x+2y-b=0 \Rightarrow d_{P,l} = \frac{11(-2)+2(5)-b}{\pm\sqrt{(11)^2+(2)^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -22+10-2b = \pm\left(5\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}\right) = \pm 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b_1 = -12-25 = -37 \Rightarrow l \equiv 11x+2y+37$$

$$b_2 \Rightarrow -12-2b = -25 \Rightarrow 2b_2 = 13 \Rightarrow l \equiv 11x+2y-13=0$$

27.- Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $\frac{4}{3}$ y cuya distancia al punto $P(5,1)$ es $\frac{10}{3}$.

Solución:

$$y = mx+b \Rightarrow y = \left(\frac{4}{3}\right)x+b \Rightarrow 3y = 4x+3b \Rightarrow 4x-3y+3b=0 \to (I)$$

$$l \equiv 4x - 3y + 3b = 0 \Rightarrow d_{P,l} = \frac{4(5) - 3(1) + 3b}{\pm\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{20 - 3 + 3b}{\pm 5} = \frac{10}{3} \Rightarrow 17 + 3b = \pm\frac{50}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3b_1 = \frac{50}{3} - 17 \Rightarrow 3b_1 = \frac{50 - 51}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$l \equiv\sim 4x - 3y + 3b_1 \Rightarrow 4x - 3y - \frac{1}{3} \Rightarrow 12x - 9y - 1 = 0$$

$$17 + 3b_2 = -\frac{50}{3} \Rightarrow 3b_2 = 17 + \frac{50}{3} = -\frac{101}{3} \Rightarrow 4x - 3y - \frac{101}{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l \equiv 12x - 9y - 101 = 0$$

28.- Un punto del plano se mueve de tal manera que su distancia al eje de abscisas es igual a su distancia a la recta $l \equiv 5x + 12y + 5 = 0$. Determinar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución:

$$y = \frac{5x + 12y + 5}{\pm\sqrt{(5)^2 + (12)^2}} \Rightarrow y = \frac{5x + 12y + 5}{\pm 13} \Rightarrow$$

$$l_1 \Rightarrow y = \frac{5x + 12y + 5}{13} \Rightarrow 13y = 5x + 12y + 5 \Rightarrow l_1 \equiv 5x - y + 5 = 0$$

$$l_2 \Rightarrow y = \frac{5x + 12y + 5}{-13} \Rightarrow -13y = 5x + 12y + 5 \Rightarrow$$

$$l_2 \equiv 5x + 25y + 5 = 0 \Rightarrow l_2 \equiv x + 5y + 1 = 0$$

29.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes del eje de ordenadas y de la recta $l \equiv 6x - 8y + 5 = 0$.

Solución:

$$x = \frac{6x - 8y + 5}{\pm\sqrt{(6)^2 + (-8)^2}} = \frac{6x - 8y + 5}{\pm 10} \Rightarrow$$

$$l_1 \equiv 10x = 6x - 8y + 5 \Rightarrow -4x - 8y + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1 \equiv 4x + 8y - 5 = 0$$

$$l_2 \equiv -10 = 6x - 8y + 5 = 0 \Rightarrow l_2 \equiv 16x - 8y + 5 = 0 \sim$$

30.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la distancia a la recta $l \equiv 171x + 140y + 9 = 0$ es siempre igual doble de su distancia al eje de las abscisas.
Solución:

$$2y=\frac{171x+140y+9}{\pm\sqrt{(171)^2+(140)^2}}=\frac{171x+140y+9}{\pm\sqrt{29241+19600}}=\frac{171x+140y+9}{\pm\sqrt{48841}}=\frac{171x+140y+9}{\pm 221}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=\frac{171x+140y+9}{\pm 221}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1\Rightarrow 442y=171x+140y+9\Rightarrow l_1\equiv 171x-302y+9=0$$

$$\Rightarrow l_2\equiv -442y=171x+140y+9=0\Rightarrow l_2\equiv 171x+582y+9=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_2\equiv 57x+194y+3=0$$

31.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $l_1\equiv 24x+7y-25=0$ es siempre igual a su distancia a la recta $l_2\equiv 8x+15y-17=0$.

Solución:

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

Entonces:

$$d_{(P,l_1)}=d_{(P,l_2)}$$

$$\frac{24(x)+7(y)-25}{\sqrt{(24)^2+(7)^2}}=\frac{8(x)+15(y)-17}{\pm\sqrt{(8)^2+(15)^2}}\Rightarrow\frac{24x+7y-25}{\sqrt{576+49}}=\frac{8x+15y-17}{\pm\sqrt{64+225}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{24x+7y-25}{\sqrt{625}}=\frac{8x+15y-17}{\pm\sqrt{289}}\Rightarrow\frac{24x+7y-25}{25}=\frac{8x+15y-17}{\pm 17}$$

Luego, existen dos soluciones:

a.- Para el signo positivo del segundo denominador $(+17)$:

$408x+119y-425=200x+375y-425 \Rightarrow 208x-256y=0 \Rightarrow 13x-16y=0$

b.- Para el signo negativo en el segundo denominador (-17):

$$-408x-119y+425=200x+375y-425 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 608x+494y-859=0 \Rightarrow 304x+247y-425=0$$

32.- Un punto se mueve de manera tal que su distancia a la recta $l_1 \equiv 9x+40y+7=0$ es siempre el doble de su distancia a la recta $l_2 \equiv 60x+11y-9=0$. Encontrar su lugar geométrico.

Solución:

$$d_{(P_0,l)} = \frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C=0; B\neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C=0; B=0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

Entonces:

$$d_{(P,l_1)} = 2\cdot d_{(P,l_2)}$$
$$\frac{9(x)+40(y)+7}{\sqrt{(9)^2+(40)^2}} = 2\cdot\frac{60(x)+11(y)-9}{\pm\sqrt{(60)^2+(11)^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9x+40y+7}{\sqrt{81+1600}} = 2\cdot\frac{60x+11y-9}{\sqrt{3600+121}} \Rightarrow \frac{9x+40y+7}{\sqrt{1681}} = \frac{120x+22y-18}{\pm\sqrt{3721}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9x+40y+7}{41} = \frac{120x+22y-18}{\pm 61}$$

Luego, tendremos dos soluciones:

a.- Para el signo positivo en el segundo denominador $(+61)$:

$549x+2440y+427=4920x+902y-738 \Rightarrow 4371x-1538y-1165=0$

b.- Para el signo negativo en el segundo denominador (-61):

$-549x-2440y-427=4920x+902y-738 \Rightarrow 5469x+3342y-311=0 \Rightarrow$

33.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal forma que su distancia a la línea recta $l_1 \equiv 4x-3y+9=0$ es cinco veces su distancia a la línea recta $l_2 \equiv 6x+8y-7.=0.$

Solución:

$$d_{(P_0,l)} = \frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C=0; B\neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C=0; B=0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

Entonces:

$$d_{(P,l_1)} = 5\cdot d_{(P,l_2)}$$

$$\frac{4(x)-3(y)+9}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = 5\cdot\frac{6(x)+8(y)-7}{\pm\sqrt{(6)^2+(8)^2}} \Rightarrow \frac{4x-3y+9}{\sqrt{25}} = 5\cdot\frac{6x+8y-7}{\pm\sqrt{100}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4x-3y+9}{5} = \frac{30x+40y-35}{\pm 10}$$

Luego, tenemos dos soluciones:

a.- Para el signo positivo del segundo denominador $(+10)$:

$8x-6y+18=30x+40y-35 \Rightarrow 22x+46y+53=0$

b.- Para el signo negativo del segundo denominador (-10):

$$-8x+6y-18=30x+40y-35 \Rightarrow 38x+34y-17=0$$

34.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $M(4,1)$ y de la recta $l \equiv 2x-y+1=0$.

Solución:

$$d_{(P,M)}=d_{(P,l)}$$

$$\sqrt{(x-x_M)^2+(y-y_M)^2}=\frac{2(x)-(1)(y)+1}{\pm\sqrt{(2)^2+(1)^2}}=\frac{2x-y+1}{\pm\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2+(y-1)^2=\frac{(2x-y+1)^2}{5} \Rightarrow$$

$$(x^2-8x+16)+(y^2-2y+1)=\frac{x^2+4y^2-4xy+2x-2y+1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2+5y^2-40x+80-10y+5=x^2+4y^2-4xy+2x-2y+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+y^2-42x-8y+4xy+84=0$$

35.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto del plano que se mueve de tal manera que se mantiene siempre a la misma distancia del punto $M(-2,-1)$ y de la línea recta $l \equiv 3x+y+7=0$

Solución:

$$d_{(P,M)}=d_{(P,l)}$$

$$\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}=\frac{3(x)+(1)(y)+7}{\pm\sqrt{(3)^2+(1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=\frac{(3x+y+7)^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2}=\frac{(3x+y+7)^2}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2+4x+4)+(y^2+2y+1)=\frac{9x^2+y^2+6xy+42x+14y+49}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x^2+10y^2+40x+20y+40+10=9x^2+y^2+6xy+42x+14y+49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+9y^2-2x+6y-6xy+1=0$$

36.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $M(3,-1)$ y de la línea recta $l \equiv x-5y-16=0$.

Solución:

$$d_{(P,M)} = d_{(P,l)}$$
$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} = \frac{(1)(x)-5(y)-16}{\pm\sqrt{(1)^2+(-5)^2}} = \frac{x-5y-16}{\pm\sqrt{26}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2 = \frac{(x-5y-16)^2}{26} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x^2-6x+9\right)+\left(y^2+2y+1\right) = \frac{x^2+25y^2-10xy-32x+160y+256}{26} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 26x^2+26y^2-156x+52y+260 = x^2+25y^2-10xy-32x+160y+256 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25x^2+y^2+10xy-124x-108y+4=0$$

37.- Un punto se mueve de tal forma que su distancia a la recta $l \equiv 3x-2y+1$ es siempre la mitad de su distancia al origen de coordenadas. Determinar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución:

$$d_{(P,l)} = \frac{1}{2} d_{(P,O)}$$
$$\frac{3(x)-2(y)+1}{\pm\sqrt{(3)^2+(-2)^2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{3x-2y+1}{\pm\sqrt{13}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(3x-2y+1)^2}{13} = \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow \frac{9x^2+4y^2-12xy+6x-4y+1}{13} = \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36x^2+16y^2-48xy+24x-16y+4 = 13x^2+13y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 23x^2+3y^2-48xy+24x-16y+4=0$$

38.- Un punto se mueve de tal forma que su distancia a la línea recta $l_1 \equiv 4x-3y+2=0$ es siempre dos unidades mayor que su distancia a la línea recta $l_2 \equiv 5x+12y-13=0$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución:

$$d_{(P,l_1)} = d_{(P,l_2)} + 2$$

$$\frac{4(x)-3(y)+2}{\pm\sqrt{(4)^2+(-3)^2}}=\frac{5(x)+12(y)-13}{\pm\sqrt{(5)^2+(12)^2}}+2\Rightarrow\frac{4x-3y+2}{\pm\sqrt{25}}=\frac{5x+12y-13}{\pm\sqrt{169}}+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{4x-3y+2}{\pm5}\right)=\left(\frac{5x+12y-13}{\pm13}+2\right)$$

O sea, existen dos soluciones:

a.- Si los dos denominadores son positivos, $(+5);(+13)$:

$$\frac{4x-3y+2}{5}=\frac{5x+12y-13+26}{13}\Rightarrow\frac{4x-3y+2}{5}=\frac{5x+12y+13}{13}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 52x-39y+26=25x+60y+65\Rightarrow 27x-99y-39=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x-33y-13=0\rightarrow(I)$$

b.- Si el primer denominador es negativo y el segundo es positivo, $(-5);(+13)$:

$$\frac{4x-3y+2}{-5}=\frac{5x+12y+13}{13}\Rightarrow 52x-39y+26=-25x-60y-65\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 77x+21y+91=0\rightarrow 11x+3y+13=0\rightarrow(II)$$

39.- Un punto se mueve en un plano de manera tal que siempre está más alejado 8 unidades del punto $M(11,7)$ que de la línea recta $l\equiv 3x-4y-11=0.$ Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Solución:

$$d_{(P,M)}-8=d_{(P,l)}$$

$$\sqrt{(x-11)^2+(y-7)^2}-8=\frac{3(x)-4(y)-11}{\pm\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{3x-4y-11}{\pm5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{(x-11)^2+(y-7)^2}=\frac{3x-4y-11}{\pm5}+8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-11)^2+(y-7)^2=\frac{(3x-4y-11)^2}{25}+64+16\left(\frac{3x-4y-11}{\pm5}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-22x+121+y^2-14y+49=$$

$$=\frac{9x^2+16y^2-24xy-66x+88y+121}{25}+64+\frac{16}{\pm5}(3x-4y-11)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-22x-14y+170-\frac{9x^2+16y^2-24xy-66x+88y+121}{25}=\frac{16}{\pm5}(3x-4y-11)$$

$$\Rightarrow \frac{25x^2+25y^2-550x-350y+4250-9x^2-16y^2+24xy+66x-88y-121}{25}=$$
$$=\frac{16}{\pm 5}(3x-4y-11)$$

Entonces, habrá dos soluciones:

a.- Para el signo positivo denominador de la derecha, $(+5)$:

$$\frac{16x^2+9y^2+24xy-484x-438y+4129}{25}=\frac{16}{5}(3x-4y-11)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16x^2+9y^2+24xy-484x-438y+4129=80(3x-4y-11)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16x^2+9y^2+24xy-484x-438y+4129=240x-320y-880\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16x^2+9y^2+24xy-724x-118y+5009\rightarrow(I)$$

b.- Para el signo negativo del denominador de la derecha, (-5):

$$16x^2+9y^2+24xy-484x-438y+4129=-240x+320y+880\Rightarrow$$
$$16x^2+9y^2+24xy-244x-758y+3249\rightarrow(II)$$

40.- La distancia de un punto a la recta $l\equiv y-1$ es siempre tres veces menor que su distancia al punto $M(2,-3)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico.

Solución:

$$3\cdot d_{(P,l)}=d_{(P,M)}$$

$$3\cdot\frac{(0)x+(1)(y)-1}{\pm\sqrt{(1)^2}}=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left[3\cdot\frac{y-1}{\pm 1}\right]^2=(x-2)^2+(y+3)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9(y^2-2y+1)=x^2-4x+4+y^2+6y+9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9y^2-18y+9=x^2+y^2-4x+6y+13\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-8y^2-4x+24y+4=0\rightarrow(I)$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41H.

Tema: Ecuación general de la línea recta. (Hoffmann, 5to año-Ejercicio # 103).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la línea recta y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ siendo $\boldsymbol{a}$ el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ***ecuación de la pendiente*** de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Conociendo un solo punto y la ***pendiente***, se puede escribir:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x\cos\theta + ysen\theta - \rho = 0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta = 90^o \Rightarrow tg\theta = \infty \Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(m_1\right)\left(m_2\right)=-1 \Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida d*** entre un punto $P_0\left(x_0, y_0\right)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l \equiv Ax+By+C=0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{\left(P_0, l\right)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo a como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0; B=0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax+By+C_1; l_2 \equiv Ax+By+C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{l_1,l_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Las coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada son:

$P(x,y) = \left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ donde $\lambda = \dfrac{P_1P}{PP_2} = \dfrac{x-x_1}{x_2-x} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y}$ y siendo orientados los segmentos considerados.

PREGUNTAS:

EJERCICIO #103.

1.- Hallar la ecuación reducida de la recta que pasa por los puntos $A(-3,2); B(5,-3)$.

Solución:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-2}{5+3} = -\frac{5}{8}$$

$$y - y_A = m_{AB}(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = \left(-\frac{5}{8}\right)(x+3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y - 16 = -5x - 15 \Rightarrow 8y = -5x + 1 \Rightarrow y = -\frac{5}{8} + \frac{1}{8}$$

2.- Hallar la ecuación simétrica (*canónica)* de la recta que tiene pendiente 5 y que pasa por el punto $M(-4,-5)$.

Solución:

$$y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y + 5 = 5(x+4) = 5x + 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x + y = 15 \Rightarrow \frac{-5x+y}{15} = \frac{15}{15} = 1 \Rightarrow \frac{x}{(-3)} + \frac{y}{(15)} = 1$$

3.- Hallar la ecuación simétrica (canónica) de la recta que pasa por los puntos $M(3,2); N(7,-1)$.

Solución:

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-1-2}{7-3}=-\frac{3}{4}$$

$$y-y_M=m_{MN}\left(x-x_M\right)\Rightarrow y-2=\left(-\frac{3}{4}\right)\left(x-3\right)\Rightarrow 4y-8=-3x+9\Rightarrow$$

$$3x+4y=17\Rightarrow \frac{3x+4y}{17}=\frac{17}{17}=1\Rightarrow \frac{x}{\left(\frac{17}{3}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{17}{4}\right)}=1$$

4.- Hallar la ecuación de la recta sabiendo que los segmentos que determina sobre los ejes de abscisas y ordenada miden, respectivamente, 5 y 7 unidades.

Solución:

Sean los puntos $P\left(5,0\right);Q\left(0,7\right),$ donde la recta corta a los ejes de coordenadas. Entonces:

$$m_{PQ}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\frac{7-0}{0-5}=-\frac{7}{5}\Rightarrow$$

$$y-y_P=m_{PQ}\left(x-x_P\right)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{7}{5}\right)\left(x-5\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y=-7x+35\Rightarrow 7x+5y=35\Rightarrow \frac{7x+5y}{35}=\frac{35}{35}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\left(\frac{35}{7}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{35}{5}\right)}=1\Rightarrow \frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$$

5.- Hallar la ecuación general de la recta que determina segmentos de -3 y 4 unidades, respectivamente, sobre los ejes coordenados.

Solución: La recta buscada corta a los ejes coordenados en los siguientes puntos:

$$A\left(-3,0\right);B\left(0,4\right)\Rightarrow m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-0}{0,+3}=\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$$y-y_A=m_{AB}\left(x-x_A\right)\Rightarrow y-0=\frac{4}{3}\left(x+3\right)\Rightarrow 3y-4x-12=0\Rightarrow 4x-3y+12=0$$

6.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $M\left(3,-2\right)$ sabiendo que el segmento que determina sobre el eje de abscisas es el doble del que determina sobre el eje de ordenadas.

Solución:

Llamemos $\boldsymbol{w}$ el segmento que determina sobre el eje de ordenadas; entonces, será $2w$ el segmento que determina sobre el eje de ordenadas; luego, la recta corta los ejes coordenados en los puntos:

$$P(2w,0);Q(0,w) \Rightarrow m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{w-0}{0-2w} = \frac{w}{-2w} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$y - y_M = m_{PQ}(x - x_M) \Rightarrow y + 2 = \left(-\frac{1}{2}\right)(x-3) \Rightarrow 2y + 4 = -x + 3 \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$$

7.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $P(-5,8)$ sabiendo que la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 9.

Solución:

Llamemos $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas y se cumple que $x_M + y_N = 9$; entonces, la pendiente debe necesariamente ser:

$m_{MN} = \dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = -\dfrac{y_N}{x_M}$; y como también, la recta pasa por $P(-5,8)$ se puede escribir que:

$$m_{MN} = m_{MP} \Rightarrow \frac{y_N}{-x_M} = \frac{8-0}{-5-x_M} \Rightarrow \frac{9-x_M}{-x_M} = \frac{8}{-5-x_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -45 - 9x_M + 5x_M + x_M^2 = -8x_M \Rightarrow x_M^2 + 4x_M - 45 = 0 \Rightarrow (x_M + 9)(x_M - 5) = 0$$

$$\Rightarrow x_{M_1} = -9; x_{M_2} = 5 \Rightarrow y_{N_1} = 18; y_{N_2} = 4$$

O sea, existen dos soluciones:

a.- $M(5,0);N(0,4) \Rightarrow x_{MN} = \dfrac{y_N - 0}{0 - x_M} = \dfrac{4-0}{0-5} = -\dfrac{4}{5}$

Luego:

$$y - y_M = m(x - x_P) \Rightarrow y - 8 = \left(-\frac{4}{5}\right)(x+5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y - 40 = -4x - 20 \Rightarrow 4x + 5y - 20 = 0 \rightarrow (I)$$

b.-

$$M(-9,0); N(0,18) \Rightarrow m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{18-0}{0+9} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - y_P = m(x - x_P) \Rightarrow y - 8 = 2(x+5) = 2x + 10 \Rightarrow -2x + y - 18 = 0 \Rightarrow 2x - y + 18 = 0 \rightarrow (II)$$

8.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $P(5,4)$ sabiendo que la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es -3.

Solución:

Llamemos $M(x_M, 0); N(0, y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas y se cumple que $x_M + y_N = -3$; entonces, la pendiente debe necesariamente ser:

$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = -\frac{y_N}{x_M}$; y como también, la recta pasa por $P(5,4)$ se puede escribir que:

$$m_{MN} = m_{MP} \Rightarrow \frac{y_N}{-x_M} = \frac{4 - y_M}{5 - x_M} \Rightarrow \frac{-3 - x_M}{-x_M} = \frac{3 + x_M}{x_M} = \frac{4-0}{5 - x_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15 - 3x_M + 5x_M - x_M^2 = 4x_M \Rightarrow x_M^2 + 2x_M - 15 = 0 \Rightarrow (x_M + 5)(x_M - 3) = 0$$

$$x_{M_1} = -5; y_{M_2} = 3 \Rightarrow y_{N_1} = 2; y_{N_2} = -6$$

O sea, existen dos soluciones:

a.-

$$M(-5,0); N(0,2) \Rightarrow m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{2-0}{0+5} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$y - y_P = m(x - x_P) \Rightarrow y - 4 = \frac{2}{5}(x-5) \Rightarrow 5y - 20 = 2x - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 5x - 10 = 0 \Rightarrow 2x - 5y + 10 = 0 \rightarrow (I)$$

b.-

$$M(3,0); N(0,-6) \Rightarrow m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{-6-0}{0-3} = 2 \Rightarrow$$

$$y - y_P = m(x - x_P) \Rightarrow y - 4 = 2(x-5) \Rightarrow -2x + y + 6 = 0 \Rightarrow 2x - y - 6 = 0 \rightarrow (II)$$

9.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $Q\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$ sabiendo que la diferencia de los segmentos que determina sobre los ejes de coordenadas es 8.

Solución:
Llamemos $M\left(x_M,0\right);N\left(0,y_N\right)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas y se cumple que $x_M-y_N=8\Rightarrow y_N=x_M-8$; entonces, la pendiente debe necesariamente ser: $m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=-\frac{y_N}{x_M}$; y como también, la recta pasa por $Q\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$ se puede escribir que:

$$m_{MN}=m_{MQ}\Rightarrow\frac{y_N}{-x_M}=\frac{y_Q-y_M}{x_Q-x_M}\Rightarrow\frac{x_M-8}{-x_M}=\frac{\frac{7}{2}-0}{\frac{3}{2}-x_M}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{8-x_M}{x_M}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{3-2x_M}{2}}=\frac{7}{3-2x_M}\Rightarrow 24-16x_M-3x_M+2x_M^2=7x_M\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_M^2-26x_M+24=0\Rightarrow x_M^2-13x_m+12=0\Rightarrow\left(x_M-12\right)\left(x_M-1\right)=0$$

$$x_{M_1}=12;x_{M_2}=1\Rightarrow y_{N_1}=4;y_{N_2}=-7$$

O sea, existen dos soluciones:

a.-

$$M\left(12,0\right);N\left(0,4\right)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{4-0}{0-12}=\frac{4}{-12}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_Q=m\left(x-x_Q\right)\Rightarrow y-\frac{7}{2}=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y-21=-2x-3\Rightarrow 2x+6y-18=0\Rightarrow x+3y-9=0\rightarrow\left(I\right)$$

b.-

$$M\left(1,0\right);N\left(0,-7\right)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-7-0}{0-1}=7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_Q=m\left(x-x_Q\right)\Rightarrow y-\frac{7}{2}=7\left(x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow 2y-7=14x-21\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14x+2y+21=0\Rightarrow 14x-2y-21=0\rightarrow\left(II\right)$$

10.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $A(5,-6)$ si la diferencia de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es -2.

Solución:
Llamemos $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas y se cumple que $x_M - y_N = -2 \Rightarrow y_N = x_M + 2$; entonces, la pendiente debe necesariamente ser:
$m_{MN} = \dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = -\dfrac{y_N}{x_M}$; y como también, la recta pasa por $A(5,-6)$ se puede escribir que:

$$m_{MN} = m_{MA} \Rightarrow \frac{y_N}{-x_M} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} \Rightarrow \frac{x_M + 2}{-x_M} = \frac{-6-0}{5-x_M} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x_M + 2}{-x_M} = \frac{-6}{5-x_M} = 5x_M - x_M^2 + 10 - 2x_M = 6x_M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_M^2 + 3x_M - 10 = 0 \Rightarrow (x_M + 5)(x_M - 2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{M_1} = -5; x_{M_2} = 2 \Rightarrow y_{N_1} = -3; y_{N_2} = 4$$

O sea, existen dos soluciones:

a.-

$$M(-5,0);N(0,-3) \Rightarrow m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{-3-0}{0+5} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y + 6 = \left(-\frac{3}{5}\right)(x-5) \Rightarrow 5y + 30 = -3x + 15 \Rightarrow$$
$$3x + 5y + 15 = 0$$

b.-
$$M(2,0);N(0,4) \Rightarrow m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{4-0}{0-2} = -2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y + 6 = (-2)(x-5) \Rightarrow y + 6 = -2x + 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + y - 4 = 0$$

11.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(-3,3)$ sabiendo que el producto de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 12.

Solución:

Llamemos $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas y se cumple que $x_M\cdot y_N=12\Rightarrow y_N=\dfrac{12}{x_M}$; entonces, la pendiente debe necesariamente ser:

$m_{MN}=\dfrac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\dfrac{y_N-0}{0-x_M}=\dfrac{\frac{12}{x_M}}{-x_M}=\dfrac{12}{-x_M^2}$; y como también la recta pasa por $P(-3,3)$ se puede escribir que:

$$m_{MN}=m_{MP}\Rightarrow\frac{12}{-x_M^2}=\frac{y_P-y_M}{x_P-x_M}=\frac{3-0}{-3-x_M}\Rightarrow-36-12x_m=-3x_M^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow3x_M^2-12x_M-36=0\Rightarrow x_M^2-4x_M-12=0\Rightarrow(x_M-6)(x_M+2)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{M_1}=6;x_{M_2}=-2\Rightarrow y_{N_1}=2;y_{N_2}=-6$$

O sea, existen dos soluciones:

a.-
$$M(6,0);N(0,2)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{2-0}{0-6}=-\frac{1}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_P=m(x-x_P)\Rightarrow y-3=\left(-\frac{1}{3}\right)(x+3)\Rightarrow$$
$$3y-9=-x-3\Rightarrow x+3y-6=0\rightarrow(I)$$

b.-

$$M(-2,0);N(0,-6)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-6-0}{0+2}=-3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_P=m(x-x_P)\Rightarrow y-3=(-3)(x+3)\Rightarrow y-3=-3x-9\Rightarrow3x+y+6=0\rightarrow(II)$$

12.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $Q\left(3,-\dfrac{3}{2}\right)$ si el producto de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es $-18.$

Solución:

Llamemos $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas y se cumple que $x_M\cdot y_N=-18\Rightarrow y_N=\dfrac{-18}{x_M}$; entonces, la pendiente debe necesariamente ser:

$$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{y_N - 0}{0 - x_M} = \frac{\frac{-18}{x_M}}{-x_M} = \frac{18}{x_M^2}$$; y como también la recta pasa por el punto $Q\left(3, -\frac{3}{2}\right)$ se puede escribir que:

$$m_{MN} = m_{MQ} \Rightarrow \frac{18}{x_M^2} = \frac{y_Q - y_M}{x_Q - x_M} = \frac{-\frac{3}{2} - 0}{3 - x_M} \Rightarrow 54 - 18x_M = -\frac{3}{2}x_M^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 108 - 36x_M = -3x_M^2 \Rightarrow x_M^2 - 12x_M + 36 = 0 \Rightarrow (x_M - 6)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_M = 6 \Rightarrow y_N = -3$$

Existe una sola solución:

$$M(6,0); N(0,-3) \Rightarrow m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{-3 - 0}{0 - 6} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$y - y_Q = m(x - x_Q) \Rightarrow y + \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)(x - 3) \Rightarrow 6y + 6 = 2x - 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow x - 3y - 6 = 0 \rightarrow (I)$$

13.- Una recta que pasa por el punto $A(-2,10)$ forma con los ejes coordenados un triángulo de área 5. Hallar su ecuación general.

Solución:

Llamemos $M(x_M, 0); N(0, y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas y se cumple que $\frac{1}{2}(x_M \cdot y_N) = 5 \Rightarrow y_N = \frac{10}{x_M}$; entonces, la pendiente debe necesariamente ser:

$$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{y_N - 0}{0 - x_M} = \frac{\frac{10}{x_M}}{-x_M} = \frac{10}{-x_M^2} \Rightarrow$$ y como la recta también pasa por el punto $A(-2,10)$ se puede escribir:

$$m_{MN} = m_{MA} \Rightarrow \frac{10}{-x_M^2} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{10 - 0}{-2 - x_M} \Rightarrow -2 - x_M = -x_M^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_M^2 - x_M - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x_M + 1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{M_1} = 2; x_{M_2} = -1 \Rightarrow y_{N_1} = 5; y_{N_2} = -10$$

O sea, existen dos soluciones:

a.-

$$M(2,0);N(0,5) \Rightarrow m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{5-0}{0-2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 10 = \left(-\frac{5}{2}\right)(x+2) \Rightarrow$$
$$2y - 20 = -5x - 10 \Rightarrow 5x + 2y - 10 = 0 \rightarrow (I)$$

b.-

$$M(-1,0);N(0,-10) \Rightarrow m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{-10-0}{0+1} = -10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 10 = (-10)(x+2) = -10x - 20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x + y + 10 = 0 \rightarrow (II)$$

14.- Hallar la ecuación general de la recta que forma con los ejes coordenados un triángulo de área 8 y pasa por el punto $P(-1,-4)$.

Solución:

Llamemos $M(x_M, 0); N(0, y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas y se cumple que $\frac{1}{2}(x_M \cdot y_N) = 8 \Rightarrow y_N = \frac{16}{x_M}$; entonces, la pendiente debe necesariamente ser:

$$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{y_N - 0}{0 - x_M} = \frac{\frac{16}{x_M}}{-x_M} = \frac{16}{-x_M^2} \Rightarrow$$ y como la recta también pasa por el punto $P(-1,-4)$ se puede escribir que:

$$m_{MN} = m_{MP} \Rightarrow \frac{16}{-x_M^2} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{-4-0}{-1-x_M} \Rightarrow -16 + 16x_M = 4x_M^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_M^2 - 4x_M + 4 = 0 \Rightarrow (x_M - 2)^2 \Rightarrow x_M = 2$$

Entonces, existe una sola solución:

$$M(2,0); N(0,8) \Rightarrow m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{8-0}{0-2} = -4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - y_P = m(x - x_P) \Rightarrow y + 4 = (-4)(x+1) = -4x - 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x + y + 8 = 0 \rightarrow (I)$$

15.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $P(2,2)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo isósceles.

Solución:

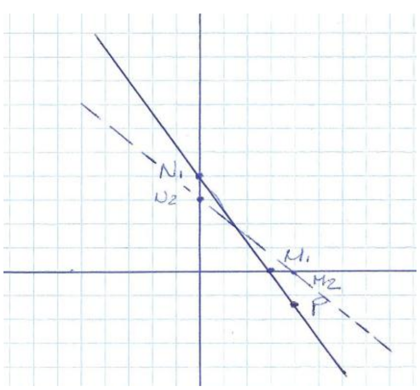
Llamemos $M(x_M, 0); N(0, y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas y se cumple que $y_N = x_M \Rightarrow \frac{y_N}{x_M} = 1$; entonces, la pendiente debe necesariamente ser:

$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{y_N - 0}{0 - x_M} = \frac{x_M}{-x_M} = -1 \Rightarrow$ y como la recta también pasa por el punto $P(2,2)$ se puede escribir que:

$$m_{MN} = m_{MP} = -1 \Rightarrow y - y_P = m(x - x_P) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - 2 = (-1)(x-2) = -x + 2 \Rightarrow x + y - 4 = 0 \rightarrow (I)$$

16.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $P\left(4, -\frac{4}{3}\right)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro 12.

Solución:



Llamemos $M(x_M, 0); N(0, y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas.

A primera vista, un triángulo rectángulo de perímetro 12 unidades está conformado de dos catetos de 3 y 4 unidades de longitud y una hipotenusa de 5 unidades de longitud y es obvio de que puedan existir dos opciones de solución según se asignen valores a los catetos involucrados; sin embargo, sólo será solución aquella que conforme una recta que pase por el punto $P\left(4,-\frac{4}{3}\right)$. Ver gráfica.

Analíticamente, se puede deducir lo siguiente:

El área del triángulo rectángulo conformado por los dos puntos $M\left(x_M,0\right);N\left(0,y_N\right)$ será, en cualquier caso:

$$Area=\frac{\left(x_M\cdot y_N\right)}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}=6\Rightarrow x_M\cdot y_N=12\Rightarrow y_N=\frac{12}{x_M}$$

La pendiente de la recta es:

$$m_{MN}=m_{MP}\Rightarrow\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_P-y_M}{x_P-x_M}\Rightarrow\frac{y_N-0}{0-x_M}=\frac{-\frac{4}{3}-0}{4-x_M}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{12}{-x_M^2}=\frac{-\frac{4}{3}}{4-x_M}\Rightarrow 48-12x_M=\frac{4}{3}x_M^2\Rightarrow 12-3x_M=\frac{1}{3}x_M\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_M^2+9x_M-36=0\Rightarrow\left(x_M+12\right)\left(x_M-3\right)=0$$

Dado que le perímetro es 12 unidades, la única solución razonable es $x_M=3$,entonces:

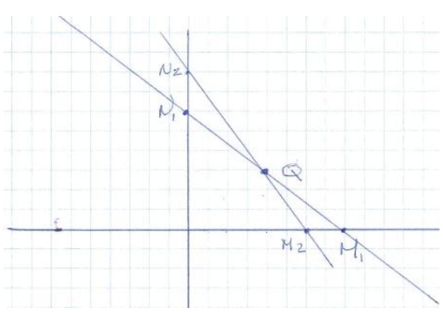
$$M\left(3,0\right);N\left(0,4\right)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{4-0}{0-3}=-\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_P=m\left(x-x_P\right)\Rightarrow y+\frac{4}{3}=\left(-\frac{4}{3}\right)\left(x-4\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y+4=-4x+16\Rightarrow 4x+3y-12=0\rightarrow\left(I\right)$$

17.- Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $Q\left(4,3\right)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro 24.

Solución:



A primera vista, un triángulo rectángulo de perímetro 24 unidades está conformado de dos catetos de 6 y 8 unidades de longitud y una hipotenusa de 10 unidades de longitud y es obvio de que puedan existir dos opciones de solución según se asignen valores a los catetos involucrados; sin embargo, sólo será solución aquella que conforme una recta que pase por el punto $Q(4,3)$. Ver gráfica. En este caso, las dos opciones serán soluciones, sin embargo:

Analíticamente, se puede deducir lo siguiente:

El área del triángulo rectángulo conformado por los dos puntos $M(x_M,0);N(0,y_N)$ será, en cualquier caso:

$$Area=\frac{(x_M\cdot y_N)}{2}=\frac{48}{2}=24\Rightarrow x_M\cdot y_N=48\Rightarrow y_N=\frac{48}{x_M}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{MN}=m_{MQ}\Rightarrow\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_Q-y_M}{x_Q-x_M}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y_N-0}{0-x_M}=-\frac{\frac{48}{x_M}}{x_M}=-\frac{48}{x_M^2}=\frac{3-0}{4-x_M}\Rightarrow 192-48x_M=-3x_M^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_M^2-48x_M+192=0\Rightarrow x_M^2-16x_M+64=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x_M-8)^2=0\Rightarrow x_M=8$$

Entonces, contrario a lo esperado, existe una sola solución:

$$M(8,0);N(0,6)\Rightarrow m_{MN}=m_{MQ}=m=\frac{6-0}{0-8}=-\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_Q=m(x-x_Q)\Rightarrow y-3=\left(-\frac{3}{4}\right)(x-4)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y-12=-3x+12\Rightarrow 3x+4y-24=0\rightarrow(I)$$

18.- Hallar la ecuación general de la recta que tiene una pendiente de $-\frac{1}{3}$ sabiendo que la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 8.

Solución:

Sean $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos de corte de la recta en los ejes de coordenadas. El enunciado nos dice que $x_M+y_N=8\Rightarrow y_N=8-x_M$. luego, se puede escribir que:

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_N-0}{0-x_M}=\frac{y_N}{-x_M}=-\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{y_N}{x_M}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{8-x_M}{x_M}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24-3x_M=x_M\Rightarrow 24=4x_M\Rightarrow x_M=6\Rightarrow y_N=2\Rightarrow M(6,0);N(0,2)$$

La ecuación general es:

$$y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{1}{3}\right)(x-6)\Rightarrow 3y=-x+6\Rightarrow x+3y-6=0\to(I)$$

19.- Hallar la ecuación de la recta paralela al segmento cuyos extremos son $A(4,7);B(6,-3)$ sabiendo que la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 6.

Solución:

Sean $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos de corte de la recta en los ejes de coordenadas. El enunciado nos dice que $x_M+y_N=6\Rightarrow y_N=6-x_M$. luego, se puede escribir que:

$$m_{AB}=m_{MN}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-3-7}{6-4}=-\frac{10}{2}=-5\Rightarrow\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=-5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{y_N-0}{0-x_M}=-5\Rightarrow\frac{y_N}{x_M}=5\Rightarrow\frac{6-x_M}{x_m}=5\Rightarrow 6-x_M=5x_M\Rightarrow 6=6x_M\Rightarrow x_M=1\Rightarrow y_N=5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow M(1,0);N(0,5)\Rightarrow y-y_M=(m)(x-x_M)\Rightarrow y-0=(-5)(x-1)=-5x+5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x+y-5=0\to(I)$$

20.- La suma de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es -1. Hallar su ecuación general sabiendo que es perpendicular al segmento de extremos $A(4,6);B(7,2)$.

Solución:

Sean $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos de corte de la recta en los ejes de coordenadas. El enunciado nos dice que $x_M+y_N=-1\Rightarrow y_N=-1-x_M$. luego, se puede escribir que:

$$m_{AB}=m_1=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-6}{7-4}=-\frac{4}{3}\Rightarrow$$
$$m_{MN}=m_2\Rightarrow AB\perp MN\Rightarrow m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{\left(-\frac{4}{3}\right)}=\frac{3}{4}$$

Luego:

$$m_{MN}=m_2=\frac{3}{4}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_N-0}{0-x_M}=\frac{-(1+x_M)}{-x_M}=\frac{1+x_M}{x_M}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x_M=4+4x_M\Rightarrow x_M=-4\Rightarrow y_N=3\Rightarrow M(-4,0);N(0,3)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_M=m_2(x-x_M)\Rightarrow y-0=\frac{3}{4}(x+4)\Rightarrow 4y=3x+12\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3x+4y-12=0\Rightarrow 3x-4y+12=0\rightarrow(I)$$

21.- La diferencia de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es 9. Hallar la ecuación general de la recta sabiendo que su pendiente es $\frac{2}{7}$.

Solución:

Sean $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos de corte de la recta en los ejes de coordenadas. El enunciado nos dice que $x_M-y_N=9\Rightarrow y_N=x_M-9.$ luego, se puede escribir que:

$$m_{MN}=\frac{2}{7}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_N-0}{0-x_M}=\frac{y_N}{-x_M}=\frac{x_M-9}{-x_M}=\frac{9-x_M}{x_M}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x_M=63-7x_M\Rightarrow 9x_M=63\Rightarrow x_M=7\Rightarrow y_N=-2\Rightarrow M(7,0);N(0,-2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=\frac{2}{7}(x-7)\Rightarrow 7y=2x-14\Rightarrow 2x-7y-14=0\rightarrow(I)$$

22.- La diferencia de los segmentos que una recta de pendiente -3 determina sobre los ejes coordenados es 4. Hallar su ecuación general.

Solución:

Sean $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos de corte de la recta en los ejes de coordenadas. El enunciado nos dice que $x_M-y_N=4\Rightarrow y_N=x_M-4.$ luego, se puede escribir que:

$$m_{MN}=-3=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_N-0}{0-x_M}=\frac{y_N}{-x_M}=\frac{x_M-4}{-x_M}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x_M=x_M-4\Rightarrow 2x_M=-4\Rightarrow x_M=-2\Rightarrow y_N=-2-4=-6\Rightarrow M(-2,0);N(0,-6)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=(-3)(x+2)=-3x-6\Rightarrow 3x+y+6=0\rightarrow(I)$$

23.- Una recta forma con los ejes un triángulo de área 4. Hallar su ecuación general sabiendo que es paralela al segmento cuyos extremos son $A(6,6);B(4,7)$.

Solución:

Sean $M\left(x_M,0\right);N\left(0,y_N\right)$ los puntos de corte de la recta en los ejes de coordenadas. El enunciado nos dice que $\left(\frac{x_M\cdot y_N}{2}\right)=4\Rightarrow y_N=\frac{8}{x_M}$; además, como la recta es paralela a ***AB***, se puede escribir que:

$$Area=\frac{\left(x_M\cdot y_N\right)}{2}=4\Rightarrow y_N=\frac{8}{x_M}\Rightarrow$$

$$MN\parallel AB\Rightarrow m_{MN}=m_{AB}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_N-0}{0-x_M}=-\frac{\frac{8}{x_M}}{x_M}=-\frac{8}{x_M^2}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{7-6}{4-6}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{8}{x_M^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow x_M^2=16\Rightarrow x_M=\pm4$$

Luego:

$$x_{M_1}=4;x_{M_2}=-4\Rightarrow y_{N_1}=2;y_{N_2}=-2$$

Entonces, se tienen dos soluciones:

a.-

$$M\left(4,0\right);N\left(0,2\right)\Rightarrow m_{MN}=m_{AB}=m=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_M=m\left(x-x_M\right)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x-4\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=-x+4\Rightarrow x+2y-4=0\rightarrow\left(I\right)$$

b.-

$$M\left(-4,0\right);N\left(0,-2\right)\Rightarrow m_{MN}=m_{AB}=m=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_M=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+4\right)\Rightarrow 2y=-x-4\Rightarrow x+2y+4=0\rightarrow\left(II\right)$$

24.- Hallar la ecuación general de una recta que es perpendicular al segmento de extremos $A(-1,-4);B(5,-2)$ y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área 6.

Solución:

Sean $M\left(x_M,0\right);N\left(0,y_N\right)$ los puntos de corte de la recta en los ejes de coordenadas.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2+4}{5+1}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

Luego:

$$MN\perp AB\Rightarrow m_{MN}=-\frac{1}{m_{AB}}=-\frac{1}{\frac{1}{3}}=-3=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_N-0}{0-x_M}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3=\frac{y_N}{x_M}\Rightarrow y_N=3x_M\Rightarrow Area=\frac{y_N\cdot x_M}{2}=6\Rightarrow\frac{(3x_M)(x_M)}{2}=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_M^2=4\Rightarrow x_M=\pm 2\Rightarrow y_N=\pm 6$$

Luego, tendremos dos soluciones:

a.-

$$M(2,0);N(0,6)\Rightarrow m_{MN}=m=-3\Rightarrow y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-0=(-3)(x-2)\Rightarrow 3x+y-6=0\rightarrow(I)$$

b.-

$$M(-2,0);N(0,-6)\Rightarrow m_{MN}=m=-3;y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-0=(-3)(x+2)\Rightarrow 3x+y+6=0\rightarrow(II)$$

25.- Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $-\frac{4}{3}$ que forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro 12.

Solución:

Llamemos $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas.

A primera vista, un triángulo rectángulo de perímetro 12 unidades está conformado de dos catetos de 3 y 4 unidades de longitud y una hipotenusa de 5 unidades de longitud y su pendiente es igual a:

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_N-0}{0-x_M}=-\frac{y_N}{x_M}=-\frac{4}{3}\Rightarrow y_N=\frac{4x_M}{3}\Rightarrow y_N+x_M+\sqrt{y_N^2+x_M^2}=12\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{4}{3}x_M+x_M+\sqrt{\left(\frac{4}{3}x_M\right)^2+x_M^2}=\frac{7}{3}x_M+x_M\sqrt{\frac{16+9}{9}}\Rightarrow 4x_M=12\Rightarrow x_M=3$$

Aparentemente existe una sola solución:

$$M(3,0);N(0,4)\Rightarrow y-y_M=m(x-3)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{4}{3}\right)(x-3)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3y=-4x+12\Rightarrow 4x+3y-12=0\to(I)$$

26.- Una recta es perpendicular al segmento de extremos $A(-1,-4);B(4,8)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de diámetro 30. Hallar su ecuación general.

Solución:

Llamemos $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas.

Luego:

$$m_{AB}=m_1=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{8+4}{4+1}=\frac{12}{5}\Rightarrow$$
$$AB\perp MN\Rightarrow m_{MN}=m_2=-\frac{5}{12}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_N-0}{0-x_M}=-\frac{y_N}{x_M}\Rightarrow y_N=\frac{5}{12}x_M$$

También:

$$x_M+y_N+\sqrt{x_M^2+y_N^2}=30\Rightarrow x_M+\frac{5}{12}x_M+\sqrt{x_M^2+\left(\frac{5}{12}x_M\right)^2}=30\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{17}{12}x_M+x_M\sqrt{\frac{169}{144}}=30\Rightarrow\left(\frac{17}{12}+\frac{13}{12}\right)x_M=30\Rightarrow x_M=12\Rightarrow y_N=5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{5}{12}\right)(x-12)\Rightarrow 5x+12y-60=0\to(I)$$

27.- Hallar la ecuación general de la recta que forma con los ejes de coordenadas un triángulo cuya área es $\frac{15}{2}$ y la suma de sus catetos es 8.

Solución:

Llamemos $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas.

$$Area=\left(\frac{x_M\cdot y_N}{2}\right)=\frac{15}{2}\Rightarrow x_M\cdot y_N=15\Rightarrow y_N=\frac{15}{x_M}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_M+y_N=8\Rightarrow x_M+\frac{15}{x_M}=8\Rightarrow x_M^2-8x_M+15=0\Rightarrow(x_M-5)(x_M-3)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{M_1}=5;x_{M_2}=3\Rightarrow y_{N_1}=3;y_{N_2}=5$$

Parecen existir dos soluciones:

a.-

$$M(5,0);N(0,3)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{3-0}{0-5}=-\frac{3}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{3}{5}\right)(x-5)\Rightarrow 3x+5y-15=0\rightarrow(I)$$

b.-

$$M(3,0);N(0,5)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{5-0}{0-3}=-\frac{5}{3}\Rightarrow$$

$$y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{5}{3}\right)(x-3)\Rightarrow 5x+3y-15=0$$

28.- Una recta forma con los ejes coordenados un triángulo de área 14. La diferencia entre los catetos del triángulo es 3. Hallar la ecuación general.

Solución:

Llamemos $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas.

$$Area=\left(\frac{x_M\cdot y_N}{2}\right)=14\Rightarrow x_M\cdot y_N=28\Rightarrow y_N=\frac{28}{x_M}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_M-y_N=3\Rightarrow x_M-\frac{28}{x_M}=3\Rightarrow x_M^2-3x_M-28=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x_M-7)(x_M+4)=0\Rightarrow x_{M_1}=7;x_{M_2}=-4\Rightarrow y_{N_1}=4;y_{N_2}=-7$$

a.-

$$M(7,0);N(0,4)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{4-0}{0-7}=-\frac{4}{7}\Rightarrow$$

$$y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{4}{7}\right)(x-7)\Rightarrow 4x+7y-28=0\rightarrow(I)$$

b.-

$$M(4,0);N(0,7)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{7-0}{0-4}=-\frac{7}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{7}{4}\right)(x-4)\Rightarrow 7x+4y-28=0\rightarrow(II)$$

c.-

$$M(-4,0);N(0,-7)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-7-0}{0+4}=-\frac{7}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_N=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{7}{4}\right)(x+4)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7x+4y+28=0\rightarrow(III)$$

d.-

$$M(-7,0);N(0,-4)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-4-0}{0+7}=-\frac{4}{7}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{4}{7}\right)(x+7)\Rightarrow 4x+7y+28=0\rightarrow(IV)$$

29.- Una recta forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro 40 en el que la suma de los catetos es 23. Hallar la ecuación general de la recta.

Solución:

Llamemos $M(x_M,0);N(0,y_N)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas.

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{y_N-0}{0-x_M}=-\frac{y_N}{x_M}=\frac{-8}{15}\Rightarrow y_N=-\frac{8}{15}x_M$$
$$x_M+y_N=23\Rightarrow x_M+y_N+\sqrt{x_M^2+y_M^2}=40\Rightarrow\sqrt{x_M^2+y_M^2}=17$$

Sabiendo que la hipotenusa es igual a 17 y que la suma de los catetos es 23:

$$x_M^2+y_N^2=(17)^2=289\Rightarrow x_M^2+(23-x_M)^2=289\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_M^2+\left(529-46x_M+x_M^2\right)=289\Rightarrow x_M^2-23x_M+120=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{23\pm\sqrt{(23)^2-4\cdot(120)}}{2}=\frac{23\pm\sqrt{49}}{2}\Rightarrow x_{M_1}=15,x_{M_2}=8\Rightarrow y_{N_1}=8;y_{N_2}=15$$

Tenemos, entonces, dos soluciones:

a.-

$$M(15,0);N(0,8)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{8-0}{0-15}=-\frac{8}{15}\Rightarrow$$
$$y-y_M=m(x-x_M)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{8}{15}\right)(x-15)\Rightarrow 8x+15y-120=0\rightarrow(I)$$

b.-

$$M\left(8,0\right);N\left(0,15\right)\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{15-0}{0-8}=-\frac{15}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-y_M=m\left(x-x_M\right)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{15}{8}\right)\left(x-8\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y=-15x+120\Rightarrow 15x+8y-120=0\rightarrow\left(II\right)$$

30.- El cuadrado de la diferencia de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es 36. Hallar su ecuación general sabiendo que es perpendicular a otra recta de pendiente -5.

Solución:

Llamemos $M\left(x_M,0\right);N\left(0,y_N\right)$ los puntos donde la recta corta los ejes de coordenadas.

$$m_1=-5\Rightarrow m_{MN}=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{(-5)}=\frac{1}{5}\Rightarrow m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=-\frac{y_N}{x_M}=\frac{1}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_N=-\frac{x_M}{5}\Rightarrow\left(x_M-y_N\right)^2=36\Rightarrow x_M-y_N=\pm6\Rightarrow x_{M_1}+\frac{x_{M_1}}{5}=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{6}{5}x_{M_1}=6\Rightarrow x_{M_1}=5\Rightarrow y_{N_1}=-1;$$

$$x_{M_2}+\frac{x_{M_2}}{5}=-6\Rightarrow x_{M_2}=-5\Rightarrow y_{N_2}=1$$

Tenemos dos soluciones:

a.-

$$M\left(5,0\right);N\left(0,-1\right)\Rightarrow y-y_M=m\left(x-x_M\right)\Rightarrow$$

$$y-0=\left(\frac{1}{5}\right)\left(x-5\right)\Rightarrow 5y=x-5\Rightarrow x-5y-5=0\rightarrow\left(I\right)$$

b.-

$$M\left(-5,0\right);N\left(0,1\right)\Rightarrow y-y_M=m\left(x-x_M\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-0=\left(\frac{1}{5}\right)\left(x+5\right)\Rightarrow x-5y+5=0\rightarrow\left(II\right)$$

31.- Hallar la ecuación general de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan sobre la recta $l_0=2x+3y-12=0$.

Solución:

$$l_0 = 2x + 3y - 2 = 0 \Rightarrow x_N = 0 \Rightarrow 3y_N = 12 \Rightarrow y_N = 4 \Rightarrow N(0,4)$$
$$l_0 = 2x + 3y - 12 = 0 \Rightarrow y_M = 0 \Rightarrow 2x_M = 12 \Rightarrow x_M = 6 \Rightarrow M(6,0)$$

Luego;

El punto medio de $\boldsymbol{MN}$ es:

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{6+0}{2} = 3; y_P = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{4+0}{2} = 2 \Rightarrow P(3,2)$$

La pendiente de $\boldsymbol{MN}$ es:

$$m_{MN} = m_1 = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{4-0}{0-6} = -\frac{2}{3}$$

La pendiente de la mediatriz de $\boldsymbol{MN}$ será:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

La ecuación general de la mediatriz de $\boldsymbol{MN}$ será:

$$y - y_P = m_2(x - x_P) \Rightarrow y - 2 = \left(\frac{3}{2}\right)(x-3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y - 4 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 2y - 5 = 0 \to (I)$$

32.- Hallar la ecuación general de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan sobre la recta $l_0 = 3x - 7y + 21 = 0$.

Solución:
$$l_0 = 3x - 7y + 21 = 0. \Rightarrow x_N = 0 \Rightarrow -7y_N + 21 = 0 \Rightarrow y_N = 3 \Rightarrow N(0,3)$$
$$l_0 = 3x - 7y + 21 = 0 \Rightarrow y_M = 0 \Rightarrow 3x_M + 21 = 0 \Rightarrow x_M = -7 \Rightarrow M(-7,0)$$

Luego:

El punto medio de $\boldsymbol{MN}$ es:

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{-7+0}{2} = -\frac{7}{2}; y_P = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}$$

La pendiente de $\boldsymbol{MN}$ es:

$$m_{MN} = m_1 = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{3-0}{0+7} = \frac{3}{7}$$

La pendiente de la mediatriz de $\boldsymbol{MN}$ es:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)} = -\frac{7}{3}$$

La ecuación general de la mediatriz de $\boldsymbol{MN}$ es:

$$y - y_P = m_2\left(x - x_P\right) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = \left(-\frac{7}{3}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right) \Rightarrow 6y - 9 = -14x - 49 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14x + 6y + 40 = 0 \Rightarrow 7x + 3y + 20 = 0 \rightarrow \left(I\right)$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41G.

Tema: Ecuación general de la línea recta. (Hoffmann, 5to año-Ejercicio # 99).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la línea recta y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ siendo $\boldsymbol{a}$ el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ***ecuación de la pendiente*** de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Conociendo un solo punto y la ***pendiente***, se puede escribir:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x \cos\theta + y sen\theta - \rho = 0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta = 90^{\circ} \Rightarrow tg\theta = \infty \Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(m_1\right)\left(m_2\right) = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida*** ***d*** entre un punto $P_0\left(x_0, y_0\right)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l \equiv Ax + By + C = 0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{(P_0, l)} = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2 + B^2}$ se determina de acuerdo a como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = -Sg_C$

(b).- Si $C = 0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_B$

©.- Si $C = 0; B = 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}} = Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax + By + C_1; l_2 \equiv Ax + By + C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{l_1, l_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Las coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada son:

$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \right)$ donde $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ y siendo orientados los segmentos considerados.

PREGUNTAS:

EJERCICIO #29:

Hallar la ecuación general de la recta:

1.- De pendiente 3 y pasa por el punto $A(-3,5)$

Solución:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = 3(x+3) = 3x + 9 \Rightarrow y - 3x - 14 = 0 \Rightarrow 3x - y + 14 = 0$$

2,, De pendiente -4 y pasa por el punto $B(8,-3)$

Solución:

$$y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y + 3 = (-4)(x-8) \Rightarrow 4x + y + 3 - 32 = 0 \Rightarrow$$
$$4x + y - 29 = 0$$

3.- Que pasa por $M\left(4, \sqrt{3}\right)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60º.

Solución:

$m = tg 60º = \sqrt{3}$

Luego:

$$y-y_M=m\left(x-x_M\right)\Rightarrow y-\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(x-4\right)\Rightarrow y-\sqrt{3}=\sqrt{3}x-4\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$y-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}=0\Rightarrow\sqrt{3}x-y-3\sqrt{3}=0$$

4.- De pendiente -7 y que pasa por el origen.

Solución:

$$y-y_O=m\left(x-x_O\right)\Rightarrow y-0=\left(-7\right)\left(x-0\right)\Rightarrow 7x+y=0$$

5.- De pendiente $-\frac{3}{5}$ y que pasa por el punto $P\left(-2,0\right)$.

Solución:

$$y-y_P=m\left(x-x_P\right)\Rightarrow y-0=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(x+2\right)\Rightarrow 5y=-3x-6\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x+5y+6=0$$

6.- Paralela al segmento de extremos $A\left(4,5\right);B\left(-7,3\right)$ y que pasa por el punto $M\left(-9,-6\right)$.

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-5}{-7-4}=\frac{-2}{-11}=\frac{2}{11}$$

Luego:

$$y-y_M=m_{AB}\left(x-x_M\right)\Rightarrow y+6=\left(\frac{2}{11}\right)\left(x+9\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11y+66=2x+18\Rightarrow 11y-2x+48=0\Rightarrow 2x-11y-48=0$$

7.- De pendiente $\frac{7}{3}$ y pasa por el punto $R\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{5}\right)$.

Solución:

$$y-y_R=m\left(x-x_R\right)\Rightarrow y+\frac{3}{5}=\left(\frac{7}{3}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)=\frac{7x}{3}-\frac{35}{6}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 30y+18=70x-175\Rightarrow 30y-70x+193=0\Rightarrow 70x-30y-193=0$$

8.- Que pasa por $S\left(\frac{3}{4},\frac{2}{3}\right)$ y tiene pendiente $\frac{5}{2}$.

Solución:

$$y-y_S=m\left(x-x_S\right)\Rightarrow y-\frac{2}{3}=\left(\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)\Rightarrow$$
$$y-\frac{2}{3}=\frac{5}{2}x-\frac{15}{8}\Rightarrow 24y-16=60x-45\Rightarrow 60x-24y-29=0$$

9.- Que pasa por $T\left(\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ y forma con el eje $\boldsymbol{x}$ un ángulo de 120°.

Solución:

$$m=tg120°=-\sqrt{3}$$

Luego:

$$y-y_T=m\left(x-x_T\right)=y+\frac{\sqrt{2}}{4}=\left(-\sqrt{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y+\frac{\sqrt{2}}{4}=-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{18}}{2}=-\sqrt{3}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}x+y+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=0\Rightarrow 4\sqrt{3}x+4y+\sqrt{2}-6\sqrt{2}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\sqrt{3}x+4y-5\sqrt{2}=0$$

10.- De pendiente $-\frac{3}{2}$ y que pasa por el punto medio del segmento cuyos de extremos $M\left(4,-5\right):N\left(8,10\right)$.

Solución:

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{MN}$:

$$x_P=\frac{x_M+x_N}{2}=\frac{4+8}{2}=6:y_P=\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{-5+10}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow P\left(6,\frac{5}{2}\right)$$

Luego:

$$y-y_P=m\left(x-x_P\right)\Rightarrow y-\frac{5}{2}=\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x-6\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y-5=-3x+18\Rightarrow 3x+2y-23=0$$

11.- Que pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son $A\left(\frac{5}{2},\frac{2}{3}\right);B\left(-\frac{17}{3},\frac{15}{4}\right)$ sabiendo que su pendiente es $\frac{5}{2}$.

Solución:

Sea $\boldsymbol{C}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{17}{3}}{2}=\frac{\frac{15-34}{6}}{2}=\frac{-19}{12};y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{15}{4}}{2}=\frac{\frac{8+45}{12}}{2}=\frac{53}{24}\Rightarrow C\left(-\frac{19}{12},\frac{53}{24}\right)$$

Luego:

$$y-y_c=m\left(x-x_C\right)\Rightarrow y-\frac{53}{24}=\left(\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{19}{12}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24y-53=60x+95\Rightarrow -60x+24y-148=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 15x-6y+37=0$$

12.- De pendiente $\frac{1}{4}$ que pase por el primer punto de trisección del segmento de extremos $P\left(-4,9\right);Q\left(17,-6\right)$.

Solución:

La razón correspondiente al primer punto de trisección R del segmento $\boldsymbol{PQ}$ es:

$$\lambda_R=\frac{1}{2}$$

Luego:

$$x_R=\frac{x_P+\lambda_R x_Q}{1+\lambda_R}=\frac{-4+\left(\frac{1}{2}\right)\left(17\right)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{-8+17}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{9}{3}=3;$$

$$y_R = \frac{y_P + \lambda_R \cdot y_Q}{1+\lambda_R} = \frac{9+\left(\frac{1}{2}\right)(-6)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{18-6}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow R(3,4)$$

Entonces:

$$y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - 4 = \left(\frac{1}{4}\right)(x-3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y - 16 = x - 3 \Rightarrow -x + 4y - 13 = 0 \Rightarrow x - 4y + 13 = 0$$

13.- Que pasa por el segundo de los puntos que dividen en siete partes iguales al segmento de extremos $M(-10,18); N(4,-3)$ sabiendo que el ángulo que forma con el eje de abscisas es 45º.

Solución:

La pendiente de la recta buscada es $m = tg\,45º = 1$

La razón correspondiente al segundo punto $\boldsymbol{P}$ de división del segmento $\boldsymbol{MN}$ en siete partes iguales es:

$$\lambda_P = \frac{2}{5}$$

Luego:

$$x_P = \frac{x_M + \lambda_P \cdot x_N}{1+\lambda_P} = \frac{-10+\left(\frac{2}{5}\right)(4)}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{-50+8}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{-42}{7} = -6$$

$$y_P = \frac{y_M + \lambda_P \cdot y_N}{1+\lambda_P} = \frac{18+\left(\frac{2}{5}\right)(-3)}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{90-6}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{84}{7} = 12 \Rightarrow P(-6,12)$$

$$y - y_P = m(x - x_P) \Rightarrow y - 12 = (1)(x+6) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -x + y - 18 = 0 \Rightarrow x - y + 18 = 0$$

14.- Que forme con el eje de abscisas un ángulo de 135º y que pase por el baricentro del triángulo cuyos vértices son $A(4,7); B(1,-8); C(-9,3)$.

Solución:

La pendiente de la recta buscada es:

$$m = tg135º = tg(-45º) = -1$$

Llamando $\boldsymbol{G}$ al baricentro del ΔABC:

Entonces:

$$y - y_G = m(x - x_G) \Rightarrow y - \frac{2}{3} = (-1)\left(x + \frac{4}{3}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3y - 2 = -3x - 4 \Rightarrow 3x + 3y + 2 = 0$$

15.- Que es perpendicular al segmento de extremos $M(5,4); N(-4,11)$ y pasa por el punto $P(-1,2)$.

Solución:

La pendiente de $\boldsymbol{MN}$ es:

$$m_{MN} = m_1 = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{11-4}{-4-5} = -\frac{7}{9}$$

La pendiente, m_2, de la perpendicular a $\boldsymbol{MN}$ es

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{7}{9}} = \frac{9}{7}$$

Entonces:

$$y - y_P = m_2(x - x_P) \Rightarrow y - 2 = \left(\frac{9}{7}\right)(x+1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7y - 14 = 9x + 9 \Rightarrow -9x + 7y - 23 = 0 \Rightarrow 9x - 7y + 23 = 0$$

16.- Hallar la ecuación general de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

Solución:

a.- Segundo cuadrante:

La pendiente de la bisectriz del segundo cuadrante es:

$m = tg135º = -1$

La bisectriz del segundo cuadrante pasa por el punto $O(0,0)$

Entonces:

$$y - y_O = m(x - x_O) \Rightarrow y - 0 = (-1)(x - 0) \Rightarrow x + y = 0$$

b. Cuarto cuadrante:

La pendiente de la bisectriz del cuarto cuadrante es:

$m = tg45º = -1$

La bisectriz del cuarto cuadrante pasa por el punto $O(0,0)$

Entonces:

$$y - y_O = m(x - x_O) \Rightarrow y - 0 = (-1)(x - 0) \Rightarrow x + y = 0$$

17.- Hallar la ecuación general de la mediatriz del segmento de extremos $A(7,-3); B(-1,2)$.

Solución:

La mediatriz de $\boldsymbol{AB}$ es la recta perpendicular a $\boldsymbol{AB}$ que pasa por el punto medio de $\boldsymbol{AB}$**.**

Sea $\boldsymbol{C}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5-1}{2} = 2; y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+2}{2} = 4 \Rightarrow C(2,4)$$

La pendiente del segmento $\boldsymbol{AB}$ es:

$$m_{AB} = m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{-1-5} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

La pendiente de la mediatriz de $\boldsymbol{AB}$ es:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Luego, la ecuación general de la mediatriz de $\boldsymbol{AB}$ es:

$$y - y_C = m_2\left(x - x_C\right) \Rightarrow y - 4 = \left(\frac{3}{2}\right)\left(x-2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y - 8 = 3x - 6 \Rightarrow -3x + 2y - 2 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 2 = 0$$

18.- Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $M\left(7,-3\right); N\left(9,4\right)$.

Solución:

La mediatriz de $\boldsymbol{MN}$ es la recta perpendicular a $\boldsymbol{MN}$ que pasa por el punto medio de $\boldsymbol{MN}$**.**

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{MN}$:

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{7+9}{2} = 8; y_P = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(8, \frac{1}{2}\right)$$

La pendiente del segmento $\boldsymbol{MN}$ es:

$$m_{MN} = m_1 = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{4+3}{9-7} = \frac{7}{2}$$

La pendiente de la mediatriz de $\boldsymbol{MN}$ es:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{7}{2}} = -\frac{2}{7}$$

Luego, la ecuación general de la mediatriz de $\boldsymbol{MN}$ es:

$$y - y_P = m_2\left(x - x_P\right) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \left(-\frac{2}{7}\right)\left(x-8\right) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{2}{7}x + \frac{16}{7}$$

$$\Rightarrow 14y - 7 = -4x + 32 \Rightarrow 4x + 14y - 39 = 0$$

En los siguientes ejercicios se dan los vértices de un triángulo. Hallar en cada caso las ecuaciones generales de las tres mediatrices, de las tres alturas y de las tres medianas y las alturas de las medianas:

19.- $A(-1,4); B(7,1); C(2,-3)$

Solución:
Los puntos medios de los lados del triángulo dado son:

Sea ***D*** el punto medio de ***AB***:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+7}{2} = 3; y_D = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow D\left(3, \frac{5}{2}\right)$$

Sea ***E*** el punto medio de ***BC***:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7+2}{2} = \frac{9}{2}; y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1-3}{2} = -1 \Rightarrow E\left(\frac{9}{2}, -1\right)$$

Sea ***F*** el punto medio de ***CA***:

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+2}{2} = 1; y_F = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow F\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Las pendientes de los lados del triángulo dado son:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{7+1} = -\frac{3}{8} \Rightarrow m_{\perp AB} = \frac{8}{3}$$
$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-3-1}{2-7} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5} \Rightarrow m_{\perp BC} = -\frac{5}{4}$$
$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{4+3}{-1-2} = -\frac{7}{3} \Rightarrow m_{\perp CA} = \frac{3}{7}$$

Ecuaciones de las mediatrices:

a.- Mediatriz de *AB*:

$$y - y_D = m_{\perp AB}(x - x_D) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = \left(\frac{8}{3}\right)(x-3) = \frac{8}{3}x - 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6y - 15 = 16x - 48 \Rightarrow 16x - 6y - 33 = 0$$

b.- Mediatriz de ***BC***:

$$y-y_E=m_{\perp BC}(x-x_E)\Rightarrow y+1=\left(-\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{9}{2}\right)=-\frac{5}{4}x+\frac{45}{8}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8y+8=-10x+45\Rightarrow 10x+8y-37=0$$

c.- Mediatriz de $\boldsymbol{CA}$:

$$y-y_F=m_{\perp CA}(x-x_F)\Rightarrow y-\frac{1}{2}=\left(\frac{3}{7}\right)(x-1)=\frac{3}{7}x-\frac{3}{7}\Rightarrow$$
$$14y-7=6x-6\Rightarrow 6x-14y+1=0$$

Ecuaciones de las alturas:

Las alturas son líneas rectas que pasan por el vértice y son perpendiculares al lado opuesto:

a.- Altura correspondiente al vértice $\boldsymbol{A}$:

$$y-y_A=(m_{\perp BC})(x-x_A)\Rightarrow y-4=\left(-\frac{5}{4}\right)(x+1)=-\frac{5}{4}x-\frac{5}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y-16=-5x-5\Rightarrow 5x+4y-11=0$$

b.- Altura correspondiente al vértice $\boldsymbol{B}$:

$$y-y_B=m_{\perp CA}(x-x_B)\Rightarrow y-1=\left(\frac{3}{7}\right)(x-7)=\frac{3}{7}x-3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7y-7=3x-21\Rightarrow 3x-7y-14=0$$

c.- Altura correspondiente al vértice C:

$$y-y_C=m_{\perp AB}(x-x_C)\Rightarrow y+3=\left(\frac{8}{3}\right)(x-2)=\frac{8}{3}x-\frac{16}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3y+9=8x-16\Rightarrow 8x-3y-25=0$$

Ecuaciones de las medianas:

Las medianas pasan por el vértice y por el punto medio del lado opuesto:

a.- Mediana correspondiente al vértice A:

Esta mediana es el segmento $\boldsymbol{AE}$:

$$m_{AE}=\frac{y_E-y_A}{x_E-x_A}=\frac{-1-4}{\frac{9}{2}+1}=\frac{-5}{\frac{11}{2}}=-\frac{10}{11}$$

Luego:

$$y-y_A=m_{AE}\left(x-x_A\right)\Rightarrow y-4=\left(-\frac{10}{11}\right)\left(x+1\right)=-\frac{10}{11}x-\frac{10}{11}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11y-44=-10x-10\Rightarrow 10x+11y-34=0$$

b.- Mediana correspondiente al vértice ***B***:

Esta mediana es el segmento ***BF***:

$$m_{BF}=\frac{y_F-y_B}{x_F-x_B}=\frac{\frac{1}{2}-1}{1-7}=\frac{-\frac{1}{2}}{-6}=\frac{1}{12}$$

Luego:

$$y-y_B=m_{BF}\left(x-x_B\right)\Rightarrow y-1=\left(\frac{1}{12}\right)\left(x-7\right)\Rightarrow$$
$$12y-12=x-7\Rightarrow x-12y+5=0$$

c.- Mediana correspondiente al vértice ***C***:

Esta mediana es el segmento ***CD***:

$$m_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{\frac{5}{2}+3}{3-2}=\frac{11}{2}$$

Luego:

$$y-y_C=m_{CD}\left(x-x_C\right)\Rightarrow y+3=\left(\frac{11}{2}\right)\left(x-2\right)\Rightarrow$$
$$2y+6=11x-22\Rightarrow 11x-2y-28=0$$

Longitudes de las medianas:

a.- Se calcula la longitud del segmento $A\left(-1,4\right);E\left(\frac{9}{2},-1\right)$:

$$d_{AE}=\sqrt{\left(x_E-x_A\right)^2+\left(y_E-y_A\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}+1\right)^2+\left(-1-4\right)^2}=$$

$$d_{AE}=\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+\left(-5\right)^2}=\sqrt{\frac{121}{4}+25}=\sqrt{\frac{121+100}{4}}=\frac{\sqrt{221}}{2}$$

b.- Se calcula la longitud del segmento $B(7,1);F\left(1,\frac{1}{2}\right)$:

$$d_{BF}=\sqrt{\left(x_F-x_B\right)^2+\left(y_F-y_B\right)^2}=\sqrt{(1-7)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=$$

$$d_{BF}=\sqrt{(-6)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{36+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{144+1}{4}}=\frac{\sqrt{145}}{2}$$

c.- Se calcula la longitud del segmento $C(2,-3);D\left(3,\frac{5}{2}\right)$:

$$d_{CD}=\sqrt{\left(x_D-x_C\right)^2+\left(y_D-y_C\right)^2}=\sqrt{(3-2)^2+\left(\frac{5}{2}+3\right)^2}=$$

$$d_{CD}=\sqrt{(1)^2+\left(\frac{11}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4+121}{4}}=\sqrt{\frac{125}{4}}=\frac{\sqrt{125}}{2}$$

20.- $A(1,6);B(3,-1);C(-2,-6)$

Solución:

Los puntos medios de los lados del triángulo dado son:

Sea $\boldsymbol{D}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_D=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2;\,y_D=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{6-1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow D\left(2,\frac{5}{2}\right)$$

Sea $\boldsymbol{E}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2};\,y_E=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{-1-6}{2}=-\frac{7}{2}\Rightarrow E\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$$

Sea $\boldsymbol{F}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$:

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2};\, y_F = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{6-6}{2} = 0 \Rightarrow F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Las pendientes de los lados del triángulo dado son:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-6}{3-1} = -\frac{7}{2} \Rightarrow m_{\perp AB} = \frac{2}{7}$$
$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-6+1}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1 \Rightarrow m_{\perp BC} = -1$$
$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{6+6}{1+2} = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow m_{\perp CA} = -\frac{1}{4}$$

Ecuaciones de las mediatrices:

a.- Mediatriz de $\boldsymbol{AB}$:

$$y - y_D = m_{\perp AB}\left(x - x_D\right) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = \left(\frac{2}{7}\right)\left(x-2\right) = \frac{2}{7}x - \frac{4}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14y - 35 = 4x - 8 \Rightarrow 4x - 14y + 27 = 0$$

b.- Mediatriz de $\boldsymbol{BC}$:

$$y - y_E = m_{\perp BC}\left(x - x_E\right) \Rightarrow y + \frac{7}{2} = \left(-1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = -x + \frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y + 7 = -2x + 1 \Rightarrow 2x + 2y + 6 = 0 \Rightarrow x + y + 3 = 0$$

c.- Mediatriz de $\boldsymbol{CA}$:

$$y - y_F = m_{\perp CA}\left(x - x_F\right) \Rightarrow y - 0 = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8y = -2x - 1 \Rightarrow 2x + 8y + 1 = 0$$

Ecuaciones de las alturas:

Las alturas son líneas rectas que pasan por el vértice y son perpendiculares al lado opuesto:

a.- Altura correspondiente al vértice $\boldsymbol{A}$:

$$y - y_A = m_{\perp BC}\left(x - x_A\right) \Rightarrow y - 6 = \left(-1\right)\left(x - 1\right) = -x + 1 \Rightarrow x + y - 7 = 0$$

b.- Altura correspondiente al vértice $\boldsymbol{B}$:

$$y-y_B=m_{\perp CA}\left(x-x_B\right)\Rightarrow y+1=\left(-\frac{1}{4}\right)(x-3)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y+4=-x+3\Rightarrow x+4y+1=0$$

c.- Altura correspondiente al vértice $\boldsymbol{C}$:

$$y-y_C=m_{\perp AB}\left(x-x_C\right)\Rightarrow y+6=\left(\frac{2}{7}\right)(x+2)=\frac{2}{7}x+\frac{4}{7}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7y+42=2x+4\Rightarrow 2x-7y-38=0$$

Ecuaciones de las medianas:

Las medianas pasan por el vértice y por el punto medio del lado opuesto:

a.- Mediana correspondiente al vértice A:

Esta mediana es el segmento $\boldsymbol{AE}$:

$$m_{AE}=\frac{y_E-y_A}{x_E-x_A}=\frac{-\frac{7}{2}-6}{\frac{1}{2}-1}=\frac{-\frac{19}{2}}{-\frac{1}{2}}=19$$
$$y-y_A=m_{AE}\left(x-x_A\right)\Rightarrow y-6=19(x-1)=19x-19\Rightarrow 19x-y-13=0$$

b.- Mediana correspondiente al vértice B:

$$m_{BF}=\frac{y_F-y_B}{x_F-x_B}=\frac{0+1}{-\frac{1}{2}-3}=\frac{1}{-\frac{7}{2}}=-\frac{2}{7}$$
$$y-y_B=m_{BF}\left(x-x_B\right)\Rightarrow y+1=\left(-\frac{2}{7}\right)(x-3)=-\frac{2}{7}x+\frac{6}{7}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7y+7=-2x+6\Rightarrow 2x+7y+1=0$$

c.- Mediana correspondiente al vértice C:

$$m_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{\frac{5}{2}+6}{2+2}=\frac{\frac{17}{2}}{4}=\frac{17}{8}$$

$$y-y_C=m_{CD}\left(x-x_C\right)\Rightarrow y+6=\left(\frac{17}{8}\right)(x+2)=\frac{17}{8}x+\frac{17}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8y+48=17x+34\Rightarrow 17x-8y-14=0$$

Longitudes de las medianas:

a.- Se calcula la longitud del segmento $A(1,6);E\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$:

$$d_{AE}=\sqrt{\left(x_E-x_A\right)^2+\left(y_E-y_A\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{7}{2}-6\right)^2}=$$

$$d_{AE}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{19}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{361}{4}}=\frac{\sqrt{362}}{2}$$

b.- Se calcula la longitud del segmento $B(3,-1);F\left(-\frac{1}{2},0\right)$:

$$d_{BF}=\sqrt{\left(x_F-x_B\right)^2+\left(y_F-y_B\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-3\right)^2+\left(0+1\right)^2}=$$

$$d_{BF}=\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{49+2}{4}}=\frac{\sqrt{51}}{2}$$

c.- Se calcula la longitud del segmento $C(-2,-6);D\left(2,\frac{5}{2}\right)$:

$$d_{CD}=\sqrt{\left(x_D-x_C\right)^2+\left(y_D-y_C\right)^2}=\sqrt{(2+2)^2+\left(\frac{5}{2}+6\right)^2}=$$

$$d_{CD}=\sqrt{(4)^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2}=\sqrt{16+\frac{289}{4}}=\sqrt{\frac{64+289}{4}}=\frac{\sqrt{353}}{2}$$

21.- $A(-2,-5);B(2,8);C(6,-3)$

Solución:

Los puntos medios de los lados del triángulo dado son:

Sea $\boldsymbol{D}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0; y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-5+8}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow D\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

Sea $\boldsymbol{E}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+6}{2} = 4; y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow E\left(4, \frac{5}{2}\right)$$

Sea $\boldsymbol{F}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$:

$$x_F = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2; y_F = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-5-3}{2} = -4 \Rightarrow F(2,-4)$$

Las pendientes de los lados del triángulo dado son:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8+5}{2+2} = \frac{13}{5} \Rightarrow m_{\perp AB} = -\frac{5}{13}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-3-8}{6-2} = -\frac{11}{4} \Rightarrow m_{\perp BC} = \frac{4}{11}$$

$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-5+3}{-2-6} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4} \Rightarrow m_{\perp CA} = -4$$

Ecuaciones de las mediatrices:

a.- Mediatriz de $\boldsymbol{AB}$:

$$y - y_D = m_{\perp AB}(x - x_D) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = \left(-\frac{5}{13}\right)(x-0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26y - 39 = -10x \Rightarrow 10x + 26y - 39 = 0$$

b.- Mediatriz de $\boldsymbol{BC}$:

$$y - y_E = m_{\perp BC}(x - x_E) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = \left(\frac{4}{11}\right)(x-4) = \frac{4}{11}x - \frac{16}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22y - 55 = 8x - 32 \Rightarrow 8x - 22y + 23 = 0$$

c.- Mediatriz de $\boldsymbol{CA}$:

$$y - y_F = m_{\perp CA}\left(x - x_F\right) \Rightarrow y + 4 = (-4)(x-2) = -4x + 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x + y - 4 = 0$$

Ecuaciones de las alturas:

Las alturas son líneas rectas que pasan por el vértice y son perpendiculares al lado opuesto:

a.- Altura correspondiente al vértice ***A***:

$$y - y_A = m_{\perp BC}\left(x - x_A\right) \Rightarrow y + 5 = \left(\frac{4}{11}\right)(x+2) = \frac{4}{11}x + \frac{8}{11} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 11y + 55 = 4x + 8 \Rightarrow 4x - 11y - 47 = 0$$

b.- Altura correspondiente al vértice ***B***:

$$y - y_B = m_{\perp CA}\left(x - x_B\right) \Rightarrow y - 8 = (-4)(x-2) = -4x + 8 \Rightarrow 4x + y - 16 = 0$$

c.- Altura correspondiente al vértice ***C***:

$$y - y_C = m_{\perp AB}\left(x - x_C\right) \Rightarrow y + 3 = \left(-\frac{5}{13}\right)(x-6) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 13y + 39 = -5x + 30 \Rightarrow 5x + 13y + 9 = 0$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41F.

Tema: Línea recta. Paralelismo y perpendicularidad. (Hoffmann, 5to año-Ejercicio # 95).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde ***m*** es la pendiente de la línea recta y ***b*** es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las ***y***.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ siendo ***a*** el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las ***x*** y ***b*** es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las ***y***.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ***ecuación de la pendiente*** de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Conociendo un solo punto y la ***pendiente***, se puede escribir:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x \cos\theta + y sen\theta - \rho = 0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta = 90^\circ \Rightarrow tg\theta = \infty \Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(m_1\right)\left(m_2\right)=-1\Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida d*** entre un punto $P_0\left(x_0,y_0\right)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l\equiv Ax+By+C=0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo a como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax + By + C_1; l_2 \equiv Ax + By + C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{l_1,l_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Las coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada son:

$P(x,y) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \right)$ donde $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ y siendo orientados los segmentos considerados.

PREGUNTAS:

CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD ENTRE LINEAS RECTAS.

Demostrar en cada caso que el segmento de extremos A y B es paralelo al segmento de extremos M y N.

1.- $A(-2,3); B(1,5); M(1,-2); N(7,2)$

Solución:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{1+2} = \frac{2}{3}$$
$$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{2+2}{7-1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_{AB} = m_{MN} \Rightarrow AB \parallel MN$$

2.- $A(3,2); B(-1,-6); M(-2,7), N(-5,1)$

Solución:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-6-2}{-1-3} = \frac{-8}{-4} = 2$$
$$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{1-7}{-5+2} = \frac{-6}{-3} = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_{AB} = m_{MN} \Rightarrow AB \parallel MN$$

3.- $A\left(\sqrt{2},3\right);B\left(3,8\right);M\left(10,-5\sqrt{2}\right);N\left(17,15\right)$

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{8-3}{3-\sqrt{2}}=\frac{\left(5\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{15+5\sqrt{2}}{7}$$

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{15+5\sqrt{2}}{17-10}=\frac{15+5\sqrt{2}}{7}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{AB}=m_{MN}\Rightarrow AB\parallel MN$$

4.- $A\left(2,\frac{3}{2}\right);B\left(\sqrt{5},\frac{17}{2}\right);M\left(\frac{1}{3},7\sqrt{5}\right);N\left(-\frac{2}{3},-14\right)$

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{17}{2}-\frac{3}{2}}{\sqrt{5}-2}=\frac{7}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}+2\right)}=\frac{7\sqrt{5}+14}{1}=7\sqrt{5}+14$$

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-14-7\sqrt{5}}{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}=7\sqrt{5}+14\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{AB}=m_{MN}\Rightarrow AB\parallel MN$$

5.- $A\left(a,8\right);B\left(b,7\right);M\left(a^2,a\right);N\left(b^2,-b\right)$

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{7-8}{b-a}=\frac{1}{a-b}$$

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-b-a}{b^2-a^2}=\frac{-\left(b+a\right)}{\left(b+a\right)\left(b-a\right)}=\frac{1}{a-b}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{AB}=m_{MN}\Rightarrow AB\parallel MN$$

Demostrar en cada caso que el segmento de extremos A y B es perpendicular al segmento de extremos M y N.

6.- $A\left(2,-5\right);B\left(7,-3\right);M\left(9,6\right);N\left(7,11\right)$

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-3+5}{7-2}=\frac{2}{5}$$
$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{11-6}{7-9}=-\frac{5}{2}\Rightarrow$$
$$m_{AB}\cdot m_{MN}=\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)=-1\Rightarrow AB\perp MN$$

7.- $A\left(-\frac{6}{7},\frac{3}{4}\right);B\left(\frac{15}{7},-\frac{1}{4}\right);M\left(-\frac{3}{7},\frac{8}{3}\right);N\left(\frac{4}{7},\frac{17}{3}\right)$

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{\frac{15}{7}+\frac{6}{7}}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$$
$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{\frac{17}{3}-\frac{8}{3}}{\frac{4}{7}+\frac{3}{7}}=\frac{\frac{9}{3}}{1}=3\Rightarrow$$
$$m_{AB}\cdot m_{MN}=\left(-\frac{1}{3}\right)(3)=-1\Rightarrow AB\perp MN$$

8.- $A\left(\sqrt{10},7\right);B(3,6);M\left(-\frac{1}{5},\frac{1+\sqrt{10}}{2}\right);N\left(\frac{4}{5},\frac{7-\sqrt{10}}{2}\right)$

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-7}{3-\sqrt{10}}=-\frac{1}{\left(3-\sqrt{10}\right)}\cdot\frac{\left(3+\sqrt{10}\right)}{\left(3+\sqrt{10}\right)}=-\frac{\left(3+\sqrt{10}\right)}{-1}=3+\sqrt{10}$$
$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{\frac{7-\sqrt{10}}{2}-\frac{1+\sqrt{10}}{2}}{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}}=\frac{3-\sqrt{10}}{1}=3-\sqrt{10}\Rightarrow$$
$$m_{AB}\cdot m_{MN}=\left(3+\sqrt{10}\right)\left(3-\sqrt{10}\right)=-1\Rightarrow AB\perp MN$$

9.- $A(-4,4);B\left(-3,\sqrt{17}\right);M\left(5,-\sqrt{17}\right);N(4,4)$

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\sqrt{17}-4}{-3+4}=\sqrt{17}-4$$
$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{4+\sqrt{17}}{4-5}=-\left(\sqrt{17}+4\right)\Rightarrow$$
$$m_{AB}\cdot m_{MN}=\left(\sqrt{17}-4\right)\left[-\left(\sqrt{17}\right)+4\right]=-1\Rightarrow AB\perp MN$$

10.- $A\left(-4a,a+2\right);B\left(a^2+3,a^2\right);M\left(a^2+2,3\right);N\left(3a,a^2+2a\right)$

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{a^2-\left(a+2\right)}{a^2+3-\left(-4a\right)}=\frac{a^2-a-2}{a^2+4a+3}=\frac{\left(a-2\right)\left(a+1\right)}{\left(a+3\right)\left(a+1\right)}=\frac{a-2}{a+3}$$
$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{a^2+2a-3}{3a-\left(a^2+2\right)}=\frac{\left(a+3\right)\left(a-1\right)}{-\left(a^2-3a-2\right)}=-\frac{\left(a+3\right)\left(a-1\right)}{\left(a-2\right)\left(a-1\right)}=-\left(\frac{a+3}{a-2}\right)\Rightarrow$$
$$m_{AB}\cdot m_{MN}=\left(\frac{a-2}{a+3}\right)\left(-\frac{a+3}{a-2}\right)=-1\Rightarrow AB\perp MN$$

Hallar en cada caso la coordenada que falta sabiendo que los segmentos AB y MN son paralelos:

11.- $A\left(-5,1\right);B\left(6,8\right);M\left(10,4\right);$ la abscisa de $\boldsymbol{N}$ es -1.

Solución:

$$AB\parallel MN\Rightarrow m_{AB}=m_{MN}\Rightarrow\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{8-1}{6+5}=\frac{y_N-4}{-1-10}\Rightarrow\frac{7}{11}=\frac{4-y_N}{11}\Rightarrow y_N=-3$$

12.- $A\left(5,-\frac{5}{4}\right);B\left(-4,\frac{11}{4}\right);N\left(\frac{11}{2},2\right);$ la ordenada de $\boldsymbol{M}$ es 6.

Solución:

$$AB \parallel MN \Rightarrow m_{AB} = m_{MN} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{11}{4}+\frac{5}{4}}{-4-5} = \frac{2-6}{\frac{11}{2}-x_M} \Rightarrow \frac{\frac{16}{4}}{-9} = -\frac{4}{9} = \frac{-4}{\frac{11-2x_M}{2}} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{8}{11-2x_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 44-8x_M = 72 \Rightarrow x_M = \frac{44-72}{8} = -\frac{28}{8} = -\frac{7}{2}$$

13.- $A(2,9); M(4,-2); N\left(7,\sqrt{7}\right);$ la abscisa de $\boldsymbol{B}$ es $\sqrt{7}$.

Solución:

$$AB \parallel MN \Rightarrow m_{AB} = m_{MN} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_B - 9}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{7-4} \Rightarrow \frac{y_B - 9}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7}+2}{3} \Rightarrow 3y_B - 27 = 7-4 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B - 9 = 1 \Rightarrow y_B = 10$$

14.- $B(1,-2); M(3,-10); N\left(3\sqrt{5},11\right);$ la ordenada de $\boldsymbol{A}$ es 5.

Solución:

$$AB \parallel MN \Rightarrow m_{AB} = m_{MN} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2-5}{1-x_A} = \frac{11+10}{3\sqrt{5}-3} \Rightarrow \frac{7}{x_A - 1} = \frac{21}{3\left(\sqrt{5}-1\right)} \Rightarrow x_A - 1 = \sqrt{5}-1 \Rightarrow x_A = \sqrt{5}$$

Hallar en cada caso la coordenada que falta sabiendo que el segmento $\boldsymbol{AB}$ es perpendicular al segmento $\boldsymbol{MN}$:

15.- $A(-5,-4); B(3,-1); M(8,1);$ la ordenada de $\boldsymbol{N}$ es -7.

Solución:

$$AB \perp MN \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{MN} = -1.$$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1+4}{3+5}=\frac{3}{8}$$

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-7-1}{x_N-8}=\frac{-8}{x_N-8}\Rightarrow$$

$$m_{AB}.m_{MN}=-1\Rightarrow\left(\frac{3}{8}\right)\cdot\left(\frac{-8}{x_N-8}\right)=-1\Rightarrow 3=x_N-8\Rightarrow x_N=11$$

16.- $A\left(\sqrt{3},-\frac{3}{7}\right);B\left(\sqrt{11},\frac{11}{7}\right);N\left(\frac{20}{3},3\sqrt{3}\right);$ la abscisa de $\boldsymbol{M}$ es $\frac{2}{3}$.

Solución:

$AB\perp MN\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{MN}=-1.$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{11}{7}+\frac{3}{7}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{4}$$

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{3\sqrt{3}-y_M}{\frac{20}{3}-\frac{2}{3}}=\frac{3\sqrt{3}-y_M}{6}\Rightarrow$$

$$m_{AB}.m_{MN}=-1\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}-y_M}{6}\right)=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{33}+9-y_M\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)=-24\Rightarrow y_M=\frac{3\sqrt{33}+33}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{3\left(\sqrt{33}+11\right)}{\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)}=\frac{3\cdot\left[11\sqrt{3}+11\sqrt{11}-3\sqrt{11}-11\sqrt{3}\right]}{8}\Rightarrow$$

$$y_M=\frac{3\left(8\sqrt{11}\right)}{8}=3\sqrt{11}$$

17.- $A\left(-\frac{3}{5},-5\sqrt{3}\right);M\left(1,\sqrt{7}\right);N\left(6,\sqrt{3}\right);$ la ordenada de $\boldsymbol{B}$ es $5\sqrt{7}$.

Solución:

$AB\perp MN\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{MN}=-1.$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5\sqrt{7}+5\sqrt{3}}{x_B+\frac{3}{5}}=\frac{25\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{5x_B+3}$$

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{6-1}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{5}\Rightarrow$$

$$m_{AB}.m_{MN}=-1\Rightarrow\left[\frac{25\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)}{5x_B+3}\right]\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{5}\right)=\frac{5(3-7)}{5x_B+3}=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{20}{5x_B+3}=1\Rightarrow 20=5x_B+3\Rightarrow x_B=\frac{17}{5}$$

18.- $B\left(\frac{6}{5},2\sqrt{3}\right);M\left(\frac{2}{5},2\sqrt{3}\right);N\left(\frac{17}{5},3\right);$ la abscisa de $\boldsymbol{A}$ es $\frac{1}{5}$.

Solución:

$AB\perp MN\Rightarrow m_{AB}\cdot m_{MN}=-1.$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2\sqrt{3}-y_A}{\frac{6}{5}-\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{3}-y_A}{1}=2\sqrt{3}-y_A$$

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{3-2\sqrt{3}}{\frac{17}{5}-\frac{2}{5}}=\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow$$

$$m_{AB}.m_{MN}=\left(2\sqrt{3}-y_A\right)\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{3}-3y_A-12+2\sqrt{3}y_A=-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{3}-9=y_A\left(3-2\sqrt{3}\right)\Rightarrow y_A=\frac{3\left(2\sqrt{3}-3\right)}{\left(3-2\sqrt{3}\right)}=\frac{-3\left(3-2\sqrt{3}\right)}{\left(3-2\sqrt{3}\right)}=-3$$

Demostrar que los triángulos cuyos vértices se dan son rectángulos:

19.- $A(1,2);B(5,8);C(10,-4)$

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{8-2}{5-1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-4-8}{10-5} = \frac{-12}{5}$$

$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{2+4}{1-10} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

Luego:

$$m_{AB} \cdot m_{CA} = \left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Rightarrow \angle BAC = 90^{\circ}$$

20.- $D(-4,1); E(3,5); F(11,-9)$

Solución:

$$m_{DE} = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{5-1}{3+4} = \frac{4}{7}$$

$$m_{EF} = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{-9-5}{11-3} = \frac{-14}{8} = -\frac{7}{4}$$

$$m_{FD} = \frac{y_D - y_F}{x_D - x_F} = \frac{1+9}{-4-11} = \frac{10}{-15} = -\frac{2}{3}$$

$$m_{DE} \cdot m_{EF} = \left(\frac{4}{7}\right)\left(-\frac{7}{4}\right) = -1 \Rightarrow \angle DEF = 90^{\circ}$$

21.- $K(-6,1); L(10,3); M(-2,-5)$

Solución:

$$m_{KL} = \frac{y_L - y_K}{x_L - x_K} = \frac{3-1}{10+6} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$m_{LM} = \frac{y_M - y_L}{x_M - x_L} = \frac{-5-3}{-2-10} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$m_{MK} = \frac{y_K - y_M}{x_K - x_M} = \frac{1+5}{-6+2} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{LM} \cdot m_{MK} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \Rightarrow \angle LMK = 90^{\circ}$$

22.- $P\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right); Q\left(\frac{28}{3}, \frac{9}{2}\right); R\left(\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}\right)$

Solución:

$$m_{PQ}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{5}{2}}{\frac{28}{3}+\frac{5}{3}}=\frac{2}{11}$$

$$m_{QR}=\frac{y_R-y_Q}{x_R-x_Q}=\frac{-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}}{\frac{4}{3}-\frac{28}{3}}=\frac{-6}{-8}=\frac{3}{4}$$

$$m_{RP}=\frac{y_P-y_R}{x_P-x_R}=\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}=-\frac{4}{3}$$

$$m_{QR}\cdot m_{RP}=\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)=-1\Rightarrow \angle QRP=90^{o}$$

Demostrar que los puntos que se dan son vértices de un paralelogramo y que ese paralelogramo es rectángulo.

23.- $A(5,6);B(1,-2);C(-5,1);D(-1,9)$

Solución:

Nota: Si $\boldsymbol{ABCD}$ es un paralelogramo las pendientes de los lados opuestos son iguales. De ser un paralelogramo, los ángulos opuestos son iguales; esto quiere decir, que si dos ángulos adyacentes son rectángulos, todos los cuatro ángulos medirán $90°$, y por tanto, tendremos un rectángulo.

También, es bueno resaltar que las medidas de todos los ángulos internos de un cuadrilátero suman $360°$ y al tratarse de un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales; entonces, basta con que uno de los ángulos internos mida $90°$, para poder concluir que se trata de un rectángulo.

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2-6}{1-5}=\frac{-8}{-4}=2$$

$$m_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{9-1}{-1+5}=\frac{8}{4}=2$$

$$m_{AB}=m_{CD}=2\Rightarrow AB\parallel CD$$

También:

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{1+2}{-5-1}=\frac{3}{-6}=-\frac{1}{2}$$
$$m_{DA}=\frac{y_A-y_D}{x_A-x_D}=\frac{6-9}{5+1}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$
$$m_{BC}=m_{DA}=-\frac{1}{2}\Rightarrow BC\parallel DA$$

Ahora, se verificará que los ángulos del paralelogramo ***ABCD*** son rectángulos:

$$m_{AB}\cdot m_{DA}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\Rightarrow\angle DAB=90^\circ=\angle BCD$$
$$m_{AB}\cdot m_{BC}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\Rightarrow\angle ABC=90^\circ=\angle CDA$$

ABCD es un rectángulo.

24.- $E(-6,-1);F(-7,3);G(5,6);H(6,2)$

Solución:

Nota: Si ***EFGH*** es un paralelogramo las pendientes de los lados opuestos son iguales. De ser un paralelogramo, los ángulos opuestos son iguales; esto quiere decir, que si dos ángulos adyacentes son rectángulos, todos los cuatro ángulos medirán 90°, y por tanto, tendremos un rectángulo.

También, es bueno resaltar, que las medidas de todos los ángulos internos de un cuadrilátero suman 360° y al tratarse de un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales; entonces, basta con que uno de los ángulos internos mida 90°, para poder concluir que se trata de un rectángulo.

$$m_{EF}=\frac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\frac{3+1}{-7+6}=-4$$
$$m_{GH}=\frac{y_H-y_G}{x_H-x_G}=\frac{2-6}{6-5}=-4\Rightarrow$$
$$m_{EF}=m_{GH}=-4\Rightarrow EF\parallel GH$$

También:

$$m_{FG} = \frac{y_G - y_F}{x_G - x_F} = \frac{6-3}{5+7} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$m_{HE} = \frac{y_E - y_H}{x_E - x_H} = \frac{-1-2}{-6-6} = \frac{-3}{-12} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$m_{FG} = m_{HE} = \frac{1}{4} \Rightarrow FG \parallel HE$$

Ahora, se verificará que los ángulos del paralelogramo ***EFGH*** son rectángulos:

$$m_{EF} \cdot m_{HE} = (-4)\left(\frac{1}{4}\right) = -1 \Rightarrow \angle HEF = 90° = \angle FGH$$

$$m_{EF} \cdot m_{FG} = (-4)\left(\frac{1}{4}\right) = -1 \Rightarrow \angle EFG = 90° = \angle GHE$$

EFGH es un rectángulo

25.- $.K\left(\frac{3}{2},\frac{14}{3}\right); L\left(\frac{7}{2},-\frac{4}{3}\right); M\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{3}\right); N\left(-\frac{3}{2},\frac{11}{3}\right)$

Solución:

Nota: Si ***KLMN*** es un paralelogramo las pendientes de los lados opuestos son iguales. De ser un paralelogramo, los ángulos opuestos son iguales; esto quiere decir, que si dos ángulos adyacentes son rectángulos, todos los cuatro ángulos medirán $90°$, y por tanto, tendremos un rectángulo.

También, es bueno resaltar que las medidas de todos los ángulos internos de un cuadrilátero suman $360°$ y al tratarse de un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales; entonces, basta con que uno de los ángulos internos mida $90°$, para poder concluir que se trata de un rectángulo.

$$m_{KL} = \frac{y_L - y_K}{x_L - x_K} = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{14}{3}}{\frac{7}{2} - \frac{3}{2}} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{\frac{11}{3} + \frac{7}{3}}{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{6}{-2} = -3 \Rightarrow$$

$$m_{KL} = m_{MN} = -3 \Rightarrow KL \parallel MN$$

También:

$$m_{LM}=\frac{y_M-y_L}{x_M-x_L}=\frac{-\frac{7}{3}+\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{7}{2}}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

$$m_{NK}=\frac{\frac{14}{3}-\frac{11}{3}}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

$$m_{LM}=m_{NK}=\frac{1}{3}\Rightarrow LM\parallel NK$$

Ahora, se verificará que los ángulos del paralelogramo ***KLMN*** son rectángulos:

$$m_{KL}\cdot m_{LM}=(-3)\left(\frac{1}{3}\right)=-1\Rightarrow\angle KLM=90^\circ=\angle MNK$$

$$m_{MN}\cdot m_{LM}=(-3)\left(\frac{1}{3}\right)=-1\Rightarrow\angle LMK=90^\circ=\angle NKL$$

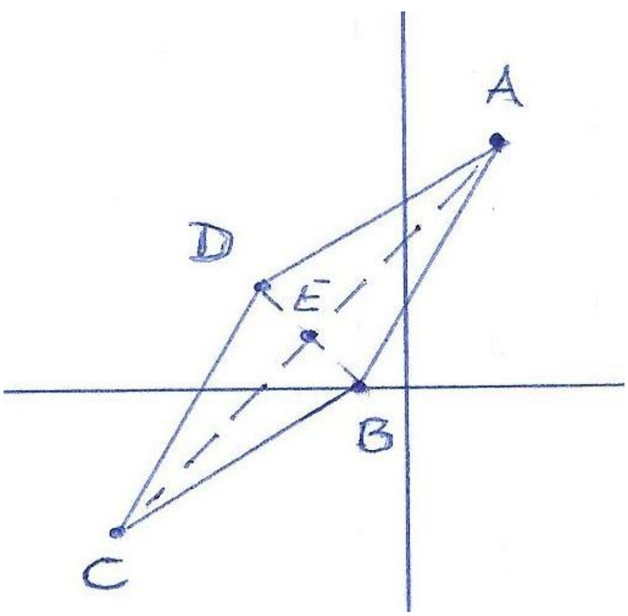
KLMN es un rectángulo.

Demostrar que los puntos que se dan son vértices de un rombo. Comprobar, además, que sus diagonales son perpendiculares entre si y que se bisecan.

26.- $A(2,5):B(-1,0);C(-6,-3);D(-3,2)$

Solución:

Nota: En un rombo se cumple que todos los lados tienen la misma longitud, los lados opuestos son paralelos, los ángulos opuestos son iguales, las diagonales se cruzan en 90° y además, se bisecan.



Longitudes de los lados:

$$L = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_2\right)^2}$$
$$L_{AB} = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} = \sqrt{\left(-1-2\right)^2 + \left(0-5\right)^2} =$$
$$L_{AB} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$L_{BC} = \sqrt{\left(x_C - x_B\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2} = \sqrt{\left(-6+1\right)^2 + \left(-3-0\right)^2} =$$
$$L_{BC} = \sqrt{\left(-5\right)^2 + \left(-3\right)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$
$$L_{CD} = \sqrt{\left(x_D - x_C\right)^2 + \left(y_D - y_C\right)^2} = \sqrt{\left(-3+6\right)^2 + \left(2+3\right)^2} =$$
$$L_{CD} = \sqrt{\left(3\right)^2 + \left(5\right)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$L_{DA} = \sqrt{\left(x_A - x_D\right)^2 + \left(y_A - y_D\right)^2} = \sqrt{\left(2+3\right)^2 + \left(5-2\right)^2} =$$
$$L_{DA} = \sqrt{\left(5\right)^2 + \left(3\right)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

Todos los lados tienen la misma longitud.

Pendientes de los lados:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-5}{-1-2} = \frac{5}{3}$$
$$m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2+3}{-3+6} = \frac{5}{3} \Rightarrow AB \parallel CD$$
$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-3-0}{-6+1} = \frac{3}{5}$$
$$m_{DA} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{5-2}{2+3} = \frac{3}{5} \Rightarrow BC \parallel DA$$

Nota: Se hará el cálculo de los ángulos, aunque no es estrictamente necesario para demostrar que el cuadrilátero es un rombo, ya que al ser un paralelogramo sus ángulos opuestos son iguales.

Cálculo de los ángulos:

$$tg\angle A=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{m_{AB}-m_{DA}}{1+m_{DA}\cdot m_{AB}}=\frac{\frac{5}{3}-\frac{3}{5}}{1+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{3}\right)}=\frac{\frac{25-9}{15}}{2}=\frac{16}{30}=0,5333\Rightarrow\angle A=28,07°$$

$$tg\angle C=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{m_{CD}-m_{BC}}{1+m_{BC}\cdot m_{CD}}=\frac{\frac{5}{3}-\frac{3}{5}}{1+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{3}\right)}=\frac{\frac{25-9}{15}}{2}=\frac{16}{30}=0,5333\Rightarrow\angle C=28,07°\Rightarrow$$

$$\angle A=\angle C=28,07°$$

$$tg\angle B=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{m_{BC}-m_{AB}}{1+m_{AB}\cdot m_{BC}}=\frac{\frac{3}{5}-\frac{5}{3}}{1+\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}=\frac{\frac{9-25}{15}}{2}=-\frac{16}{30}=-0,5333\Rightarrow$$

$$\angle B=180°-28,071°=151,929°$$

$$tg\angle D=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{m_{DA}-m_{CD}}{1+m_{CD}\cdot m_{DA}}=\frac{\frac{3}{5}-\frac{5}{3}}{1+\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)}=\frac{16}{30}\Rightarrow D=151,929°\Rightarrow$$

$$\angle B=\angle D=151,929°$$

Pendientes y ángulo de cruce de las diagonales:

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-3-5}{-6-2}=\frac{-8}{-8}=1$$

$$m_{BD}=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{2-0}{-3+1}=-1$$

$$\Rightarrow m_{AC}\cdot m_{BD}=-1\Rightarrow AC\perp BD$$

Las diagonales se bisecan:

Se calcula el punto medio de cada diagonal y si ambos puntos medios coinciden, son el mismo punto, es porque las dos diagonales se bisecan:

Llamemos E_1 al punto medio de la diagonal $\boldsymbol{AC}$:

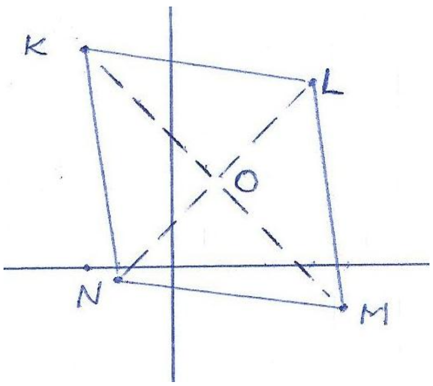
$$x_{E_1}=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2-6}{2}=-2;\ y_{E_1}=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{5-3}{2}=1\Rightarrow E_1(-2,1)$$

Llamemos E_2 el punto medio de la diagonal $\boldsymbol{BD}$:

$$x_{E_2}=\frac{x_B+x_D}{2}=\frac{-1-3}{2}=-2;y_{E_2}=\frac{y_B+y_D}{2}=\frac{0+2}{2}=1\Rightarrow E_2(-2,1)\Rightarrow$$
$$E_1(-2,1)=E_2(-2,1)=E(-2,1)$$

27.- $K\left(-\frac{8}{3},\frac{27}{4}\right);L\left(\frac{13}{3},\frac{23}{4}\right);M\left(\frac{16}{3},-\frac{5}{4}\right);N\left(-\frac{5}{3},-\frac{1}{4}\right)$

Solución:



Longitudes de los lados:

$$L_{KL}=\sqrt{(x_L-x_K)^2+(y_L-y_K)^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{3}+\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{23}{4}-\frac{27}{4}\right)^2}=$$
$$L_{KL}=\sqrt{(7)^2+(-1)^2}=\sqrt{50}$$

$$L_{LM}=\sqrt{(x_M-x_L)^2+(y_M-y_L)^2}=\sqrt{\left(\frac{16}{3}-\frac{13}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{4}-\frac{23}{4}\right)^2}=$$
$$L_{LM}=\sqrt{(1)^2+(-7)^2}=\sqrt{50}$$

$$L_{MN}=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}=\sqrt{\left(-\frac{5}{3}-\frac{16}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)^2}=$$
$$L_{MN}=\sqrt{(-7)^2+(1)^2}=\sqrt{50}$$

$$L_{NK}=\sqrt{(x_K-x_N)^2+(y_K-y_N)^2}=\sqrt{\left(-\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{27}{4}+\frac{1}{4}\right)^2}=$$
$$L_{NK}=\sqrt{(-1)^2+(7)^2}=\sqrt{50}$$

Pendientes de los lados:

$$m_{KL}=\frac{y_L-y_K}{x_L-x_K}=\frac{\frac{23}{4}-\frac{27}{4}}{\frac{13}{3}+\frac{8}{3}}=\frac{\frac{-4}{4}}{\frac{21}{3}}=\frac{-1}{7}=-\frac{1}{7}$$

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}{-\frac{5}{3}-\frac{16}{3}}=\frac{1}{-7}=-\frac{1}{7}\Rightarrow m_{KL}=m_{MN}=-\frac{1}{7}\Rightarrow KL\parallel MN$$

$$m_{LM}=\frac{y_M-y_L}{x_M-x_L}=\frac{-\frac{5}{4}-\frac{23}{4}}{\frac{16}{3}-\frac{13}{3}}=\frac{-\frac{28}{4}}{\frac{3}{3}}=-7$$

$$m_{NK}=\frac{y_K-y_N}{x_K-x_N}=\frac{\frac{27}{4}+\frac{1}{4}}{-\frac{8}{3}+\frac{5}{3}}=\frac{7}{-1}=-7\Rightarrow m_{LM}=m_{NK}=-7\Rightarrow LM\parallel NK$$

Para el cálculo de los ángulos en los vértices, ahora utilizaremos otro método:

$$tg\angle K=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{m_{KL}-m_{KN}}{1+m_{KN}\cdot m_{KL}}=\frac{\left(-\frac{1}{7}\right)-(-7)}{1+\left(-\frac{1}{7}\right)(-7)}=\frac{\frac{-1+49}{7}}{\frac{7+7}{7}}=\frac{48}{14}=3,428\Rightarrow\angle K=\angle M=73,7372°$$

$$\Rightarrow\angle N=\angle L=\frac{360°-2\cdot(73,7372°)}{2}=\frac{360°-147,474°}{2}=106,262°$$

Pendientes y ángulo de cruce de las diagonales:

$$m_{KM}=\frac{y_M-y_K}{x_M-x_K}=\frac{-\frac{5}{4}-\frac{27}{4}}{\frac{16}{3}+\frac{8}{3}}=\frac{-8}{8}=-1$$

$$m_{LN}=\frac{y_N-y_L}{x_N-x_L}=\frac{-\frac{1}{4}-\frac{23}{4}}{-\frac{5}{3}-\frac{13}{3}}=\frac{-6}{-6}=1\Rightarrow$$

$$m_{KM}\cdot m_{LN}=-1\Rightarrow KM\perp LN$$

Las diagonales se bisecan:

Se calcula el punto medio de cada diagonal y si ambos puntos medios coinciden, son el mismo punto, es porque las dos diagonales se bisecan:

Llamemos O_1 el punto medio de la diagonal ***KM***:

$$x_{O_1}=\frac{x_K+x_M}{2}=\frac{-\frac{8}{3}+\frac{16}{3}}{2}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3};y_{O_1}=\frac{y_K+y_M}{2}=\frac{\frac{27}{4}-\frac{5}{4}}{2}=\frac{11}{4}\Rightarrow O_1\left(\frac{4}{3},\frac{11}{4}\right)$$

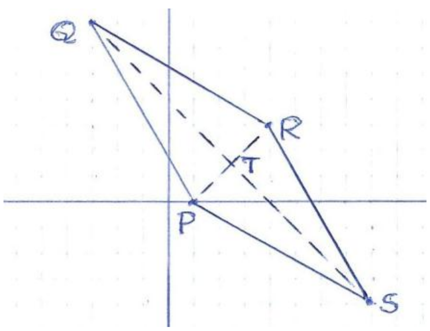
Llamemos O_2 el punto medio de la diagonal $\boldsymbol{LN}$:

$$x_{O_2}=\frac{x_L+x_N}{2}=\frac{\frac{13}{3}-\frac{5}{3}}{2}=\frac{\frac{8}{3}}{2}=\frac{4}{3};y_{O_2}=\frac{y_L+y_N}{2}=\frac{\frac{23}{4}-\frac{1}{4}}{2}=\frac{11}{4}\Rightarrow O_2\left(\frac{4}{3},\frac{11}{4}\right)\Rightarrow$$

$$O_1\left(\frac{4}{3},\frac{11}{4}\right)=O_2\left(\frac{4}{3},\frac{11}{4}\right)=O\left(\frac{4}{3},\frac{11}{4}\right)$$

28.- $P(1,0);Q(-3,7);R(4,3);S(8,-4)$

Solución:



Solución:

Longitudes de los lados:

$$L_{QR}=\sqrt{\left(x_R-x_Q\right)^2+\left(y_R-y_Q\right)^2}=\sqrt{(4+3)^2+(3-7)^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$$

$$L_{RS}=\sqrt{\left(x_S-x_R\right)^2+\left(y_S-y_R\right)^2}=\sqrt{(8-4)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

$$L_{SP}=\sqrt{\left(x_P-x_S\right)^2+\left(y_P-y_S\right)^2}=\sqrt{(1-8)^2+(0+4)^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$$

$$L_{PQ}=\sqrt{\left(x_Q-x_P\right)^2+\left(y_Q-y_P\right)^2}=\sqrt{(-3-1)^2+(7-0)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

Pendientes de los lados:

$$m_{QR}=\frac{y_R-y_Q}{x_R-x_Q}=\frac{3-7}{4+3}=\frac{-4}{7}=-\frac{4}{7}$$

$$m_{PS}=\frac{y_S-y_P}{x_S-x_P}=\frac{-4-0}{8-1}=-\frac{4}{7}\Rightarrow m_{QR}=m_{PS}=-\frac{4}{7}\Rightarrow QR\parallel PS$$

$$m_{RS}=\frac{y_S-y_R}{x_S-x_R}=\frac{-4-3}{8-4}=-\frac{7}{4}$$

$$m_{QP}=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{0-7}{1+3}=-\frac{7}{4}\Rightarrow m_{RS}=m_{QP}=-\frac{7}{4}\Rightarrow RS\parallel QP$$

Para el cálculo de los ángulos en los vértices, ahora utilizaremos otro método:

$$tg\angle Q=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{m_{QR}-m_{QP}}{1+m_{QP}\cdot m_{QR}}=\frac{-\frac{4}{7}-\left(-\frac{7}{4}\right)}{1+\left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{4}{7}\right)}=\frac{\frac{-16+49}{28}}{1+1}=\frac{33}{56}=0,589\Rightarrow\angle Q=\angle S=30,5099°\Rightarrow$$

$$\angle P=\angle Q=\frac{360°-2\cdot(30,5099°)}{2}=\frac{360°-61,0,199°}{2}=149,49°$$

Pendientes y ángulo de cruce de las diagonales:

$$m_{QS}=\frac{y_S-y_Q}{x_S-x_Q}=\frac{-4-7}{8+3}=\frac{-11}{11}=-1$$

$$m_{PR}=\frac{y_R-y_P}{x_R-x_P}=\frac{3-0}{4-1}=\frac{3}{3}=1\Rightarrow$$

$$m_{QS}\cdot m_{PR}=-1\Rightarrow QS\perp PR$$

Las diagonales se bisecan:

Se calcula el punto medio de cada diagonal y si ambos puntos medios coinciden, son el mismo punto, es porque las dos diagonales se bisecan:

Llamemos T_1 al punto medio de la diagonal $\boldsymbol{QS}$:

$$x_{T_1}=\frac{x_Q+x_S}{2}=\frac{-3+8}{2}=\frac{5}{2};y_{T_1}=\frac{y_Q+y_S}{2}=\frac{7-4}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow T_1\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Llamemos T_2 el punto medio de la diagonal $\boldsymbol{PR}$:

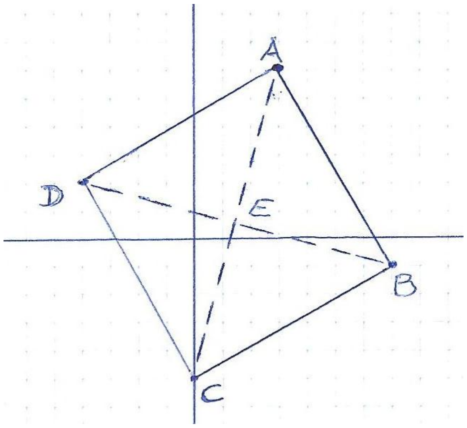
$$x_{T_2}=\frac{x_P+x_R}{2}=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2};y_{T_2}=\frac{y_P+y_R}{2}=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow T_2\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_1\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=T_2\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)=T\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Demostrar que los puntos que se dan son vértices de un cuadrado. Comprobar, además, que sus diagonales son perpendiculares entre si y se bisecan.

29.- $A(3,6);B(7,-1):C(0,-5);D(-4,2)$

Solución:



Longitudes de los lados:

$$L_{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(7-3)^2+(-1-6)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

$$L_{BC}=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(0-7)^2+(-5+1)^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$$

$$L_{CD}=\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2}=\sqrt{(-4-0)^2+(2+5)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$

$$L_{DA}=\sqrt{(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2}=\sqrt{(3+4)^2+(6-2)^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$$

Pendientes de los lados:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1-6}{7-3}=-\frac{7}{4}$$

$$m_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{2+5}{-4-0}=-\frac{7}{4}\Rightarrow m_{AB}=m_{CD}\Rightarrow AB\parallel CD$$

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-5+1}{0-7}=\frac{4}{7}$$

$$m_{DA}=\frac{y_A-y_D}{x_A-x_D}=\frac{6-2}{3+4}=\frac{4}{7}\Rightarrow m_{BC}=m_{DA}\Rightarrow BC\parallel DA$$

Hasta ahora tenemos un paralelogramo con todos los lados de la misma longitud; sin embargo:

$$m_{AB}\cdot m_{DA}=\left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{4}{7}\right)=-1\Rightarrow\angle A=90^\circ=\angle C$$

$$m_{AB}\cdot m_{BC}=\left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{4}{7}\right)=-1\Rightarrow\angle B=90^\circ=\angle D$$

Por lo tanto, se trata de un cuadrado.

Pendientes y ángulo de las diagonales:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5-6}{0-3} = \frac{11}{3}$$

$$m_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{2+1}{-4-7} = -\frac{3}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BD} = \left(\frac{11}{3}\right)\left(-\frac{3}{11}\right) = -1 \Rightarrow AC \perp BD$$

Las diagonales se bisecan:

Sea E_1 el punto medio de la diagonal $\boldsymbol{AC}$:

$$x_{E_1} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2}; y_{E_1} = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow E_1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

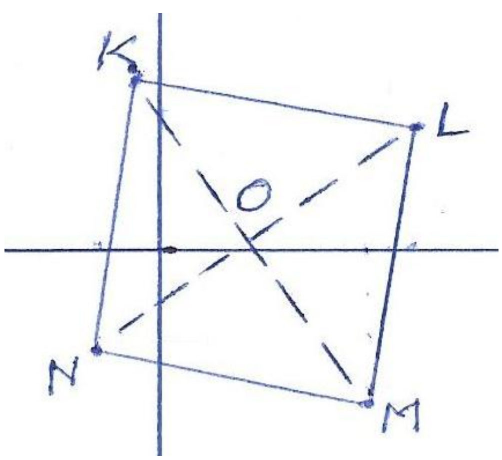
Sea E_2 el punto medio de la diagonal $\boldsymbol{BD}$:

$$x_{E_2} = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{7-4}{2} = \frac{3}{2}; y_{E_2} = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow E_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = E_2\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = E\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

30.- $K\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right); L\left(\frac{11}{2}, \frac{11}{4}\right); M\left(\frac{9}{2}, -\frac{13}{4}\right); N\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

Solución:



Longitud de los lados:

$$L_{KL}=\sqrt{\left(x_L-x_K\right)^2+\left(y_L-y_K\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{4}-\frac{15}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(6\right)^2+\left(1\right)^2}=\sqrt{37}$$

$$L_{LM}=\sqrt{\left(x_M-x_L\right)^2+\left(y_M-y_L\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-\frac{11}{2}\right)^2+\left(-\frac{13}{4}-\frac{11}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(1\right)^2+\left(6\right)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$$

$$L_{MN}=\sqrt{\left(x_N-x_M\right)^2+\left(y_N-y_M\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\right)^2+\left(-\frac{9}{4}+\frac{13}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(-6\right)^2+\left(1\right)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$$

$$L_{NK}=\sqrt{\left(x_K-x_N\right)^2+\left(y_K-y_N\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{4}+\frac{9}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(1\right)^2+\left(6\right)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$$

Pendientes de los lados:

$$m_{KL}=\frac{y_L-y_K}{x_L-x_K}=\frac{\frac{11}{4}-\frac{15}{4}}{\frac{11}{2}+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{6}$$

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-\frac{9}{4}+\frac{13}{4}}{-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}}=-\frac{1}{6}\Rightarrow m_{KL}=m_{MN}\Rightarrow KL\parallel MN$$

$$m_{LM}=\frac{y_M-y_L}{x_M-x_L}=\frac{-\frac{13}{4}-\frac{11}{4}}{\frac{9}{2}-\frac{11}{2}}=\frac{-6}{-1}=6$$

$$m_{NK}=\frac{y_K-y_N}{x_K-x_N}=\frac{\frac{15}{4}+\frac{9}{4}}{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=\frac{6}{1}=6\Rightarrow m_{LM}=m_{NK}\Rightarrow LM\parallel NK$$

Hasta ahora tenemos un paralelogramo con todos los lados de la misma longitud; sin embargo:

$$m_{KL}\cdot m_{NK}=\left(-\frac{1}{6}\right)\left(6\right)=-1\Rightarrow\angle K=90^\circ=\angle M$$

$$m_{KL}\cdot m_{LM}=\left(-\frac{1}{6}\right)\left(6\right)=-1\Rightarrow\angle L=90^\circ=\angle N$$

Por lo tanto, se trata de un cuadrado.

Pendientes y ángulo de las diagonales:

$$m_{KM} = \frac{y_M - y_K}{x_M - x_K} = \frac{-\frac{13}{4} - \frac{15}{4}}{\frac{9}{2} + \frac{1}{2}} = -\frac{7}{5}$$

$$m_{LN} = \frac{y_N - y_L}{x_N - x_L} = \frac{-\frac{9}{4} - \frac{11}{4}}{-\frac{3}{2} - \frac{11}{2}} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7} \Rightarrow$$

$$m_{KM} \cdot m_{LN} = \left(-\frac{7}{5}\right)\left(\frac{5}{7}\right) = -1 \Rightarrow KM \perp LN$$

Las diagonales se bisecan:

Sea O_1 el punto medio de la diagonal ***KM***:

$$x_{O_1} = \frac{x_K + x_M}{2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{9}{2}}{2} = 2; y_{O_1} = \frac{y_K + y_M}{2} = \frac{\frac{15}{4} - \frac{13}{4}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow O_1\left(2, \frac{1}{4}\right)$$

Sea O_2 el punto medio de la diagonal ***LN***:

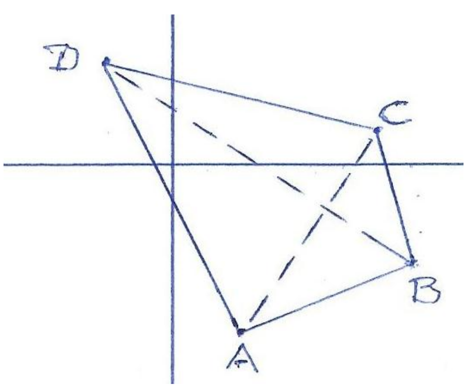
$$x_{O_2} = \frac{x_N + x_L}{2} = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{11}{2}}{2} = 2; y_{O_2} = \frac{y_N + y_L}{2} = \frac{-\frac{9}{4} + \frac{11}{4}}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow O_2\left(2, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_1\left(2, \frac{1}{4}\right) = O_2\left(2, \frac{1}{4}\right) = O\left(2, \frac{1}{4}\right)$$

Demostrar que los puntos que se dan son vértices de un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares entre si.

31.- $A(2-5); B(7,-3); C(6,1); D(-2,3)$

Solución:



La gráfica nos muestra un polígono irregular de cuatro lados, o sea, un cuadrilátero.

Longitudes de los lados:

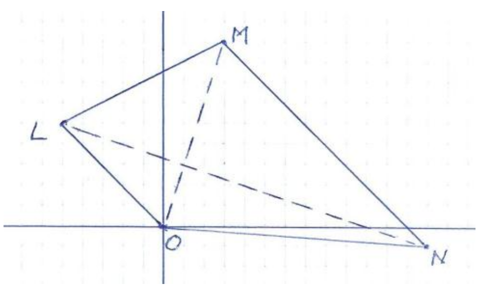
$$L_{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(7-2)^2+(-3+5)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$
$$L_{BC}=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(6-7)^2+(1+3)^2}=\sqrt{17}$$
$$L_{CD}=\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2}=\sqrt{(-2-6)^2+(3-1)^2}=\sqrt{64+4}=\sqrt{68}$$
$$L_{DA}=\sqrt{(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2}=\sqrt{(2+2)^2+(-5-3)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}$$

Pendientes de las diagonales y ángulo de cruce entre ellas:

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1+5}{6-2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$m_{BD}=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{3+3}{-2-7}=\frac{6}{-9}=-\frac{2}{3}\Rightarrow$$
$$m_{AC}\cdot m_{BD}=\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)=-1\Rightarrow AC\perp BD$$

32.- $L(-5,5);M(3,9);N(13,-1);O(0,0)$

Solución:



La gráfica nos muestra un polígono irregular de cuatro lados, o sea, un cuadrilátero.

Longitudes de los lados:

$$L_{LM}=\sqrt{(x_M-x_L)^2+(y_M-y_L)^2}=\sqrt{(3+5)^2+(9-5)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$
$$L_{MN}=\sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}=\sqrt{(13-3)^2+(-1-9)^2}=10\sqrt{2}$$
$$L_{NO}=\sqrt{(x_O-x_N)^2+(y_O-y_N)^2}=\sqrt{(0-13)^2+(0+1)^2}=\sqrt{170}$$
$$L_{OL}=\sqrt{(x_L-x_O)^2+(y_L-y_O)^2}=\sqrt{(-5-0)^2+(5-0)^2}=5\sqrt{2}$$

Pendientes de las diagonales y ángulo de cruce entre ellas:

$$m_{LN} = \frac{y_N - y_L}{x_N - x_L} = \frac{-1-5}{13+5} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$$

$$m_{OM} = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{9-0}{3-0} = 3 \Rightarrow$$

$$m_{LN} \cdot m_{OM} = \left(-\frac{1}{3}\right)(3) = -1 \Rightarrow LN \perp OM$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41E.

Tema: Angulo que forman dos rectas entre si. (Hoffmann, 5to año-Ejercicio # 94).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la línea recta y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ siendo $\boldsymbol{a}$ el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ***ecuación de la pendiente*** de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Conociendo un solo punto y la ***pendiente***, se puede escribir:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x\cos\theta + ysen\theta - \rho = 0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\theta = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta = 90^{o} \Rightarrow tg\theta = \infty \Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(m_1\right)\left(m_2\right)=-1\Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida*** ***d*** entre un punto $P_0\left(x_0,y_0\right)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l\equiv Ax+By+C=0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo a como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax+By+C_1; l_2 \equiv Ax+By+C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{l_1,l_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Las coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada son:

$P(x,y) = \left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \right)$ donde $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$ y siendo orientados los segmentos considerados.

PREGUNTAS:

ANGULO QUE FORMAN DOS RECTAS ENTRE SI.

Determinar en cada caso el ángulo que forman l_1 y l_2.

Nota: Para saber cuál es l_1 y cuál es l_2, cuando no existe identificación explícita de cada una, se rota alrededor del punto de cruce una de ellas, en el sentido contrario de las agujas del reloj, hasta sobreponerse sobre la otra, y aquella que rota en el menor ángulo es l_1.

1.- l_1 pasa por $A(-2,1), B(3,-1)$; l_2 por $M(-5,2), N(2,5)$.

Solución:

$$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-1}{3+2} = -\frac{2}{5}; m_2 = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{5-2}{2+5} = \frac{3}{7}$$

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{3}{7} - \left(-\frac{2}{5}\right)}{1+\left(\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{3}{7}+\frac{2}{5}}{1-\frac{6}{35}} = \frac{\frac{15+14}{35}}{\frac{35-6}{35}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\theta_1 = \frac{29}{29} = 1 \Rightarrow \theta_1 = 45°$$

2.- l_1 pasa por $A(2,-1); B(4,5)$; l_2 pasa por $M(-2,1); N(-3,5)$.

Solución:

$$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5+1}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$m_2 = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{5-1}{-3+2} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-4-3}{1+(3)(-4)} = \frac{-7}{-11} = 0,63636 \Rightarrow \theta_1 = 32,468° \Rightarrow 32°28,08'$$

3.- l_1 pasa por $A(1,-3); B(3,-2)$; l_2 pasa por $M(2,3); N(-2,5)$.

Solución:

$$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2+3}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{5-3}{-2-2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_1 = 180° - 53,1294° = 126,87° \Rightarrow \theta_1 = 126°52,2'$$

4.- l_1 pasa por $A\left(1,\frac{5}{2}\right); B\left(5,\frac{10}{3}\right)$; l_2 pasa por $M\left(\frac{3}{2},-2\right); N\left(\frac{8}{3},\frac{9}{2}\right)$.

Solución:

$$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{10}{3} - \frac{5}{2}}{5-1} = \frac{\frac{20-15}{6}}{4} = \frac{5}{24}$$

$$m_2 = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{\frac{9}{2} + 2}{\frac{8}{3} - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{7}{6}} = \frac{39}{7}$$

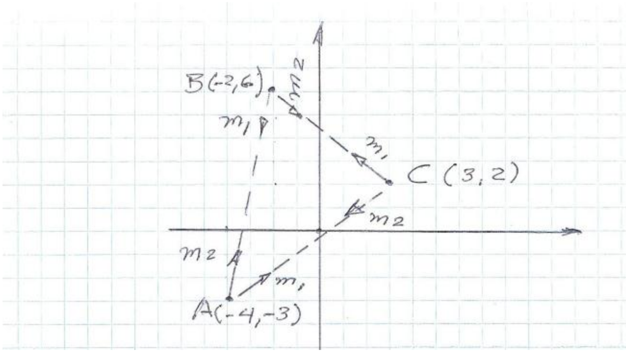
$$tg\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{39}{7} - \frac{5}{24}}{1+\left(\frac{5}{24}\right)\left(\frac{39}{7}\right)} = \frac{\frac{39 \cdot 24 - 35}{7 \cdot 24}}{1+\left(\frac{5 \cdot 39}{7 \cdot 24}\right)} \Rightarrow$$

$$tg\theta_1 = \frac{936}{7 \cdot 24 + 5 \cdot 39} = \frac{936}{168+195} = \frac{936}{363} = 2,57851 \Rightarrow \theta_1 = 68,8026° = 68°48,156'$$

Calcular los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son:

5.- $A(-4,-3);B(-2,6);C(3,2)$

Solución:



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6+3}{-2+4}=\frac{9}{2};$$

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{2-6}{3+2}=-\frac{4}{5};$$

$$m_{CA}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{-3-2}{-4-3}=\frac{5}{7}$$

Recordar que:

$$tg\theta_1=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$$

En todo triángulo se cumple que $\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C=180°$

Luego:

Para el $\measuredangle A$:

$$m_1=m_{CA}=\frac{5}{7};m_2=m_{AB}=\frac{9}{2}$$

$$tg\measuredangle A=\frac{\frac{9}{2}-\frac{5}{7}}{1+\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{9}{2}\right)}=\frac{\frac{63-10}{14}}{\frac{14+45}{14}}=\frac{53}{59}=0,8983\Rightarrow\measuredangle A=41,933°$$

Para el $\measuredangle B$:

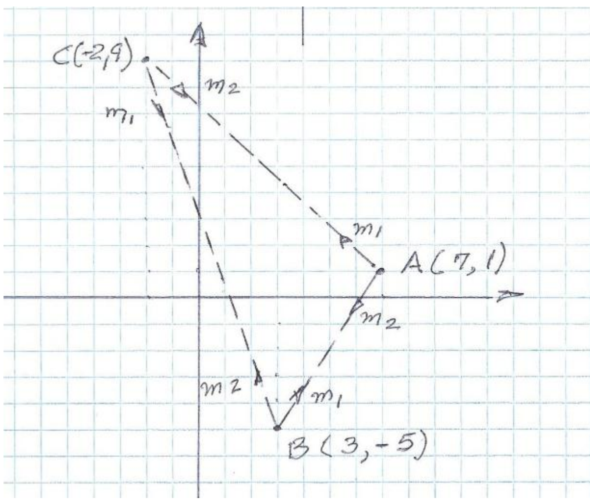
$$m_1=m_{AB}=\frac{9}{2};m_2=m_{BC}=-\frac{4}{5}$$

$$tg\angle B=\frac{-\frac{4}{5}-\frac{9}{2}}{1+\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{9}{2}\right)}=\frac{-\frac{8+45}{35}}{1-\frac{36}{10}}=\frac{53}{26}=2,0384\Rightarrow\angle B=63,868°$$

$$\angle C=180°-(\angle A+\angle B)=180°-105,801°=74,198°$$

6.- $A(7,1);B(3,-5);C(-2,9)$

Solución:



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-5-1}{3-7}=\frac{-6}{-4}=\frac{3}{2}$$

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{9+5}{-2-3}=-\frac{13}{5}$$

$$m_{CA}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{1-9}{7+2}=-\frac{8}{9}$$

Recordar que:

$$tg\theta_1=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$$

En todo triángulo se cumple que $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

Luego:

Para el $\angle A$:

$$m_1 = m_{CA} = -\frac{8}{9}; m_2 = m_{AB} = \frac{3}{2}$$

$$tgA = \frac{\frac{3}{2}+\frac{8}{9}}{1+\left(-\frac{8}{9}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{27+16}{18}}{1-\frac{24}{18}} = -\frac{\frac{43}{18}}{\frac{6}{18}} = -\frac{43}{6} = -7{,}1666 \Rightarrow \angle A = 97{,}9435°$$

Para el $\angle B$:

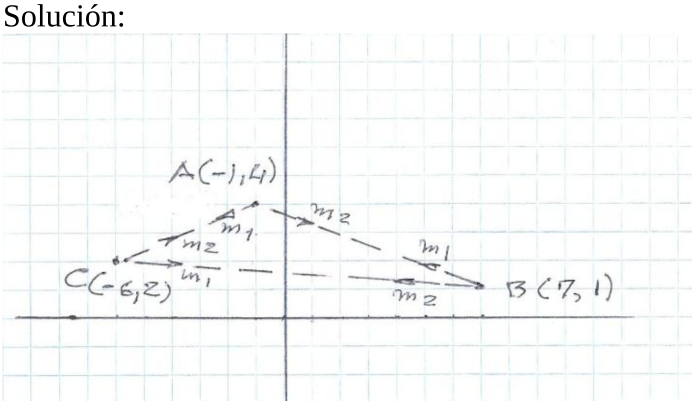
$$m_1 = m_{AB} = \frac{3}{2}; m_2 = m_{BC} = -\frac{13}{5}$$

$$tgB = \frac{-\frac{13}{5}-\frac{3}{2}}{1+\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{13}{5}\right)} = \frac{\frac{-26-15}{10}}{\frac{10-39}{10}} = \frac{41}{29} = 1{,}4137 \Rightarrow \angle B = 54{,}727°$$

$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 152{,}671° = 27{,}3289°$$

7.- $A(-1,4): B(7,1); C(-6,2)$

Solución:



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{7+1} == -\frac{3}{8}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-1}{-6-7} = -\frac{1}{13}$$

$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{4-2}{-1+6} = \frac{2}{5}$$

Recordar que:

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

En todo triángulo se cumple que $\angle A+\angle B+\angle C=180°$
Luego:

Para el $\angle A$:

$$m_1=m_{CA}=\frac{2}{5};m_2=m_{AB}=-\frac{3}{8}$$

$$tgA=\frac{-\frac{3}{8}-\frac{2}{5}}{1+\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{3}{8}\right)}=\frac{\frac{-15-16}{40}}{\frac{40-6}{40}}=\frac{-31}{34}=-0,9117=180°-42,357=137,6425°$$

Para el $\angle B$:

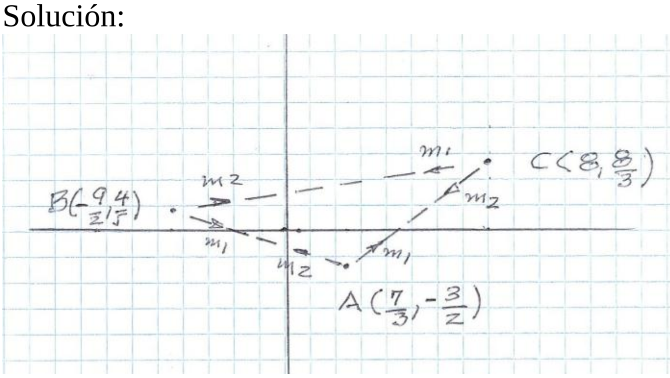
$$m_1=m_{AB}=-\frac{3}{8};m_2=m_{BC}=-\frac{1}{13}$$

$$tgB=\frac{-\frac{1}{13}+\frac{3}{8}}{1+\left(-\frac{1}{13}\right)\left(-\frac{3}{8}\right)}=\frac{\frac{-8+39}{104}}{\frac{104+3}{104}}=\frac{31}{107}=0,2897\Rightarrow\angle B=16,1563°$$

$$\angle C=180°-\left(\angle A+\angle B\right)=180°-153,7988°=26,2011°$$

8.- $A\left(\frac{7}{3},-\frac{3}{2}\right):B\left(-\frac{9}{2},\frac{4}{5}\right);C\left(8,\frac{8}{3}\right)$

Solución:



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{4}{5}+\frac{3}{2}}{-\frac{9}{2}-\frac{7}{3}}=\frac{\frac{8+15}{10}}{-\left(\frac{27+14}{6}\right)}=-\frac{23\cdot 3}{41\cdot 5}=-0,33656$$

$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{\frac{8}{3}-\frac{4}{5}}{8+\frac{9}{2}}=\frac{\frac{40-12}{15}}{\frac{16+9}{2}}=\frac{28\cdot 2}{25\cdot 15}=0,14933$$

$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{8}{3}}{\frac{7}{3} - 8} = \frac{-\left(\frac{9+16}{6}\right)}{-\left(\frac{17}{3}\right)} = \frac{25}{17 \cdot 2} = 0,73529$$

Recordar que:

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

En todo triángulo se cumple que $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Luego:

Para el $\angle A$:

$$m_1 = m_{cA} = 0,73529; m_2 = m_{AB} = -0,33656$$

$$tgA = \frac{-0,33656 - 0,73529}{1 + (0,73529)(-0,33656)} = \frac{-1,07185}{1 - 0,247469} = -\frac{1,07185}{0,75253} = -1,4432 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle A = 180° - 55,281° = 124,7182°$$

Para el $\angle B$:

$$m_1 = m_{AB} = -0,33656; m_2 = m_{BC} = 0,14933$$

$$tgB = \frac{014933 + 0,33656}{1 + (-0,33656)(0,14933)} = \frac{0,48589}{1 - 0,18723} = \frac{0,48589}{0,81277} \Rightarrow$$

$$tgB = 0,5978 \Rightarrow \angle B = 30,8709°$$

$$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 155,589° = 24,410°$$

En los ejercicios que siguen se da el ángulo que forman dos rectas y la pendiente de una de ellas. Hallar la pendiente de la otra.

9.- $\theta = 45°; m_1 = 7$

Solución:

$$tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow 1 = \frac{m_2 - 7}{1 + 7m_2} \Rightarrow 1 + 7m_2 = m_2 - 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6m_2 = -8 \Rightarrow m_2 = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

10.- $\theta = 60°; m_2 = \dfrac{5}{2}$

Solución:

$$tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\frac{5}{2} - m_1}{1 + (m_1)\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\frac{5-2m_1}{2}}{\frac{2+5m_1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5-2m_1}{2+5m_1} \Rightarrow 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}m_1 = 5 - 2m_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(5\sqrt{3} - 2\right)m_1 = 5 - 2\sqrt{3} \Rightarrow m_1 = \frac{5-2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-2} = \frac{\left(5-2\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3}+2\right)}{\left(5\sqrt{3}-2\right)\left(5\sqrt{3}+2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{25\sqrt{3} + 10 - 30 - 4\sqrt{3}}{75 - 4} = \frac{21\sqrt{3} - 20}{71}$$

11.- $\theta = 150°; m_1 = \dfrac{3}{2}$

Solución:

$$tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{3}{2} - m_1}{1 + (m_1)\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{3-2m_1}{2}}{\frac{2+3m_1}{2}} = \frac{3-2m_1}{2+3m_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}m_1 = 9 - 6m_1 \Rightarrow \left(6 - 3\sqrt{3}\right)m_1 = 9 + 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{9+\sqrt{3}}{6-3\sqrt{3}} = \frac{\left(9+2\sqrt{3}\right)\left(6+3\sqrt{3}\right)}{\left(6-3\sqrt{3}\right)\left(6+3\sqrt{3}\right)} = \frac{54 + 27\sqrt{3} + 12\sqrt{3} + 18}{9} = \frac{72 + 39\sqrt{3}}{9} = \frac{24 + 13\sqrt{3}}{3}$$

12.- $\theta = 165°, m_2 = -3$

Solución:

$$tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow -0,2679 = \frac{-3 - m_1}{1 - 3m_1} \Rightarrow$$

$$-0,2679 + 0,80384m_1 = -3 - m_1 \Rightarrow$$

$$1,8038m_1 = --2,7379 \Rightarrow m_1 = -\frac{2,7379}{1,8038} = -1,5146$$

13.- $\theta = 63°26'; m_1 = 5$

Solución:

$$\theta = 63°26' = 63,4333° \Rightarrow tg\theta = 1,9998 = \frac{m_2 - 5}{1 + 5m_2} \Rightarrow$$

$$1,9998 + 9,9992m_2 = m_2 - 5 \Rightarrow 8,9992m_2 = -6,9998 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 = -\frac{6,9998}{8,9992} = -0,77782 = -\frac{7}{9}$$

14.- Una recta pasa por los puntos $A(3,1)$ y $B(9,2)$. Otra pasa por $M(2,7)$ y por un punto $\boldsymbol{N}$ de abscisa 6. Determinar la ordenada de $\boldsymbol{N}$ sabiendo que las rectas $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{MN}$ se cruzan con un ángulo de $45°$.

Solución:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{9-3} = \frac{1}{6} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{6}$$

$$tg\theta_1 = \frac{m_1 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow tg45° = 1 = \frac{m_2 - \frac{1}{6}}{1 + \frac{m_2}{6}} = \frac{6m_2 - 1}{6 + m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + m_2 = 6m_2 - 1 \Rightarrow 5m_2 = 7 \Rightarrow m_2 = \frac{7}{5}$$

Ahora:

$$m_2 = \frac{7}{5} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{y_N - 7}{6-2} = \frac{y_N - 7}{4} = \frac{7}{5} \Rightarrow 5y_N - 35 = 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y_N = 63 \Rightarrow y_N = \frac{63}{5}$$

15.- La recta que pasa por los puntos $A(-1,2)$ y $B(-2,8)$ forma un ángulo de $45°$ con la que pasa por $M(1,-1)$ y un punto $\boldsymbol{N}$ de ordenada $-6.$ Determinar la abscisa de $\boldsymbol{N}$.

Solución:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-2}{-2+1} = -6 = m_1$$

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow tg45° = 1 = \frac{m_2 + 6}{1 - 6m_2} \Rightarrow 1 - 6m_2 = m_2 + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7m_2 = -5 \Rightarrow m_2 = -\frac{5}{7} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} \Rightarrow -\frac{5}{7} = \frac{-6+1}{x_N - 1} = \frac{-5}{x_N - 1} \Rightarrow 5x_N - 5 = 35 \Rightarrow x_N = \frac{40}{5} = 8$$

16.- La recta que pasa por los puntos $A(-3,-2)$ y $B(5,-4)$ forma un ángulo de $135°$ con la que pasa por $M(0,1)$ y un punto $\boldsymbol{N}$ de abscisa $-3.$ Hallar la ordenada de $\boldsymbol{N}$.

Solución:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4+2}{5+3} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4} = m_1$$

$$tg\theta_1 = tg135° = -1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{m_2 + \frac{1}{4}}{1 - \frac{m_2}{4}} = \frac{4m_2 + 1}{4 - m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 - 4 = 4m_2 + 1 \Rightarrow 3m_2 = -5 \Rightarrow m_2 = -\frac{5}{3}$$

$$m_2 = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = -\frac{5}{3} = \frac{y_N - 1}{-3-0} \Rightarrow 15 = 3y_N - 3 \Rightarrow y_N = \frac{18}{3} = 6$$

17.- La recta que pasa por los puntos $A(-2,6)$ y $B(-5,1)$ forma un ángulo de $71°34'$ con la que pasa por $M(3,8)$ y un punto $\boldsymbol{N}$ de ordenada 1. Determinar la abscisa de $\boldsymbol{N}$.

Solución:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-6}{-5+2} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} = m_1$$

$$tg\square\left(71°34'\right) = tg71{,}567 = 3{,}000$$

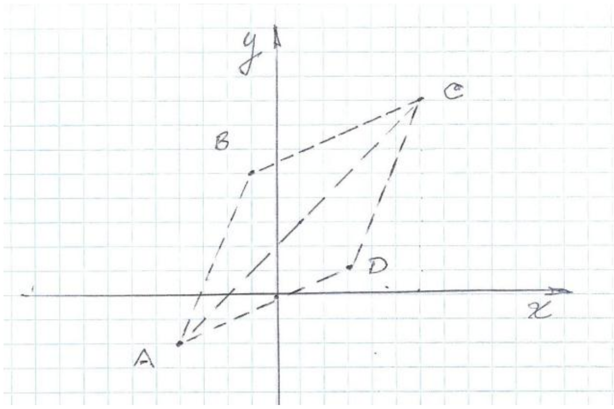
$$tg\square\ \theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow 3 = \frac{m_2 - \frac{5}{3}}{1 + \frac{5m_2}{3}} = \frac{3m_2 - 5}{3 + 5m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 + 15m_2 = 3m_2 - 5 \Rightarrow 12m_2 = -14 \Rightarrow m_2 = -\frac{7}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{6} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{1-8}{x_N - 3} \Rightarrow -\frac{7}{6} = \frac{-7}{x_N - 3} \Rightarrow 6 = x_N - 3 \Rightarrow x_N = 9$$

18.- Calcular el ángulo agudo del rombo de vértices $A(-4,-2); B(-1,5); C(6,8); D(3,1)$ y demostrar que la diagonal $\boldsymbol{AC}$ es bisectriz de ese ángulo.

Solución:



$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{8-5}{6+1}=\frac{3}{7}\rightarrow m_1$$

$$m_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{1-8}{3-6}=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}\rightarrow m_2$$

$$tg\angle C=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{\frac{7}{3}-\frac{3}{7}}{1+\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{7}{3}\right)}=\frac{\frac{49-9}{21}}{\frac{21+21}{21}}=\frac{40}{42}=0,95238\Rightarrow\angle C=43,6027°$$

Trabajando ahora con la diagonal $\boldsymbol{AC}$:

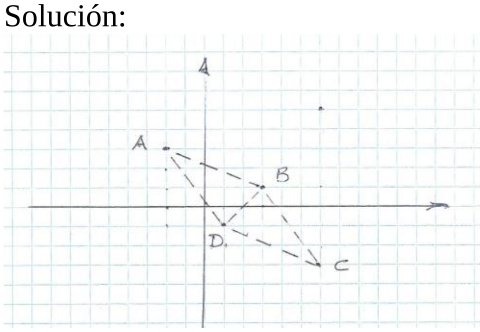
$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{8+2}{6+4}=1=m_2^{'}$$

$$tg\angle\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{m_2^{'}-m_1}{1+\left(m_1\right)\left(m_2^{'}\right)}=\frac{1-\frac{3}{7}}{1+\left(\frac{3}{7}\right)(1)}=\frac{\frac{4}{7}}{\frac{10}{7}}=\frac{2}{5}\Rightarrow\angle\left(\frac{C}{2}\right)=21,801°$$

Entonces, $\boldsymbol{AC}$ es bisectriz de $\angle C$

19.- Calcular el ángulo obtuso del rombo de vértices $A(-2,4);B(3,1);C(6,-4);D(1,-1)$ y demostrar que la diagonal $\boldsymbol{BD}$ es bisectriz de ese ángulo.

Solución:



$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{3+2} = -\frac{3}{5} \to m_2$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-4-1}{6-3} = -\frac{5}{3} \to m_1$$

$$tg\measuredangle\left(B_2\right) = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 \cdot m_2} = \frac{-\frac{5}{3}+\frac{3}{5}}{1+\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)} = \frac{\frac{-25+9}{15}}{2} = -\frac{16}{30} = -\frac{8}{15} \Rightarrow \measuredangle B_2 = 151{,}9275°$$

Ahora, consideramos la diagonal $\boldsymbol{BD}$:

En este caso:

$$m_{AB} = -\frac{3}{5} \to m_1$$

$$m_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{-1-1}{1-3} = \frac{-2}{-2} = 1 \to m_2^{'}$$

Luego:

$$tg\measuredangle\left(\frac{B_2}{2}\right) = \frac{m_2^{'} - m_1}{1+m_1 \cdot m_2^{'}} = \frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \measuredangle\left(\frac{B_2}{2}\right) = 75{,}963°$$

Entonces, $\boldsymbol{BD}$ es bisectriz de $\measuredangle B_2$.

20.- Las pendientes de los lados de un triángulo son $\frac{1}{2};1;2$. Demostrar que el triángulo es isósceles.

Solución:

$$m_{AB} = \frac{1}{2}; m_{BC} = 2; m_{CA} = 1$$

Para el $\measuredangle A$:

$$m_{AB} = m_1 = \frac{1}{2}$$

$$m_{CA} = m_2 = 1$$

$$tg\measuredangle A = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 \cdot m_2} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)(1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} = 0{,}33333 \Rightarrow tgA = 18{,}4347°$$

$\angle C$:

$m_{CA} = m_1 = 1$

Para el $m_{BC} = m_2 = 2$

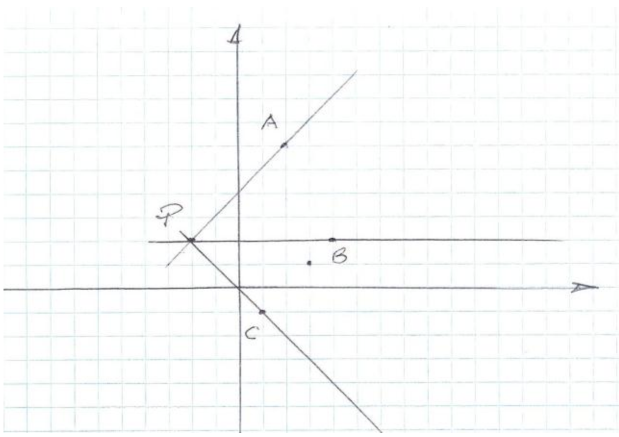
$$tg\angle C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{2-1}{1+(1)(2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow tg\angle C = 0,3333 \Rightarrow \angle C = 18,4347°$$

Entonces:

$\angle A = \angle C$, por tanto, es isósceles.

21.- El punto $P(-2,2)$ está unido por líneas rectas a los puntos: $A(2,6); B(4,2); C(1,-1)$. Demostrar que una de estas líneas rectas es bisectriz del ángulo formado por las otras dos.

Solución:



Graficando los puntos y obteniendo las diferentes líneas rectas que pasan por ***P***, se ve que ***PB*** es la posible bisectriz del $\angle APC$. Para probarlo, se encontrarán los valores de los ángulos $\angle APB; \angle BPC$ y si son iguales, quiere decir que ***PB*** es la bisectriz de $\angle APC$.

$$m_{PA} = \frac{y_A - y_P}{x_A - x_P} = \frac{6-2}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$m_{PB} = \frac{y_B - y_P}{x_B - x_P} = \frac{2-2}{4+2} = 0$$

$$m_{PC=} \frac{y_C - y_P}{x_C - x_P} = \frac{-1-2}{1+2} = -1$$

Ahora:

Para el $\angle APB$:

$m_{PA} = m_2 = 1$
$m_{PB} = m_1 = 0$
$tgAPB = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_1} = \frac{1-0}{1+(1)(0)} = 1 \Rightarrow \angle APB = 45°$

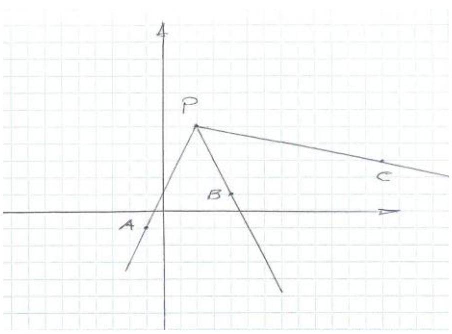
Para el $\angle BPC$:

$m_{PB} = m_2 = 0$
$m_{PC} = m_1 = -1$
$tg\angle BPC = \frac{m_2 - m_1}{1+(-1)(0)} = \frac{0-(-1)}{1} = 1 \Rightarrow \angle BPC = 45°$

Entonces, ***PB*** es la bisectriz del $\angle APC$.

22.- El punto $P(2,5)$ está unido por líneas rectas a los puntos $A(-1,-1); B(4,1); C(13,3)$. Demostrar que una de estas líneas rectas es bisectriz del ángulo formado por las otras dos.

Solución:



Graficando los puntos y obteniendo las diferentes líneas rectas que pasan por ***P***, se ve que ***PB*** es la posible bisectriz del $\angle APC$. Para probarlo, se encontrarán los valores de los ángulos $\angle APB; \angle BPC$ y si son iguales, quiere decir que ***PB*** es la bisectriz de $\angle APC$.

$m_{PA} = \frac{y_A - y_P}{x_A - x_P} = \frac{-1-5}{-1-2} = \frac{-6}{-3} = 2$
$m_{PB} = \frac{y_B - y_P}{x_B - x_P} = \frac{1-5}{4-2} = -\frac{4}{2} = -2$
$m_{PC=} \frac{y_C - y_P}{x_C - x_P} = \frac{3-5}{13-2} = -\frac{2}{11}$

Ahora:

Para el $\angle CPB$:

$m_{PC} = m_2 = -\dfrac{2}{11}$

$m_{PB} = m_1 = -2$

$$tgCPB = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-\dfrac{2}{11} + 2}{1 + \left(-\dfrac{2}{11}\right)(-2)} = \frac{\dfrac{20}{11}}{\dfrac{15}{11}} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \Rightarrow \angle\, CPB = 53{,}13°$$

Para el $\angle\, BPA$:

$m_{PB} = m_2 = -2$

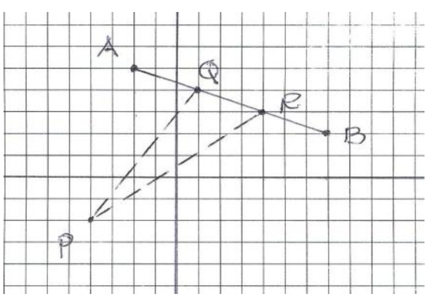
$m_{PA} = m_1 = 2$

$$tg\angle\, BPA = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-2 - 2}{1 + (2)(-2)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \angle\, BPA = 53{,}13°$$

Entonces, ***PB*** es la bisectriz del $\angle\, CPA$.

23.- Determinar el ángulo formado por las rectas que unen el punto $P(-4,-2)$ con los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $A(-2,5); B(7,2)$

Solución:



Para dividir en tres secciones iguales el segmento ***AB*** se necesitan dos puntos intermedios que denominaremos ***Q*** y ***R***.

Para encontrar el punto ***Q***:

$$\lambda_Q = \frac{1}{2}$$

$$x_Q = \frac{x_A + \lambda_Q \cdot x_B}{1+\lambda_Q} = \frac{-2+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 7}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{-4+7}{2}}{\frac{2+1}{2}} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y_Q = \frac{y_A + \lambda_Q \cdot y_B}{1+\lambda_Q} = \frac{5+\left(\frac{1}{2}\right)(2)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{6}{\frac{3}{2}} = 4 \Rightarrow Q(1,4)$$

Para encontrar el punto ***R***:

$$\lambda_R = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_R = \frac{x_A + \lambda_R \cdot x_B}{1+\lambda_R} = \frac{-2+(2)(7)}{1+2} = \frac{12}{3} = 4$$

$$y_R = \frac{y_A + \lambda_R \cdot y_B}{1+\lambda_R} = \frac{5+(2)(2)}{1+2} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow R(4,3)$$

Ahora, para calcular el $\angle QPR$:

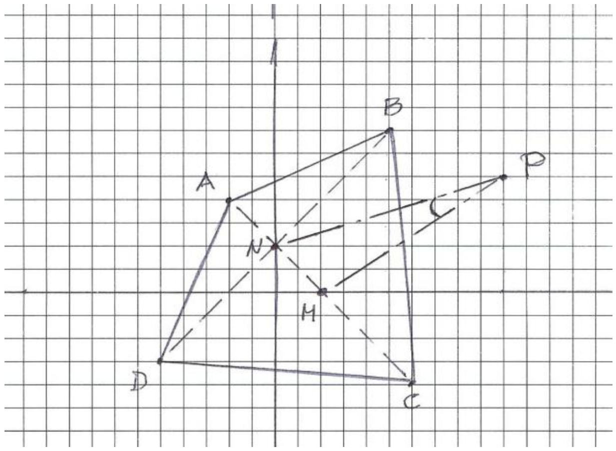
$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{4+2}{1+4} = \frac{6}{5} = m_2$$

$$m_{PR} = \frac{y_R - y_P}{x_R - x_P} = \frac{3+2}{4+4} = \frac{5}{8} = m_1$$

$$tg\angle QPR = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{6}{5}-\frac{5}{8}}{1+\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{5}{8}\right)} = \frac{\frac{48-25}{40}}{\frac{40+30}{40}} = \frac{23}{70} = 0,329 \Rightarrow \angle QPR = 18°11'$$

24.- Hallar el ángulo que forman que las líneas rectas que unen al punto $P(10,5)$ con los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero de vértices $A(-2,4); B(5,7); C(6,-4); D(-5,-3)$.

Solución:



Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de la diagonal $\boldsymbol{AC}$:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2; y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4-4}{2} = 0 \Rightarrow M(2,0)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BD}$**:**

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5-5}{2} = 0; y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{7-3}{2} = 2 \Rightarrow N(0,2)$$

Ahora, se deberá calcular el valor del $\measuredangle NPM$:

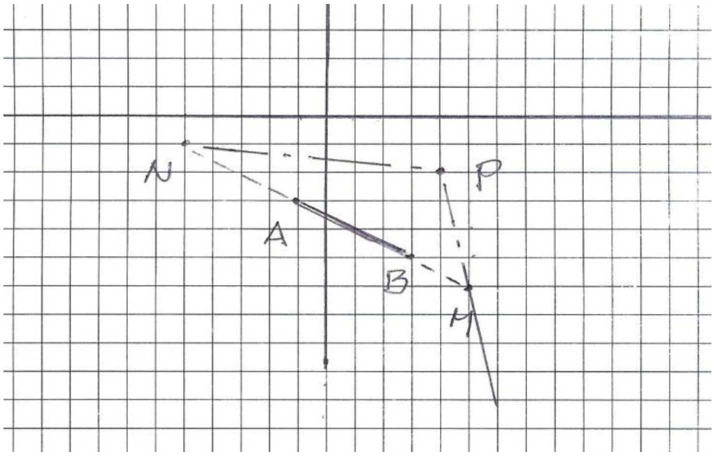
$$m_{PN} = m_1 = \frac{y_N - y_P}{x_N - x_P} = \frac{2-5}{0-10} = \frac{-3}{-10} = \frac{3}{10}$$

$$m_{PM} = m_2 = \frac{y_M - y_P}{x_M - x_P} = \frac{0-5}{2-10} = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$$

$$tg\measuredangle NPM = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{5}{8} - \frac{3}{10}}{1 + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{5}{8}\right)} = \frac{\frac{50-24}{80}}{\frac{80+15}{80}} = \frac{26}{95} = 0,273684 \Rightarrow \measuredangle NPM = 15,306º$$

25.- Determinar el ángulo formado por las líneas rectas que unen el punto $P(4,-2)$ con los dos puntos que dividen el segmento de extremos $A(-1,-3)$ y $B(3,-5)$ en razones de $\lambda_M = -3; \lambda_N = -\frac{1}{2}$.

Solución:



Debemos buscar primero las coordenadas de los puntos $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{N}$, los cuales por estar determinados por razones negativas son exteriores al segmento $\boldsymbol{AB}$.

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M \cdot x_B}{1+\lambda_M} = \frac{-1+(-3)(3)}{1-3} = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda_M \cdot y_B}{1+\lambda_M} = \frac{-3+(-3)(-5)}{1-3} = \frac{12}{-2} = -6 \Rightarrow M(5,-6)$$

$$x_N = \frac{x_A + \lambda_N \cdot x_B}{1+\lambda_N} = \frac{-1+\left(-\frac{1}{2}\right)(3)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{-2-3}{2}}{\frac{1}{2}} = -5$$

$$y_N = \frac{y_A + \lambda_N \cdot y_B}{1+\lambda_N} = \frac{-3+\left(-\frac{1}{2}\right)(-5)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{-6+5}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 \Rightarrow N(-5,-1)$$

Ahora, podemos trabajar para calcular el $\angle NPM$.

$$m_{PN} = m_1 = \frac{y_N - y_P}{x_N - x_P} = \frac{-1+2}{-5-4} = -\frac{1}{9}$$

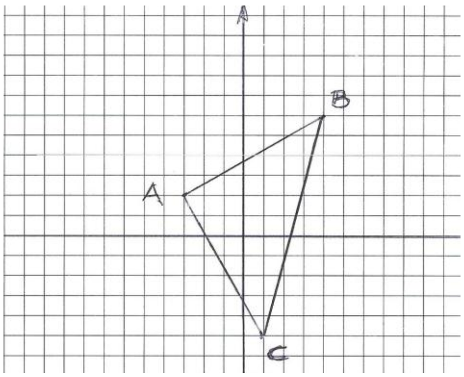
$$m_{PM} = m_2 = \frac{y_M - y_P}{x_M - x_P} = \frac{-6+2}{5-4} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$tg\angle NPM = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 \cdot m_2} = \frac{-4+\frac{1}{9}}{1+\left(-\frac{1}{9}\right)(-4)} = \frac{\frac{-36+1}{9}}{\frac{9+4}{9}} = -\frac{35}{13} \Rightarrow \angle NPM = 110,3764^{\circ}$$

Demostrar, hallando los ángulos de la base, que los triángulos cuyos vértices se dan son isósceles:

26.- $A(-3,2); B(4,6); C(1,-5)$

Solución:



En la gráfica podemos ver que $\boldsymbol{CB}$ es la base, entonces, debemos demostrar que $\angle B = \angle C$.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{4+3} = \frac{4}{7}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-5-6}{1-4} = \frac{-11}{-3} = \frac{11}{3}$$

$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{2+5}{-3-1} = -\frac{7}{4}$$

Luego:

Para el $\angle B$:

$$m_{AB} = m_1 = \frac{4}{7}$$

$$m_{BC} = m_2 = \frac{11}{3}$$

$$tg\angle B = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{11}{3} - \frac{4}{7}}{1 + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{11}{3}\right)} = \frac{\frac{77-12}{21}}{\frac{21+44}{21}} = \frac{65}{65} = 1,0 \Rightarrow \angle B = 45^o$$

Para el $\angle C$:

$$m_{BC} = m_1 = \frac{11}{3}$$

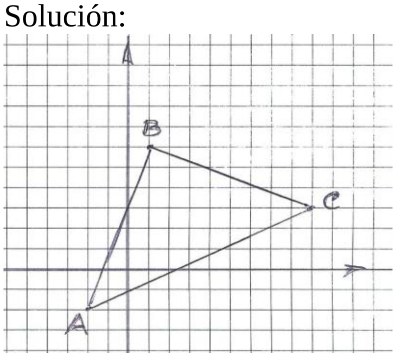
$$m_{CA} = m_2 = -\frac{7}{4}$$

$$tg\angle C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-\frac{7}{4} - \frac{11}{3}}{1 + \left(-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{11}{3}\right)} = \frac{\frac{-21-44}{12}}{\frac{12-77}{21}} = \frac{-65}{-65} = 1 \Rightarrow \angle C = 45º$$

Por tanto, el triángulo es isósceles.

27.- $A(-2,-2); B(1,6); C(9,3)$

Solución:



En la gráfica podemos ver que $\boldsymbol{AC}$ es la base, entonces, debemos demostrar que $\angle A = \angle C$.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6+2}{1+2} = \frac{8}{3}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3-6}{9-1} = -\frac{3}{8}$$

$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-2-3}{-2-9} = \frac{5}{11}$$

Para el $\angle A$:

$$m_{AB} = m_2 = \frac{8}{3}$$

$$m_{CA} = m_1 = \frac{5}{11}$$

$$tg\angle A = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{8}{3} - \frac{5}{11}}{1 + \left(\frac{5}{11}\right)\left(\frac{8}{3}\right)} = \frac{\frac{88-15}{33}}{\frac{33+40}{33}} = \frac{73}{73} = 1 \Rightarrow \angle A = 45º$$

Para el $\angle C$:

$$m_{BC} = m_1 = -\frac{3}{8}$$

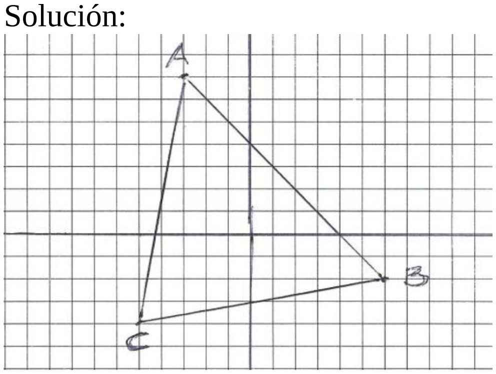
$$m_{CA} = m_2 = \frac{5}{11}$$

$$tg\angle C = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{5}{11} + \frac{3}{8}}{1 + \left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{11}\right)} = \frac{\frac{40+33}{88}}{\frac{88-15}{88}} = \frac{73}{73} = 1 \Rightarrow \angle C = 45^{\circ}$$

Por tanto, el triángulo es isósceles.

28.- $A(-3,7); B(6,-2); C(-5,-4)$

Solución:



En la gráfica podemos ver que $\boldsymbol{AB}$ es la base, entonces, debemos demostrar que $\angle A = \angle B$.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-7}{6+3} = \frac{-9}{9} = -1$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-4+2}{-5-6} = \frac{-2}{-11} = \frac{2}{11}$$

$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{7+4}{-3+5} = \frac{11}{2}$$

Para el $\angle B$:

$$m_{AB} = m_1 = -1$$

$$m_{BC} = m_2 = \frac{2}{11}$$

$$tg\angle B = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{2}{11} + 1}{1 + (-1)\left(\frac{2}{11}\right)} = \frac{\frac{13}{11}}{\frac{9}{11}} = \frac{13}{9} = 1,444 \Rightarrow \angle B = 55,2965º$$

Para el $\angle A$:

$$m_{AB} = m_2 = -1$$

$$m_{CA} = m_1 = \frac{11}{2}$$

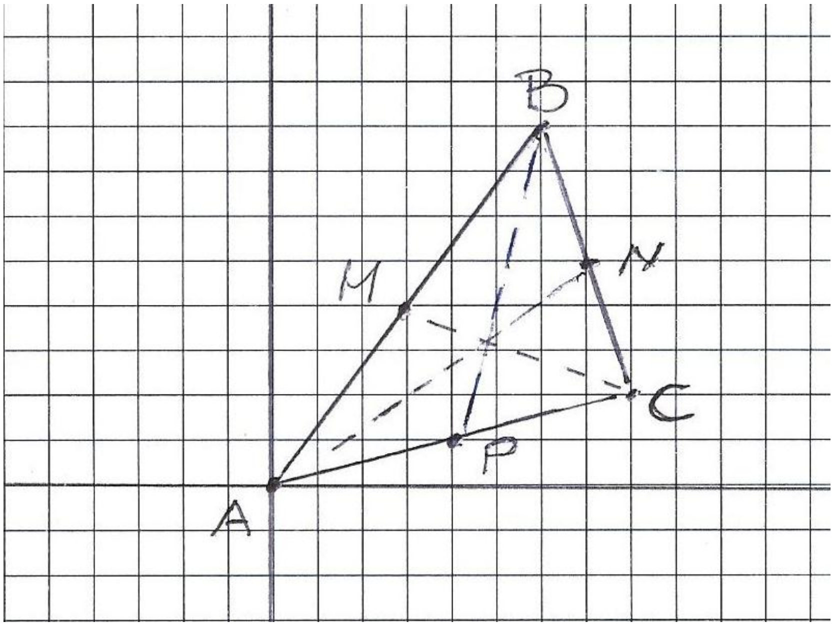
$$tg\angle A = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-1 - \frac{11}{2}}{1 + (-1)\left(\frac{11}{2}\right)} = \frac{-\frac{13}{2}}{-\frac{9}{2}} = \frac{13}{9} = 1,444 \Rightarrow \angle A = 55,2965º$$

Por tanto, el triángulo es isósceles.

Calcular el ángulo que forma cada una de las medianas con el lado sobre el cual incide en el triángulo de vértices:

29.- $A(0,0); B(6,8); C(8,2)$

Solución:



Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+6}{2} = 3;\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+8}{2} = 4 \Rightarrow M(3,4)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{6+8}{2} = 7;\ y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{8+2}{2} = 5 \Rightarrow N(7,5)$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$:

$$x_P = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{8+0}{2} = 4;\ y_P = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{2+0}{2} = 1 \Rightarrow P(4,1)$$

Se calculan ahora todas las pendientes de las líneas rectas involucradas en el problema:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{8-0}{6-0}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$
$$m_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{2-8}{8-6}=\frac{-6}{2}=-3$$
$$m_{CA}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{0-2}{0-8}=\frac{1}{4}$$
$$m_{CM}=\frac{y_M-y_C}{x_M-x_C}=\frac{4-2}{3-8}=\frac{2}{-5}=-\frac{5}{2}$$
$$m_{AN}=\frac{y_N-y_A}{x_N-x_A}=\frac{5-0}{7-0}=\frac{5}{7}$$
$$m_{BP}=\frac{y_P-y_B}{x_P-x_B}=\frac{1-8}{4-6}=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}$$

Ahora, se encuentran los valores de los siguientes ángulos:

Para el $\angle ANB$:

$$m_{BC}=m_1=-3$$
$$m_{AN}=m_2=\frac{5}{7}$$
$$tg\angle ANB=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{\frac{5}{7}+3}{1+(-3)\left(\frac{5}{7}\right)}=\frac{\frac{26}{7}}{\frac{7-15}{7}}=-\frac{26}{8}=-3,25\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\angle ANB=107,1027^{\circ}\Rightarrow\angle ANC=72,897^{\circ}$$

Para el $\angle BPC$:

$$m_{CA}=m_1=\frac{1}{4}$$
$$m_{BP}=m_2=\frac{7}{2}$$
$$tg\angle BPC=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}=\frac{\frac{7}{2}-\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{28-2}{8}}{\frac{8+7}{8}}=\frac{26}{15}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\angle BPC=60,018^{\circ}\Rightarrow\angle APB=119,981^{\circ}$$

Para el $\angle CMA$:

$$m_{AB} = m_1 = \frac{4}{3}$$

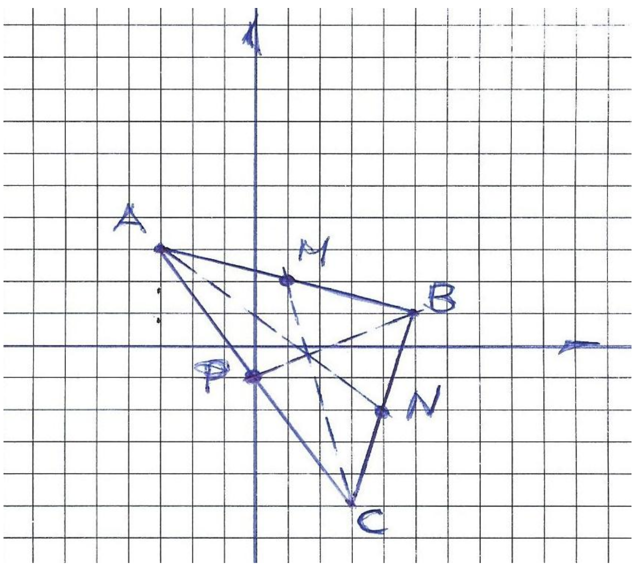
$$m_{CM} = m_2 = -\frac{5}{2}$$

$$tg\angle CMA = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{5}{2}}{1 - \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)} = -\frac{23}{14} = -1,6428 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle CMA = 121,329^{o} \Rightarrow \angle BMC = 58,67^{o}$$

30.- $A(-3,3); B(5,1); C(3,-5)$

Solución:



Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1; y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \Rightarrow M(1,2)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5+3}{2} = 4; y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1-5}{2} = -2 \Rightarrow N(4,-2)$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$:

$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0; y_P = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3-5}{2} = -1 \Rightarrow P(0,-1)$$

Se calculan ahora todas las pendientes de las líneas rectas involucradas en el problema:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-3}{5+3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-5-1}{3-5} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{3+5}{-3-3} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$$

$$m_{AN} = \frac{y_N - y_A}{x_N - x_A} = \frac{-2-3}{4+3} = -\frac{5}{7}$$

$$m_{BP} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{-1-1}{0-5} = \frac{2}{5}$$

$$m_{CM} = \frac{y_M - y_C}{x_M - x_C} = \frac{2+5}{1-3} = -\frac{7}{2}$$

Ahora, se encuentran los valores de los siguientes ángulos:

Para el $\measuredangle ANB$:

$$m_{AN} = m_2 = -\frac{5}{7}$$

$$m_{BC} = m_1 = 3$$

$$tg\measuredangle ANB = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-\frac{5}{7} - 3}{1 + \left(-\frac{5}{7}\right)(3)} = \frac{\frac{-5-21}{7}}{\frac{7-15}{7}} = \frac{-26}{-8} = 3,25 \Rightarrow$$

$$\measuredangle ANB = 72,897° \Rightarrow \measuredangle ANC = 107,103°$$

Para el $\measuredangle CMB$:

$$m_{AB} = m_2 = -\frac{1}{4}$$

$$m_{CM} = m_1 = -\frac{7}{2}$$

$$tg\measuredangle CMB = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{7}{2}}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)} = \frac{\frac{-2+28}{8}}{\frac{8+7}{8}} = \frac{26}{15} = 1,7333 \Rightarrow \measuredangle CMB = 60,017°$$

Para el $\measuredangle BPC$:

$$m_{CA} = m_1 = -\frac{4}{3};$$

$$m_{BP} = m_2 = \frac{2}{5}$$

$$tg\angle BPC = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{6+20}{15}}{\frac{15-8}{15}} = \frac{26}{7} = 3{,}7142 \Rightarrow$$

$$\angle BPC = 74{,}9326^\circ \Rightarrow \angle BPA = 105{,}0674^\circ$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41D.

Tema: La línea recta. Pendiente. (Hoffmann, 5to año-Ejercicio # 93).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde ***m*** es la pendiente de la línea recta y ***b*** es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las ***y***.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ siendo ***a*** el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las ***x*** y ***b*** es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las ***y***.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ***ecuación de la pendiente*** de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Conociendo un solo punto y la ***pendiente***, se puede escribir:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x\cos\theta + ysen\theta - \rho = 0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta = 90^{o} \Rightarrow tg\theta = \infty \Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(m_1\right)\left(m_2\right)=-1 \Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida*** ***d*** entre un punto $P_0\left(x_0, y_0\right)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l \equiv Ax+By+C=0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{\left(P_0, l\right)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo a como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0; B=0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax+By+C_1; l_2 \equiv Ax+By+C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{l_1,l_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Las coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada son:

$P(x,y) = \left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ donde $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$ y siendo orientados los segmentos considerados.

PREGUNTAS:

PENDIENTE DE UNA LINEA RECTA.

Determinar la pendiente y el ángulo que forman con el eje de las abscisas los segmentos cuyos extremos son:

1.- $A(4,1); B(7,5)$

Solución:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} =$$

$$m = \frac{5-1}{7-4} = \frac{4}{3} = 1,3333 \Rightarrow \alpha = tg^{-1}(1,3333) = 53,1294º$$

2.- $M(-3,5); N(2,-2)$

Solución:

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} =$$

$$m = \frac{-2-5}{2+3} = -\frac{7}{5} = -1,4 \Rightarrow \alpha = tg^{-1}(-1,4) = 180º - 54,462º = 125,538º$$

3.- $P = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{3}\right); Q\left(\frac{3}{4}, \frac{11}{6}\right)$

Solución:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{11}{6}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{7}{2}}=\frac{\frac{11+2}{6}}{\frac{3+14}{4}}=\frac{\frac{13}{3}}{\frac{17}{2}}=\frac{26}{51}=0,509\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha=tg^{-1}(0,509)=26,976º$$

4.- $R\left(1,\frac{11}{5}\right);S\left(\frac{17}{5},-3\right)$

Solución:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-\frac{11}{5}}{\frac{17}{5}-1}=\frac{-\frac{15+11}{5}}{\frac{17-5}{5}}=-\frac{26}{12}=-\frac{13}{6}=-2,166\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha=tg^{-1}(-2,166)=180º-65,218º=114,781º$$

5.- $A\left(2,\sqrt{3}\right);B(1,0)$

Solución:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-\sqrt{3}}{1-2}=\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$\alpha=tg^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=60º$$

6.- $C(-1,4);D(6,-3)$

Solución:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-4}{6+1}0-\frac{7}{7}=-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\alpha=tg^{-1}(-1)=180º-45º=135º$$

Determinar la pendiente de cada uno de los tres lados del triángulo cuyos vértices son:

7.- $A(7,3);B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right);C(0,8)$

Solución:

Pendiente de $\boldsymbol{AB}$:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{1}{3} - 3}{\frac{1}{2} - 7} = \frac{\frac{1-9}{3}}{\frac{1-14}{2}} = -\frac{16}{39}$$

Pendiente de $\boldsymbol{BC}$:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{8 - \frac{1}{3}}{0 - \frac{1}{2}} = -\frac{46}{3}$$

Pendiente de $\boldsymbol{CA}$:

$$m_{CA} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{3-8}{7-0} = -\frac{5}{7}$$

8.- $D(-1,5); E(4,-1); F(-1,1)$

Solución:

Pendiente de $\boldsymbol{DE}$:

$$m_{DE} = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{-1-5}{4+1} = -\frac{6}{5}$$

Pendiente de $\boldsymbol{EF}$:

$$m_{EF} = \frac{y_F - y_E}{x_F - X_E} = \frac{1+1}{-1-4} = -\frac{2}{5}$$

Pendiente de $\boldsymbol{FD}$:

$$m_{FD} = \frac{y_D - y_F}{x_D - x_F} = \frac{5-1}{-1+1} = \frac{4}{0} = \infty$$

9.- $M(-3,-2); N(6,3); P(3,-2)$

Solución:

Pendiente de $\boldsymbol{MN}$:

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{3+2}{6+3}=\frac{5}{9}$$

Pendiente de ***NP***:

$$m_{NP}=\frac{y_P-y_N}{x_P-x_N}=\frac{-2-3}{3-6}=\frac{5}{3}$$

Pendiente de ***PM***:

$$m_{PM}=\frac{y_M-y_P}{x_M-x_P}=\frac{-2+2}{-3-3}=\frac{0}{-6}=0$$

10.- Un extremo del segmento ***AB*** es $A(-4,-3)$. Determinar la ordenada de ***B*** sabiendo que su abscisa es 2 y que la pendiente de ***AB*** es $\frac{9}{5}$.

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow\frac{9}{5}=\frac{y_B+3}{2+4}=\frac{y_A+3}{6}\Rightarrow 54=5y_B+15\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5y_B=54-15=39\Rightarrow y_B=\frac{39}{5}$$

11.- Un extremo del segmento ***MN*** es $N(4,-1)$. Determinar la abscisa de ***M*** sabiendo que su ordenada es 5 y que la pendiente de ***MN*** es $-\frac{12}{5}$.

Solución:

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}\Rightarrow-\frac{12}{5}=\frac{-1-5}{4-x_M}=\frac{-6}{4-x_M}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -48+12x_M=-30\Rightarrow 12x_M=48-30=18\Rightarrow x_M=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$$

12.- El segmento ***AB*** forma con el eje de las abscisas un ángulo de 45º. Determinar la ordenada de ***A*** si su abscisa es -3 y el otro extremo es $B(4,11)$.

Solución:

$$m_{AB} = tg 45º = 1$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow 1 = \frac{11 - y_A}{4+3} \Rightarrow 7 = 11 - y_A \Rightarrow y_A = 11 - 7 = 4$$

13.- ¿Cuál debe ser la abscisa de un punto ***B*** de ordenada 7, si determina con $A(3,-7)$ un segmento que forma un ángulo de 135º con el eje horizontal?.

Solución:

$$m_{AB} = tg 135º = -1$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow -1 = \frac{7+7}{x_B - 3} \Rightarrow -x_B + 3 = 14 \Rightarrow x_B = -11$$

Un segmento tiene como extremos un punto $A(-4,1)$ y un punto ***B*** de ordenada 5. ¿Cuál debe ser la abscisa de ***B*** para que el segmento forme con el eje de las abscisas un ángulo de:

14.- 60º?.

Solución:

$$m_{AB} = tg 60º = \sqrt{3}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{5-1}{x_B + 4} \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right) x_B + 4\sqrt{3} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{3}\right) x_B = 4 \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right) \Rightarrow x_B = \frac{4\left(1 - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{4\left(\sqrt{3} - 3\right)}{3}$$

15.- 120º?.

Solución:

$$m_{AB} = tg 120º = -\sqrt{3}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow -\sqrt{3} = \frac{5-1}{x_B + 4} \Rightarrow -\sqrt{3} x_B - 4\sqrt{3} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} \cdot x_B = 4\left(1 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow x_B = -\frac{4\left(1 + \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} = -\frac{4\left(\sqrt{3} + 3\right)}{3}$$

16.- 22º30´?

Solución:

$$m_{AB} = tg22,5º = 0,41421$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow 0,41421 = \frac{5-1}{x_B + 4} \Rightarrow 0,41421x_B + 1,6568 = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_B = \frac{4 - 1,6568}{0,41421} = 5,6637$$

17.- 150º?

Solución:

$$m_{AB} = tg150º = -0,577$$
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow -0,577 = \frac{5-1}{x_B + 4} \Rightarrow -0,577x_B - 2,3094 = 4 \Rightarrow$$
$$-0,577x_B = 4 + 2,3094 \Rightarrow x_B = -10,9348$$

18.- 15º?

Solución:

$$m_{AB} = tg15º = 0,2679$$
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow 0,2679 = \frac{5-1}{x_B + 4} \Rightarrow 0,2679x_B + 1,0716 = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_B = \frac{4 - 1,0716}{0,2679} = 10,93$$

19.- 67º30´?

Solución:

$$m_{AB} = tg67,5º = 2,41421$$
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow 2,41421 = \frac{5-1}{x_B + 4} \Rightarrow 2,41421x_B + 9,656804 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_B = \frac{4 - 9,656804}{2,41421} = -2,3431$$

20.- 105º?

Solución:

$m_{AB} = tg105^{o} = -3,732$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow -3,732 = \frac{5-1}{x_B + 4} \Rightarrow -3,732x_B - 14,928 = 4 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_B = -5,071$

Demostrar que los cuadriláteros cuyos vértices se dan en los siguientes ejercicios son paralelogramos:

21.- $A(-1,1); B(-3,-2); C(4,1); D(6,4)$

Solución: Si se trata de un paralelogramo, sus lados opuestos tiene la misma pendiente, por tanto, son paralelos.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-1}{-3+1} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2};$$

$$m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{4-1}{6-4} = \frac{3}{2} \Rightarrow AB \parallel CD$$

También:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1+2}{4+3} = \frac{3}{7};$$

$$m_{DA} = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{1-4}{-1-6} = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7} \Rightarrow BC \parallel DA$$

22.- $M\left(0,\frac{3}{2}\right); N\left(-2,-\frac{3}{2}\right); P\left(5,\frac{3}{2}\right); Q\left(7,\frac{9}{2}\right)$

Solución: Si se trata de un paralelogramo, sus lados opuestos tiene la misma pendiente, por tanto, son paralelos.

$$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{-2-0} = \frac{3}{2}$$

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}}{7-5} = \frac{3}{2} \Rightarrow MN \parallel PQ$$

También:

$$m_{NP}=\frac{y_P-y_N}{x_P-x_N}=\frac{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}{5+2}=\frac{3}{7};$$

$$m_{QM}=\frac{y_M-y_Q}{x_M-x_Q}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{9}{2}}{0-7}=\frac{-3}{-7}=\frac{3}{7}\Rightarrow NP\parallel QM$$

23.- $R(0,0);S(a,0);T(a+b,c);V(b,c)$

Solución: Si se trata de un paralelogramo, sus lados opuestos tiene la misma pendiente, por tanto, son paralelos

$$m_{RS}=\frac{y_S-y_R}{x_S-x_R}=\frac{0-0}{a-0}=0;$$

$$m_{TV}=\frac{y_V-y_T}{x_V-x_T}=\frac{c-c}{b-(a+b)}=\frac{0}{a}==0\Rightarrow RS\parallel TV$$

También:

$$m_{ST}=\frac{y_T-y_S}{x_T-x_S}=\frac{c-0}{(a+b)-a}=\frac{c}{b};$$

$$m_{VR}=\frac{y_R-y_V}{x_R-x_V}=\frac{0-c}{0-b}=\frac{c}{b}\Rightarrow ST\parallel VR$$

24.- Demostrar que la recta que pasa por los puntos $A(-1,3);B(5,6)$ forma con el eje de las abscisas un ángulo igual a la mitad del que forma la recta que pasa por $M(-3,-2);N(0,2)$.

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{6-3}{5+1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=26,565^{o}$$

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{2+2}{0+3}=\frac{4}{3}\Rightarrow \beta=tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)=53,13^{o}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha=\frac{\beta}{2}$$

Demostrar, utilizando el concepto de pendiente, que los tres puntos cuyas coordenadas se dan son colineales.

Nota: Dados tres puntos, éstos son colineales si pariendo de uno de ellos, del mismo punto, la pendiente de cada uno de los otros dos con el primero son iguales.

Eso quiere decir, que dados ***A***, ***B*** y ***C***, éstos son colineales si $m_{AB} = m_{AC}$.

25.- $A(1,1); B(3,2); C(9,5)$

Solución:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$
$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{5-1}{9-1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{AB} = m_{AC}$$

26.- $M(-3,8); N(0,-2); P\left(\frac{3}{2},-7\right)$

Solución:

$$m_{MN} = \frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{-2-8}{0+3} = -\frac{10}{3}$$
$$m_{MP} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{-7-8}{\frac{3}{2}-3} = \frac{-15}{\frac{3}{2}+3} = \frac{-30}{9} = -\frac{10}{3} \Rightarrow m_{MN} = m_{MP}$$

27.- $R(-5,-4); S\left(-\frac{5}{2},-3\right); T\left(\frac{15}{2},1\right)$

Solución:

$$m_{RS} = \frac{y_S - y_R}{x_S - x_R} = \frac{-3+4}{-\frac{5}{2}+5} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5};$$
$$m_{RT} = \frac{y_T - y_R}{x_T - x_R} = \frac{1+4}{\frac{15}{2}+5} = \frac{5}{\frac{25}{2}} = \frac{2}{5} \Rightarrow m_{RS} = m_{RT}$$

28.- $A(-3,-1); B\left(-3+\sqrt{2},-1+\sqrt{3}\right); C\left(-1,-1+\sqrt{6}\right)$

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)+1}{\left(-3+\sqrt{2}\right)+3}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2};$$

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{\left(-1+\sqrt{6}\right)+1}{-1+3}=\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow m_{AB}=m_{AC}$$

29.- $M(4,5);N\left(4+2\sqrt{3},5-2\sqrt{6}\right);P\left(4+12\sqrt{2},-19\right)$

Solución:

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{\left(5-2\sqrt{6}\right)-5}{\left(4+2\sqrt{3}\right)-4}=\frac{-2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=-\sqrt{2}$$

$$m_{MP}=\frac{y_P-y_M}{x_P-x_M}=\frac{-19-5}{\left(4+12\sqrt{2}\right)-4}=\frac{-24}{12\sqrt{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}\Rightarrow m_{MN}=m_{MP}$$

En cada uno de los siguientes casos se dan cuatro puntos. Uno de ellos es chimbo, no pertenece a la recta a la cual pertenecen los otros tres. Descúbralo utilizando el concepto de pendiente.

Si pertenecen a la misma recta, cada par de puntos debe tener la misma pendiente. Se debe entonces verificar las pendientes de todos los posibles pares de puntos:

30.- $A(-5,1);B(-3,4);C(1,10);D(3,12)$

Solución:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{4-1}{-3+5}=\frac{3}{2}$$

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{10-1}{1+5}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$m_{AD}=\frac{y_D-y_A}{x_D-x_A}=\frac{12-1}{3+5}=\frac{11}{8}\Rightarrow m_{AD}\neq m_{AB}\Rightarrow$$

El punto $\boldsymbol{D}$ no pertenece a la misma recta que los otros tres puntos.

31.- $M(-8,10);N(-4,-4);P(-2,-2);Q(2,-10)$

Solución:

$$m_{MN}=\frac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=\frac{-4-10}{-4+8}=\frac{-14}{4}=-\frac{7}{2}$$
$$m_{MP}=\frac{y_P-y_M}{x_P-x_M}=\frac{-2-10}{-2+8}=\frac{-12}{6}=-2\Rightarrow m_{MP}\neq m_{MN}$$
$$m_{MQ}=\frac{y_Q-y_M}{x_Q-x_M}=\frac{-10-10}{2+8}=-2\Rightarrow m_{MQ}=m_{MP}\neq m_{mB}\Rightarrow$$
El punto ***N*** no pertenece a la misma recta que los otros tres puntos.

32.- $R\left(-7\sqrt{2},9\sqrt{3}\right);S\left(-6\sqrt{2},7\sqrt{3}\right);C\left(2-7\sqrt{2},9\sqrt{3}-3\sqrt{6}\right);$
$V\left(2\sqrt{6}-7\sqrt{2},-12+9\sqrt{3}\right)$

Solución:

$$m_{RS}=\frac{y_S-y_R}{x_S-x_R}=\frac{7\sqrt{3}-9\sqrt{3}}{-6\sqrt{2}+7\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=-\sqrt{6}$$
$$m_{RT}=\frac{y_T-y_R}{x_T-x_R}=\frac{\left(9\sqrt{3}-3\sqrt{6}\right)-9\sqrt{3}}{\left(2-7\sqrt{2}\right)+7\sqrt{2}}=\frac{-3\sqrt{6}}{2}\Rightarrow m_{RS}\neq m_{RT}$$
$$m_{RV}=\frac{y_V-y_R}{x_V-x_R}=\frac{\left(-12+9\sqrt{3}\right)-9\sqrt{3}}{\left(2\sqrt{6}-7\sqrt{2}\right)+7\sqrt{2}}=\frac{-12}{2\sqrt{6}}=-\sqrt{6}\Rightarrow m_{RS}=m_{RV}\neq m_{RT}$$
El punto ***T*** no pertenece a la misma recta que los otros tres puntos.

Determinar el valor de *k* para que los tres puntos que se dan sean colineales:

33.- $A(0,1);B(2,7);C(6,k)$

Solución:

Para que los tres puntos sean colineales se debe cumplir que $m_{AB}=m_{AC}$.

Entonces:
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}\Rightarrow\frac{7-1}{2-0}=\frac{k-1}{6-0}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3=\frac{k-1}{6}\Rightarrow 18=k-1\Rightarrow k=19$$

34.- $D(-1,5);E(k,9);F(5,11)$

Solución:

$m_{DE}=m_{DF}$

$$\frac{9-5}{k+1}=\frac{11-5}{5+1}=1\Rightarrow 4=k+1\Rightarrow k=3$$

35.- $K(0,k);L(1,1);M(3,-1)$

Solución:

$m_{MK}=m_{ML}$

$$\frac{y_K-y_M}{x_K-x_M}=\frac{y_L-y_M}{x_L-x_M}\Rightarrow\frac{k+1}{0-3}=\frac{1+1}{1-3}=-1\Rightarrow k+1=3\Rightarrow k=2$$

36.- $P\left(-1,-2+2\sqrt{6}\right);Q\left(k,-2+2\sqrt{3}\right);R(5,-2)$

Solución:

$m_{PQ}=m_{PR}$

$$\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\frac{y_R-y_P}{x_R-x_P}\Rightarrow$$

$$\frac{\left(-2+2\sqrt{3}\right)-\left(-2+2\sqrt{6}\right)}{k+1}=\frac{-2-\left(-2+2\sqrt{6}\right)}{5+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{k+1}=\frac{-2\sqrt{6}}{6}\Rightarrow 12\sqrt{3}-12\sqrt{6}=-2k\sqrt{6}-2\sqrt{6}\Rightarrow$$

$$12\sqrt{3}-10\sqrt{6}=-2k\sqrt{6}\Rightarrow 6\sqrt{3}-5\sqrt{6}=-k\sqrt{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=5-6\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=5-\sqrt{18}=5-3\sqrt{2}$$

37.- Un punto $\boldsymbol{P}$ dista 5 unidades del origen de coordenadas y la pendiente de la recta que lo une a $A(6,1)$ es -1. Determinar sus coordenadas.

Solución:

$$d_{OP}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=5\Rightarrow x^2+y^2=25\rightarrow(I)$$

$$m_{AP}=\frac{y-1}{x-6}=-1\Rightarrow y-1=-x+6\Rightarrow y=-x+7\rightarrow(II)$$

Introduciendo el valor de ***y*** en (II) en la ecuación (I):

$$x^2+(-x+7)^2=25 \Rightarrow x^2+x^2-14x+49=25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2-14x+24=0 \Rightarrow x^2-7x+12=0 \Rightarrow (x-3)(x-4)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=3; x_2=4$$

Introduciendo los valores de ***x*** en (II):

$$P_1(3,4); P_2(4,3)$$

38.- Un punto ***P*** está a una distancia de $2\sqrt{13}$ del punto $A(-3,1)$ y la recta que lo une a $B(-2,4)$ forma con el eje de abscisas un ángulo de $45°$. Determinar las coordenadas de ***P***.

Solución:

$$d_{AP}=\sqrt{(x_P+3)^2+(y_P-1)^2}=2\sqrt{13} \Rightarrow (x_P+3)^2+(y_P-1)^2=52 \to (I)$$
$$m_{PB}=tg45°=1=\frac{y_B-y_P}{x_B-x_P}=\frac{4-y_P}{-2-x_P} \Rightarrow 4-y_P=-2-x_P \Rightarrow y_P=x_P+6 \to (II)$$

Introduciendo ahora el valor de y_P en (II), en la ecuación (I):

$$(x_P+3)^2+\left[(x_P+6)-1\right]^2=52 \Rightarrow (x_P+3)^2+(x_P+5)^2=52$$
$$(x_P^2+6x_P+9)+x_P^2+10x_P+25=52 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x_P^2+16x_P-18=0 \Rightarrow x_P^2+8x_P-9=0 \Rightarrow (x_P-1)(x_P+9) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{P1}=1 : x_{P2}=-9$$

Sustituyendo estos valores encontrados de x_P en la ecuación (II):

$$y_P=x_P+6$$
$$y_{P1}=1+6=7 \Rightarrow P_1(1,7)$$
$$y_{P2}=-9+6=-3 \Rightarrow P_2(-9,-3)$$

39.- Hallar las coordenadas del punto ***P*** sabiendo que está a 7 unidades del origen y que determina un segmento de pendiente $\frac{1}{2}$ con el punto $A(3,4)$.

Solución:

$$d_{OP}=\sqrt{x_P^2+y_P^2}=7\Rightarrow x_P^2+y_P^2=49\rightarrow(I)$$

$$m_{AP}=\frac{y_P-y_A}{x_P-x_A}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{y_P-4}{x_P-3}\Rightarrow x_P-3=2y_P-8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_P=2y_P-5\rightarrow(II)$$

Introduciendo el valor de x_P proveniente de (II), en la ecuación (I):

$$(2y_P-5)^2+y_P^2=49\Rightarrow\left(4y_P^2-20y_P+25\right)+y_P^2=49\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5y_P^2-20y_P-24=0\Rightarrow y_P=\frac{20\pm\sqrt{400+480}}{10}=\frac{20\pm10\sqrt{8,8}}{10}=2\pm\sqrt{8,8}$$

Introduciendo este valor de y_P en (II):

$$x_P=2y_P-5\Rightarrow 2\left(2\pm\sqrt{8,8}\right)-5=-1\pm2\sqrt{8,8}$$

$$\Rightarrow P\left(-1\pm2\sqrt{8,8},2\pm\sqrt{8,8}\right)$$

40.- Hallar las coordenadas de un punto ***P***, equidistante de los puntos $A(2,1)$ y $B(-4,3)$, que con el punto $Q(1,-1)$ determina un segmento de pendiente $\frac{2}{3}$.

Solución:

$$d_{AP}=d_{BP}\Rightarrow(x_P-2)^2+(y_P-1)^2=(x_P+4)^2+(y_P-3)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_P^2-4x_P+4+y_P^2-2y_P+1=x_P^2+8x_P+16+y_P^2-6y_P+9\Rightarrow$$

$$-12x_P+4y_P=20\Rightarrow-3x_P+y_P=5\rightarrow(I)$$

Luego:

$$m_{PQ}=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{-1-y_P}{1-x_P}\Rightarrow 2-2x_P=-3-3y_P\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y_P-2x_P=-5\rightarrow(II)$$

$$3\cdot(I)-(II)\Rightarrow-9x_P+2x_P=15+5=20\Rightarrow x_P=-\frac{20}{7}$$

Introduciendo ahora este valor de x_P en (I):

$$-3x_P+y_P=5\Rightarrow-3\left(-\frac{20}{7}\right)+y_P=5\Rightarrow y_P=5-\frac{60}{7}=-\frac{25}{7}\Rightarrow P\left(-\frac{20}{7},-\frac{25}{7}\right)$$

41.- Hallar las coordenadas de un punto P sobre la mediatriz del segmento de extremos $A(0,1);B(3,8)$ que determina con el punto $Q(4,3)$ un segmento de pendiente $-\frac{1}{2}$.

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}; y_M = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2}$$

La pendiente de AB:

$$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m_1 = \frac{8-1}{3-0} = \frac{7}{3}$$

La mediatriz de $\boldsymbol{AB}$ es perpendicular al segmento $\boldsymbol{AB}$, y pasa por el punto $\boldsymbol{M}$; por tanto, se cumple que si m_2 es la pendiente de la mediatriz mencionada, entonces:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{7}{3}} = -\frac{3}{7}$$

Como $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{M}$ son puntos de la mediatriz, se puede escribir que:

$$m_2 = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} \Rightarrow -\frac{3}{7} = \frac{y_P - \frac{9}{2}}{x_P - \frac{3}{2}} \Rightarrow -3x_P + \frac{9}{2} = 7y_P - \frac{63}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{63+9}{2} = 36 = 7y_P + 3x_P \rightarrow (I)$$

Luego, consideramos el segmento $\boldsymbol{PQ}$:

$$m_{QP} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{y_P - 3}{x_P - 4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x_P + 4 = 2y_P - 6 \Rightarrow 2y_P + x_P = 10 \rightarrow (II)$$

Ahora:

$$(I) - 3 \cdot (II) \Rightarrow y_P = 36 - 30 = 6$$

Entonces, sustituimos este valor de y_P en la ecuación (I):

$$7y_P + 3x_P = 36 \Rightarrow 7 \cdot 6 + 3x_P = 36 \Rightarrow 42 - 36 = -3x_P \Rightarrow x_P = -2 \Rightarrow P(-2,6)$$

42.- El punto $\boldsymbol{P}$ equidista de los puntos $A(2,1)$ y $B(3,2)$ y la recta que lo une al punto $Q\left(4,8-8\sqrt{3}\right)$ forma con el eje de abscisas un ángulo de 120°. Hallar las coordenadas de $\boldsymbol{P}$.

Solución:

$$d_{AP}=d_{AB}\Rightarrow\sqrt{(x_P-2)^2+(y_P-1)^2}=\sqrt{(x_P-3)^2+(y_P-2)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(x_P^2-4x_P+4\right)+\left(y_P^2-2y_P+1\right)=\left(x_P^2-6x_P+9\right)+\left(y_P^2-4y_P+4\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x_P+2y_P=8\Rightarrow x_P+y_P=4\rightarrow(I)$$

$$m_{QP}=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{y_P-\left(8-8\sqrt{3}\right)}{x_P-4}=tg120°=-\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_P-8+8\sqrt{3}=-\left(\sqrt{3}\right)x_P+4\sqrt{3}\Rightarrow y_P+\left(\sqrt{3}\right)x_P=8-4\sqrt{3}\rightarrow(II)$$
$$(II)-(I)\Rightarrow-\left(1-\sqrt{3}\right)x_P=4-4\sqrt{3}\Rightarrow x_P=\frac{4-4\sqrt{3}}{-\left(1-\sqrt{3}\right)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_P=-\frac{4\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1-\sqrt{3}\right)}=-4$$

Luego, de (I):

$$x_P+y_P=4\Rightarrow-4+y_P=4\Rightarrow y_P=8\Rightarrow P(-4,8)$$

43.- ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ que pertenezca a la recta que pasa por los puntos $A(-2,1);B(3,7)$?

Solución:

Los tres puntos pertenecen a la misma recta, o sea son colineales, por tanto:

$$m_{AB}=m_{BP}\Rightarrow\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_B}{x-x_B}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{7-1}{3+2}=\frac{6}{5}=\frac{y-7}{x-3}\Rightarrow 6x-18=5y-35\Rightarrow 6x-5y+17=0$$

44.- ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto perteneciente a la recta que pasa por $P(-1,-2)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de $75°$?

Solución:

Sea $Q(x,y)$ un punto cualquiera de la recta mencionada en el enunciado.

La pendiente de la recta es:

$$m = tg75° = 3{,}732$$

Entonces:

$$m_{PQ} = \frac{y-y_P}{x-x_P} \Rightarrow 3{,}732 = \frac{y+2}{x+1} \Rightarrow 3{,}732x + 3{,}732 = y+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3{,}732x - y + 1{,}732 = 0 \Rightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)x - y + \sqrt{3} = 0$$

45.- Determinar la condición algebraica que debe satisfacer todo punto de la recta de pendiente $-\frac{5}{4}$ que pasa por el punto $A(3,-2)$.

Solución:

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la recta descrita en el enunciado:

$$-\frac{5}{4} = \frac{y+2}{x-3} \Rightarrow 5x - 15 = -4y - 8 \Rightarrow 5x + 4y - 7 = 0$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41C.

Tema: La línea recta (Hoffmann, 5to año-Ejercicio # 92).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la línea recta y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ siendo $\boldsymbol{a}$ el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ecuación de la pendiente de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Conociendo un solo punto y la pendiente, se puede escribir:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x \cos\theta + ysen\theta - \rho = 0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta = 90^\circ \Rightarrow tg\theta = \infty \Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(m_1\right)\left(m_2\right)=-1\Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida*** ***d*** entre un punto $P_0\left(x_0,y_0\right)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l\equiv Ax+By+C=0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo a como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax + By + C_1; l_2 \equiv Ax + By + C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{l_1, l_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Las coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada son:

$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right)$ donde $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$ y siendo orientados los segmentos considerados.

PREGUNTAS:

PUNTO QUE DIVIDE UN SEGMENTO EN UNA RAZON DADA.

Ejercicio # 92:

1.- Determinar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento de origen $A(-7,8)$ y extremo $B(2,5)$.

Solución:

Existen dos puntos $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{N}$ que dividen el segmento $\boldsymbol{AB}$ en tres partes iguales.

Para el punto $\boldsymbol{M}$ corresponde $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_1 x_B}{1 + \lambda_1} = \frac{-7 + \frac{1}{2} \cdot 2}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-6}{\frac{3}{2}} = -\frac{12}{3} = -4$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda_1 \cdot y_B}{1 + \lambda_1} = \frac{8 + \frac{1}{2} \cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{21}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{21}{3} = 7 \Rightarrow M(-4,7)$$

Para el punto $\boldsymbol{N}$ corresponde $\lambda_2 = \frac{2}{1} = 2$

$$x_N = \frac{x_A + \lambda_2 x_B}{1+\lambda_2} = \frac{-7+2\cdot 2}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$y_N = \frac{y_A + \lambda_2 y_B}{1+\lambda_2} = \frac{8+2\cdot 5}{1+2} = \frac{18}{3} = 6 \Rightarrow N\left(-1,6\right)$$

2.- Determinar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(-4,-6); B(2,3)$ en seis partes iguales.

Solución:

Si son 6 partes, habrán 5 puntos interiores, los cuales los denominaremos, de $A \rightarrow B$:

$M, N, P, Q, R.$

a).- Para encontrar las coordenadas de $\boldsymbol{M}$:

$$\lambda_M = \frac{1}{5}$$

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A + \lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$x_M = \frac{-4+\frac{1}{5}\cdot(2)}{1+\frac{1}{5}} = \frac{-\frac{18}{5}}{\frac{6}{5}} = -\frac{18}{6} = -3$$

$$y_M = \frac{-6+\frac{1}{5}\cdot(3)}{1+\frac{1}{5}} = \frac{-\frac{27}{5}}{\frac{6}{5}} = -\frac{9}{2} \Rightarrow M\left(-3,-\frac{9}{2}\right)$$

b).- Para encontrar las coordenadas de $\boldsymbol{N}$:

$$\lambda_N = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_N = \frac{x_A + \lambda_N x_B}{1+\lambda_N}; y_N = \frac{y_A + \lambda_N y_B}{1+\lambda_N}$$

$$x_N = \frac{-4+\frac{1}{2}\cdot(2)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{6}{2}}{\frac{3}{2}} = -2$$

$$y_N = \frac{-6+\frac{1}{2}\cdot(3)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = -3 \Rightarrow N(-2,-3)$$

c).- Para encontrar las coordenadas de $\boldsymbol{P}$:

$$\lambda_P = \frac{3}{3} = 1$$

$$x_P = \frac{x_A + \lambda_P x_B}{1+\lambda_P}; y_P = \frac{y_A + \lambda_P y_B}{1+\lambda_P}$$

$$x_P = \frac{-4+(1)\cdot(2)}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_P = \frac{-6+(1)\cdot(3)}{1+1} = -\frac{3}{2} \Rightarrow P\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$$

d).- Para encontrar las coordenadas de $\boldsymbol{Q}$:

$$\lambda_Q = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_Q = \frac{x_A + \lambda_Q x_B}{1+\lambda_Q}; y_P = \frac{y_A + \lambda_Q y_B}{1+\lambda_Q}$$

$$x_Q = \frac{-4+(2)\cdot 2}{1+2} = \frac{0}{3} = 0$$

$$y_Q = \frac{-6+(2)\cdot(3)}{1+2} = 0 \Rightarrow Q(0,0)$$

e).- Para encontrar las coordenadas de $\boldsymbol{R}$:

$$\lambda_R = \frac{5}{1} = 5$$

$$x_R = \frac{x_A + \lambda_R x_B}{1+\lambda_R}; y_R = \frac{y_A + \lambda_R y_B}{1+\lambda_R}$$

$$x_R = \frac{-4+(5)\cdot(2)}{1+5} = \frac{6}{6} = 1$$

$$y_R = \frac{-6+(5)\cdot(3)}{1+5} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

3.- Determinar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(-3,3); B(5,6)$ en cinco partes iguales:

Solución:

Si son 5 partes, habrán 4 puntos interiores, los cuales los denominaremos, de $A \rightarrow B$:

M, N, P, Q

a).- Para encontrar las coordenadas de ***M***:

$$\lambda_M = \frac{1}{4}$$

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A + \lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$x_M = \frac{-3+\frac{1}{4}\cdot(5)}{1+\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{7}{4}}{\frac{5}{4}} = -\frac{7}{4}$$

$$y_M = \frac{3+\frac{1}{4}\cdot 6}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{18}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{18}{4} \Rightarrow M\left(-\frac{7}{4}, \frac{18}{4}\right)$$

b).- Para encontrar las coordenadas de ***N***:

$$\lambda_N = \frac{2}{3}$$

$$x_N = \frac{x_A + \lambda_N x_B}{1+\lambda_N}; y_N = \frac{y_A + \lambda_N y_B}{1+\lambda_N}$$

$$x_N = \frac{-3+\frac{2}{3}\cdot(5)}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$y_N = \frac{3+\frac{2}{3}\cdot 6}{1+\frac{2}{3}} = \frac{21}{5} \Rightarrow N\left(\frac{1}{5},\frac{21}{5}\right)$$

c).- Para encontrar las coordenadas de ***P***:

$$\lambda_P = \frac{3}{2}$$

$$x_P = \frac{x_A+\lambda_P x_B}{1+\lambda_P}; y_P = \frac{y_A+\lambda_P y_B}{1+\lambda_P}$$

$$x_P = \frac{-3+\frac{3}{2}\cdot(5)}{1+\frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{5}$$

$$y_P = \frac{3+\frac{3}{2}\cdot(6)}{1+\frac{3}{2}} = \frac{\frac{24}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{24}{5} \Rightarrow P\left(\frac{9}{5},\frac{24}{5}\right)$$

d).- Para determinar las coordenadas del punto ***Q***:

$$\lambda_Q = \frac{4}{1} = 4$$

$$x_Q = \frac{x_A+\lambda_Q x_B}{1+\lambda_Q}; y_Q = \frac{y_A+\lambda_Q y_B}{1+\lambda_Q}$$

$$x_Q = \frac{-3+4\cdot(5)}{1+4} = \frac{17}{5}$$

$$y_Q = \frac{3+4\cdot(6)}{1+4} = \frac{27}{5} \Rightarrow Q\left(\frac{17}{5},\frac{27}{5}\right)$$

4.- Determinar las coordenadas del punto ***M*** que divide el segmento de extremos $A(2,-3); B(7,6)$ en dos porciones cuya relación es de 2 a 3.

Solución:

$$\lambda_M = \frac{2}{3}$$

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A + \lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$x_M = \frac{2+\frac{2}{3}\cdot(7)}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$y_M = \frac{-3+\frac{2}{3}\cdot(6)}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow M\left(4, \frac{3}{5}\right)$$

5.- Determinar las coordenadas del punto ***M*** que divide el segmento de extremos $A(-8,-2); B(2,3)$ en la razón $-\frac{7}{2}$.

Solución:

Si la razón es negativa es porque el punto ***M*** está sobre la misma recta; pero, es exterior al segmento ***AB***.

$$\lambda_M = -\frac{7}{2}$$

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A + \lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$x_M = \frac{-8-\frac{7}{2}\cdot(2)}{1-\frac{7}{2}} = \frac{\frac{-16-14}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$y_M = \frac{-2-\frac{7}{2}\cdot(3)}{1-\frac{7}{2}} = \frac{-\frac{25}{2}}{-\frac{5}{2}} = \frac{25}{5} = 5 \Rightarrow M(3,5)$$

O sea, el punto ***M*** es exterior al segmento ***AB***, localizado a la derecha del punto ***B***.

6.- Determinar las coordenadas del punto $\boldsymbol{M}$ que divide el segmento de extremos $A(-1,-1); B(3,1)$ en la razón $-\frac{2}{3}$.

Solución:

Si la razón es negativa es porque el punto $\boldsymbol{M}$ está sobre la misma recta; pero, es exterior al segmento $\boldsymbol{AB}$.

$$\lambda_M = -\frac{2}{3}$$

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A + \lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$x_M = \frac{-1-\frac{2}{3}\cdot 3}{1-\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{9}{3}}{\frac{1}{3}} = -9$$

$$y_M = \frac{-1-\frac{2}{3}\cdot 1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = -5 \Rightarrow M(-9,-5)$$

O sea, el punto $\boldsymbol{M}$ es exterior al segmento $\boldsymbol{AB}$, localizado a la izquierda del punto $\boldsymbol{A}$.

7.- $M\left(-2,\frac{1}{2}\right)$ es el tercero de los seis puntos que dividen al segmento $\boldsymbol{AB}$ en siete partes iguales. Determinar las coordenadas de $\boldsymbol{B}$, sabiendo que las de $\boldsymbol{A}$ son $(-5,5)$.

Solución:

$$\lambda_M = \frac{3}{4}$$

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A + \lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$x_M = -2 = \frac{-5+\frac{3}{4}\cdot x_B}{1+\frac{3}{4}} \Rightarrow -2 = \frac{\frac{-20+3x_B}{4}}{\frac{7}{4}} \Rightarrow -2 = \frac{-20+3x_B}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -14 = -20+3x_B \Rightarrow 6 = 3x_B \Rightarrow x_B = 2$$

$$y_M = \frac{1}{2} = \frac{5+\frac{3}{4}\cdot y_B}{1+\frac{3}{4}} = \frac{\frac{20+3y_B}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{20+3y_B}{7} \Rightarrow \frac{7}{2} = 20+3y_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 = 40+6y_B \Rightarrow -33 = 6y_B \Rightarrow y_B = -\frac{11}{2} \Rightarrow B\left(2,-\frac{11}{2}\right)$$

8.- $M(-2,0)$ es el cuarto de los puntos que dividen el segmento $\boldsymbol{AB}$ en cinco partes iguales. Determinar las coordenadas de $\boldsymbol{A}$, sabiendo que las de $\boldsymbol{B}$ son $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Solución:

$$\lambda_M = \frac{4}{1} = 4$$

$$x_M = \frac{x_A+\lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A+\lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$-2 = \frac{x_A+(4)\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+4} = \frac{x_A-2}{5} \Rightarrow -10 = x_A-2 \Rightarrow x_A = -8$$

$$0 = \frac{y_A+(4)\left(\frac{1}{2}\right)}{1+4} \Rightarrow y_A+2=0 \Rightarrow y_A = -2 \Rightarrow A(-8,-2)$$

9.- $M\left(-\frac{9}{2},\frac{15}{2}\right)$ es el primero de los puntos que dividen el segmento $\boldsymbol{AB}$ en seis partes iguales. Determinar las coordenadas del punto B, sabiendo que las del punto $\boldsymbol{A}$ son $(-6,10)$.

Solución:

$$\lambda_M = \frac{1}{5}$$

$$x_M = \frac{x_A+\lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A+\lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$-\frac{9}{2}=\frac{-6+\left(\frac{1}{5}\right)(x_B)}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{-30+x_B}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{-30+x_B}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -27=-30+x_B\Rightarrow x_B=3$$

$$\frac{15}{2}=\frac{10+\left(\frac{1}{5}\right)y_B}{1+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{50+y_B}{5}}{\frac{6}{5}}=\frac{50+y_B}{6}\Rightarrow 45=50+y_B\Rightarrow y_B=-5\Rightarrow B(3,-5)$$

Se traza un segmento desde el punto $A(-5,-2)$ hasta el punto $B(5,5)$. ¿Hasta qué punto debe moverse el extremo en esa misma dirección para que el segmento:

10.- Aumente en $\frac{2}{5}$?

Solución:

$$\lambda_M=\frac{\overrightarrow{AM}}{\overleftarrow{MB}}=-\frac{\frac{5}{5}+\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}}=-\frac{\frac{7}{5}}{\frac{2}{5}}=-\frac{7}{2}$$

$$x_M=\frac{x_A+\lambda_M x_B}{1+\lambda_M};\,y_M=\frac{y_A+\lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$x_M=\frac{-5+\left(-\frac{7}{2}\right)(5)}{1-\frac{7}{2}}=\frac{\frac{-10-35}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{-45}{-5}=9$$

$$y_M=\frac{-2+\left(-\frac{7}{2}\right)(5)}{1-\frac{7}{2}}=\frac{\frac{-39}{2}}{\frac{-5}{2}}=\frac{39}{5}\Rightarrow M\left(9,\frac{39}{5}\right)$$

11.- Se reduzca al 75%.

Solución:

Reducirse al 75% equivale a reducir la longitud del segmento en un 25%, entonces, considerando cuatro partes iguales:

$$\lambda_M=\frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}}=\frac{3}{1}=3$$

$$x_M=\frac{x_A+\lambda_M x_B}{1+\lambda_M};y_M=\frac{y_A+\lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$x_M=\frac{-5+(3)(5)}{1+3}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$
$$y_M=\frac{-2+(3)(5)}{1+3}=\frac{13}{4}\Rightarrow M\left(\frac{5}{2},\frac{13}{4}\right)$$

12.- Se reduzca en el 75%.

Solución:

$$\lambda_M=\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}}=\frac{1}{3}$$

$$x_M=\frac{x_A+\lambda_M x_B}{1+\lambda_M};y_M=\frac{y_A+\lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$x_M=\frac{-5+\left(\frac{1}{3}\right)(5)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{-10}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}$$
$$y_M=y_M=\frac{-2+\left(\frac{1}{3}\right)(5)}{1+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{-6+5}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{4}\Rightarrow M\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$$

Se traza un segmento desde el punto $M(1,8)$ hasta el punto $N(-1,3)$. ¿Hasta qué punto debe moverse el extremo en esa misma dirección para que el segmento….

13.- se cuadruplique?

Solución:

Sea $\boldsymbol{P}$ el nuevo punto buscado, el cual es obvio que es exterior al segmento $\boldsymbol{MN}$.

$$\lambda_P=\frac{\overrightarrow{MP}}{\overleftarrow{PN}}=-\frac{4}{3}$$

$$x_P=\frac{x_M+\lambda_P x_N}{1+\lambda_P};y_M=\frac{y_M+\lambda_P y_N}{1+\lambda_P}$$

$$x_P=\frac{1+\left(-\frac{4}{3}\right)(-1)}{1-\frac{4}{3}}=\frac{\frac{3+4}{3}}{\frac{3-4}{3}}=-7$$

$$y_P=\frac{8+\left(-\frac{4}{3}\right)(3)}{1-\frac{4}{3}}=\frac{\frac{12}{3}}{\frac{-1}{3}}=-12\Rightarrow P(-7,-12)$$

14.- se reduzca al 80%.?.

Solución:

$$\lambda_P=\frac{4}{1}=4$$

$$x_P=\frac{x_M+\lambda_P x_N}{1+\lambda_P};\, y_M=\frac{y_M+\lambda_P y_N}{1+\lambda_P}$$

$$x_P=\frac{1+(4)(-1)}{1+4}=-\frac{3}{5}$$

$$y_P=\frac{8+(4)(3)}{1+4}=\frac{20}{5}=4\Rightarrow P\left(-\frac{3}{5},4\right)$$

15.- aumente en un 40%?.

Solución:

El segmento $\boldsymbol{MN}$, original, se divide en 5 partes iguales y el aumento de 40% son $\frac{2}{5}$, y el punto $\boldsymbol{P}$ debe ser necesariamente exterior a $\boldsymbol{MN}$, entonces:

$$\lambda_P=\frac{\frac{5}{5}+\frac{2}{5}}{-\frac{2}{5}}=-\frac{7}{2}$$

$$x_P=\frac{x_M+\lambda_P x_N}{1+\lambda_P};\, y_M=\frac{y_M+\lambda_P y_N}{1+\lambda_P}$$

$$x_P=\frac{1+\left(-\frac{7}{2}\right)(-1)}{1-\frac{7}{2}}=\frac{\frac{9}{2}}{-\frac{5}{2}}=-\frac{9}{5}$$

$$y_P=\frac{8+\left(-\frac{7}{2}\right)(3)}{1-\frac{7}{2}}=\frac{\frac{16-21}{2}}{-\frac{5}{2}}=\frac{5}{5}=1\Rightarrow P\left(-\frac{9}{5},1\right)$$

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ (origen y extremo, respectivamente, de un segmento) y el punto $\boldsymbol{M}$ que divide al segmento $\boldsymbol{AB}$. Determinar, en cada caso, la razón en que $\boldsymbol{M}$ divide al segmento $\boldsymbol{AB}$.

16.- $A(-3,2);B(5,6);M(-1,3)$

Solución:

$$x_M=\frac{x_A+\lambda_M x_B}{1+\lambda_M};y_M=\frac{y_A+\lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

En el eje $\boldsymbol{x}$:

$$-1=\frac{-3+\lambda(5)}{1+\lambda}\Rightarrow -1-\lambda=-3+5\lambda\Rightarrow 2=6\lambda\Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}$$

17.- $A(4,3);B(2,-1);M(-1,-7)$

Solución:

$$x_M=\frac{x_A+\lambda_M x_B}{1+\lambda_M};y_M=\frac{y_A+\lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

En el eje $\boldsymbol{x}$:

$$-1=\frac{4+(\lambda)}{1+\lambda}(2)\Rightarrow -1-\lambda=4+2\gamma\Rightarrow 3\lambda=-5\Rightarrow \lambda=-\frac{5}{3}$$

18.- $A(-5,1);B(7,-4);M\left(-\frac{7}{3},-\frac{1}{9}\right)$

Solución:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A + \lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

En el eje $\boldsymbol{x}$:

$$-\frac{7}{3} = \frac{-5+(\lambda)(7)}{1+\lambda} \Rightarrow -7-7\lambda = -15+21\lambda \Rightarrow 28\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{7}$$

19.- $A(3,-7); B(1,-1); M(-2,8)$

Solución:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A + \lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

En el eje $\boldsymbol{x}$:

$$-2 = \frac{3+(\lambda)(1)}{1+\lambda} \Rightarrow -2-2\lambda = 3+\lambda \Rightarrow 3\lambda = -5 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{3}$$

20.- $A(7,4); B(-1,0); M(1,1)$

Solución:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M x_B}{1+\lambda_M}; y_M = \frac{y_A + \lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

En el eje $\boldsymbol{x}$:

$$1 = \frac{7+(\lambda)(-1)}{1+\lambda} \Rightarrow 1+\lambda = 7-\lambda \Rightarrow 2\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 3$$

21.- Hallar las coordenadas del punto $\boldsymbol{M}$ del segmento que une este punto con el punto $A(2,-2)$, sabiendo que el punto $B(-4,1)$ está situado sobre el mismo segmento a una distancia de $\boldsymbol{A}$ igual a las tres quintas partes de la longitud total del segmento.

Solución:

Si suponemos que $\boldsymbol{M}$ está a la derecha de $\boldsymbol{B}$, entonces si $\boldsymbol{AB}$ es $\frac{3}{5}\cdot\overline{AM}$, entonces:

$$MB=\frac{2}{5}\cdot\overline{AM}\Rightarrow AM=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}\Rightarrow\lambda_M=-\frac{\frac{5}{5}}{\frac{2}{5}}=-\frac{5}{2}$$

$$\lambda_M=\frac{\overrightarrow{AM}}{\overleftarrow{MB}}=-\frac{\frac{5}{5}}{\frac{2}{5}}=-\frac{5}{2}$$

$$x_M=\frac{x_A+\lambda_M x_B}{1+\lambda_M};y_M=\frac{y_A+\lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$x_M=\frac{2+\left(-\frac{5}{2}\right)(-4)}{1-\frac{5}{2}}=\frac{\frac{24}{2}}{-\frac{3}{2}}=-8$$

$$y_M=\frac{-2+\left(-\frac{5}{2}\right)(1)}{1-\frac{5}{2}}=\frac{\frac{-4-5}{2}}{-\frac{3}{2}}=3\Rightarrow M(-8,3)$$

22.- Los extremos de un segmento son $A(2,5)$ y $\boldsymbol{B}$. Un punto $M(-1,4)$ del segmento dista de **A** una cuarta parte de la distancia que lo separa del otro extremo $\boldsymbol{B}$. Determinar las coordenadas de $\boldsymbol{B}$.

Solución:

Nótese que el punto $\boldsymbol{M}$ está a la izquierda de $\boldsymbol{A}$ y el enunciado dice que está entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$; entonces, necesariamente $\boldsymbol{B}$ está en el extremo izquierdo del segmento $\boldsymbol{AB}$.

$$\lambda_M=\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{4}{4}}=\frac{1}{4}$$

$$x_M=\frac{x_A+\lambda_M x_B}{1+\lambda_M};y_M=\frac{y_A+\lambda_M y_B}{1+\lambda_M}$$

$$-1=\frac{2+\left(\frac{1}{4}\right)(x_B)}{1+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{8+x_B}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{8+x_B}{5}\Rightarrow -5=8+x_B\Rightarrow x_B=-13$$

$$4=\frac{5+\left(\frac{1}{4}\right)y_B}{1+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{20+y_B}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{20+y_B}{5}\Rightarrow 20=20+y_B\Rightarrow y_B=0\Rightarrow B(-13,0)$$

23.- En el triángulo cuyos vértices son $A(1,1);B(4,7);C(10,-2)$ búsquese, para cada una de las tres medianas, el punto de intersección más cercano al lado correspondiente. Comprobar que ese punto es común para las tres medianas y que éstas, por tanto, concurren. (El punto en que concurren las tres medianas se llama ***baricentro*** del triángulo).

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2};y_M=\frac{1+7}{2}=4\Rightarrow M\left(\frac{5}{2},4\right)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N=\frac{4+10}{2}=7;y_N=\frac{7-2}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow N\left(7,\frac{5}{2}\right)$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$:

$$x_P=\frac{1+10}{2}=\frac{11}{2};y_P=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow P\left(\frac{11}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

El baricentro $\boldsymbol{G}$ de un triángulo se encuentra localizado en el punto de corte, común de las tres medianas, y está localizado a $\frac{1}{3}L_M$ del punto medio del lado correspondiente y a $\frac{2}{3}\cdot L_M$ del vértice opuesto correspondiente, llamándose L_M la longitud de cada mediana. Entonces, para todos los casos:

$$\lambda=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$ partiendo siempre del punto medio de cada lado.

Para la mediana $\boldsymbol{MC}$:

$$x_{G_M}=\frac{\frac{5}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)(10)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{15}{3}=5$$

$$y_{G_M}=\frac{4+\left(\frac{1}{2}\right)(-2)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$$

Para la mediana $\boldsymbol{NA}$:

$$x_{G_N}=\frac{7+\left(\frac{1}{2}\right)(1)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{15}{3}=5$$

$$y_{G_N}=\frac{\frac{5}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)(1)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$$

Para la mediana $\boldsymbol{PB}$:

$$x_{G_P}=\frac{\frac{11}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)(4)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{15}{3}=5$$

$$y_{G_P}=\frac{-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)(7)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$$

Luego:

$G(5,2)$ es común a las tres medianas, por tanto, es el ***Baricentro*** del triángulo dado.

24.- Hágase la misma comprobación del ejercicio anterior para el triángulo cuyos vértices son $A(2,6);B(5,0);C(-7,-6)$.

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M=\frac{2+5}{2}=\frac{7}{2};\,y_M=\frac{6+0}{2}=3\Rightarrow M\left(\frac{7}{2},3\right)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N=\frac{5-7}{2}=-1;\,y_N=\frac{0-6}{2}=-3\Rightarrow N(-1,-3)$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$:

$$x_P=\frac{2-7}{2}=-\frac{5}{2};\,y_P=\frac{6-6}{2}=0\Rightarrow P\left(-\frac{5}{2},0\right)$$

El baricentro $\boldsymbol{G}$ de un triángulo se encuentra localizado en el punto de cruce común de las tres medianas y está localizado a $\frac{1}{3}L_M$ del punto medio del lado correspondiente y a $\frac{2}{3}\cdot L_M$ del vértice opuesto correspondiente, llamándose L_M la longitud de cada mediana.

Entonces, para todas las medianas:

Para la mediana $\boldsymbol{MC}$:

$$x_{G_M}=\frac{\frac{7}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)(-7)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{0}{\frac{3}{2}}=0$$

$$y_{G_M}=\frac{3+\left(\frac{1}{2}\right)(-6)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{0}{\frac{3}{2}}=0\Rightarrow G_M(0,0)$$

Para la mediana $\boldsymbol{NA}$:

$$x_{G_N}=\frac{-1+\left(\frac{1}{2}\right)(2)}{1+\frac{1}{2}}=0$$

$$y_{G_N}=\frac{-3+\left(\frac{1}{2}\right)(6)}{1+\frac{1}{2}}=0\Rightarrow G_N(0,0)$$

Para la mediana $\boldsymbol{PB}$:

$$x_{G_P} = \frac{-\frac{5}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)(5)}{1 + \frac{1}{2}} = 0$$

$$y_{G_P} = \frac{0 + \left(\frac{1}{2}\right)(0)}{1 + \frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow G_P(0,0)$$

$G(0,0)$ es común a las tres medianas, por tanto, es el ***Baricentro*** del triángulo dado.

25.- Demostrar que $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ es el baricentro de un triángulo cualquiera de vértices $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2); C(x_3, y_3)$.

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Se considera ahora la mediana $\boldsymbol{CM}$, partiendo del vértice $\boldsymbol{C}$:

$$\lambda_G = \frac{\overrightarrow{CG}}{\overrightarrow{GM}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

$$x_G = \frac{x_3 + \lambda_G \cdot x_M}{1 + \lambda_G} = \frac{x_3 + (2)\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_G = \frac{y_3 + \lambda_G \cdot y_M}{1 + \lambda_G} = \frac{y_3 + (2)\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Utilizar la fórmula demostrada en el ejercicio #25 para determinar el baricentro G de los triángulos cuyos vértices se dan en los ejercicios que siguen:

26.- $A(4,-1); B(-3,4); C(2,6)$

Solución:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} =$$

$$x_G = \frac{4-3+2}{3} = 1$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} =$$
$$y_G = \frac{-1+4+6}{3} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow G(1,3)$$

27.- $A\left(\frac{5}{2},7\right); B\left(6,\frac{1}{2}\right); C(-7,0)$

Solución:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\frac{5}{2}+6-7}{3} = \frac{\frac{5}{2}-1}{3} = \frac{\frac{5-2}{2}}{3} = \frac{3}{2\cdot 3} = \frac{1}{2}$$
$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{7+\frac{1}{2}+0}{3} = \frac{15}{2\cdot 3} = \frac{5}{2} \Rightarrow G\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$

28.- $A\left(2+3\sqrt{5},7\right); B\left(10-\sqrt{5},1\right); C\left(-6-2\sqrt{5},-4\right)$

Solución:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\left(2+3\sqrt{5}\right)+\left(10-\sqrt{5}\right)+\left(-6-2\sqrt{5}\right)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$
$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{7+1-4}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow G\left(2,\frac{4}{3}\right)$$

29.- $A(-7,9); B(3,5); C(0,-4)$

Solución:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-7+3+0}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{9+5-4}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow G\left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

30.- El baricentro de un triángulo coincide con el origen de un sistema cartesiano. Uno de los vértices está en el eje de abscisas a una distancia de 5 unidades del origen; el otro vértice sobre el eje de ordenadas, a 10 unidades de distancia del origen. Hallar las coordenadas del tercer vértice.

Solución:

Se dan los siguientes datos:

$$G(0,0); A(5,0); B(0,10); C(?)$$

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}; y_M = \frac{0+10}{2} = 5 \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}, 5\right)$$

De los problemas anteriores sabemos que:

$$\lambda_M = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

Luego:

$$x_G = 0 = \frac{x_M + \lambda_M \cdot x_C}{1+\lambda_M} = \frac{\frac{5}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)(x_C)}{1+\frac{1}{2}} = 5 + x_C \Rightarrow x_C = -5$$

$$y_G = 0 = \frac{y_M + \lambda_M\,(y_C)}{1+\lambda_M} = \frac{5 + \left(\frac{1}{2}\right)(y_C)}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow 10 + y_C = 0 \Rightarrow y_C = -10 \Rightarrow C(-5,-10)$$

31.- Se conocen los vértices $A(0,5); B(5,3)$ de un triángulo. Calcular el tercer vértice sabiendo que las coordenadas del baricentro son $G(1,3)$.

Soluciones:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2};\, y_M = \frac{5+3}{2} = 4 \Rightarrow M\left(\frac{5}{2},4\right)$$

Se trabajará ahora con la mediana ***MC*** donde $\lambda_G = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

Luego:

$$x_G = \frac{x_M + \lambda_M \cdot x_C}{1+\lambda_G} \Rightarrow 1 = \frac{\frac{5}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)(x_C)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{5+x_c}{3} \Rightarrow 3 = 5 + x_C \Rightarrow x_C = -2$$

$$y_G = \frac{y_M + \left(\frac{1}{2}\right)(y_C)}{1+\lambda_G} \Rightarrow 3 = \frac{4+\left(\frac{1}{2}\right)(y_C)}{1+\frac{1}{}} \Rightarrow 3 = \frac{8+y_C}{3} \Rightarrow y_C = 1 \Rightarrow C(-2,1)$$

32.- Del triángulo ***ABC*** se conocen: el vértice $A(7,1)$, el baricentro $G(3,3)$ y el punto medio del lado ***AC*** de coordenadas $M(5,6)$. Hallar las coordenadas de los vértices ***B*** y ***C.***

Solución:

Para el cálculo del vértice ***C***:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 5 = \frac{7+x_C}{2} \Rightarrow 10 = 7 + x_C \Rightarrow x_C = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 6 = \frac{1+y_C}{2} \Rightarrow 12 = 1 + y_C \Rightarrow y_C = 11 \Rightarrow C(3,11)$$

Para el cálculo del vértice ***B*** se considerará la mediana ***MB***:

$$\lambda_G = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$x_G = \frac{x_M + \lambda_G \cdot x_B}{1+\lambda_G} \Rightarrow 3 = \frac{5+\left(\frac{1}{2}\right)(x_B)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{10+x_B}{3} \Rightarrow 9 = 10 + x_B \Rightarrow x_B = -1$$

$$y_G = \frac{y_M + \lambda_G \cdot y_B}{1+\lambda_B} \Rightarrow 3 = \frac{6+\left(\frac{1}{2}\right)(y_B)}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow 3 = \frac{12+y_B}{3} \Rightarrow 9 = 12 + y_B \Rightarrow y_B = -3 \Rightarrow B(-1,-3)$$

33.- Del triángulo ABC se conocen: el vértice $B(6,-1)$, el baricentro $G(2,3)$ y el punto medio del lado BC de coordenadas $M\left(\frac{5}{2},0\right)$. Hallar las coordenadas de los vértices ***A*** y ***C.***

Solución:

Para encontrar las coordenadas del punto ***C***:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{6+x_C}{2} \Rightarrow 5 = 6 + x_C \Rightarrow x_C = -1$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow 0 = \frac{-1+y_C}{2} \Rightarrow y_C = 1 \Rightarrow C(-1,1)$$

Para encontrar las coordenadas del punto ***A*** se considera la mediana ***MA***:

$$\lambda_G = \frac{\overline{MG}}{\overline{GA}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$x_G = \frac{x_M + \lambda_G \cdot x_A}{1+\lambda_G} \Rightarrow 2 = \frac{\frac{5}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)(x_A)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{5+x_A}{3} \Rightarrow 6 = 5 + x_A \Rightarrow x_A = 1$$

$$y_G = \frac{y_M + \lambda_G \cdot y_A}{1+\lambda_G} \Rightarrow 3 = \frac{0+\left(\frac{1}{2}\right)(y_A)}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow 3 = \frac{y_A}{3} \Rightarrow y_A = 9 \Rightarrow A(1,9)$$

34.- En el triángulo ***ABC*** de baricentro en el origen, se conocen los puntos medios de los lados ***AB*** y ***BC***. Las coordenadas de estos puntos medios son, respectivamente, $M(3,2)$ y $N(2,-2)$. Determinar las coordenadas de los tres puntos.

Solución:

Son dados: $G(0,0); M(3,2); N(2,-2)$

Para encontrar las coordenadas del punto ***C,*** partiendo de la mediana ***MC***:

$$x_G = \frac{x_M + \lambda_G \cdot x_C}{1+\lambda_G} \Rightarrow 0 = \frac{3+\left(\frac{1}{2}\right)(x_C)}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow 0 = \frac{6+x_C}{3} \Rightarrow x_C = -6$$

$$y_G = \frac{y_M + \lambda_G \cdot y_C}{1+\lambda_G} \Rightarrow 0 = \frac{2+\left(\frac{1}{2}\right)(y_C)}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{4+y_C}{3} \Rightarrow y_C = -4 \Rightarrow C(-6,-4)$$

Para encontrar las coordenadas del punto $\boldsymbol{B}$:

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow 2 = \frac{x_B + (-6)}{2} \Rightarrow 4 = x_B - 6 \Rightarrow x_B = 10$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow -2 = \frac{y_B + (-4)}{2} \Rightarrow -4 + 4 = y_B = 0 \Rightarrow B(10,0)$$

Para encontrar las coordenadas del punto $\boldsymbol{A}$, partiendo de la mediana $\boldsymbol{NA}$:

$$x_G = \frac{x_N + \lambda_G \cdot x_A}{1+\lambda_G} \Rightarrow 0 = \frac{2+\left(\frac{1}{2}\right)(x_A)}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow x_A = -4$$

$$y_G = \frac{y_N + \lambda_G \cdot y_A}{1+\lambda_G} \Rightarrow 0 = \frac{-2+\left(\frac{1}{2}\right)(y_A)}{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow y_A = 4 \Rightarrow A(-4,4)$$

35.- El segmento que une a $A(-2,-1)$ con $B(3,3)$ se prolonga hasta $\boldsymbol{C}$. Determinar las coordenadas de $\boldsymbol{C}$ sabiendo que $BC = 3 \cdot AB$.

Solución:

$$\lambda_B = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{3 \cdot AB} = \frac{1}{3}$$

$$x_B = \frac{x_A + \lambda_B \cdot x_C}{1+\lambda_B} \Rightarrow 3 = \frac{-2+\left(\frac{1}{3}\right)(x_C)}{1+\frac{1}{3}} \Rightarrow 3 = \frac{\frac{-6+x_C}{3}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{-6+x_C}{4} \Rightarrow 12 = -6 + x_C \Rightarrow x_C = 18$$

$$y_B = \frac{y_A + \lambda_B \cdot y_C}{1+\lambda_B} \Rightarrow 3 = \frac{-1+\left(\frac{1}{3}\right)(y_C)}{1+\frac{1}{3}} \Rightarrow 3 = \frac{\frac{-3+y_C}{3}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{-3+y_C}{4} \Rightarrow 12 = -3 + y_C \Rightarrow y_C = 15 \Rightarrow C(18,15)$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41B.

Tema: La línea recta (Hoffmann, 5to año-Ejercicio # 91).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la línea recta y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ siendo $\boldsymbol{a}$ el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$ es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las $\boldsymbol{y}$.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ecuación de la pendiente de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Conociendo un solo punto y la pendiente, se puede escribir:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x\cos\theta + ysen\theta - \rho = 0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta = 90º \Rightarrow tg\theta = \infty \Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(m_1\right)\left(m_2\right)=-1\Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida d*** entre un punto $P_0\left(x_0, y_0\right)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l\equiv Ax+By+C=0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{(P_0, l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo a como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0; B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0; B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax + By + C_1; l_2 \equiv Ax + By + C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{l_1,l_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

PREGUNTAS:

Ejercicio # 91:

Determinar las coordenadas del centro de los segmentos cuyos extremos se dan:

1.- $A(2,5); B(7,1)$

Solución:

$$x_C = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2}; y_C = \frac{5+1}{2} = 3$$

2.- $C(-4,2); D(6,5)$

Solución:

$$x_M = \frac{-4+6}{2} = 1; y_M = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2}$$

3.- $E\left(\frac{1}{2},-3\right); F\left(\frac{11}{2},2\right)$

Solución:

$$x_C = \frac{\frac{1}{2}+\frac{11}{2}}{2} = \frac{6}{2} = 3; y_C = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}$$

4.- $G\left(3+\sqrt{5},-3+\sqrt{3}\right); H\left(5-3\sqrt{5},-5-\sqrt{3}\right)$

Solución:

$$x_C = \frac{3+\sqrt{5}+5-3\sqrt{5}}{2} = 4-\sqrt{5}; y_C = \frac{-3+\sqrt{3}-5-\sqrt{3}}{2} = -4$$

5.- $K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right); L\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{10}\right)$

Solución:

$$x_C=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12};y_C=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}{2}=\frac{\frac{1}{10}}{2}=\frac{1}{20}$$

6.- $M\left(-\frac{3}{4},5\right);N\left(7,-\frac{5}{2}\right)$

Solución:

$$x_C=\frac{-\frac{3}{4}+7}{2}=\frac{\frac{25}{4}}{2}=\frac{25}{8};y_C=\frac{5-\frac{5}{2}}{2}=\frac{\frac{5}{2}}{2}=\frac{5}{4}$$

7.- $P(3a,7b);Q(5a,-10b)$

Solución:

$$x_C=\frac{3a+5a}{2}=4a;y_C=\frac{7b-10b}{2}=-\frac{3b}{2}$$

8.- $R\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right);S\left(-3\sqrt{a},-5\sqrt{b}\right)$

Solución:

$$x_C=\frac{\sqrt{a}-3\sqrt{a}}{2}=-\sqrt{a};y_C=\frac{-\sqrt{b}-5\sqrt{b}}{2}=-3\sqrt{b}$$

9.- $T\left(a-b,a\right);U\left(b,b-a\right)$

Solución:

$$x_C=\frac{a-b+b}{2}=\frac{a}{2};y_C=\frac{a+b-a}{2}=\frac{b}{2}$$

10.- $V\left(3a-b,2a+b\right);W\left(b-3a,8a-5b\right)$

Solución:

$$x_C=\frac{3a-b+b-3a}{2}=0;y_C=\frac{2a+b+8a-5b}{2}=5a-2b$$

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan los cuatro vértices de un cuadrilátero. Demostrar para cada uno de ellos que al unir los puntos medios de los lados consecutivos se obtiene un paralelogramo.

11.- $A(-2,5);B(6,7);C(4,-1);D(2,-3)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{-2+6}{2} = 2; y_M = \frac{5+7}{2} = 6 \Rightarrow M(2,6)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N = \frac{6+4}{2} = 5; y_N = \frac{7-1}{2} = 3 \Rightarrow N(5,3)$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CD}$:

$$x_P = \frac{4+2}{2} = 3; y_P = \frac{-1-3}{2} = -2 \Rightarrow P(3,-2)$$

Sea $\boldsymbol{Q}$ el punto medio de $\boldsymbol{DA}$:

$$x_Q = \frac{-2+2}{2} = 0; y_Q = \frac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow Q(0,1)$$

$$d_{MN} = \sqrt{(5-2)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$d_{PQ} = \sqrt{(0-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

También:

$$d_{NP} = \sqrt{(3-5)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$$d_{QM} = \sqrt{(0-5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

Al ser los lados opuestos iguales, se trata de un paralelogramo.

12.- $A(1,6); B(7,2); C(5,-2); D(-5,-4)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{1+7}{2} = 4; y_M = \frac{6+2}{2} = 4 \Rightarrow M(4,4)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N = \frac{7+5}{2} = 6; y_N = \frac{2-2}{2} = 0 \Rightarrow N(6,0)$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CD}$:

$$x_P=\frac{5-5}{2}=0;\, y_P=\frac{-2-4}{2}=-3\Rightarrow P(0,-3)$$

Sea $\boldsymbol{Q}$ el punto medio de $\boldsymbol{DA}$:

$$x_Q=\frac{1-5}{2}=-2;\, y_Q=\frac{6-4}{2}=1\Rightarrow Q(-2,1)$$

$$d_{MN}=\sqrt{(6-4)^2+(0-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$d_{PQ}=\sqrt{(-2-0)^2+(1+3)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

También:
$$d_{NP}=\sqrt{(0-6)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$
$$d_{QM}=\sqrt{(-2-4)^2+(1-4)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

Al ser los lados opuestos iguales, se trata de un paralelogramo.

13.- $A(-1,5);B(4,3);C(5,-3);D(-6,1)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M=\frac{-1+4}{2}=\frac{3}{2};\, y_M=\frac{5+3}{2}=4\Rightarrow M\left(\frac{3}{2},4\right)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N=\frac{4+5}{2}=\frac{9}{2};\, y_N=\frac{3-3}{2}=0\Rightarrow N\left(\frac{9}{2},0\right)$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CD}$:

$$x_P=\frac{5-6}{2}=-\frac{1}{2};\, y_P=\frac{-3+1}{2}=-1\Rightarrow P\left(-\frac{1}{2},-1\right)$$

Sea $\boldsymbol{Q}$ el punto medio de $\boldsymbol{DA}$:

$$x_Q = \frac{-1-6}{2} = -\frac{7}{2}; y_Q = \frac{1+5}{2} = 3 \Rightarrow Q\left(-\frac{7}{2}, 3\right)$$

$$d_{MN} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(3)^2+(4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$d_{PQ} = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(-3)^2+(4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

También:

$$d_{NP} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$d_{QM} = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{26}$$

Al ser los lados opuestos iguales, se trata de un paralelogramo.

14.- $A(-3,-6); B(-4,2); C(4,5); D(7,0)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{-3-4}{2} = -\frac{7}{2}; y_M = \frac{2-6}{2} = -2 \Rightarrow M\left(-\frac{7}{2}, -2\right)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N = \frac{-4+4}{2} = 0; y_N = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow N\left(0, \frac{7}{2}\right)$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CD}$:

$$x_P = \frac{4+7}{2} = \frac{11}{2}; y_P = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow P\left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Sea $\boldsymbol{Q}$ el punto medio de $\boldsymbol{DA}$:

$$x_Q = \frac{-3+7}{2} = 2;\ y_Q = \frac{0-6}{2} = -3 \Rightarrow Q(2,-3)$$

$$d_{MN} = \sqrt{\left(0+\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}+2\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4}+\frac{121}{4}} = \frac{\sqrt{170}}{2}$$

$$d_{PQ} = \sqrt{\left(2-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-3-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4}+\frac{121}{4}} = \frac{\sqrt{170}}{2}$$

También:

$$d_{NP} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{5}{2}-\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{4}+1} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

$$d_{QM} = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}-2\right)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{\frac{121}{4}+1} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

Al ser los lados opuestos iguales, se trata de un paralelogramo.

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan los cuatro vértices de un cuadrilátero. Determinar para cada uno de ellos la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

15.- $A(-3.-1); B(-1,5); C(5,3); D(7,-5)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de la diagonal $\boldsymbol{AC}$:

$$x_M = \frac{-3+5}{2} = 1;\ y_M = \frac{-1+3}{2} = 1 \Rightarrow M(1,1)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de la diagonal $\boldsymbol{BD}$:

$$x_N = \frac{-1+7}{2} = 3;\ y_N = \frac{5-5}{2} = 0 \Rightarrow N(3,0)$$

Luego:

$$d_{MN} = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

16.- $A(-2,7);B(3,4);C(0,-5);D(-7,2)$

Solución:

Sea ***M*** el punto medio de la diagonal ***AC***:

$$x_M = \frac{-2+0}{2} = -1;\ y_M = \frac{7-5}{2} = 1 \Rightarrow M(-1.1)$$

Sea ***N*** el punto medio de la diagonal ***BD***:

$$x_N = \frac{3-7}{2} = -2;\ y_N = \frac{4+2}{2} = 3 \Rightarrow N(-2,3)$$

Luego:

$$d_{MN} = \sqrt{(-2+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

17.- $A(-5,3);B(-3,5);C(8,2);D(-4,-2)$

Solución:

Sea ***M*** el punto medio de la diagonal ***AC***:

$$x_M = \frac{-5+8}{2} = \frac{3}{2};\ y_M = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$$

Sea ***N*** el punto medio de la diagonal ***BD***:

$$x_N = \frac{-3-4}{2} = -\frac{7}{2};\ y_N = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow N\left(-\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Luego:

$$d_{MN} = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

18.- $A(5,7);B(7,1);C(-1,-5);D(-6,7)$

Solución:

Sea ***M*** el punto medio de la diagonal ***AC***:

$$x_M = \frac{5-1}{2} = 2; y_M = \frac{7-5}{2} = 1 \Rightarrow M\left(2,1\right)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de la diagonal $\boldsymbol{BD}$:

$$x_N = \frac{7-6}{2} = \frac{1}{2}; y_N = \frac{1+7}{2} = 4 \Rightarrow N\left(\frac{1}{2},4\right)$$

Luego:

$$d_{MN} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + \left(4-1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+9} = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan los cuatro vértices de un paralelogramo. Determinar para cada uno de ellos los puntos medios de las diagonales y comprobar que son el mismo punto.

19.- $A(2,3); B(6,2); C(-1,-5); D(-5,-4)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AC}$:

$$x_M = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}; y_M = \frac{3-5}{2} = -1 \Rightarrow M\left(\frac{1}{2},-1\right)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BD}$:

$$x_N = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2}; y_N = \frac{2-4}{2} = -1 \Rightarrow N\left(\frac{1}{2},-1\right)$$

Entonces: $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{N}$ son puntos coincidentes.

20.- $A(-6,-2); B(-3,3); C(6,4); D(3,-1)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AC}$:

$$x_M = \frac{-6+6}{2} = 0; y_M = \frac{-2+4}{2} = 1 \Rightarrow M\left(0,1\right)$$

Sea ***N*** el punto medio de ***BD***:

$$x_N = \frac{-3+3}{2} = 0; y_N = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow N(0,1)$$

Entonces: ***M*** y ***N*** son puntos coincidentes.

21.- $A(-1,8); B(2,7); C(4,-3); D(1,-2)$

Solución:

Sea ***M*** el punto medio de ***AC***:

$$x_M = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}; y_M = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Sea ***N*** el punto medio de ***BD***:

$$x_N = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}; y_N = \frac{7-2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow N\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Entonces: ***M*** y ***N*** son puntos coincidentes.

22.- $A(7,7); B(2,0); C(-3,-1); D(2,6)$

Solución:

Sea ***M*** el punto medio de ***AC:***

$$x_M = \frac{7-3}{2} = 2; y_M = \frac{7-1}{2} = 3 \Rightarrow M(2,3)$$

Sea N el punto medio de BD:

$$x_N = \frac{2+2}{2} = 2; y_N = \frac{0+6}{2} = 3 \Rightarrow N(2,3)$$

Entonces: ***M*** y ***N*** son puntos coincidentes.

Determinar en cada uno de los siguientes casos a que distancia del punto $P(8,-2)$ se encuentra el punto medio de los segmentos cuyos extremos se dan:

23.- $A(-2,0);B(10,2)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{-2+10}{2} = 4; y_M = \frac{0+2}{2} = 1 \Rightarrow M(4,1)$$

$$d_{MP} = \sqrt{(8-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

24.- $C(-5,-2);D(-3,8)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{CD}$:

$$x_M = \frac{-5-3}{2} = -4; y_M = \frac{-2+8}{2} = 3 \Rightarrow M(-4,3)$$
$$d_{MP} = \sqrt{(8+4)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

25.- $M(-2,9);N(6,-5)$

Solución:

Sea **C** el punto medio de $\boldsymbol{MN}$:

$$x_C = \frac{-2+6}{2} = 2; y_C = \frac{9-5}{2} = 2 \Rightarrow C(2,2)$$
$$d_{CP} = \sqrt{(8-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

26.- $M(-5,8);N(1,9)$

Solución:

Sea **C** el punto medio de $\boldsymbol{MN}$:

$$x_C=\frac{-5+1}{2}=-2;\, y_C=\frac{8+9}{2}=\frac{17}{2}\Rightarrow C\left(-2,\frac{17}{2}\right)$$

$$d_{CP}=\sqrt{(8+2)^2+\left(-2-\frac{17}{2}\right)^2}=\sqrt{100+\frac{441}{4}}=\frac{\sqrt{841}}{2}=\frac{29}{2}$$

En cada uno de los siguientes ejercicios, calcular la longitud de las tres medianas del triángulo cuyos vértices se dan:

27.- $A(-6,0);B(-2,10);C(4,-1)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M=\frac{-6-2}{2}=-4:\, y_M=\frac{0+10}{2}=5\Rightarrow M(-4,5)$$

$$d_{MC}=\sqrt{(4+4)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N=\frac{-2+4}{2}=1;\, y_N=\frac{10-1}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow N\left(1,\frac{9}{2}\right)$$

$$d_{NA}=\sqrt{(-6-1)^2+\left(0-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{49+\frac{81}{4}}=\frac{\sqrt{196+81}}{2}=\frac{\sqrt{277}}{2}=\frac{16,643}{2}=8,321$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$:

$$x_P=\frac{-6+4}{2}=-1;\, y_P=\frac{0-1}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow P\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$d_{PB}=\sqrt{(10+1)^2+\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{121+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{485}}{2}=\frac{22,022}{2}=11,011$$

28.- $A(4,6);B(1,-1);C(-1,7)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2};\, y_M=\frac{6-1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow M\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$$

$$d_{MC}=\sqrt{\left(-1-\frac{5}{2}\right)^2+\left(7-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{49+81}}{2}=\frac{\sqrt{130}}{2}=\frac{11,401}{2}=5,700$$

Sea ***N*** el punto medio de ***BC***:

$$x_N=\frac{1-1}{2}=0;y_N=\frac{-1+7}{2}=3\Rightarrow N(0,3)$$
$$d_{NA}=\sqrt{(4-0)^2+(6-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

Sea ***P*** el punto medio de ***CA***:

$$x_P=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2};y_P=\frac{6+7}{2}=\frac{13}{2}\Rightarrow P\left(\frac{3}{2},\frac{13}{2}\right)$$
$$d_{PB}=\sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-1-\frac{13}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{15}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{1+225}}{2}=\frac{\sqrt{226}}{2}=\frac{15,033}{2}=7,5166$$

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan los vértices de un triángulo. Hallar en cada caso el punto medio de los lados AB y BC y comprobar que la longitud del segmento que los une es igual a la mitad del lado CA.

29.- $A(-1,5);B(7,1);C(3,-3)$

Solución:

Sea ***M*** el punto medio de ***AB***:

$$x_M=\frac{-1+7}{2}=3;y_M=\frac{5+1}{2}=3\Rightarrow M(3,3)$$

Sea ***N*** el punto medio de ***BC***:

$$x_N=\frac{7+3}{2}=5;y_N=\frac{1-3}{2}=-1\Rightarrow N(5,-1)$$

Luego:

$$d_{MN}=\sqrt{(5-3)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$d_{CA} = \sqrt{(-1-3)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

De donde:

$$d_{MN} = \frac{1}{2} \cdot d_{CA}$$

30.- $A(3,4); B(1,-5); C(-4,1)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{3+1}{2} = 2; y_M = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(2, -\frac{1}{2}\right)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}; y_N = \frac{-5+1}{2} = -2 \Rightarrow N\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$$

Luego:

$$d_{MN} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}-2\right)^2 + \left(-2+\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{49+9}}{2} = \frac{\sqrt{58}}{2}$$

$$d_{CA} = \sqrt{(3+4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

De donde:

$$d_{MN} = \frac{1}{2} \cdot d_{CA}$$

31.- $A\left(1-\sqrt{5}, 3\right); B\left(2+2\sqrt{5}, 5\right); C\left(3-\sqrt{5}, -7\right)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{1-\sqrt{5}+2+2\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; y_M = \frac{3+5}{2} = 4 \Rightarrow M\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 4\right)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N = \frac{2+2\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}; y_N = \frac{5-7}{2} = -1 \Rightarrow N\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, -1\right)$$

Luego:

$$d_{MN} = \sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2} - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} = 5,099$$

$$d_{CA} = \sqrt{\left(1-\sqrt{5}-3+\sqrt{5}\right)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104} = 10,198$$

De donde:

$$d_{MN} = \frac{1}{2} \cdot d_{CA}$$

Demostrar en los siguientes ejercicios que el perímetro de los triángulos cuyos vértices se dan es el doble del perímetro del triángulo que forman los puntos medios de los lados:

32.- $A(-2,6); B(8,4); C(2,-10)$

Solución:

$$d_{AB} = \sqrt{(8+2)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{100+4} = \sqrt{104} = 10,198$$

$$d_{BC} = \sqrt{(2-8)^2 + (-10-4)^2} = \sqrt{36+196} = \sqrt{232} = 15,231$$

$$d_{CA} = \sqrt{(-2-2)^2 + (6+10)^2} = \sqrt{16+256} = \sqrt{272} = 16,492$$

El perímetro del triángulo mayor es:

$$P_1 = 10,198 + 15,231 + 16,492 = 41,921$$

Luego:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{-2+8}{2} = 3; y_M = \frac{6+4}{2} = 5 \Rightarrow M(3,5)$$

Sea ***N*** el punto medio de ***BC***:

$$x_N = \frac{8+2}{2} = 5; y_N = \frac{4-10}{2} = -3 \Rightarrow N(5,-3)$$

Sea ***P*** el punto medio de ***CA***:

$$x_P = \frac{-2+2}{2} = 0; y_P = \frac{6-10}{2} = -2 \Rightarrow P(0,-2)$$

De donde:

$$d_{MN} = \sqrt{(5-3)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 8,246$$
$$d_{NP} = \sqrt{(0-5)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} = 5,099$$
$$d_{PM} = \sqrt{(3-0)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} = 7,61577$$

El perímetro del triángulo menor es:

$$P_2 = 8,246 + 5,099 + 7,61577 = 20,96077$$

Entonces:

$$P_2 = \frac{P_1}{2}$$

33.- $A\left(-\frac{1}{2},4\right); B\left(-\frac{5}{2},3\right); C\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$

Solución:

$$d_{AB} = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3-4^2\right)} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = 2,236$$
$$d_{BC} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-3\right)^2} = \sqrt{36+\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{144+25}}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$$
$$d_{CA} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(4-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{16+\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{64+49}}{2} = \frac{\sqrt{113}}{2} = \frac{10,63}{2} = 5,315$$

El perímetro del triángulo mayor es:

$$P_1 = 2,,236 + 6,5 + 5,315 = 14,051$$

Luego:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)}{2} = -\frac{3}{2}; y_M = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{7}{2}}{2} = \frac{1}{2}; y_N = \frac{3 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow N\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$:

$$x_P = \frac{\frac{7}{2} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{2}; y_P = \frac{4 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{9}{4} \Rightarrow P\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$d_{MN} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{4} - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{49}{16}} = \frac{\sqrt{64+49}}{4} = \frac{\sqrt{113}}{4} = \frac{10,630}{4} = 2,6575$$

$$d_{NP} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4} - \frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,118$$

$$d_{PM} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2} - \frac{9}{4}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{144+25}}{4} = \frac{\sqrt{169}}{4} = \frac{13}{4} = 3,25$$

El perímetro del triángulo menor es:

$$P_2 = 2,6575 + 1,118 + 3,25 = 7,0255$$

Entonces:

$$P_2 = \frac{P_1}{2}$$

Determinar en los siguientes ejercicios las coordenadas del centro, el área del círculo y la longitud de la circunferencia, sabiendo que los puntos que se dan son los extremos de un diámetro.

34.- $A(-5,1);B(5,-3)$

Solución:

El centro de la circunferencia es:

$$x_C = \frac{-5+5}{2} = 0; y_C = \frac{1-3}{2} = -1 \Rightarrow C(0,-1)$$

El radio ***r*** de la circunferencia es:

$$r = d_{CB} = \sqrt{(5-0)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

El área del círculo es:

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{29}\right)^2 = 29\pi$$

La longitud de la circunferencia es:

$$L = 2\pi r = 2\pi\sqrt{29}$$

35.- $A(2,5);B(-4,-3)$

Solución:

El centro de la circunferencia es:

$$x_C = \frac{2-4}{2} = -1; y_C = \frac{5-3}{2} = 1 \Rightarrow C(-1,1)$$

El radio ***r*** de la circunferencia es:

$$r = r_{CB} = \sqrt{(-4+1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

El área del círculo es:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (5)^2 = 25\pi$$

La longitud de la circunferencia es:

$$L = 2\pi r = 2\pi \cdot (5) = 10\pi$$

36.- $A(-2,5); B(4,2)$

Solución:

El centro de la circunferencia es:

$$x_C = \frac{-2+4}{2} = 1; y_C = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow C\left(1, \frac{7}{2}\right)$$

El radio ***r*** de la circunferencia es:

$$r = d_{CB} = \sqrt{(4-1)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{45}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

El área del círculo es:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{45}}{2}\right)^2 = \frac{45\pi}{4}$$

La longitud de la circunferencia es:

$$L = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \cdot \pi$$

37.- $A\left(\sqrt{3}, -4\right); B\left(3\sqrt{2}, 7\right)$

Solución:

El centro de la circunferencia es:

$$x_C = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2}; y_C = \frac{-4+7}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow C\left(\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

El radio ***r*** de la circunferencia es:

$$r = d_{CB} = \sqrt{\left(3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(7 - \frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{121}{4}} = \frac{\sqrt{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 + 121}}{2} =$$

$$r = \frac{\sqrt{\left(3\cdot 1,41 - 1,73\right)^2 + 121}}{2} = \frac{\sqrt{\left(2,53\right)^2 + 121}}{2} = \frac{\sqrt{6,40+121}}{2} = \frac{\sqrt{127,4}}{2} = \frac{11,287}{2} = 5,643$$

El área del círculo es:

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(5,643\right)^2 = 31,85\pi$$

La longitud de la circunferencia es:

$$L = 2\pi r = 2\pi \cdot \left(5,643\right) = 11,286\pi$$

En los siguientes ejercicios *M* es el punto medio del segmento *AB*. Se dan en cada caso las coordenadas de *M* y las de uno de los extremos. Hallar las coordenadas del otro extremo.

38.- $A(-3,-3); M(-1,2)$

Solución:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$-1 = \frac{-3 + x_B}{2} \Rightarrow -2 = -3 + x_B \Rightarrow x_B = 1$$

$$2 = \frac{-3 + y_B}{2} \Rightarrow 4 = -3 + y_B \Rightarrow y_B = 7 \Rightarrow B(1,7)$$

39.- $B(2,-1); M\left(-2,\frac{3}{2}\right)$

Solución:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$-2=\frac{x_A+2}{2}\Rightarrow -4=x_A+2\Rightarrow x_A=-6$$
$$\frac{3}{2}=\frac{y_A-1}{2}\Rightarrow 3=y_A-1\Rightarrow y_A=4\Rightarrow A(-6,4)$$

40.- $A(5,9);M\left(8,\frac{7}{2}\right)$

Solución:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$8=\frac{5+x_B}{2}\Rightarrow 16=5+x_B\Rightarrow x_B=11$$
$$\frac{7}{2}=\frac{9+y_B}{2}\Rightarrow 7=9+y_B\Rightarrow y_B=-2\Rightarrow B(11,-2)$$

41.- $B\left(3+7\sqrt{5},2-\sqrt{3}\right);M\left(\frac{-1+8\sqrt{5}}{2},6\right)$

Solución:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$\frac{-1+8\sqrt{5}}{2}=\frac{x_A+3+7\sqrt{5}}{2}\Rightarrow -1+8\sqrt{5}=x_A+3+7\sqrt{5}\Rightarrow x_A=-4+\sqrt{5}$$
$$6=\frac{y_A+2-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 12=y_A+2-\sqrt{3}\Rightarrow y_A=10+\sqrt{3}\Rightarrow A\left(-4+\sqrt{5},10+\sqrt{3}\right)$$

42.- $A(3a-b,a-5b);M\left(4a,\frac{5a}{2}\right)$

Solución:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$4a=\frac{3a-b+x_B}{2}\Rightarrow 8a=3a-b+x_B\Rightarrow x_B=5a+b$$
$$\frac{5a}{2}=\frac{a-5b+y_B}{2}\Rightarrow 5a=a-5b+y_B\Rightarrow y_B=4a+5b\Rightarrow B(5a+b,4a+5b)$$

43.- $B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right); M\left(\frac{1}{12},\frac{1}{3}\right)$

Solución:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}; y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$\frac{1}{12}=\frac{x_A+\frac{1}{2}}{2}\Rightarrow \frac{1}{6}=\frac{2x_A+1}{2}\Rightarrow \frac{1}{3}=2x_A+1\Rightarrow \frac{1}{3}-1=2x_A\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{2}{3}=2x_A\Rightarrow x_A=-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3}=\frac{y_A+\frac{3}{5}}{2}\Rightarrow \frac{2}{3}=y_A+\frac{3}{5}\Rightarrow y_A=\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{10-9}{15}=\frac{1}{15}\Rightarrow A\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{15}\right)$$

En los siguientes ejercicios *M* es el punto medio del segmento *AB*. Calcular la coordenada faltante de cada uno de los extremos con los datos que se dan.

44.- $M(5,2)$; la abscisa de ***A*** es 3 y la ordenada de ***B*** es -1.

Solución:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}; y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

$$5=\frac{3+x_B}{2}\Rightarrow 10=3+x_B\Rightarrow x_B=7$$
$$2=\frac{y_A-1}{2}\Rightarrow 4=y_A-1\Rightarrow y_A=5$$

45.- $M\left(-\frac{5}{2},-2\right)$; la ordenada de ***A*** es 2 y la abscisa de ***B*** es 2.

Solución:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$-\frac{5}{2} = \frac{x_A + 2}{2} \Rightarrow -5 = x_A + 2 \Rightarrow x_A = -7$$

$$-2 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow -4 = 2 + y_B \Rightarrow y_B - 6$$

46.- $M\left(\frac{b}{2}, 2a\right)$; la abscisa de $\boldsymbol{A}$ es $3a$ y la ordenada de $\boldsymbol{B}$ es $3a+b$.

Solución:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{3a + x_B}{2} \Rightarrow b = 3a + x_B \Rightarrow x_B = b - 3a$$

$$2a = \frac{y_A + 3a + b}{2} \Rightarrow 4a = y_A + 3a + b \Rightarrow y_A = a - b$$

47.- $M\left(2\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$; la ordenada de $\boldsymbol{A}$ es $2\sqrt{3}$ y la abscisa de $\boldsymbol{B}$ es $4\sqrt{2}$.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$2\sqrt{2} = \frac{x_A + 4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 4\sqrt{2} = x_A + 4\sqrt{2} \Rightarrow x_A = 0$$

$$\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3} + y_B}{2} \Rightarrow 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + y_B \Rightarrow y_B = 0$$

$\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ y $\boldsymbol{P}$ son, en los ejercicios que siguen, los puntos medios de los lados de un triángulo. Determinar los vértices de un triángulo:

48.- $M(3,-1); N(-1,2); P(1,5)$

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$ y $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$ en el triángulo $\boldsymbol{ABC}$.

Determinemos primero las abscisas de los vértices del triángulo.

$$3=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow 6=x_A+x_B\rightarrow(I)$$

$$-1=\frac{x_B+x_C}{2}\Rightarrow -2=x_B+x_C\rightarrow(II)$$

$$1=\frac{x_A+x_C}{2}\Rightarrow 2=x_A+x_C\rightarrow(III)$$

$$(I)-(III)\Rightarrow 6-2=4=x_B-x_C\rightarrow(IV)$$

$$(II)+(IV)\Rightarrow -2+4=2=2x_B\Rightarrow x_B=1$$

De (I): $6=x_A+x_B\Rightarrow 6=x_A+1\Rightarrow x_A=5$

De (II): $-2=x_B+x_C\Rightarrow -2=1+x_C\Rightarrow x_c=-3$

Se determinarán ahora las ordenadas de los vértices del triángulo:

$$-1=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow -2=y_A+y_B\rightarrow(I)$$

$$2=\frac{y_B+y_C}{2}\Rightarrow 4=y_B+y_C\rightarrow(II)$$

$$5=\frac{y_A+y_C}{2}\Rightarrow 10=y_A+y_C\rightarrow(III)$$

$$(III)-(I)\Rightarrow 10+2=12=y_C-y_B\rightarrow(IV)$$

$$(II)+(IV)\Rightarrow 4+12=16=2y_C\Rightarrow y_C=8$$

De (II): $4=y_B+y_C\Rightarrow 4=y_B+8\Rightarrow y_B=-4$

De (I): $-2=y_A+y_B\Rightarrow -2=y_A-4\Rightarrow y_A=2$

Resumiendo:

$$A(5,2);B(1,-4);C(-3,8)$$

49.- $M(3,2);N(-1,-2);P(5,-4)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$ y $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$ en el triángulo $\boldsymbol{ABC}$.

Determinemos primero las abscisas de los vértices del triángulo.

$$3=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow 6=x_A+x_B\rightarrow(I)$$
$$-1=\frac{x_B+x_C}{2}\Rightarrow -2=x_B+x_C\rightarrow(II)$$
$$5=\frac{x_A+x_C}{2}\Rightarrow 10=x_A+x_C\rightarrow(III)$$
$$(III)-(I)\Rightarrow 10-6=4=x_C-x_B\rightarrow(IV)$$
$$(IV)+(II)\Rightarrow 4-2=2=2x_C\Rightarrow x_C=1$$

De (III): $10=x_A+x_C\Rightarrow 10=x_A+1\Rightarrow x_A=9$

De (I): $6=x_A+x_B\Rightarrow 6=9+x_B\Rightarrow x_B=-3$

Se determinarán ahora las ordenadas de los vértices del triángulo:

$$2=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow 4=y_A+y_B\rightarrow(I)$$
$$-2=\frac{y_B+y_C}{2}\Rightarrow -4=y_B+y_C\rightarrow(II)$$
$$-4=\frac{y_A+y_C}{2}\Rightarrow -8=y_A+y_C\rightarrow(III)$$
$$(I)-(III)\Rightarrow 4+8=12=y_B-y_C\rightarrow(IV)$$
$$(IV)+(II)\Rightarrow 12-4=8=2y_B\Rightarrow y_B=4$$

De (I): $4=y_A+y_B\Rightarrow 4=y_A+4\Rightarrow y_A=0$

De (II): $-4=y_B+y_C\Rightarrow -4=4+y_C\Rightarrow y_C=-8$

Resumiendo:

$$A(9,0);B(-3,4);C(1,-8)$$

50.- $M\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right);N\left(-\frac{3}{2},-2\right);P\left(2,\frac{3}{2}\right)$

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$ y $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$ en el triángulo $\boldsymbol{ABC}$.

Determinemos primero las abscisas de los vértices del triángulo.

$$-\frac{1}{2}=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow -1=x_A+x_B\rightarrow(I)$$
$$-\frac{3}{2}=\frac{x_B+x_C}{2}\Rightarrow -3=x_B+x_C\rightarrow(II)$$
$$2=\frac{x_A+x_C}{2}\Rightarrow 4=x_A+x_C\rightarrow(III)$$
$$(III)-(I)\Rightarrow 4+1=5=x_C-x_B\rightarrow(IV)$$
$$(IV)+(II)\Rightarrow 5-3=2=2x_C\Rightarrow x_C=1$$

De (III): $4=x_A+x_C\Rightarrow 4=x_A+1\Rightarrow x_A=3$

De (II) : $-3=x_B+x_C\Rightarrow -3=x_B+1\Rightarrow x_B=-4$

Se determinarán ahora las ordenadas de los vértices del triángulo:

$$\frac{7}{2}=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow 7=y_A+y_B\rightarrow(I)$$
$$-2=\frac{y_B+y_C}{2}\Rightarrow -4=y_B+y_C\rightarrow(II)$$
$$\frac{3}{2}=\frac{y_A+y_C}{2}\Rightarrow 3=y_A+y_C\rightarrow(III)$$
$$(I)-(III)\Rightarrow 7-3=4=y_B-y_C\rightarrow(IV)$$
$$(IV)+(II)\Rightarrow 4-4=0=2y_B\Rightarrow y_B=0$$

De (I): $7=y_A+y_B\Rightarrow 7=y_A+0\Rightarrow y_A=7$

De (II): $-4=y_B+y_C\Rightarrow -4=0+y_C\Rightarrow y_C=-4$

Resumiendo:

$$A(3,7);B(-4,0);C(1,-4)$$

En los ejercicios que siguen A y B son dos vértices consecutivos de un paralelogramo y M el punto de intersección de sus diagonales. Determinar las coordenadas de los otros dos vértices.

51.- $A(-1,-4); B(-3,4); M(1,1)$

Solución:

Se considera primero la diagonal $\boldsymbol{AC}$:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2}; y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$$
$$1 = \frac{-1 + x_C}{2} \Rightarrow 2 = -1 + x_C \Rightarrow x_C = 3$$
$$1 = \frac{-4 + y_C}{2} \Rightarrow 2 = -4 + y_C \Rightarrow y_C = 6 \Rightarrow C(3,6)$$

Se considera ahora la diagonal $\boldsymbol{BD}$:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2}; y_M = \frac{y_B + y_D}{2}$$
$$1 = \frac{-3 + x_D}{2} \Rightarrow 2 = -3 + x_D \Rightarrow x_D = 5$$
$$1 = \frac{4 + y_D}{2} \Rightarrow 2 = 4 + y_D \Rightarrow y_D = -2 \Rightarrow D(5,-2)$$

52.- $A(4,2); B(5,7); M\left(\frac{1}{2},3\right)$

Solución:

Se considera primero la diagonal $\boldsymbol{AC}$:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2}; y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{4 + x_C}{2} \Rightarrow 1 = 4 + x_C \Rightarrow x_C = -3$$
$$3 = \frac{2 + y_C}{2} \Rightarrow 6 = 2 + y_C \Rightarrow y_C = 4 \Rightarrow C(-3,4)$$

Se considera ahora la diagonal $\boldsymbol{BD}$:

$x_M = \frac{x_B + x_D}{2}; y_M = \frac{y_B + y_D}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{5 + x_D}{2} \Rightarrow 1 = 5 + x_D \Rightarrow x_D = -4$

$3 = \frac{7 + y_D}{2} \Rightarrow 6 = 7 + y_D \Rightarrow y_D = -1 \Rightarrow D(-4,-1)$

53.- $A(-3,5); B(1,7); M(1,1)$

Solución:

Se considera primero la diagonal $\boldsymbol{AC}$:

$x_M = \frac{x_A + x_C}{2}; y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$

$1 = \frac{-3 + x_C}{2} \Rightarrow 2 = -3 + x_C \Rightarrow x_C = 5$

$1 = \frac{5 + y_C}{2} \Rightarrow 2 = 5 + y_C \Rightarrow y_C = -3 \Rightarrow C(5,-3)$

Se considera ahora la diagonal $\boldsymbol{BD}$:

$x_M = \frac{x_B + x_D}{2}; y_M = \frac{y_B + y_D}{2}$

$1 = \frac{1 + x_D}{2} \Rightarrow 2 = 1 + x_D \Rightarrow x_D = 1$

$1 = \frac{7 + y_D}{2} \Rightarrow 2 = 7 + y_D \Rightarrow y_D = -5 \Rightarrow D(1,-5)$

54.- Del punto $A(-1,4)$ se ha trazado un segmento al punto $B\left(3,-\frac{3}{2}\right)$. ¿Hasta qué punto es necesario prolongarlo en la misma dirección para que se duplique su longitud?

Solución:

Si se duplica la longitud del segmento $\boldsymbol{AB}$, formando un nuevo segmento $\boldsymbol{AC}$, el punto $\boldsymbol{B}$ pasa a ser el punto medio de $\boldsymbol{AC}$, entonces:

$x_B = \frac{x_A + x_C}{2}; y_B = \frac{y_A + y_C}{2}$

$$3=\frac{-1+x_C}{2}\Rightarrow 6=-1+x_c\Rightarrow x_C=7$$
$$-\frac{3}{2}=\frac{4+y_C}{2}\Rightarrow -3=4+y_C\Rightarrow y_C=-7\Rightarrow C(7,-7)$$

55.- Demostrar que el triángulo que resulta de unir los puntos medios del triángulo de vértices $A(-5,-2);B(3,6);C(7,2)$ es rectángulo.

Solución:

Sea $\boldsymbol{M}$ el punto medio de $\boldsymbol{AB}$:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2};y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$
$$x_M=\frac{-5+3}{2}=-1;y_M=\frac{-2+6}{2}=2\Rightarrow M(-1,2)$$

Sea $\boldsymbol{N}$ el punto medio de $\boldsymbol{BC}$:

$$x_N=\frac{x_B+x_C}{2};y_N=\frac{y_B+y_C}{2}$$

$$x_N=\frac{3+7}{2}=5;y_N=\frac{6+2}{2}=4\Rightarrow N(5,4)$$

Sea $\boldsymbol{P}$ el punto medio de $\boldsymbol{CA}$:

$$x_P=\frac{x_A+x_C}{2};y_P=\frac{y_A+y_C}{2}$$
$$x_P=\frac{-5+7}{2}=1;y_P=\frac{-2+2}{2}=0\Rightarrow P(1,0)$$

Ahora se encontrarán las longitudes de los lados del triángulo menor, $\boldsymbol{MNP}$:

$$\overline{MN}=\sqrt{(5+1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$$
$$\overline{NP}=\sqrt{(1-5)^2+(0-4)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$
$$\overline{PM}=\sqrt{(-1-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$$

Luego, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left(\sqrt{8}\right)^2+\left(\sqrt{32}\right)^2=\left(\sqrt{40}\right)^2 \Rightarrow 40=40 \Rightarrow OK$$

Entonces, si $\overline{MN}$ es la hipotenusa, $\angle P = 90°$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41A.

Tema: La línea recta (Hoffmann, 5to año-Ejercicio # 90).

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde m es la pendiente de la línea recta y b es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las y.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ siendo a el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las x y b es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las y.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ecuación de la pendiente de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Conociendo un solo punto y la pendiente, se puede escribir:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x\cos\theta + ysen\theta - \rho = 0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\theta = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta = 90º \Rightarrow tg\theta = \infty \Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(m_1\right)\left(m_2\right)=-1\Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida*** ***d*** entre un punto $P_0\left(x_0,y_0\right)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l\equiv Ax+By+C=0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{(P_0,l)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo a como sigue:

(a).- Si $C\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0;B\neq 0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0;B=0\Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax + By + C_1; l_2 \equiv Ax + By + C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

$$d_{l_1,l_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

PREGUNTAS:

Ejercicio # 90:

Calcular el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:

1).- $A(-3,1); B(1,4); C(2,-6)$

Solución:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(1-2)^2 + (4+6)^2} = \sqrt{101}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{(2+3)^2 + (-6-1)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

Luego:

$$P = 5 + \sqrt{101} + \sqrt{74}$$

2).- $A(2,3); B\left(\frac{5}{2},-7\right); C\left(-\frac{1}{2},-3\right)$

Solución:

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-2\right)^2 + (-7-3)^2} = \sqrt{\left(\frac{5-4}{2}\right)^2 + (-10)^2} = \sqrt{\frac{401}{4}} = \frac{\sqrt{401}}{2}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)^2 + (-3+7)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\overline{CA} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+36} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$$

Luego:

$$P=\frac{\sqrt{401}}{2}+5+\frac{13}{2}=\frac{\sqrt{401}+10+13}{2}=\frac{23+\sqrt{401}}{2}$$

Demostrar que son isósceles los triángulos cuyos vértices son:

3).- $A(2,6);B(5,10);C(1,7)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(10-6)^2}=\sqrt{(3)^2+(4)^2}=\sqrt{25}=5$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(1-5)^2+(7-10)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(2-1)^2+(7-6)^2}=\sqrt{2}$$
$$\overline{AB}=\overline{BC}=5$$

Si es isósceles.

4).- $A(2,0);B(6,0);C(4,4)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{(6-2)^2+(0)^2}=2$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(4-6)^2+(4-0)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(2-4)^2+(0-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$
$$\overline{BC}=\overline{CA}=\sqrt{20}$$

Si es isósceles.

5).- $A(2,-8);B(-4,-2);C(6,2)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-4-2)^2+(-2+8)^2}=\sqrt{(-6)^2+(6)^2}=\sqrt{72}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(6+4)^2+(2+2)^2}=\sqrt{116}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(6-2)^2+(2+8)^2}=\sqrt{116}$$
$$\overline{BC}=\overline{CA}=\sqrt{116}$$

Si es isósceles.

6).- $A(6,7);B(-8,-1);C(-2,-7)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-8-6)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{196+64}=\sqrt{260}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-2+8)^2+(-7+1)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(6+2)^2+(7+7)^2}=\sqrt{64+196}=\sqrt{260}$$
$$\overline{AB}=\overline{CA}=\sqrt{260}$$

Si es isósceles.

7).- $A\left(-\frac{7}{2},2\right);B\left(\frac{5}{2},6\right);C\left(-\frac{3}{2},0\right)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}+\frac{7}{2}\right)^2+(6-2)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+(0-6)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{\left(-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\right)^2+(2-0)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$
$$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{52}$$

Si es isósceles.

8).- $A\left(-3,1+\sqrt{2}\right);B\left(3,5+\sqrt{2}\right);C\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{(3+3)^2+\left(5+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{(6)^2+(4)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-1-3)^2+\left(-1+\sqrt{2}-5-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{(4)^2+(-6)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(-1+3)^2+\left(1+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\right)}=\sqrt{4}=2$$
$$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{52}$$

Si es isósceles.

Demostrar que los triángulos cuyos vértices se dan a continuación son rectángulos y calcular su área:

9.- $A(10,5);B(3,2);C(6,-5)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{(3-10)^2+(2-5)^2}=\sqrt{(-7)^2+(-3)^2}=\sqrt{58}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(6-3)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{58}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(10-6)^2+(5+5)^2}=\sqrt{116}$$

Si es un triángulo rectángulo, se cumple Pitágoras:

$$\left(\sqrt{58}\right)^2+\left(\sqrt{58}\right)^2=\left(\sqrt{116}\right)^2\Rightarrow OK$$

Area: $A=\dfrac{\left(\sqrt{58}\right)\cdot\left(\sqrt{58}\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{(58)^2}}{2}=\dfrac{58}{2}=29$

10.- $A(3,-2);B(-2,3);C(0,4)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(3+2)^2}=\sqrt{50}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(0+2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(3-0)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{45}$$

Si es un triángulo rectángulo, se cumple Pitágoras:

$$\left(\sqrt{45}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{50}\right)^2 \Rightarrow OK$$

Area: $A=\dfrac{\left(\sqrt{45}\right)\cdot\left(\sqrt{5}\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{(45)\cdot(5)}}{2}=\dfrac{\sqrt{225}}{2}=\dfrac{15}{2}$

11.- $A(-2,8);B(-6,1);C(0,4)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{(-6+2)^2+(1-8)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(0+6)^2+(4-1)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(-2-0)^2+(8-4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$$

Si es un triángulo rectángulo, se cumple Pitágoras:

$$\left(\sqrt{20}\right)^2+\left(\sqrt{45}\right)^2=\left(\sqrt{65}\right)^2 \Rightarrow OK$$

Area: $A=\dfrac{\left(\sqrt{20}\right)\cdot\left(\sqrt{45}\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{(20)\cdot(45)}}{2}=\dfrac{\sqrt{900}}{2}=\dfrac{30}{2}=15$

12.- $A(7,5);B(7,-3);C(3,1)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{(7-7)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{64}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(3-7)^2+(1+3)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(7-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$$

Si es un triángulo rectángulo, se cumple Pitágoras:

$$\left(\sqrt{32}\right)^2+\left(\sqrt{32}\right)^2=\left(\sqrt{64}\right)^2 \Rightarrow OK$$

Area: $A=\dfrac{\left(\sqrt{32}\right)\cdot\left(\sqrt{32}\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{(32)^2}}{2}=\dfrac{32}{2}=16$

13.- $A(3,-1);B(2,2);C(-7,-1)$

Solución:

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-7-2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(3+7)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{100}$$

Si es un triángulo rectángulo, se cumple Pitágoras:

$$\left(\sqrt{10}\right)^2+\left(\sqrt{90}\right)^2=\left(\sqrt{100}\right)^2 \Rightarrow OK$$

Area: $A=\dfrac{\left(\sqrt{10}\right)\cdot\left(\sqrt{90}\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{(10)\cdot(90)}}{2}=\dfrac{\sqrt{900}}{2}=\dfrac{30}{2}=15$

14.- $A(-3,1);B(7,-3);C(-5,-4)$

Solución:
$$\overline{AB}=\sqrt{(7+3)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{(10)^2+(-4)^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{116}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-5-7)^2+(-4+3)^2}=\sqrt{(-12)^2+(-1)^2}=\sqrt{145}$$
$$\overline{CA}=\sqrt{(-3+5)^2+(1+4)^2}=\sqrt{(2)^2+(5)^2}=\sqrt{29}$$

Si es un triángulo rectángulo, se cumple Pitágoras:

$$\left(\sqrt{29}\right)^2+\left(\sqrt{116}\right)^2=\left(\sqrt{145}\right)^2 \Rightarrow OK$$

Area: $A=\dfrac{\left(\sqrt{29}\right)\cdot\left(\sqrt{116}\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{(29)\cdot(116)}}{2}=\dfrac{\sqrt{3364}}{2}=\dfrac{58}{2}=29$

Demostrar que son isósceles y rectángulos los triángulos cuyos vértices son:

15.- $A(2,7);B(3,-2);C(-2,2)$

Solución:

$\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(-2-7)^2}=\sqrt{(1)^2+(9)^2}=\sqrt{82}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-2-3)^2+(2+2)^2}=\sqrt{(-5)^2+(4)^2}=\sqrt{41}$

$\overline{CA}=\sqrt{(2+2)^2+(7-2)^2}=\sqrt{(4)^2+(5)^2}=\sqrt{41}$

$\overline{BC}=\overline{CA}=\sqrt{41}\Rightarrow$ Isósceles

Aplicando Pitágoras:

$\left(\sqrt{41}\right)^2+\left(\sqrt{41}\right)^2=\left(\sqrt{82}\right)^2\Rightarrow$ Rectángulo.

16.- $A(3,1);B(-3,-7);C(-5,7)$

Solución:

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-3)^2+(-7-1)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}$

$\overline{BC}=\sqrt{(-5+3)^2+(7+7)^2}=\sqrt{(-2)^2+(14)^2}=\sqrt{4+196}=\sqrt{200}$

$\overline{CA}=\sqrt{(3+5)^2+(1-7)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}$

Luego:

$\overline{AB}=\overline{CA}=\sqrt{100}\Rightarrow$ Isósceles.

Aplicando Pitágoras:

$\left(\sqrt{100}\right)^2+\left(\sqrt{100}\right)^2=\left(\sqrt{200}\right)^2\Rightarrow$ Rectángulo

Demostrar que los cuadriláteros cuyos vértices se dan a continuación son paralelogramos:

Pendiente: $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

17.- $A(-1,-2);B(0,1);C(-3,2);D(-4,-1)$

Solución:

$m_{AB}=\dfrac{1+2}{0+1}=3; m_{BC}=\dfrac{2-1}{-3-0}=-\dfrac{1}{3}; m_{CD}=\dfrac{-1-2}{-4+3}=3; m_{DA}=\dfrac{-2+1}{-1+4}=-\dfrac{1}{3}$

Luego:

$AB \parallel CD; BC \parallel DA$

18.- $A(-1,-5); B(2,1); C(1,5); D(-2,-1)$

Solución:

$$m_{AB} = \frac{1+5}{2+1} = 2; m_{BC} = \frac{5-1}{1-2} = -4; m_{CD} = \frac{-1-5}{-2-1} = 2; m_{DA} = \frac{-5+1}{-1+2} = -4$$

Luego:

$AB \parallel CD; BC \parallel DA$

19.- $A(2,4); B(6,2); C(8,6); D(4,8)$

Solución:

$$m_{AB} = \frac{2-4}{6-2} = -\frac{1}{2}; m_{BC} = \frac{6-2}{8-6} = 2; m_{CD} = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2}; m_{DA} = \frac{4-8}{2-4} = 2$$

Luego:
$AB \parallel CD; BC \parallel DA$

Demostrar que los vértices que se dan a continuación pertenecen en cada caso a un rombo:

Los lados de un rombo son todos iguales y sus diagonales se cruzan a 90º, sus ángulos opuestos son iguales:

20.- $A(-1,-3); B(0,0); C(3,1); D(2,-2)$

Las pendientes de las diagonales y el ángulo que forman son:

$$m_{AC} = \frac{1+3}{3+1} = 1; m_{BD} = \frac{-2-0}{2-0} = -1 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow 90º$$

Las longitudes de los lados son:

$$\overline{AB} = \sqrt{(0+1)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{10}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$$
$$\overline{CD} = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{10}$$
$$\overline{DA} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{10}$$
$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

Para calcular los ángulos de cruce de los lados, se debe conocer la pendiente de cada recta:

$$m_{AB} = \frac{0+3}{0+1} = 3; m_{BC} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}; m_{CD} = \frac{-2-1}{2-3} = 3; m_{DA} = \frac{-3+2}{-1-2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB \parallel CD; BC \parallel DA$$

Angulos opuestos, (como es un paralelogramo, basta con verificar dos de ellos):

Tomemos $\angle A$ y $\angle C$:

$$tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \Rightarrow tgA = \frac{m_{AB} - m_{AD}}{1 + m_{AB} \cdot m_{AD}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \angle A = 53{,}123^{o}$$

$$tgC = \frac{m_{CD} - m_{BC}}{1 + m_{CD} \cdot m_{BC}} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \angle C = 53{,}123^{o}$$

Nota: Se ha demostrado que es un rombo, sin ser un cuadrado, el cual es un caso especial de los rombos.

21.- $A(1,1); B(2,-4); C(-3,-3); D(-4,2)$

Solución:

Las pendientes de las diagonales y el ángulo que forman son:

$$m_{AC} = \frac{-3-1}{-3-1} = 1; m_{BD} = \frac{2+4}{-4-2} = -1 \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BD} = -1 \Rightarrow 90^{o}$$

Las longitudes de los lados son:

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{(1)^2+(-5)^2}=\sqrt{26}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(-3-2)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{26}$$
$$\overline{CD}=\sqrt{(-4+3)^2+(2+3)^2}=\sqrt{26}$$
$$\overline{DA}=\sqrt{(1+4)^2+(1-2)^2}=\sqrt{26}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$$

Para calcular los ángulos de cruce de los lados, se debe conocer la pendiente de cada recta:

$$m_{AB}=\frac{-4-1}{2-1}=-5;m_{BC}=\frac{-3+4}{-3-2}=-\frac{1}{5};m_{CD}=\frac{2+3}{-4+3}=-5;m_{DA}=\frac{1-2}{1+4}=-\frac{1}{5}\Rightarrow$$
$$AB\parallel CD;BC\parallel DA$$

Angulos opuestos, (como es un paralelogramo, basta con verificar dos de ellos):

Tomemos $\angle A$ y $\angle C$:

$$tg\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}\Rightarrow tgA=\frac{m_{AB}-m_{AD}}{1+m_{AB}\cdot m_{AD}}=\frac{-5+\frac{1}{5}}{1+5\cdot\frac{1}{5}}=\frac{\frac{-24}{5}}{2}=-\frac{24}{10}\Rightarrow\angle A=112,619º$$

$$tgC=\frac{m_{CD}-m_{BC}}{1+m_{CD}\cdot m_{BC}}=\frac{-5+\frac{1}{5}}{1+5\cdot\frac{1}{5}}=\frac{-24}{10}\Rightarrow\angle C=112,619º$$

22.- $A(-10,6);B(-3,4);C(-1,-3);D(-8,-1)$

Solución:

Las pendientes de las diagonales y el ángulo que forman son:

$$m_{AC}=\frac{-3-6}{-1+10}=-1;m_{BD}=\frac{-1-4}{-8+3}=1\Rightarrow m_{AC}\cdot m_{BD}=-1\Rightarrow 90º$$

Las longitudes de los lados son:

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(-3+10\right)^2+\left(4-6\right)^2}=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{\left(-1+3\right)^2+\left(-3-4\right)^2}=\sqrt{53}$$
$$\overline{CD}=\sqrt{\left(-8+1\right)^2+\left(-1+3\right)^2}=\sqrt{53}$$
$$\overline{DA}=\sqrt{\left(-10+8\right)^2+\left(6+1\right)^2}=\sqrt{53}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}$$

Para calcular los ángulos de cruce de los lados, se debe conocer la pendiente de cada recta:

$$m_{AB}=\frac{4-6}{-3+10}=-\frac{2}{7};m_{BC}=\frac{-3-4}{-1+3}=-\frac{7}{2};m_{CD}=\frac{-1+3}{-8+1}=-\frac{2}{7};m_{DA}=\frac{6+1}{-10+8}=-\frac{7}{2}\Rightarrow$$
$$AB\parallel CD;BC\parallel DA$$

Angulos opuestos, (como es un paralelogramo, basta con verificar dos de ellos):

Tomemos $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$:

$$tg\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}\Rightarrow tgA=\frac{m_{AB}-m_{AD}}{1+m_{AB}\cdot m_{AD}}=\frac{-\frac{2}{7}+\frac{7}{2}}{1+\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}}=\frac{\frac{10}{14}}{2}=\frac{10}{28}\Rightarrow\measuredangle A=19,6516^{\circ\,\circ}$$

$$tgC=\frac{m_{CD}-m_{BC}}{1+m_{CD}\cdot m_{BC}}=\frac{-\frac{2}{7}+\frac{7}{2}}{1+\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{2}}=\frac{10}{28}\Rightarrow\measuredangle C=19,6516^{\circ}$$

Demostrar que los vértices que se dan a continuación pertenecen en cada caso a un cuadrado:

23.- $A\left(1,4\right);B\left(6,2\right);C\left(4,-3\right);D\left(-1,-1\right)$

Solución:

Las longitudes de los lados son:

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(6-1\right)^2+\left(2-4\right)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$
$$\overline{BC}=\sqrt{\left(4-6\right)^2+\left(-3-2\right)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$
$$\overline{CD}=\sqrt{\left(-1-4\right)^2+\left(-1+3\right)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$
$$\overline{DA}=\sqrt{\left(1+1\right)^2+\left(4+1\right)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

Las pendientes de los lados son:

$$m_{AB} = \frac{2-4}{6-1} = -\frac{2}{5}; m_{BC} = \frac{-3-2}{4-6} = \frac{5}{2}; m_{CD} = \frac{-1+3}{-1-4} = -\frac{2}{5}; m_{DA} = \frac{4+1}{1+1} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AB \parallel CD; BC \parallel DA$$

También, los lados adyacentes, que se cortan, son perpendiculares, como se prueba:

$$m_{AB} \cdot m_{BC} = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = -1 \Rightarrow \angle B = 90^{o}$$
$$m_{BC} \cdot m_{CD} = \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -1 \Rightarrow \angle C = 90^{o}$$
$$m_{CD} \cdot m_{DA} = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = -1 \Rightarrow \angle D = 90^{o}$$
$$m_{DA} \cdot m_{AB} = \left(\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -1 \Rightarrow \angle A = 90^{o}$$

Es un cuadrado.

24.- $A(4,6); B(8,3); C(5,-1); D(1,2)$

Solución:

Las longitudes de los lados son:

$$\overline{AB} = \sqrt{(8-4)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(5-8)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 25$$
$$\overline{CD} = \sqrt{(1-5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$
$$\overline{DA} = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

Las pendientes de los lados son:

$$m_{AB} = \frac{3-6}{8-4} = -\frac{3}{4}; m_{BC} = \frac{-1-3}{5-8} = \frac{4}{3}; m_{CD} = \frac{2+1}{1-5} = -\frac{3}{4}; m_{DA} = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$
$$AB \parallel CD; BC \parallel DA$$

También, los lados adyacentes, que se cortan, son perpendiculares, como se prueba:

$$m_{AB} \cdot m_{BC} = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) = -1 \Rightarrow \angle B = 90^{\circ}$$
$$m_{BC} \cdot m_{CD} = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Rightarrow \angle C = 90^{\circ}$$
$$m_{CD} \cdot m_{DA} = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\right) = -1 \Rightarrow \angle D = 90^{\circ}$$
$$m_{DA} \cdot m_{AB} = \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Rightarrow \angle A = 90^{\circ}$$

Es un cuadrado.

25.- $A(-7,-1); B(0,3); C(4,-4); D(-3,-8)$

Solución:

Las longitudes de los lados son:

$$\overline{AB} = \sqrt{(0+7)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(4-0)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$
$$\overline{CD} = \sqrt{(-3-4)^2 + (-8+4)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65}$$
$$\overline{DA} = \sqrt{(-7+3)^2 + (-1+8)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$$

Las pendientes de los lados son:

$$m_{AB} = \frac{3+1}{0+7} = \frac{4}{7}; m_{BC} = \frac{-4-3}{4-0} = -\frac{7}{4}; m_{CD} = \frac{-8+4}{-3-4} = \frac{4}{7}; m_{DA} = \frac{-1+8}{-7+3} = -\frac{7}{4} \Rightarrow$$
$$AB \parallel CD : BC \parallel DA$$

También, los lados adyacentes, que se cortan, son perpendiculares, como se prueba:

$$m_{AB} \cdot m_{BC} = \left(\frac{4}{7}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right) = -1 \Rightarrow \angle B = 90°$$

$$m_{BC} \cdot m_{CD} = \left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{7}\right) = -1 \Rightarrow \angle C = 90°$$

$$m_{CD} \cdot m_{DA} = \left(\frac{4}{7}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right) = -1 \Rightarrow \angle D = 90°$$

$$m_{DA} \cdot m_{AB} = \left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{7}\right) = -1 \Rightarrow \angle A = 90°$$

Es un cuadrado.

Calcular en cada uno de los siguientes casos la distancia entre los puntos cuyas coordenadas se dan:

26.- $A(2a,-b);B(5a,3b)$

Solución:

$$\overline{AB} = \sqrt{(5a-2a)^2 + (3b+b)^2} = \sqrt{9a^2+16b^2}$$

27.- $C(-m,n);D(3m,9n)$

Solución:

$$\overline{CD} = \sqrt{(3m+m)^2 + (9n-n)^2} = \sqrt{16m^2+64n^2} = 4\sqrt{m^2+4n^2}$$

28.- $M(x,3);N(3x,-2)$

Solución:

$$\overline{MN} = \sqrt{(3x-x)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{4x^2+25}$$

29.- $P(m,-3);Q(2,m)$

Solución:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2-m)^2 + (m+3)^2} = \sqrt{(4-4m+m^2)+(m^2+6m+9)} = \sqrt{13+2m+2m^2}$$

30.- $R(a,-3);S\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3a}\right)$

Solución:

$$\overline{RS}=\sqrt{\left(-\sqrt{3}-a\right)^2+\left(-\sqrt{3a}+3\right)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{(-1)^2\cdot\left(3+2a\sqrt{3}+a^2\right)+\left(3a-6\sqrt{3a}+9\right)}=\sqrt{12+2a\sqrt{3}-6\sqrt{3a}+a^2}$$

31.- Determinar las coordenadas del punto $\boldsymbol{P}$ de abscisa 2 que equidista de los puntos: $A(-3,4);B(-1,-4)$

Solución:
$d_{PA}=d_{PB}$

$$\sqrt{(2+3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(y+4)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(5)^2+\left(y^2-8y+16\right)=(3)^2+\left(y^2+8y+16\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25-9=16y\Rightarrow y=1\Rightarrow P(2,1)$$

32.- Determinar las coordenadas del punto $\boldsymbol{P}$ de ordenada -1 que equidista de los puntos: $M(-6,0);N(2,-8)$.

Solución:
$d_{PM}=d_{PN}$

$$\sqrt{(x+6)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(-1+8)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(x^2+12x+36\right)+1=\left(x^2-4x+4\right)+49\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16x=16\Rightarrow x=1\Rightarrow P(1,-1)$$

33.- Determinar las coordenadas del punto $\boldsymbol{P}$ de abscisa -3 que equidista de los puntos: $A(-1,3);B(2,-4)$.

Solución:
$d_{PA}=d_{PB}$

$$\sqrt{(-3+1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(-3-2)^2+(y+4)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(-2)^2+\left(y^2-6y+9\right)=(-5)^2+\left(y^2+8y+16\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 13-6y=41+8y\Rightarrow 14y=-28\Rightarrow y=-2\Rightarrow P(-3,-2)$$

34.- Determinar las coordenadas del punto $\boldsymbol{P}$ de ordenada 7 que equidista de los puntos: $K(-2,-1);L(5,8)$.

Solución:

$d_{PK} = d_{PL}$

$$\sqrt{(x+2)^2+(7+1)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(7-8)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x^2+4x+4\right)+64 = \left(x^2-10x+25\right)+1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14x = -42 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow P(-3,7)$$

35.- Determinar las coordenadas del punto $\boldsymbol{P}$ del eje de abscisas equidistante de los puntos: $A(3,4);B(5,8)$.

Solución:

$d_{PA} = d_{PB}$

$$\sqrt{(x-3)^2+(0-4)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(0-8)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x^2-6x+9\right)+16 = \left(x^2-10x+25\right)+64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x = 64 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow P(16,0)$$

36.- Determinar las coordenadas del punto $\boldsymbol{P}$ del eje de ordenadas que equidista de los puntos: $M(2,6);N(9,-5)$.

Solución:

$d_{PM} = d_{PN}$

$$\sqrt{(0-2)^2+(y-6)^2} = \sqrt{(0-9)^2+(y+5)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4+\left(y^2-12y+36\right) = 81+\left(y^2+10y+25\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -22y = 66 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow P(0,-3)$$

Determinar las coordenadas del punto C que equidista de los puntos:

37.- $M(-5,3);N(1,9);P(9,1)$

Solución:

$d_{CM} = d_{CN} = d_{CP}$

$$d_{CM} = \sqrt{(x+5)^2 + (y-3)^2} \rightarrow (I)$$
$$d_{CN} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-9)^2} \rightarrow (II)$$
$$d_{CP} = \sqrt{(x-9)^2 + (y-1)^2} \rightarrow (III)$$

Haciendo:

$(I) = (II)$

$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 6y + 9) = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 18y + 81) \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x + 12y = 48 \Rightarrow x + y = 4 \rightarrow (IV)$

Haciendo:

$(I) = (III)$

$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 6y + 9) = (x^2 - 18x + 81) + (y^2 - 2y + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 28x - 4y = 48 \Rightarrow 7x - y = 12 \rightarrow (V)$

Sumando (IV) y (V):

$8x = 16 \Rightarrow x = 2$

Sustituyendo el valor $x = 2$ en (IV):

$2 + y = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow C(2,2)$

38.- $P(3,3); Q(6,2); R(8,-2)$.

Solución:

$d_{PC} = d_{QC} = d_{RC}$

$$d_{PC} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} \rightarrow (I)$$
$$d_{QC} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} \rightarrow (II)$$
$$d_{RC} = \sqrt{(x-8)^2 + (y+2)^2} \rightarrow (III)$$

Haciendo $(I) = (II)$

$$\left(x^2-6x+9\right)+\left(y^2-6y+9\right)=\left(x^2-12x+36\right)+\left(y^2-4y+4\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x-2y=22\Rightarrow 3x-y=11\rightarrow(IV)$$

Haciendo $(I)=(III)$

$$\left(x^2-6x+9\right)+\left(y^2-6y+9\right)=\left(x^2-16x+64\right)+\left(y^2+4y+4\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x-10y=50\Rightarrow x-y=5\rightarrow(V)$$

Restando $(IV)-(V)\Rightarrow 2x=11-5=6\Rightarrow x=3$

Sustituyendo $x=3$ en (V):

$$3-y=5\Rightarrow y=-2\Rightarrow C(3,-2)$$

39.- $A(4,3);B(2,7);D(-3,-8)$

Solución:

$$d_{AC}=d_{BC}=d_{DC}$$

$$d_{AC}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\rightarrow(I)$$
$$d_{BC}=\sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2}\rightarrow(II)$$
$$d_{DC}=\sqrt{(x+3)^2+(y+8)^2}\rightarrow(III)$$

Haciendo $(I)=(II)$:

$$\left(x^2-8x+16\right)+\left(y^2-6y+9\right)=\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2-14y+49\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4x+8y=28\Rightarrow -x+2y=7\rightarrow(IV)$$

Haciendo $(I)=(III)$:

$$\left(x^2-8x+16\right)+\left(y^2-6y+9\right)=\left(x^2+6x+9\right)+\left(y^2+16y+64\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -14x-22y=48\Rightarrow -7x-11y=24\rightarrow(V)$$

Multiplicando la ecuación (IV) por (-7) y sumándole la ecuación (V):

$$(-7)\cdot(IV)+(V)=-25y=-25\Rightarrow y=1$$

Sustituyendo el valor $y=1$ en la ecuación (V):

$$-7x-11=24\Rightarrow -7x=35\Rightarrow x=-5\Rightarrow C(-5,1)$$

Determinar las coordenadas del centro $\boldsymbol{C}$ de la circunferencia que pasa por los puntos:

40.- $K(2,3);L(4,-1);M(5,2)$

Solución:

Las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados es el punto de corte de las mediatrices del triángulo que forman dichos tres puntos.

Sea N el punto medio de ***KL***:

$$x_N=\frac{2+4}{2}=3;y_N=\frac{3-1}{2}=1$$

La pendiente de ***KL*** es: $m_{KL}=\frac{-1-3}{4-2}=\frac{-4}{2}=-2\Rightarrow m_{\perp KL}=\frac{1}{2}$

Luego, la ecuación de la mediatriz correspondiente a ***KL*** es:

$$y-y_N=m\cdot(x-x_N)\Rightarrow(y-1)=\frac{1}{2}\cdot(x-3)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y-2=x-3\Rightarrow x-2y-1=0\rightarrow(I)$$

Sea ***P*** el punto medio de ***LM***:

$$x_P=\frac{4+5}{2}=\frac{9}{2};y_P=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$
$$m_{LM}=\frac{2+1}{5-4}=3\Rightarrow m_{\perp LM}=-\frac{1}{3}$$

La ecuación de la mediatriz correspondiente a ***ML*** es:

$$y-y_P=m_{\perp ML}\cdot(x-x_P)\Rightarrow y-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{9}{2}\right)\Rightarrow$$
$$\frac{2y-1}{2}=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2x-9}{2}\right)\Rightarrow 6y-3=-2x+9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+6y-12=0\Rightarrow x+3y-6=0\to(II)$$

Luego:

$$(II)-(I)\Rightarrow 5y-5=0\Rightarrow y=1$$

Sustituyendo este valor de $y=1$ en la ecuación (I):

$$x-2y-1=0\Rightarrow x-2-1=0\Rightarrow x=3\Rightarrow C(3,1)$$

41.- $P(0,-6);Q(1,1);R(7,-7)$

Solución:

Las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados es el punto de corte de las mediatrices del triángulo que forman dichos tres puntos.

Sea $\boldsymbol{S}$ el punto medio del lado $\boldsymbol{PQ}$:

$$x_S=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2};y_S=\frac{-6+1}{2}=-\frac{5}{2}$$

$$m_{PQ}=\frac{1+6}{1+0}=7\Rightarrow m_{\perp PQ}=-\frac{1}{7}$$

Luego, la ecuación de la mediatriz correspondiente a $\boldsymbol{PQ}$ es:

$$y-y_S=m_{\perp PQ}\cdot(x-x_S)\Rightarrow y+\frac{5}{2}=-\frac{1}{7}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7\cdot\left(\frac{2y+5}{2}\right)=-\left(\frac{2x-1}{2}\right)\Rightarrow 14y+35=1-2x\Rightarrow$$
$$2x+14y+34=0\Rightarrow x+7y+17=0\to(I)$$

Sea $\boldsymbol{T}$ el punto medio del lado $\boldsymbol{QR}$:

$$x_T = \frac{1+7}{2} = 4; y_T = \frac{1-7}{2} = -3$$
$$m_{QR} = \frac{-7-1}{7-1} = -\frac{4}{3} \Rightarrow m_{\perp QR} = \frac{3}{4}$$

La ecuación de la mediatriz correspondiente al lado $\boldsymbol{QR}$ es:

$$y - y_T = m_{\perp QR} \cdot (x - x_T) \Rightarrow y + 3 = \frac{3}{4} \cdot (x-4) \Rightarrow$$
$$4y + 12 = 3x - 12 \Rightarrow -3x + 4y + 24 = 0 \rightarrow (II)$$

Ahora, resolviendo (I) y (II):

$$3 \cdot (I) + (II) \Rightarrow 25y + 75 = 0 \Rightarrow y = -3$$

Sustituyendo este valor de $y = -3$ en la ecuación (II):
$$-3x + 4y + 24 = 0 \Rightarrow -3x - 12 + 24 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow C(4,-3)$$

42.- $A(4,-2); B(5,-3); C(-4,-6)$

Solución:

Las coordenadas del centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados es el punto de corte de las mediatrices del triángulo que forman dichos tres puntos.

Sea $\boldsymbol{D}$ el punto medio del lado $\boldsymbol{AB}$:

$$x_D = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2}; y_D = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}$$
$$m_{AB} = \frac{-3+2}{5-4} = -1 \Rightarrow m_{\perp AB} = 1$$

La ecuación de la mediatriz correspondiente al lado $\boldsymbol{AB}$ es:

$$y - y_D = m_{\perp AB} \cdot (x - x_D) \Rightarrow y + \frac{5}{2} = (1) \cdot \left(x - \frac{9}{2}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y + 5 = 2x - 9 \Rightarrow -2x + 2y + 14 = 0 \Rightarrow -x + y + 7 = 0 \rightarrow (I)$$

Sea $\boldsymbol{E}$ el punto medio del lado $\boldsymbol{BC}$:

$$x_E = \frac{5-4}{2} = \frac{1}{2}; y_E = \frac{-3-6}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{-6+3}{-4-5} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3} \Rightarrow m_{\perp BC} = -3$$

La ecuación de la mediatriz correspondiente al lado ***BC*** es:

$$y - y_E = m_{\perp BC} \cdot (x - x_E) \Rightarrow y + \frac{9}{2} = (-3) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 9 = -6x + 3 \Rightarrow 6x + 2y + 6 = 0 \Rightarrow 3x + y + 3 = 0 \to (II)$$

Resolviendo las ecuaciones (I) y (II):

$$(I) - (II) = (-x + y + 7) - (3x + y + 3) = 0 \Rightarrow -4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Introduciendo el valor de $x = 1$ en la ecuación (II):

$$3x + y + 3 = 0 \Rightarrow 3 + y + 3 = 0 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow C(1,-6)$$

Un círculo tiene su centro en $C(3,1)$ y su radio mide 10 unidades. Determinar si los siguientes puntos pertenecen o no al círculo.

Nota: Si la distancia de cada punto dado al centro es igual o menor de 10 unidades, el punto pertenece al círculo. Recordar que el círculo es toda el área dentro de la circunferencia de radio 10.

43.- $A(8,9)$

Solución:

$$d_{AC} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(8-3)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{(5)^2 + (8)^2} = \sqrt{89} < 10 \Rightarrow SI$$

44.- $B(-7,4)$

Solución:

$$d_{BC} = \sqrt{(-7-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-10)^2 + (3)^2} > 10 \Rightarrow NO$$

45.- $M(11,7)$

Solución:

$$d_{MC} = \sqrt{(11-3)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{(8)^2 + (6)^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow SI$$

46.- $N(7,-7)$

Solución:

$$d_{NC} = \sqrt{(7-3)^2 + (1+7)^2} = \sqrt{(4)^2 + (8)^2} < 10 \Rightarrow SI$$

47.- $P(-7,0)$

Solución:

$$d_{PC} = \sqrt{(-7-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{(-10)^2 + (-1)^2} = \sqrt{101} > 10 \Rightarrow NO$$

Demostrar en cada uno de los siguientes casos que los puntos cuyas coordenadas se dan son colineales:

En todos los casos se tratará de probar que si son colineales se cumple que: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

48.- $A(-2,8); B(0,4); C(1,7)$

Solución:

$$\overline{AB} = \sqrt{(0+2)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{(3+2)^2 + (-2-8)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \Rightarrow$$
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

Si son colineales.

49.- $M(-2,3); N(-6,1); P(-10,-1)$

Solución:

$$\overline{MN}=\sqrt{(-6+2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$\overline{NP}=\sqrt{(-10+6)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$\overline{MP}=\sqrt{(-10+2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$
$$\overline{MN}+\overline{NP}=\overline{MP}$$

Si son colineales.

50.- $K(-4,-2); L\left(-1,-\frac{1}{2}\right); M\left(5,\frac{5}{2}\right)$

Solución:

$$\overline{KL}=\sqrt{(-1+4)^2+\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2}=\sqrt{(3)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{36+9}}{2}=\frac{\sqrt{45}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{5}$$
$$\overline{LM}=\sqrt{(5+1)^2+\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{(6)^2+(3)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$
$$\overline{KM}=\sqrt{(5+4)^2+\left(\frac{5}{2}+2\right)^2}=\sqrt{(9)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2}=9\sqrt{1+\frac{1}{4}}=9\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\sqrt{5}\cdot\left(3+\frac{3}{2}\right)=\sqrt{5}\cdot\left(\frac{6+3}{2}\right)=\frac{9}{2}\sqrt{5}\Rightarrow$$
$$\overline{KL}+\overline{LM}=\overline{KM}$$

Si son colineales.

51.- $R\left(-\frac{10}{3},-3\right); S\left(-\frac{20}{3},2\right); T(-8,4)$

Solución:

$$\overline{RS}=\sqrt{\left(-\frac{20}{3}+\frac{10}{3}\right)^2+(2+3)^2}=\sqrt{\left(-\frac{10}{3}\right)^2+(5)^2}=\sqrt{\frac{100}{9}+25}=$$
$$\overline{RS}=\frac{1}{3}\sqrt{100+225}=\frac{1}{3}\sqrt{325}=\frac{5}{3}\sqrt{13}$$
$$\overline{ST}=\sqrt{\left(-8+\frac{20}{3}\right)^2+(4-2)^2}=\sqrt{\left(\frac{-24+20}{3}\right)^2+(2)^2}=$$
$$\overline{ST}=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+4}=\sqrt{\frac{16+36}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{52}=\frac{2}{3}\sqrt{13}$$

$$\overline{RT}=\sqrt{\left(-8+\frac{10}{3}\right)^2+(4+3)^2}=\sqrt{\left(\frac{-24+10}{3}\right)^2+(7)^2}=$$

$$\overline{RT}=\sqrt{\left(-\frac{14}{3}\right)^2+(49)}=\frac{1}{3}\sqrt{196+441}=\frac{1}{3}\sqrt{637}=\frac{7}{3}\sqrt{13}$$

$$\overline{RS}+\overline{ST}=\overline{RT}$$

Si son colineales.

52.- $E(7,4);F\left(7-2\sqrt{5},10\right);G\left(7-5\sqrt{5},19\right)$

Solución:

$$\overline{EF}=\sqrt{\left(7-2\sqrt{5}-7\right)^2+(10-4)^2}=\sqrt{\left(-2\sqrt{5}\right)^2+(6)^2}=$$

$$\overline{EF}=\sqrt{20+36}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$$

$$\overline{FG}=\sqrt{\left(7-5\sqrt{5}-7+2\sqrt{5}\right)^2+(19-10)^2}=\sqrt{\left(-3\sqrt{5}\right)^2+(9)^2}=$$

$$\overline{FG}=\sqrt{45+81}=\sqrt{126}=3\sqrt{14}$$

$$\overline{EG}=\sqrt{\left(7-5\sqrt{5}-7\right)^2+(19-4)^2}=\sqrt{\left(-5\sqrt{5}\right)^2+(15)^2}=$$

$$\overline{EG}=\sqrt{125+225}=\sqrt{350}=5\sqrt{14}$$

$$\overline{EF}+\overline{FG}=\overline{EG}$$

Si son colineales.

53.- Determinar la abscisa de un punto $\boldsymbol{P}$ de ordenada **4** que está a 10 unidades de distancia del punto $A(1,-2)$.

Solución:

$$10=\sqrt{(x-x_P)^2+(y-y_P)^2}+\sqrt{(1-x_P)^2+(-2-4)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10=\sqrt{(1-x_P)^2+(-6)^2}\Rightarrow 100-36=(1-x_P)^2\Rightarrow$$

$$8=1-x_p\Rightarrow x_P=-7\Rightarrow P(-7,4)$$

54.- Determinar la ordenada de un punto $\boldsymbol{P}$ de abscisa 1 que dista 5 unidades del punto $B(-3,2)$.

Solución:

$$5=\sqrt{(-3-1)^2+(2-y_P)^2}\Rightarrow 25=(4)^2+(2-y_P)^2\Rightarrow$$
$$9=(2-y_P)^2\Rightarrow 3=2-y_P\Rightarrow y_P=-1\Rightarrow P(1,-1)$$

55.- Determinar la abscisa de un punto $\boldsymbol{P}$ de ordenada 8 que dista 13 unidades del punto $C(2,-4)$.

Solución:

$$13=\sqrt{(12-x_P)^2+(-4-8)^2}\Rightarrow 169=(12-x_P)^2+(-4-8)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 169-144=(12-x_P)^2\Rightarrow 25=(12-x_P)^2\Rightarrow 5=12-x_P\Rightarrow x_P=7\Rightarrow P(7,8)$$

56.- Determinar las coordenadas de un punto $\boldsymbol{P}$ sabiendo que si abscisa es 5 y que su distancia al punto $D(-1,3)$ es $2\sqrt{13}$.

Solución:

$$d_{PD}=2\sqrt{13}=\sqrt{(-1-5)^2+(3-y_P)^2}\Rightarrow 52=(-6)^2+(3-y_P)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 52-36=16=(3-y_P)^2\Rightarrow 4=3-y_P\Rightarrow y_P=-1\Rightarrow P(5,-1)$$

57.- Determinar las coordenadas de un punto $\boldsymbol{P}$ de ordenada 1 sabiendo que la distancia que lo separa del punto $A(3,9)$ es el doble que la que lo separa del punto $B(-3,2)$.

Solución:

$$d_{PA}=2\cdot d_{PB}$$

$$d_{PA}=\sqrt{(3-x_P)^2+(9-1)^2};d_{PB}=\sqrt{(-3-x_P)^2+(2-1)^2}\Rightarrow$$
$$\sqrt{(3-x_P)^2+(8)^2}=2\cdot\sqrt{(-3-x_P)^2+(1)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(3-x_P)^2+64=4\cdot\left[(-3-x_P)^2+1\right]\Rightarrow\left(9-6x_P+x_P^2\right)+64=4\cdot(-1)^2\left(9+6x_P+x_P^2\right)+4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x_P^2+30x_P-33=0\Rightarrow x_P^2+10x_P-11=0\Rightarrow(x_P+11)\cdot(x_P-1)$$

Luego, existen dos soluciones:

$$P_1(-11,1);P_2(1,1)$$

58.- Determinar las coordenadas de un punto ***P*** de abscisa -3 sabiendo que la distancia que lo separa del punto $A(-4,-1)$ es la mitad de la que lo separa del punto $B(7,6)$.

Solución:

$$d_{PA}=\frac{1}{2}\cdot d_{PB}\Rightarrow\sqrt{(-4+3)^2+(-1-y_P)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(7+3)^2+(6-y_P)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-1)^2+(-1)^2(1+y_P)^2=\frac{1}{4}\cdot\left[(10)^2+(6-y_P)^2\right]\Rightarrow$$

$$1+1+2y_P+y_P^2=\frac{1}{4}\cdot\left[100+36-12y_P+y_P^2\right]\Rightarrow$$

$$8+8y_P+4y_P^2=136-12y_P+y_P^2\Rightarrow$$

$$3y2_P^2+20y_P-128=0\Rightarrow y_P=\frac{-20\pm\sqrt{(20)^2+4\cdot3\cdot128}}{6}=\frac{-20\pm\sqrt{400+1536}}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_P=\frac{-20\pm\sqrt{1936}}{6}=\frac{-20\pm44}{6}\Rightarrow y_{P1}=-\frac{32}{3};y_{P2}=\frac{24}{6}=4$$

Entonces, hay dos soluciones:

$$P_1\left(-3,-\frac{32}{3}\right);P_2=(-3,4)$$

59.- Determinar las coordenadas de un punto ***P*** de ordenada -4 sabiendo que la distancia entre P y $A(5,5)$ es tres veces mayor que la distancia entre P y $B(-1,-3)$.

Solución:

$$d_{PA}=3\cdot d_{PB}\Rightarrow\sqrt{(5-x_P)^2+(5+4)^2}=3\cdot\sqrt{(-1-x_P)^2+(-3+4)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(5-x_P)^2+(9)^2+81=9\cdot\left[(-1)^2\cdot(1+x_P)^2+(1)^2\right]\Rightarrow\left(25-10x_P+x_P^2\right)+81=9\cdot\left(1+2x_P+x_P^2\right)+9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x_P^2+28x_P-88\Rightarrow 2x_P^2+7x_P-22=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_P=\frac{-7\pm\sqrt{49+176}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{225}}{4}=\frac{-7\pm15}{4}\Rightarrow x_{P1}=\frac{-22}{4}=-\frac{11}{2};x_{P2}=\frac{8}{4}=2$$

Entonces, hay dos soluciones: $P_1\left(-\frac{11}{2},-4\right):P_2(2,-4)$

60.- Determinar las coordenadas de un punto ***P*** de ordenada 5 sabiendo que la distancia que lo separa del punto $A(3,3)$ es la mitad de la distancia que separa al punto A de otro punto $B(-1,-7)$.

Solución:

$$d_{PA} = \frac{1}{2} \cdot d_{AB} \Rightarrow \sqrt{(3-x_P)^2 + (3-5)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(3+1)^2 + (3+7)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-x_P)^2 + (-2)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left[(4)^2 + (10)^2 \right] = \frac{116}{4} = 29 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-x_P)^2 = 25 \Rightarrow 3 - x_P = \pm 5 \Rightarrow x_{P1} = -2; x_{P2} = 8 \Rightarrow P_1 = (-2,5) : P_2(8,5)$$

61.- Determinar la ordenada de un punto $\boldsymbol{P}$ de abscisa 5 sabiendo que la distancia de $A(-2,-3)$ a $B(12,-1)$ es el doble de la distancia de $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{P}$.

Solución:

$$d_{AB} = 2 \cdot d_{AP} \Rightarrow \sqrt{(-2-12)^2 + (-3+1)^2} = 2 \cdot \sqrt{(-2-5)^2 + (-3-y_P)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-14)^2 + (-2)^2 = 4 \cdot \left[(-7)^2 + (-1)^2 (3+y_P)^2 \right] \Rightarrow$$

$$196 + 4 = 4 \cdot \left[49 + (3+y_P)^2 \right] \Rightarrow 50 - 49 = (3+y_P)^2 \Rightarrow \pm 1 = 3 + y_P \Rightarrow y_{P1} = -2; y_{P2} = -4$$

62.- Dado los puntos $O(0,0); A(9,-2); B(2,4)$ demostrar que $\angle AOB$ es igual al $\angle ABO$ ’

Solución:

Si demostramos que el triángulo es isósceles, donde $\overline{AO} = \overline{AB}$, como consecuencia de ello $\angle AOB = \angle ABO$.

$$d_{AO} = \sqrt{(9-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(9-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{49+36} = \sqrt{85} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{AO} = d_{AB} \Rightarrow \angle AOB = \angle ABO$$

63.- Dados los puntos $A(2,1) : B(7,4); C(2,7)$ demostrar que $\angle BAC = \angle BCA$.

Solución:

Si demostramos que el triángulo es isósceles, donde $\overline{BC} = \overline{AB}$, como consecuencia de ello $\angle BAC = \angle BCA$

$$d_{BC} = \sqrt{(7-2)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{(5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(2-7)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$d_{BC} = d_{AB} \Rightarrow \angle BAC = \angle BCA$$

64.- Demostrar que en el triángulo cuyos vértices son $A(-1,-2);B(-1,5);C(6,-2)$ se cumple que $\angle ABC = \angle ACB$.

Solución:

Si demostramos que el triángulo es isósceles, donde $\overline{AC} = \overline{AB}$, como consecuencia de ello $\angle ABC = \angle ACB$

$$d_{AC} = \sqrt{(6+1)^2 + (-2+2)} = \sqrt{49} = 7$$
$$d_{AB} = \sqrt{(-1+1)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{49} = 7$$
$$d_{AC} = d_{AB} \Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$$

65.- Demostrar que en el triángulo cuyos vértices son $A(0,1):B(3,7);C\left(3+2\sqrt{5},2\right)$ se cumple que $\angle BAC = \angle BCA$.

Solución:

Si demostramos que el triángulo es isósceles, donde $\overline{BC} = \overline{AB}$, como consecuencia de ello $\angle BAC = \angle BCA$.

$$d_{BC} = \sqrt{\left(3+2\sqrt{5}-3\right)^2 + (2-7)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 + (-5)^2} = \sqrt{20+25} = \sqrt{45}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$
$$d_{BC} = d_{AB} \Rightarrow \angle BAC = \angle BCA$$

66.- Demostrar que $K(6,2);L(-2,-4);M(5,-5);N(-1,3)$ son puntos de una circunferencia de centro $C(2,-1)$.

Solución:

Si son puntos de la misma circunferencia, se cumple que:

$$d_{KC} = d_{LC} = d_{MC} = d_{NC} = r$$

$d_{KC} = \sqrt{(6-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$d_{LC} = \sqrt{(-2-2)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$d_{MC} = \sqrt{(5-2)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$d_{NC} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Todos los puntos considerados pertenecen a la misma circunferencia.

67.- ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ para que esté a 3 unidades de distancia del punto $A(5,-2)$?

Solución:

P debe ser el lugar geométrico, (en este caso una circunferencia) de todos los puntos que equidistan una distancia 3 del punto ***A***, que en este caso es el centro de la circunferencia, siendo el radio ***r*** es igual a 3.

Entonces: $r = 3 = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow 9 = (x-5)^2 + (y+2)^2$

68.- ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ para que su distancia al punto $A(-3,7)$ sea menor que 4?

Solución:

$\sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2} < r \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (y-7)^2} < 4 \Rightarrow (x+3)^2 + (y-7)^2 < 16$

69.- ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ para que su distancia al punto $A(3,-4)$ sea de 5 unidades o más?

Solución:

$\sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2} \geq 5 \Rightarrow (x-3)^2 + (y+4)^2 \geq 25$

70.- ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ para pertenecer a un círculo que tiene su centro en $C(5,0)$ y cuyo radio mide 7 unidades?

Solución:

$$\sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2} \le 7 \Rightarrow (x-5)^2+(y-0)^2 \le 49 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-5)^2+y^2 \le 49$$

71.- ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ para que no pertenezca a un círculo de radio 6 y que tiene su centro en $C(-3,2)$?

Solución:

$$\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2} > 6 \Rightarrow (x+3)^2+(y-2)^2 > 36$$

72.- Determinar la condición algebraica que debe satisfacer todo punto situado entre dos circunferencias de centro común, una de ellas con radio de 5 unidades y la otra con radio de 8 unidades.

$$5 < \sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2} < 8 \Rightarrow 25 < (x-3)^2+(y+2)^2 < 64$$

73.- Determinar la ecuación algebraica que debe satisfacer todo punto que esté a igual distancia de los puntos $M(5,1)$ y $N(-1,-3)$.

Solución:

$$\sqrt{(x-x_M)^2+(y-y_M)^2} = \sqrt{(x-x_N)^2+(y-y_N)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2-10x+25)+(y^2-2y+1)=(x^2+2x+1)+(y^2+6y+9) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -12x-8y+16 \Rightarrow 3x+2y-4=0$$

74.- Determinar la ecuación algebraica que debe satisfacer todo punto que equidiste del origen y del punto $M(4,-5)$.

Solución:

Sea el origen el punto $O(0,0)$.

$$\sqrt{(x-x_O)^2+(y-y_O)^2} = \sqrt{(x-x_M)^2+(y-y_M)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+y^2=(x-4)^2+(y+5)^2=(x^2-8x+16)+(y^2+10y+25) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -8x+10y+41=0 \Rightarrow 8x-10y-41=0$$

75.- Determinar la ecuación algebraica que debe satisfacer todo punto para ser el vértice de un triángulo isósceles cuya base sea el segmento que determinan los puntos $M(7,-1)$ y $N(-3,5)$.

Solución:

$$\sqrt{(x-x_M)^2+(y-y_M)^2}=\sqrt{(x-x_N)^2+(y-y_N)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{(x-7)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-5)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(x^2-14x+49\right)+\left(y^2+2y+1\right)=\left(x^2+6x+9\right)+\left(y^2-10y+25\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -20x-12y+16=0\Rightarrow -5x-3y+4=0\Rightarrow 5x+3y-4=0$$

76.- Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son $A(4,7);B(-2,-3)$.

Solución:

El punto medio $\boldsymbol{P}$ de $\overline{AB}$ es:

$$x_P=\frac{4-2}{2}=1;\ y_P=\frac{7-3}{2}=2$$

La pendiente de $\overline{AB}$ es:

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-7}{-2-4}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\Rightarrow m_{\perp AB}=-\frac{3}{5}$$

La ecuación de la mediatriz es:

$$y-y_P=m_{\perp AB}\cdot(x-x_P)\Rightarrow y-2=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot(x-1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5y-10=-3x+3\Rightarrow 3x+5y-13=0$$

77.- La base de un triángulo isósceles es el segmento determinado por los puntos $M(-3,-8)$ y $N(4,9)$. Determinar las coordenadas del vértice $\boldsymbol{P}$ del triángulo sabiendo que su ordenada es 4.

Solución:

$$\sqrt{\left(x_P - x_M\right)^2 + \left(y_P - y_M\right)^2} = \sqrt{\left(x_P - x_N\right)^2 + \left(y_P - y_N\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_P + 3\right)^2 + \left(4 + 8\right)^2 = \left(x_P - 4\right)^2 + \left(4 - 9\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_P^2 + 6x_P + 9\right) + 144 = \left(x_P^2 - 8x_P + 16\right) + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14x_P = -112 \Rightarrow x_P = \frac{-112}{14} = -8 \Rightarrow P\left(-8, 4\right)$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #41.
Tema: La línea recta.
Fecha: ____________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

La ***ecuación general de la línea recta*** envolviendo dos variables es la siguiente:

$$Ax + By + C = 0$$

No existen potencias de ninguna clase en las variables. La ecuación general de la línea recta puede ser transformada en otras formas, muy útiles en ciertas aplicaciones, como:

Ecuación reducida de la línea recta:

$y = mx + b$ donde ***m*** es la pendiente de la línea recta y ***b*** es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las ***y***.

También, existe la ***ecuación canónica*** de la recta, expresada así:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ siendo ***a*** el valor de la abscisa donde la línea recta corta al eje de las ***x*** y ***b*** es el valor de la ordenada donde la línea recta corta al eje de las ***y***.

Casi todas las formas de ecuación de una línea recta se encuentran partiendo de la ecuación de la pendiente de una línea recta, ya que se debe recordar que una línea recta tiene una pendiente única. Si se conocen dos puntos de una línea recta dada, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y además se toma como $P(x, y)$ un punto cualquiera perteneciente a la misma línea recta, entonces, se puede escribir:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Conociendo un solo punto y la pendiente, se puede escribir:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

La ***forma normal*** de una ecuación de la línea recta es:

$$x \cos\theta + y sen\theta - \rho = 0$$

Donde θ es el ángulo que forma la línea recta con el eje de las ***x***, y ρ es la distancia positiva de la línea recta al origen de coordenadas. Se puede pasar de la ecuación general de la línea recta a la forma normal, con tan solo dividir toda la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$.

Angulo entre dos rectas:

Dadas dos rectas l_1 y l_2 cuyos ángulos con la horizontal son α_1 y α_2, el ángulo formado entre las dos rectas es $\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow tg\theta = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

Entonces, si las dos líneas son paralelas $\theta = 0 \Rightarrow tg\theta = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Si las dos líneas son perpendiculares: $\theta = 90^o \Rightarrow tg\theta = \infty \Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Luego, se concluye que:

Dos líneas rectas son paralelas si ellas tienen la misma pendiente; o sea: $m_1 = m_2$.

Dos líneas rectas son perpendiculares, se cruzan a 90º, si sus respectivas pendientes cumplen con la siguiente condición:

$$\left(m_1\right)\left(m_2\right)=-1 \Rightarrow m_1=-\frac{1}{m_2}$$

La ***distancia dirigida d*** entre un punto $P_0\left(x_0, y_0\right)$ y una línea recta definida por su ecuación general, $l \equiv Ax+By+C=0$, es la longitud del segmento perpendicular a ***l*** trazado desde el punto P_0 y está dada por la expresión:

$$d_{\left(P_0, l\right)}=\frac{Ax_0+By_0+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

El signo del radical $\sqrt{A^2+B^2}$ se determina de acuerdo a como sigue:

(a).- Si $C \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=-Sg_C$

(b).- Si $C=0; B \neq 0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_B$

©.- Si $C=0; B=0 \Rightarrow Sg_{\sqrt{A^2+B^2}}=Sg_A$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia dirigida será la siguiente:

(a).- Si la recta no pasa por el origen del sistema de coordenadas, la distancia ***d*** será positiva si el punto P_0 y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario.

(b).- Si la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas, ***d*** será positiva o negativa según que el punto P_0 esté por encima o por debajo de la línea recta.

En el caso de que sólo interese la longitud del segmento que une al punto P_0 con la línea recta ***l***, se tomará como positivo el valor de la distancia:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Distancia entre dos rectas paralelas, partiendo de sus ecuaciones generales:

Dadas las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax + By + C_1; l_2 \equiv Ax + By + C_2$, la distancia entre ellas está dada por la fórmula:

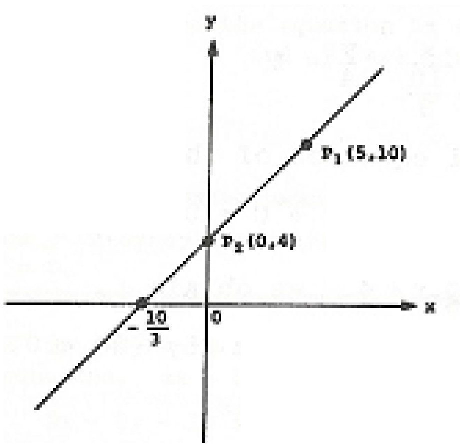
$$d_{l_1,l_2} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

PREGUNTAS:

1.- Escribir la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos $P_1(5,10); P_2(0,4)$ y expresarla en sus diferentes formas:

La ecuación de la línea recta que pasa por dos puntos se escribe a partir de la siguiente expresión:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$



La forma reducida $y = mx + b$ es:

$$y - 10 = \frac{(4-10)}{(0-5)}(x-5) \Rightarrow y - 10 = \frac{6}{5}(x-5) \Rightarrow y = \frac{6}{5}x + 4$$

La forma canónica $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ es:

Para encontrar ***a*,** hacer $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{6}{5}x + 4 \Rightarrow x = a = -\frac{10}{3}$

Para encontrar ***b***, hacer $x = 0 \Rightarrow y = 0 + 4 \Rightarrow y = b = 4$

De donde:

$$\frac{x}{\left(-\frac{10}{3}\right)}+\frac{y}{4}=1$$

La ecuación general $Ax+By+C=0$ es:

$$y=\frac{6}{5}x+4 \Rightarrow 5y=6x+4 \Rightarrow 6x-5y+4=0$$

2.- Determine el valor de la constante $\boldsymbol{A}$ de tal manera que las líneas $l_1 \equiv 3x-4y=12$ y $l_2 \equiv Ax+6y=-9$ sean paralelas.

Si dos líneas rectas no verticales son paralelas sus pendientes deben ser iguales, o sea:

$$m_1=m_2$$

Dada la ecuación general de una recta cualquiera:

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow y=\left(-\frac{A}{B}\right)x+\left(-\frac{C}{B}\right) \Rightarrow y=mx+b$$

O sea: $m=-\dfrac{A}{B}$

Entonces, dadas las dos rectas:

$$l_1 \equiv 3x-4y-12=0$$
$$l_2 \equiv Ax+6y+9=0$$

Si $m_1=m_2 \Rightarrow -\dfrac{A_1}{B_1}=-\dfrac{A_2}{B_2} \Rightarrow \dfrac{A_1}{B_1}=\dfrac{A_2}{B_2} \Rightarrow \dfrac{3}{-4}=\dfrac{A_2}{6} \Rightarrow A_2=A=-\dfrac{9}{2}$

3.- Encontrar la pendiente y los valores de la ordenada y la abscisa donde la recta corta los ejes de coordenadas de la recta $2x-3y-18=0.$

De problema anterior se sabe que:

$$m = -\frac{A}{B} = -\left(\frac{2}{-3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$b = -\frac{C}{B} = -\left(\frac{-18}{-3}\right) = -6$$

Por otro lado la ecuación canónica es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Partiendo de la ecuación general:

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow Ax + By = -C \Rightarrow \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = 1 \Rightarrow a = -\frac{C}{A}; b = -\frac{C}{B} \Rightarrow a = -\left(\frac{-18}{2}\right) = 9$$

En conclusión:

$$m = \frac{2}{3}; a = 9; b = -6$$

4.- La ecuación $F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$ relaciona las escalas de grados de temperatura ***Fahrenheit*** y ***Centígrados.*** ¿Qué representan $\frac{9}{5}$ y 32?

La expresión de la ecuación reducida de la línea recta $y = mx + b$. Entonces, comparando la ecuación dada con esta última ecuación podemos concluir que la ecuación que relaciona las escalas de temperatura ***Fahrenheit*** y ***Centígrados*** es la ecuación reducida de una línea recta, donde $\left(\frac{9}{5}\right)$ es la pendiente ***m*** y ***32*** es la ordenada ***b*** donde la recta corta al eje de las ***y***.

Nótese que las temperaturas en escala ***Fahrenheit*** se leen en el eje de las ***y*** y las temperaturas en la escala ***Centígrados*** se leen en el eje de las ***x***.

5.- Dada la pendiente y un punto encontrar si la intersección $\boldsymbol{b}$ de la recta correspondiente con el eje de las $\boldsymbol{y}$ es positiva o negativa.

(a) $m_1 = \dfrac{22}{7}; P_1\left(1, \pi\right)$

$$\left(y - y_1\right) = m_1\left(x - x_1\right) \Rightarrow \left(y - \pi\right) = \left(\frac{22}{7}\right)\left(x - 1\right) \Rightarrow 7y - 7\pi = 22x - 22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7y = 22x - \left(22 - 7\pi\right) \Rightarrow y = \frac{22}{7}x - \left(\frac{22 - 7\pi}{7}\right) \Rightarrow 22 > 7\pi \Rightarrow b < 0$$

(b).- $m_2 = \sqrt{2}; P_2\left(1;1,414\right)$

$$y - y_2 = m_2\left(x - x_2\right) \Rightarrow y - 1,414 = \sqrt{2}\left(x - 1\right) \Rightarrow y = \left(\sqrt{2}\right)x - \sqrt{2} + 1,414 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \left(\sqrt{2}\right)x - \left(\sqrt{2} - 1,414\right) \Rightarrow y = \left(\sqrt{2}\right)x \Rightarrow b = 0$$

La recta pasa por el origen de coordenadas.

6.- Encontrar la ecuación general de la línea recta que pasa por los puntos $P_1\left(3,5\right)$ y $P_2\left(-1,2\right)$.

Dadas las coordenadas de dos puntos pertenecientes a una línea recta, se debe utilizar la siguiente expresión matemática para encontrar la ecuación de la recta:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 5}{x - 3} = \frac{2 - 5}{-1 - 3} = \frac{\left(-3\right)}{\left(-4\right)} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y - 5\right) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(x - 3\right) \Rightarrow 4y - 20 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 4y + 11 = 0$$

7.- Encontrar la ecuación reducida de la línea recta que pasa por los puntos $P_1\left(-3,1\right)$ y $P_2\left(7,11\right)$.

Este problema puede resolverse exactamente como se resolvió el problema anterior; sin embargo, es conveniente resolverlo por el siguiente método:

Se parte de la ecuación reducida de la línea recta: $y = mx + b$ y se le darán valores a $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ tomados de las coordenadas de los puntos dados:

Para $P_1 \Rightarrow 1 = (-3)m + b \Rightarrow 1 = -3m + b$..............................(1)

Para $P_2 \Rightarrow 11 = (7)m + b \Rightarrow 11 = 7m + b$.............................(2)

Resolviendo (1) y (2): $m = 1; B = 4$

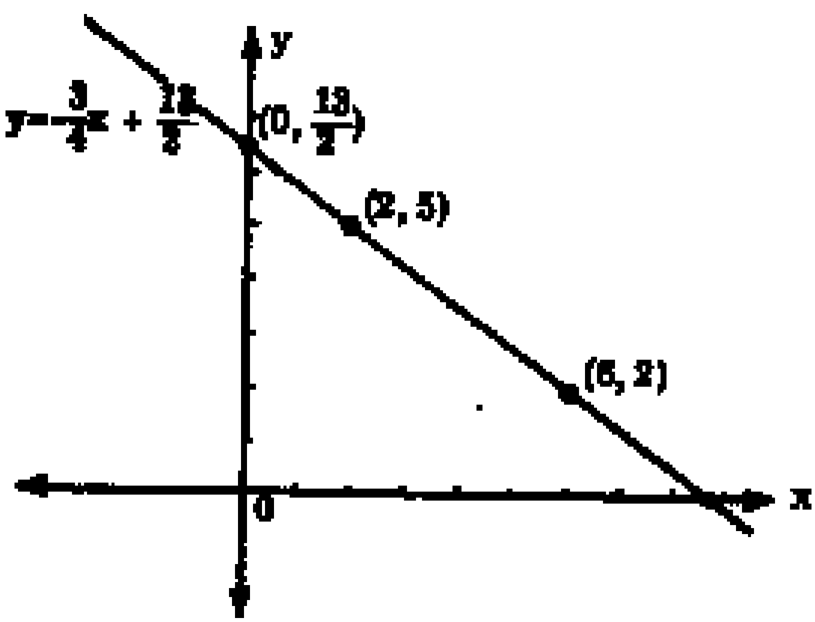
La ecuación reducida de la línea recta buscada será entonces:

$$y = x + 4$$

8.- Encontrar la ecuación general de la línea recta que pasa por el punto $P(2,5)$ y tiene pendiente igual a 3.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 5 = (3)(x - 2) \Rightarrow y - 5 = 3x - 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

9.- Encontrar la ecuación general y la ecuación reducida de la línea recta que pasa por los puntos $P_1(2,5)$ y $P_2(6,2)$.



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{y-5}{x-2}=\frac{2-5}{6-2}=\frac{-3}{4}\Rightarrow(y-5)4=(-3)(x-2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y-20=-3x+6\Rightarrow 3x+4y-26=0$$

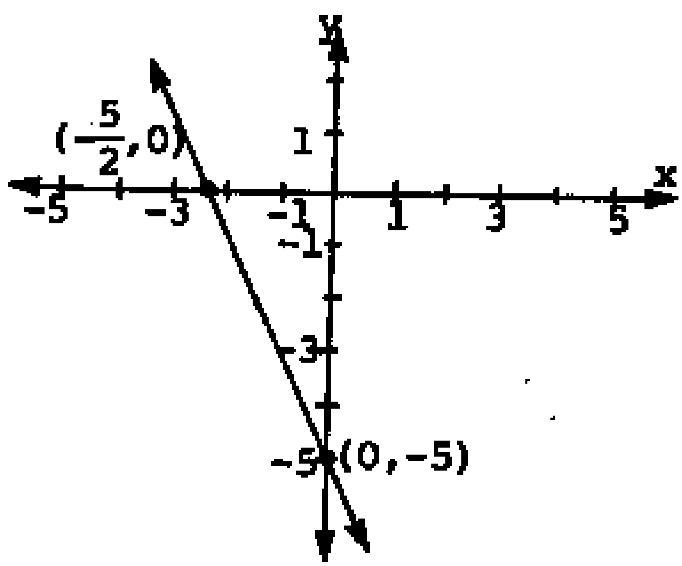
Si la ecuación general es $3x+4y-26=0$ la ecuación reducida será:

$$4y=-3x+26\Rightarrow y=\left(-\frac{3}{4}\right)x+\left(\frac{26}{4}\right)\Rightarrow y=\left(-\frac{3}{4}\right)x+\left(\frac{13}{2}\right)$$

10.- Si $f(x)=-2x-5$ encontrar la pendiente y los valores donde la línea recta corta a los ejes de coordenadas.

Para empezar la expresión matemática dada se puede reescribir como:

$y=-2x-5$ y comparándola con la ecuación reducida de la línea recta $(y=mx+b)$, se tiene que $m=-2; b=-5$



Para encontrar $\boldsymbol{a}$ se deberá hacer $y=0$ en la ecuación dada:

$$y=-2x-5\Rightarrow 0=-2x-5\Rightarrow 2x=-5\Rightarrow x=\left(\frac{-5}{2}\right)=a=-\frac{5}{2}$$

Entonces, la línea recta dada corta al eje de las $\boldsymbol{x}$ en el punto $\left(-\frac{5}{2},0\right)$ y corta al eje de las $\boldsymbol{y}$ en el punto $(0,-5)$.

11.- Discuta el gráfico de la línea recta dada por la ecuación $y = -3x + 4.$

La recta tiene pendiente $m = -3$ y corta al eje de las ***y*** en el punto $(0,4)$.

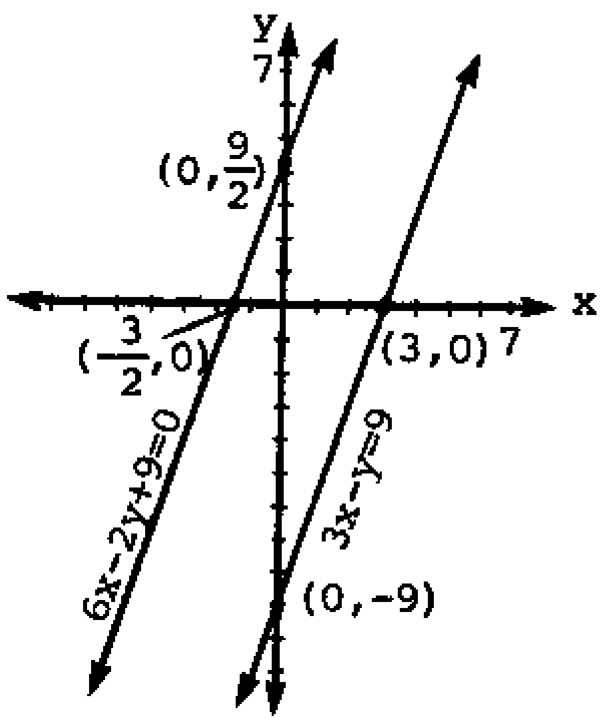
Haciendo ahora se hace $y = 0$ en la ecuación dada:

$0 = -3x + 4 \Rightarrow x = a = \frac{4}{3}$;entonces, el punto de corte de la recta con el eje de las ***x*** es el siguiente: $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$.

12.- Demostrar que las líneas rectas dadas por las siguientes ecuaciones son paralelas:

$$l_1 \equiv 3x - y = 9$$
$$l_2 \equiv 6x - 2y + 9 = 0$$

Si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales, o sea que en este caso se debería cumplir que $m_1 = m_2$.



Cálculo de m_1 :

$$3x - y - 9 = 0 \Rightarrow y = 3x - 9 \Rightarrow m_1 = 3$$

Cálculo de m_2 :

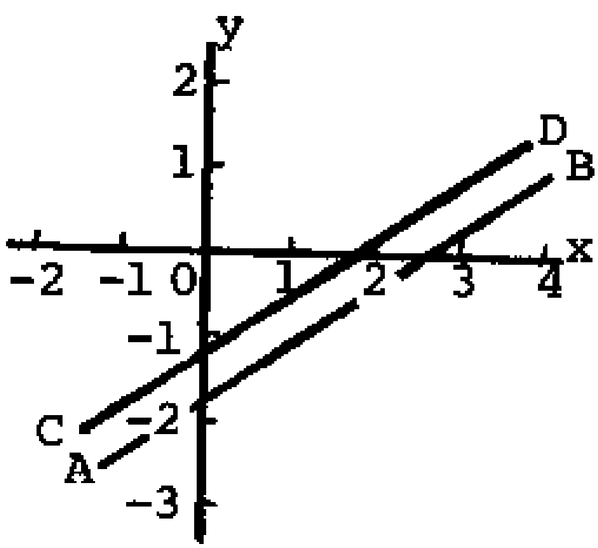
$$6x-2y+9=0 \Rightarrow 2y=6x+9 \Rightarrow y=3x+\frac{9}{2} \Rightarrow m_2=3$$

Entonces, las dos rectas son paralelas porque $m_1=m_2=3$

13.- Determinar si existe algún punto de intersección de las dos líneas rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$l_1 \equiv 2x-3y=5$$
$$l_2 \equiv 6x-9y=10$$

Si las dos rectas son paralelas, $m_1=m_2$, no se intersecan y por lo contrario, si $m_1 \neq m_2$, las dos rectas se cruzan en algún punto.



Se inspeccionará entonces el valor de las pendientes de las dos rectas.

Cálculo de m_1 :

$$l_1 \equiv 2x-3y=5 \Rightarrow 3y=2x-5 \Rightarrow y=\left(\frac{2}{3}\right)x-\frac{5}{3} \Rightarrow m_1=\frac{2}{3}$$

Cálculo de m_2 :

$$l_2 \equiv 6x - 9y = 10 \Rightarrow 9y = 6x - 10 \Rightarrow y = \frac{6}{9}x - \frac{10}{9} \Rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{10}{9} \Rightarrow m_2 = \frac{2}{3}$$

O sea, que $m_1 = m_2 = \frac{2}{3}$ y por lo tanto las dos rectas son paralelas y no tienen punto de cruce entre ellas.

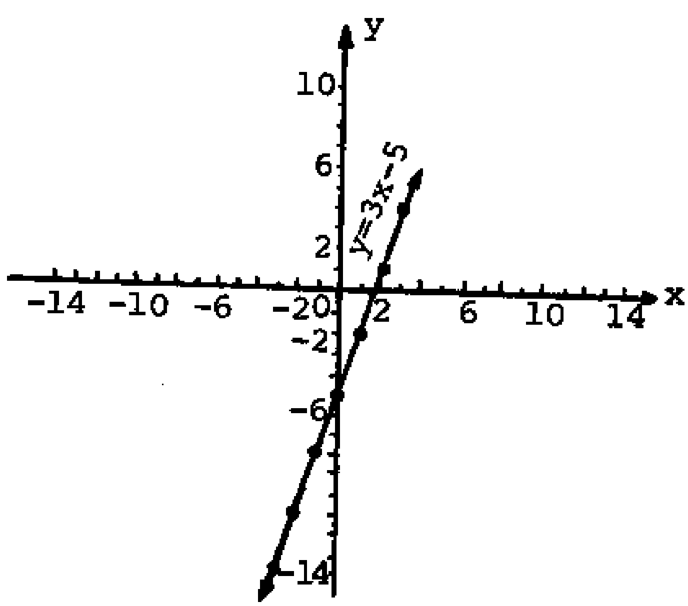
14.- Encontrar el punto de intersección entre las dos líneas rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$l_1 \equiv 3x - y = 5$$
$$l_2 \equiv 9x - 3y = 15$$

Si se divide la segunda ecuación por 3 se encontrará lo siguiente:

$$\frac{9x - 3y = 15}{3} \Rightarrow 3x - y = 5$$

El resultado es exactamente la primera ecuación, lo que quiere decir que las dos ecuaciones son dependientes y tendrán por tanto la misma gráfica.



Al coincidir exactamente las gráficas de las dos rectas, la solución es múltiple, ya que cada punto de las rectas es una solución.

15.- Encontrar la ecuación general de la recta l_2 que es perpendicular a la recta $l_1 \equiv x + y + 4 = 0$ y pasa por el punto $P(0,0)$.

La ecuación de una línea recta para este caso estará dada por:

$$y - y_1 = m_2 \left(x - x_1 \right)$$

Luego, como las rectas $l_1 \perp l_2$, entonces se cumple que $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

Cálculo de m_1 :

$$l_1 = x + y + 4 = 0 \Rightarrow y = -x - 4 \Rightarrow m_1 = -1$$

Cálculo de m_2 :

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{(-1)} = 1$$

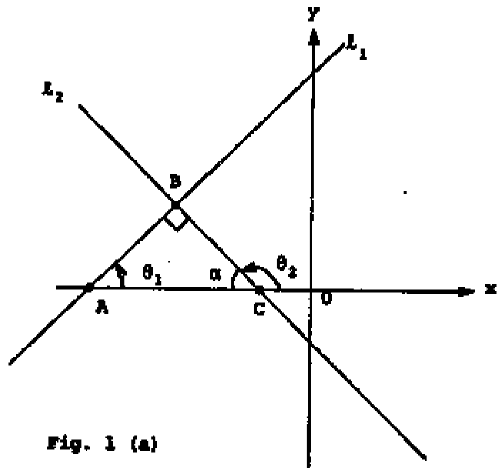
Entonces la ecuación de la recta será:

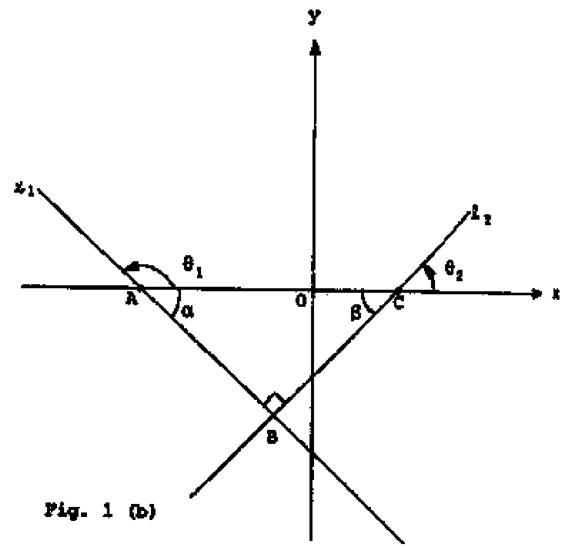
$$y - (0) = (1)(x - 0) \Rightarrow y = x \Rightarrow y - x = 0$$

16.- Encontrar la ecuación de una línea recta que es paralela a la recta $Ax + By + C = 0$, donde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son constantes arbitrarias.

La pendiente de $Ax + By + C = 0$ es $m = -\dfrac{A}{B}$, entonces, una línea recta paralela a la dada es $Ax + By + D = 0$, donde $\boldsymbol{D}$ es una constante arbitraria.

17.- Probar que si dos líneas rectas l_1 y l_2 son perpendiculares entre ellas, entonces, las pendientes de las dos líneas rectas tienen la relación siguiente: $(m_1)(m_2) = -1$.





Hagamos $m_1 = tg\theta_1; m_2 = tg\theta_2$

De la figura #1 ver el ΔABC:

$$\alpha = 180^{o} - \theta_2$$
$$\theta_1 + \alpha = 90^{o}$$
$$\theta_1 + \left(180^{o} - \theta_2\right) = 90^{o} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 - 90^{o}$$
$$m_1 = tg\theta_1 = tg\left(\theta_2 - 90^{o}\right) = tg\left[-\left(90^{o} - \theta_2\right)\right] = -\left[tg\left(90^{o} - \theta_2\right)\right] =$$
$$= -\left[ctg\theta_2\right] = -\frac{1}{tg\theta_2} = -\frac{1}{m_2}$$

Otra solución alternativa se obtiene viendo el ΔABC en la figura # 1b:

$$\beta = \theta_2$$
$$\alpha = 180^{o} - \theta_1$$
$$\beta + \alpha = 90^{o} = \theta_2 + 180^{o} - \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2 + 90^{o}$$
$$m_1 = tg\theta_1 = tg\left(\theta_2 + 90^{o}\right) = -ctg\theta_2 = -\frac{1}{tg\theta_2} = -\frac{1}{m_2}$$

18.- Encontrar la distancia absoluta entre el punto $P(1,1)$ y la recta $l \equiv x + y - 10 = 0$.

Para hacer este cálculo se utilizará la ecuación definida para calcular la distancia de una recta $Ax+By+C=0$ y el punto $P(x_0,y_0)$:

$$|d|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|=\left|\frac{(1)(1)+(1)(1)-10}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}\right|=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

19.- Encontrar la distancia absoluta entre $l_1 \equiv x+2y+4=0$ y $l_2 \equiv x+2y-9=0$.

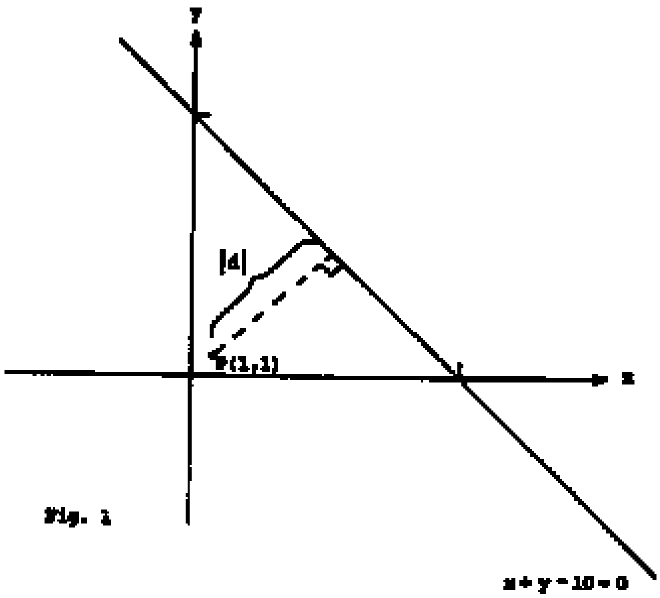


Fig. 1

19.- Encontrar la distancia absoluta entre la recta $l_1 \equiv x+2y+4=0$ y la recta $l_2 \equiv x+2y-9=0$.

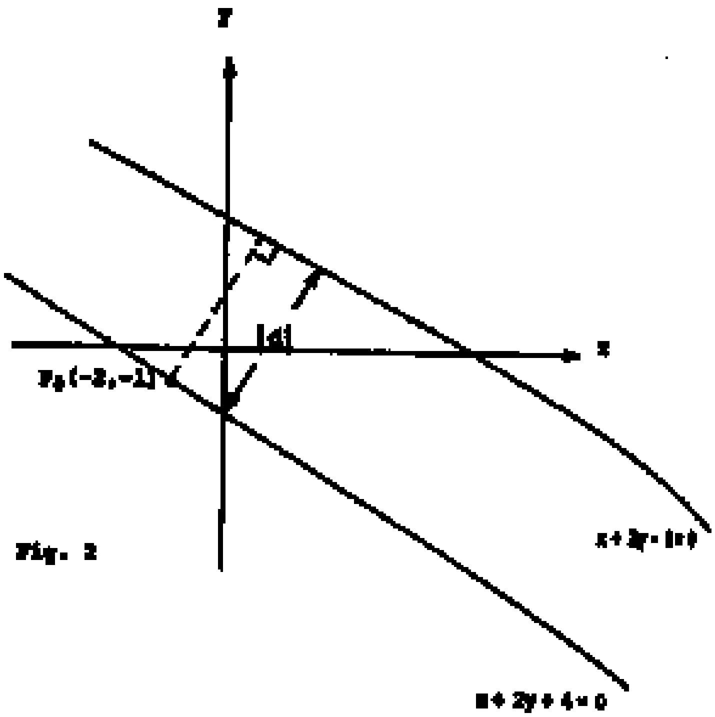


Fig. 2

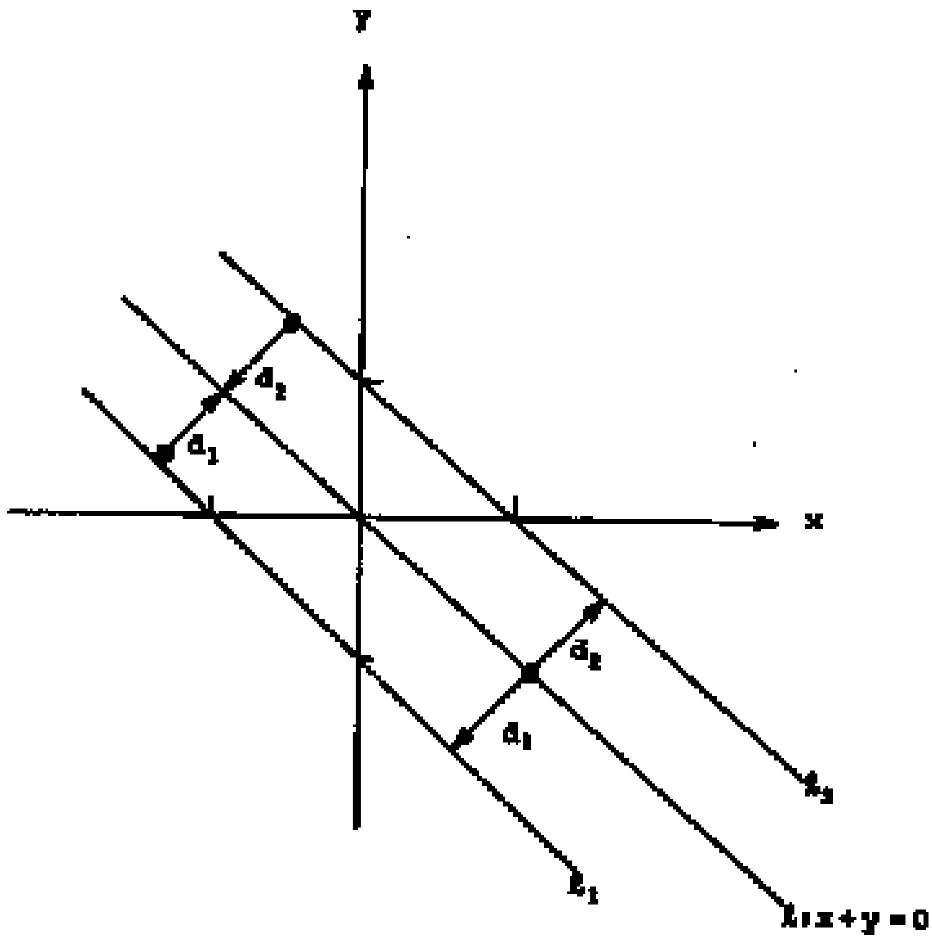
Seleccionemos un punto cualquiera de la recta l_1, dándole valores a x y calculando el valor de y. El punto más fácil es hacer $x = 0$ y entonces $y = -2$. Otro punto puede ser $x = -2; y = -1$. Ambos puntos satisfacen la ecuación general de l_1. Entonces, la distancia entre el punto $P_0\left(-2,-1\right)$ a la línea recta es:

$$d = \left|\frac{1\cdot\left(-2\right)+2\cdot\left(-1\right)+4}{\sqrt{\left(1\right)^2+\left(2\right)^2}}\right| = \left|\frac{-13}{\sqrt{5}}\right| = \frac{13\sqrt{5}}{5}$$

20.- Encontrar la ecuación de la recta l, la cual es paralela y equidistante de las dos líneas rectas siguientes:

$$l_1 \equiv x + y + 2 = 0$$

$$l_2 \equiv x + y - 2 = 0$$



Ya se sabe que $l_1 \parallel l_2 \parallel l$, el enunciado del problema nos pide que la distancias entre las rectas sean iguales, entonces tomaremos un punto cualquiera de la recta l, digamos $P_0\left(x_0, y_0\right)$, ver gráfica anexa, y aplicando el concepto de segmentos dirigidos, diremos que:

$$d_1 = -d_2 \Rightarrow \frac{(1)(x_0)+(1)y_0+2}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} = -\frac{(1)(x_0)+(1)(y_0)-2}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}} \Rightarrow$$

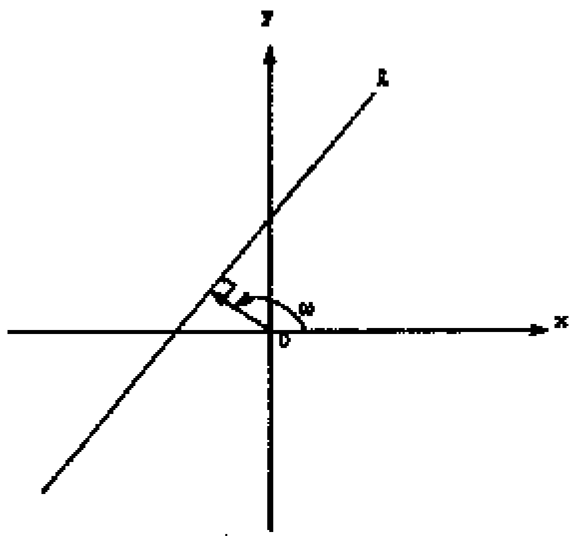
$$\Rightarrow \frac{x_0+y_0+2}{\sqrt{2}} = -\frac{x_0+y_0-2}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0+y_0+2 = -\left(x_0+y_0-2\right) \Rightarrow$$

$$2x_0+2y_0 = 0 \Rightarrow x_0+y_0 = 0$$

Pero, como $P_0\left(x_0, y_0\right)$ es un punto cualquiera de la recta l entonces, podemos escribir que la ecuación de la línea recta buscada es:

$$x + y = 0$$

21.- Discutir el gráfico de $Ax + By + C = 0$, donde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son constantes arbitrarias, excepto que ambas, A y $\boldsymbol{B}$ no pueden ser cero.



$Ax + By + C = 0$ es la ecuación general de una línea recta.

Si $C = 0$, la línea pasa a a través del origen. Si $B = 0$, la línea es paralela al eje de las $\boldsymbol{y}$, y si $A = 0$, la línea es paralela al eje de las $\boldsymbol{x}$.

La pendiente de la línea recta es igual a $m = -\frac{A}{B}$. Las intersecciones con los ejes de coordenadas son:

$$a = -\frac{C}{A}$$

$$b = -\frac{C}{B}$$

22.- Escribir la ecuación normal de una línea recta dada por su ecuación general $Ax + By + C = 0$.

La ecuación normal de una línea recta que no pasa por el origen es:

$$x\cos\alpha + ysen\alpha - \rho = 0$$

Donde $\rho > 0$ es la longitud de la longitud normal a la recta desde el origen y α es el ángulo positivo $\left(0^{\circ} \leq \alpha \leq 360^{\circ}\right)$ medido desde el lado positivo del eje de las $\boldsymbol{x}$ a la normal, tal y como se muestra en la gráfica de arriba.

Para reducir la ecuación general de la línea recta $\left(Ax + By + C = 0\right)$, a la forma normal, se deberán dividir todos los términos de la ecuación general por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$, y tomar las siguientes decisiones en cuanto al signo del radical:

(a) Si $C \neq 0$, el signo del radical es opuesto al signo de $\boldsymbol{C}$.
(b) Si $C = 0$, el signo del radical y el signo de $\boldsymbol{B}$ son iguales.
(c) Si $B = C = 0$, el signo del radical y el signo de $\boldsymbol{A}$ son iguales.

Entonces, la ecuación normal de la línea recta será:

$$\left(\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right)x + \left(\frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right)y + \left(\frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right) = 0$$

Donde:

$$\rho = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

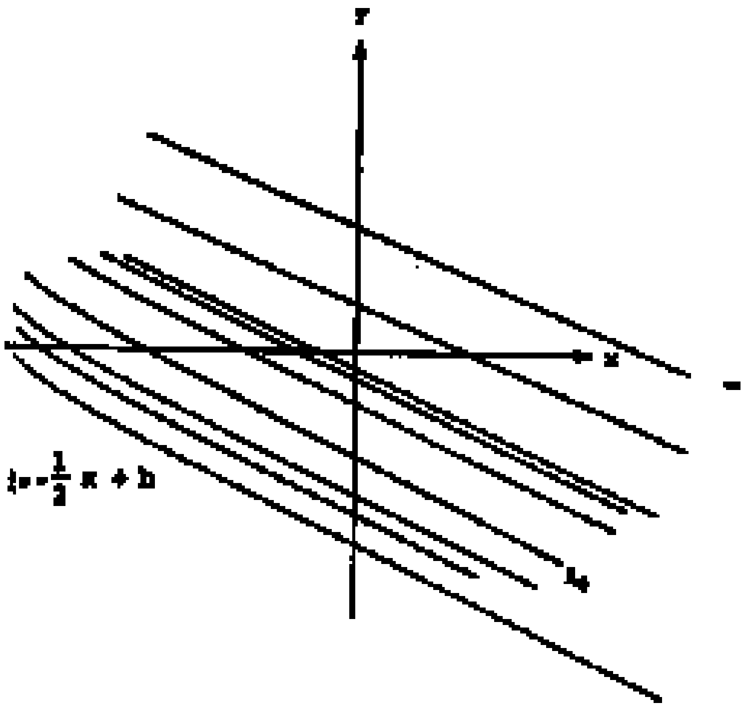
$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$sen\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

23.- Encontrar la ecuación de la familia de rectas que satisfacen las siguientes condiciones:

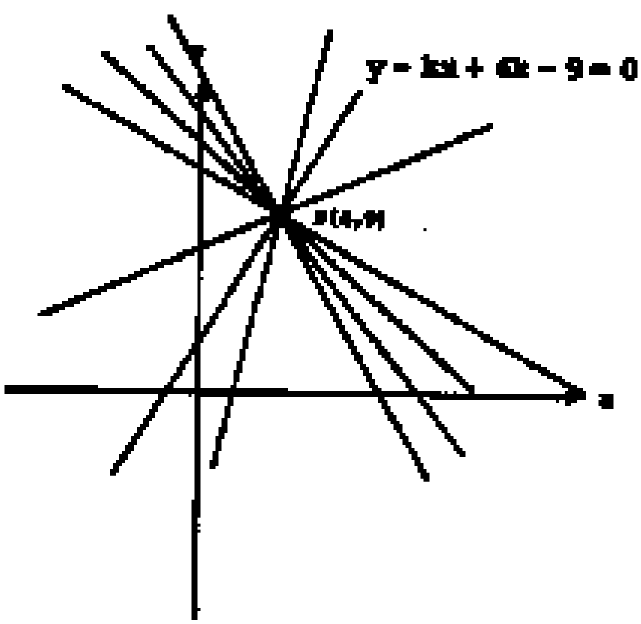
(a).- Paralelas a $l_0 \equiv x + 2y + 4 = 0$.

La pendiente de la línea recta l_0 es $m_0 = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{2}$. Entonces, todas las líneas rectas que tengan pendientes iguales a $m = -\frac{1}{2}$ formarán parte de esta específica familia de rectas. La ecuación reducida de esta familia de rectas será: $y = \left(-\frac{1}{2}\right)x + b.$



(b) Que pasen por el punto $P_0(4,9)$.

La ecuación de la familia de líneas rectas pasando por el punto $P_0(4,9)$ es: $y-9=m(x-4)$; donde $\boldsymbol{m}$ es la pendiente de la línea recta. Esta ecuación puede reescribirse como: $y-mx+4m-9=0.$



Para leer la gráfica: $k=m$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #40.
Tema: Coordenadas.
Fecha: ___________
Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____
Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Por coordenadas se entiende las magnitudes utilizadas para localizar un punto en un sistema de coordenadas, bien sea en un plano, en un espacio tridimensional o en un espacio de $\boldsymbol{n}$ dimensiones. Las coordenadas a lo largo de un eje deben preservar la posición relativa de espacios entre puntos; es decir, si un punto se encuentra entre otros dos en el espacio, las magnitudes de las coordenadas correspondientes deberían reflejar este hecho.

La proyección de un punto sobre un eje de coordenada es meramente la coordenada del punto correspondiente a ese eje. Así, la proyección de $(3,5)$ sobre el eje de las $\boldsymbol{x}$ es 3 y sobre el eje de las $\boldsymbol{y}$ es 5. La proyección de un segmento de línea recta $\boldsymbol{AB}$ sobre una de las coordenadas es el segmento de línea obtenido al proyectar los puntos extremos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ y luego se identifican las líneas segmentos entre los puntos proyectados.

Para encontrar el punto medio entre dos puntos se hace lo mismo que para encontrar el punto medio de un segmento de línea entre dos puntos, y ésto es lo mismo que que encontrar los puntos medios de las proyecciones del segmento de línea sobre cada uno de los ejes de coordenadas. Así, que dados los puntos P_1 y P_2 con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto medio se obtiene al encontrar los puntos medios sobre los dos ejes, como sigue:

$$P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Para encontrar un punto cualquiera x_m entre x_1 y x_2, tal que la distancia entre x_m y x_1 es $\boldsymbol{a}$ y entre x_m y x_2 es $\boldsymbol{b}$, se utiliza la ecuación:

$$\frac{x_m-x_1}{x_2-x_m}=\frac{a}{b}=\lambda \Rightarrow x_m-x_1=\lambda\left(x_2-x_m\right)=\lambda x_2-\lambda x_m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_m+\lambda x_m=x_1+\lambda x_2 \Rightarrow x_m\left(1+\lambda\right)=x_1+\lambda x_2 \Rightarrow x_m=\frac{x_1+\lambda x_2}{\left(1+\lambda\right)}$$

De igual manera se puede demostrar que:

$$y_m=\frac{y_1+\lambda y_2}{\left(1+\lambda\right)}$$

Encontrar la distancia entre dos puntos $P_1\left(x_1,y_1\right)$ y $P_2\left(x_2,y_2\right)$ está dada por la ecuación siguiente basada en el teorema de Pitágoras:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$$

La pendiente de una línea recta es el cambio de altura vertical provocado por un desplazamiento horizontal específico. Dados dos puntos sobre una misma línea recta, $P_1\left(x_1,y_1\right)$ y $P_2\left(x_2,y_2\right)$, la pendiente de la línea recta está dada por:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

La pendiente de una línea recta puede también ser definida como la tangente del ángulo que la línea recta forma cuando cruza el eje de las $\boldsymbol{x}$. Basado en este hecho, dadas las pendientes de dos líneas rectas, es posible calcular el ángulo hecho a la intersección de las dos líneas. Para resolver este problema se utilizará una identidad trigonométrica; es decir que si m_1 y m_2 son las pendientes de las dos líneas, estos valores son iguales a $tg\alpha_1$ y $tg\alpha_2$, donde α_1 y α_2 son los respectivos ángulos de intersección de las dos líneas con el eje de las $\boldsymbol{x}$. El ángulo de intersección puede ser calculado con la fórmula:

$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$tg\theta = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1+\left(tg\alpha_1\right)\left(tg\alpha_2\right)} = \frac{m_2 - m_1}{1+\left(m_1\right)\left(m_2\right)} =$$

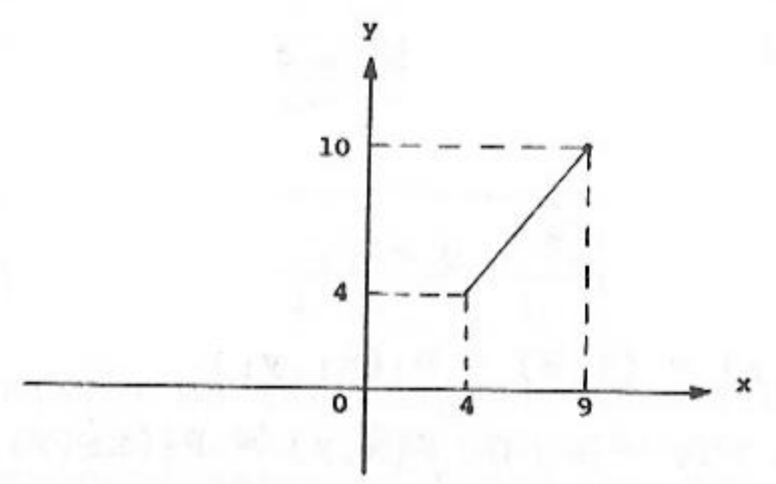
Tres puntos en el espacio se dicen que son colineales si todos pertenecen a la misma línea recta. Se puede determinar si varios puntos son colineales de varias maneras. Si ***A, B*** y ***C*** son puntos tales que la proyección de ***B*** sobre el eje de las ***x*** yace entre las proyecciones de ***A*** y ***C***; entonces, ***A, B*** y ***C*** son colineales., o sea, si:

$$\left|AB\right| + \left|BC\right| = \left|AC\right|$$

Otra manera de determinar si tres puntos son colineales, es que normalmente tres puntos en el mismo plano forman un triángulo el cual tiene un área, si el área que forman los tres puntos es igual a cero, el triángulo no existe y, los tres puntos están todos sobre la misma línea recta. Un último método para determinar si tres puntos son colineales es que partiendo del mismo punto las pendientes que forma ese punto con los otros dos son iguales.

PREGUNTAS:

1.- Encontrar las proyecciones de ***AB*** sobre los ejes de coordenadas, siendo las coordenadas de los puntos los siguientes: $A(4,4); B(9,10)$.



Por definición, la proyección del segmento de línea recta $\overline{P_1P_2}$ el cual une los puntos $P_1\left(x_1, y_1\right)$ y $P_2\left(x_2, y_2\right)$ sobre el eje de las ***x*** es $\left(x_2 - x_1\right)$, y sobre el eje de las ***y*** es $\left(y_2 - y_1\right)$. Entonces las proyecciones buscadas serán:

Eje de las $\boldsymbol{x}$: $(9-4)=5.$

Eje de las $\boldsymbol{y}$: $(10-4)=6.$

2.- Encontrar las coordenadas del punto $P(x,y)$ que divide los siguientes segmentos en las razones dadas:

(a).- $P_1(4,4)$ y $P_2(8,8)$ con $\frac{r_1}{r_2}=\frac{-1}{2}=\lambda=-\frac{1}{2}$

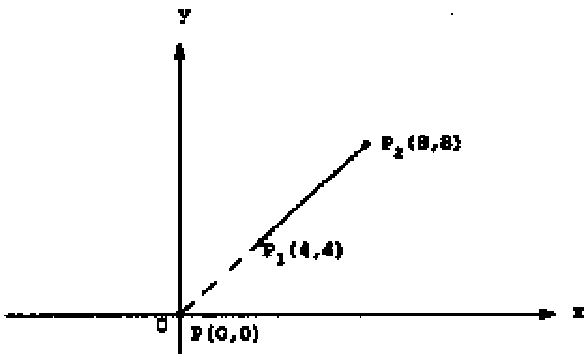


Fig. 1

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{(1+\lambda)}=\frac{4+\left(-\frac{1}{2}\right)8}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4-4}{\frac{1}{2}}=2(0)=0$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{(1+\lambda)}=\frac{4+\left(-\frac{1}{2}\right)8}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}=2(0)=0$$

(b).- $P_1(4,9)$ y $P_2(9,10)$ con $\frac{r_1}{r_2}=\lambda=\frac{0}{a}=0$

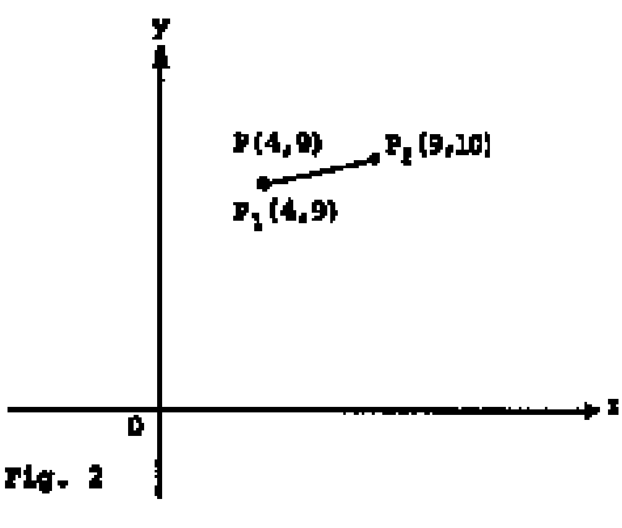


Fig. 2

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{(1+\lambda)}=\frac{4+(0)9}{1+0}=4=x_1$$

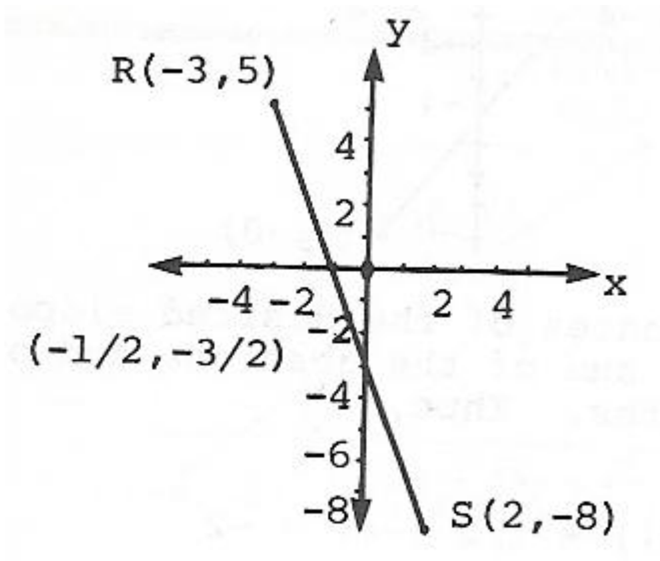
$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{(1+\lambda)}=\frac{9+(0)10}{1+0}=9=y_1$$

3.- Encontrar el punto medio del segmento comprendido entre $R(-3,5)$ y $S(2,-8)$.

La fórmula para calcular el punto medio de un segmento, dadas las coordenadas de sus puntos extremos es la siguiente:

$$x_m=\frac{x_1+x_2}{2};\, y_m=\frac{y_1+y_2}{2}$$ Entonces:

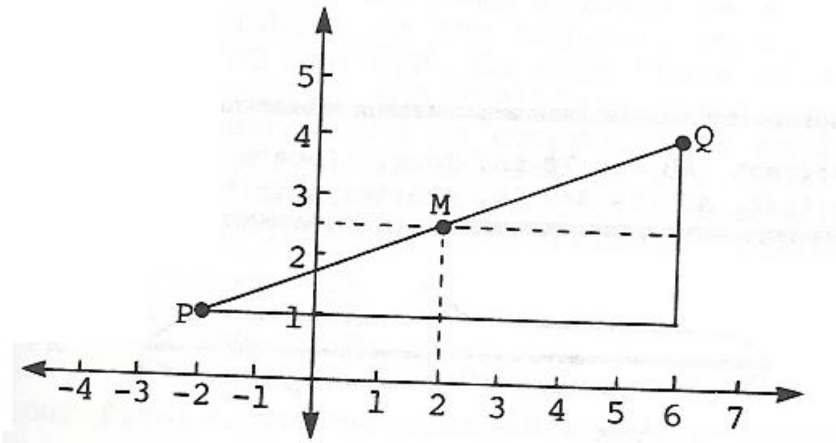
$$x_m=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2};\, y_m=\frac{5+(-8)}{2}=-\frac{3}{2}\Rightarrow P_m\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$$



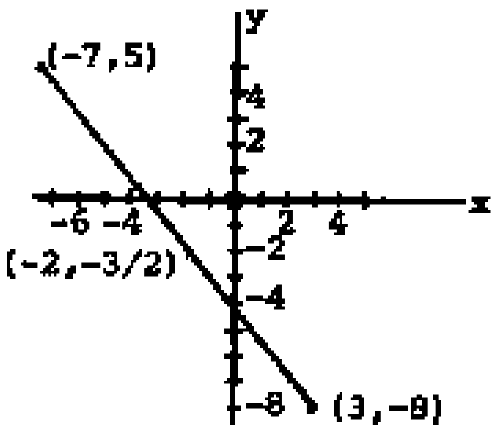
4.- ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento de línea recta cuyos extremos son $P(-2,1)$ y $Q(6,4)$?

Sea $M(x,y)$ el punto medio de un segmento de línea recta cuyos extremos son $P(-2,1)$ y $Q(6,4)$.

$$x_M = \frac{-2+6}{2} = 2; y_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$



5.- Determine las coordenadas del punto medio del segmento de recta cuyos extremos son los puntos $A(3,-8)$ y $B(-7,5)$.



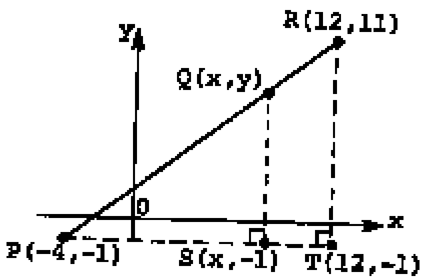
$$x_M = \frac{3+(-7)}{2} = -2; y_M = \frac{(-8)+5}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$$

6.- El segmento de línea recta ***AB*** tiene una longitud de $7\frac{1}{2}(pulgadas)$. Localizar el punto C, entre ***A*** y ***B*** de manera que ***AC*** es $\frac{3}{2}(pulgadas)$ más corto que dos veces ***CB***.

Sea x la longitud de CB en pulgadas. Entonces, $\left(7\frac{1}{2}-x\right)$ es la longitud de AC y ya sabemos que AC es $\frac{3}{2}(pulgadas)$ más corto que dos veces BC. Entonces, podemos escribir que:

$$7\frac{1}{2}-x=2x-3\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{15}{2}-x=2x-\frac{3}{2}\Rightarrow x=3\Rightarrow CB=3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC=7\frac{1}{2}-3=4\frac{1}{2}(pulgadas)$$

7.- Encontrar el punto Q que se encuentra a $\frac{3}{4}$ de la longitud del punto $P(-4,-1)$ al punto $R(12,11)$ a lo largo del segmento PR.

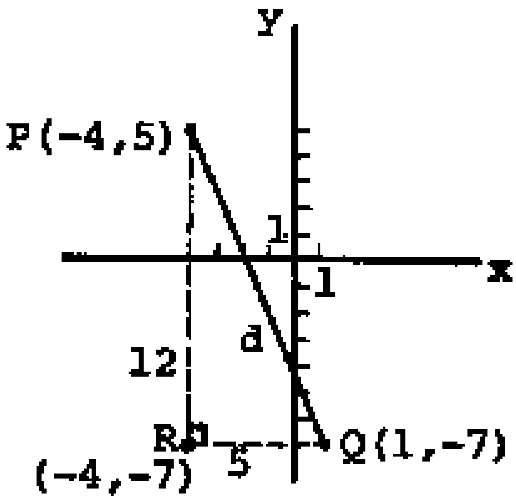


El problema consiste en encontrar las coordenadas del punto Q. Sabemos que $\overline{PQ}=\frac{3}{4}$ y por lo tanto $\overline{QR}=\frac{1}{4}$; de donde $\lambda=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$

$$x_Q=\frac{x_1+\lambda x_2}{(1+\lambda)}=\frac{-4+(3)(12)}{1+3}=\frac{32}{4}=8$$

$$y_Q=\frac{y_1+\lambda y_2}{(1+\lambda)}=\frac{-1+(3)(11)}{1+3}=\frac{32}{4}=8$$

8.- Encontrar la longitud del segmento de recta comprendido entre $P(-4,5)$ y $Q(1,-7)$, basándose en la información suministrada por la gráfica siguiente.



De la gráfica concluimos que se cumple:

$$\left(\overline{PR}\right)^2+\left(\overline{RQ}\right)^2=\left(\overline{PQ}\right)^2 \Rightarrow (12)^2+(5)^2=144+25=169$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{169}=13$$

9.- ¿Cuál es la distancia entre los puntos $(2,3)$ y $(7,11)$?

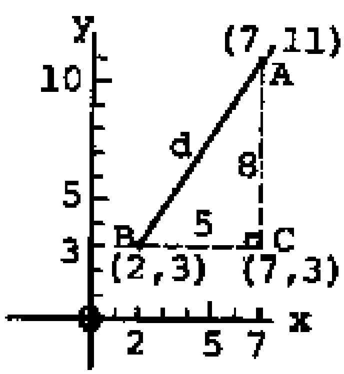


Fig. A

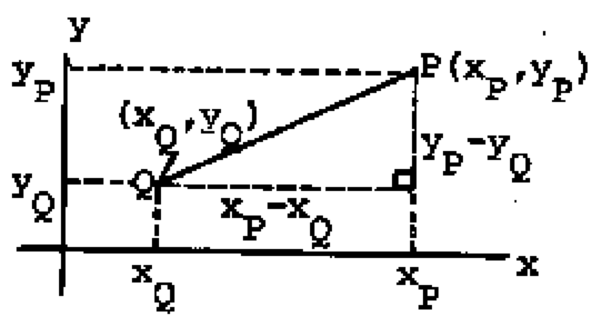


Fig. B

Observando la figura A, el triángulo ABC:

$$\left(\overline{BC}\right)^2+\left(\overline{AC}\right)^2=\left(\overline{AB}\right)^2\Rightarrow(5)^2+(8)^2=25+64=89\Rightarrow$$

$$\left(\overline{AB}\right)=\sqrt{89}$$

Generalizando, podemos observar la figura B, con los puntos P y Q:

$$d_{(P,Q)}=\sqrt{\left(x_P-x_Q\right)^2+\left(y_P-y_Q\right)^2}$$

10.- Encontrar la distancia que existe del origen de coordenadas cartesianas al punto (x,y).

Si denominamos $P_1(0,0)$ y $P_2(x,y)$, entonces:

$$d_{(P_1,P_2)}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$$

11.- Encontrar la distancia y la pendiente entre los siguientes puntos:

$(3,-5)$

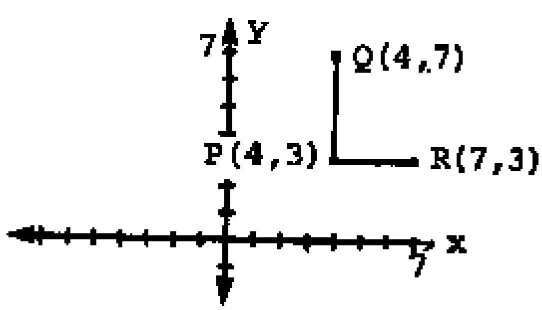
$(2,4)$

Hagamos $P_1(x_1,y_1)\equiv(3,-5)$ y $P_2(x_2,y_2)\equiv(2,4)$

Luego: $d_{(P_1,P_2)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2-3)^2+(4+5)^2}=\sqrt{82}$

Para la pendiente: $m_{(P_1,P_2)}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{4+5}{2-3}=-9$

11.- Dados los puntos $P(4,3);Q(4,7);R(7,3)$, encontrar las longitudes de $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$.



Los puntos ***P*** y ***Q*** tienen la misma abscisa y por lo tanto su distancia es igual a:

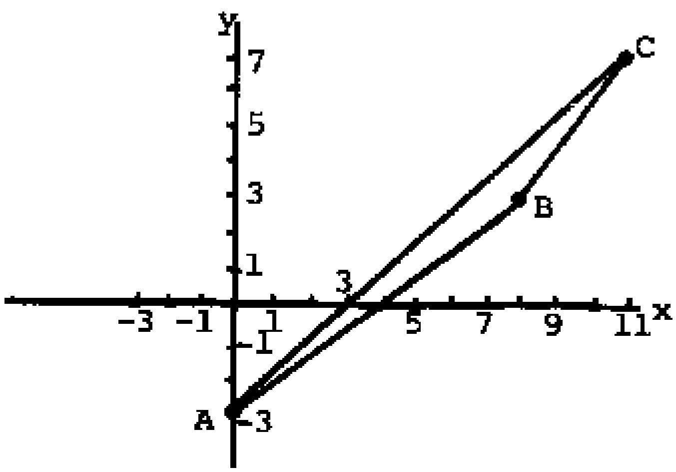
$$d_{(P,Q)} = \left| y_P - y_Q \right| = \left| 3 - 7 \right| = 4$$

Los puntos ***P*** y ***R*** tiene la misma ordenada y por lo tanto su distancia es igual a:

$$d_{(P,R)} = \left| x_P - x_R \right| = \left| 4 - 7 \right| = 3$$

12.- Usando la fórmula para calcular la distancia entre dos puntos, demostrar que los tres puntos siguientes son colineales:

$$A(0,-3); B(8,3); C(11,7)$$



Tres puntos son colineales si los tres pertenecen a la misma línea recta. Eso quiere decir que en este caso, se debería cumplir que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

$$d_1 = \overline{AB} = \sqrt{(8-0)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$d_2 = \overline{AC} = \sqrt{(11-0)^2 + (7+3)^2} = \sqrt{210} \approx 14,74$$

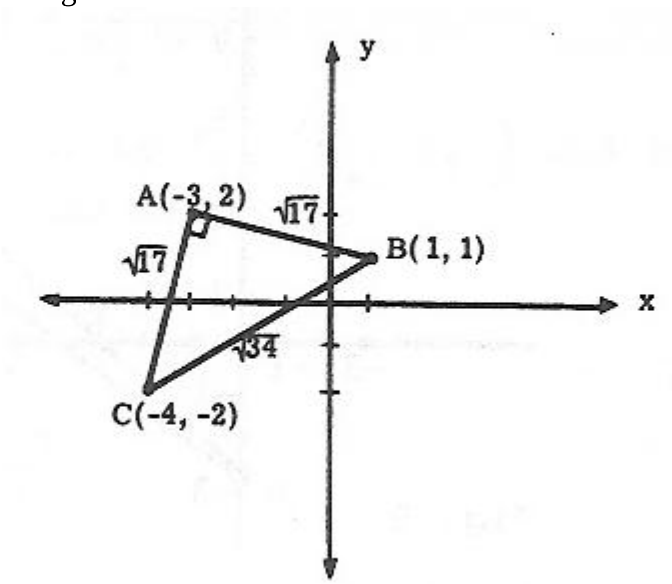
$$d_3 = \overline{BC} = \sqrt{(11-8)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Entonces:

$$d_1 + d_3 \neq d_2$$

Como se puede ver en la gráfica los tres puntos no son colineales y forman un triángulo.

13.- Demostrar que el triángulo conformado por $A(-3,2);B(1,1);C(-4,-2)$ es un triángulo isósceles.



$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(1+3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(-4+3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$$

$$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(-4-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{34}$$

Nótese que el triángulo es definitivamente isósceles porque $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{17}$.

Pero, también, el triángulo es rectángulo, porque:

$\left|\overline{BC}\right|^2 = \left|\sqrt{34}\right|^2 = \left|\sqrt{17}\right|^2 + \left|\sqrt{17}\right|^2$, o sea el $\angle A = 90^{o}$.

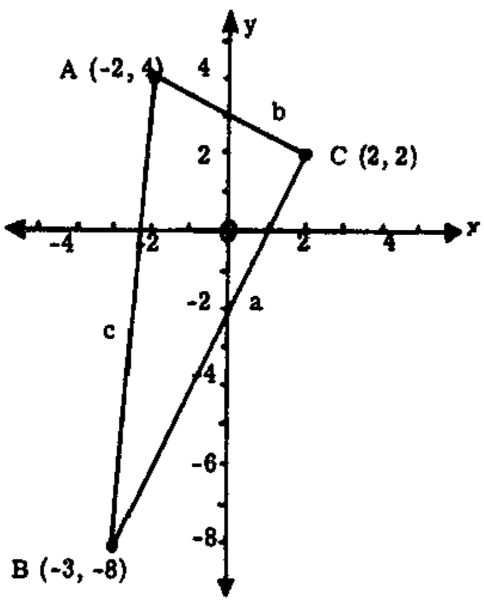
14.- Demostrar que los puntos $A(-2,4);B(-3,-8);C(2,2)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Si el triángulo $\boldsymbol{ABC}$ es un triángulo rectángulo, entonces se cumple el teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$. Entonces, para resolver este problema se deberán calcular las distancias entre los puntos dados y comprobar luego si se cumple la relación matemática del teorema de Pitágoras.

$$d_{(B,C)} = \sqrt{\left[2-(-3)\right]^2 + \left[2-(-8)\right]^2} = \sqrt{125} = a$$

$$d_{(C,A)} = \sqrt{(-2-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20} = b$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{\left[-3-(-2)\right]^2 + (-8-4)^2} = \sqrt{145} = c$$

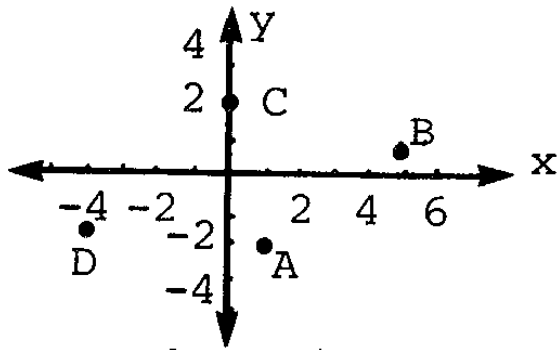


Conocidas loas distancias entre puntos se tratará de comprobar si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \left(\sqrt{125}\right)^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2 = 125 + 20 = 145 = c^2$$

La relación se cumple y por tanto el triángulo es rectángulo, siendo $\measuredangle C = 90^{\circ}$.

15.- Grafique los puntos $A(1,-2); B(5,1); C(0,2)$ en unos ejes cartesianos. Si estos tres puntos son vértices de un paralelogramo, encontrar las coordenadas del cuarto vértice $\boldsymbol{D}$ en el tercer cuadrante.



$$m_{(B,C)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{0-5} = -\frac{1}{5}$$

$$m_{(A,B)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-2)}{5-1} = \frac{3}{4}$$

Como es un paralelogramo, se debe cumplir que:

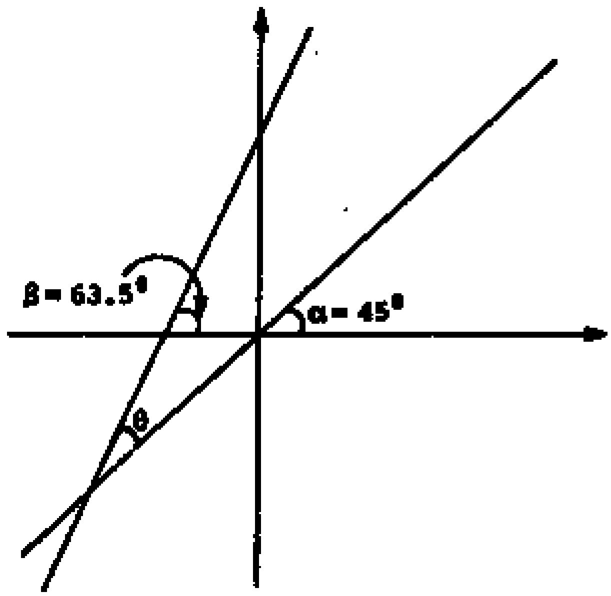
$$m_{(B,C)} = -\frac{1}{5} = m_{(A,D)} = \frac{y-(-2)}{x-1} \Rightarrow 1-x = 5y+10 \Rightarrow x+5y+9=0................(1)$$

$$m_{(A,B)} = \frac{3}{4} = m_{(D,C)} = \frac{2-y}{0-x} \Rightarrow -3x = 8-4y \Rightarrow 3x-4y+8=0.......................(2)$$

O sea, se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo (1) y (2):

$$D(-4,-1)$$

16.- Encontrar el ángulo de intersección de las dos rectas mostradas en la figura siguiente:



Llamemos: $l_2 \Rightarrow m_2 = tg\left(63{,}5º\right) = 2; l_1 \Rightarrow m_1 = tg\left(45º\right) = 1$

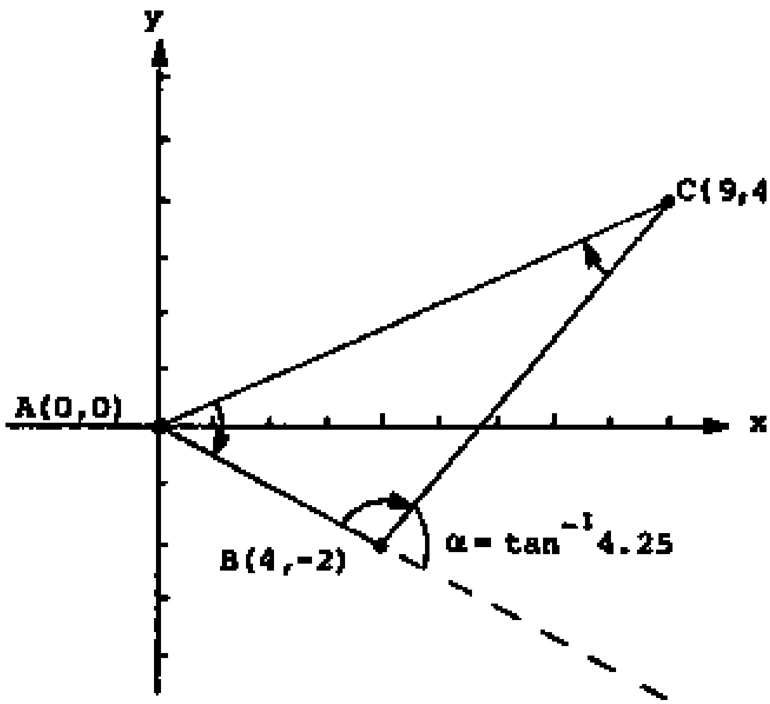
Luego: $tg\left(\theta\right) = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + \left(m_1\right)\left(m_2\right)} = \dfrac{2-1}{1+\left(1\right)\left(2\right)} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = 18{,}4º$

17.- Encontrar la pendiente de una línea recta l_2 la cual forma un ángulo de 30º con una línea l_1 d pendiente igual a 1.

Se parte de la fórmula: $tg\left(\theta\right) = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + \left(m_1\right)\left(m_2\right)} \Rightarrow tg\left(30º\right) = \dfrac{m_2 - 1}{1 + \left(1\right)\left(m_2\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Resolviendo: $m_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

18.- Encontrar el valor de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértice son: $A\left(0,0\right); B\left(4,-2\right); C\left(9,4\right).$



Se comienza por calcular las pendientes de los tres lados del triángulo:

$$m_{(A,B)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-0}{4-0} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{(A,C)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{9-0} = \frac{4}{9}$$

$$m_{B,C} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{9-4} = \frac{6}{5}$$

Luego:

$$tg(A) = \frac{m_2 - m_1}{1+(m_1)(m_2)} = \frac{m_{(A,C)} - m_{(A,B)}}{1+\left[m_{(A,C)}\right]\left[m_{(A,B)}\right]} = \frac{\frac{4}{9}+\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{9}\right)} = \frac{17}{14}$$

$$\square\ A = tg^{-1}\left(\frac{17}{14}\right) = 50{,}5^{\text{o}} \Rightarrow \square\ A = 50{,}5^{\text{o}}$$

También:

$$tg\left(C\right)=\frac{m_{(B,C)}-m_{(A,C)}}{1+\left[m_{(A,C)}\right]\left[m_{(B,C)}\right]}=\frac{\frac{6}{5}-\frac{4}{9}}{1+\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{4}{9}\right)}=0,49275$$

$$\square\ C=tg^{-1}\left(0,49275\right)=26,2317^{o}$$

$$\square\ B=180^{o}-\left[\square\ A+\square\ C\right]=180^{o}-\left(50,5^{o}+26,2317^{o}\right)=103,2683^{o}$$

Es una experiencia interesante calcular directamente el valor del ángulo $\boldsymbol{B}$:

$$tg\left(B\right)=\frac{m_{(A,B)}-m_{(B,C)}}{1+\left(m_{(A,B)}\right)\left(m_{(B,C)}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{6}{5}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{6}{5}\right)}=\frac{\frac{-5-12}{10}}{\frac{10-6}{10}}=\frac{-17}{4}=-4,25$$

Eso quiere decir que el ángulo $\boldsymbol{B}$ debe estar necesariamente en el segundo cuadrante.

$tg^{-1}\left(-4,25\right)=-76,76^{o}$ por lo que el ángulo buscado será:

$$\square\ B=180^{o}-76,76^{o}=103,24^{o}$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #39.

Tema: Circunferencia y Círculo.

Fecha: ___________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

- Ecuación canónica de la circunferencia: $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ donde $C(h,k)$ es el centro y $\boldsymbol{R}$ es el radio.
- Ecuación general de la circunferencia: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ donde siempre debe cumplirse que $A=B>0$, como también que no exista término $\boldsymbol{xy}$.
- Dada una ecuación cuadrática arbitraria, si es conocido que la curva describe una circunferencia, la ecuación puede ser algebraicamente transformada, utilizando la técnica de complementación de cuadrados, obteniéndose la ecuación canónica, donde el centro y el radio pueden ser determinados.

PREGUNTAS:

1.- Escriba las ecuaciones de las circunferencias siguientes:

(a).- Centro a $(-1,3)$ y radio igual a 9.

$$\left[x-(-1)\right]^2+(y-3)^2=(9)^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2-6y+9=81 \Rightarrow x^2+y^2+2x-6y-71=0$$

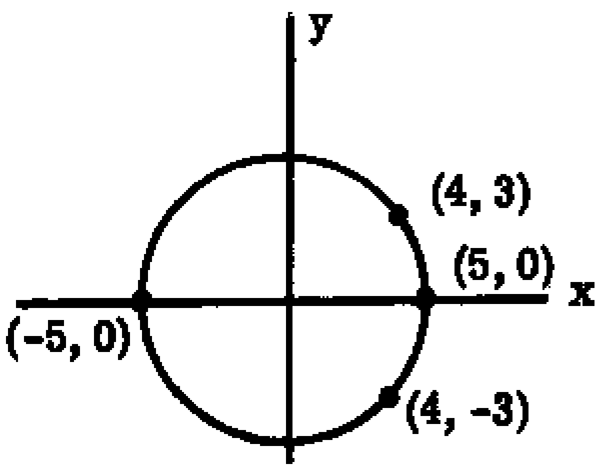
(b).- Centro a $(2,-3)$ y radio iguala 5.

$$\left(x-2\right)^2+\left[y-\left(-3\right)\right]^2=\left(5\right)^2\Rightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2=25\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9=25\Rightarrow x^2+y^2-4x+6y-12=0$$

2.- Encontrar el centro y el radio de una circunferencia que tiene la ecuación general siguiente: $x^2-4x+y^2+8y-5=0$

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+8y+16\right)=5+4+16=25\Rightarrow$$
$$\left(x-2\right)^2+\left(y+4\right)^2=25\Rightarrow C\left(2,-4\right);R=5$$

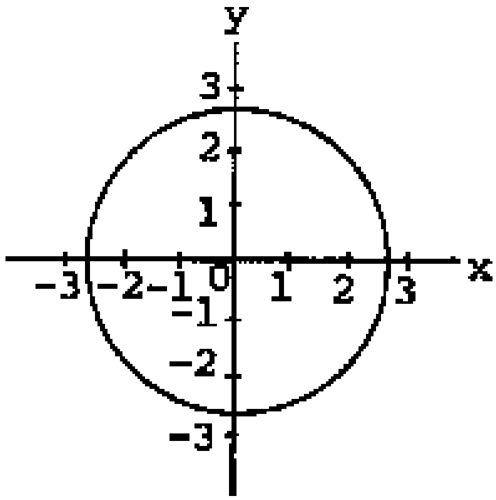
3.- Discuta el gráfico de la ecuación $x^2+y^2=25$



Esta es una ecuación de la forma $x^2+y^2=R^2$ y por lo tanto su gráfico es una circunferencia de radio 5 y centro en el origen. Nótese que esta gráfica no representa una función ya que, excepto por x =-5 y x = 5 , cada permisible valor de $\boldsymbol{x}$ está asociado con dos valores de $\boldsymbol{y}$.

El dominio de esta función es $\left\{x\middle|-5\le x\le 5\right\}$ y el rango $\left\{y\middle|-5\le y\le 5\right\}$.

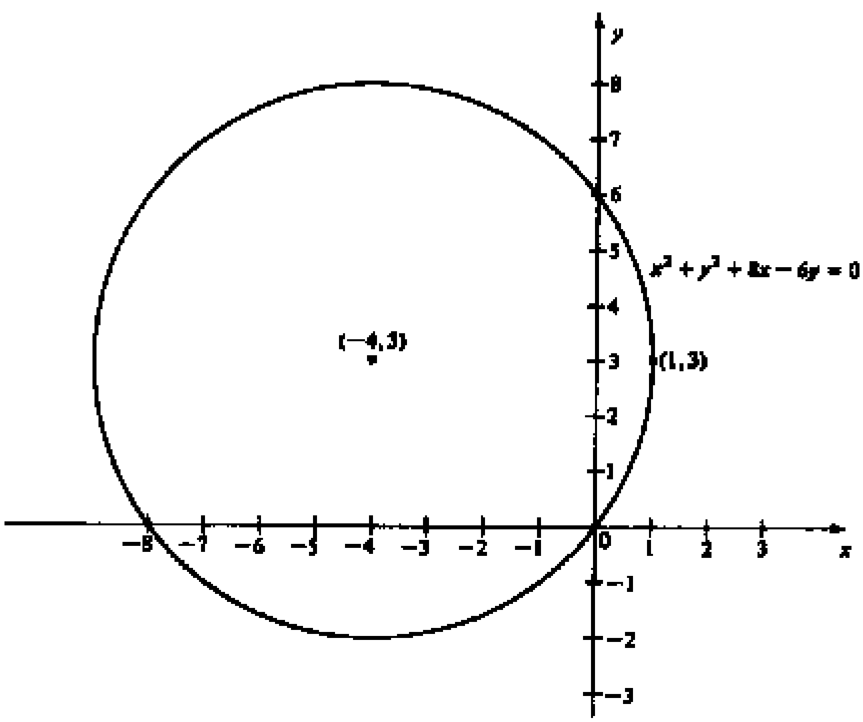
4.- Grafique la ecuación $2x^2+2y^2-13=0.$



$$2x^2+2y^2=13 \Rightarrow \frac{2x^2+2y^2}{2}=\frac{13}{2} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{13}{2}$$

De donde $C(0,0)$ y $R=\sqrt{\frac{13}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

5.- Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: $K(1,3); L(-8,0); M(0,6)$.



Se partirá de la ecuación general de la circunferencia: $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

Para el punto $K(1,3)$: $$(1)^2+(3)^2+D(1)+E(3)+F=0 \Rightarrow$$ $$\Rightarrow D+3F+F=-10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Para el punto $L(-8,0)$: $$(-8)^2+(0)^2+D(-8)+E(0)+F=0 \Rightarrow$$ $$\Rightarrow -8D+F=-64 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Para el punto $M(0,6)$: $$(0)^2+(6)^2+D(0)+E(6)+F=0 \Rightarrow$$ $$\Rightarrow 6E+F=-36 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Entonces, se debe resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Para ello, se multiplica la ecuación (1) por 8 y se le suma a (2) para eliminar D, se obtiene:

$$24E+9F=-144 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Trabajando ahora con las ecuaciones (3) y (4), se obtiene:

$$F=0$$
$$E=-6$$

Introduciendo estos valores en (1):

$$D=8$$

La ecuación general buscada será entonces:

$$x^2+y^2+8x-6y=0$$

De donde, utilizando el método de complementación de cuadrados, po0demos encontrar la ecuación canónica:

$$\left(x^2+8x\right)+\left(y^2-6y\right)=0 \Rightarrow \left(x^2+8x+16\right)+\left(y^2-6y+9\right)=16+9=25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x+4)^2+(y-3)^2=25$$

De aquí, se concluye que:

$$C(-4,3);R=5$$

6.- Encontrar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos:

$$P(4,0); Q(-4,0); R(0,4).$$

La ecuación general de la circunferencia puede ser escrita como:

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Para el punto $P(4,0)$:

$$(4)^2 + (0)^2 + 2D(4) + 2E(0) + F = 0 \Rightarrow 8D + F = -16..........................(1)$$

Para el punto $Q(-4,0)$:

$$(-4)^2 + (0)^2 + 2D(-4) + 2E(0) + F = 0 \Rightarrow -8D + F = -16......................(2)$$

Para el punto $R(0,4)$:

$$(0)^2 + (4)^2 + 2D(0) + 2E(4) + F = 0 \Rightarrow 8E + F = -16............................(3)$$

Resolviendo ahora el sistema de ecuaciones conformado por (1), (2) y (3):

$$D = 0; E = 0; F = -16.$$

La ecuación general buscada será entonces:

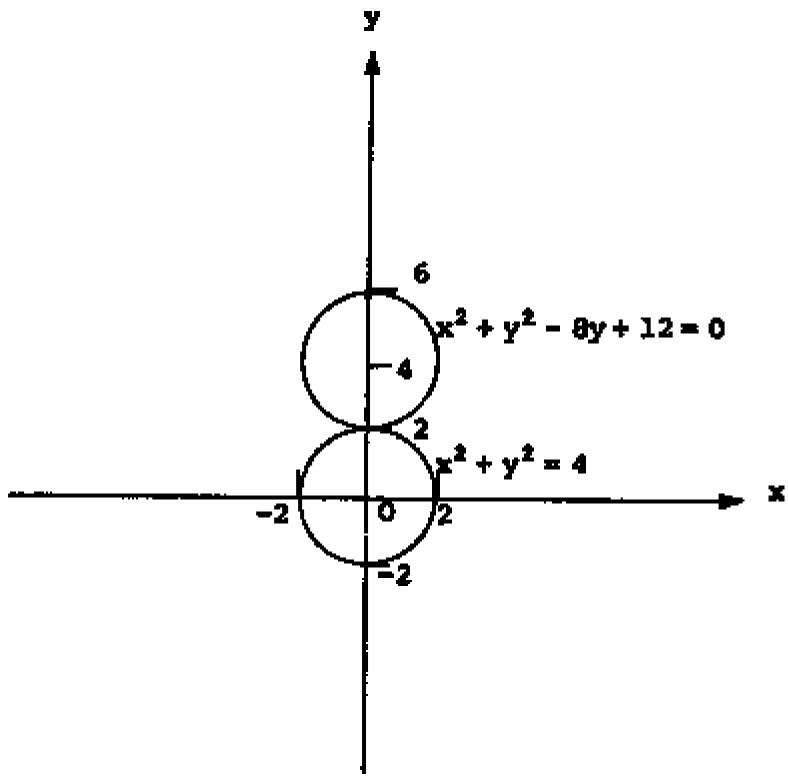
$$x^2 + y^2 - 16 = 0$$

7.- Encontrar la intersección entre las dos siguientes circunferencias:

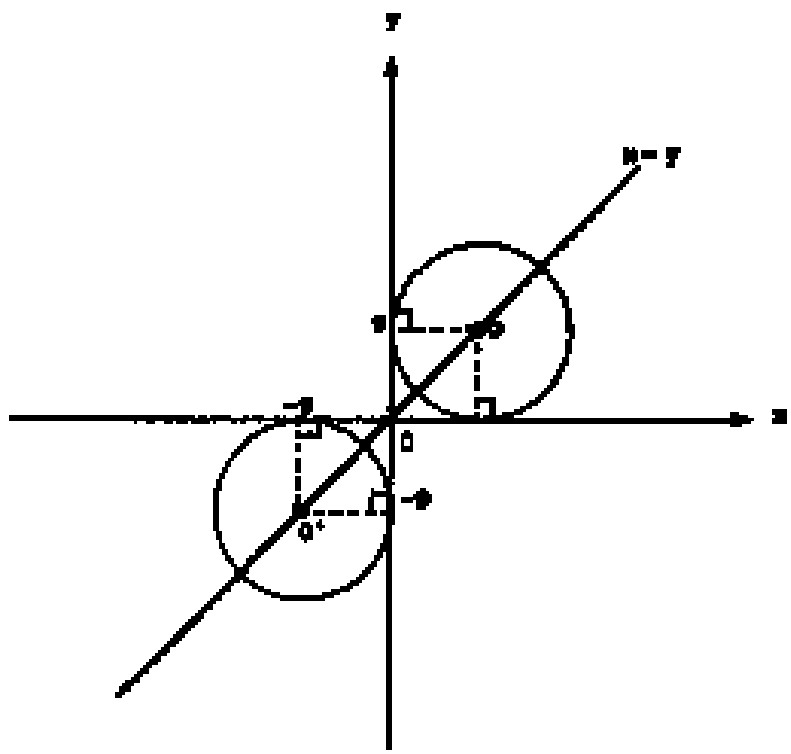
$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + y^2 = 8y - 12$$
$$4 = 8y - 12 \Rightarrow 8y = 16 \Rightarrow y = 2$$

Introduciendo el valor de $\boldsymbol{y = 2}$ en la primera ecuación, se encuentra que $\boldsymbol{x = 0}$. Como hay una sola solución, las dos circunferencias deben ser necesariamente tangentes.



8.- Encontrar la ecuación canónica de la circunferencia que tiene radio $R = 9$, con centro sobre la recta $l \equiv y = x$ y es tangente a ambos ejes de coordenadas ***x, y.***



Como se puede ver en la gráfica anterior, existen dos soluciones a este problema, con centros en $\boldsymbol{O}$ y $\boldsymbol{O'}$. Las coordenadas de ambos centros los llamaremos:

$$O(a,b)$$
$$O'(c,d)$$

Como los puntos (a,b) y (c,d) están ambos sobre la recta $l \equiv y = x$, entonces:

$$a = b$$
$$c = d$$

Las ecuaciones serán:

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = (9)^2$$
$$(x-c)^2 + (y-c)^2 = (9)^2$$

Como las circunferencias son tangentes a los ejes de coordenadas, necesariamente se debe cumplir que:

$$a = b = 9$$
$$c = d = -9$$

Y las ecuaciones serán en definitiva:

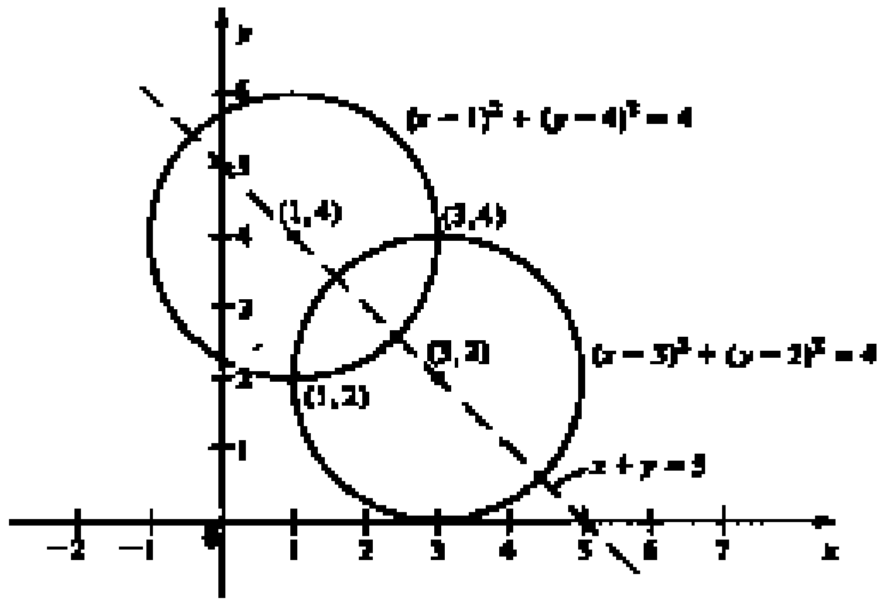
$$(x-9)^2 + (y-9)^2 = 81$$
$$(x+9)^2 + (y+9)^2 = 81$$

9.- Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1,2)$ y $(3,4)$ y tiene radio igual a $R = 2$.

Para resolver este problema es mejor usar de entrada la ecuación canónica de la circunferencia; o sea:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$$

Como los dos puntos dados son puntos de la circunferencia, los valores de sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la misma:



$$(1-h)^2+(2-k)^2=(2)^2=4 \Rightarrow 1-2h+h^2+4-4k+k^2=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2h+h^2-4k+k^2=-1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(3-h)^2+(4-k)^2=(2)^2=4 \Rightarrow 9-6h+h^2+16-8k+k^2=4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -6h+h^2-8k+k^2=-21 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Restando ahora (2) de (1):

$$4h+4k=20 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$h=\frac{20-4k}{4}=(5-k)$$

Resolviendo ahora (1) y (3):

$$-2(5-k)+(5-k)^2-4k+k^2=-1 \Rightarrow k^2-6k+8=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (k-4)(k-2)=0 \Rightarrow k_1=2; k_2=4$$

Y como $h=5-k$, sus correspondientes valores serán: $h_1=3; h_2=1$

Entonces, una circunferencia tendrá por centro $C_1(1,4)$ y la otra $C_2(3,2)$ y las correspondientes ecuaciones canónicas serán:

$$(x-1)^2+(y-4)^2=4$$

$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$

10.- Encontrar la ecuación canónica de una circunferencia que tiene radio igual a 4, y es tangente a la recta $l \equiv x=-y$ en el punto $(0,0)$.

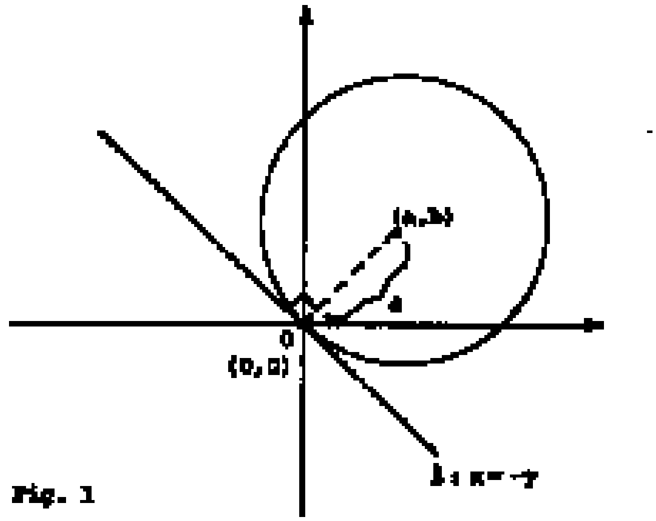
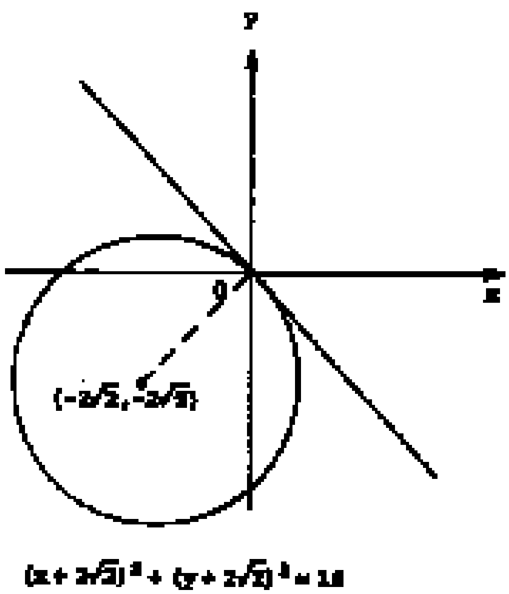
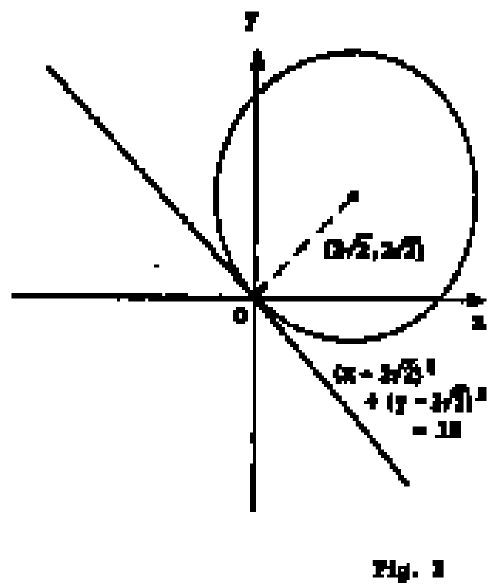


Fig. 1





Partiendo de la ecuación canónica, tenemos que:

$(x-a)^2+(y-b)^2=(4)^2$ donde (a,b) es el centro de la circunferencia.

Utilizando ahora la fórmula que nos da la distancia de un punto, (a,b), a una recta $x=-y \Rightarrow x+y=0$, tenemos:

$$\left|\frac{(1-a)+(1-b)+0}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}\right| = 4 \Rightarrow \left|\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right| = 4$$

Como son dos incógnitas, se necesita otra ecuación, para ello se calculará la pendiente, m, del radio que pasa por (a,b) y , sabiendo que el radio es perpendicular a la recta $x=-y$, cuya pendiente es $m_2=-1$

$$m_1 = \frac{b-0}{a-0} = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow -\frac{1}{(-1)} \Rightarrow \frac{b}{a} = 1$$

Entonces, se resolverán simultáneamente las dos ecuaciones:

$$\left|\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right| = 4$$

$$\frac{b}{a} = 1$$

De donde se obtiene:

$$a_1 = 2\sqrt{2} \Rightarrow b_1 = 2\sqrt{2}$$

$$a_2 = -2\sqrt{2} \Rightarrow b_2 = -2\sqrt{2}$$

Luego, existen dos soluciones y las ecuaciones requeridas son:

$$\left(x-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-2\sqrt{2}\right)^2 = 16$$

$$\left(x+2\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+2\sqrt{2}\right)^2 = 16$$ como se muestra en la figura #2

11.- Dadas dos circunferencias representadas por sus ecuaciones:

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$$
$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

las cuales se intersecan en dos puntos, demostrar que la ecuación de la línea recta determinada por esos dos puntos es igual a: $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0.$

Se deberá demostrar que cada punto de intersección pertenece a la circunferencia y al mismo tiempo pertenece a la recta. Denotemos los puntos de intersección por:

(x_1,y_1) y (x_2,y_2).

Si los puntos pertenecen a las circunferencias, entonces sus coordenadas deben satisfacer las ecuaciones de las mismas:

$$x_1^2+y_1^2+D_1x_1+E_1y_1+F_1=0..(1)$$
$$x_1^2+y_1^2+D_2x_1+E_2y_1+F_2=0..(2)$$

Restando (2) de (1):

$$(D_1-D_2)x_1+(E_1-E_2)y_1+(F_1-F_2)=0..(3)$$

Lo que demuestra que el punto (x_1,y_1) satisface la ecuación (3). De igual manera se puede demostrar que el punto (x_2,y_2) satisface la ecuación (3) o similar. Entonces, como dos puntos distintos determinan una recta, se puede concluir que la ecuación:

$(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$ es la ecuación de la recta conformada por los dos puntos de intersección de las dos circunferencias.

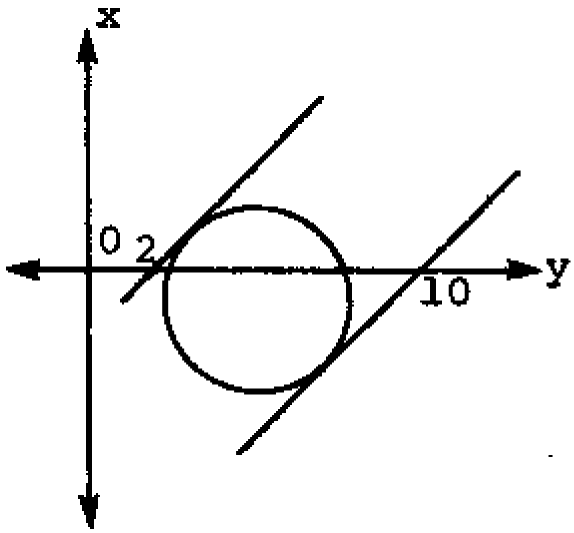
12.- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia:

$x^2+y^2-10x+2y+18=0$ con pendiente igual a 1.

Como la pendiente de la línea recta buscada es dada, se debe saber donde la recta corta al eje de las y para poder encontrar así la ecuación de dicha recta, utilizando la forma:

$y=mx+b$ donde ***m*** es la pendiente y ***b*** es el valor donde la recta corta al eje ***y***.

Como ***m* = *1***, dado, entonces se puede escribir $y=x+b.$



Ahora se procederá a encontrar ***b*** y para ello se introducirá el valor $y = x + b$ en la ecuación de la circunferencia, como sigue:

$$x^2 + (x+b)^2 - 10x + 2(x+b) + 18 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + \left(x^2 + 2xb + b^2\right) - 10x + 2x + 2b + 18 = 0$$

Agrupando términos semejantes:

$$2x^2 + (2b-8)x + \left(b^2 + 2b + 18\right) = 0$$

Aquí se deberá aplicar la fórmula resolvente para ecuaciones de segundo grado, o sea:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \Rightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

La fórmula anterior da dos soluciones; pero, como existe un solo punto de tangencia entre una recta y una circunferencia el discriminante de la fórmula resolvente deberá ser necesariamente igual a cero, entonces:

$$B^2 - 4AC = (2b-8)^2 - 4(2)\left(b^2 + 2b + 18\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4b^2 - 32b + 64 - 8b^2 - 16b - 144 = 0 \Rightarrow -4b^2 - 48b - 80 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4\left(b^2 + 12b + 20\right) = 0$$

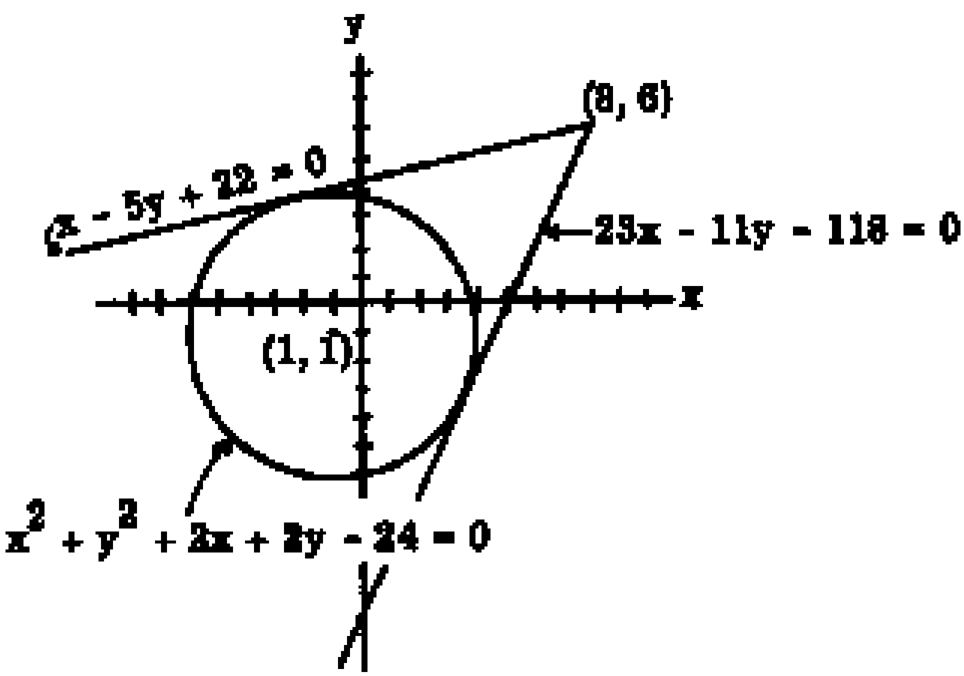
Resolviendo esta nueva ecuación cuadrática para encontrar ***b***, se encuentran dos valores:

$$(b+10)(b+2)=0$$
$$b_1=-10$$
$$b_2=-2$$

Entonces, existen dos líneas rectas, con pendiente igual a 1 y que son tangentes a la circunferencia dada:

$$y=x-10$$
$$y=x-2$$

13.- Encontrar la ecuación de la línea recta trazada desde el punto $(8,6)$ tangente a la circunferencia $x^2+y^2+2x+2y-24=0$.



Cualquier línea pasando por el punto dado tendrá una ecuación de la forma:

$y-6=m(x-8)\Rightarrow y=mx-8m+6$ Se deberá entonces encontrar el valor de la pendiente $\boldsymbol{m}$; para ello, se introducirá el valor $y=mx-8m+6$ en la ecuación de la circunferencia, como sigue:

$$x^2+(mx-8m+6)^2+2x+2(mx-8m+6)-24=0$$
$$x^2+\left(m^2x^2-16m^2x+12mx+64m^2-96m+36\right)+2x+(2mx-16m+12)-24=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(m^2+1\right)x^2-\left(16m^2-14m-2\right)x+\left(64m^2-112m+24\right)=0$$

Utilizando la fórmula resolvente para encontrar la solución de una ecuación cuadrática:

$$x=\frac{-\left[-\left(16m^2-14m-2\right)\right]\pm\sqrt{\left[-\left(16m^2-14m-2\right)\right]^2-4\left(m^2+1\right)\left(64m^2-112m+24\right)}}{2\left(m^2+1\right)}$$

Como x es la coordenada de un punto de tangencia, este solo puede ser tomado como un solo valor, por lo tanto, el discriminante de la ecuación resolvente anterior deberá ser igual a cero. Al igualar el discriminante a cero, se podrá encontrar el valor de $\boldsymbol{m}$ y por consiguiente, encontrar la ecuación de la tangente buscada:

$$\left[-\left(16m^2-14m-2\right)\right]^2-4\left(m^2+1\right)\left(64m^2-112m+24\right)=0$$
$$\left(256m^4-448m^3+132m^2+56m+4\right)-\left(256m^4-448m^3+352m^2-448m+96\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-220m^2+504m-92=0\Rightarrow-4\left(55m^2-126m+23\right)=0\Rightarrow(5m-1)(11m-23)=0$$
$$\Rightarrow m_1=\frac{1}{5};m_2=\frac{23}{11}$$

Volviendo ahora a la ecuación de la tangente que pasa por el punto (8,6):

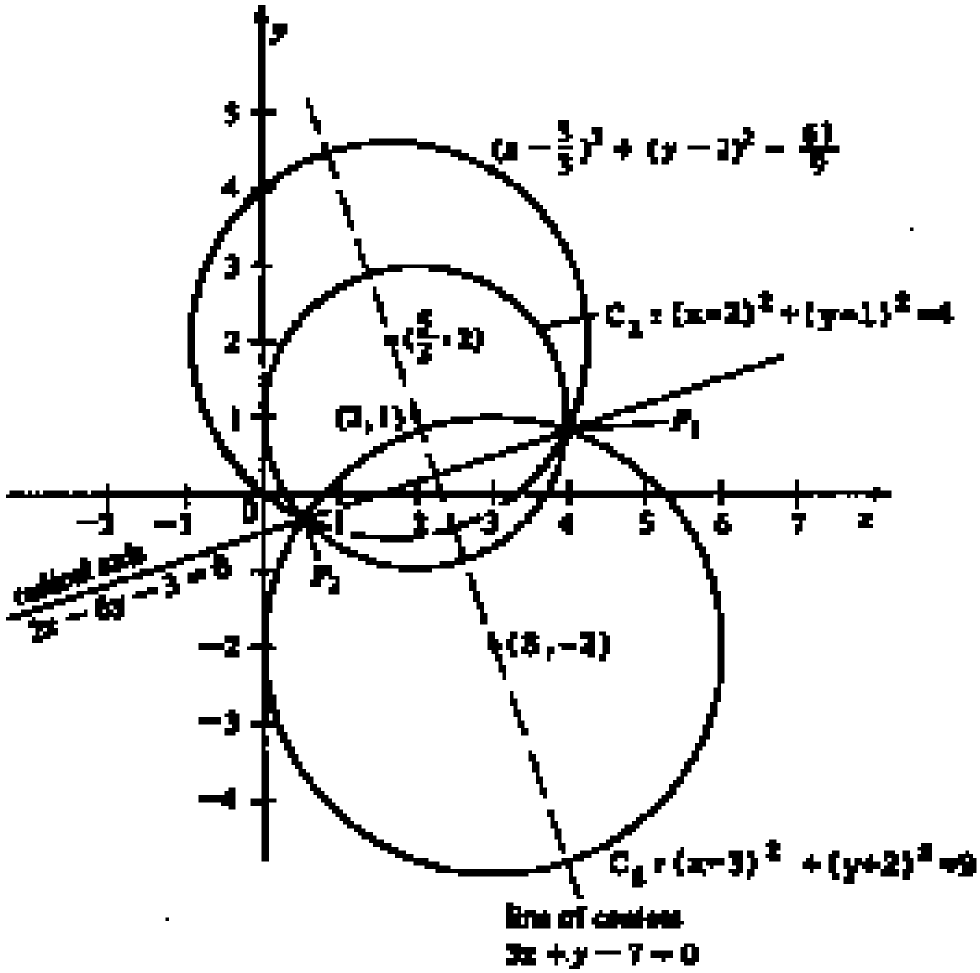
$y-6=m(x-8)$ y sustituyendo por los valores de $\boldsymbol{m}$ encontrados:

Para $m_1=\frac{1}{5}\Rightarrow y-6=\frac{1}{5}(x-8)\Rightarrow 5y-30=x-8\Rightarrow x-5y+22=0$

Para $m_2=\frac{23}{11}\Rightarrow y-6=\frac{23}{11}(x-8)\Rightarrow 11y-66=23x-184\Rightarrow 23x-11y-118=0$. O sea, que existen dos tangentes trazadas desde el mismo punto que cumplen con las condiciones del problema. Ver gráfica.

14.- Encontrar las intersecciones, si existe alguna, de las dos circunferencias dadas por las fórmulas siguientes:

$$C_1\equiv x^2+y^2-4x-2y+1=0$$
$$C_2\equiv x^2+y^2-6x+4y+4=0$$



El paso algebraico obvio es restar la segunda ecuación de la primera ecuación, lo que da como resultado:

$$2x - 6y - 3 = 0$$

Esta es la ecuación de una línea recta y su significación es que cualquier punto común a las dos circunferencias C_1 y C_2 debe reposar sobre esta línea recta.

La ecuación de la línea recta puede reescribirse como:

$$x = 3y + \frac{3}{2}$$

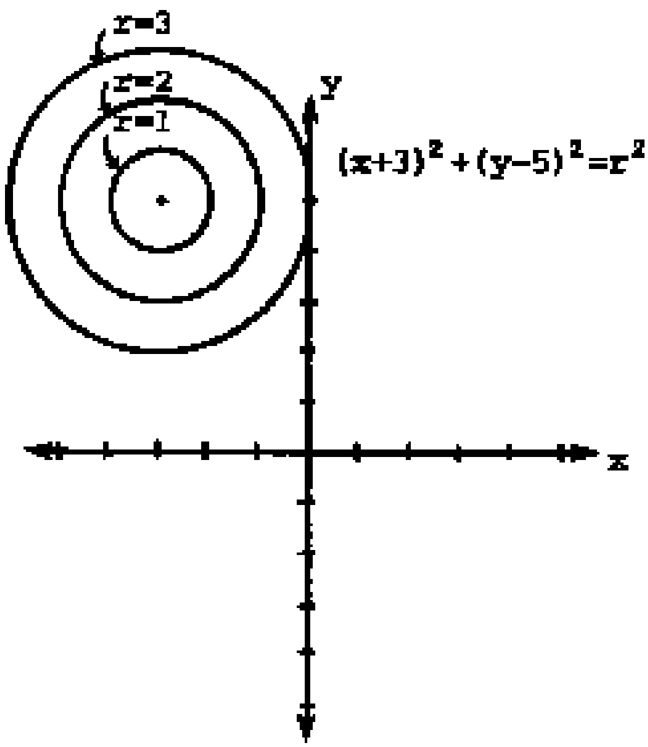
Introduciendo ahora este valor de $\boldsymbol{x}$ en la ecuación de C_1, se pueden encontrar los dos valores reales de $\boldsymbol{y}$, lo que permitirá, con el uso de $x = 3y + \frac{3}{2}$ encontrar los correspondientes valores de $\boldsymbol{x}$.

El resultado final será:

$$P_1\left(\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{135}}{20};\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{135}}{20}\right)=(3,99;0,83)$$

$$P_2\left(\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{135}}{20};\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{135}}{20}\right)=(0,51;-0,33)$$

15.- Escribir la ecuación de todas las circunferencias concéntricas cuyo centro sea $(-3,5)$.

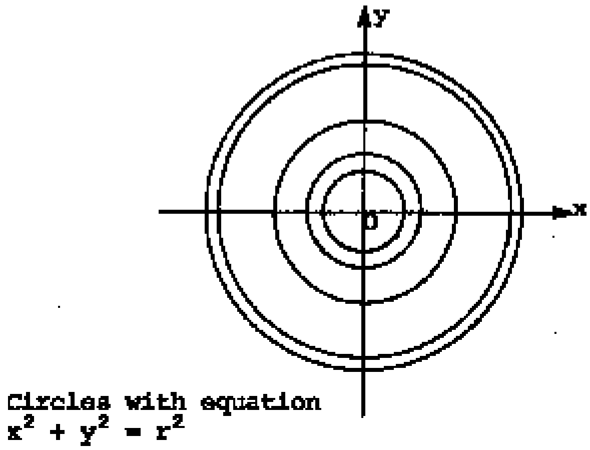


Basta con escribir la ecuación $(x+3)^2+(y-5)^2=R^2$ y darle valores reales positivos mayores que cero a R para tener toda una familia de circunferencias concéntricas.

15.- Encontrar las ecuaciones de las familias de circunferencias que cumplan con las siguientes condiciones:

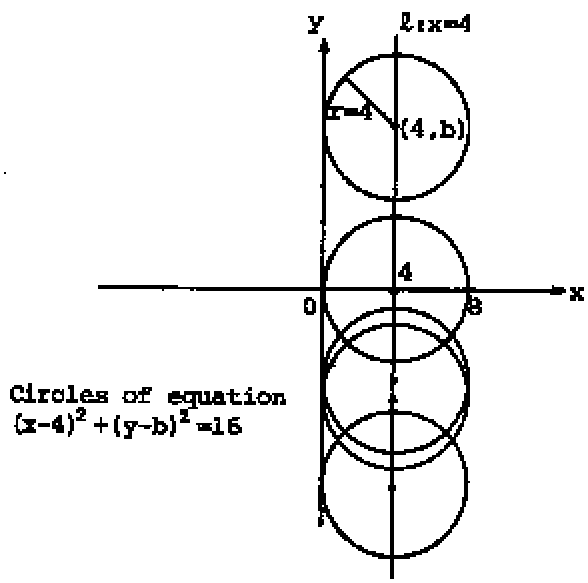
(a) Centro común en $(0,0)$.
(b) Radio igual a 4 y centro sobre la línea recta $x=4$.

Las soluciones son los siguientes:
(a).-



La forma canónica de las circunferencias descritas es: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ donde $a=b=0.$ Las ecuaciones se reducen a $x^2+y^2=R^2$.

(b).-



De nuevo, la solución es una ecuación de la forma $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ donde ***R* = *4*** y ***a* = *4***, ya que el centro de la circunferencia está sobre la recta ***x* = *4***. Entonces, la ecuación requerida es: $(x-4)^2+(y-b)^2=16$ teniendo a ***b*** como parámetro.

16.- Encontrar las coordenadas del centro y el radio de una circunferencia dada por la siguiente ecuación general: $x^2+y^2-10x+4y+17=0.$

$\left(x^2-10x+?\right)+\left(y^2+4y+?\right)=-17\Rightarrow\left(x^2-10x+25\right)+\left(y^2+4y+4\right)=-17+25+4=12$

$\Rightarrow\left(x-5\right)^2+\left(y+2\right)^2=\left(\sqrt{12}\right)^2\Rightarrow C\left(5,-2\right);R=\sqrt{12}$

17.- Escribir la ecuación canónica de la siguiente circunferencia dada por su ecuación general:

$$6x^2-12x+6y^2+36y=36.$$

Se dividen ambos miembros de la igualdad por 6:

$$x^2-2x+y^2+6y=6\Rightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2+6y+9\right)=6+1+9=16\Rightarrow$$

$$\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=16\Rightarrow C\left(1,-3\right);R=4.$$

18.- Encontrar la ecuación canónica de la siguiente circunferencia dada por la ecuación general:

$$16x^2+16y^2+8x-32y=127$$

$16\left(x^2+y^2+\frac{1}{2}x-2y\right)=127\Rightarrow16\left\{\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2-2y+1\right)\right\}=127+4+16=147$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\frac{147}{16}\Rightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-1\right)^2=\left(\sqrt{\frac{147}{16}}\right)^2$

19.- Escribir la ecuación canónica de la siguiente circunferencia dada por su ecuación general:

$$16x^2-48x-75+16y^2+8y=0$$

$16x^2-48x+16y^2+8y=75\Rightarrow16\left[\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\left(y^2+8y+16\right)\right]=75+36+256=367\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+4\right)^2=\frac{367}{16}=\left(\sqrt{\frac{367}{16}}\right)^2$