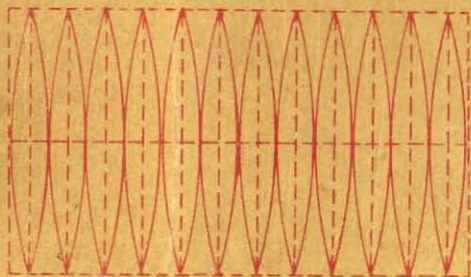


GOMETRIA

CURSO SUPERIOR



G-M. BRUÑO

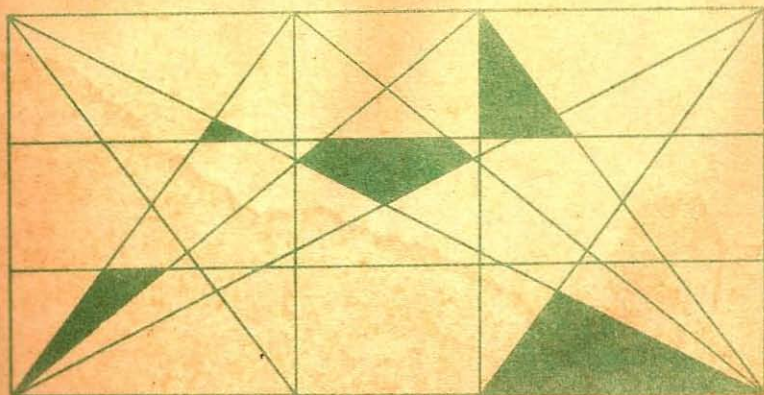
ADVERTENCIA

Este tratado de **Geometría** completa los cursos elemental y medio, ya publicados para la primera enseñanza.

A más de numerosos ejercicios y problemas prácticos contiene este libro **Nociones de Agrimensura, Levantamiento de Planos y Nivelación**, que son como aplicación de los principios expuestos en él.

Las definiciones y teorías que encierra están en un todo conformes con las de nuestro **Curso de Geometría para la Segunda Enseñanza**, de modo que los alumnos que pasaren de uno a otro curso, no se verán precisados a estudiar otras definiciones, que si bien idénticas en cuanto al fondo, no por eso dejarían de crearles a menudo serias dificultades.

Se ha procurado exponer estos elementos de la ciencia geométrica, con la mayor sencillez y claridad posible, para facilitar de este modo su estudio y generalizar más sus aplicaciones prácticas.



INTRODUCCION

PRELIMINARES

§ I. — Objeto de la Geometría.

1. *Geometría* es la ciencia de la extensión.

Su objeto es estudiar las propiedades, formas y dimensiones de las *figuras geométricas*.

Figura geométrica es una extensión determinada por *puntos, líneas o superficies*.

2. La *extensión* considerada en los objetos materiales, es la porción que ocupan del espacio absoluto y sin límites en que se hallan colocados todos los cuerpos.

Un cuerpo, por pequeño que sea, es *extenso* en todos sentidos; sin embargo la extensión se considera únicamente en tres sentidos principales, llamados *dimensiones*, que se designan con los nombres de *longitud* o *largo*, *latitud* o *ancho* y *altura* que a veces se llama *grosso*, *espesor* o *profundidad*.

En el volumen, la extensión está considerada en las tres dimensiones. Las superficies sólo tienen longitud y latitud, las líneas sólo longitud, y el punto matemático no tiene extensión.

3. El volumen de un cuerpo está limitado por *superficies*. Un sillar, por ejemplo, está limitado por sus caras.

Una porción de superficie está limitada por una *línea*. Por ejemplo, las aristas del mismo sillar.

Una porción de línea está limitada por dos *puntos*, v. gr.: los vértices de ese sillar.

Cuando dos superficies se cortan, su intersección es una *línea*, y la intersección de dos líneas es un *punto* (fig. 1).

4. Se puede considerar una *línea* como engendrada por un punto que se mueve; una *superficie*, por una línea; y un *sólido*, por una superficie.

5. *Medir una figura* es compararla con la *unidad de medida*. Por lo tanto, las longitudes, las áreas y los volúmenes se determinarán por su relación con la unidad de la especie correspondiente.



Fig. 1

§ II. — Línea.

6. La línea más sencilla es la *recta*.

Un hilo bien tirante nos da idea de la línea recta (fig. 2).

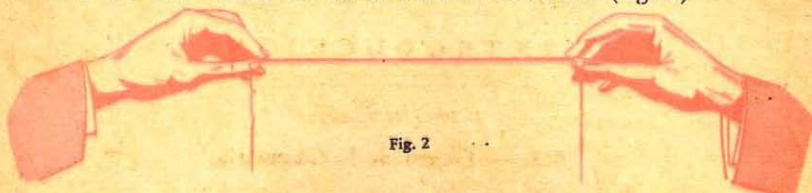


Fig. 2

La recta es *ilimitada*, es decir que se considera prolongada indefinidamente.

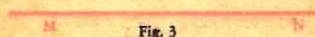


Fig. 3

Se suele designar una recta por medio de dos letras que indican su dirección. Así se dirá: la recta MN (fig. 3).

7. Llámase *segmento de recta*, o más sencillamente *recta*, a la porción de recta indefinida comprendida entre dos puntos determinados.



Fig. 4

Para designar un segmento de recta se leen las letras de sus extremos; v. gr.: la recta AB (fig. 4).

La recta es la menor distancia entre dos puntos; por lo tanto la recta es menor que cualquier otra línea que tenga los mismos extremos. La recta AB, por ejemplo (fig. 5), es menor que la línea ACDEB.

8. Llámase *línea quebrada* o *poligonal* a la compuesta de varios



Fig. 5



Fig. 6

segmentos de rectas unidos de dos en dos por uno de sus extremos, sin que dos consecutivos tengan la misma dirección.

Por ejemplo, la línea ABCDE (fig. 6).



Fig. 7

9. *Línea curva* es aquella que ni es recta, ni está formada de rectas.

Por ejemplo, la línea EFGH (fig. 7).

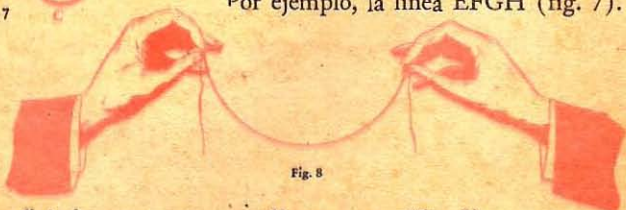


Fig. 8

Un hilo aflojado representa una línea curva (fig. 8).



Fig. 9

10. Línea mixta es la compuesta de partes rectas y partes curvas. Tal es la línea ABCD (fig. 9).

11. Se llaman *convexas* a las líneas quebradas o curvas cuando



Fig. 10



una recta no puede cortarlas en más de dos puntos (fig. 10).

§ III. — Superficie.

12. Plano o superficie plana es la superficie con la cual coincide en toda su extensión una recta aplicada a dos cualesquiera de sus puntos.

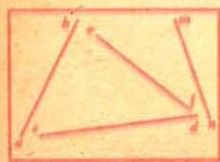


Fig. 11

Por ejemplo, la superficie del agua reposada en corta extensión, la de una pizarra (fig. 11).

13. Superficie poliédrica o quebrada es la compuesta de planos consecutivos que terminan en sus mutuas intersecciones.

Por ejemplo, la superficie total de un cubo.

14. Superficie curva es la que en ninguna de sus partes es plana, como por ejemplo la de una esfera.

§ IV. — División de la geometría.

15. La Geometría elemental se divide en Geometría plana y Geometría del espacio.

La Geometría plana estudia las propiedades de las figuras planas, esto es, de aquellas cuyos elementos están en un mismo plano.

Los cuatro primeros libros de esta obra tratan de la Geometría plana.

La Geometría del espacio estudia las propiedades de las figuras cuyos elementos no están en un mismo plano.

Los cuatro últimos libros de esta obra tratan de la Geometría del espacio.

§ V. — Definiciones de algunos términos empleados en geometría.

16. Las figuras geométricas son:

Iguales, cuando superpuestas, coinciden en toda su extensión;

Equivalentes, cuando tienen la misma extensión sin tener la misma forma;

Semejantes, cuando tienen la misma forma sin tener la misma extensión.

17. *Axioma* es toda verdad evidente por sí misma.

Por ejemplo:

El todo es igual a la suma de sus partes;

La parte es menor que el todo;

Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.

18. *Teorema* es una verdad que necesita ser demostrada.

Por ejemplo: *la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.*

19. *Problema* es una cuestión que tiene por objeto buscar cantidades desconocidas, valiéndose para ello de otras conocidas.

Ejemplo: *hacer pasar una circunferencia por tres puntos que no estén en línea recta.*

20. Llámase *proposición* al enunciado de un axioma o de un teorema.

Hipótesis es la suposición de una cosa posible o imposible, para deducir de ella alguna consecuencia.

21. *Corolario* es la consecuencia que se deduce de una demostración.

Escolio es una observación acerca de una proposición ya demostrada.

22. *Lema* es una proposición que sirve para facilitar la demostración de un teorema.

23. El enunciado de una proposición consta de dos partes: la *hipótesis* o *supuesto*, que es lo que se supone cierto, y la *conclusión* o consecuencia que resulta del supuesto.

En el siguiente enunciado: *Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de este ángulo*, la hipótesis es: *todo punto de la bisectriz de un ángulo*, y la conclusión: *equidista de los lados de este ángulo*.

24. Dos proposiciones son *recíprocas* cuando la segunda tiene por hipótesis la conclusión de la primera, y por conclusión la hipótesis de la misma.

La recíproca del ejemplo anterior será: *todo punto equidistante de los lados de un ángulo pertenece a la bisectriz de dicho ángulo*.

Hay proposiciones cuyas recíprocas son falsas. La proposición: *todos los ángulos rectos son iguales*, tiene por recíproca: *todos los ángulos iguales son rectos*. La proposición es cierta, pero falsa su recíproca.

GEOMETRIA PLANA

LIBRO I

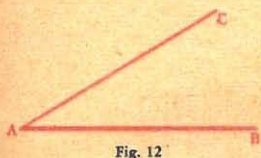
LINEAS RECTAS, ANGULOS Y POLIGONOS

CAPITULO I

§ I. — Angulos.

Definiciones

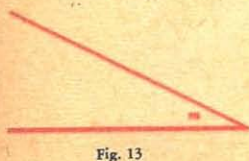
25. *Angulo* es una figura plana que forman dos rectas que se cortan y terminan en su punto de intersección. Esas rectas se llaman *lados* del ángulo y el punto en que se cortan, *vértice*.



26. Un ángulo se designa con la sola letra del vértice, o con tres letras colocadas una en cada lado, y otra en el vértice. Al leer se pone siempre en medio la letra del vértice.

Así el ángulo de la fig. 12 se leerá *ángulo A* o *ángulo BAC*¹.

A veces se designa un ángulo con una letra minúscula; por ejemplo el ángulo *m* (fig. 13).

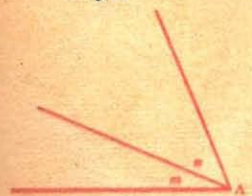


27. Dos ángulos son iguales cuando superpuestos, coinciden sus lados.

28. La magnitud o valor de un ángulo sólo depende de la mayor o menor abertura de sus lados, y no de la longitud de éstos, ya que siempre se los supone indefinidos. Así, el ángulo D es mayor que el ángulo E (fig. 14).



29. *Angulos adyacentes* son los que tienen el mismo vértice y un lado común; por ejemplo, los ángulos *m* y *n* (fig. 15).



30. Una recta es *perpendicular* a otra cuando forma con ella dos ángulos adyacentes iguales, y *oblicua* cuando dichos ángulos son desiguales.

Así la recta AB es perpendicular a CD en la fig. 16, y oblicua en la fig. 17.

31. *Angulo recto* es aquel cuyos lados son perpendiculares entre sí.

¹ Al igual que algunos autores modernos, para abreviar la escritura de la palabra *ángulo*, abrazaremos las letras que señalan esa figura con el signo \sphericalangle que se lee *ángulo*. Así, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle BAC$, se leerá: *ángulo A*, *ángulo BAC*.

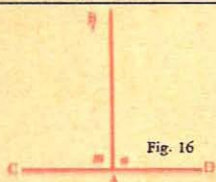


Fig. 16

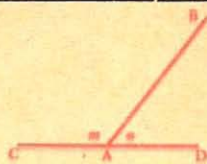


fig. 17

Los ángulos m , n (fig. 16) son rectos.

32. Un ángulo es *agudo* cuando es menor que un ángulo recto, y *obtuso* en el caso contrario.

Por ejemplo, en la fig. 17 el ángulo n es agudo, y obtuso el ángulo m .

33. Ángulos *complementarios* son aquellos cuya suma es igual a un recto y *suplementarios* aquellos cuya suma es igual a dos rectos.

En la fig 19 los ángulos BAD y BAB' son complementarios, y suplementarios los ángulos BAC y BAD .

Complemento de un ángulo es lo que le falta para valer un ángulo recto.

Suplemento de un ángulo es lo que le falta para valer dos ángulos rectos.

34. *Axioma.* Dos ángulos iguales tienen complementos y suplementos iguales.

Recíprocamente, dos ángulos que tienen complementos o suplementos iguales son iguales.



Fig. 18

35. Dos ángulos son *opuestos por el vértice* cuando los lados del uno son las prolongaciones de los lados del otro; v. g.: los ángulos m , n (fig. 18).

36. *Bisectriz* de un ángulo es la recta que, pasando por su vértice, divide al ángulo en dos partes iguales.

Teorema.

37. Por un punto tomado en una recta se puede levantar una perpendicular a esta recta, y sólo una.

Sea el punto A tomado en la recta CD .

1º Por el punto A se puede levantar una perpendicular a CD .

En efecto, tracemos una oblicua cualquiera AB y hagámosla girar alrededor del punto A . El ángulo n , menor que el ángulo m , aumenta constantemente, en tanto que el ángulo adyacente m disminuye en lo que el otro aumenta.

Claro está que la recta AB llegará a tener una posición en que los ángulos m y n sean iguales, entonces AB' será perpendicular a CD (Nº 30).

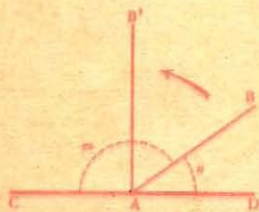


Fig. 19

2º Y sólo una perpendicular.

Porque si la perpendicular AB' se desviara, por poco que fuese, a la derecha o a la izquierda, dejarían los ángulos m y n de ser iguales, y entonces la recta sería oblicua.

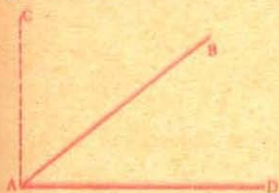


Fig. 20

Luego, por un punto tomado en una recta se puede levantar una perpendicular a esta recta, y sólo una.

[38.] Colorario. Para obtener el complemento de un ángulo, se levanta en el vértice una perpendicular a uno cualquiera de sus lados; el ángulo BAD (fig. 20) es el complemento del ángulo BAC .

Teorema.

[39.] Dos ángulos adyacentes cuyos lados exteriores están en línea recta son suplementarios.

Sean los ángulos CAB o m y DAB o n , cuyos lados exteriores AC y AD están en línea recta.



Fig. 21

Tracemos AE perpendicular a CD , los dos ángulos CAE y DAE son rectos (Nº 31); luego:

$$\hat{m} = 1 \text{ recto} + \hat{i}$$

$$\hat{n} = 1 \text{ recto} - \hat{i}$$

Sumando ordenadamente, esto es, miembro con miembro, tendremos:

$$\hat{m} + \hat{n} = 2 \text{ rectos}$$

Luego, dos ángulos adyacentes...

[40.] Corolarios. — I. Para hallar el suplemento de un ángulo, basta prolongar por el vértice uno cualquiera de sus lados; el ángulo EAC es el suplemento del ángulo EAD (fig. 22).

II. La suma de los ángulos consecutivos formados en un punto de una recta y a un mismo lado de esta recta, es igual a dos ángulos rectos.

Porque si se levanta la perpendicular AB (fig. 23), la suma de los dos ángulos rectos BAC , BAD es igual a la suma de los ángulos m , n , r , y recíprocamente.



Fig. 23



Fig. 24

III. La suma de todos los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto O (fig. 24) en un plano es igual a cuatro ángulos rectos.

Para demostrarlo basta prolongar uno de los lados, AO por ejemplo, y de ese modo tendremos dos ángulos rectos a cada lado de la recta AB.

41. Teorema recíproco. Cuando dos ángulos adyacentes son suplementarios, sus lados exteriores están en línea recta.

Teorema.

42. Cuando dos ángulos son suplementarios, sus bisectrices forman un ángulo recto.



Fig. 25

Sean los ángulos suplementarios AOB, BOC; y sean OE y OF las bisectrices.

Tenemos:

$$2r + 2s = 2 \text{ rectos;}$$

$$\text{luego } r + s = 1 \text{ recto}$$

Teorema.

43. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Sean m y n dos ángulos opuestos por el vértice.

Siendo AB una línea recta, el ángulo m tiene por suplemento el ángulo s .

El ángulo n tiene también por suplemento el ángulo s a causa de la recta CD, luego, los ángulos m y n son iguales por tener el mismo suplemento.

Del propio modo se demostraría la igualdad de los ángulos opuestos s y t .

Luego, dos ángulos opuestos...

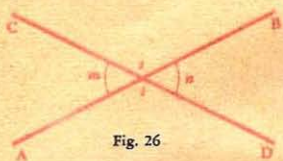


Fig. 26

§ II. — Perpendiculares y oblicuas.

Lema.

44. Toda línea poligonal convexa es menor que cualquier otra línea envolvente que tenga los mismos extremos.

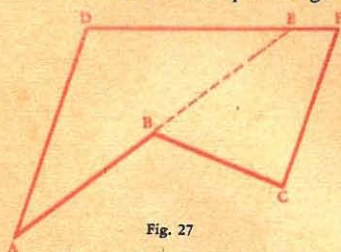


Fig. 27

Sea ABC una línea convexa envuelta por otra ADFC, y con los mismos extremos A y C.

Para demostrar que ABC es menor, prolonguemos AB. La recta es más corta que cualquier otra línea que tenga los mismos extremos (Nº 7); luego:

$$AB + BE < AD + DE$$

$$\text{y } BC < BE + EF + FC$$

Sumando ordenadamente estas dos desigualdades, tendremos:

$$AB + BE + BC < AD + DE + BE + EF + FC;$$

y suprimiendo BE en cada miembro, resultará:

1 > mayor que.
< menor que.

$$AB + BC < AD + DE + EF + FC$$

$$\text{o sea } ABC < ADFC$$

Luego, toda línea...

Teorema.

45. Desde un punto exterior a una recta se puede bajar una perpendicular a esta recta, y sólo una.

Sea la recta BC y el punto A, exterior a esta recta.

1º Desde el punto A, se puede bajar una perpendicular a BC.

Para demostrarlo, tracemos una recta cualquiera AD; construyamos el ángulo m' igual al ángulo m , tomemos $DA' = DA$ y tracemos la recta AA' .

Si hacemos girar la figura DAE alrededor de BC, el ángulo m coincidirá con su igual m' , y la recta DA con DA' . Siendo fijo el punto E, la recta EA coincidirá también con EA' , y el ángulo n con el ángulo n' , por consiguiente estos dos ángulos son iguales, y BC es perpendicular a AA' (Nº 30); por lo tanto AA' lo será a BC.

2º Sólo una perpendicular.

En efecto, siendo AE perpendicular a BC, como acabamos de demostrarlo, cualquier otra recta, AD, será oblicua, porque si fuese perpendicular, el ángulo m sería recto, lo mismo que su igual m' , y entonces tendríamos:

$$\widehat{m} + \widehat{m}' = 2 \text{ rectos};$$

por lo tanto, los lados AD y $A'D$ de los ángulos m y m' estarían en línea recta

(Nº 41); entonces tendríamos entre los puntos A y A' , dos rectas, lo que es imposible.

Luego, desde un punto...

Teorema.

46. Si, desde un punto tomado fuera de una recta, se traza una perpendicular y varias oblicuas a esa recta:

1º La perpendicular es menor que cualquier oblicua;

2º Dos oblicuas cuyos pies equidistan del de la perpendicular son iguales:

3º De dos oblicuas, la mayor es aquella cuyo pie se aparta más del de la perpendicular.

Sean AB una perpendicular, AC, AD, AE varias oblicuas a la recta DE; AC y AE, dos oblicuas cuyos pies equi-

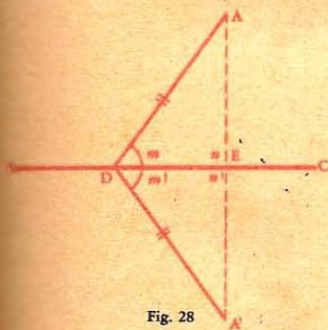


Fig. 28

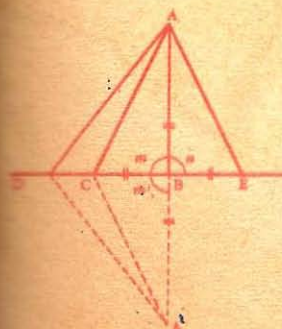


Fig. 29

distan del pie B de la perpendicular. Prolonguemos AB, tomemos $BA' = BA$ y unamos A' con C y con D.

1º *La perpendicular AB es menor que la oblicua AC.*

Para demostrarlo, hagamos girar alrededor de DE la parte superior de la figura. Siendo iguales los ángulos m y m' por rectos, BA coincidirá con BA' , CA con CA' , DA con DA' .

Siendo ABA' una línea recta, tendremos:

$$AB + BA' < AC + CA'$$

$$\text{o sea} \quad 2AB < 2AC$$

$$\text{y por consiguiente} \quad AB < AC.$$

2º *Las oblicuas AC y AE, cuyos pies equidistan del de la perpendicular, son iguales.*

Hagamos girar la figura BAE alrededor de AB. Siendo el ángulo n igual a m por rectos, y BE igual a BC, la figura BAE coincidirá con la figura BAC. Luego,

$$AC = AE.$$

3º *La oblicua AD es mayor que la oblicua AC.*

Queda ya asentado (Nº 44) que:

$$AD + DA' > AC + CA'.$$

Pero, acabamos de demostrar que $AC = A'C$, $AD = A'D$;

$$\text{luego} \quad 2AD > 2AC$$

$$\text{y por lo tanto} \quad AD > AC$$

Luego, si desde un punto...

47. Recíproco. 1º *La distancia menor desde un punto a una recta es la perpendicular bajada desde dicho punto a la recta.*

2º *Si dos oblicuas, trazadas desde un mismo punto, son iguales, sus pies equidistan del de la perpendicular.*

3º *Si dos oblicuas, trazadas desde un mismo punto, son desiguales, el pie de la mayor dista más del pie de la perpendicular.*

Sean las oblicuas desiguales AD, AE (fig. 29). Por hipótesis tenemos $AD > AE$; probemos que $BD > BE$.

De suponer $BD = BE$, resultaría $AD = AE$ (Nº 46, 2º), lo que está en contradicción con el supuesto.

Suponiendo $BD < BE$, resultaría $AD < AE$ (Nº 46, 3º), lo que también está en pugna con el supuesto.

Luego, si BD no puede ser igual a BE, ni menor que BE, se infiere que es mayor, porque entre dos cantidades no hay más que tres comparaciones posibles:

1ª que las dos cantidades sean iguales;

2ª que la primera sea mayor que la segunda;

3ª que la primera sea menor que la segunda ¹.

¹ Este método llamado de *reducción al absurdo* consiste en suponer que sea falso el enunciado, y demostrar luego su verdad por la contradicción que hay entre lo que se supone y otras proposiciones cuya verdad se ha demostrado.

Elegimos este ejemplo por parecernos muy propio para esta forma de demostración, la cual puede aplicarse a la mayor parte de las proposiciones recíprocas.

48. Corolario. Las oblicuas iguales AC y AE forman, con la perpendicular AB, ángulos iguales:

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAE}.$$

49. Definición. Distancia de un punto a una recta es la longitud de la perpendicular bajada desde ese punto a la recta.

Teorema.

50. Todo punto de la perpendicular levantada en el punto medio de una recta equidista de los extremos de ésta.

Sea A un punto cualquiera de la perpendicular AB.

Tracemos las rectas AC y AD.

Por hipótesis tenemos $BC = BD$, luego las oblicuas AC y AD son iguales por apartarse igualmente del pie de la perpendicular (Nº 46, 2º).

51. Recíproco. Todo punto equidistante de los extremos de una recta pertenece a la perpendicular levantada en el punto medio de esta recta.

Teorema.

52. Todo punto exterior a la perpendicular levantada en el punto medio de una recta no equidista de los extremos de esta recta.

Sea el punto M, exterior a la perpendicular AB.

Tenemos

$$MD < MA + AD$$

pero $AD = AC$ (Nº 50)

$$\text{Por lo tanto } MD < MA + AC$$

$$\text{o sea } MD < MC$$

Luego, todo punto...

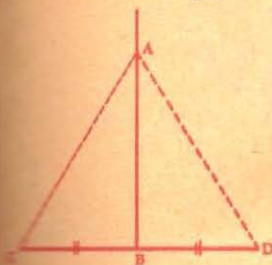


Fig. 30

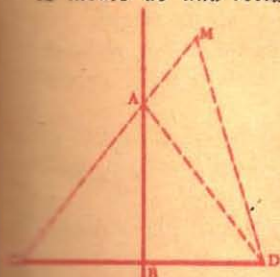


Fig. 31

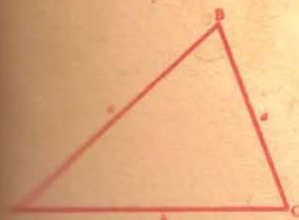


Fig. 32

CAPITULO II

TRIANGULOS

DEFINICIONES

§ I. — Triángulo.

53. Triángulo es una porción de plano limitada por tres rectas llamadas *lados* del triángulo.

En todo triángulo, hay que tener en cuenta seis elementos, a saber: *tres ángulos* y *tres lados*.

Perímetro de un triángulo es la suma de sus lados.

Los ángulos de un triángulo se designan ordinariamente por tres letras mayúsculas, A, B, C; y los lados opuestos a los ángulos, por medio de las mismas letras pero minúsculas, a, b, c . (fig. 32).

§ II. Clases de triángulos.

54. Respecto de sus lados, el triángulo se llama:
equilátero, si los tres lados son iguales;
isósceles, si tiene dos lados iguales;
escaleno, si los tres lados son desiguales.

Con relación a sus ángulos se llama:
rectángulo, cuando tiene un ángulo recto;
obtusángulo, si uno de los ángulos es obtuso;
acutángulo, si los tres ángulos son agudos;
equiángulo, si los tres ángulos son iguales.

§ III. — Líneas del triángulo.

55. *Base* de un triángulo es el lado sobre el cual parece como que descansa la figura. Puede tomarse por base de un triángulo uno cualquiera de sus lados.

Vértice de un triángulo es la intersección de dos lados.

Se llama *altura* a la perpendicular bajada desde uno de los vértices al lado opuesto o a su prolongación.

56. En un triángulo *rectángulo* llámase *hipotenusa*, al lado opuesto al ángulo recto, y *catetos*, a los lados que forman ese ángulo.

En dicho triángulo se suele tomar por *base* la hipotenusa, en cuyo caso la *altura* es la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa.

57. En un triángulo *isósceles*, llámase especialmente *vértice* al punto de intersección de los dos lados iguales, y *base* al lado opuesto a ese vértice.

58. *Mediana* es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Todo triángulo, tiene *tres alturas*, *tres medianas* y *tres bisectrices*.

Teorema.

59. En todo triángulo un lado cualquiera es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.

1º Sea el triángulo ABC.

La parte primera del teorema es evidente (Nº 7); luego:

$$a < b + c; \quad b < a + c;$$

$$c < a + b.$$

2º La desigualdad

$$a < b + c,$$

puede representarse así:

$$b + c > a$$

Restando c de ambos miembros resultará:

$$b > a - c$$

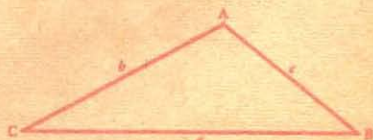


Fig. 33

Restando b :

$$c > a - b$$

Siendo a el lado mayor, tenemos:

$$a > b$$

y por lo tanto

$$a > b - c$$

Luego, *en todo triángulo...*

CASOS DE IGUALDAD DE LOS TRIANGULOS

Teorema.

60. Primer caso. *Dos triángulos son iguales cuando tienen un ángulo igual, comprendido por lados respectivamente iguales.*

Sean los triángulos T y T' que tienen:

$$\widehat{A} = \widehat{A'}$$

$$AB = A'B', \quad AC = A'C'$$

Supongamos el triángulo T colocado sobre el triángulo T' , de modo que el ángulo A coincida con su igual A' ; el lado AC tomará la dirección de $A'C'$, y por ser $AC = A'C'$, el punto C caerá en C' . También el lado AB coincidirá con $A'B'$; luego, el lado BC se confundirá con el lado $B'C'$, y los triángulos coincidirán.

Luego, *dos triángulos son iguales...*

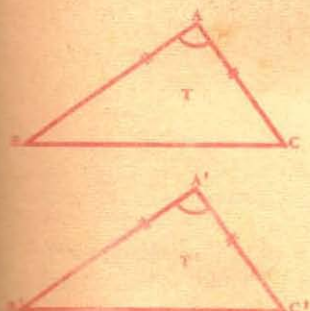


Fig. 34

Teorema.

61. Segundo caso. *Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales.*

Sean los triángulos T y T' que tienen:

$$BC = B'C'$$

$$\widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{C} = \widehat{C'}$$

Supongamos el triángulo T colocado sobre el triángulo T' , de modo que coincida el lado BC con su igual $B'C'$. En virtud de la

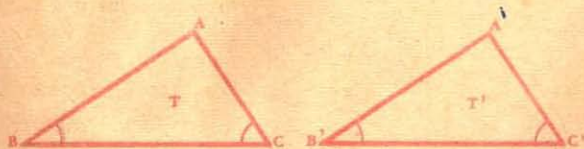


Fig. 35

igualdad de los ángulos B y B' , C y C' , BA tomará la dirección de $B'A'$ y CA la de $C'A'$. Debiendo hallarse el punto A a la vez en la recta $B'A'$ y en la recta $C'A'$, estará forzosamente en A' , único punto común a ambas rectas, y por lo tanto los triángulos coincidirán.

Luego, *dos triángulos...*

62. Tercer caso. Dos triángulos son iguales cuando tienen los tres lados respectivamente iguales.

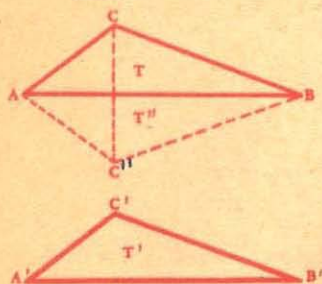


Fig. 36

Sean los triángulos T y T' que tienen:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C'$$

Supongamos el triángulo T y el triángulo T' colocados a uno y a otro lado de AB; y tracemos CC''.

Por hipótesis $AC = A'C'$, o $AC = AC''$ y $BC = B'C''$. Los puntos A y B pertenecen a la perpendicular levantada en el punto medio de la recta CC'', por hallarse a igual distancia de los extremos de dicha recta (Nº 51); luego AB es perpendicular a CC'' en su punto medio.

Además, las oblicuas iguales AC, AC'' forman ángulos iguales con AB (Nº 48): luego,

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAC''}$$

Por lo tanto, los triángulos T y T'' son iguales (Nº 60), por tener un ángulo igual, comprendido por lados respectivamente iguales.

Luego, dos triángulos...

63. Escolio. Dos triángulos iguales tienen sus seis elementos respectivamente iguales; a lados iguales se oponen ángulos iguales y recíprocamente.

Teorema.

64. Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, y el ángulo comprendido por los dos lados del primero mayor que el comprendido por los dos lados del segundo, el tercer lado del primero es mayor que el tercer lado del segundo.

Sean los triángulos ABC y A'B'C' que tienen:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C'$$

$$\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$$

Coloquemos el triángulo A'B'C' sobre el triángulo ABC de manera que los dos lados iguales AB y A'B' coincidan.

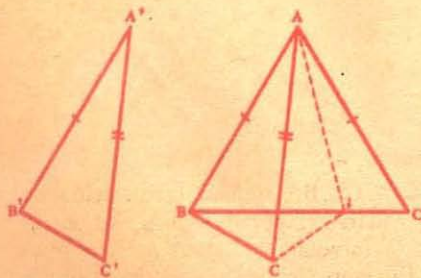


Fig. 37

Siendo el ángulo BAC'' menor que el ángulo BAC, la bisectriz del ángulo C''AC encontrará al lado BC en cierto punto I. Los triángulos AIC y A'IC'' son iguales por tener un ángulo igual entre lados respectivamente iguales;

$$\text{luego} \quad IC = IC''$$

Pero en el triángulo BIC'' tenemos:

$$BC'' < BI + IC''$$

o $BC'' < BI + IC$

o sea $B'C' < BC$

Luego, si dos triángulos...

65. Recíproco. Si dos triángulos ABC, A'B'C', tienen dos lados respectivamente iguales, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, y el tercer lado BC del primero mayor que el tercer lado B'C' del segundo, el ángulo A opuesto a BC es mayor que el ángulo A' opuesto a B'C'.

CASOS DE IGUALDAD DE LOS TRIANGULOS RECTANGULOS

Teorema.

66. Primer caso. Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen iguales las hipotenusas y un ángulo agudo.

Sean los triángulos rectángulos T y T' que tienen:

$$\begin{array}{c} BC = B'C' \\ \sphericalangle C = \sphericalangle C' \end{array}$$

Coloquemos el triángulo T sobre el triángulo T' de modo que el ángulo C coincida con su igual C'. La hipotenusa CB coincidirá con su igual C'B'; el lado CA tomará la dirección de C'A'. Siendo BA y B'A' dos perpendiculares bajadas desde el mismo punto B' a la misma recta C'A', han de confundirse (Nº 45), y por lo tanto los dos triángulos coincidirán. Luego, dos triángulos rectángulos...

Teorema.

67. Segundo caso. Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen iguales las hipotenusas y un cateto.

Sean los triángulos rectángulos T y T' que tienen:

$$BC = B'C', \quad AB = A'B'$$

Coloquemos el triángulo T sobre el triángulo T' de modo que el cateto BA coincida con su igual B'A'. A causa de los ángulos rectos A y A', el cateto AC tomará la dirección de A'C', y siendo BC y B'C' oblicuas iguales trazadas desde el mismo punto B', sus pies tienen que apartarse igualmente del pie de la perpendicular B'A' (Nº 47, 2º); luego $AC = A'C'$ y el punto C caerá en C'; por consiguiente, los dos triángulos coincidirán.

Luego, dos triángulos rectángulos...



Fig. 38

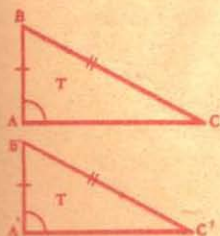


Fig. 39

Teorema.

68. En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

Sea el triángulo isósceles ABC, cuyos lados iguales son AB y AC. Para demostrar que el ángulo B es igual al ángulo C, unamos el vértice A con D, punto medio de BC.

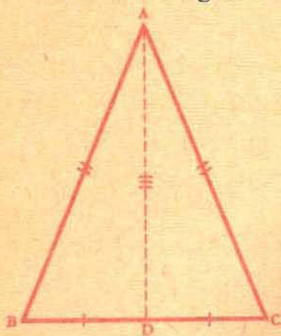


Fig. 40

69. Recíproco. Si dos ángulos de un triángulo son iguales, sus lados opuestos lo son también, y el triángulo es isósceles.

70. Escolios. — I. En todo triángulo isósceles, la *bisectriz del ángulo* del vértice es a la vez *altura* y *mediana*.

II. Recíprocamente, un triángulo será *isósceles*, si una recta del mismo goza de estas propiedades.

III. Un triángulo será *isósceles* si tiene *dos alturas*, *dos bisectrices*, o *dos medianas* iguales.

IV. El triángulo *equilátero* es también *equiángulo*, y tiene iguales sus tres *alturas*, *bisectrices* y *medianas*.

Teorema.

71. Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulo.

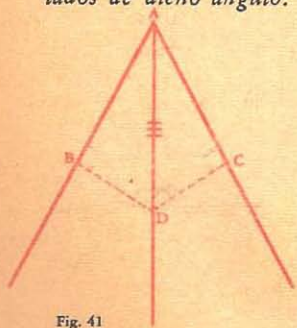


Fig. 41

Sea el ángulo BAC.

Desde un punto cualquiera D de la bisectriz, bajemos a AB y AC las perpendiculares DB, DC, que determinan las distancias de dicho punto a los lados del ángulo.

Los triángulos rectángulos ADB y ADC son iguales por tener la hipotenusa AD común y un ángulo agudo igual en A (Nº 66), por lo tanto,

$$DB = DC.$$

Luego, *todo punto*...

72. Recíproco. Todo punto equidistante de los lados de un ángulo pertenece a la bisectriz de dicho ángulo.

NOTA. La bisectriz de un ángulo es el *lugar geométrico* de los puntos equidistantes de los lados ¹.

CAPITULO III RECTAS PARALELAS

DEFINICIONES

73. *Rectas paralelas* son aquellas que, estando en un mismo plano, no se encuentran por más que se prolonguen.



Fig. 42

Tales son las rectas AB, CD y EF (fig. 42).

74. Llámase *secante* o *transversal* a la recta que corta a cualquier línea o figura. Por ejemplo, EF (fig. 43).

75. Si a dos rectas AB y CD (fig. 43), sean o no paralelas, se las corta por una tercera EF, ésta forma con las primeras ocho ángulos que, tomados de dos en dos, reciben distintos nombres, según sus diferentes y relativas posiciones.

Ángulos alternos son los situados a una y otra parte de la secante, y no adyacentes.

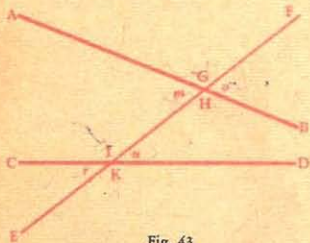


Fig. 43

Llámanse *ángulos alternos internos* a los ángulos internos no adyacentes, situados a distinto lado de la secante. Por ejemplo, los ángulos m , n ; H e I (fig. 43).

Ángulos alternos externos son los externos no adyacentes, situados a distinto lado de la secante. Por ejemplo, los ángulos r , o ; G, K (fig. 43).

76. *Ángulos correspondientes* son los no adyacentes, situados a un mismo lado de la secante, el uno interno y el otro externo. V. gr.: o , n ; H, K; G, I; m , r (fig. 42).

Teorema.

77. *Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.*

Sean AB y CD, dos perpendiculares a la recta AC.



Fig. 44

Si AB y CD no fuesen paralelas, desde el punto donde se cortasen tendríamos dos perpendiculares a la misma recta AC, lo que es imposible (Nº 45).

Luego, AB y CD *son paralelas*.

¹ *Lugar geométrico* es el conjunto de puntos que gozan de una misma propiedad.

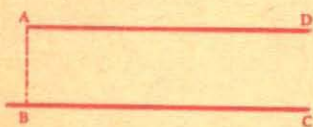


Fig. 45

78. Corolario. Para trazar por un punto dado A, una paralela a una recta dada BC (fig. 45), basta trazar AB perpendicular a BC, y después AD perpendicular a AB.

Las dos rectas AD y BC son paralelas por ser perpendiculares a la misma recta AB (Nº 77).

PÓSTULADO DE EUCLIDES

79. Por un punto dado no se puede trazar más que una paralela a una recta dada.

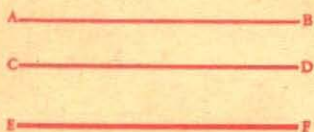


Fig. 46

80. Corolario. Dos rectas AB y CD paralelas a una tercera EF (fig. 46) son paralelas entre sí, porque si AB y CD se cortasen, por el punto de intersección, pasarían dos paralelas a EF, lo cual es imposible (Nº 79).

Teorema.

81. Si dos rectas son paralelas, toda recta perpendicular a la una lo es también a la otra.

Sean AB y CD dos paralelas, y AC perpendicular a AB. Demostremos que lo es también a CD.

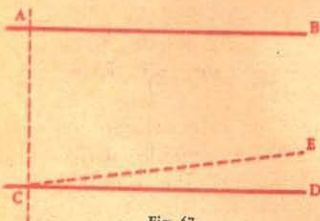


Fig. 47

Para ello, tracemos CE perpendicular a AC; siendo AB y CE perpendiculares a la recta AC, resulta que son paralelas entre sí (Nº 77); pero, por el punto C no puede pasar sino una paralela a AB (Nº 79); luego, las rectas CD y CE se confunden, y por consiguiente CD es perpendicular a AC, y recíprocamente.

Luego, si dos rectas son paralelas...

82. Escolio. Cuando dos rectas (OA y OC) se cortan, sus respectivas perpendiculares se cortan también.

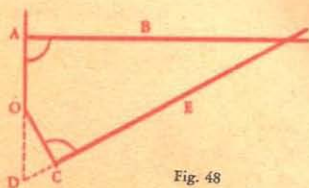


Fig. 48

Porque si no se encontrasen las perpendiculares AB y CE serían paralelas, y entonces la recta AOD perpendicular a AB, lo sería también a DCE (Nº 81), y tendríamos por el punto O dos perpendiculares OC y OD a la misma recta DCE, lo que es imposible (Nº 45).

Luego, cuando dos rectas...

1 Postulado. — Proposición que no es de evidencia inmediata y de la cual no hay demostración que satisfaga.
Euclides, célebre geómetra griego, 320 a J. C.

Teorema.

83. *Dos rectas paralelas cortadas por una secante forman ocho ángulos, a saber: cuatro agudos iguales entre sí, y cuatro obtusos, también iguales entre sí.*

Sean las paralelas AB y CD, cortadas por la secante EF.

Por O, punto medio de GK, tracemos MT perpendicular a AB, y por lo tanto a CD (Nº 81).

Los triángulos rectángulos OTG y OMK son iguales, por tener igual la hipotenusa, ($OG = OK$), y un ángulo agudo igual en O, como opuestos por el vértice (Nº 43). Luego el ángulo m del primer triángulo es igual al ángulo n del segundo.

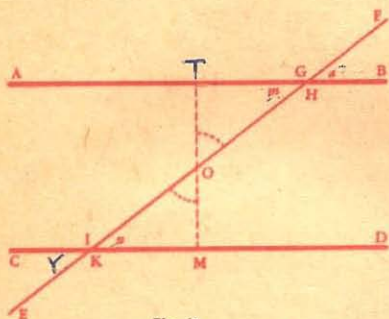


Fig. 49

Además los ángulos agudos a, m son iguales como opuestos por el vértice, así como también los ángulos n, r ; por lo tanto los cuatro ángulos agudos m, n, a, r son iguales.

De donde se deduce que los ángulos obtusos G, H, I, K son iguales por ser suplementos de ángulos agudos iguales.

Luego, *dos rectas paralelas...*

84. **Corolario.** *Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante:*

- 1º Los ángulos alternos internos son iguales;
- 2º Los ángulos correspondientes son también iguales.

85. **Recíproco.** *Dos rectas son paralelas cuando cortadas por una secante forman:*

- 1º Ángulos alternos internos iguales;
- 2º Ángulos correspondientes iguales.

86. **Advertencia.** Asentada la teoría de las paralelas se suele emplear las voces *correspondientes, alternos internos*, para designar únicamente los ángulos formados por dos paralelas y una secante.

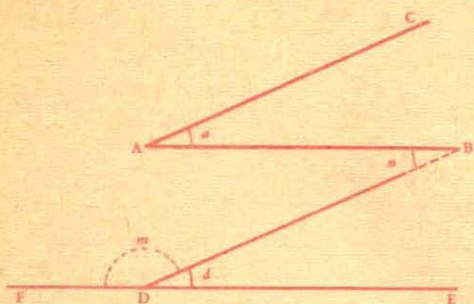
Teorema.

87. *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos son iguales o suplementarios.*

1º Sean los ángulos a y d que tienen los lados respectivamente paralelos y dirigidos en un mismo sentido: el lado AC paralelo a DG, y AB paralelo a DE. Demostremos que

$$\widehat{a} = \widehat{d}.$$

Para ello, prolonguemos DG hasta que encuentre a AB. Los ángulos a y n son iguales como alternos internos; los ángulos n y d son iguales por la misma razón. Luego

Fig. 50 $\widehat{d} + \widehat{m} = 2$ rectos;

pero
por lo tanto

$$\widehat{a} + \widehat{m} = 2 \text{ rectos.}$$

Luego, dos ángulos...

Teorema.

88. Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales o suplementarios.

1º Sean los ángulos a y a' que tienen sus lados respectivamente perpendiculares, a saber OF perpendicular a OD, OG perpendicular a OE. Demostremos que

$$\widehat{a} = \widehat{a'}$$

Ya sabemos (Nº 38) que

$$\begin{aligned} \widehat{a} + \widehat{n} &= 1 \text{ recto;} \\ \widehat{a'} + \widehat{n} &= 1 \text{ recto;} \end{aligned}$$

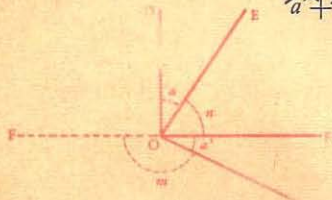


Fig. 51

Luego $\widehat{a} = \widehat{a'}$.

2º Sean los ángulos a y m que tienen OD perpendicular a OF', y OE perpendicular a OG. Demostremos que

$$\widehat{m} + \widehat{a} = 2 \text{ rectos.}$$

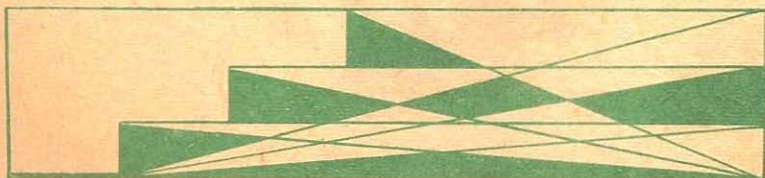
Ya sabemos (Nº 39) que

$$\widehat{m} + \widehat{a'} = 2 \text{ rectos.}$$

Sustituyendo el ángulo a' con su igual a , tendremos:

$$\widehat{m} + \widehat{a} = 2 \text{ rectos.}$$

Luego, dos ángulos que tienen...



CAPITULO IV

POLIGONOS

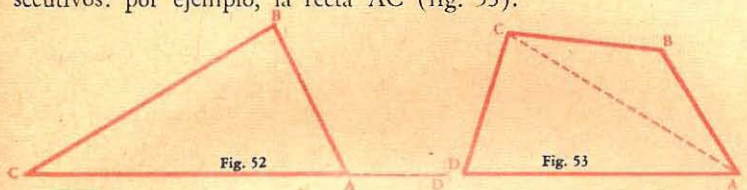
§ I. — Polígonos en general.

89. **Definiciones.** Llámase *polígono* a toda superficie plana limitada por líneas rectas.

Estas líneas son los *lados* del polígono; y *perímetro* es el conjunto de sus lados.

Los puntos de intersección de los lados se llaman *vértices*.

Diagonal de un polígono es la recta que une dos vértices no consecutivos: por ejemplo, la recta AC (fig. 53).



90. *Angulo exterior* de un polígono es el formado por uno cualquiera de los lados del polígono y la prolongación del lado adyacente. Así el ángulo BAD (fig. 52) es un ángulo exterior.

Los ángulos exteriores son suplementos de los ángulos interiores adyacentes.

91. Polígono *equiángulo* es el que tiene todos sus ángulos iguales.
equilátero es aquel cuyos lados son iguales.
regular es aquel cuyos lados y ángulos son iguales.

92. Polígono *convexo* es el que tiene por perímetro una línea convexa (fig. 53).

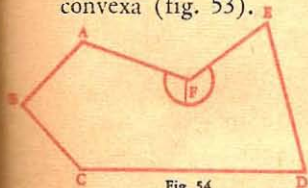


Fig. 54

PRINCIPALES POLIGONOS

El polígono que no es convexo se llama *cóncavo*; este polígono tiene uno o más ángulos *entrantes*, esto es, mayores que dos rectos; tal es el ángulo F (fig. 54).

93. El *triángulo* es el más sencillo de los polígonos.

El polígono de	4	lados se llama	<i>cuadrilátero.</i>
"	5	"	<i>pentágono.</i>
"	6	"	<i>exágono.</i>
"	7	"	<i>eptágono.</i>
"	8	"	<i>octógono.</i>
"	9	"	<i>eneágono o nonágono.</i>
"	10	"	<i>decágono.</i>
"	11	"	<i>endecágono o undecágono.</i>
"	12	"	<i>dodecágono.</i>
"	15	"	<i>pentedecágono.</i>

Los demás polígonos se designan según el número de sus lados, diciendo, por ejemplo, polígono de catorce lados.

Teorema.

94. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.

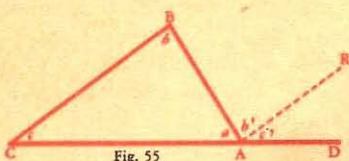


Fig. 55

Prolonguemos el lado CA; y por el punto A tracemos la recta AE paralela a CB.

Los ángulos c' y c' son iguales como correspondientes, y los ángulos b y b' lo son como alternos internos.

Luego, la suma de los ángulos del triángulo es igual a la suma de los tres ángulos formados en el punto A, y como éstos suman dos rectos (Nº 40, II), también

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 2 \text{ rectos.}$$

Luego, la suma...

95. Corolarios. I. El ángulo exterior BAD de un triángulo (fig. 55) equivale a la suma de los ángulos interiores no adyacentes b, c.

II. Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, el tercer ángulo del primer triángulo es igual al tercer ángulo del segundo; pues ambos son suplementos de la suma de los otros dos.

III. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

Teorema.

96. La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es igual a tantas veces dos rectos, como lados tiene, menos dos.

Sea el polígono convexo ABCDE; tracemos las diagonales AD y AC.

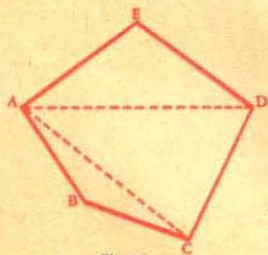


Fig. 56

Claro está que a cada uno de los triángulos extremos AED, ABC les corresponde dos lados del polígono, en tanto que al triángulo intermedio ACD sólo le corresponde uno.

Además los ángulos de los tres triángulos valen tanto como los ángulos del polígono. Ahora bien, en cada triángulo la suma de los tres ángulos es igual a dos rectos (Nº 94); y como hay tantos triángulos como lados menos dos, se infiere que

La suma de los ángulos...

97. Nota. Llamando n al número de lados del polígono, $n - 2$ representará el número de triángulos, y

$$(n - 2) 2 \text{ rectos}$$

la suma de los ángulos interiores del polígono.

Teorema.

98. La suma de los ángulos exteriores, que resultan prolongando en un mismo sentido todos los lados de un polígono convexo, es igual a cuatro rectos.

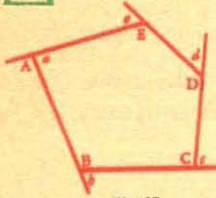


Fig. 57

En efecto, sea un polígono de n lados; cada ángulo exterior es suplemento del ángulo interior adyacente, y la suma de todos los ángulos interiores y exteriores es igual a n veces dos rectos;

$$\text{Suma de todos los ángulos} = 2n$$

$$\text{Suma de los ángulos interiores (Nº 97)} = 2n - 4$$

La diferencia, 4 rectos, expresará la suma de los ángulos exteriores.

§ II. — Cuadriláteros.**DEFINICIONES**

99. Llámase *cuadrilátero* a la figura limitada por cuatro lados (fig. 58).

Un cuadrilátero puede ser *convexo* (fig. 58), *cóncavo* (fig. 59) o *estrellado* (fig. 60).

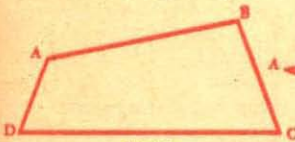


Fig. 58

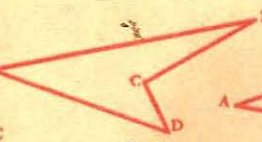


Fig. 59

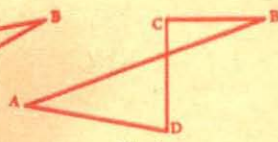


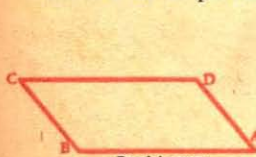
Fig. 60

✓ En este curso sólo trataremos de los cuadriláteros convexos. ✓

Llámase *paralelogramo* al cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos (fig. 61).

Rectángulo es un paralelogramo cuyos cuatro ángulos son rectos (fig. 62).

Rombo es el paralelogramo cuyos lados son iguales (fig. 63).



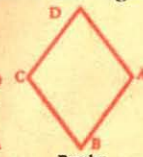
Paralelogramo

Fig. 61



Rectángulo

Fig. 62



Rombo

Fig. 63



Cuadrado

Fig. 64

Cuadrado es el paralelogramo que tiene sus lados y ángulos iguales (fig. 64).

Este cuadrilátero es a la vez rombo y rectángulo.

Trapezio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Estos lados son las bases del trapezio (fig. 65).



Fig. 65

Trapecio rectángulo
Fig. 66Trapecio isósceles
Fig. 67

Trapecio *rectángulo* es el que tiene dos ángulos rectos (fig. 66).

Trapecio *isósceles* o *simétrico* es el que tiene iguales los lados opuestos no paralelos (fig. 67).

Teorema

100. La suma de los ángulos de un cuadrilátero convexo es igual a cuatro rectos.

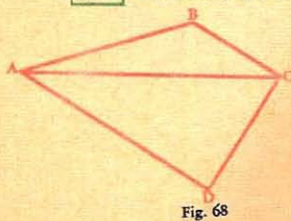


Fig. 68

Sea el cuadrilátero ABCD. La diagonal AC le divide en dos triángulos cuyos ángulos valen tanto como los del cuadrilátero. Pero ya sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo vale 2 rectos; por lo tanto la suma de los ángulos del cuadrilátero valdrá cuatro rectos¹.

101. Corolario. Si dos ángulos de un cuadrilátero son suplementarios, los otros dos lo serán también.

PROPIEDADES DEL PARALELOGRAMO

Teorema.

102. En todo paralelogramo, los lados y los ángulos opuestos son iguales.

Sea el paralelogramo ABCD.

Tracemos la diagonal DB.

Los ángulos n y n' son iguales como alternos internos, así como también lo son, y por análoga razón, los ángulos m y m' .

Por lo tanto, los dos triángulos ABD y BCD son iguales por tener un lado común, BD, adyacente a dos ángulos respectivamente iguales (Nº 61).

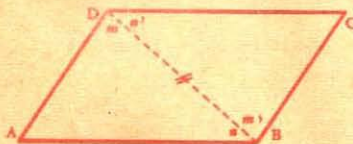


Fig. 69

Luego los lados AB y CD opuestos a ángulos iguales son iguales, lo mismo que los lados AD y BC, opuestos a los ángulos iguales n , n' .

Además, los ángulos A y C son iguales como opuestos al lado común BD, y el ángulo total B es igual al ángulo total D.

Luego, en todo paralelogramo...

103. Escolios. — I. La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.

¹ Este teorema no es más que un caso particular del Nº 94.

II. — En un paralelogramo dos ángulos consecutivos son suplementarios.

104. Corolarios. I. Los segmentos de paralelas comprendidos entre otras dos rectas paralelas son iguales.



Fig. 70

Sean los segmentos AB y CD comprendidos entre las paralelas AD y BC.

La figura ABCD es un paralelogramo (Nº 99);
luego: $AB = CD$ (Nº 102).

II. Dos paralelas equidistan en todos sus puntos.

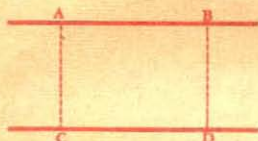


Fig. 71

Sean AB y CD dos paralelas cualesquiera.

Tracemos las perpendiculares AC y BD. Estas perpendiculares son paralelas (Nº 77) e iguales (Nº 104, I); además miden la distancia de las paralelas AB y CD.

Teorema.

105. Si los lados opuestos de un cuadrilátero son iguales de dos en dos, la figura será un paralelogramo.

Sea el cuadrilátero ABCD, en el cual tenemos:

$$AB = DC, \quad AD = BC$$

Tracemos la diagonal BD. Los dos triángulos ABD y BDC son iguales por tener los tres lados respectivamente iguales. De donde se infiere que el ángulo m es igual al ángulo m' como opuestos a lados iguales en triángulos iguales; luego las rectas AD y BC son paralelas por formar, con la secante BD, ángulos alternos internos iguales.



Fig. 72

Asimismo, los ángulos n y n' son iguales, y las rectas AB y DC resultan paralelas; por lo tanto el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Luego, si los lados opuestos de un cuadrilátero...

Teorema.

106. Si dos lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, la figura será un paralelogramo.

Sea el cuadrilátero ABCD, cuyos lados AB y DC son iguales y paralelos.

Tracemos la diagonal DB.

Los dos triángulos ABD y BCD son iguales por tener un ángulo igual entre lados respectivamente iguales, a saber:



Fig. 73

las rectas AD y BC que forman dichos ángulos son paralelas (Nº 85), y la figura ABCD es un paralelogramo.

Luego, si dos lados de un cuadrilátero...

107. Corolario. El rectángulo, el rombo y el cuadrado son paralelogramos.

Teorema.

108. Las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.

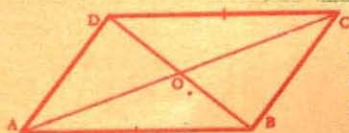


Fig. 74

Sea ABCD un paralelogramo cualquiera y sean AC y BD sus diagonales; demostremos que O es el punto medio de cada una de ellas.

Los dos triángulos AOB y DOC son iguales por tener un lado igual, ($AB = DC$), adyacente a dos ángulos respectivamente iguales, a saber:

$$\begin{aligned} \widehat{OAB} &= \widehat{OCD} \quad (\text{Nº } 84). \\ \widehat{OBA} &= \widehat{ODC} \quad (\text{id.}). \end{aligned}$$

Así pues, OA del primer triángulo es igual a OC del segundo, y $OB = OD$.

Luego, las diagonales de un paralelogramo...

109. Recíproco. Si las diagonales de un cuadrilátero se dividen en partes iguales, la figura es un paralelogramo.

Teorema.

110. Las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto.

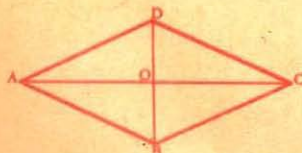


Fig. 75

En efecto, siendo ABCD un paralelogramo, O es el punto medio de las diagonales; los triángulos AOD y COD son iguales por tener los tres lados respectivamente iguales: OD es lado común, $AO = OC$ (Nº 108), $AD = DC$ por definición.

Luego, los ángulos AOD y COD son iguales, y por consiguiente rectos.

Teorema.**111.** Las diagonales de un rectángulo son iguales.

En efecto, los dos triángulos ABC y DCB son iguales por tener un ángulo igual comprendido por lados respectivamente iguales, a saber

$$\widehat{ABC} = \widehat{BCD},$$

BC es lado común;

AB = DC como lados opuestos del rectángulo.

Luego, AC = BD.

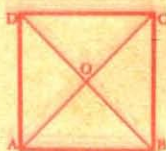
112. Escolio. En todo cuadrado las diagonales son iguales y perpendiculares, y se dividen mutuamente en partes iguales.

Fig. 77

Porque el cuadrado es a la vez rectángulo, rombo y paralelogramo.

Teorema.**113.** Si por el punto medio de un lado de un triángulo, se traza una paralela a la base, esta paralela pasa por el punto medio del tercer lado.

Sea D el punto medio de AB, y la recta DE paralela a la base AC; tracemos EF paralela a AB. Los triángulos BDE y FEC tienen los lados BD y EF iguales, por ser ambos iguales a AD. Además,

$\widehat{BDE} = \widehat{CFE}$ así como $\widehat{DBE} = \widehat{FEC}$, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido. Por lo tanto, estos triángulos son iguales por tener un lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales.

Luego, BE = EC.

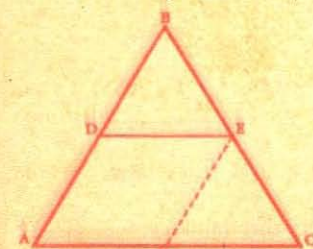


Fig. 78

114. Recíproco. La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.

Porque una paralela al lado AC trazada desde el punto D debe pasar por el punto E como lo acabamos de demostrar. Luego, dicha paralela se confunde con DE.

115. Corolario. La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es igual a la mitad del tercer lado.

En efecto, en el paralelogramo ADEF (fig. 78), tenemos DE = AF. Los triángulos iguales DBE y FEC dan también DE = FC; por consiguiente,

$$AF = FC = \frac{AC}{2}.$$

$$DE = \frac{AC}{2}.$$

Luego

Teorema.

116. La paralela a las bases de un trapezio trazada por el punto medio de uno de los lados no paralelos, pasa por el punto medio del otro, y es igual a la semisuma de las bases.

Sea el trapezio ABCD. Tracemos la diagonal BD, y por el punto medio del lado AD tracemos la recta EGF paralela a las bases.

Siendo paralela al lado AB del triángulo ABD, esta recta pasará por el punto medio G del lado BD (Nº 113); por

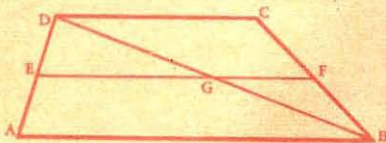


Fig. 79

serlo al lado BC del triángulo BDC, esta recta pasará por el punto medio F del lado BC.

En los triángulos ABD y BCD tenemos:

$$EG = \frac{AB}{2} \quad \text{y} \quad GF = \frac{DC}{2}.$$

Sumando ordenadamente, resulta:

$$EF = \frac{AB + DC}{2}.$$

Luego, la recta que une...

116. bis. La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapezio es paralela a las bases e igual a la semisuma de las mismas.

Porque esta recta se confunde con la paralela a las bases trazada por el punto medio de un lado.

Este último teorema puede demostrarse directamente.

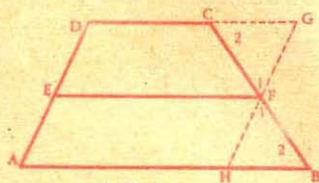


Fig. 79 bis

Sea el trapezio ABCD y la recta EF. Tracemos GH paralela a DA y prolonguemos DC. Los triángulos CFG y BFH son iguales por tener un lado igual, $CF = FB$, adyacente a ángulos respectivamente iguales. Luego los cuadriláteros EFGD y AHRE son paralelogramos (Nº 106). De donde

1º La recta EF es paralela a las bases;

2º $EF = DC + CG$

$EF = AB - HB$

Sumando: $2 EF = DC + AB$

$DC + AB$

y $EF = \frac{DC + AB}{2}$

2

CG y HB se anulan por ser iguales y de signo contrario.

APLICACIONES

PRELIMINARES

117. La *plomada* (fig. 80) es una pesa de plomo o de otro metal atada a uno de los extremos de un bramante.



Fig. 80



Fig. 81

Llámanse *línea vertical* a la recta determinada con la plomada.

La *línea horizontal* (*ab*, fig. 81) es perpendicular a la dirección vertical¹ y corresponde a la superficie del agua reposada, y en corta extensión.

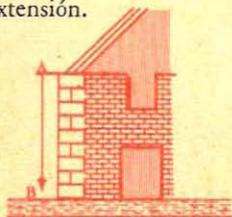


Fig. 82



Fig. 83

118. La *plomada* sirve al albañil para hallar la dirección vertical en la construcción de paredes (fig. 82); sirve también para averiguar una dirección vertical (fig. 83).

Dícese que un objeto está *de aplomo* cuando las líneas de este objeto que deben ser verticales lo son en realidad.

119. Los principales instrumentos que se emplean en el trazado de las figuras geométricas son: la *regla*, el *compás*, la *escuadra* y el *graduador*.

120. La *regla* sirve para trazar líneas rectas. La *línea vertical* se determina con la plomada.

Para trazar una línea recta se corre a lo largo de la regla un lápiz, un tiralíneas, una pluma, un punzón, etc.

Los carpinteros y los aserradores se sirven de un cordel impregnado en un líquido colorante, o cubierto de tiza, etc.; se tiende bien este cordel a lo largo de la superficie que se quiere marcar; se le suel-

¹ La *dirección vertical* es la de una fuerza merced a la cual todos los cuerpos propenden a dirigirse al centro de la tierra.



Fig. 84

ta de repente, y al volver a su primera posición, deja una huella rectilínea (fig. 84).

El albañil para guiarse en la construcción de paredes y muros tiende un cordel por medio de dos pedazos de madera o de hierro A, B (fig. 85), clavados en la pared.



Fig. 85

El jardinero tiende un cordel entre dos estaquitas (fig. 86).



Fig. 86



Fig. 90

121. El *compás* (fig. 90) sirve para trazar circunferencias o arcos.

Una de las piernas o ramas termina en punta, y en el extremo de la otra hay un lápiz o un tiralíneas. La abertura de las ramas representa el *radio* de la circunferencia, para cuyo trazado se coloca la rama puntiaguda en el punto elegido por centro.

122. La *escuadra* sirve para construir ángulos rectos o levantar perpendiculares, y sobre todo para trazar paralelas (Véase N^o 134).

123. La *escuadra* tiene varias formas.



Fig. 87



Fig. 88



Fig. 89

La *escuadra* o *cartabón del delineante* (fig. 87) es una tablilla delgada en forma de triángulo rectángulo.

La *escuadra del carpintero* (fig. 88) está formada por lo común de dos reglas de madera, unidas en ángulo recto.

La *escuadra del cantero* (fig. 89) está formada de dos reglas de hierro, unidas también en ángulo recto.

124. El *graduador* o *transportador* (fig. 91), que sirve para medir y construir ángulos, es un instrumento de talco, cobre o madera, en forma semicircular, cuyo borde circular, llamado *limbo*, está dividido en 180 grados numerados de diez en

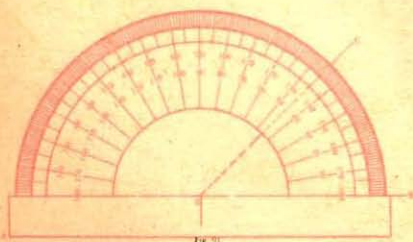


Fig. 91

diez o de cinco en cinco. El diámetro AB de este semicírculo se llama *línea de referencia* o *de fe*.

CAPITULO I

§ I. — Perpendiculares.

125. En la industria y en las artes se emplean constantemente las perpendiculares. El cantero necesita de la escuadra para labrar en ángulo recto las aristas de las piedras. A cada momento el carpintero corta tablas u otras maderas en ángulo recto. La construcción de una ventana, de una puerta, de un mueble, exige a cada paso el uso de la escuadra. El delineante, el arquitecto, el agrimensor trazan a menudo perpendiculares.

TRAZADO DE PERPENDICULARES CON AUXILIO DE LA ESCUADRA

126. Problema ¹. *Por un punto O de una recta, levantar una perpendicular a dicha recta.*



Fig. 92

Se adapta la regla a lo largo de la línea AB, y se apoya en ella el cateto inferior de la escuadra (fig. 92) de modo que el vértice del ángulo recto descansa en el punto O; se traza en seguida por el otro cateto de la escuadra la recta OM; esta recta será perpendicular a AB si la escuadra es exacta.

127. Problema. *Desde un punto A, tomado fuera de una recta, bajar por medio de la escuadra una perpendicular a esta recta.*



Fig. 93

Se aplica la regla a lo largo de la recta dada DC (fig. 93) y se corre la escuadra aplicada a la regla, hasta que toque en el punto dado A; luego se traza AB siguiendo la dirección de la escuadra; esta recta será la perpendicular pedida.

TRAZADO DE PERPENDICULARES POR MEDIO DE LA
REGLA Y DEL COMPAS

128. Problema. *Hallar un punto equidistante de los extremos de una recta dada.*



Fig. 94

Para determinar un punto equidistante de los extremos de la recta AB, desde los puntos A y B, tomados como centros, se describen, con una abertura de compás mayor que la mitad de la recta AB, arcos que se corten en O; éste será el punto pedido, por ser equidistante de A y B.

¹ Los problemas de Geometría se dividen en *gráficos* y *numéricos*. Los primeros tienen por objeto construir una figura que satisfaga a las condiciones del enunciado; y los segundos enseñan a calcular la extensión de una figura conocida, o de alguno de sus elementos.

129. Problema. *Levantar una perpendicular en el punto medio de una recta.*

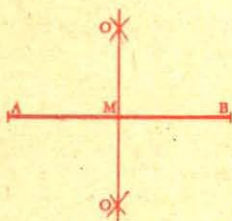


Fig. 95

130. NOTA. Cuando no hay espacio suficiente a ambos lados de

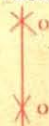


Fig. 96

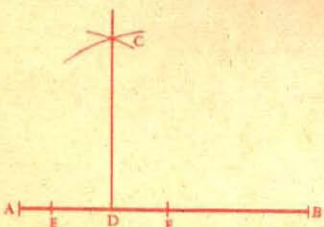


Fig. 97

132. Las rectas paralelas se usan muy a menudo en la práctica: las puertas y las ventanas tienen sus marcos paralelos; los lados opuestos de una hoja de papel, de una tabla, son también paralelos; los carriles de un camino de hierro, las líneas del pentagrama de la música, los peldaños de las escaleras de mano, el rayado de los cuadernos de escritura, etc., etc., son paralelos.

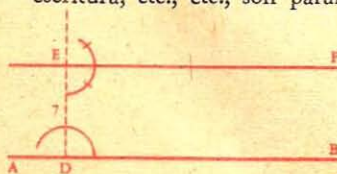


Fig. 98

señala la distancia de 7 milímetros en esta perpendicular, desde el

Para levantar una perpendicular en el punto medio de AB (fig. 95), haciendo centro en los extremos A y B, y con el mismo radio, mayor que la mitad de AB, se describen arcos que se corten en O y O'; luego se unen ambos puntos. La recta OO' es la perpendicular pedida, porque los puntos O y O' equidistantes de A y B, pertenecen a la perpendicular levantada en el punto medio de AB (Nº 51).

Para levantar una perpendicular en el punto D de la recta AB (fig. 97), se señalan a cada lado del punto D longitudes iguales DE y DF. Desde los puntos F y E, se describen, con un mismo radio, arcos que se corten en C. Después se traza la línea CD, que es la perpendicular pedida (Nº 51).

131. Problema. *Levantar una perpendicular en cualquier punto de una recta.*

Para levantar una perpendicular en el punto D de la recta AB (fig. 97), se señalan a cada lado del punto D longitudes iguales DE y DF.

Desde los puntos F y E, se describen, con un mismo radio, arcos que se corten en C. Después se traza la línea CD, que es la perpendicular pedida (Nº 51).

§ II. — Paralelas.

133. Problema. *Trazar una paralela a una recta, pasando a una distancia determinada de la misma.*

Sea AB la recta dada; para trazar una paralela a ella, a 7 milímetros por ejemplo, se levanta la perpendicular DE en cualquier punto de la recta AB. Se

punto D hasta E; y en este último se levanta, a la recta DE, la perpendicular EF.

Las rectas EF y AB son paralelas por ser perpendiculares a la misma recta DE (N^o 77).

134. *Trazado de paralelas con auxilio del cartabón.*

Para trazar paralelas a AB por medio del cartabón (fig. 99), se coloca un cateto de éste sobre la línea AB, y se ajusta la regla al otro cateto; en seguida se corre el cartabón a lo largo de la regla, y se trazan sucesivamente las líneas *m*, *n*, *s*, *t*.

Estas rectas son paralelas, por ser perpendiculares a la misma recta.

135. *Uso de la escuadra T o escuadra de muleta.*

La escuadra T es un instrumento compuesto de dos reglas ensambladas

en ángulo recto, en la forma de la letra mayúscula cuyo nombre lleva, que sirve para trazar paralelas.

Cuando los bordes del tablero se hallan en ángulo recto, fácilmente se pueden trazar perpendiculares con ayuda de la escuadra T.

Para trazar paralelas (fig. 100), se aplica la cruceta de la escuadra al borde del tablero, por él se corre el instrumento; y se trazan, por el

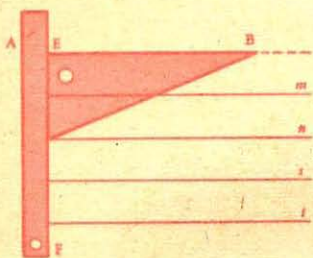


Fig. 99



Fig. 100



Fig. 101

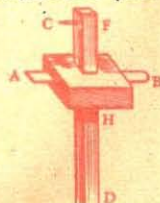
filo de la regla larga, las paralelas que se quiera.

A menudo tiene la escuadra T una pieza móvil en torno de un eje. Esta pieza puede ir ajustada con un tornillo, y sirve para variar la dirección de la escuadra en el trazado de paralelas (fig. 101).

136. *Uso del gramil.* El gramil sirve a los carpinteros para trazar paralelas a lo largo del borde de una tabla.



Fig. 102



La figura 102 indica la forma de este instrumento. La distancia entre la punta C y la tablita puede variar; una vez obtenida la distancia que se desee, se corre la tablita a lo largo del canto de una tabla, y la punta C determina la paralela al borde de ésta.

§ III. — Angulos.

137. Problema. En un punto dado D de una recta DE (fig. 103) construir un ángulo igual a otro ángulo dado A.

1º Con la escuadra. Por medio de una regla o de una tira de papel, se señalan longitudes iguales como AB y DE, y con la escua-

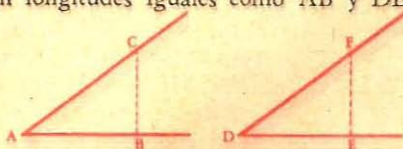


Fig. 103

dra se levantan las perpendiculares BC y EF (fig. 103); se toma $EF = BC$, y se traza el lado DF, que forma en D un ángulo igual a A, porque los triángulos ABC y DEF son iguales por tener un ángulo igual ($B = E$), comprendido por lados respectivamente iguales.

2º Con el graduador. Se mide el ángulo A (fig. 104); luego, en

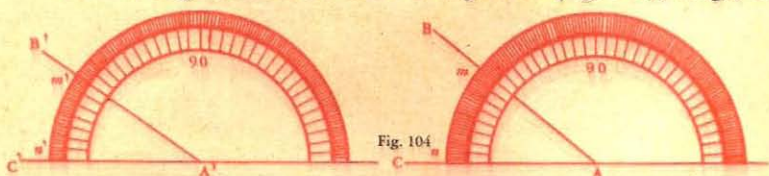


Fig. 104

el punto A' se señala un ángulo de igual número de grados, y se traza el lado A'B'. El ángulo B'A'C' es igual al ángulo BAC.

138. Para levantar y reproducir los ángulos, los carpinteros se sirven de la *falsa escuadra* (fig. 105).

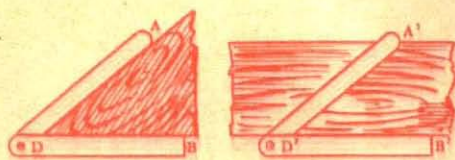


Fig. 105

Este instrumento consta de dos reglas unidas por un tornillo de presión. Se adapta sobre el ángulo ADB que se quiere reproducir, de modo que las reglas AD y DB coincidan

con los lados del ángulo; luego se transporta el instrumento sobre la superficie en la cual se desea obtener el ángulo igual, A'D'B'.

1. Véanse en las Aplicaciones sobre el Libro II, otros procedimientos para el trazado de perpendiculares y paralelas, y para la construcción de ángulos.

§ IV. — Bisectriz de un ángulo.

139. Problema. *Trazar la bisectriz de un ángulo dado.*

1er. procedimiento. Con el compás, desde el vértice A del ángulo, se traza, con un radio arbitrario, un arco DC. Luego, desde los puntos D y C, con el mismo radio, se describen arcos que se corten en M, y se traza la línea AM que será bisectriz del ángulo A.

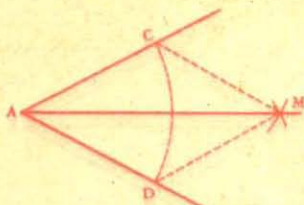


Fig. 106

En efecto, si trazamos DM y CM, tendremos dos triángulos ADM y ACM cuyos lados son respectivamente iguales.

Luego los ángulos en A son iguales como opuestos a lados iguales, DM y CM.

Por lo tanto AM es bisectriz (Nº 36).

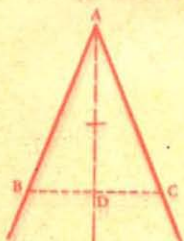


Fig. 107

140. 2º procedimiento. *Por medio de la escuadra* (fig 107). Tómese $AB = AC$ y trácese BC. Por medio de la escuadra, desde el punto A se baja una perpendicular a BC. La recta AD es bisectriz del ángulo A.

En efecto los triángulos rectángulos ABD y ADC son iguales por tener las hipotenusas AB y AC iguales, y un cateto común AD (Nº 67).

Luego los ángulos en A son iguales.

141. Problema. *Trazar la bisectriz de un ángulo cuyo vértice está fuera de los límites del dibujo.*

Sea el ángulo formado por las líneas convergentes AB y CD.

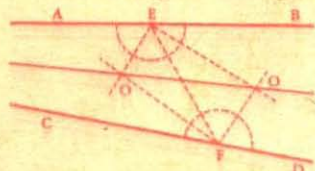


Fig. 108

Se traza una secante cualquiera EF, luego se determinan las bisectrices de los cuatro ángulos que tienen sus vértices en E y en F. Estas bisectrices se cortarán en O y en O', y la recta OO' será la bisectriz pedida.

En efecto, cada uno de los puntos O y O' equidista de los lados AB y CD, y por lo tanto pertenece a la bisectriz pedida (Nº 72).

142. Otro procedimiento. A una distancia cualquiera, pero igual, de las rectas AB y CD se trazan, paralelamente a ellas, las rectas MN y PQ que se cortan en O.

De igual modo se procede con otras dos rectas, M'N' y P'Q'; así resulta el punto O'. La recta OO' será la bisectriz pedida (Nº 72).

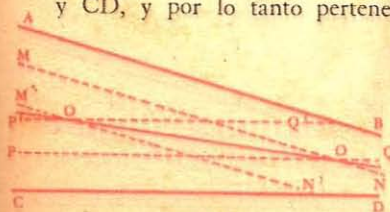


Fig. 109

CAPITULO II TRIANGULOS

143. Problema. *Construir un triángulo, conociendo dos lados a y b , y el ángulo comprendido, C .*

Primero se construye un ángulo C igual al ángulo dado; en los lados de este ángulo se señala la longitud CB igual a a , y CA igual



Fig. 110

a b , y trazando la línea AB se termina el triángulo pedido.

144. Problema. *Construir un triángulo, conociendo el lado a , y los dos ángulos adyacentes B y C .*

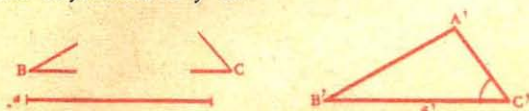


Fig. 111

Se traza una recta $B'C'$ igual al lado dado a ; se construye el ángulo B' igual a B , y C' igual a C ; así resulta el triángulo pedido.

NOTA. Para que sea posible el problema, la suma de los dos ángulos dados ha de ser menor que dos rectos.

145. Problema. *Construir un triángulo, conociendo los tres lados a , b , c .*

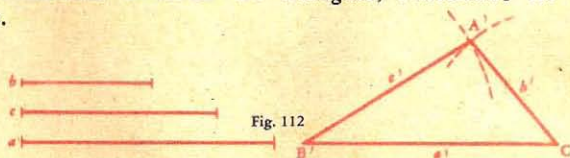


Fig. 112

Se traza una recta $B'C'$ igual a uno de los lados dados, c por ejemplo; y desde los puntos B' y C' , con radios respectivamente iguales a b y a c , se describen arcos que se corten en A' ; éste será el tercer vértice del triángulo.

NOTA. Para que sea posible el problema, se necesita que el lado mayor sea menor que la suma de los otros dos (N^o 59), y mayor que su diferencia.

146. Problema. *Construir un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa y un cateto.*



Dada la hipotenusa d' y el cateto f , para construir el triángulo rectángulo pedido, se traza un ángulo recto en D , y en cualquiera de los lados de este ángulo se señala la longitud DE igual al cateto dado f . Desde el punto E como centro, y con un radio igual a la longitud dada como hipotenusa, se

Fig. 113

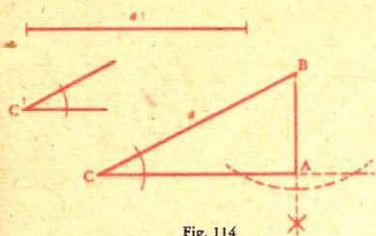


Fig. 114

En uno de sus lados se señala la longitud CB igual a la hipotenusa a , y desde el punto B se baja al otro lado la perpendicular BA. Así queda terminado el triángulo pedido ABC.

corta al otro lado en el punto F. Se traza en seguida el lado EF, y resulta el triángulo pedido DEF.

147. Problema. *Construir un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa y un ángulo agudo.*

Sea a la longitud de la hipotenusa, y C' uno de los ángulos agudos. Para resolver el problema, se construye un ángulo c igual al ángulo dado.

CAPITULO III POLIGONOS

§ I. — Construcción de cuadriláteros.

148. Problema. *Construir un cuadrado, conociendo su lado.*

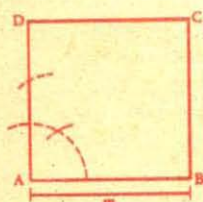


Fig. 115

Se traza una recta AB, igual al lado conocido m ; en el punto A se levanta una perpendicular AD también igual a m . Desde los puntos D y B, con una abertura de compás igual también a m , se describen arcos que se corten en C. Se trazan las rectas DC y BC, y resulta el cuadrado pedido ABCD.

Demostración. El cuadrilátero ABCD es un cuadrado.

En efecto, este cuadrilátero tiene sus lados iguales; luego es un rombo (Nº 99), y por consiguiente un paralelogramo; por lo tanto los ángulos opuestos son iguales (Nº 102). Siendo recto el ángulo A, el ángulo C lo será también.

El ángulo B es igual al ángulo D, y los dos juntos valen dos rectos. Luego el cuadrilátero ABCD es un cuadrado, por tener iguales los lados y rectos los ángulos.

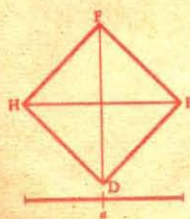


Fig. 116

149. Problema. *Construir un cuadrado, dada la diagonal.*

Sea a la diagonal dada. Para construir el cuadrado se trazan dos perpendiculares

indefinidas HE, FD. Desde el punto O donde se cortan, se señalan las longitudes OE, OF, OD, OH, iguales a la mitad de la diagonal dada. Uniendo los puntos D, E, F, H, resultará el cuadrado pedido, porque las diagonales iguales se cortan en ángulo recto y en partes iguales.

150. Problema. Construir un rectángulo, dadas sus dimensiones.

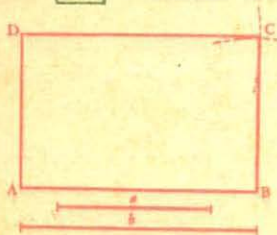


Fig. 117

Sean b y a la base y la altura de este rectángulo. Para resolver el problema, se construye en el punto A un ángulo recto, y se señala la distancia $AB = b$, y $AD = a$. Desde el punto B, como centro, y con un radio igual a a , y desde el punto D con un radio igual a b , se describen arcos que se corten en C; uniendo estos puntos resultará el rectángulo ABCD.

151. Problema. Construir un rectángulo, conociendo su diagonal y un lado.

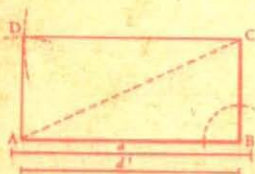


Fig. 118

Sea d la diagonal y a un lado del rectángulo. Para construirlo, se forma primero el triángulo rectángulo ABC cuya hipotenusa es $AC = d$, y el cateto $AB = a$. Luego se determina el punto D por medio de dos arcos descritos, el uno desde el punto C con un radio igual a AB , y el otro desde el punto A con un radio igual a BC ; se trazan las rectas AD y CD , y así queda construido el rectángulo.

152. Problema. Construir un paralelogramo, conociendo las dos diagonales y el ángulo que forman.

Sea N el ángulo formado por las dos diagonales a y b (fig. 119).

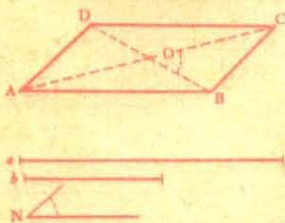


Fig. 119

Para construir este paralelogramo, se trazan dos rectas indefinidas que se corten en el punto O, formando un ángulo igual al dado. Se toma en seguida la mitad de la diagonal a , y haciendo centro en O, se determinan los puntos C y A; del propio modo se procede con la mitad de la diagonal b desde O hasta B y D; por último se juntan los puntos señalados. El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo, porque sus diagonales se cortan en sus mitades (Nº 109).

153. Problema. Construir un rombo, conociendo sus dos diagonales.

Para construir un rombo cuyas diagonales sean a y b (fig. 120), se trazan dos perpendiculares indefinidas AC y BD , y desde el punto O en que se cortan, se señalan las longitudes OB y OD , mitades de b , y las longitudes OA y OC , mitades de a ; juntando los puntos señalados, resulta el cuadrilátero ABCD que es un rombo, porque sus diagonales se cortan en ángulo recto y en partes iguales.

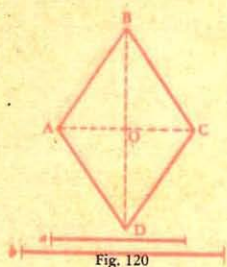


Fig. 120

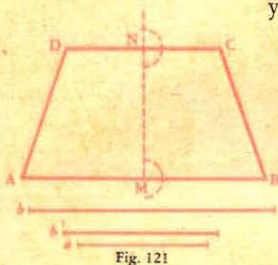


Fig. 121

• **154.** Problema. *Construir un trapecio isósceles, conociendo sus dos bases y la altura.*

Sean b y b' las bases dadas y a la altura (fig. 121). Para resolver el problema se traza la línea $MN = a$, y en los extremos M y N , se levantan dos perpendiculares AB y DC , sobre las cuales, desde los puntos M y N , se señala respectivamente la mitad de las bases b y b' , y se trazan los lados AD y BC .

Las rectas AB y CD son paralelas entre sí, por ser perpendiculares a la misma recta MN (Nº 77); luego el cuadrilátero es un trapecio.

Este trapecio es isósceles por ser la parte $MBCN$ simétrica de la parte $AMND$; por lo tanto, estas dos partes pueden coincidir, girando alrededor de MN .

APLICACIONES DE LOS CUADRILATEROS

155. Rectángulo. El rectángulo es el cuadrilátero de más uso; las puertas, las ventanas, las paredes, los pisos de los cuartos, los marcos, las hojas de un libro, etc., tienen forma rectangular.



Pared de ladrillos



Entarimado



Ventana

Cuadrado. El cuadrado se emplea en los enladrillados, en los cuarterones de las puertas, en los tablares de las huertas, etc.



Planto en cuadrado



Embaldosado



Entarimado a punta de Hungría

Paralelogramo. Se usa el paralelogramo en los pavimentos de madera, llamados *entarimado a punta de Hungría*, etc.

El rombo se emplea en el decorado, etc.

§ II. — Varios modos de copiar un polígono cualquiera.

156. 1er. Procedimiento. *Descomponiendo el polígono en triángulos.*

Para reproducir el polígono P (fig. 122) se le descompone en triángulos 1, 2, 3, 4, y se construye sucesivamente, y en el mismo or-

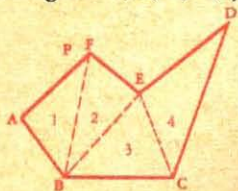
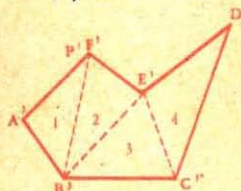


Fig. 122

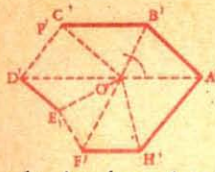


den, cada uno de estos triángulos, cuyos lados se conocen, resultando así el polígono P' igual al polígono dado.

157. 2º Procedimiento. *Por radiación.* Para copiar el polígono P (fig. 123) se toma un punto interior O, y se trazan radios desde dicho punto a todos los vértices del polígono.



Fig. 123



En un punto O' se construyen ángulos iguales a los ángulos del punto O, luego se señalan sucesivamente las longitudes $O'A' = OA$, $O'B' = OB$, etc.; por último se unen los puntos A', B', C', etc.

Los triángulos del polígono P' son iguales a los del polígono P, por tener un ángulo igual comprendido por lados respectivamente iguales.

Luego el polígono P' es igual al polígono P.

158. 3er. Procedimiento. *Por medio de trapecios y triángulos rectángulos.*

Se juntan con una recta AE (fig. 124) dos vértices opuestos, y desde cada uno de los demás vértices se bajan perpendiculares a esta

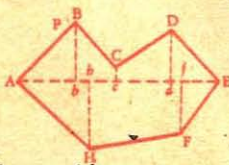
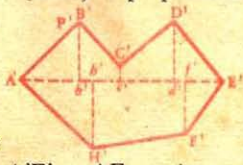


Fig. 124



recta. En seguida se traza una recta $A'E' = AE$, en la que se señalan las longitudes $A'b' = Ab$, $b'h' = bh$, etc. En los puntos b' , h' , c' , d' , f' , se levantan perpendiculares respectivamente iguales a las perpendiculares del polígono P. Se unen los extremos de dichas perpendiculares, y resulta el polígono P' igual al polígono P, por estar formado de triángulos y trapecios iguales respectivamente a los de dicho polígono.

159. 4º Procedimiento. *Por medio de paralelas iguales.* Desde cada vértice del polígono P (fig. 125) se trazan en la misma dirección, y en cualquier sentido que sea, rectas paralelas de igual longitud:

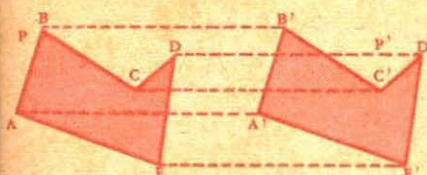


Fig. 125

$BB' = AA' = CC'$, etc.,
y se juntan los extremos de estas paralelas. El polígono obtenido P' es igual al polígono dado P por tener estos dos polígonos sus lados y ángulos respectivamente iguales.

En efecto: 1º siendo BB' y AA' iguales y paralelas, la figura $ABB'A'$ es un paralelogramo, y $AB = A'B'$; también $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, etc.

2º Los ángulos de estos polígonos son respectivamente iguales por tener paralelos sus lados (Nº 87).

160. NOTA. Para copiar una línea curva, se pueden señalar varios puntos en ella y considerarlos como vértices de un polígono. Luego se

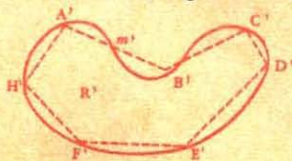


Fig. 126

construye un polígono igual, empleando cualquier procedimiento de los que acabamos de indicar, y se traza a pulso una curva que pase por los vértices de este polígono.

Es preciso señalar bien los puntos en que la curva corta a los lados del polígono.

EJERCICIOS

Ángulos

- ¿Cuál es la suma de los ángulos cuyos valores respectivos son:
1º $24^\circ 37'$, $19^\circ 13'$ y $27^\circ 43'$?
2º $17^\circ 25'$, $16^\circ 46'$ y $19^\circ 38'$?
3º $5^\circ 12'$, $8^\circ 39'$ y $21^\circ 53'$?
- ¿Cuál es la diferencia entre los ángulos cuyos valores respectivos son:
1º $54^\circ 27'$ y $19^\circ 13'$?
2º $45^\circ 52'$ y $31^\circ 57'$?
- ¿Cuál es el valor de un ángulo:
1º Qué es triple de otro de $18^\circ 13'$?
2º Qué vale cuatro veces un ángulo de $23^\circ 24'$?
3º Qué vale la quinta parte de otro de 89° ?

- 4º Qué vale la cuarta parte de otro de $107^{\circ} 25'$?
 5º Qué vale el tercio de un ángulo de $147^{\circ} 14' 22''$?
4. ¿Cuál es el complemento:
 1º Del ángulo de 27° ?
 2º Del ángulo de $37^{\circ} 44'$?
 3º del ángulo de $75^{\circ} 35'$?
5. ¿Cuál es el suplemento:
 1º Del ángulo de 43° ?
 2º Del ángulo de $125^{\circ} 47'$?
6. ¿Cuál es el suplemento de la suma de dos ángulos, de los cuales uno vale $22^{\circ} 35'$ y el otro $28^{\circ} 45' 5''$?
7. La suma de dos ángulos es $8^{\circ} 47' 22''$; su diferencia es $1^{\circ} 1' 1''$; ¿cuáles son estos dos ángulos?

Perpendiculares y oblicuas.

8. Dados dos puntos A y B fuera y a un mismo lado de una recta, hallar un punto de esta recta que equidiste de esos dos puntos.
9. Dados dos puntos A y B, fuera y a uno y otro lado de una recta, hallar sobre esta recta un punto equidistante de los dos puntos dados.
10. Dada una recta limitada AB, hallar, con sólo el compás, varios puntos que estén en la prolongación de dicha recta.
11. Dados dos puntos A y B fuera de una recta, hallar el camino menor que vaya desde A hasta B, y que pase por un punto de esa recta.
12. Dados dos puntos A y B fuera de una recta, a uno y otro lado de la misma, hallar en esta recta un punto tal que la diferencia de sus distancias a los puntos A y B sea la mayor posible.

Triángulos.

13. Dos ángulos de un triángulo tienen respectivamente $47^{\circ} 58'$ y $56^{\circ} 49'$; ¿cuál es el valor del tercero?
14. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de $51^{\circ} 17' 25''$; ¿cuál es el valor del otro ángulo agudo?
15. ¿Cuál es el valor de un ángulo de la base en un triángulo isósceles, si el ángulo del vértice vale $32^{\circ} 18'$?
16. En un triángulo uno de los ángulos tiene $24^{\circ} 25'$, y el segundo $96^{\circ} 2'$; ¿cuántos grados tendrá el ángulo exterior al tercero?
17. El ángulo en el vértice de un triángulo isósceles mide $22^{\circ} 22'$; ¿cuál es el valor del ángulo exterior formado por uno de los lados iguales y la prolongación de la base?
18. Construir un triángulo equilátero, conociendo:
 1º El lado;
 2º El perímetro;
 3º La altura.

19. Construir un triángulo isósceles, conociendo:
 - 1º La base y la altura;
 - 2º La base y un ángulo adyacente;
 - 3º La base y un lado;
 - 4º La base y el ángulo opuesto;
 - 5º El perímetro y la base;
 - 6º El perímetro y la altura;
 - 7º La altura y un ángulo;
 - 8º La altura y uno de los lados iguales;
 - 9º Un lado, la altura correspondiente y un ángulo adyacente a este lado.
20. Construir un triángulo rectángulo isósceles, conociendo:
 - 1º La hipotenusa;
 - 2º Un cateto;
 - 3º La altura;
 - 4º El perímetro.
21. Construir un triángulo rectángulo, conociendo:
 - 1º La hipotenusa y la altura correspondiente;
 - 2º La hipotenusa y un cateto;
 - 3º La hipotenusa y un ángulo agudo;
 - 4º La hipotenusa y la diferencia de los ángulos agudos;
 - 5º La hipotenusa y el punto de intersección de las medianas.
22. Construir un triángulo, conociendo:
 - 1º Dos medianas y el lado comprendido;
 - 2º Dos medianas y el lado adyacente;
 - 3º Una mediana y dos lados;
 - 4º Las tres medianas;
 - 5º Un lado y el punto de intersección de las medianas;
 - 6º La base, la altura correspondiente y el ángulo opuesto a la base;
 - 7º Un lado, el ángulo opuesto y una altura que no caiga sobre este lado;
 - 8º Un lado, un ángulo adyacente y la mediana que parte desde el extremo de la base en que no está el ángulo.
23. Construir un triángulo cualquiera, conociendo:
 - 1º La base y la altura que cae a los $\frac{2}{3}$ de dicha base;
 - 2º La base, la mediana y la altura que parten del mismo vértice;
 - 3º Las mitades de los tres lados;
 - 4º Dos lados y la altura relativa a uno de ellos;
 - 5º Dos lados y la altura relativa al tercero;
 - 6º El perímetro y los ángulos;
 - 7º Un lado, un ángulo adyacente y la suma o la diferencia de los otros lados.

Polígonos.

24. ¿Cuál es el lado de un rombo, si su perímetro es igual al de un triángulo equilátero cuyo lado tiene 12 m. de longitud?
25. Calcular la base y la altura de un rectángulo cuyo perímetro es igual a 60 m., siendo la altura los $\frac{2}{3}$ de la base.
26. Construir un paralelogramo, dados los dos lados y la diagonal. Aplicación, tomando para los lados 35 y 38 milím. y 42 para la diagonal.
27. Construir un paralelogramo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido. — Aplicación, tomando por lados 35 y 22 milím. y siendo el ángulo de 45° .
28. Construir un cuadrilátero, conociendo sus lados y una diagonal. — Aplicación tomando para los lados 30, 25, 40, 30 milím. y 35 para la diagonal que une el primer vértice con el tercero.
29. Construir un trapecio rectángulo conociendo la altura, la base mayor y el ángulo de esta base con uno de los lados no paralelos. — Aplicación, siendo las bases de 18 y 40 milím. y el ángulo de 45° .

Demostrar las siguientes proposiciones.

30. Todo punto de un ángulo, exterior a la bisectriz, dista desigualmente de los lados de este ángulo.
31. La altura de un triángulo es menor que la semisuma de los dos lados que parten desde el mismo vértice.
32. Una mediana de un triángulo es menor que la semisuma de los dos lados adyacentes.
33. La suma de las tres medianas de un triángulo está comprendida entre el perímetro y el semiperímetro del mismo.
34. Un triángulo en el que una recta es al mismo tiempo bisectriz y altura es isósceles.
35. Las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo concurren en el mismo punto.
36. La mediana trazada a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es la mitad de esta hipotenusa.
37. Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo que es la mitad del cuadrilátero dado.
38. En todo cuadrilátero, las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos se cortan en la mitad de la recta que une los puntos medios de las diagonales.
39. Las bisectrices interiores de un cuadrilátero determinan otro cuadrilátero cuyos ángulos opuestos son suplementarios.
40. En cada lado de un cuadrado se señala desde el vértice, y en el mismo sentido, igual longitud; luego se unen consecutivamente los puntos obtenidos. Demostrar que la figura que resulta es un cuadrado.
41. En todo triángulo, la mediana menor corresponde al lado mayor.

LIBRO II

CIRCUNFERENCIA

CAPITULO I

ARCOS Y CUERDAS

DEFINICIONES

161. *Circunferencia* es una curva cerrada y plana cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro.

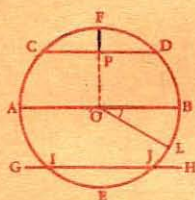


Fig. 127

Llábase *radio* a la línea recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia, v. gr.: OL.

Arco es una porción cualquiera de la circunferencia considerada aisladamente; como por ejemplo CFD, CED.

Cuerda es la recta que une dos puntos de la circunferencia, por ejemplo, CD.

La cuerda subtiende al arco que tiene los mismos extremos. Luego la cuerda CD subtiende a los arcos CFD y CED. Pero, en las demostraciones que van a continuación, consideraremos sólo el arco menor, a no ser que se indique lo contrario.

Llábase *sagita* a la perpendicular levantada en medio de una cuerda y que termina en el arco subtendido; v. gr.: PF.

Diámetro es una cuerda que pasa por el centro; por ejemplo, AOB.

Secante es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos; v. gr.: GH.

162. *Círculo* es la superficie plana limitada por la circunferencia.

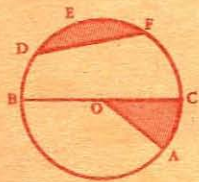


Fig. 128

Sector circular es la parte de círculo comprendida entre un arco y los dos radios que terminan en sus extremos; v. gr.: AOC.

Segmento de círculo es la parte de círculo comprendida entre un arco y su cuerda; v. gr.: DEF.

163. *Propiedades.* 1ª En un mismo círculo todos los radios, lo mismo que los diámetros, son iguales.

2ª Dos círculos que tienen el mismo radio son iguales, y recíprocamente.

3ª Una recta no puede cortar a una circunferencia en más de dos puntos.

Teorema.

164. El diámetro es la mayor cuerda del círculo.

En efecto, queda ya asentado (Nº 59) que

$$AO + OB > AB;$$

pero el diámetro $CD = AO + OB$.

Por lo tanto, $CD > AB$.

Luego, el diámetro es la mayor cuerda del círculo.

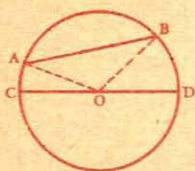


Fig. 129

Teorema.

165. En un mismo círculo o en círculos iguales:

1º Dos ángulos iguales en el centro comprenden arcos iguales;

2º A mayor ángulo en el centro corresponde mayor arco.

1º Sea $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$;

demostramos que arco $AC =$ arco DF .

Para ello, coloquemos el primer círculo sobre el segundo, de modo que el radio BA coincida con ED . El ángulo ABC coincidirá con su igual DEF y por consiguiente el arco AC con DF ; por lo tanto estos arcos son iguales.

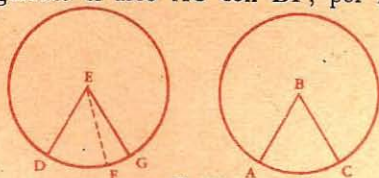


Fig. 130

2º Sea

$$\widehat{DEG} > \widehat{ABC};$$

demostramos que el arco DG es mayor que el arco AC .

Coloquemos el primer círculo sobre el segundo, de modo que AB coincida con ED . El ángulo ABC sólo ocupa una parte del ángulo DEG , y el arco AC una parte del arco DG ; de donde se deduce:

$$\text{arco } DG > \text{arco } AC.$$

Luego, en un mismo círculo...

166. Recíproco. En el mismo círculo o en círculos iguales:

1º A arcos iguales corresponden ángulos en el centro iguales;

2º A mayor arco corresponde mayor ángulo.

Teorema.

167. En un mismo círculo o en círculos iguales, arcos iguales son subdivididos por cuerdas iguales.

Sean los arcos iguales AMB y CND ; tracemos los radios OA , OB , OC y OD . Siendo iguales los arcos AMB y CND , también lo serán los ángulos en el centro, AOB y COD (Nº 166), y por lo tanto los triángulos AOB y COD son iguales por tener un ángulo igual comprendido por lados iguales, que son radios de un mismo círculo.

Luego $AB = CD$.

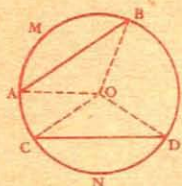


Fig. 131

168. Recíproco. En un mismo círculo o en círculos iguales, cuerdas iguales subtienden arcos iguales.

169. Corolarios. I. A mayor arco corresponde mayor cuerda;

II. A mayor cuerda corresponde mayor arco.

170. Advertencia. En los dos últimos teoremas, no nos referimos sino a arcos menores que la semicircunferencia, porque si un arco es mayor que la semicircunferencia su cuerda disminuye a medida que él aumenta.

Teorema.

171. Todo radio perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales, así como también al arco que ésta subtiende.

Sea el radio OD perpendicular a la cuerda AB; tracemos los radios OA y OB, y las cuerdas AD y DB.

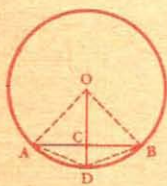


Fig. 132

1º Respecto de la recta AB, los radios OA y OB son oblicuas iguales, y por lo tanto equidistan del pie de la perpendicular (Nº 47, 2º); luego, $AC = BC$.

2º Las cuerdas DA y DB son iguales por apartarse igualmente del pie de la perpendicular (Nº 46, 2º), y por lo tanto subtienden arcos iguales (Nº 168) Luego, arco $AD =$ arco BD .

Del mismo modo se demostraría que el radio DO prolongado ha de pasar por el punto medio del arco mayor subtendido por la cuerda AB.

172. Escolio. El centro del círculo, el punto medio de la cuerda y los puntos medios de los dos arcos subtendidos están situados en el diámetro perpendicular a la cuerda; y toda recta determinada por dos cualesquiera de estos puntos, necesariamente pasará por los demás.

Por ejemplo: la perpendicular levantada en el punto medio de una cuerda, pasa por el centro del círculo y por el punto medio de los dos arcos correspondientes.

173. Corolario. Para dividir un arco en dos partes iguales, basta levantar una perpendicular en el punto medio de la cuerda que le subtiende.

Teorema.

174. Por tres puntos que no estén en línea recta, se puede hacer pasar una circunferencia.

Unamos de dos en dos los puntos A, B, C, levantemos ED perpendicular en el punto medio de AB, y FG en el punto medio de BC, y demostremos que O es el centro de la circunferencia pedida. En efecto, el punto O equidista de los puntos A y B, por estar sobre ED (Nº 49); también de los puntos B y C, por estar sobre FG. Por consiguiente las distancias OA, OB, OC, son iguales, y la circunferencia descrita desde el punto O como centro, con OA por radio, ha de pasar por A, B y C.

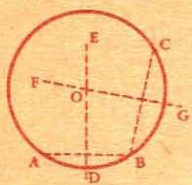


Fig. 133

Luego, por tres puntos...

175. Escolios. I. Dos circunferencias no pueden cortarse en más de dos puntos; pues coincidirían si tuvieran tres puntos comunes.

II. Para hallar el centro de un arco dado ABC (fig. 133), basta trazar dos cuerdas cualesquiera AB, BC, y levantar una perpendicular en sus mitades. El punto de intersección O será el centro del arco.

III. Si se describe una circunferencia que pase por los tres vértices de un triángulo, dicha circunferencia está *circunscrita* al triángulo y el triángulo está *inscrita* en la circunferencia.

Teorema.

176. En un mismo círculo o en círculos iguales, cuerdas iguales equidistan del centro.

Sean las cuerdas iguales AB y CD.

Tracemos OF y OE perpendiculares a estas cuerdas, y los radios OA y OC.

Los triángulos rectángulos OEA y OFC son iguales por tener iguales la hipotenusa y un cateto:

OA = OC, por ser radios;

AE = CF, por ser mitades de cuerdas iguales (Nº 171).

Luego, OE = OF

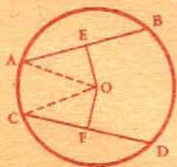


Fig. 134

177. Recíproco. En un mismo círculo o en círculos iguales, dos cuerdas equidistantes del centro son iguales.

178. Corolario. La cuerda que dista menos del centro es mayor que la que dista más.

CAPITULO II
TANGENTES

DEFINICIONES

179. Llámase *tangente* a la recta ilimitada que sólo tiene un punto común con la circunferencia. Este punto se llama *punto de contacto*, o de *tangencia*.

Cuando una recta es tangente a una circunferencia, la circunferencia lo es también a la recta.

180. Se puede considerar una tangente AB como el *límite* de las distintas posiciones de una secante DC al girar alrededor del punto C, cuando el segundo punto de intersección D llega a confundirse con el primero.

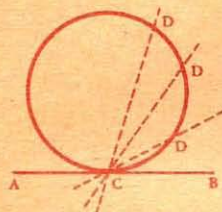


Fig. 135

181. Una recta es *normal* en un punto de una circunferencia, cuando es perpendicular a la tangente trazada en el mismo punto.

182. *Circunferencias tangentes* son las que sólo tienen un punto común que se llama de *contacto*.

Circunferencias secantes son las que se cortan.

Teorema.

183. *Toda perpendicular trazada en el extremo de un radio es tangente a la circunferencia.*

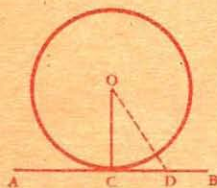


Fig. 136

Sea AB, perpendicular en el extremo del radio OC.

El radio OC es perpendicular a AB, y cualquier otra recta OD será oblicua, y por lo tanto mayor que OC; por consiguiente el punto D está fuera del círculo. Luego la recta AB no tiene más que el punto C común con la circunferencia, y por consiguiente le es tangente.

Luego, *toda perpendicular...*

184. **Recíproco.** *Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio trazado al punto de contacto.*

185. **Corolarios.** I. *Para trazar una recta tangente en un punto de una circunferencia, basta levantar una perpendicular en el extremo del radio que pase por este punto.*

II. *Para trazar una circunferencia tangente a una recta en un punto dado de ésta, basta levantar una perpendicular a la recta, en este punto. Esta perpendicular es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a la recta en el punto indicado.*

Teorema.

186. Los arcos de una misma circunferencia, comprendidos entre paralelas, son iguales.

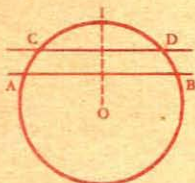


Fig. 137

Restando ordenadamente, tendremos:

$$\text{arco AC} = \text{arco BD}$$

Luego, los arcos...

Sean los arcos AC y BD, comprendidos entre las paralelas AB y CD.

Tracemos el radio OI perpendicular a AB, y por lo tanto a CD (Nº 81). El punto I es el punto medio del arco AIB como también del arco CID (Nº 171).

Por consiguiente:

$$\text{arco IA} = \text{arco IB}$$

$$\text{arco IC} = \text{arco ID}$$

Teorema.

187. Cuando dos circunferencias son secantes, la línea de los centros es perpendicular a la cuerda común, en su punto medio.

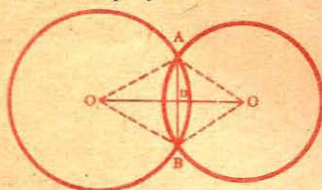


Fig. 138

El centro O equidista de los puntos A y B, así como también el centro O'. Luego los dos centros pertenecen a la perpendicular levantada en el punto medio D de la cuerda común AB (Nº 51).

Luego, cuando dos circunferencias...

188. Corolario. Cuando dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto está en la línea de los centros, o en su prolongación.

189. Escolios. I. Si dos circunferencias son exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de sus radios (fig. 139).

$$OO' > R + r.$$

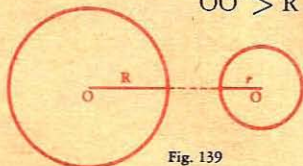


Fig. 139

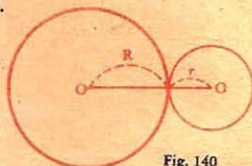


Fig. 140

II. Si dos circunferencias son tangentes exteriormente, la distancia de los centros, OO' , es igual a la suma de sus radios (fig. 140).

$$OO' = R + r.$$

III. Si dos circunferencias son secantes, la distancia de los centros es menor que la suma de sus radios y mayor que su diferencia.

Porque en este caso se puede construir un triángulo AOO' (fig. 138) con los radios y la línea de los centros.

$$R + r > OO' > R - r.$$

IV. Si dos circunferencias son tangentes interiormente, la distancia de los centros, OO' , es igual a la diferencia de sus radios (fig. 141).

$$OO' = R - r$$

V. Si dos circunferencias son interiores, la distancia de los centros



Fig. 141

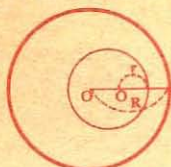


Fig. 142

es menor que la diferencia de sus radios (fig. 142): $OO' < R - r$.

CAPITULO III

MEDIDA DE LOS ANGULOS

DEFINICIONES

190. Medir un ángulo, es compararlo con otro que se toma por unidad. Para medir los ángulos, hay dos unidades principales: el ángulo recto y el ángulo de un grado.

Ángulo recto es, como queda dicho, el formado por dos rectas perpendiculares; este ángulo vale 90 grados (fig. 143).

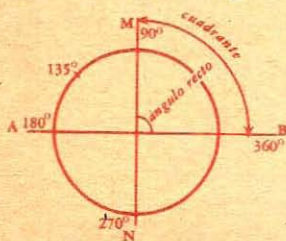


Fig. 143

El ángulo de un grado es la 90^{a} (nonagésima) parte de un ángulo recto.

La 60^{a} parte del ángulo de un grado se llama ángulo de un minuto, y la 60^{a} parte de este último, ángulo de un segundo.

Para designar un ángulo de 23 grados, 27 minutos, 25 segundos, se escribe $23^{\circ} 27' 25''$.

191. Medir un arco es compararlo con otro que se toma por unidad.

Para medir los arcos, se toma como unidad el cuadrante y el arco de un grado.

El cuadrante es un arco igual a la cuarta parte de la circunferencia (fig. 143).

El arco de un grado es la 90^{a} parte de un cuadrante o sea la 360^{a} parte de la circunferencia.

El arco de un grado (1°) se subdivide en 60 arcos iguales que se dicen de 1 minuto ($1'$); el arco de un minuto se subdivide en 60 arcos iguales que se llaman de 1 segundo ($1''$), etc.¹.

¹ Hoy día tiende a generalizarse el dividir la circunferencia en 400 partes iguales, llamadas *grados*; el grado lo subdividen según el sistema decimal.

192. Llámase *ángulo en el centro* o *ángulo central* al ángulo formado por dos radios; v. gr.: *ángulo* AOB (fig. 144).

Ángulo inscrito es el que, formado por dos cuerdas, tiene el vértice en la circunferencia. Por ejemplo, el ángulo CDE.

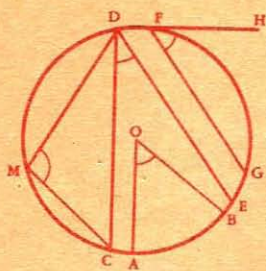


Fig. 144

Ángulo semi-inscrito o *del segmento*, es el que tiene su vértice en la circunferencia, y por lados una cuerda y una tangente; como por ejemplo el ángulo GFH (fig. 144).

Ángulo inscrito en un segmento es el que tiene su vértice en el arco de dicho segmento, pasando sus lados por las extremidades del arco, v. gr.: el ángulo CMD (fig. 144).

Teorema.

193. *La razón de dos ángulos es igual a la de sus arcos correspondientes, trazados con el mismo radio.*

Sean A y B dos ángulos cualesquiera; CD y EF los arcos comprendidos entre sus lados. Demostremos que: $\frac{\text{ángulo A}}{\text{ángulo B}} = \frac{\text{arco CD}}{\text{arco EF}}$

Para ello, supongamos que los dos arcos sean conmensurables y que la medida común esté contenida tres veces en el arco CD y cinco en el arco EF; la razón de los arcos será $\frac{3}{5}$ o $\frac{\text{arco CD}}{\text{arco EF}} = \frac{3}{5}$.

Trazando radios a los puntos de división de los arcos, el ángulo A resultará dividido en tres ángulos parciales y el ángulo B en cinco: todos estos ángulos son iguales (Nº 166).

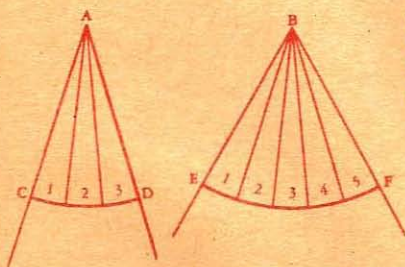


Fig. 145

Por consiguiente tendremos:

$$\frac{\text{ángulo A}}{\text{ángulo B}} = \frac{3}{5};$$

y por lo tanto:

$$\frac{\text{ángulo A}}{\text{ángulo B}} = \frac{\text{arco CD}}{\text{arco EF}}$$

en décimas, centésimas, etc. A veces dan el nombre de *minuto centesimal* a la centésima parte del grado. Se señala el grado por la letra γ (*gamma*) colocada como exponente, y el minuto centesimal por el acento ' colocado también como exponente. Así el arco $43^\gamma 15'$ se leera: 43 grados 15 minutos centesimales.

En esta obra, siempre que se trate de grados, entenderemos que se habla de la división antigua, que es todavía la más usada.

La demostración siempre es exacta, pudiendo dividirse los dos arcos en partes iguales tan pequeñas como se quiera.

194. Corolario. *La relación de un ángulo cualquiera con el ángulo unidad es igual a la de su arco correspondiente con su arco unidad.*

$$\frac{\text{ángulo CAD}}{\text{ángulo unidad}} = \frac{\text{arco CD}}{\text{arco unidad}}$$

$$\frac{\text{ángulo CAD}}{1} = \frac{\text{arco CD}}{1}$$

o

195. Escolio. *Todo ángulo tiene igual medida que su arco correspondiente.*

Por lo tanto, para medir un ángulo, se mide el arco correspondiente, trazado desde el vértice con un radio arbitrario.

Teorema.

196. *El ángulo inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Pueden ocurrir tres casos:

1º *Un lado del ángulo pasa por el centro del círculo.*

Sea el ángulo A (fig. 146); tracemos el radio OC.

El ángulo s , exterior al triángulo AOC, es igual a la suma de los ángulos interiores A, C, no adyacentes (Nº 95, I); pero estos dos

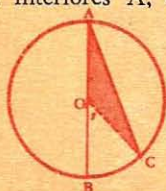


Fig. 146



Fig. 147

ángulos son iguales por ser isósceles el triángulo OAC; luego el ángulo s es el duplo del ángulo A. Siendo el arco BC la medida de aquel (Nº 195); la medida del ángulo A será la mitad del mismo.

2º *El centro se halla entre los lados del ángulo.*

Sea el ángulo BAC (fig. 147), tracemos el diámetro AD.

Tenemos: $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{CAD}$

pero $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BD}$ (1º)

y $\widehat{CAD} = \frac{1}{2} \widehat{DC}$

Luego $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BD} + \frac{1}{2} \widehat{DC}$, o sea $\frac{1}{2} \widehat{BC}$.

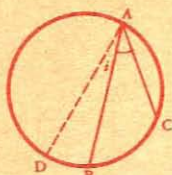


Fig. 148

3º El centro se halla fuera del ángulo.
Sea el ángulo BAC (fig. 148); tracemos el diámetro AD.

$$\text{Tenemos: } \widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB}$$

$$\text{pero } \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{DC}$$

$$\text{y } \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{DB}$$

$$\text{Luego } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{DC} - \frac{1}{2} \widehat{DB}, \text{ o sea } \frac{1}{2} \widehat{BC}.$$

197. Corolarios. I. Todos los ángulos inscritos en un mismo segmento son iguales. Así los ángulos BMC, B'N'C (fig. 149) inscritos en el mismo segmento BMC son iguales, pues cada uno tiene por medida la mitad del arco BNC.

II. Una cuerda BC, determinando dos segmentos BMC y BNC, los ángulos inscritos en uno de ellos son suplementos de los inscritos en el otro. Así los ángulos BMC y BNC son suplementarios, pues juntos tienen por medida la mitad de la circunferencia.



Fig. 149

Los arcos BMM'C y BNC son también suplementarios.

III. En un cuadrilátero inscrito, los ángulos opuestos son suplementarios, pues son ángulos inscritos que juntos tienen por medida una semicircunferencia.

Recíprocamente: todo cuadrilátero cuyos ángulos opuestos son suplementarios es inscriptible en una circunferencia.

IV. Todo ángulo inscrito en un semicírculo es recto, por ser su medida la mitad de la semicircunferencia, o sea un cuadrante.

Teorema.

198. El ángulo semi-inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.

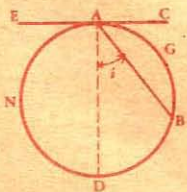


Fig. 150

Sea el ángulo BAC; tracemos el diámetro AD.

$$\text{Tenemos: } \widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB}.$$

Por ser recto,

$$\widehat{DAC} = \frac{\widehat{AGD}}{2}$$

$$\text{pero } \widehat{DAB} = \frac{BD}{2}$$

$$\text{por lo tanto, } \widehat{BAC} = \frac{ABD}{2} = \frac{BD}{2} = \frac{AGB}{2}.$$

Luego, el ángulo...

CAPITULO IV

POLIGONOS REGULARES

DEFINICIONES

199. *Polígono regular* es el que tiene sus lados y ángulos iguales; y *polígono irregular*, el que tiene los lados o los ángulos desiguales. El *triángulo equilátero* y el *cuadrado* son polígonos regulares.

200. Un polígono está *inscrita en una circunferencia* cuando todos sus vértices están en la misma; en cuyo caso la circunferencia está *circunscrita al polígono*.

Un polígono está *circunscrito a un círculo* cuando todos sus lados son tangentes a la circunferencia; en este caso el círculo está *inscrita en el polígono*.

201. *Línea quebrada regular* es una porción del perímetro de un polígono regular, comprendida entre dos vértices de dicho polígono.

Por ejemplo, la línea ABCD (fig. 151).

Sector poligonal regular es la superficie comprendida entre una línea quebrada regular y los radios del círculo circunscrito que terminan en sus extremos. Tal es el sector OABCD (fig. 151).

202. Llámase *centro de un polígono regular* al centro de la circunferencia circunscrita a dicho polígono.

Radio de un polígono regular inscrito, es el radio de la circunferencia circunscrita a dicho polígono, v. gr.: OB (fig. 151).

Apotema es la perpendicular bajada desde el centro a los lados del polígono; v. gr.: a (fig. 151). El apotema del polígono es también el radio de la circunferencia inscrita.

203. *Ángulo en el centro* de un polígono regular es el ángulo formado por los radios trazados a los extremos de un mismo lado.

Si n representa el número de lados del polígono regular, el valor del ángulo en el centro será:

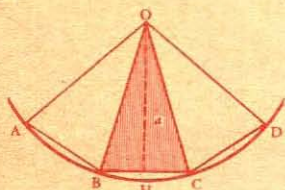


Fig. 151

4 rectos

 n

Llámanse *ángulo de un polígono regular* al ángulo formado por dos lados consecutivos; su valor se encuentra por medio de la fórmula

$$\text{siguiente: } \frac{2 \text{ rectos } (n - 2)}{n} \quad (\text{N}^\circ 97).$$

Teorema.

204. Las cuerdas que unen consecutivamente los puntos de división de una circunferencia dividida en partes iguales, forman un polígono regular inscrito.

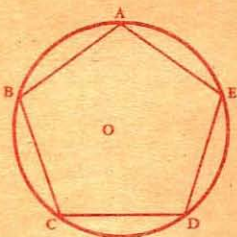


Fig. 152

Sea, por ejemplo, una circunferencia O dividida en 5 partes iguales. Los lados AB, BC, CD... son iguales, por ser iguales los arcos que subtienden (Nº 167); además, los ángulos A, B, C, ... son iguales como ángulos inscritos que interceptan arcos iguales: luego el polígono ABCDE es regular.

Teorema.

205. A todo polígono regular se puede circunscribir una circunferencia.

Sea ABCDE un polígono regular.

Hagamos pasar una circunferencia por los tres puntos A, B, C, (Nº 174), y demostremos que dicha circunferencia pasará por los demás vértices. Tracemos OA y OD, y luego OH perpendicular a la cuerda BC; supongamos que el cuadrilátero OHBA gira alrededor de OH para aplicarse sobre el cuadrilátero OHCD.

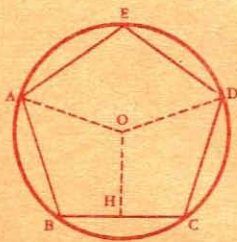


Fig. 153

Siendo H el punto medio de la cuerda BC (Nº 171), y rectos los ángulos en dicho punto, el lado HB coincidirá con HC; el lado BA tomará la dirección CD por ser iguales los ángulos B y C, y el punto A caerá en D.

Luego, la circunferencia trazada con OA por radio, que ya pasa por los tres puntos A, B, C, ha de pasar también por el vértice D:

Del mismo modo se demostraría que esa circunferencia ha de pasar por el vértice E.

Luego, a todo polígono...

206. Corolario. En todo polígono regular se puede inscribir una circunferencia.

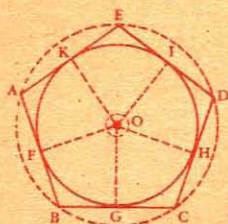


Fig. 154

Respecto del círculo circunscrito, los lados AB, BC, CD... son cuerdas iguales que equidistan del centro (Nº 176); luego las perpendiculares OF, OG, OH... son iguales; por consiguiente, la circunferencia trazada con OF por radio pasará por los puntos G, H, I... y los lados AB, BC, CD, etc., serán tangentes a dicha circunferencia, por ser perpendiculares en los extremos de los radios OF, OG, OH...

Luego, la circunferencia está inscrita en el polígono.

Teorema.

207. El lado del exágono regular inscrito en un círculo es igual al radio de dicho círculo

Sea AB el lado del exágono regular inscrito.

Tracemos los radios OA y OB, y consideremos el triángulo AOB.

$$\widehat{AOB} = \frac{4 \text{ rectos}}{6} \text{ o sea } 60^\circ;$$

luego la suma de los otros dos ángulos A y B valdrá:

$$180 - 60 = 120^\circ$$

Pero los ángulos A y B son iguales, por ser isósceles el triángulo AOB; luego cada uno tiene

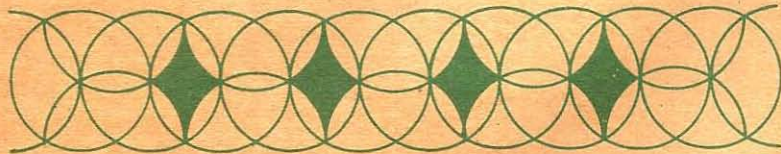
$$\frac{120}{2}, \text{ o sea } 60^\circ.$$



Fig. 155

Siendo iguales los ángulos A, B, O, el triángulo ABO es equiángulo, y por consiguiente equilátero.

Luego $AB = OA$.



APLICACIONES

CAPITULO I

PERPENDICULARES, OBLICUAS Y ANGULOS

§ I. — Perpendiculares.

208. Problema. *Levantar una perpendicular en un punto dado de una recta.*

1er. Método. Desde el punto dado A (fig. 156) como centro, se describe un arco con un radio arbitrario, y con él se señala la misma medida desde B hasta C, luego desde C hasta D y E; por fin, desde D se corta al arco en E. Se traza la recta AE, que será la perpendicular pedida.

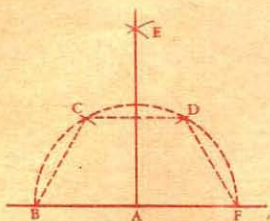


Fig. 156

En efecto, la cuerda CD es paralela a AB, porque siendo CD la tercera parte de una semicircunferencia (Nº 207), hay arcos iguales a cada lado de C y D; luego CD y BF son paralelas (Nº 186). Pero los puntos E y A equidistan de C y D; luego EA es perpendicular a CD (Nº 51), y por consiguiente a su paralela BF (Nº 81).

209. 2º Método. Para levantar una perpendicular en el punto

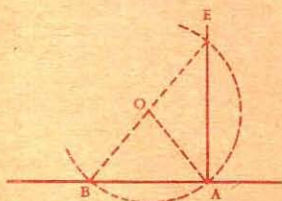


Fig. 157

A (fig. 157) se describe desde un punto cualquiera O, y con un radio igual a OA, un arco mayor que una semicircunferencia, que corte a la línea dada en un punto B; se traza el diámetro BOE. Uniendo el punto E con A, tendremos AE perpendicular a AB, pues el ángulo BAE es recto como inscrito en una semicircunferencia (Nº 197).

210. 3er. Método. Para levantar una perpendicular en el extremo A de una recta (fig. 158), se describe, desde este punto como centro, el arco BC con un radio cualquiera, y con él se señala esta misma medida desde B hasta C y desde C hasta D. Se traza en

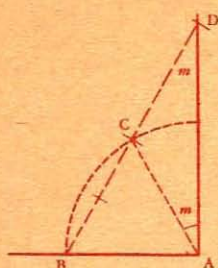


Fig. 158

seguida la recta BCD que corte al arco en D, juntando este punto con A, resultará la perpendicular pedida DA.

Para demostrarlo, tracemos AC.

El triángulo ABC es equilátero, e isósceles el triángulo ACD. El ángulo ACD, suplemento del ángulo ACB, vale: $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

La suma de los ángulos iguales m y m' es igual a $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$; por lo tanto el ángulo m vale 30° , y el ángulo total A vale

$$60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$

Luego AD es perpendicular a AB.

211. Problema. Desde un punto exterior a una recta, bajar una perpendicular a esta recta.

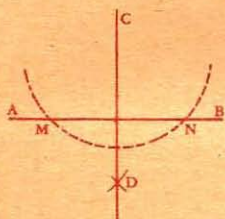


Fig. 159

Para bajar desde el punto C una perpendicular a la recta AB (fig. 159), haciendo centro en dicho punto, se describe un arco que corte a la recta en dos puntos M y N. Desde estos puntos y con el mismo radio se describen arcos que se corten en D. Se traza la línea CD y ésta será perpendicular en el punto medio de MN (Nº 51).

§ II. — Paralelas.

212. Problema. Trazar por un punto dado fuera de una recta, y con ayuda del compás, una paralela a esta recta.

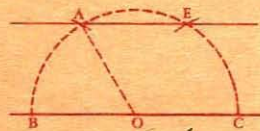


Fig. 160

1er. Método. Para trazar por el punto A una paralela a BC, se describe desde cualquier punto de la recta BC, O por ejemplo, una semicircunferencia con un radio igual a OA. Se toma en seguida con el compás la distancia BA, que se señala desde C hasta E, y se traza la recta AE, que

es la paralela pedida, pues siendo iguales los arcos BA y CE, las rectas que los determinan son paralelas (Nº 186).

213. 2º Método. Para trazar por el punto M una paralela a la recta EF, desde un punto cualquiera F, tomado en la recta dada, y con la distancia FM como radio, se describe el arco ME. Con el mismo radio, y desde el punto M, se describe el arco FN igual a EM.



Fig. 161

Se traza después la recta MN que será la paralela pedida.

En efecto, los ángulos a y b son alternos internos, y además son iguales por ser ángulos del centro que tienen la misma medida. Luego, las

rectas EF y MN son paralelas (Nº 85).

- 214.** 3er. Método. Con una abertura de compás igual a la distancia que ha de haber entre las dos paralelas, y desde los puntos m y n , elegidos arbitrariamente sobre AB , se describen los arcos C y D . Se coloca en seguida la regla tangente a estos arcos, y se traza la recta CD que es la paralela pedida.



Fig. 162

- 215.** Problema. Por un punto dado fuera de una recta, trazar otra recta que forme, con la primera, un ángulo dado.

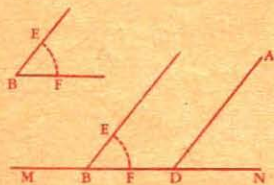


Fig. 163

Se desea trazar, desde el punto A , una recta AD que forme con la dada MN un ángulo igual al ángulo B . En un punto cualquiera B' de la recta MN , se construye un ángulo $E'B'F'$ igual al ángulo dado B . En seguida, por el punto dado A se traza AD' paralela a $E'B'$. Tenemos:

$$\widehat{ADN} = \widehat{E'B'F'} = \widehat{EBF}.$$

§ III. — Ángulos.

- 216.** Magnitud de los ángulos. Con el cuadrante de un reloj es fácil darse idea exacta de la magnitud de los ángulos.

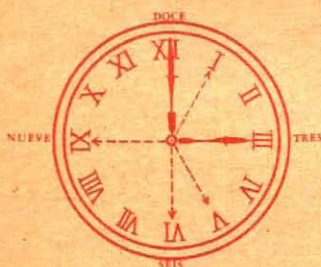


Fig. 164

A la una, el ángulo formado por las dos agujas es agudo; a las tres, recto, a las cinco, obtuso. A las seis, el ángulo vale dos rectos, por estar las agujas en línea recta; a las nueve, vale tres ángulos rectos si contamos siempre en la misma dirección.

- 217.** Problema. En un punto dado D de una recta DE (fig. 165) construir un ángulo igual a otro ángulo dado A .

Con el compás. Desde los puntos A y D como centros, y con el mismo radio, se describen los arcos BC y EF ; luego, desde el punto E con una abertura de compás igual a la distancia BC se corta al arco EF y se traza la recta DF . El ángulo D será igual al ángulo A ,

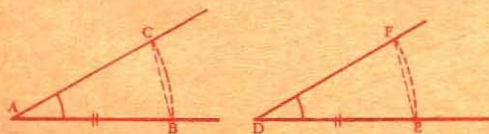


Fig. 165

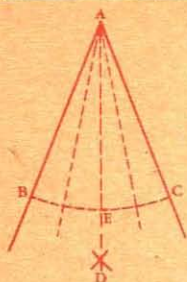


Fig. 166

porque tiene por medida el arco EF igual al arco BC (Nº 166).

218. Problema. *Dividir un ángulo en 2, 4, 8, 16 partes iguales.*

Trazando la bisectriz AD, el ángulo queda dividido en dos partes iguales, y al trazar la bisectriz de estas mitades resultará dividido en cuatro partes iguales y así sucesivamente.

219. Problema. *Construir un ángulo igual a la suma de otros dos ángulos dados.*

Para construir un ángulo igual a la suma de los ángulos A y B (fig. 167) se procede como en el número 217, formando un ángulo $a = A$ y otro ángulo $b = B$, adyacente al anterior.

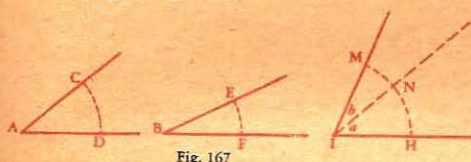


Fig. 167

El ángulo total MIH será igual a la suma de los ángulos dados A y B.

220. Problema. *Construir un ángulo igual a la diferencia de otros dos ángulos dados.*

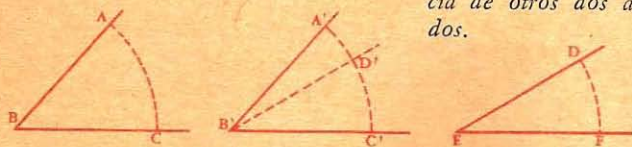


Fig. 168

Para construir un ángulo igual a la diferencia de los ángulos B y E (fig. 168), se procede como en el Nº 217, y desde el punto C' se señala el arco C'A' igual a CA, y desde el punto A' el arco A'D' igual a DF. El ángulo D'B'C' será igual a la diferencia de los ángulos dados B y E.

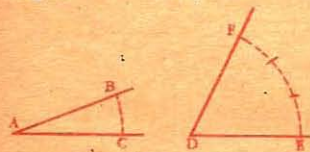


Fig. 169

221. Problema. *Construir un ángulo que sea el triple de otro ángulo dado.*

Para construir un ángulo triple del ángulo A (fig. 169) se procede como en el Nº 217, señalando tres veces el arco CB desde E. El ángulo

EDF es tres veces mayor que el ángulo A, puesto que el arco EF es tres veces mayor que el arco BC (Nº 195).

CAPITULO II

ARCOS, CUERDAS Y TANGENTES

§ I. — Tangentes.

222. Problema. *Por un punto dado en una circunferencia, trazar una tangente a dicha circunferencia.*

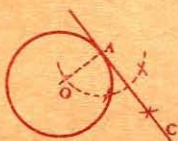


Fig. 170

Para trazar una tangente en el punto A, se traza el radio OA y se levanta la perpendicular AC en su extremo. Esta recta es tangente a la circunferencia, por ser perpendicular en el extremo del radio OA (N^o 183).

223. Problema. *Trazar una tangente a una circunferencia de modo que sea paralela a una recta dada.*

Para trazar una tangente a la circunferencia O, y paralela a la recta MN, se baja a esta recta desde el centro, la perpendicular OC.

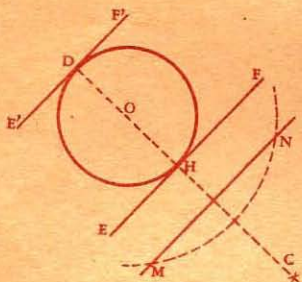


Fig. 171

Por los puntos H y D, en que la perpendicular corta a la circunferencia, se trazan las rectas EF y E'F', perpendiculares a DC.

Las rectas MN, EF y E'F' son paralelas por ser perpendiculares a la misma recta DC. Además, EF y E'F', por ser perpendiculares en los extremos de los radios OH y OD, son tangentes a la circunferencia.

224. Problema. *Desde un punto exterior a una circunferencia, trazar una tangente a esta circunferencia.*

Para trazar desde el punto A una tangente a la circunferencia O, se une dicho punto con el centro de la circunferencia; se levanta una perpendicular en el punto medio de OA, y desde el punto C, con CO por radio, se describe una circunferencia que cortará a la primera en B y D.

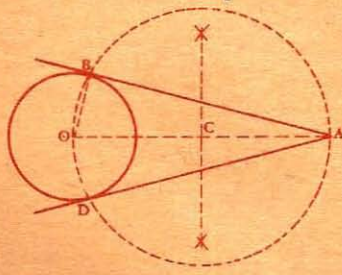


Fig. 172

Desde el punto A se trazan las rectas AB y AD, que serán las tangentes pedidas.

En efecto, el ángulo ABO es recto como inscrito en una semicircunferencia (N^o 197). Luego la recta AB es perpendicular en el extremo del

radio OB, y por consiguiente tangente a la circunferencia (Nº 183). El problema tiene dos soluciones, pues lo mismo ocurre con la recta AD.

NOTA. En la práctica, se coloca la regla de modo que pase por el punto A, y al mismo tiempo sea tangente a la circunferencia; luego se traza la recta AB que será la tangente pedida.

225. Escolio. Dos tangentes a la misma circunferencia, que parten desde el mismo punto son iguales. Siendo iguales los triángulos AOB y AOD (fig. 172), resulta que $AB = AD$.

226. Problema. Trazar las tangentes comunes a dos circunferencias.

1º Exteriormente. Desde el centro O de la circunferencia mayor, y con un radio igual a la diferencia de los radios de las dos circunferencias dadas, se describe una circunferencia auxiliar (fig. 173), a la cual se trazan desde el centro C las tangentes también auxiliares CD y CE (Nº 224).

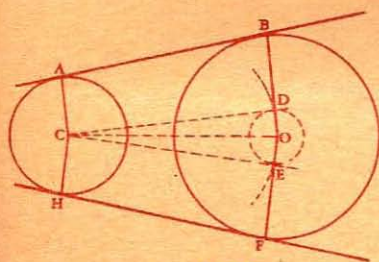


Fig. 173

Luego se trazan OB y OF, pasando por los puntos D y E; después se traza el radio CA paralelo a OB, y CH paralelo a OF; por último se trazan las rectas AB y FH que serán las tangentes pedidas.

En efecto, las rectas AC y BD son iguales y paralelas por construcción; luego la figura ABDC es un paralelogramo (Nº 106). La recta CD, perpendicular a BD, lo es también a AC, y su paralela AB será perpendicular a las mismas rectas, esto es, a los radios CA y OB, en sus extremos; luego AB es tangente a ambas circunferencias. Lo mismo sucede con la recta HF.

2º Interiormente. Desde el centro C, y con un radio CD igual a la suma de los radios de las circunferencias dadas, se describe una circunferencia auxiliar (fig. 174); desde el punto O se trazan OD y OF, tangentes a esta circunferencia, y CD y CF, que determinan los puntos de contacto A e I. En seguida se traza BO paralela a CD, y OH paralela a CF, que determinan los otros dos puntos de contacto H y B.

Las rectas AB y HI son las tangentes pedidas (La demostración es análoga a la que precede).

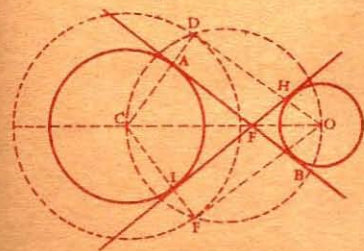


Fig. 174

El correaje de las máquinas es una aplicación de las tangentes comunes. Cuando las ruedas han de moverse en el mismo sentido (fig. A), las correas son tangentes exteriormente; y lo son interiormente cuando se mueven en sentido contrario (fig. B).



Fig. 175

§ II. — Enlace de líneas.

227. El enlace de las líneas tiene por objeto unir líneas rectas con curvas o curvas entre sí; de modo que haya tal sucesión de continuidad entre ambas, que una aparezca como prolongación de la otra; por lo tanto, para que dos líneas se puedan enlazar, es preciso que sean tangentes entre sí en el punto de unión. El enlace de líneas se funda en los dos principios siguientes:

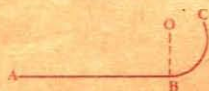


Fig. 176



Fig. 177

1º Un arco se enlaza con una recta (fig. 176), cuando el centro del arco se halla en la perpendicular levantada a la recta, en el punto de contacto (Nº 184).

2º Dos arcos de círculo se enlazan (fig. 177), cuando sus centros y el punto de contacto están en una misma recta (Nº 188).

228. Problema. Enlazar una recta dada CD con un arco que ha de pasar por un punto dado A.

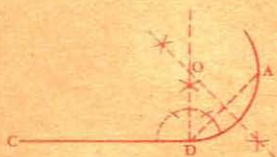


Fig. 178

El centro del arco ha de hallarse al mismo tiempo en la perpendicular levantada en el punto medio de AD (Nº 172), y en OD (1er. principio), esto es en el punto O. Luego con OD por radio se trazará el arco DA.

229. Problema. Enlazar un arco dado con otro que pase por un punto determinado.

Sea ANB el arco dado (fig. 179) con el cual se quiere enlazar otro que pase por el punto C.

La recta AC es una cuerda del arco pedido. El centro de éste tiene que hallarse a la vez en la perpendicular levantada en medio

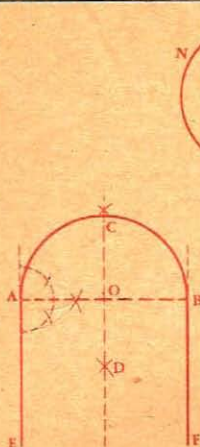


Fig. 180

Hay enlace, porque las rectas AE y BF son perpendiculares a los radios OA y OB.

231. Problema. *Por medio de un arco, enlazar dos rectas convergentes, conociendo uno de los puntos de enlace.*

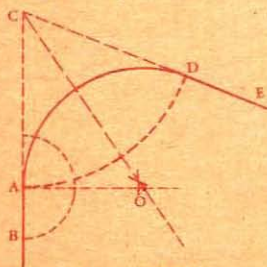
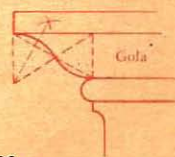
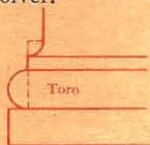


Fig. 181

Sea A el punto dado (fig. 181), desde donde se ha de trazar el arco de enlace de las dos rectas. Prolónguese ambas hasta que se encuentren en C, y trácese la bisectriz CO, desde el punto C como centro, y con un radio igual a CA, trácese el arco AD. En el punto A levántese AO perpendicular a CA. El centro ha de estar en AO y CO, o sea en O, único punto común a estas dos rectas.

232. Las molduras, en arquitectura, son aplicaciones de los problemas que acabamos de resolver.



§ III. — Enlace por medio de varios arcos.

233. Problema. *Enlazar dos rectas paralelas, conocidos los puntos de contacto.*

Ier. Procedimiento. Sean las paralelas AE y BD, y los puntos de contacto A y B (fig. 182). Levántese las perpendiculares AH y BO; prolónguese DB hasta encontrar a AH; tómese HF igual a HB, y en

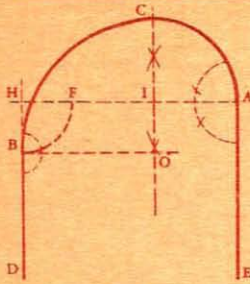


Fig. 182

la mitad de FA levántese la perpendicular CO.

Los puntos O e I serán los centros de los arcos, y C será el punto de enlace de los mismos.

La circunferencia trazada desde O y con OC por radio pasará por el punto B si tenemos $OC = OB$. En efecto,

$$OC = OI + IC,$$

$$OB = IH = IF + HF;$$

$$OI = BH \text{ o } FH.$$

$$AF$$

$$IC = \frac{\text{---}}{2} \text{ o } IF.$$

Luego, $OC = OB$.

En arquitectura llámase esta figura *arco por tranquil* (fig. 184).

234. 2º Procedimiento. Sean las rectas paralelas CD y FA (fig. 183) que han de enlazarse en los puntos A y D.

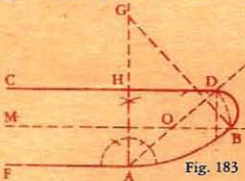


Fig. 183

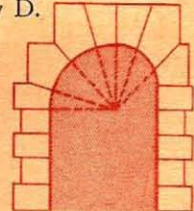


Fig. 184

Arco por tranquil

Se levantan las perpendiculares AG y DI en las extremidades de dichas rectas, y MB perpendicular en la mitad de AH; en seguida

se junta A con D, y con un radio igual a OD, se traza el arco interior DB. Desde el punto B se baja sobre AD la perpendicular BIG; el punto I en que esta línea corta a la perpendicular levantada sobre CD será el centro del arco exterior DB, y el punto G será el centro del arco AB.

Demostración. Equidistando la recta MB de AF y de CD, el punto O es la mitad de AD; luego $OA = OD = OB$. Si se une A con B, resulta isósceles el triángulo AOB, y por consiguiente iguales los ángulos OAB y OBA.

Los ángulos GAD y GBM son también iguales por tener los lados respectivamente perpendiculares; luego, en el triángulo BAG, los ángulos de la base AB son iguales, y por consiguiente

$$AG = BG.$$

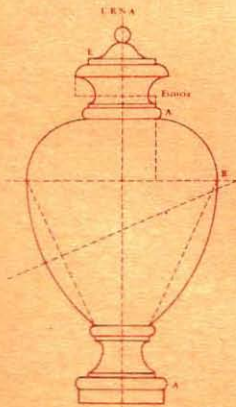


Fig. 185

Este dibujo es como el resumen de todos los problemas de enlace que acabamos de estudiar.

Por construcción, el triángulo BOD es isósceles y los ángulos adyacentes a la base BD son iguales. Los ángulos ODI y OBI son iguales por tener los lados respectivamente perpendiculares. Por lo tanto, en el triángulo BID los ángulos adyacentes a la base BD son iguales; de donde se infiere que este triángulo es isósceles, y por consiguiente $BI = ID$.

Luego el arco descrito desde G por centro y con AG por radio pasará por el punto B, y el arco descrito desde I por centro e IB por radio pasará por el punto D. Hay enlace porque la línea de los centros pasa por el punto de contacto B.

Para trazar la *escocia* (fig. 185) puede emplearse indistintamente el primer procedimiento o el segundo.

§ IV. — Figuras curvilíneas.

235. Como aplicación de los problemas de enlace, estudiaremos las figuras curvilíneas siguientes: el *ovoide*, el *óvalo*, el *arco apainado*, la *elipse*, y la *espiral*.

236. Ovoide es una curva cerrada, más ancha por un extremo que por el otro y de forma muy parecida a la de un huevo.

237. Problema. *Sobre una recta dada AB (fig. 186) como diámetro, construir un ovoide.*

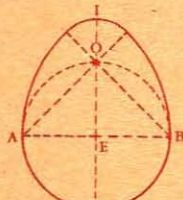


Fig. 186

Se levanta la perpendicular indefinida EO en el punto medio de AB, y desde el punto E se describe una circunferencia; en seguida se trazan las rectas AOG y BOF.

Desde los puntos A y B, y con AB por radio, se describen los arcos BG y AF. Por último, desde el punto O se describe el arco FIG.

Habrà enlace si tenemos $FO = OG$.

En efecto, $BF = AG = AB$, y $AO = BO$, porque el punto O pertenece a la perpendicular levantada en la mitad de AB.

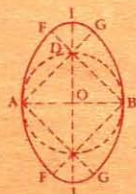


Fig. 187

Si de AG y BF se restan las cantidades iguales AO y BO, las diferencias OF y OG serán iguales.

Además se ve que los centros de los arcos y los puntos de contacto están en línea recta.

NOTA. Para construir el doble ovoide (fig. 187), a cada lado del diámetro AB se hace una construcción idéntica a la anterior.

238. Ovalo es una figura curvilínea limitada por cuatro arcos de círculo dispuestos simétricamente respecto a dos ejes perpendiculares.

239. Problema. *Sobre una recta dada AB como eje mayor (fig. 188), trazar un óvalo.*

Se describen dos circunferencias que tengan por radio la tercera parte de la línea dada AB, y por centros los puntos C y D, que dividen a AB en tres partes iguales. Se trazan las rectas PCE, PDF, ICG, IDH, que determinan los puntos de enlace de los arcos EAG, FBH, EF, GH, cuyos centros están en los puntos C, D, P, I.

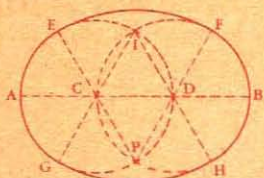


Fig. 188

Claro está que los arcos se enlazarán, hallándose en línea recta los centros y los puntos de enlace.

240. Problema. *Trazar un óvalo tangente a los lados de un rombo.*

Se levantan perpendiculares en la mitad de los lados del rombo (fig. 189), las cuales se cortan en las diagonales. Los puntos de encuentro son los centros de los arcos; y la mitad de los lados, los puntos en que se juntan dichos arcos.

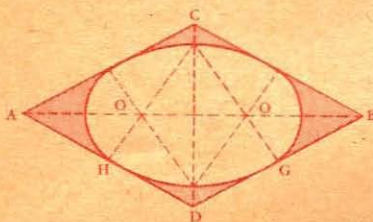


Fig. 189

hay también de 5, 7, 9, 11 arcos, siendo siempre impar el número de arcos de círculo.

AA' se llama abertura o ancho del arco, y BO sagita del mismo.

242. Problema. *Trazar un arco apainelado de tres centros, conociendo la abertura y la sagita.*

Sea AA' lo ancho y OB lo alto del arco (fig. 190).

En la mitad de AA' se levanta una perpendicular sobre la cual se señala la altura OB; se trazan las rectas AB y A'B', y con un radio igual a OB, se traza desde O como centro el arco GB.

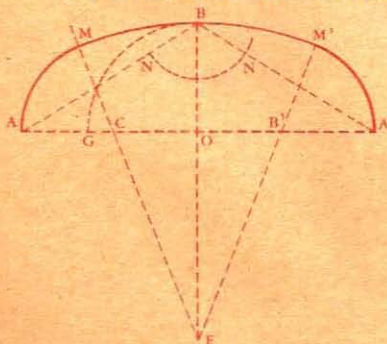


Fig. 190

Desde el punto B como centro y con un radio igual a AG, se traza el arco NN'; en seguida se levantan en la mitad de AN y A'N', las perpendiculares MC y M'B' que se cortan en el punto E. Desde los puntos C y B' como centros, se describen los arcos AM y A'M', y desde el punto E, el arco MBM', que completará la figura.

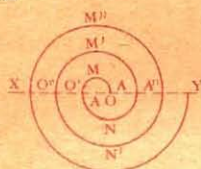
243. Elipse. Es una curva plana y cerrada en la que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos a otros dos fijos llamados focos, y situados en su plano, es constante (Véase N^o 578).

244. Espira o línea espiral (fig. 191) es la curva que, sin cerrar el círculo, va dando vueltas en forma de caracol.

245. Problema. *Construir una espiral.*

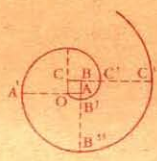
Hay espirales de 2, 3, 4, 5... centros.

Para construir una espiral de dos centros (fig. 191), se traza una línea ilimitada XY, y con AO por radio se describe una semicircunferencia; en seguida, se van describiendo otras semicircunferencias que se unan entre sí, tomando sucesivamente por centros los puntos A y O.



Espiral de 2 centros A, O

Fig. 191



de 4 centros A, B, C, O

Fig. 192

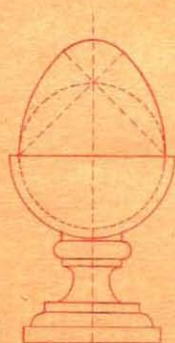


de 5 centros A, B, C, D, O

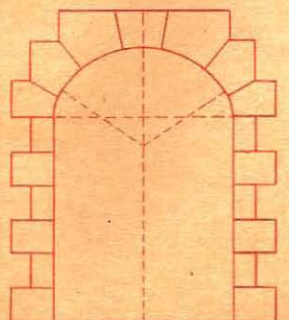
Fig. 193

Para construir una espiral de más de dos centros se traza un polígono regular cualquiera, y se prolongan en un mismo sentido todos sus lados (fig. 192 y 193). Luego se toma sucesivamente cada vértice del polígono como centro de los distintos arcos, cuyos radios van aumentando cada vez de una longitud igual al lado del polígono. Es de notar que cada arco llega hasta la prolongación del lado contiguo. Dos arcos consecutivos tienen sus centros y el punto de enlace en línea recta.

He aquí varias aplicaciones de las figuras curvilíneas.



Bellota para ornamento (Ovoide)



Bóveda de arco apuntado



Rejas de hierro forjado (espiral)

CAPITULO III

POLIGONOS REGULARES

246. Problema. *Hallar el valor del ángulo de un polígono regular.*

El valor del ángulo de un polígono regular se halla dividiendo la suma de todos sus ángulos por el número de lados.

Siendo n el número de lados, la fórmula que da el valor de un ángulo es la siguiente:

$$\frac{2 \text{ rect. } (n-2)}{n} \quad (\text{N}^\circ 203).$$

El ángulo del octógono regular, por ejemplo, es igual a $\frac{12 \text{ rectos}}{8} = \frac{3}{2}$ de recto, o sea 135° .

247. Problema. *Hallar el valor del ángulo en el centro de un polígono regular.*

La fórmula general es $\frac{4 \text{ rectos}}{n}$.

El ángulo en el centro del octógono regular, por ejemplo, es igual a $\frac{4 \text{ rectos}}{8} = \frac{1}{2}$ de recto, o sea 45° .

248. Problema. *Determinar el centro de un polígono regular.*

1º Si el polígono tiene número par de lados, se juntan primero dos vértices opuestos; luego otros dos vértices también opuestos; el punto de intersección de las dos diagonales es el centro del polígono (fig. 194, 1).



Fig. 194

2º Si el polígono tiene número impar de lados, se junta el vértice de un ángulo con la mitad del lado opuesto, y en seguida, otro vértice con la mitad del lado opuesto; la intersección de las dos rectas es el centro del polígono (fig. 194, 2).

3º Sea par o no el número de lados de un polígono, también se pueden levantar perpendiculares en la mitad de dos lados no paralelos, y el punto en que se corten es el centro del polígono.

División de la circunferencia en partes iguales
y construcción de polígonos regulares.

249. Para construir un polígono regular, basta dividir la circunferencia en partes iguales y unir consecutivamente los puntos de división.

250. Problema. *Dividir una circunferencia en 2, 4, 8, 16... partes iguales y construir un cuadrado, un octógono regular, etc.*

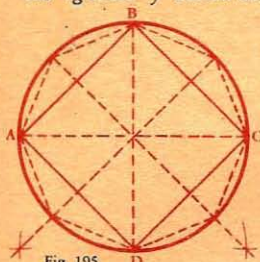


Fig. 195

Para dividir una circunferencia en 2 partes iguales, basta trazar un diámetro.

Para dividirla en 4, se trazan dos diámetros perpendiculares AC y BD (fig 195).

Se unen consecutivamente los puntos de división y el polígono ABCD que resulta es un cuadrado.

Dividiendo cada cuadrante en 2 partes iguales, la circunferencia queda dividida en 8 partes, y el polígono que resulta uniendo sucesivamente los puntos de división será el octógono regular, etc.

251. Problema. *Dividir una circunferencia en 6, 12, 24 partes iguales y construir el exágono regular, el dodecágono, etc.*

Para dividir una circunferencia en seis partes iguales se señala seis veces el radio sobre la circunferencia (fig. 196), porque el lado del exágono regular inscrito es igual al radio de la circunferencia circunscrita (Nº 207).

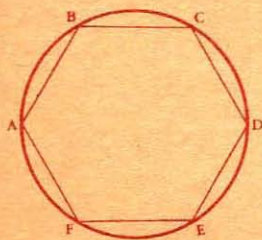


Fig. 196

Si se dividen los arcos AB, BC..., en dos partes iguales, la circunferencia resultará dividida en 12 partes iguales, y uniendo los puntos de división, se obtendrá el dodecágono regular, y así sucesivamente.

NOTA. Para construir el triángulo equilátero inscrito, se juntan de dos en dos los vértices del exágono regular inscrito.

252. Problema. *Dividir una circunferencia en 5, 10, 15 partes iguales y construir un pentágono regular, un decágono, etc.*

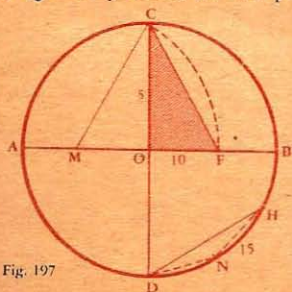


Fig. 197

1º Se trazan dos diámetros perpendiculares AB y CD (fig. 197) Desde el punto M, mitad de OA, como centro, y con MC por radio, se describe el arco CF, y se traza la recta CF; resulta así un triángulo rectángulo CFO, en el cual CF es el lado del pentágono regular inscrito, y OF el lado del decágono regular.

2º Si desde el punto D se señala DN igual a OF, y DH igual al radio del círculo, el arco NH será la 15ª parte de la circunferencia.

[253.] Problema. *Dividir una circunferencia en siete partes iguales.*

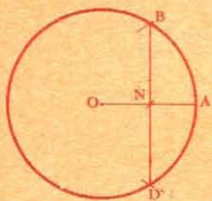


Fig. 198

Se traza el radio OA (fig. 198), y desde el punto A, con AO por radio, se corta la circunferencia en B y D, y uniendo estos puntos, la línea BN será, con aproximación, el lado del eptágono regular¹.

[254.] Problema. *Dividir una circunferencia en cualquier número de partes iguales, en nueve por ejemplo.*

1er. Procedimiento. *Con el graduador* (fig. 199).

Como la 9ª parte de 360º es 40º, se construyen sucesivamente alrededor del centro O, ángulos de 40º. Los arcos correspondientes a estos ángulos iguales son iguales.

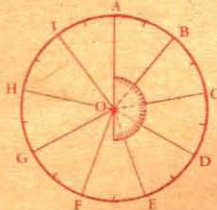


Fig. 199

[255.] 2º Procedimiento. *Por tanteo.* Es el procedimiento más seguido en la práctica. Se busca aproximadamente una abertura de compás que de con exactitud la división pedida; pero como esto es bastante engorroso, el procedimiento 3º es muy conveniente para facilitar el tanteo.

[256.] 3er. Procedimiento. Se traza el diámetro AB (fig. 200), y se divide el radio en tantas partes iguales cuantas se desea obtener.

Desde los puntos A y B, con un radio igual a AB, se trazan los arcos AD y BD.

Se junta el punto D, con la cuarta división del radio, contada desde el centro, y se prolonga la recta hasta la circunferencia. El arco GE representa en este caso la séptima parte de la circunferencia.

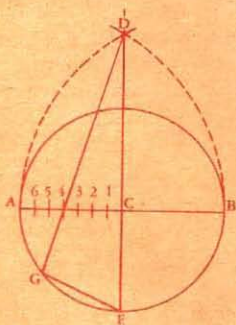


Fig. 200

NOTA. Para dividir una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales, se procede del mismo modo, dividiendo el radio en tantas cuantas sean las partes en que se quiera dividir la circunferencia, y se traza la línea DG, siempre por la cuarta divi-

¹ Esta construcción manifiesta que el lado del eptágono regular inscrito puede ser considerado como si fuese la mitad del lado del triángulo equilátero inscrito.

sión. Este procedimiento ofrece en la práctica una aproximación suficiente.

• **[257.]** Problema. *Construir un polígono regular conociendo el número de lados, y la longitud de uno de ellos.*

Supongamos que se quiera construir un pentágono regular de un centímetro de lado.

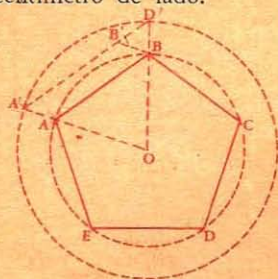


Fig. 201

En efecto, siendo A'D' el lado del pentágono regular inscrito en la circunferencia OA', el ángulo A'OD' valdrá $\frac{1}{5}$ de 4 rectos; luego

AB será al lado del pentágono regular inscrito en el círculo AO, por corresponder a un mismo ángulo central.

• **[258.]** Aplicaciones. La combinación de polígonos regulares entre sí tiene mucha aplicación en las artes.

Los *embaldosados*, por ejemplo, se hacen ordinariamente por el conjunto de polígonos regulares. Para que pueda cubrirse un plano con polígonos regulares de la misma clase, es necesario que el ángulo del polígono esté contenido exactamente 4 ángulos rectos. El triángulo equilátero, el cuadrado, el exágono regular son los únicos polígonos regulares que satisfacen esta condición.

El ángulo del triángulo equilátero vale 60° ;

— cuadrado — 90° ;

— exágono — 120° .

Luego para cubrir una superficie plana:

Con triángulos equiláteros, se unirán seis ángulos alrededor de cada vértice (fig. 202);



Con triángulos equiláteros

Fig. 202



Con cuadrados

Fig. 203



Con exágonos

Fig. 204

Con cuadrados, se unirán cuatro ángulos (fig. 203);

Con exágonos, se unirán tres ángulos (fig. 204).

Si los polígonos dados son de dos especies, pueden hacerse las siguientes combinaciones:

Con octógonos y cuadrados, uniendo en cada vértice dos ángulos del octógono y uno del cuadrado (fig. 205);

Con exágonos y triángulos, uniendo dos ángulos de cada clase, etc.



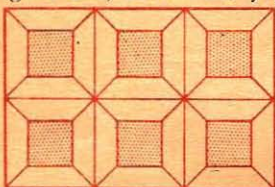
Cuadrados y octógonos Fig. 205



Exágonos y rombos Fig. 206

También se puede embalsosar con polígonos irregulares.

La figura 206, por ejemplo, representa una combinación de exágonos y rombos; la figura 207, de cuadrados y trapecios isósceles; la figura 208, de rombos y paralelogramos.



Cuadrados y trapecios isósceles

Fig. 207



Rombos y paralelogramos

Fig. 208

Polígonos estrellados.

[259.] Llámase *polígono estrellado* a todo polígono cuyos ángulos son alternativamente salientes y entrantes, y cuyos lados constituyen una línea quebrada, continua y cerrada. El polígono $AnDmBsEbCp$ (fig. 209) es un polígono estrellado.

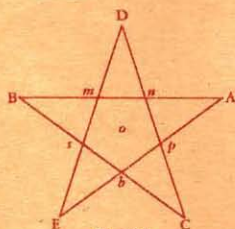


Fig. 209

El polígono estrellado es regular cuando tiene iguales sus lados y sus ángulos salientes.

Dividiendo una circunferencia en 5 partes iguales, y uniendo de 3 en 3 los puntos de división, resultará el pentágono regular estrellado (fig. 209).

Dividiéndola en 8 partes iguales, y uniendo también de 3 en 3 los puntos de división, resultará el octógono regular estrellado (fig. 210).

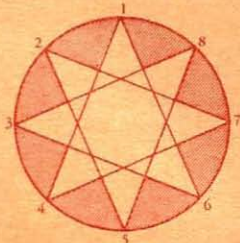


Fig. 210

Con 10 divisiones se obtendrá el decágono regular estrellado, uniendo de 3 en 3 los puntos de división.

Con 15 divisiones, resultarán 3 polígonos regulares estrellados; el primero, juntando de dos en dos las divisiones, el segundo de 4 en 4, y el tercero, uniéndolas de 7 en 7.

EJERCICIOS

42. Con un radio dado, describir una circunferencia tangente a dos rectas dadas.
43. Con un radio dado, describir una circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia dadas.
44. Con un radio dado, describir una circunferencia tangente a dos circunferencias dadas.
45. Con la regla y el compás construir un ángulo:
- 1º de 45° ;
 - 2º de $67^\circ \frac{1}{2}$;
 - 3º de 135° ;
 - 4º de $112^\circ \frac{1}{2}$.
46. Dada una circunferencia y en ella un ángulo inscrito, construir un ángulo central cuyo valor sea doble.
47. Dado un ángulo central, construir en la misma circunferencia un ángulo inscrito que tenga igual valor.
48. Dado un círculo, construir en él un ángulo central, luego un ángulo semi-inscrito que valga la mitad, y otro ángulo semi-inscrito de igual valor.
49. Dado un ángulo inscrito, construir un ángulo semi-inscrito igual.
50. Dada una recta de cualquier longitud, construir sobre ella como hipotenusa un triángulo rectángulo.
51. ¿Cuál es el valor de un ángulo inscrito cuyos lados comprenden los $\frac{2}{9}$ de la circunferencia?
52. Determinar con el graduador el valor de un ángulo inscrito en un círculo de 20 milímetros de radio, y cuyos lados tienen cada uno 35 milímetros.
53. En un círculo de 20 milímetros de radio, un ángulo semi-inscrito tiene por lado una cuerda de 20 milímetros; determinar por medio del graduador el valor de este ángulo.
54. Por un punto B dado en un diámetro AC, trazar una cuerda DBE, de manera que el arco CE sea el triple del arco AD.
55. Construir un cuadrado, conociendo la suma del lado y de la diagonal.
56. Construir un cuadrado, conociendo la diferencia entre la diagonal y el lado.
57. Construir un triángulo, conociendo la base, el ángulo opuesto y la altura que parte del vértice de dicho ángulo.
58. La suma de los ángulos interiores de un polígono regular vale 68 ángulos rectos; ¿cuál es el valor del ángulo central de este polígono?

59. En un dodecágono ¿cuál es el valor:
 1º Del ángulo central;
 2º De un ángulo interior del polígono;
 3º De un ángulo exterior?
60. Un polígono regular tiene 36 lados: ¿cuál es el valor de un ángulo interior de este polígono?
61. Un ángulo exterior de un polígono regular es igual a 12° ; ¿cuántos lados tiene este polígono?
62. La suma de los ángulos centrales, de los exteriores y de los interiores de un polígono regular, vale 1260° ; ¿qué polígono es éste?
63. ¿Por qué, para embaldosar un pavimento, se pueden emplear simultáneamente el dodecágono regular y el triángulo equilátero?

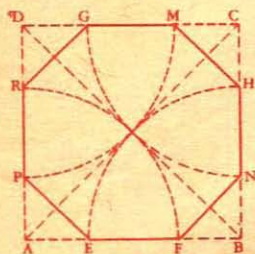
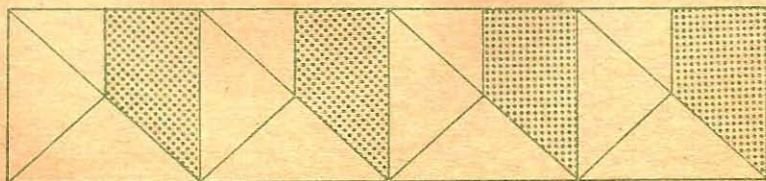


Fig. 1

64. ¿Cuál es el valor del ángulo exterior de un polígono regular de 9 lados? Deducir el valor del ángulo interior del polígono.
65. Con la regla y el compás construir ángulos de 60° , 15° , 30° , 105° , 75° , 108° , 54° , 69°
66. Si desde los vértices de un cuadrado ABCD (fig. 1*) se describen cuadrantes de circunferencia, con un radio igual a la mitad de la diagonal, y se unen de dos en dos esos puntos; demostrar que la figura EFNHMGRP es un octógono regular.
67. Hallar un punto desde el cual se vean bajo el mismo ángulo los tres lados de un triángulo.
68. Demostrar que un ángulo, cuyo vértice se halla entre el centro y la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados, más la mitad del arco comprendido entre la prolongación de los mismos.
69. Demostrar que un ángulo que tiene su vértice fuera de la circunferencia, y cuyos lados son dos secantes, tiene por medida la mitad de la diferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.
70. Demostrar que dos cuerdas iguales que se cortan en el mismo círculo son las diagonales de un trapecio isósceles.
71. Demostrar que todo paralelogramo inscrito en un círculo es un rectángulo, y las diagonales son diámetros.



LIBRO III

FIGURAS SEMEJANTES

CAPITULO I

LINEAS PROPORCIONALES

DEFINICIONES

260. Dos líneas son *proporcionales* a otras dos, cuando la razón o relación de las dos primeras es igual a la razón de las otras dos.

Razón de dos líneas, es la relación en que están los números que expresan la longitud de dichas líneas medidas con la misma unidad.

261. Una línea es *media proporcional* entre otras dos cuando constituye los dos términos medios, o los dos extremos de una proporción.

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}, \text{ o } \frac{h}{m} = \frac{n}{h}.$$

Cada una de las otras líneas m , n , se llama *tercera proporcional*.

El *cuadrado de la media proporcional* es igual al producto de las otras dos cantidades:

$$h^2 = mn.$$

Luego, la *media proporcional es una línea cuyo cuadrado puede decirse que equivale al rectángulo que tiene por dimensiones las otras dos líneas*.

Cuarta proporcional es una línea cualquiera de las cuatro que forman una proporción.

Teorema.

262. Las rectas paralelas que determinan segmentos iguales en una secante dada, determinan segmentos también iguales en cualquier otra secante.

Sean AB , CD , etc., rectas paralelas que determinan segmentos iguales en la recta AG : $AC = CE = EG$. Demostremos que $BD = DF = FH$.

Para ello tracemos AL , CM , EN , paralelas a BH ; estas rectas son iguales respectivamente a los segmentos BD , DF , FH , como lados opuestos de paralelogramos.

Además,

$$\widehat{CAL} = \widehat{ECM} = \widehat{GEN},$$

por correspondientes,

y
$$\widehat{ACL} = \widehat{CEM} = \widehat{EGN},$$

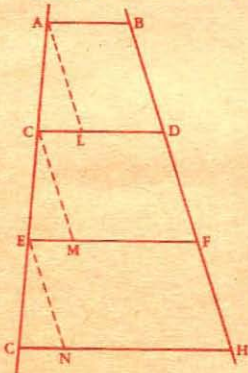


Fig. 211

por la misma razón.

Luego los triángulos ACL, CEM, EGN son iguales, por tener un lado igual adyacente a dos ángulos respectivamente iguales; por consiguiente,

$$AL = CM = EN$$

y por lo tanto,

$$BD = DF = FH.$$

Luego, las rectas paralelas...

Teorema.

263. Toda recta trazada paralelamente a un lado de un triángulo, divide a los otros dos en partes directamente proporcionales

Sea un triángulo cualquiera ABC y DE paralela al lado BC.

Tenemos que demostrar que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Supongamos que los segmentos AD y DB tengan una medida común contenida 7 veces en AD, y 3 en DB; la razón de estos dos segmentos será:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{7}{3}.$$

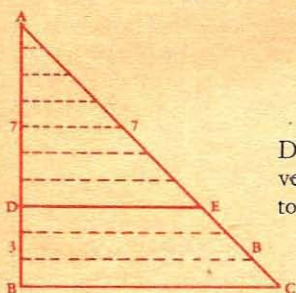


Fig. 212

Si, por los puntos de división trazamos paralelas a BC, la recta AC quedará dividida en 10 partes iguales (Nº 262), de las cuales 7 están contenidas en AE, y 3 en EC;

luego

$$\frac{AE}{EC} = \frac{7}{3}$$

y por consiguiente

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

El teorema siempre será verdadero, por pequeña que sea la medida común.

264. Comparando cada segmento con el lado entero, tendremos:

$$1^{\circ} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

por ser cada razón igual a $\frac{7}{10}$;

$$2^{\circ} \quad \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC},$$

por ser cada razón igual a $\frac{3}{10}$.

265. Recíproco. Toda recta que divide en partes proporcionales dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado.

Sea la recta DE que divide en partes proporcionales los dos lados AB y AC del triángulo ABC.

Supongamos que DE no sea paralela a BC, y tracemos DF de modo que lo sea; tendremos (Nº 264):

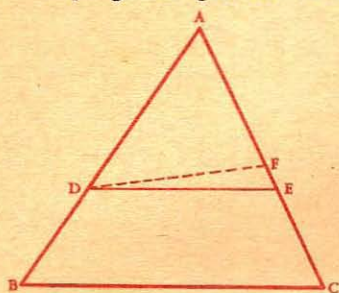


Fig. 213

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

pero, por hipótesis tenemos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

de donde:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AC}.$$

Siendo iguales los denominadores, los numeradores han de serlo también:

$$AF = AE.$$

De lo que se infiere que los puntos F y E han de confundirse, y por lo tanto se confundirán también las rectas DF y DE.

Luego, toda recta...

Teorema.

266. La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales a los lados adyacentes.

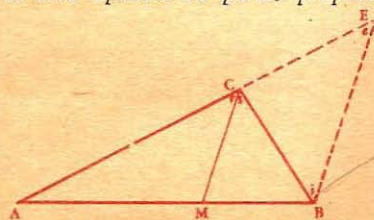


Fig. 214

Sea ABC un triángulo cualquiera, y CM la bisectriz del ángulo C.

Demostremos que:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}.$$

Para ello prolonguemos AC y tracemos BE paralela a MC.

Tenemos: $\widehat{e} = \widehat{r}$ por correspondientes.
 $\widehat{r} = \widehat{s}$ " hipótesis.
 $\widehat{s} = \widehat{i}$ " alternos internos.

Luego, $\widehat{e} = \widehat{i}$; por consiguiente, el triángulo BCE es isósceles, y $CB = CE$.

Las paralelas BE y MC dan la proporción:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CE}$$

Sustituyendo CE por su igual CB, tendremos:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}$$

Luego, la bisectriz..

267. Recíproco. Toda recta que, partiendo de un vértice de un triángulo, divide al lado opuesto en partes proporcionales a los lados adyacentes, es bisectriz de dicho ángulo.

CAPITULO II

TRIANGULOS SEMEJANTES

DEFINICIONES

268. Polígonos semejantes son los que tienen los ángulos respectivamente iguales y los lados homólogos proporcionales.

En las figuras semejantes, se llama *lados homólogos* a los adyacentes a ángulos respectivamente iguales; de donde resulta que en los triángulos semejantes los lados homólogos se oponen a los ángulos iguales.

Con relación a dos polígonos semejantes, se llaman *puntos homólogos*, a los situados en el plano de esos polígonos, y que si se unen con los extremos de lados homólogos, dan lugar a triángulos semejantes; *rectas homólogas* son las que unen puntos homólogos.

269. Llámase *razón de semejanza* a la razón constante de dos líneas homólogas.

Teorema.

270. Toda recta trazada paralelamente a un lado de un triángulo determina otro triángulo semejante al propuesto.

Sea ABC un triángulo cualquiera y DE paralela al lado BC.

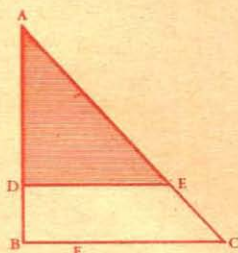


Fig. 215

Demostremos que los triángulos ADE y ABC son semejantes, esto es, que tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos proporcionales. Tracemos DF paralela a AC.

La figura DECF es un paralelogramo; por lo tanto $DE = FC$.

Los dos triángulos ABC y ADE tienen sus ángulos iguales:

$\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ y $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ por correspondientes.

Dichos triángulos tienen sus lados homólogos proporcionales, porque, siendo BC y DE paralelas, resulta:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (\text{N}^\circ 263).$$

Siendo AC y DF paralelas, tendremos también:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{FC \text{ o } DE}{BC}$$

y por consiguiente:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Luego los dos triángulos ABC y ADE son semejantes por tener los ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales.

Teorema.

271. Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.

Sean los triángulos ABC y DEF que tienen

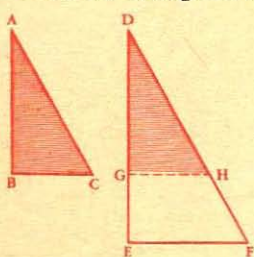


Fig. 216

pero,
luego,

$$\frac{DEF}{ABC} = \frac{DGH}{DGH}.$$

$$\begin{aligned} \widehat{BAC} &= \widehat{EDF} \\ \widehat{ABC} &= \widehat{DEF} \end{aligned}$$

En el lado DE, tomemos DG igual a AB, y tracemos GH paralela a EF. El triángulo DGH es semejante al triángulo DEF (Nº 270); luego, basta demostrar la igualdad de los triángulos ABC y DGH.

Por hipótesis ya tenemos:

$$\widehat{BAC} = \widehat{EDF} \text{ y } \widehat{ABC} = \widehat{DEF};$$

por correspondientes;

Por lo tanto, los triángulos ABC y DGH son iguales por tener un lado igual ($AB = DG$), adyacente a dos ángulos respectivamente iguales; y por consiguiente son semejantes los triángulos ABC y DEF.

272. Corolario. Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen un ángulo agudo igual.

273. Escolio. De que dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, dedúcese que los tres ángulos son respectivamente iguales.

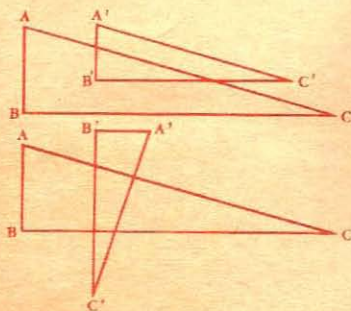


Fig. 217

Luego, el teorema anterior podría enunciarse del modo siguiente:

Dos triángulos son semejantes cuando tienen los tres ángulos respectivamente iguales.

[274.] Corolario. *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son semejantes.*

Porque en ambos casos los triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente iguales (Nos. 87 y 88).

Teorema.

[275.] *Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual comprendido por lados proporcionales.*

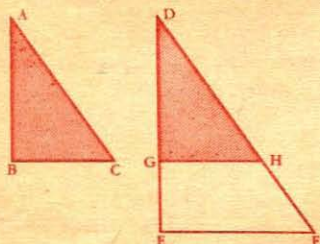


Fig. 218

Sean los triángulos ABC y DEF en los cuales da el supuesto:

$$\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$$

$$\frac{AB}{AC}$$

y

$$\frac{DE}{DF}$$

En el lado DE, tomemos $DG = AB$, y tracemos GH paralela a EF.

Siendo semejantes los triángulos DGH y DEF (Nº 270), basta demostrar la igualdad de los triángulos ABC y DGH.

De la semejanza de los triángulos DGH y DEF resulta:

$$\frac{DG \text{ o } AB}{DE} = \frac{DH}{DF}$$

Como esta proporción y la del supuesto tienen iguales las primeras razones, las segundas han de serlo también:

$$\frac{AC}{DF} = \frac{DH}{DF};$$

y como tienen el mismo denominador, se infiere que los numeradores son iguales:

$$AC = DH.$$

Luego los triángulos ABC y DGH son iguales por tener un ángulo igual ($\widehat{BAC} = \widehat{GDH}$), comprendido por lados respectivamente iguales, y por lo tanto son semejantes los triángulos ABC y DEF.

Luego, *dos triángulos son semejantes...*

Teorema.

[276.] *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados homólogos proporcionales.*

Sean los triángulos ABC y DEF en los cuales tenemos por hipótesis:

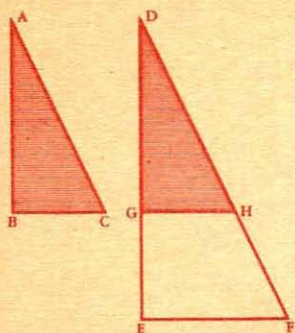


Fig. 219

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

En el lado DE tomemos $DG = AB$, y tracemos GH paralela a EF .

Siendo semejantes los triángulos DGH y DEF (N^o 270), basta demostrar la igualdad de los triángulos ABC y DGH .

De la semejanza de los triángulos DGH y DEF , se deduce:

$$\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF} = \frac{GH}{EF}$$

Pero $DG = AB$; luego, de estas tres razones la primera es la misma que la primera de las tres del supuesto; por lo tanto, las demás serán iguales:

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{DH}{DF} = \frac{GH}{EF}$$

y como los denominadores son respectivamente iguales, los numeradores han de serlo también:

$$AC = DH \text{ y } BC = GH.$$

Luego, los triángulos ABC y DGH son iguales, por tener sus tres lados respectivamente iguales, y por lo tanto son semejantes los triángulos ABC y DEF .

Teorema.

277. Las paralelas cortadas por varias secantes que pasan por un mismo punto quedan divididas en segmentos proporcionales.

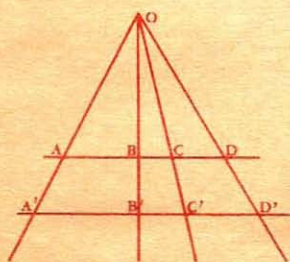


Fig. 220

Sean AD y $A'D'$ dos paralelas cortadas por OA' , OB' , etc.

La figura consta de seis triángulos semejantes de dos en dos, a saber:

- 1^o OAB y $OA'B'$;
- 2^o OBC y $OB'C'$;
- 3^o OCD y $OC'D'$.

Estos tres grupos de triángulos semejantes dan tres grupos de razones iguales:

$$1^{\circ} \quad \frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'};$$

$$2^{\circ} \quad \frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'};$$

$$3^{\circ} \quad \frac{OC}{OC'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{OD}{OD'}$$

Observando que las series 1^a y 2^a se enlazan por la razón común $\frac{OB}{OC}$, y la 2^a y 3^a por $\frac{OC}{OC'}$, deduciremos que todas las razones de las tres series son iguales; por lo tanto:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Luego, las paralelas...

278. **Recíproco.** Cuando varias secantes cortan proporcionalmente a dos rectas paralelas, dichas secantes concurren en un mismo punto.

CAPITULO III

POLIGONOS SEMEJANTES

Teorema.

279. Dos polígonos semejantes pueden descomponerse en igual número de triángulos respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.

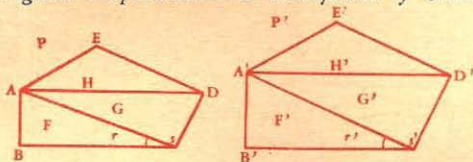


Fig. 221

Sean P y P' dos polígonos semejantes.

Desde dos vértices homólogos A y A', tracemos las diagonales AC, AD, A'C', A'D', y demostremos que los triángulos F, G, H son respectivamente semejantes a los triángulos F', G', H'.

Siendo semejantes los polígonos P y P', sus ángulos serán respectivamente iguales y sus lados homólogos, proporcionales (N^o 268); en los triángulos F y F' tenemos:

$$1^{\circ} \quad \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'};$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$2^{\circ} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Luego, dichos triángulos son semejantes por tener un ángulo igual comprendido por lados proporcionales; lo mismo ocurre con los triángulos H y H'.

Demostremos ahora que los triángulos G y G' son también semejantes.

Siendo semejantes los triángulos F y F', $\widehat{r} = \widehat{r}'$; y como por hipótesis tenemos $\widehat{BCD} = \widehat{B'C'D'}$, resulta $\widehat{s} = \widehat{s}'$.

Dichos triángulos dan la proporción:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

y como ya tenemos por hipótesis:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

tendremos también:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Luego, los triángulos G y G' son semejantes por tener un ángulo igual ($\widehat{s} = \widehat{s}'$), comprendido por lados proporcionales.

Luego, *dos polígonos semejantes...*

[280.] Recíproco. *Dos polígonos que se componen de igual número de triángulos respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos son semejantes.*

Teorema.

[281.] *Los perímetros de dos polígonos semejantes son proporcionales a sus lados homólogos o a dos líneas homólogas cualesquiera.*

De la semejanza de los polígonos P y P' resulta:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

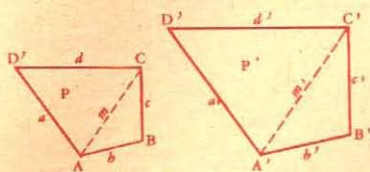


Fig. 222

Sumando los numeradores y denominadores, tendremos:

$$\frac{a + b + c + d}{a' + b' + c' + d'} = \frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \quad (1)$$

Por otra parte, siendo semejantes los triángulos ABC y A'B'C', tenemos:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{m}{m'} \quad (2)$$

Como las relaciones (1) y (2) tienen razones comunes, se infiere que:

$$\frac{P}{P'} = \frac{m}{m'}$$

Luego, los perímetros de...

Teorema.

282. Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.

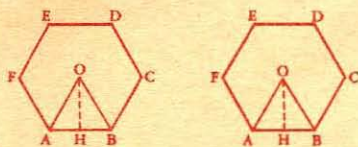


Fig. 223

Sean, por ejemplo, 'O y O' dos exágonos regulares.

1º En cada uno de estos polígonos, la suma de los ángulos es igual a 4 veces 2 rectos, o sea 8 rectos (Nº 96), y cada uno de ellos valdrá:

$$\frac{8 \text{ rectos}}{6}$$

Luego todos los ángulos son iguales.

2º Siendo los lados AB, BC, CD..., del primer polígono, iguales entre sí, como también los lados A'B', B'C', C'D'..., del segundo, resulta:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} \dots$$

Luego, dos polígonos...

283. Corolario. Los perímetros de dos polígonos regulares de igual número de lados son proporcionales a sus radios y a sus apotemas.

En efecto, dichos radios y apotemas son líneas homólogas, y tenemos (Nº 281):

$$\frac{AB + BC + CD + \dots}{A'B' + B'C' + C'D' + \dots} = \frac{OA}{O'A'} = \frac{OH}{O'H'}$$

284. Escolio. Dos círculos cualesquiera son figuras semejantes; porque pueden considerarse como polígonos regulares de infinito número de lados.

Teorema.

285. *Dos circunferencias son proporcionales a sus radios y a sus diámetros.*

En las circunferencias C y C' inscribamos un polígono regular de igual número de lados, por ejemplo un cuadrado. Llamando p y p' a los perímetros de dichos cuadrados, tendremos:

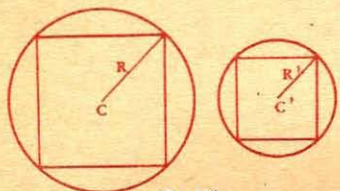


Fig. 224

$$\frac{p}{p'} = \frac{R}{R'} \quad (\text{N}^\circ 283).$$

Y como esta proporción se verifica siempre, aún cuando se aumente más y más el número de lados de ambos polígonos, cuando este número sea infinito, los perímetros p y p' se confundirán con las circunferencias C y C' que son sus límites respectivos (Nº 284), y tendremos:

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'} = \frac{2R}{2R'} \quad \text{o} \quad \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

Luego, *dos circunferencias...*

286. *Corolarios. I. El número π . - La relación entre la circunferencia y el diámetro es constante.*

Pues, de la igualdad anterior se deduce:

$$\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}$$

De donde se infiere que la relación entre la circunferencia y el diámetro es constante. Se expresa este cociente por la letra griega π (pi); en cuyo caso tendremos:

$$\frac{C}{D} = \pi$$

NOTA. El número π es igual a 3,1415926535...

En la práctica se toma por valor de π el número aproximado 3,1416.

287. *II. Longitud de la circunferencia. - La longitud de la circunferencia es igual al diámetro multiplicado por π .*

En efecto, de la igualdad $\frac{C}{D} = \pi$

se deduce:

$$C = \pi D,$$

o sea $C = 2\pi R$, por ser $D = 2R$.

288. *III. Longitud del diámetro. - La longitud del diámetro es igual a la circunferencia dividida por π , o multiplicada por $\frac{1}{\pi}$.*

$$\frac{1}{\pi}$$

En efecto, de la igualdad $\pi D = C$
 se deduce: $D = \frac{C}{\pi}$,

o sea $D = C \times \frac{1}{\pi}$.

[289.] IV. Longitud de un arco. - La longitud de un arco de n grados se obtiene con la fórmula:

$$l = \pi R \cdot \frac{n}{180}$$

En efecto, el arco de un grado es igual a $\frac{2\pi R}{360}$ o $\frac{\pi R}{180}$; el arco

de n grados valdrá $\frac{\pi R n}{180}$, o $\pi R \frac{n}{180}$.

CAPITULO IV

RELACIONES METRICAS ENTRE LAS LINEAS DE LOS TRIANGULOS

DEFINICIONES

[290.] Llámase *relación métrica entre varias líneas*, a la que existe entre los números que expresan su medida, referida a la misma unidad.

Suma, diferencia, producto, cociente o razón de dos líneas, es la suma, diferencia, producto o cociente de los números que expresan la longitud de dichas líneas.

Llámase *cuadrado de una línea* al cuadrado del número que expresa su longitud.

[291.] *Proyección de una línea sobre una recta* es la parte de ésta comprendida entre las perpendiculares bajadas desde los extremos de

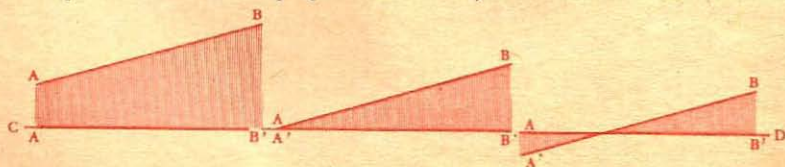


Fig. 225

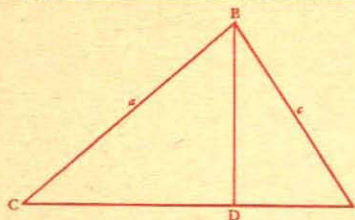


Fig. 226

la primera sobre ella. En la figura 225, $A'B'$ es la proyección de AB sobre CD .

En un triángulo cualquiera ABC (fig. 226), la altura BD determina en el lado CA dos segmentos DC y DA , que son las proyecciones respectivas de los lados BC y BA .

292. Advertencia. En el estudio

de las relaciones métricas de las líneas se emplean a menudo las siguientes fórmulas algebraicas:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad (1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \quad (2)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2. \quad (3)$$

Representando líneas las letras a y b , estas tres fórmulas pueden enunciarse del siguiente modo:

1º *El cuadrado de la suma de dos líneas es igual al cuadrado de la primera, más el cuadrado de la segunda, más el doble producto de dichas líneas.*

2º *El cuadrado de la diferencia de dos líneas es igual al cuadrado de la primera, más el cuadrado de la segunda, menos el doble producto de dichas líneas.*

3º *El producto de la suma de dos líneas por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.*

Teorema.

293. En todo triángulo rectángulo:

1º *Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.*

2º *La perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa, es media proporcional entre los dos segmentos que determina en ella.*

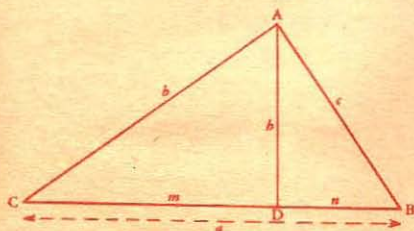


Fig. 227

Sea ABC (fig. 227) un triángulo rectángulo, y sea AD la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto.

CD o m es la proyección de CA ; BD o n la de AB .

1º *Cada cateto es medio proporcional...*

En los triángulos rectángulos CAD y CAB , el ángulo C es común; luego, dichos triángulos son semejantes (Nº 272), y por consiguiente sus lados homólogos son proporcionales:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \quad (1)$$

Del mismo modo se demostraría la proporción:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \quad (2)$$

2º *La perpendicular es media proporcional...*

Los triángulos CAD y BAD son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares (Nº 274); por lo tanto:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \quad (3)$$

Luego, *en todo triángulo rectángulo...*

294. Corolarios. I. *En todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al producto de su proyección sobre la hipotenusa por la misma hipotenusa.*

Y el cuadrado de la altura es igual al producto de los segmentos que determina sobre la hipotenusa.

Porque efectuando, en las tres proporciones anteriores, el producto de los medios y de los extremos, resultan las siguientes igualdades:

$$b^2 = am \quad (4)$$

$$c^2 = an \quad (5)$$

$$h^2 = mn \quad (6)$$

295. II: *El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

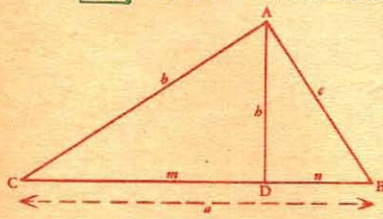


Fig. 228

Porque, sumando miembro a miembro las igualdades (4) y (5), tendremos:

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$\text{o} \quad b^2 + c^2 = a(m + n)$$

pero

$$m + n = a$$

$$\text{luego: } b^2 + c^2 = a \times a = a^2 \quad (7)$$

296. III. Esta relación facilita el hallar cada lado de un triángulo rectángulo en función de los otros dos, pues de la igualdad (7) resulta que *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.*

En efecto, tenemos:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

297. IV. *Los cuadrados de los catetos son proporcionales a sus proyecciones sobre la hipotenusa.*

Dividiendo miembro a miembro las igualdades (4) y (5), tenemos:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{am}{an} = \frac{m}{n}.$$

298. V. La razón entre el cuadrado de la hipotenusa y el de un cateto es igual a la razón entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la misma.

Dividiendo miembro a miembro $a^2 = aa$ por las igualdades (4) y (5), tenemos:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{aa}{am} = \frac{a}{m}$$

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{aa}{an} = \frac{a}{n}.$$

Teorema.

299. En todo triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Siendo agudo el ángulo A, tenemos:

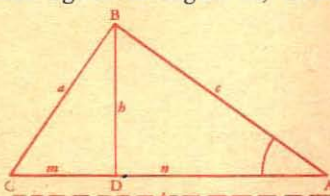


Fig. 229 $a^2 = h^2 + m^2$

$$h^2 = c^2 - n^2$$

$$m^2 = (b - n)^2 = b^2 + n^2 - 2bn$$

$$a^2 = c^2 - n^2 + b^2 + n^2 - 2bn$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn.$$

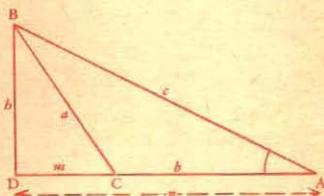


Fig. 230

Pero

Luego

y por último

Teorema.

300. En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el duplo del producto del segundo por la proyección del tercero sobre la prolongación del mismo.

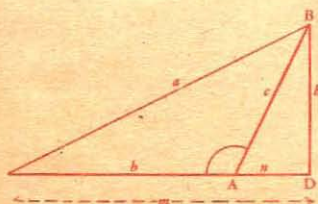


Fig. 231

Siendo obtuso el ángulo A, tenemos:

$$a^2 = h^2 + m^2$$

Pero

$$h^2 = c^2 - n^2$$

y

$$m = b + n$$

Luego

$$m^2 = (b + n)^2 = b^2 + n^2 + 2bn$$

$$a^2 = c^2 - n^2 + b^2 + n^2 + 2bn$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn.$$

Teorema.

301. Problema. *Expresar, en función del radio, el lado del cuadrado inscrito en un círculo.*

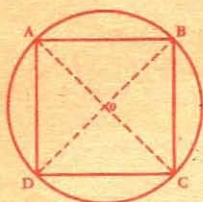


Fig. 232

En el triángulo rectángulo AOB tenemos:

$$\overline{AB^2} = \overline{AO^2} + \overline{BO^2},$$

pero AO y BO son radios; luego, llamando l al lado del cuadrado, y R al radio del círculo circunscrito, resultará

$$l^2 = 2R^2$$

de donde

$$l = R\sqrt{2}$$

o

$$l = R \times 1,4142\dots$$

302. *Expresar, en función del lado, la diagonal del cuadrado.*
En el triángulo rectángulo ABC (fig. 232) tenemos:

$$\overline{AC^2} = \overline{AB^2} + \overline{BC^2}$$

Llamando d a la diagonal y l al lado, resultará:

$$d^2 = 2l^2$$

de donde

$$d = l\sqrt{2}$$

$$d = l \times 1,414.$$

303. *Expresar, en función del radio, el lado del triángulo equilátero inscrito.*



Fig. 233

En el triángulo EAB, que es rectángulo por ser recto el ángulo A (Nº 197, IV), tenemos:

$$\overline{AE^2} = \overline{BE^2} - \overline{AB^2}$$

Pero $\overline{BE} = 2R$, y $\overline{AB} = R$

luego $\overline{BE^2} = 4R^2$, y $\overline{AB^2} = R^2$

Por lo tanto $\overline{AE^2} = 4R^2 - R^2 = 3R^2$

y por último $\overline{AE} = R\sqrt{3}$.

304. *Expresar, en función del lado, la altura del triángulo equilátero.*

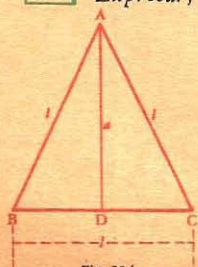


Fig. 234

En el triángulo rectángulo ADB tenemos:

$$\overline{AD^2} = \overline{AB^2} - \overline{BD^2}$$

Designando por a la altura y por l el lado, resulta:

$$a^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4}$$

$$\text{Luego} \quad a = \frac{l}{2} \sqrt{3}.$$

305. Expresar el lado del triángulo equilátero en función de la altura.

De la igualdad $\frac{3l^2}{4} = a^2$ (Nº 304) resulta, multiplicando ambos miembros por 4 y dividiéndolos por 3:

$$\text{de donde} \quad l = \sqrt{\frac{4}{3} a^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} a \sqrt{3}$$

$$\text{Luego} \quad l = \frac{2}{3} a \sqrt{3}.$$

CAPITULO V

RELACIONES METRICAS ENTRE LAS LINEAS DEL CIRCULO

Teorema.

306. Toda perpendicular, bajada desde un punto de la circunferencia al diámetro, es media proporcional entre los dos segmentos que determina sobre él.

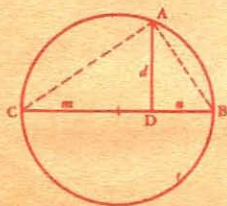


Fig. 235

Sea la perpendicular AD. Tracemos las rectas AB y AC.

El triángulo ABC es rectángulo por ser recto el ángulo A (Nº 197, IV); AD es la altura de dicho triángulo; por lo tanto (Nº 293, 2º):

$$\frac{DC}{DA} = \frac{DA}{DB}$$

$$\text{o sea} \quad \frac{m}{d} = \frac{d}{n}$$

Luego, toda perpendicular...

307. Corolario. El cuadrado de la perpendicular bajada desde un punto de la circunferencia al diámetro es igual al producto de los dos segmentos que determina sobre el diámetro.

Porque de la proporción anterior

$$\frac{m}{d} = \frac{d}{n}$$

$$d^2 = mn$$

se deduce

308. Escolios. I. Una cuerda que pasa por el extremo de un diámetro es media proporcional entre el diámetro y la proyección de dicha cuerda sobre el mismo.

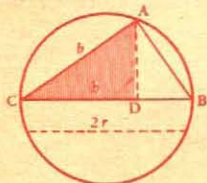


Fig. 236

Porque, siendo CD o b' la proyección de la cuerda CA o b sobre el diámetro CB, tenemos (Nº 293, 1º):

$$b^2 = 2Rb'$$

309. II. Los cuadrados de las cuerdas que pasan por los extremos de un diámetro son proporcionales a sus proyecciones sobre este diámetro (fig. 236).

Esta propiedad se deduce del teorema Nº 293:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{CD} \text{ o } AC^2 = CB \times CD$$

$$\frac{CB}{AB} = \frac{AB}{DB} \text{ o } AB^2 = CB \times DB.$$

Dividiendo ordenadamente las dos igualdades, resultará:

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{CD}{DB}$$

Teorema.

310. Cuando dos cuerdas se cortan, el producto de los segmentos de la primera es igual al producto de los segmentos de la segunda.

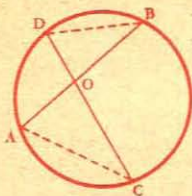


Fig. 237

Sean las cuerdas AB y CD que se cortan en el punto O.

Consideremos los triángulos AOC y BOD.

Tenemos:

$$\widehat{OAC} = \widehat{ODB} \quad (\text{Nº } 197)$$

$$\widehat{OCA} = \widehat{OBD} \quad \text{id.}$$

Luego, estos triángulos son semejantes (Nº 271) y por consiguiente:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$$

$$\text{o } OA \times OB = OC \times OD.$$

Teorema.

- 311.** Cuando dos secantes parten desde un mismo punto, el producto de la primera por su segmento externo es igual al producto de la segunda por el suyo.

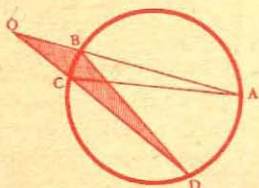


Fig. 238

Luego

y por consiguiente $OA \times OB = OD \times OC$.

- 312.** Escolio. Los dos últimos teoremas pueden generalizarse en la siguiente proposición:

Si desde un punto interior o exterior a una circunferencia se trazan varias cuerdas o secantes, el producto de los segmentos de estas líneas es constante.

Teorema.

- 313.** Si desde un punto exterior a un círculo se trazan una secante y una tangente, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo.

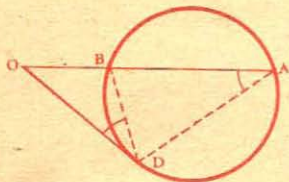


Fig. 239

el ángulo O es común.

Luego

Sean OA y OD las líneas que se consideran.
Tracemos AD y DB.
Los triángulos OAD y ODB son semejantes por tener dos ángulos iguales, a saber:

$$\widehat{OAD} = \widehat{ODB} \quad (\text{Nos. 197, 198})$$

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OD}{OB}$$

- 314.** Corolario. De esta última igualdad se infiere que el cuadrado de la tangente es igual al producto de la secante por su segmento externo; pues

$$\overline{OD}^2 = OA \times OB.$$

APLICACIONES

FIGURAS SEMEJANTES Y RELACIONES METRICAS

315. *Dividir una recta en 2, 4, 8, 16... partes iguales.*

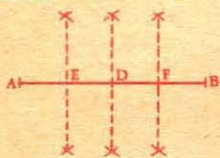


Fig. 240

Para dividir la recta AB en dos partes iguales, se levanta una perpendicular en su punto medio (Nº 129). Para dividirla en cuatro partes iguales, se levanta una perpendicular en medio de cada mitad, y así sucesivamente para dividirla en 8, 16... partes iguales.

316. *Dividir una recta en un número cualquiera de partes iguales (por medio del cartabón).*

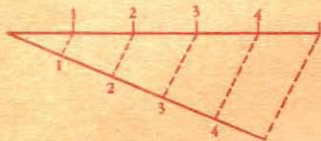


Fig. 241

Sea AB la recta que se ha de dividir en cinco partes iguales.

Trácese una recta indefinida AC, tómnese en ésta cinco partes iguales desde el extremo A, únense los puntos B y C, y trazando por los demás puntos paralelas a BC, resultará dividida AB en cinco partes iguales (Nº 262).

317. *Dividir una recta AB en partes proporcionales a números dados.*

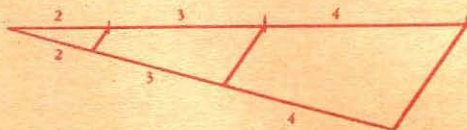


Fig. 242

Sea AB la recta que se ha de dividir en partes proporcionales a los números 2, 3 y 4. En la recta AC se señala sucesivamente una misma longitud tomada 2, 3 y 4 veces. Uniendo luego los puntos C y B, las paralelas a CB, trazadas por los puntos de división, dividirán a la recta propuesta en las partes pedidas.

318. *Sobre una recta dada AE construir un polígono P semejante a otro dado P'.*

1er. Procedimiento. Sea el lado A'E homólogo de la recta dada AE; tracemos las diagonales A'D' y A'C'. Construyamos en E un ángulo $E = E'$ y en A otro ángulo $s = s'$.

Los triángulos AED y A'E'D' son semejantes por tener sus tres ángulos iguales (N^o 271).

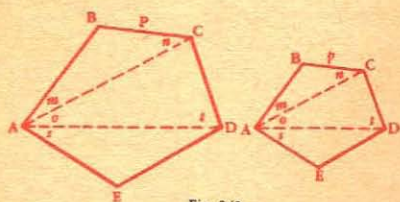


Fig. 243

Sobre AD, homólogo de A'D', construyamos los ángulos o y t respectivamente iguales a los ángulos o' y t' , y resultarán semejantes los triángulos ADC y A'D'C'.

Sobre AC construyamos los ángulos m y n iguales

a los ángulos m' y n' ; entonces los triángulos ABC y A'B'C' serán semejantes.

Los polígonos P y P' serán semejantes por componerse del mismo número de triángulos semejantes y semejantemente colocados (N^o 280).

319. 2^o Procedimiento. *Construir un polígono R' semejante a otro dado R.*

Tómese un punto cualquiera O, y trácense las rectas OA, OB, OC...

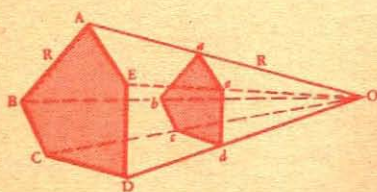


Fig. 244

Luego trácense sucesivamente ae paralela a AE , ed paralela a ED , dc paralela a DC , etc.

El polígono R' será semejante al polígono dado R.

En efecto, los ángulos de estos polígonos son respectivamente iguales por tener sus lados respectivamente paralelos; de modo que $\widehat{A} = \widehat{a}$, $\widehat{B} = \widehat{b}$.

Los lados homólogos de estos polígonos son proporcionales, porque siendo ae paralela a AE , el triángulo aeO será semejante a AEO ; lo mismo ocurre con los demás, y si suponemos, que la línea eO , por

ejemplo, sea los $\frac{3}{5}$ de EO , el lado ae será también los $\frac{3}{5}$ de AE ,

el lado ed los $\frac{3}{5}$ de ED , y el cd los $\frac{3}{5}$ de CD .

Luego cada lado del polígono R será igual a los $\frac{3}{5}$ de su homólogo en el polígono R, y los dos polígonos son semejantes.

320. NOTA I. Si se quiere construir un polígono cuyas dimensiones sean la mitad de las del polígono propuesto, se tomará el punto a en medio de AO (fig. 244).

321. NOTA II. Se puede tomar el punto O dentro del polígono, o en un vértice (fig. 245), siendo idéntico el resultado.

El punto O se llama *centro de semejanza*.

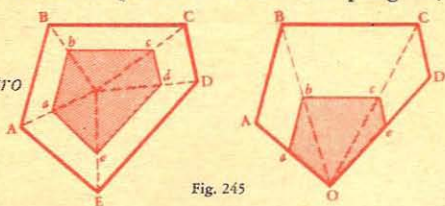


Fig. 245

322. Disponiendo dos polígonos semejantes de modo que sus lados sean respectivamente paralelos, las rectas que unen los vértices homólogos concurren en el centro de semejanza (fig. 246).

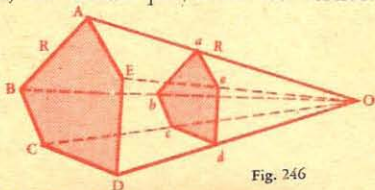


Fig. 246

323. Problema. Por un punto M (fig. 247) trázese una recta que pase por el vértice del ángulo que formarían dos rectas AB y CD que no pueden prolongarse.

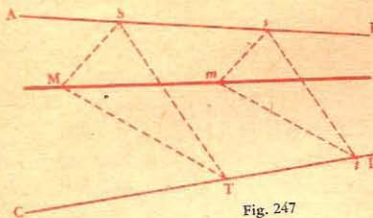


Fig. 247

Por el punto M trázense las rectas MS, MT y luego ST.

Por un punto s trázense *st* paralela a ST, *sm* paralela a SM, y por último *tm* paralela a TM. La recta Mm prolongada pasará por el vértice de las rectas AB y CD,

porque dicho vértice es el centro de semejanza de los triángulos MST y *mst* (Nº 322).

324. Problema. Hallar una cuarta proporcional a tres rectas dadas *a*, *b*, *c*.

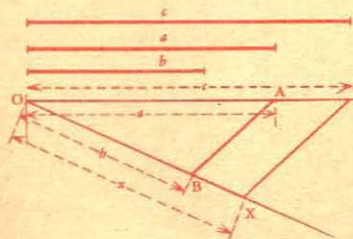


Fig. 248

1er. Procedimiento. Tómese en los lados de un ángulo cualquiera $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$; trázese AB, y luego CX paralela a AB. La recta OX será la cuarta proporcional pedida, porque tenemos (Nº 264):

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OX}$$

$$\text{o sea} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

325. 2º Procedimiento. Por un punto M, trázese una recta AB igual a a más b , y en cualquier dirección, MC igual a c . Por los puntos A, B, C, hágase pasar una circunferencia que determinará en la prolongación de CM,

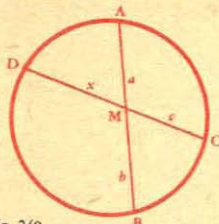


Fig. 249

que es la cuarta proporcional pedida.

$$MD = x,$$

326. 3er. Procedimiento. También puede resolverse el problema por medio de la propiedad de las secantes que parten desde un mismo punto. En uno de los lados de un ángulo cualquiera se señalan los segmentos $PA = a$, $PB = b$; en el otro lado, $PC = c$; la circunferencia que pase por los tres puntos A, B, C, determinará la cuarta proporcional (Nº 311).

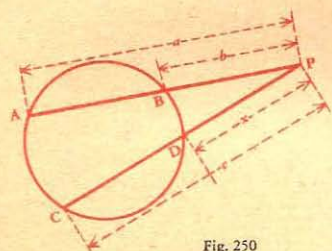


Fig. 250

327. Problema. Hallar una tercera proporcional a dos rectas dadas a y b .

Para resolver este problema, hay que buscar la cuarta proporcional a las rectas a , b , b , de modo que resulte la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

La figura 251 da en efecto:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OX}$$

También puede disponerse la construcción de modo que a y x sean los dos segmentos de la hipotenusa, y b la altura de un triángulo rectángulo (fig. 252), para lo cual basta construir un ángulo recto ADC, y tomar $CD = a$, y $DA = b$.

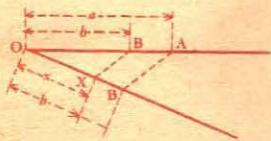


Fig. 251

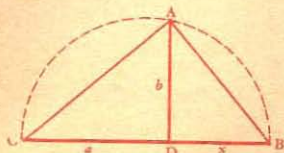


Fig. 252

Luego se traza AC y se construye un ángulo recto CAB. El segmento BD será la tercera proporcional pedida (Nº 293, 2º).

328. Problema. Hallar la media proporcional a dos rectas dadas a y b .

1er. Procedimiento. Tómesese sobre una recta AB, $OA = a$, y $OB = b$; sobre AB describáse una semicircunferencia, y trácese la perpendicular OX que será la línea pedida.

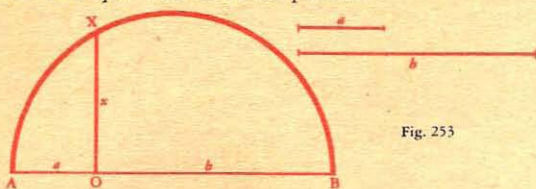


Fig. 253

En efecto, tenemos (N^o 306):

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OB}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

o sea

2^o Procedimiento. Tómesese $OA = a$, $OB = b$ (fig. 254), sobre OB describáse una semicircunferencia; levántese la perpendicular AE; la cuerda OE será la línea pedida.

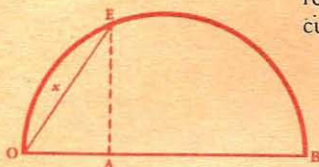


Fig. 254

o sea

En efecto, tenemos (N^o 308):

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OE}{OB}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

3er. Procedimiento. Tómesese $OA' = a$, $OB = b$, sobre A'B describáse una circunferencia (fig. 255), y trácese la tangente OD, que será la recta pedida.

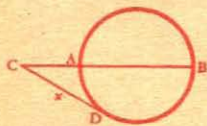


Fig. 255

o sea

En efecto, tenemos (N^o 313):

$$\frac{OA'}{OD} = \frac{OD}{OB}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

329. Dividir una recta dada AB en media y extrema razón¹.
En el extremo B levántese una perpendicular BC igual a la mi-

¹ Dicese que una recta está dividida en media y extrema razón, cuando está dividida en dos partes tales que la mayor es media proporcional entre la menor y la línea entera.

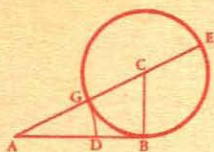


Fig. 256

tad de AB; haciendo centro en C y con BC por radio describáse una circunferencia, y trázese la secante AE; el segmento exterior AG, señalado sobre AB, dividirá a esta recta en media y extrema razón, en el punto D.

En efecto, AB es tangente, y AE secante de la circunferencia; luego tendremos (N^o 313):

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AG};$$

restando los denominadores de los numeradores

$$\frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AG}{AB}$$

y como por construcción $AB = EG$, resulta:

$$\begin{aligned} AE - AB &= AG \text{ o } AD \\ AB - AG &= BD \end{aligned}$$

Luego la proporción anterior se convierte en la siguiente

$$\frac{AD}{AB} = \frac{BD}{AD} \text{ o } \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{BD}$$

EJERCICIOS

Líneas proporcionales.

72. Hallar una cuarta proporcional a tres líneas dadas o sea resolver gráficamente la ecuación $M \times x = N \times P$ cuando

$$M = 1 \text{ centímetro}$$

$$N = 3 \text{ centímetros}$$

$$P = 2^{\text{cm}}, 1.$$

73. Hallar una cuarta proporcional a tres líneas de 38, 49 y 15 milímetros, de modo que se tenga la proporción $38 : 15 :: x : 49$.

74. Dividir una recta de $3^{\text{cm}} 8$ en cinco partes iguales: 1^o por medio de un ángulo; 2^o por medio de un triángulo equilátero.

75. Dividir una recta de $4^{\text{cm}} 7$, en partes proporcionales a $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$.

76. Dividir una recta de $3^{\text{cm}} 9$ en partes proporcionales a $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$.

77. Tomando el milímetro por unidad, hallar, por medio de un ángulo una cuarta proporcional a los números: 13, 65 y 27.

78. Una recta paralela a uno de los lados de un triángulo determina en un lado dos segmentos de 28 y 17 metros. ¿Cuáles son los

segmentos determinados en el otro lado, cuya longitud total es de 60 metros?

79. Dos lados de un triángulo tienen respectivamente 108 y 126 metros, desde el vértice común se toma una longitud de 80 metros sobre el primero. ¿Qué longitud será preciso tomar en el segundo para que la recta trazada por los dos puntos así obtenidos sea paralela al tercer lado?

80. Los tres lados de un triángulo tienen respectivamente 18, 30 y 36 metros; calcular los segmentos determinados en dichos lados por las tres bisectrices.

Polígonos semejantes.

81. ¿Cuál es la relación que existe entre los perímetros de dos triángulos equiláteros que tienen de lado respectivamente 10 y 18 mts.?

82. Un triángulo tiene por lados 12, 25 y 32 metros: ¿cuáles son los lados de un triángulo semejante de perímetro tres veces mayor?

83. Un triángulo tiene por lados 20, 26 y 30 metros: ¿cuáles son los lados de otro triángulo semejante de 114 metros de perímetro?

84. El perímetro de un triángulo es igual a 53 milímetros y sus lados son entre sí como los números 7, 8 y 11. ¿Cuáles son estos lados?

85. Construir un triángulo equilátero de 40 milímetros de lado, y otro cuyo perímetro sea la mitad del anterior.

86. Construir un triángulo semejante a otro dado, cuyos ángulos de la base son respectivamente de 54° y $71^\circ 30'$, si la base del triángulo dado mide 2 centímetros y la base del triángulo pedido, 3 centímetros.

87. Construir un trapecio rectángulo que tenga por bases 40 y 25 milímetros, y 12 milímetros de altura, y luego otro semejante, cuyo perímetro sea de 1 decímetro.

88. Construir un rombo que tenga por diagonales 10 y 25 milímetros y otro semejante, cuyo perímetro sea los $\frac{6}{5}$ del anterior.

Relaciones métricas entre las líneas de los triángulos.

89. ¿Cuál es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen 15 y 10 metros de longitud?

90. ¿Cuál es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen 12 y 18 metros de longitud?

91. ¿Cuál es la longitud de uno de los catetos de tres triángulos rectángulos, siendo el valor de los otros dos lados:

1º hipotenusa 26^m , el otro cateto 10^m ;

2º hipotenusa $4^m 9$, el otro cateto $2^m 4$;

3º hipotenusa $11^m 60$, el otro cateto $7^m 5$.

92. ¿Cuáles son las alturas de los triángulos equiláteros que tienen por lados: 1º 12^m ; 2º 26^m ; 3º $4^m 6$; 4º $0^m 50$?

93. ¿Cuáles son las alturas de los triángulos isósceles en los que la base y el lado tienen por valores:

- 1º base 12^m , lado 26^m ?
- 2º base $2^m 4$, lado $4^m 2$?
- 3º base $3^m 2$, lado $3^m 1$?
- 4º base $0^m 6$, lado $1^m 2$?

94. ¿Cuáles son las diagonales de los cuadrados cuyos lados tienen de longitud: 1º 9^m ; 2º 22^m ; 3º $46^m 75$; 4º $124^m 25$; 5º $217^m 35$?

95. ¿Cuáles son los lados de los cuadrados que tienen por diagonales: 1º 6^m ; 2º 22^m ; 3º 12^m ; 4º $26^m 15$; 5º $42^m 25$?

96. ¿Cuáles son las diagonales de los rectángulos que tienen por dimensiones:

- 1º base 29^m , altura 11^m ?
- 2º base 46^m , altura 25^m ?
- 3º base $6^m 4$, altura $2^m 5$?

97. ¿Cuáles son los lados de los rombos cuyas diagonales miden: 1º 6 y 10^m ; 2º 12 y 15^m ; 3º $3^m 50$ y $5^m 40$?

98. La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 20^m ; ¿cuál es la longitud de los dos catetos, si son entre sí como 2 es a 3?

99. En un triángulo rectángulo, un cateto es el doble del otro; ¿cuál es la relación de sus cuadrados, y la de cada uno de éstos con el cuadrado de la hipotenusa?

100. Los catetos de un triángulo rectángulo son entre sí como 3 es a 4; ¿cuál es la relación de sus cuadrados con el de la hipotenusa?

101. Los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo son entre sí como 1, 2, 3; si la hipotenusa tiene 30^m de largo; ¿cuál será la longitud de los catetos?

102. En un triángulo rectángulo, un cateto es 1 vez y $\frac{1}{2}$ mayor que el otro; si la hipotenusa tiene 26^m de longitud, ¿cuánto valdrán los cuadrados de los catetos?

103. En un triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre un cateto vale 500 metros cuadrados más que el cuadrado construido sobre el otro; cuál será la magnitud de cada uno si la hipotenusa tiene 36^m de longitud?

104. ¿Por qué el triángulo cuyos lados son entre sí como los números 3, 4 y 5 es siempre rectángulo?

105. Se quiere construir un triángulo rectángulo en el que un cateto sea igual a la mitad de la hipotenusa; ¿cuál será la longitud de los catetos si el cuadrado de la hipotenusa es de 256 metros?

106. Dos viajeros que salen desde el mismo punto caminan el uno hacia el sur y el otro hacia el oeste. 1º ¿Qué distancia los separa cuando cada uno ha recorrido 80 kilómetros?; 2º ¿A qué distancia estarán del punto de partida cuando estén a 100 kilómetros el uno del otro, habiendo andado igual recorrido?; 3º ¿Cuántos kilómetros había caminado cada uno cuando la distancia que los separaba era de 60 kilómetros, siendo su velocidad como 3 es a 4?; 4º ¿Cuántos kiló-

metros hubiera recorrido cada uno si estuvieran a 80 kilómetros de distancia, y uno hubiera caminado 16 kilómetros más que el otro?

107. La diagonal de un rectángulo tiene 30 metros, y la altura es a la longitud como 4 es a 5; ¿Cuál es el valor de estas dos dimensiones?

108. En un triángulo rectángulo isósceles, la altura que parte desde el ángulo recto divide al lado opuesto en dos segmentos de 6 metros cada uno. Calcular la altura y los lados.

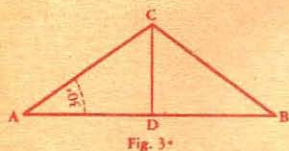
109. ¿Cuál será la longitud de una cuerda que ha de tenderse desde la extremidad de una columna de 20 metros de alto hasta un punto del suelo que está situado a 25 metros del pie de la columna?

110. El lado de un triángulo equilátero es l ; por un punto situado a los $\frac{3}{4}$ de uno de sus lados a partir de la base, se baja una perpendicular sobre los otros dos lados. Hallar la longitud de estas dos perpendiculares y el valor de los segmentos que determinan sobre los mismos. Aplicación, para $l = 0^m 80$.

111. ¿Cuáles son los apotemas de los exágonos regulares que tienen por lados: 1º $1^m 50$; 2º 10^m ; 3º 15^m ; 4º 25^m ; 5º $30^m 50$?

112. El pie de una escalera apoyada en una pared está a 4^m de distancia de ésta; ¿qué longitud tendrá esa escalera si llega a una altura de 6^m ?

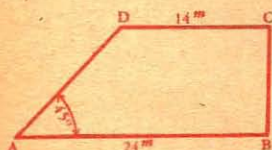
113. ¿A qué distancia de una pared ha de estar el pie de una escalera de 10^m , para que llegue ésta a una altura de 6^m ?



114. Una escalera de $7^m 25$ está colocada de manera que su pie está a $3^m 40$ de una pared; ¿a qué altura llega esa escalera?

115. ¿Cuál es la altura de un triángulo isósceles (fig. 3*) cuya base AB mide 12 metros, y el ángulo A es de 30° ?

116. ¿Cuál es la altura de un trapezio rectángulo (fig. 4*) cuyas bases tienen 24 y 14 metros y cuyo ángulo A es de 45° ?



117. ¿Cuál es el apotema de un exágono regular de 120 metros de perímetro?

118. El apotema de un exágono regular es $2^m 8$; ¿cuál es su perímetro?

119. Dos lados de un triángulo miden 3 y 4 centímetros respectivamente; el segmento determinado por la bisectriz que cae sobre el tercer lado mide 2 centímetros, y es adyacente al lado de 3 centímetros; constrúyase el triángulo.

120. Construir un triángulo ABC, conociendo dos lados AB y BC que tienen respectivamente 5 y 7 centímetros y siendo 2 centímetros la distancia de B a O, pie de la bisectriz del ángulo A.

121. Los lados de un triángulo rectángulo forman una progresión aritmética cuya razón es 7. Calcular estos lados.

122. ¿Cuál es la altura del triángulo obtenido prolongando los dos lados no paralelos de un trapecio cuyas bases son de 27^m y $38^m 50$, y la altura de 15 metros?

123. En un triángulo rectángulo isósceles ABO (fig. 5*), se inscribe la línea quebrada ABCDEPGHI... cuyos elementos son respectivamente paralelos al lado AB y a la altura BC; calcular en función de $AO = a$ la longitud:

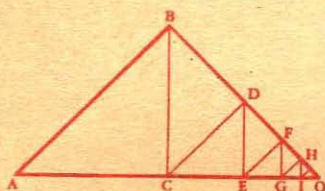


Fig. 5*

1º De cada elemento;

2º De toda la línea quebrada ABCDEPGHI...O.

124. La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 30^m y uno de los segmentos determinados por la altura sobre la hipotenusa, 20^m . Calcular dicha altura y los catetos.

Relaciones métricas entre las líneas del círculo.

125. Un arco de círculo tiene $3^m 50$ de abertura; la cuerda que une su extremo con su punto medio tiene 2 metros. Hallar:

1º La longitud de la sagita;

2º La del radio.

126. ¿A qué distancia del centro se halla una cuerda de $2^m 72$, en un círculo de $3^m 65$ de radio?

127. En un círculo de $4^m 20$ de radio (fig. 6*), la cuerda $AB = 3^m 12$, la cuerda $CD = 6^m 80$. Calcular la distancia EF de estas dos cuerdas, sabiendo que son paralelas.



Fig. 6*

128. En un círculo de $2^m 40$ de radio, calcular las distancias del centro a las cuerdas que tienen las longitudes siguientes: 1º $0^m 60$; 2º $1^m 20$.

129. En un círculo de $2^m 25$ de radio, se traza una cuerda de 3^m . Calcular la cuerda que subtien- de un arco igual a la mitad del anterior.

130. Una tangente y una secante parten desde un mismo punto; la tangente tiene 18^m , y el segmento interior de la secante 23. ¿Cuál es su segmento exterior?

131. En un círculo de $1^m 50$ de radio, una secante que pasa por el centro tiene $3^m 50$ de longitud. Calcular la tangente que parte desde el mismo punto.

132. El diámetro de un círculo tiene $32^m 50$; si se prolonga $4^m 50$, ¿Cuál será la longitud de la tangente trazada desde este extremo?

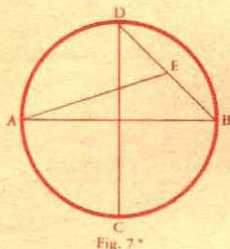
133. El diámetro de un círculo tiene $25^m 40$; ¿Cuántos metros hay que prolongarlo para que la tangente trazada desde el punto obtenido tenga 12 metros?

134. Dos secantes parten desde un mismo punto; los segmentos interior y exterior de la primera tienen respectivamente 13 y 23 metros, y el segmento exterior de la segunda, 17. Calcular el segmento interior de ésta.

135. Dos cuerdas se cortan; los dos segmentos de la una tienen respectivamente 15 y 10 metros de longitud. Calcular los dos segmentos de la otra, siendo su longitud de 28 metros.

136. En un círculo de 17^m de radio, dos cuerdas se cortan de manera que el producto de los segmentos de cada una es 145. Calcular a qué distancia del centro se halla el punto de intersección.

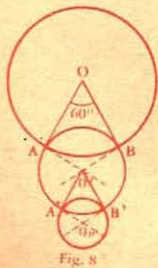
137. Se tienen dos circunferencias, una de 7 metros de radio, y otra de $11^m 50$; un arco tomado sobre la primera tiene una longitud de $9^m 50$. Determinar la longitud de un arco semejante tomado sobre la segunda.



138. Dadas dos cuerdas paralelas cuyas longitudes respectivas son 24 y 32 centímetros, y su distancia 4 centímetros, hallar el radio del círculo a que pertenecen, y la distancia a que están del centro.

139. Se trazan en un círculo (fig. 7*) dos diámetros perpendiculares AB y CD, y la cuerda BD; se une luego el punto A con el punto medio de BD. Hállese el valor de AE en función del radio.

140. Se da un sector de 60° en un círculo O (fig. 8*). En los extremos A y B de los dos radios se levantan perpendiculares que determinan por su intersección en O' el centro de un círculo que se describe con AO' por radio. Se determina asimismo el círculo O'' tangente en A' y B' con el sector A'O'B' de 60° , y así sucesivamente. Pregúntase el valor de los radios AO', A'O'', A''O''', en función del radio $AO = r$.



141. Calcular los dos segmentos de una línea de 1 metro, dividida en media y extrema razón.

Demostrar las siguientes proposiciones.

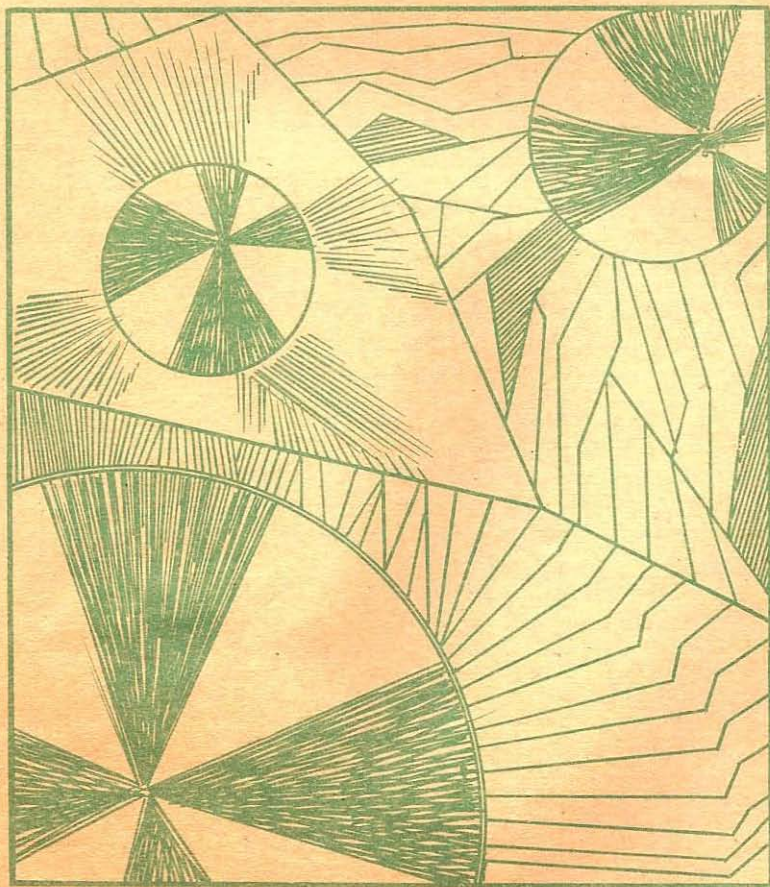
142. Las rectas que unen de dos en dos los pies de las alturas de un triángulo determinan tres triángulos semejantes al propuesto.

143. La recta trazada por los puntos medios de las bases de un trapecio pasa por el punto en que concurren los lados no paralelos.

144. Cuando dos círculos son tangentes exteriormente, la distancia de los puntos de contacto de una tangente exterior común a ambos círculos es media proporcional entre los diámetros de los mismos.

145. La suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera de un triángulo es igual a dos veces el cuadrado de la mediana del tercer lado, más dos veces el cuadrado de la mitad del mismo.

146. En un paralelogramo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.



LIBRO IV

AREAS

CAPITULO I

DETERMINACION DE LAS AREAS

DEFINICIONES

330. Llámase *área* a la extensión de una superficie.

En el lenguaje usual, se confunden a menudo los términos *área* y *superficie*. Sin embargo, éste se refiere a la forma y extensión de una figura, y aquel exclusivamente a su extensión.

331. *Unidad de área* es el área del cuadrado que tiene por lado la *unidad de longitud*. Se suele tomar por *unidad de área* el metro cuadrado, o uno de sus múltiplos o submúltiplos, según la extensión de la figura que se considere.

332. En las figuras rectilíneas, las dimensiones son dos: *base* y *altura*.

En el *paralelogramo*, la base es uno cualquiera de sus lados, en cuyo caso la altura es la distancia de este lado al lado opuesto.

En el *rectángulo*, las dimensiones son dos lados adyacentes.

En el *trapecio*, llámase bases a los dos lados paralelos, y altura a la distancia de los mismos.

En el *triángulo*, la base es uno cualquiera de sus lados, y altura, la distancia de esa base al vértice del ángulo opuesto

Teorema

333. *Área del rectángulo.* El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura

Sea el rectángulo ABCD.

Supongamos que sean conmensurables las dos dimensiones, y que la medida común, que llamaremos *unidad de longitud*, esté contenida 7 veces en la base, y 4 en la altura.

Dividamos la altura AD en 4 partes iguales, y por los puntos de división tracemos paralelas a la base DC, el rectángulo resultará dividido en 4 rectángulos parciales de 7 unidades de largo por una de alto.



Fig. 257

Por medio de paralelas a la altura AD, cada rectángulo parcial puede subdividirse en 7 cuadrados iguales a la *unidad de área* (nº 331). Luego, el rectángulo ABCD contiene 4 veces 7 unidades de área, y por lo tanto, su área se representará por el producto (7×4) .

Por pequeña que sea la medida común, la demostración es exacta y siempre puede expresarse el área de un rectángulo por el producto de su base por su altura.

334. Escolios. I. *Dos rectángulos son proporcionales a los productos respectivos de sus bases por sus alturas.*

Pues, siendo el área de un rectángulo R, igual a ba y el área de otro rectángulo R' igual a $b'a'$, tendremos:

$$\frac{R}{R'} = \frac{ba}{b'a'} \quad (1)$$

II. *Dos rectángulos de igual base son proporcionales a sus alturas.*

Porque si en la identidad (1) hacemos $b = b'$, resultará:

$$\frac{R}{R'} = \frac{ba}{ba'}$$

o sea :

$$\frac{R}{R'} = \frac{a}{a'} \quad (2)$$

III. *Dos rectángulos de igual altura son proporcionales a sus bases.*

Porque si en la identidad (1) hacemos $a = a'$, resultará:

$$\frac{R}{R'} = \frac{ba}{b'a}$$

o sea :

$$\frac{R}{R'} = \frac{b}{b'} \quad (3)$$

335. Corolario. *Área del cuadrado. El área de un cuadrado es igual al producto de su lado por sí mismo, o sea a la segunda potencia de su lado; pues el cuadrado es un rectángulo cuyas dimensiones son iguales.*

$$A = l \times l = l^2$$

Expresando la segunda potencia de un número el área de un cuadrado, el uso ha hecho sinónimas las voces *cuadrado* y *segunda potencia* que expresan el producto de una cantidad por sí misma.

Teorema.

336. *Área del paralelogramo. El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.*

Sea el paralelogramo ABCD. Demostremos que es equivalente al rectángulo ABEF que tiene la misma base b , e igual altura a .

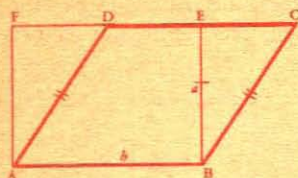


Fig. 258

Los triángulos rectángulos ADF y BCE son iguales por tener igual la hipotenusa ($AD = BC$), e igual un cateto ($AF = BE$).

Luego, el paralelogramo ABCD, o sea la figura total menos el triángulo ADF, es equivalente al rectángulo ABEF, o sea la figura total menos el triángulo BCE.

Siendo el paralelogramo equivalente al rectángulo de igual base y altura, su área será igual al producto de sus dos dimensiones:

$$A = ba.$$

337. Corolario. Si se considera el rombo como paralelogramo, su área es igual al producto de su base por su altura.

Teorema.

338. Área del triángulo. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.

Sea el triángulo ABC.

Tracemos BE y CE, paralelas a los lados AC y AB, y resultará un paralelogramo ABEC, cuya base y altura serán las mismas que las del triángulo dado.

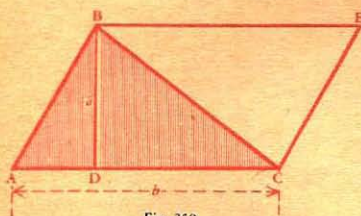


Fig. 259

Los triángulos ABC y BCE son iguales por tener sus tres lados iguales: BC es lado común; $BE = AC$ como lados opuestos de un paralelogramo, y $CE = AB$ por la misma razón.

Luego el triángulo ABC es la mitad del paralelogramo ABEC. Siendo el área de éste, igual al producto de su base b , por su altura, a , el área

$$\text{del triángulo será: } A = \frac{b \times a}{2}$$

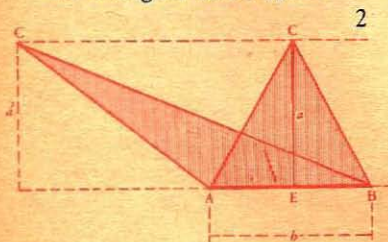


Fig. 260

339. Corolarios. I. Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.

Sean los triángulos ABC y A'B'C' (fig. 260), de igual base b y altura a ; el área de dichos triángulos es igual al mismo producto $\frac{1}{2}ba$.

Luego, el vértice de un triángulo puede moverse sobre una recta paralela a la base sin que cambie su área, pues todos los triángulos así formados tienen la misma base e igual altura que el triángulo dado.

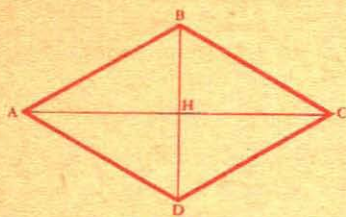


Fig. 261

340. II. Dos triángulos cualesquiera son proporcionales a los productos de sus bases por sus alturas.

341. III Área del rombo. El área de un rombo es igual al semiproducto de sus diagonales.

Podemos considerar el rombo ABCD como compuesto de los dos triángulos ACB y ACD. Entonces su área será:

$$A = AC \times \frac{BH}{2} + AC \times \frac{DH}{2}$$

$$A = AC \times \frac{BH + DH}{2} = \frac{AC \times BD}{2}$$

342. IV. El área de un polígono circunscrito a un círculo es igual al semiproducto del perímetro por el radio del círculo.

Porque el polígono puede descomponerse en triángulos que tengan por altura el radio R del círculo, y por bases los lados del polígono:

$$\text{área } AOB = \frac{1}{2} R \cdot AB$$

$$\gg BOC = \frac{1}{2} R \cdot BC$$

$$\gg COD = \frac{1}{2} R \cdot CD$$

$$\gg DOA = \frac{1}{2} R \cdot DA.$$

$$\text{área total} = \frac{1}{2} R \cdot (AB + BC + CD + DA).$$

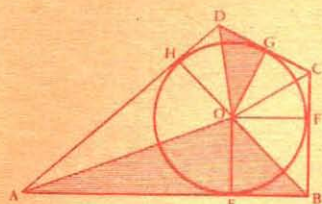


Fig. 262

Representando el perímetro por $2p$, tendremos :

$$\text{Área total} = \frac{1}{2} R \cdot 2p, \text{ o sea } A = p \cdot R,$$

producto del semiperímetro por el radio del círculo inscrito.

343. Escolio. De lo demostrado, se deduce que el área de un triángulo es igual al producto de su semiperímetro por el radio del círculo inscrito en él.

NOTA. Conocidos los tres lados de un triángulo, se puede hallar el área del mismo por medio de la fórmula :

Área = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, en la cual p representa el semiperímetro, y a, b, c los lados del triángulo. (Véase N^o 389).

Teorema.

344. Área del trapecio. *El área de un trapecio es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases.*

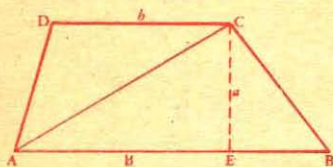


Fig. 263

La diagonal AC divide el trapecio ABCD en dos triángulos cuya altura común es la del trapecio, y cuyas bases respectivas son las del mismo :

$$AB = B \text{ y } CD = b$$

Luego el área del trapecio será igual a la suma de las áreas de ambos triángulos, o sea :

$$A = \frac{1}{2} Ba + \frac{1}{2} ba = \frac{1}{2} (B + b) a$$

$$A = a \frac{(B + b)}{2}$$

345. Corolario. *El área del trapecio es igual al producto de su altura por la base media¹.*

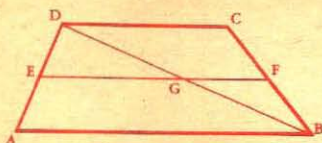


Fig. 264

Sea el trapecio ABCD, y E, F, los puntos medios de los lados no paralelos.

El área del trapecio es :

$$A = a \cdot \frac{B + b}{2} \quad (\text{n}^{\circ} 344)$$

Pero ya tenemos (n^o 116) :

$$\frac{B + b}{2} = EF$$

Luego

$$A = a \quad EF.$$

¹ Llámase *base media* a la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.

346. Área de un cuadrilátero cualquiera. El área de un cuadrilátero cualquiera es igual al producto de una diagonal por la semisuma de las perpendiculares bajadas a esta diagonal desde los otros dos vértices.

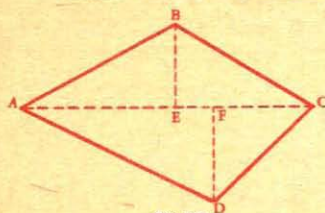


Fig. 265

Así, el área del cuadrilátero ABCD será :

$$A = AC \times \frac{BE + FD}{2}.$$

347. Área de un polígono cualquiera. Para hallar el área de un polígono cualquiera, se pueden emplear varios procedimientos.

1^{er} Procedimiento (fig. 266). Se descompone el polígono en triángulos, se calcula separadamente el área de cada uno de ellos, y por último se suman las áreas parciales.

$$\text{Área del triángulo ABE} = \frac{1}{2} (10 \times 18) = 90$$

$$\text{» » BCE} = \frac{1}{2} (20 \times 13) = 130$$

$$\text{» » DCE} = \frac{1}{2} (20 \times 11) = 110$$

$$\text{Área del polígono} = \underline{\underline{330 \text{ m}^2}}.$$

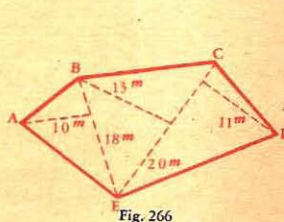


Fig. 266

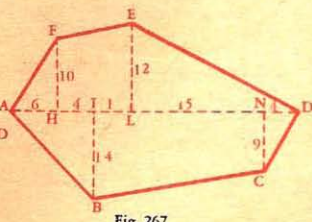


Fig. 267

2^o Procedimiento (fig. 267). Se descompone el polígono en triángulos y trapecios rectángulos.

Para ello se traza una diagonal AD, y desde los demás vértices se bajan perpendiculares a la misma.

Se buscan separadamente las áreas de los triángulos y trapecios, y luego se suman estas áreas parciales.

$$\text{Área del triángulo AFH} = \frac{1}{2} (6 \times 10) = 30$$

$$\text{» » ABI} = \frac{1}{2} (10 \times 14) = 70$$

$$\text{Área del triángulo ELD} = \frac{1}{2} (19 \times 12) = 114$$

$$\text{» » DNC} = \frac{1}{2} (9 \times 4) = 18$$

$$\text{Área total de los triángulos} = 232 \quad \underline{232\text{m}^2}$$

$$\text{Área del trapecio ELHF} = 11 \left(\frac{10 + 12}{2} \right) = 121$$

$$\text{» » INCB} = 22 \left(\frac{14 + 9}{2} \right) = 253$$

$$\text{Área total de los trapecios} = 374 \quad \underline{374\text{m}^2}$$

$$\text{Área del polígono} = \underline{606\text{m}^2}$$

NOTA. Esta división llamada *trapezial* se emplea con mucha frecuencia en agrimensura.

Teorema.

348. Área de un polígono regular. *El área de un polígono regular es igual al semiproducto de su perímetro por su apotema.*

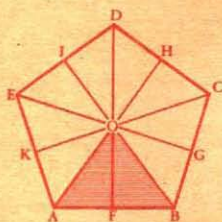


Fig. 268

Sea por ejemplo ABCDE un pentágono regular.

Las rectas OA, OB, OC, ... que unen el centro con los vértices, descomponen el pentágono en 5 triángulos iguales que tienen por base el lado l , y por altura el apotema a .

Siendo el área de cada triángulo $\frac{la}{2}$, el

área total será:

$$A = 5 \cdot \frac{la}{2} = \frac{5l \cdot a}{2}$$

Pero $5l$ representa el perímetro del polígono; luego, el área

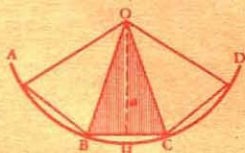


Fig. 269

349. Corolario. *El área de un sector poligonal regular es igual al semiproducto de la línea poligonal por el apotema.*

Área del sector:

$$\text{OABCD} = \frac{3BC}{2} \cdot a$$

Teorema.

350. Área del círculo. *El área del círculo es igual al semiproducto de la circunferencia por el radio.*

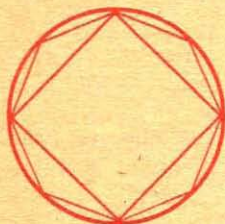


Fig. 270

Ya sabemos que la *circunferencia* es el límite del *perímetro* de un polígono regular inscrito en que el número de lados va duplicándose indefinidamente, y el *radio* es el límite del *apotema*; luego, llamando C a la circunferencia, y R al radio, el área del círculo será :

$$A = \frac{C \times R}{2} \quad (1)$$

351. Corolarios. I. *El área de un círculo es igual al producto del número π por el cuadrado del radio.*
o: a la cuarta parte del producto del número π por el cuadrado del diámetro.

En efecto: 1º si en la fórmula (1) sustituimos la circunferencia (C) por su valor $2\pi R$ (nº 287), resultará :

$$A = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2 \quad (2)$$

2º Si en la fórmula (2) sustituimos R por $\frac{D}{2}$, resultará :

$$A = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{\pi D^2}{4} \quad (3)$$

352. II. *El área de un círculo es igual al producto de $\frac{1}{\pi}$ por el cuadrado de la semicircunferencia.*

En la fórmula (3) podemos sustituir D por $\frac{C}{\pi}$ (nº 288), y tendremos :

$$A = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{C}{\pi} \right)^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{C^2}{\pi^2} = \frac{C^2}{4\pi},$$

o sea :

$$A = \frac{1}{\pi} \left(\frac{C}{2} \right)^2. \quad (4)$$

Teorema.

353. Área del sector circular. *El área de un sector circular es igual a la mitad del producto de su arco por el radio*

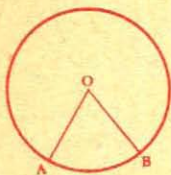


Fig. 271

Porque el sector circular es el límite del sector poligonal regular en que el número de lados va aumentando indefinidamente. Entonces la línea poligonal se confunde con el arco, y el apotema con el radio.

Luego, el área del sector circular será igual (nº 349) al semiproducto de su arco por el radio.

354. Escolio. Siendo el área de un sector circular proporcional a su arco, también lo será su ángulo en el centro.

Luego, el área del sector de un grado será $\frac{\pi R^2}{360}$, y el área de

un sector de n grados :

$$A = \pi R^2 \times \frac{n}{360}$$

355. Corolarios. — I. Área del segmento circular. El área del segmento circular ABC, (fig. 272) es igual al área del sector AOB, menos el área del triángulo AOB.



Fig. 272

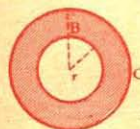


Fig. 273

356. — II. Área de la corona circular. La corona circular es la diferencia de dos círculos concéntricos.

Luego el área de la corona C (fig. 273) será :

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Luego, el área de una corona circular es igual al producto de π por la diferencia entre los cuadrados de los radios de los círculos que determinan dicha corona.

CAPITULO II

RELACIONES MÉTRICAS ENTRE LAS ÁREAS

Teorema de Pitágoras ¹.

357. En todo triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Sea el triángulo rectángulo ABC, y M, P, Q los cuadrados construidos sobre los tres lados.

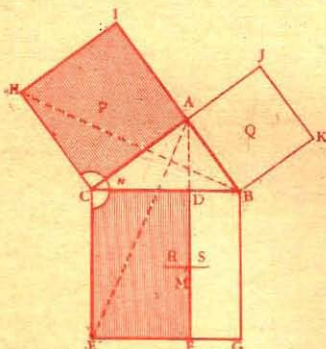


Fig. 274

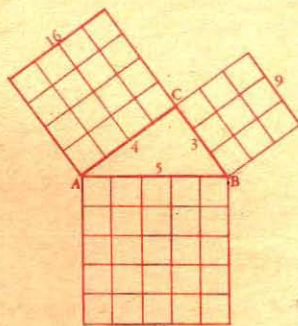


Fig. 275

Desde el vértice A, bajemos la perpendicular ADF a la hipotenusa CB, tracemos AE y BH, y consideremos los triángulos ACE y BCH.

Los ángulos ACE y BCH son iguales por componerse cada uno de un ángulo recto y de la parte común n ; además los lados AC y CH son iguales como lados de un mismo cuadrado; por la misma razón lo son también los lados CE y CB; luego estos triángulos son iguales (nº 60).

Ahora bien, el triángulo ACE es equivalente a la mitad del rectángulo CEFD, o R, porque ambos tienen la misma base CE y la misma altura CD; asimismo el triángulo BCH es equivalente a la mitad del cuadrado P por tener la misma base CH y la misma altura CA.

Luego, el rectángulo R y el cuadrado P son equivalentes por tener mitades equivalentes. Del mismo modo se demostraría que el rectángulo S es equivalente al cuadrado Q.

Luego : $R + S = P + Q$
 $M = P + Q$.

¹ Célebre matemático griego, siglo VIº a. J. C.

358. Corolario. *El cuadrado construido sobre un cateto es equivalente al cuadrado construido sobre la hipotenusa, menos el cuadrado construido sobre el otro cateto.*

359. NOTA. Si se construyesen tres figuras cualesquiera semejantes sobre los tres lados de un triángulo rectángulo, el área de la figura construida sobre la hipotenusa sería equivalente a la suma de las áreas de las figuras construidas sobre los catetos.

Teorema.

360. *Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales a los cuadrados de sus lados o de sus líneas homólogas.*

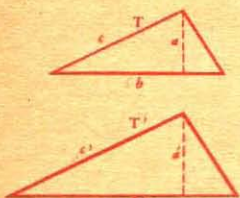


Fig. 276

Sean T y T' dos triángulos semejantes.

Bajemos las perpendiculares a y a' que determinan las alturas homólogas. Como las dimensiones homólogas son proporcionales (nº 269), tendremos:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}, \quad \text{y} \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'};$$

multiplicando ordenadamente, resultará:

$$\frac{ba}{b'a'} = \frac{c^2}{c'^2}.$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{ba}{b'a'}.$$

Pero

$$\frac{T}{T'} = \frac{ba}{b'a'}. \quad (\text{nº 340})$$

luego,

$$\frac{T}{T'} = \frac{c^2}{c'^2}.$$

Teorema.

361. *Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales a los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Sean P y P' dos polígonos semejantes.

Descompongamos estos polígonos en triángulos semejantes (nº 279), S y S', T y T', U y U'.

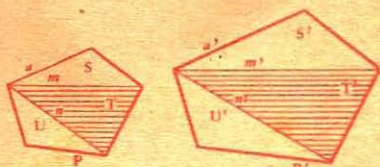


Fig. 277

Como dichos triángulos son proporcionales a los cuadrados de sus lados homólogos, tendremos:

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{S}{S'} = \frac{m^2}{m'^2} = \frac{T}{T'} = \frac{n^2}{n'^2} = \frac{U}{U'}$$

Por lo tanto

$$\frac{S}{S'} = \frac{T}{T'} = \frac{U}{U'}$$

De esta serie de razones iguales se deduce:

$$\frac{S + T + U}{S' + T' + U'} = \frac{P}{P'} = \frac{S}{S'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{m^2}{m'^2}$$

Luego, las áreas...

362. **Corolario.** Las áreas de dos polígonos regulares de igual número de lados son proporcionales a los cuadrados de sus líneas homólogas; porque dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes (nº 282).

Teorema.

363. Las áreas de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de sus radios o de sus diámetros.

Porque se pueden considerar los círculos como los límites de dos polígonos regulares cuyo número de lados va duplicándose indefinidamente.

Por otra parte llamando A y A' a las áreas de los círculos, tendremos:

$$\frac{A}{A'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} = \frac{R^2}{R'^2};$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{\frac{1}{4} \pi D^2}{\frac{1}{4} \pi D'^2} = \frac{D^2}{D'^2}$$

364. **Escolio.** Las propiedades que acabamos de estudiar en los últimos teoremas quedan incluidas en la siguiente proposición:

Las áreas de dos figuras semejantes son proporcionales al cuadrado de dos líneas homólogas cualesquiera.

Llamando A y A' a las áreas de dos figuras semejantes, l y l' a dos líneas homólogas de estas figuras, tendremos la relación:

$$\frac{A}{A'} = \frac{l^2}{l'^2}$$

Pero, siendo la razón de semejanza $\frac{l}{l'} = k$, tendremos tam-

bien:

$$\frac{A}{A'} = k^2.$$

De donde se infiere que la razón de las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

Teorema.

365. Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual o suplementario son proporcionales a los productos de los lados que forman dicho ángulo.

Sean ABC y $AB'C'$ dos triángulos que tienen el ángulo A igual (fig. 278), o suplementario (fig. 279).

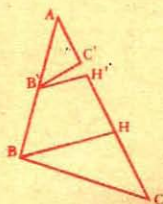


Fig. 278

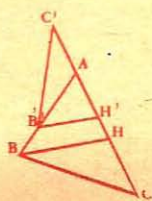


Fig. 279

Estos triángulos son proporcionales a los productos de las bases AC , AC' , por las alturas BH , $B'H'$ (n.º 340); luego:

$$\frac{ABC}{AB'C'} = \frac{AC \cdot BH}{AC' \cdot B'H'}$$

En los triángulos semejantes ABH y $AB'H'$ tenemos:

$$\frac{BH}{B'H'} = \frac{AB}{AB'}$$

y sustituyendo, resulta: $\frac{ABC}{AB'C'} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}$, conforme con el enunciado.

Luego, las áreas de dos triángulos...

APLICACIONES

RÉLACIONES ENTRE LAS ÁREAS

§ I. — Aplicaciones del teorema de Pitágoras

366. Problema. Construir un cuadrado equivalente a la suma de otros dos M y N.

1º Solución gráfica (fig. 280). Se traza un ángulo recto A, sobre cuyos lados se toma la distancia AB igual al lado del cuadrado

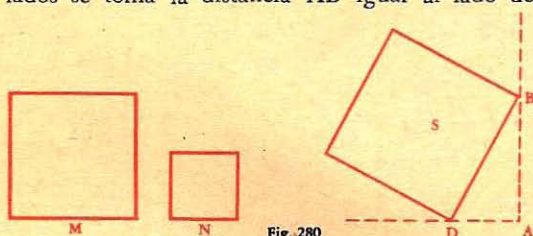


Fig. 280

M, y AD igual al lado del cuadrado N; luego se traza BD, que será el lado del cuadrado S, equivalente a $M + N$.

En efecto, el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos (nº 357).

2º Solución numérica. Sea 14^{mm} la longitud del lado del cuadrado M, y 7^{mm} 2, la del cuadrado N: llamemos x al lado del cuadrado equivalente a la suma, y tendremos:

$$x^2 = 14^2 + 7,2^2 = 196 + 51,84 = 247,84$$

y extrayendo la raíz cuadrada,

$$x = 15^{\text{mm}} 74.$$

367. NOTA. De igual modo, se obtendrá una figura semejante y equivalente a la suma de otras dos.

Por ejemplo, siendo rectángulo el triángulo ABD (fig. 281), si los lados AB y AD son los diámetros de dos semicírculos, BD será el diámetro del semicírculo equivalente a la suma de los otros dos.

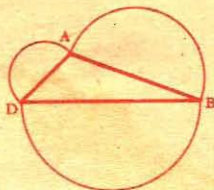


Fig. 281

Lo mismo ocurriría si AB, AD y BD fuesen los lados de tres polígonos regulares de igual número de lados.

368. Problema. Construir un cuadrado que sea equivalente a la diferencia de otros dos M y N (fig. 282).

1º Solución gráfica. Se traza un ángulo recto A; se toma la distancia AB igual al lado del cuadrado N, desde el punto B, con un radio igual al lado del cuadrado M, se corta el otro lado del ángulo recto, y por último, sobre AC se construye el cuadrado D, que será equivalente a $M - N$.

En efecto el cuadrado construido sobre un cateto, es equivalente al cuadrado construido sobre la hipotenusa, menos el cuadrado construido sobre el otro cateto.

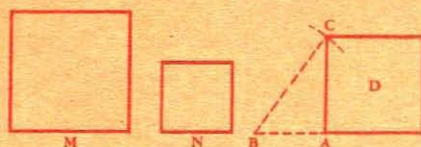


Fig. 282

2º *Solución numérica.* Sean $14^{\text{mm}} 6$ y $7^{\text{mm}} 8$ los lados de los cuadrados M y N, y x el lado del cuadrado equivalente a la diferencia, tendremos :

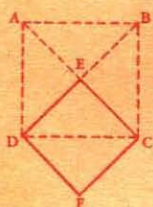
$$x^2 = \overline{14,6^2} - \overline{7,8^2} = 213,16 - 60,84 = 152,32$$

Y, extrayendo la raíz cuadrada,

$$x = 12^{\text{mm}} 34$$

NOTA. Si se trata de otra clase de figuras semejantes, véase el nº 367.

369. Problema. Construir un cuadrado que sea el duplo de otro dado DECF (fig. 283).

Fig. 283 $x^2 = 2 \times 8,48^2 = 2 \times 71,91 = 143,82$

1º *Solución gráfica.* Se toma por lado la diagonal DC del cuadrado propuesto, y el cuadrado CDAB será el duplo del cuadrado DECF.

En efecto :

$$\overline{DC^2} = \overline{DF^2} + \overline{CF^2} = \overline{2 DF^2}$$

2º *Solución numérica.* Sea $8^{\text{mm}} 48$ la longitud del lado del cuadrado dado; debemos tener :

Y, extrayendo la raíz cuadrada :

$$x = 11,98.$$

370. Problema. Construir una figura semejante a otra dada y doble en superficie.

Se traza un ángulo recto O (fig. 284); en OM y ON se toma una dimensión a de la figura dada; en la figura doble, la línea MN o a' será la homóloga de a .

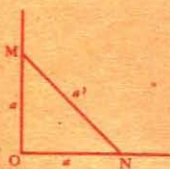


Fig. 284

En efecto, siendo el cuadrado de a' el doble del cuadrado de a , la figura construida sobre a' será el doble de la figura semejante construida sobre a .

Por ejemplo, si a es el lado de un triángulo equilátero, a' será el lado de otro triángulo equilátero de superficie doble.

371. Problema. Construir un cuadrado que sea la mitad de otro dado.

1º *Solución gráfica.* Se toma la longitud del lado del cuadrado como diámetro y se describe una semicircunferencia (fig. 285); luego se levanta una perpendicular en la mitad del diámetro, y se trazan las rectas AC y BC. Cada una de estas líneas será el lado del cuadrado pedido.

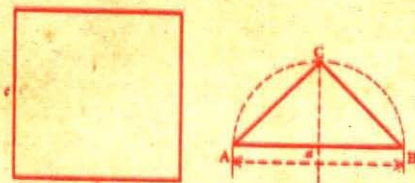


Fig. 285

En efecto, el triángulo rectángulo ABC es isósceles, y el cuadrado de AB es igual a la suma de los cuadrados de AC y BC, o a dos veces el cuadrado de BC.

2º *Solución numérica.* Sea 9^m la longitud del lado del cuadrado conocido; tendremos:

$$x^2 = \frac{9^2}{2} = \frac{81}{2} = 40,50$$

Y extrayendo la raíz cuadrada:

$$x = 6,36.$$

NOTA. Del mismo modo se construye una figura cualquiera semejante a otra dada y cuya superficie sea la mitad de la misma.

La hipotenusa AB (fig. 285) es un lado de la figura dada, y BC el lado homólogo de la figura que se desea.

372. Problema. Construir un cuadrado que esté con otro cuadrado N en una relación dada, los tres cuartos por ejemplo.

1er Procedimiento. Sobre AB, lado del cuadrado (fig. 286), se describe una semicircunferencia; en el punto H,

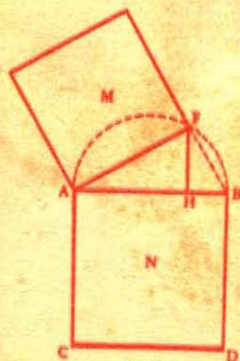


Fig. 286

tomado en los $\frac{3}{4}$ de AB, se levanta la perpendicular HF; la cuerda AF será el lado del cuadrado pedido.

En efecto, trazando FB tenemos un triángulo AFB rectángulo en F. Ya sabemos que la razón del cuadrado construido sobre un cateto y el cuadrado de la hipotenusa es igual a la razón de la proyección de este lado sobre la hipotenusa y la hipotenusa entera.

Luego

$$\frac{M}{N} = \frac{3}{4}.$$

373. 2º Procedimiento. Sobre una recta AB (fig. 287) se señalan $3 + 4$ o 7 partes iguales, se describe una semicircunferencia sobre AB; y por el punto O, que deja cuatro divisiones a un lado y tres al otro, se levanta una perpendicular DOF; luego se trazan las rectas DAE y DBC; se toma DE igual al lado del cuadrado dado, y se traza EC paralela a AB. La recta DC será el lado del cuadrado pedido.

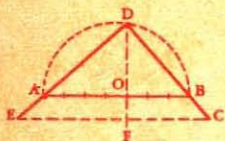


Fig. 287

En efecto, siendo el triángulo CDE rectángulo en D, la razón de los cuadrados de los lados DC y DE es igual a la razón de los segmentos FC y FE, o a la razón de OB y OA, esto es a la de los números 3 y 4.

Solución numérica. Sea un cuadrado de 12^m de lado; debemos tener:

$$\frac{x^2}{12^2} = \frac{3}{4}$$

de donde
$$x^2 = \frac{3 \times 144}{4} = 108.$$

Y extrayendo la raíz cuadrada:

$$x = \sqrt{108} = 10,39.$$

§ II — Área de los polígonos regulares

en función del radio del círculo circunscrito.

374. Problema. *Expresar, en función del radio, el área del triángulo equilátero inscrito en un círculo.*

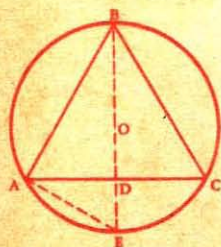


Fig. 288

Sea el triángulo equilátero ABC, inscrito en el círculo O.

Tracemos el diámetro EB y la recta AE, que será el lado del exágono, y por consiguiente igual al radio.

Área del triángulo ABC:

$$A = \frac{AC \times BD}{2}.$$

Ya sabemos que:

$$AB \text{ o } AC = R \sqrt{3} \quad (\text{n}^\circ 303)$$

$$BD = \frac{AB}{2} \sqrt{3} \quad (\text{n}^\circ 304)$$

y

o sea

$$BD = \frac{R \sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3R}{2}.$$

Luego,

$$A = \frac{R \sqrt{3}}{2} \times \frac{3R}{2} = \frac{3R^2}{4} \sqrt{3}.$$

Aplicación. En un círculo de radio igual a $0^m,5$ el área del triángulo equilátero inscrito será :

$$\frac{3}{4} \times 0,5^2 \times \sqrt{3} = \frac{3}{4} \times 0,25 \times 1,732 = 0^m2,325.$$

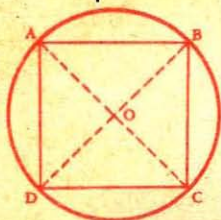


Fig. 289

375. Problema. Expresar, en función del radio, el área del cuadrado inscrito en un círculo.

En el triángulo AOB, rectángulo en O, tenemos :

$$\overline{AB^2} = \overline{AO^2} + \overline{BO^2} \quad (\text{n}^\circ 357)$$

o sea

$$\overline{AB^2} = R^2 + R^2$$

$$\text{Luego,} \quad A = 2R^2.$$

376. Problema. Expresar, en función del radio, el área del octógono regular inscrito en un círculo.

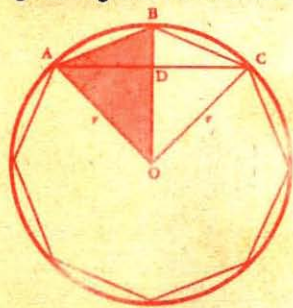


Fig. 290

El área del triángulo AOB es igual a

$$\frac{1}{2} \overline{BO} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} R \times \overline{AD}$$

En el triángulo rectángulo AOC tenemos :

$$\overline{AC^2} = \overline{AO^2} + \overline{OC^2} = 2R^2$$

$$\overline{AC} = R\sqrt{2}$$

$$\text{Y} \quad \overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{R}{2} \sqrt{2}$$

Luego, el área del triángulo AOB es igual a

$$\frac{1}{2} R \times \frac{R}{2} \sqrt{2} = \frac{R^2}{4} \sqrt{2}.$$

Y como el octógono regular consta de ocho triángulos iguales al triángulo AOB, su área será :

$$A = \frac{8 \times R^2 \sqrt{2}}{4} = 2R^2 \sqrt{2} = R^2 \sqrt{8}$$

377. Problema. Expresar, en función del radio, el área del dodecágono regular inscrito.

El área del triángulo AOB es igual a :

$$\frac{1}{2} \overline{BO} \times \overline{AI};$$

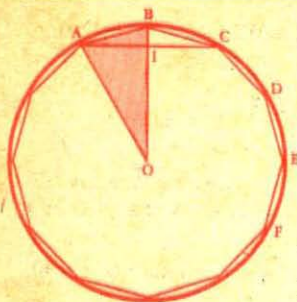


Fig. 291

pero

$$BO = R$$

$$AC = R$$

y

$$AI = \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$$

Luego el triángulo

$$AOB = \frac{R}{2} \times \frac{R}{2} = \frac{R^2}{4}$$

Y como el dodecágono regular consta de 12 triángulos iguales al triángulo AOB, su área será:

$$A = 12 \times \frac{R^2}{4} = 3R^2$$

§ III. — Área de los polígonos regulares, en función de su lado.

378. Problema. *Expresar, en función del lado, el área del triángulo equilátero.*

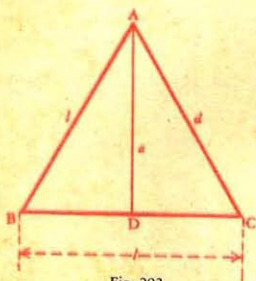


Fig. 292

El área del triángulo ABC es

$$\frac{l \times a}{2}$$

Ya sabemos que

$$a = \frac{l}{2} \sqrt{3} \quad (\text{n}^\circ 304).$$

Sustituyendo a por su valor, tendremos:

$$A = \frac{l}{2} \times \frac{l}{2} \sqrt{3} = \frac{l^2}{4} \sqrt{3}$$

379. NOTA. El área de un triángulo equilátero puede también calcularse en función de la altura.

En efecto, de la expresión $a = \frac{l}{2} \sqrt{3}$ (nº 304) se saca:

$$l = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \text{ o sea } l = \frac{2a}{3} \sqrt{3}$$

Sustituyendo este valor en la fórmula del área del triángulo

$$A = \frac{l \times a}{2}, \text{ resultará:}$$

$$A = \frac{2a \sqrt{3}}{3} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$$

380. Problema. Expresar, en función del lado, el área del exágono regular.

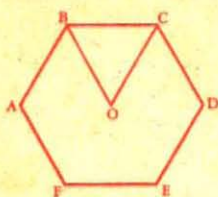


Fig. 293

El exágono regular se compone de seis triángulos equiláteros que tienen l por lado, y cuya área es $\frac{l^2}{4} \sqrt{3}$ (nº 378).

$$\text{Luego } A = \frac{6l^2}{4} \sqrt{3} = \frac{3l^2}{2} \sqrt{3}$$

381. Problema. Expresar, en función del lado, el área del octógono regular.

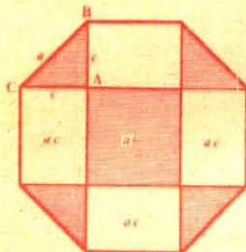


Fig. 294

El triángulo rectángulo ABC es isósceles; luego :

$$\begin{aligned} 2c^2 &= a^2 \\ c^2 &= \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^2}{2} \\ c &= \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

El octógono se compone :

- 1º de un cuadrado central con a por lado, y cuya área es a^2 ;
- 2º de 4 rectángulos cuyas dimensiones son a y c , y su área, $4ac$,

o sea $4a \times \frac{a}{\sqrt{2}} = 2a^2 \sqrt{2}$;

- 3º de 4 triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos son c ; cada uno tiene por área :

$$\frac{c^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} a^2;$$

el área de los cuatro será a^2 .

Luego el área del octógono será :

$$A = a^2 + 2a^2 \sqrt{2} + a^2 = 2a^2 + 2a^2 \sqrt{2} = a^2 (2 + 2\sqrt{2})$$

o sea $A = 2a^2 (1 + \sqrt{2})$

382. TABLA DE LAS ÁREAS DE ALGUNOS POLÍGONOS REGULARES DE l^m DE LADO

Triángulo equilátero = $0^{m^2},433$	Octógono regular = $4^{m^2},8284$
Cuadrado = 1^{m^2}	Decágono regular = $7^{m^2},6942$
Pentágono regular.. = $1^{m^2},7205$	Dodecágono " = $11^{m^2},1962$
Exágono regular.... = $2^{m^2},5981$	

Para hallar, con ayuda de esta tabla, el área de un polígono regular de número determinado de lados, basta multiplicar el número de la tabla por el cuadrado del lado del polígono dado.

Para hallar el lado de un polígono regular cuya área se conoce, basta dividir ésta por el número de la tabla y extraer la raíz cuadrada del cociente.

§ IV. — Problemas relativos al área de los triángulos.

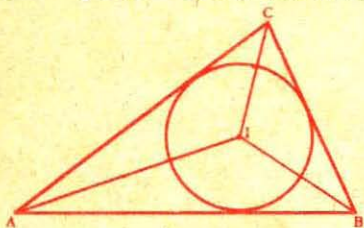


Fig. 295

383. Problema. Expresar el área de un triángulo, en función del radio del círculo inscrito.

Representando por a, b, c los lados del triángulo, por p su semi-suma, por r el radio del círculo inscrito, tendremos:

$$A = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{a+b+c}{2} r$$

$$A = pr.$$

o sea

384. Problema. Expresar en función del radio, y de los lados, el área de un triángulo inscrito en un círculo.

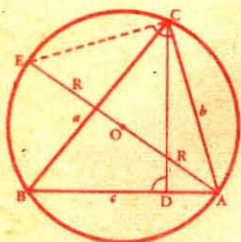


Fig. 296

Sea ABC un triángulo cualquiera, CD o h su altura, AE o $2R$ el diámetro del círculo circunscrito. Tracemos CE.

Los dos triángulos rectángulos CDB y ACE son semejantes por tener iguales los ángulos agudos B y E; luego tenemos:

$$\frac{a}{2R} = \frac{h}{b}$$

de donde $ab = 2Rh$.

Multipliquemos ambos miembros por AB o c .

$$2Rhc = abc$$

Pero hc es el duplo del área, o sea $2A$, luego:

$$2R \cdot 2A = abc$$

de donde

$$A = \frac{abc}{4R}$$

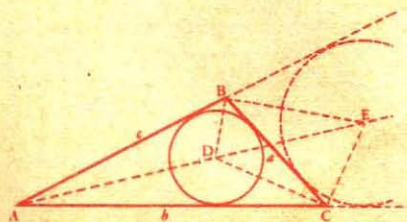


Fig. 297

385. Problema. Expresar el área de un triángulo, en función del radio r', r'', r''' de uno de los círculos ex-inscritos.

Sea E el centro del círculo ex-inscrito en el ángulo A. La figura da para el área del triángulo ABC:

$$A = EAC + EAD - EBC$$

$$\text{o sea } A = \frac{br'}{2} + \frac{cr'}{2} - \frac{ar'}{2} = \frac{b+c-a}{2} \cdot r' \quad (1)$$

Si tomamos $a + b + c = 2p$, resultará :

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a)$$

Luego, la fórmula (1) se convierte en la siguiente :

$$A = (p - a) r'$$

Asimismo tendríamos :

$$A = (p - b) r'', \text{ y } A = (p - c) r'''$$

Problema. *Buscar las relaciones que existen entre los lados de un triángulo, y los segmentos determinados en ellos por los puntos de contacto de los círculos inscritos y ex-inscritos.*

386. *Círculo inscrito.* Los puntos de contacto del círculo inscrito determinan seis segmentos iguales de dos en dos, por ser tangentes trazadas desde un mismo punto.

$$AG = AH; BH = BI; CI = CG$$

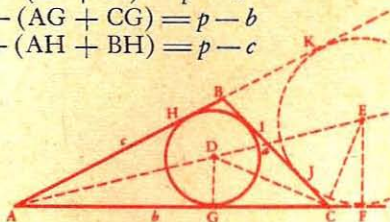
por lo tanto $2AG + 2BH + 2CI = a + b + c = 2p$

luego : $AG = p - (CI + BI) = p - a$

asimismo, $BH = p - (AG + CG) = p - b$

$$CG = p - (AH + BH) = p - c$$

Fig. 298.



387. *Círculos ex-inscritos.* Considerando AF y AK, tangentes al círculo ex-inscrito, tenemos :

$$2AK = 2AF = AC + AB + CF + BK$$

pero $CF + BK = CJ + BJ = a$

luego $2AK = 2AF = a + b + c = 2p$

de donde $AK = AF = p$

por lo tanto $CF = p - b$ y $BK = p - c$.

388. *NOTA.* — Tenemos: $BH = BI = CF = CJ = p - b$

asimismo, $CG = CI = BJ = BK = p - c$

$$GF = HK = a.$$

389. *Problema.* *Expresar, en función de sus tres lados, el área de un triángulo.*

Expresemos primero el área del triángulo, en función del radio r del círculo inscrito, y en función del radio r' del círculo ex-inscrito en el ángulo A.

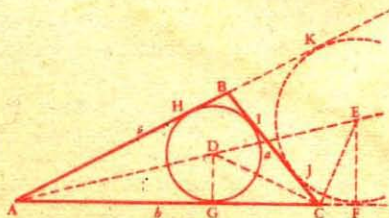


Fig. 299

Tenemos : $A = pr$ (nº 383)

y $A = (p-a)r'$ (nº 385)

Multiplicando ordenadamente, resultará :

$$A^2 = p(p-a)rr' \quad (1)$$

Expresemos rr' en función de los lados.

Los triángulos CDG y CFF, semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares, dan :

$$\frac{r}{CF} = \frac{CG}{r'}$$

de donde

$$rr' = CF \cdot CG$$

esto es

$$rr' = (p-b)(p-c) \quad (\text{Nos. 387 y 386})$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (1), tendremos:

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

Luego

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (2)$$

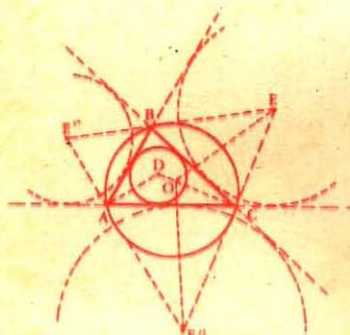


Fig. 300

390. Problema. Expresar el área de un triángulo, conociendo los radios r, r', r'', r''' de los círculos inscritos y ex-inscritos.

Multiplicando ordenadamente las cuatro fórmulas de los números 383 y 385, tendremos:

$$A^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)rr'r''r'''$$

Dividamos ordenadamente por la fórmula (2) del Nº 389:

$$\frac{A^4}{A^2} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)rr'r''r'''}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$A^2 = rr'r''r'''$$

o sea

Luego

$$A = \sqrt{rr'r''r'''}$$

§ V. — Transformación de figuras.

391. Llámase *cuadratura* de una figura a la transformación de dicha figura en un cuadrado equivalente. Toda figura puede transformarse en un rectángulo equivalente, y todo rectángulo en un cuadrado equivalente.

392. Sea cual fuere la figura dada, el lado del cuadrado equivalente siempre es medio proporcional entre las dos líneas cuyo producto representa el área de la figura; por lo tanto:

Para un paralelogramo, entre la base y la altura;

Para un triángulo, entre la base y la semialtura;

Para un trapecio, entre la altura y la semisuma de las bases;
 Para un polígono regular, entre el ápotema y el semiperímetro;
 Para un círculo, entre el radio y la semicircunferencia ¹.

393. Problema I. *Transformar un rectángulo R en un cuadrado equivalente.*

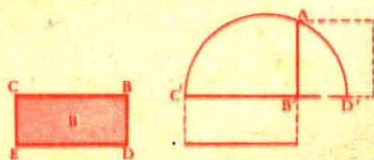


Fig. 301

El caso se reduce a buscar un cuadrado cuyo lado sea una media proporcional entre las dos dimensiones del rectángulo dado (Nº 392).

Sobre una recta se toma $C'B' = CB$, y $B'D' = BD$; sobre $C'D'$ como diámetro se describe una semicircunferencia.

La perpendicular $B'A$, levantada en el punto B' , será el lado del cuadrado equivalente al rectángulo R, porque tenemos:

$$\overline{AB'}^2 = C'B' \times B'D' \quad (\text{Nº } 306).$$

394. Problema II. *Transformar un paralelogramo ABCD en un rectángulo equivalente.*

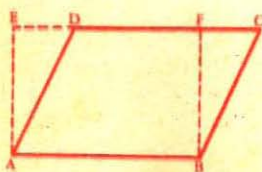


Fig. 302

Se prolonga el lado CD y se trazan las rectas AE y BF perpendiculares a AB.

El rectángulo ABFE será equivalente al paralelogramo ABCD (Nº 336).

395. Problema III. *Transformar un trapecio:*

- 1º En un paralelogramo equivalente;
- 2º En un rectángulo "
- 3º En un triángulo "
- 4º En un cuadrado "

1º Para transformar el trapecio ABCD (fig. 303) en un paralelogramo equivalente se prolonga el lado DC, y por el punto E mitad de BC, se traza la recta HF paralela a DA.

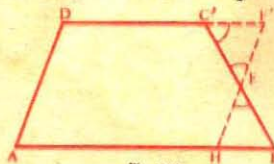


Fig. 303

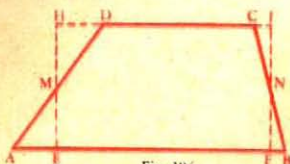


Fig. 304

El paralelogramo será equivalente al trapecio dado, por ser iguales los triángulos CEF y BEH.

¹ Conviene advertir que es imposible hallar con exactitud el lado del cuadrado equivalente al círculo, por entrar como factor del área la relación de la circunferencia al diámetro (π) que es una cantidad inconmensurable. De modo que la cuadratura del círculo es irresoluble con los auxilios que presta la Geometría.

2º Para obtener un rectángulo equivalente al trapecio ABCD (fig. 304), basta prolongar en ambos sentidos la base menor DC, y trazar por los puntos M y N, mitades de los lados no paralelos, las rectas EH e IF perpendiculares a las bases.

El rectángulo EFIH será equivalente al trapecio.

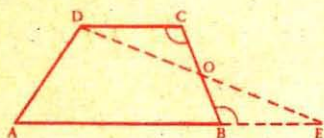


Fig. 305

3º Para transformar el trapecio ABCD (fig. 305) en un triángulo equivalente se prolonga la base mayor, de una longitud BE igual a la base menor DC; luego se traza la recta DE.

El triángulo ADE será equivalente al trapecio por ser iguales los triángulos COD y BOE.

4º Para obtener un cuadrado equivalente se transforma primero el trapecio en un triángulo o rectángulo equivalente que a su vez se transforman en un cuadrado también equivalente.

[396.] Problema IV. Transformar un triángulo cualquiera:

1º En un triángulo isósceles equivalente;

2º En un triángulo rectángulo "

3º En un paralelogramo "

4º En un rectángulo "

1º Para transformar el triángulo ABC (fig. 306) en un triángulo isósceles equivalente, se levanta en la mitad de AB la perpendicular MD, y por el punto C se traza la recta CD paralela a la base AB.

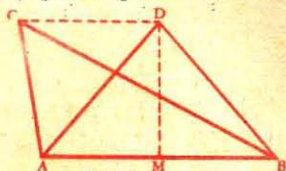


Fig. 306

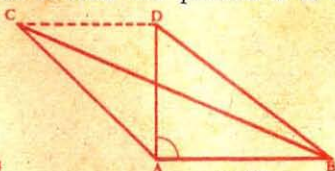


Fig. 307

El triángulo isósceles ADB será equivalente al triángulo ACB por tener la misma base e igual altura.

2º Para obtener un triángulo rectángulo (fig. 307) se levanta AD perpendicular a AB, y se traza la recta CD paralela a AB.

El triángulo rectángulo ADB será equivalente al triángulo ACB por tener la misma base e igual altura.

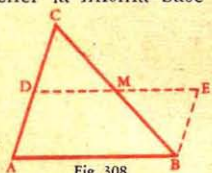


Fig. 308

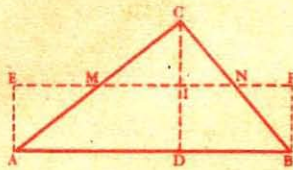


Fig. 309

3º Para transformar el triángulo ABC (fig. 308) en un paralelogramo equivalente, se traza BE paralela a AC; luego por el punto M, mitad de BC, se traza la recta DE paralela a AB.

El paralelogramo ABED será equivalente al triángulo ABC por ser iguales los triángulos CDM y BEM.

4º Para obtener un rectángulo equivalente al triángulo ABC (fig. 309) se trazan las rectas AE, BF y CD perpendiculares a AB; luego por I, punto medio de CD, se traza EF paralela a AB.

El rectángulo ABFE será equivalente al triángulo ACB por ser los triángulos CIM y CIN respectivamente iguales a los triángulos AEM y NFB.

397. Problema V. Transformar un cuadrilátero cualquiera ABCD (fig. 310) en un rectángulo equivalente.

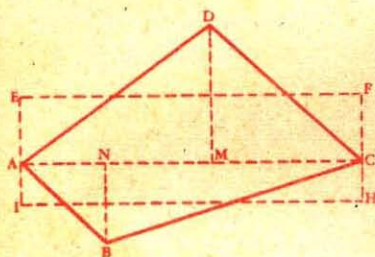


Fig. 310

Se traza la diagonal AC y las perpendiculares DM, BN, HF y EI. Por los puntos medios de las perpendiculares DM y BN se trazan EF e IH paralelas a AC.

El rectángulo EFHI será equivalente al cuadrilátero ABCD; en efecto, el rectángulo AEFC es equivalente al triángulo ADC, y el rectángulo ACHI lo es al triángulo ABC (nº 396).

398. Problema VI. Transformar un polígono BACEF (fig. 311) en un polígono equivalente que tenga un lado menos.

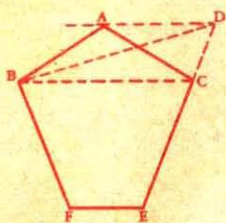


Fig. 311

Se traza la diagonal BC, y por el punto A una paralela a BC; se prolonga EC hasta que encuentre a AD.

El polígono BDEF tiene un lado menos que BACEF y es equivalente.

En efecto, ambos polígonos constan de una parte común BCEF y de los triángulos BAC y BDC, que son equivalentes por tener la misma base BC e igual altura (Nº 399).

399. Problema VII. Transformar un polígono ABCDE (fig. 312) en un triángulo equivalente.

Basta transformar, como en el problema anterior, el polígono dado en otro que tenga un lado menos, y así sucesivamente hasta obtener el triángulo deseado.

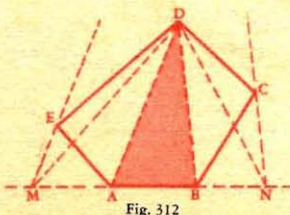


Fig. 312

Se traza la diagonal AD, luego EM paralela a esta diagonal, y se prolonga AB hasta M. Se traza DB, luego CN paralela a esta diagonal y se prolonga AB hasta N. El triángulo MDN será equivalente al polígono ABCDE.

En efecto, las dos figuras constan de una parte común ABD y de los triángulos ADE y BCD, respectivamente equivalentes a los triángulos ADM y BDN

§ VI. — División de figuras.

400. Problema I. *Dividir un triángulo en partes equivalentes, por medio de rectas que partan de un mismo vértice.*



Fig. 313

Sea ABC (fig. 313) el triángulo que se ha de dividir.

Dividida la base BC en partes iguales, en cinco por ejemplo, se unen los puntos de división con el vértice A.

Los triángulos parciales serán equivalentes por tener la misma base e igual altura.

ABC (fig. 314) en dos partes proporcionales a 3 y 5, se divide la

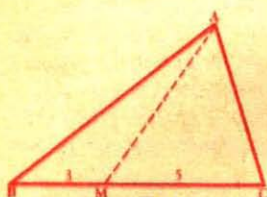


Fig. 314

401. NOTA. Para dividir el triángulo en partes proporcionales a 3 y 5, se divide la base BC en partes proporcionales a estos números y se traza la recta AM. Los triángulos ABM y AMC, por tener la misma altura, serán proporcionales a sus bases BM y MC o sea a 3 y 5.

402. Problema II. *Por un punto D del perímetro de un triángulo ABC (fig. 315) trazar una recta que lo divida en dos partes equivalentes.*

Se prolonga BC, se traza DC, y en seguida AE paralela a DC; luego, se señala el punto M en la mitad de BE. La recta DM dividirá el triángulo en dos partes equivalentes.

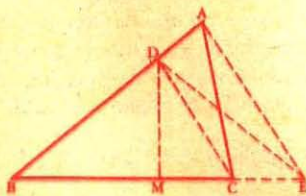


Fig. 315

Porque trazando DE, el triángulo BDE será equivalente al triángulo ABC, por constar de una parte común BCD y de los triángulos equivalentes ADC y DCE.

Pero la recta DM divide el triángulo BDE en dos partes equivalentes; luego BDM, mitad de BDE, lo será también de ABC.

403. NOTA. Para dividir el mismo triángulo en tres partes equivalentes, se dividirá BE en tres partes iguales, y luego se unirán estos puntos con el vértice común D.

Para dividirlo proporcionalmente a los números 2, 3 y 5, divídese BE proporcionalmente a estos números, y se procede como anteriormente.

404. Problema. *Por un punto del perímetro de un triángulo trazar una recta que lo divida en dos partes proporcionales a 1 y 2.*

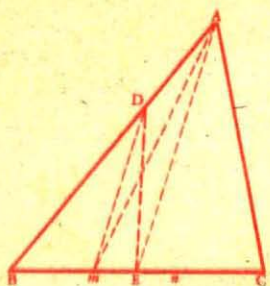


Fig. 316

Sea ABC (fig. 316) el triángulo que se quiere dividir en partes proporcionales a 1 y 2, por medio de una recta que parta desde el punto D.

Se divide la recta BC en tres partes iguales, luego se trazan Am y Dm, y por último AE paralela a Dm. El triángulo BDE será el tercio del triángulo ABC.

En efecto, ABm es $\frac{1}{3}$ de ABC por ser Bm $\frac{1}{3}$ de BC. Además BDE es equivalente a ABm, porque ambos constan de una parte común Bm y

de los triángulos equivalentes DAM y DmE.

405. Caso particular. Se desea trazar desde el punto D (fig. 317) una recta que divida en dos partes equivalentes el triángulo ABC.

Procediendo como en el problema II (N^o 402), puede ocurrir que la recta DM no encuentre al lado BC sino a su prolongación,

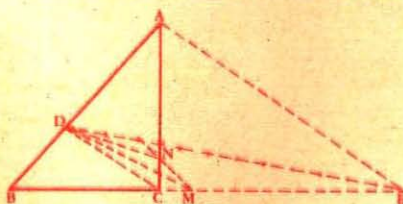


Fig. 317

en cuyo caso se traza MN paralela a DC, y las figuras ADN y BDNC serán equivalentes.

En efecto, el triángulo BDM es equivalente a la figura BDNC por tener ambas figuras una parte común BDC, y ser equivalentes los triángulos DCM y DNC.

406. Problema III. Hallar en el interior de un triángulo un punto tal que, uniéndolo con los tres vértices, la superficie quede dividida en tres partes equivalentes.

Se divide en tres partes iguales el lado BC (fig. 318), se traza DO paralela a AB, y OE paralela a AC; el punto O será el punto pedido.

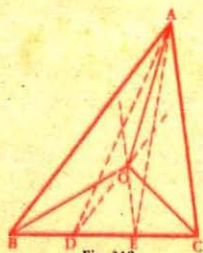


Fig. 318

En efecto, trazando AD y AE, cada triángulo ABD, ADE, AEC representa $\frac{1}{3}$ del triángulo total. Pero los triángulos ABO y ABD son equivalentes por tener la misma base e igual altura: luego, AOB es $\frac{1}{3}$ del triángulo ABC.

Además los triángulos AOC y AEC tienen la misma base e igual altura: luego AOC es $\frac{1}{3}$ del triángulo ABC; por lo tanto BOC es $\frac{1}{3}$ del triángulo ABC.

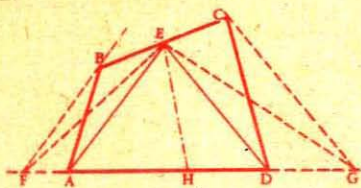


Fig. 319

Se trazan las rectas EA y ED y sus paralelas BF y CG, luego EF y EG y por último se une E con H, punto medio de FG.

La recta EH divide en dos partes equivalentes el triángulo EFG, equivalente al cuadrilátero ABCD.

El triángulo EFH, mitad del triángulo total, es equivalente a EHAB, por ser EFA equivalente al triángulo EAB.

Luego EHAB es la mitad del cuadrilátero dado ABCD.

408. NOTA. Si no se conoce el punto de origen de la recta que divide la figura, se procede del modo siguiente (fig. 320):

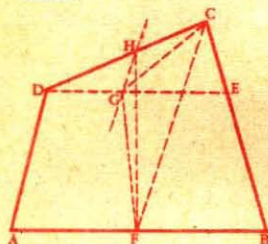


Fig. 320

Se traza DE paralela a AB, y así el cuadrilátero resulta descompuesto en un triángulo DCE y en un trapecio ABED. Se unen G y F, puntos medios de ED y AB, y se trazan CG y CF.

El triángulo y el trapecio quedan divididos en dos partes equivalentes.

Se señala en H, y paralelamente a CF, el vértice G del triángulo CGF; la recta HF divide en dos partes equivalentes la figura dada.

409. Problema V. *Dividir un polígono cualquiera en dos partes equivalentes, por medio de una recta que parta de un punto K situado en el perímetro.*

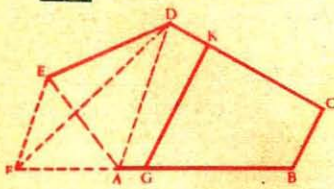


Fig. 321

Se transforma el polígono en un cuadrilátero, conservando el lado donde se halla el punto K, y después se procede de la misma manera que en el problema anterior.

La recta KG divide en dos partes equivalentes la figura dada.

410. Problema VI. *Dividir un triángulo en dos partes equivalentes, por medio de una recta paralela a la base.*

Sobre AC se describe una semicircunferencia, luego por el punto D, mitad de AC, se levanta una perpendicular a AC; desde el punto A como centro se describe el arco EF, y se traza FG, paralela a BC.

El triángulo AFG será la mitad del triángulo ABC, porque siendo semejantes estos dos triángulos, tenemos:

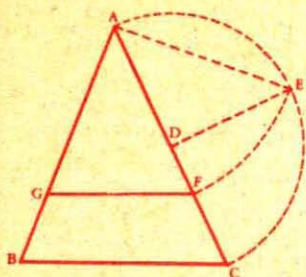


Fig. 322

$$\frac{AGF}{ABC} = \frac{AF^2}{AC^2} \text{ (Nº 360)}$$

tenemos también:

$$\frac{AE^2}{AC^2} = \frac{AD}{AC} \text{ (Nº 309)}$$

siendo AE igual

a AF, se infiere que

$$\frac{AGF}{ABC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$$

411. Problema VII. *Dividir un triángulo en tres partes equivalentes, por medio de paralelas a la base.*

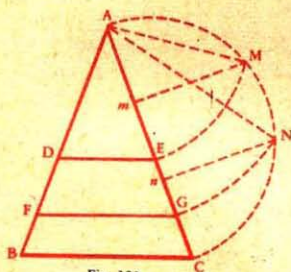


Fig. 323

Para que el triángulo ABC (fig. 323) quede dividido en tres partes equivalentes, se divide AC en tres partes iguales y se describe una semicircunferencia; luego se trazan mM , nN perpendiculares a AC, y haciendo centro en A, se describen los arcos ME y NG. Por último se trazan DE y FG paralelas a BC.

412. Problema VIII. *Por medio de circunferencias concéntricas dividir un círculo en partes equivalentes, en tres por ejemplo.*

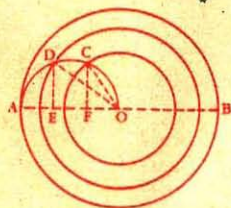


Fig. 324

Solución. Con AO por diámetro (fig. 324) se describe una semicircunferencia. Se divide AO en tres partes iguales; en los puntos E y F se levantan perpendiculares y se describen dos circunferencias con radios iguales a OC y OD.

Demostración. Los círculos son proporcionales a los cuadrados de sus radios:

Luego
$$\frac{\text{círculo OC}}{\text{círculo OA}} = \frac{OC^2}{OA^2} \text{ (Nº 363)}$$

Pero
$$\frac{OC^2}{OA^2} = \frac{OF}{OA} = \frac{1}{3} \text{ (Nº 309)}$$

Luego
$$\frac{\text{círculo OC}}{\text{círculo OA}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Adem\u00e1s tenemos: } \frac{\text{c\u00edrculo OD}}{\text{c\u00edrculo OA}} = \frac{\overline{OD}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{OE}{OA} = \frac{2}{3}$$

Luego las circunferencias que tienen OC y OD por radio determinan en el c\u00edrculo dado tres \u00e1reas equivalentes.

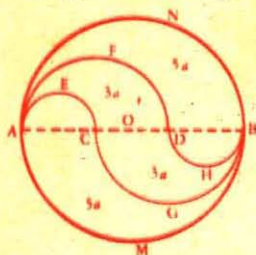


Fig. 325

[413.] Problema IX. *Dividir un c\u00edrculo en tres partes equivalentes, por medio de curvas en forma de S, compuestas de dos semicircunferencias.*

Soluci\u00f3n. Se divide el di\u00e1metro AB (fig. 325) en tres partes iguales y se toma sucesivamente por di\u00e1metro AC, AD, BD y BC.

Demostraci\u00f3n. Los semic\u00edrculos son proporcionales a los cuadrados de los di\u00e1metros, llamando a al \u00e1rea del semic\u00edrculo AEC, tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{AEC} = a \\ \text{AFD} = 4a \\ \text{ANB} = 9a \\ \text{BHD} = a \\ \text{BGC} = 4a \\ \text{BMA} = 9a \end{array} \right\} \text{De donde se deduce } \left\{ \begin{array}{l} \text{AECDF} = 3a \\ \text{AFDBN} = 5a \\ \text{BHDCG} = 3a \\ \text{BGCAM} = 5a \end{array} \right.$$

Luego cada una de las partes obtenidas, como lo indica la figura, es igual a $6a$; por consiguiente el c\u00edrculo est\u00e1 dividido en tres partes equivalentes.

Rect\u00e1ngulo y paralelogramo

147. Calcular el \u00e1rea de los rect\u00e1ngulos que tienen por base y altura:

1\u00b0	25 ^m	y	12 ^m ;
2\u00b0	46 ^m 70	y	15 ^m 45;
3\u00b0	146 ^m 24	y	75 ^m 20;
4\u00b0	206 ^m 75	y	147 ^m 24;

148. Calcular el \u00e1rea de los paralelogramos que tienen por base y altura:

1\u00b0	40 ^m 22	y	32 ^m 75;
2\u00b0	105 ^m 75	y	86 ^m 95;
3\u00b0	145 ^m 20	y	127 ^m 54;
4\u00b0	235 ^m 15	y	180 ^m 35;

149. Calcular la base de los rect\u00e1ngulos que tienen de \u00e1rea y de altura:

1\u00b0	19 208 m ²	y	100 ^m ;
2\u00b0	19 208 m ²	y	224 ^m ;

3º	19 208 m ²	y	352 ^m 80;
4º	19 208 m ²	y	705 ^m 60;

150. ¿Cuál es el área de los rectángulos cuyo perímetro es igual a 396m y cuya base y altura son entre sí:

1º como 1 a 5;	3º como 4 a 5;
2º como 2 a 3;	4º como 5 a 6?

151. ¿Cuál es el lado de los cuadrados que tienen de área:

1º	36m ² ;
2º	154m ² ;
3º	507m ² 14?

152. ¿Cuál es el área de los cuadrados que tienen de lado:

1º	25m;	3º	55m;
2º	45m;	4º	139 ^m 15?

153. ¿Qué lado ha de tener una mesa cuadrada para que su superficie sea igual a la de otra mesa rectangular que tiene 1^m50 de largo por 0^m80 de ancho?

154. El palacio real de Madrid tiene la forma de un cuadrado de 150^m de lado. ¿Cuál es su área total?

155. ¿Cuántas tablas de 3^m90 de largo por 32 cm. de ancho se necesitan para entarimar una sala de 16 metros de largo por 7 de ancho?

156. ¿Cuánto costará un artesonado de 20^m75 por 75 cm. si se paga a razón de 8 pts. el metro lineal, y la pintura a 2 pts. 50 el metro cuadrado?

157. ¿Cuántos adoquines de 23 cm. de lado se necesitan para empedrar una calle de 600 metros de largo y 10 de ancho?

158. La superficie de un cuarto que se quiere empapelar es de 120 metros cuadrados; los rollos tienen 12 metros por 0^m50 y cuestan 3 pts. 50. Calcular el número de rollos y el importe del gasto.

159. Se ha pagado 208 pesetas por el entarimado de un cuarto que tiene 6^m40 por 3^m25; ¿cuál es el precio del metro cuadrado?

160. Siendo de 6 hectómetros 25 la anchura de un terreno rectangular de 25 hectáreas y $\frac{1}{2}$, dígase cuál será la longitud.

161. ¿Cuál es en áreas la superficie de un prado rectangular de 250 metros de largo por 75 de ancho?

162. ¿Cuál es, en hectáreas, la superficie de un terreno rectangular de 650 metros de largo y 400 de ancho?

163. Un prado de forma rectangular, que tiene 530^m40 de largo por 248^m50 de ancho, se vendió a 28 pts. 75 los 100 metros cuadrados. ¿Cuál es el precio de ese prado?

164. Hallar la superficie total del palacio real de S. Ildefonso, si tiene la forma de un rectángulo de 150 metros de largo por 13,50 de ancho.

165. ¿Cuánto se pagará por pintar un artesonado de 1^m05 de altura en una sala de 14 metros de largo y 10 de ancho, si el metro cuadrado cuesta 2,50 pts.?

166. Se quiere pintar una sala de 18 metros de largo por 9^m50 de ancho y 4^m50 de alto; dicha sala tiene seis ventanas de 2 metros de alto por 1^m40 de ancho. ¿Cuál será el importe si el metro cuadrado se paga a 3 pts. 50?

167. Cuando se alarga 20 metros una cuerda que da la vuelta a un cuadrado, el cuadrado que se puede rodear tiene 225 metros cuadrados más que el primero. ¿Cuál es la longitud primera de la cuerda?

168. Si se disminuyen 4 metros al lado de un cuadrado, se obtiene otro de 128 metros cuadrados menos que el primero. ¿Cuál era su lado?

169. La suma de dos cuadrados es de 1.525 metros cuadrados, su diferencia de 275. ¿Cuál es el lado de cada uno?

170. Cuando la base de un rectángulo se prolonga un tercio y la altura la mitad, la relación de estas dos líneas es de 4 a 3; el mismo resultado se obtiene prolongando 5 metros estas dos dimensiones; ¿cuál será la longitud, la altura y el área de este rectángulo?

171. ¿Cuál es el lado y cuál el área de un cuadrado, si la diagonal y el lado suman 5^m80 ?

172. ¿Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular cuya diagonal es de 140 metros, sabiendo que, vendido en 8.000 pts. la hectárea, ha producido 7.526 pts. 40?

173. Se quiere construir un cuadrado de superficie 3 veces $\frac{1}{2}$ mayor que otro que tiene 5 metros de lado. ¿Qué longitud ha de tener el lado?

174. La diagonal de un cuadrado es de 20 metros. ¿Cuál es su lado?

175. Se construye un cuadrado sobre la semidiagonal de otro; ¿cuál es la relación de aquella figura con el cuadrado construido sobre la diagonal entera, y cuál con el cuadrado primitivo?

176. La superficie de un cuadrado es de 10 áreas; ¿en cuánto excede la diagonal de este cuadrado al lado del mismo?

177. En un cuadrado de 8 metros de lado, se corta otro de manera que la parte restante tenga por todos los lados 2 metros de ancho. ¿Cuál es la relación que existe entre la parte quitada y el cuadrado primitivo?

178. Se quita a una de las extremidades de un rectángulo de 25 metros de largo por 16 de ancho, un triángulo, de manera que la línea de división salga de un vértice y llegue a la cuarta parte de la base. ¿Cuál es la superficie del triángulo y cuál la del trapecio? Expresar la longitud de la línea de división.

179. Si se prolongan 10 metros en la misma dirección dos lados opuestos de un cuadrado y se determina con la recta de unión un rectángulo, se aumenta la superficie en 150 metros cuadrados. ¿Cuál es el lado del cuadrado?

180. Se corta un ángulo de un cuadrado tomando $\frac{1}{4}$ de un lado y $\frac{1}{6}$ del otro, y se termina en rectángulo esta parte cortada. ¿Cuál era

la superficie y el lado del cuadrado, sabiendo que el área del rectángulo obtenido es de 180 metros cuadrados?

181. Un rectángulo tiene 60 metros de largo y 40 de ancho. Si se disminuye la longitud 5 metros, ¿con cuánto hay que aumentar la anchura para que el área sea la misma?

182. La diagonal de un rectángulo es igual a 40 metros. ¿Cuáles son los dos lados adyacentes, si uno de ellos es los $\frac{3}{4}$ del otro?

Triángulo

183. Calcular el área de los triángulos que tienen respectivamente de base y altura:

1º	14 ^m	y	26 ^m ;
2º	66 ^m 20	y	74 ^m 24.

184. Hallar el área de un triángulo de 15^m de base, y cuya altura es los $\frac{9}{5}$ de la misma.

185. Calcular la base de varios triángulos que tienen respectivamente de área y altura:

1º	28 728 ^m 2	y	42 ^m ;
2º	28 728 ^m 2	y	76 ^m ;
3º	28 728 ^m 2	y	75 ^m 60;
4º	28 728 ^m 2	y	200 ^m ;
5º	28 728 ^m 2	y	252 ^m ;
6º	28 728 ^m 2	y	1512 ^m .

186. ¿Cuál es la base y cuál la altura de un triángulo de 98 metros cuadrados de área, si las dimensiones pedidas son iguales?

187. Un triángulo tiene 875 metros cuadrados de área; ¿cuáles son sus dimensiones, si están en la relación de $\frac{2}{5}$?

188. Hallar la base y la altura de un triángulo que tiene 486 metros cuadrados de área, si la base es los $\frac{3}{4}$ de la altura.

189. Hallar la base y la altura de un triángulo de 155 metros cuadrados de superficie, siendo la altura el tercio de la base.

190. ¿Cuál es la altura de un triángulo de 12 metros de base, si es equivalente a otro cuya base es de 20 metros y la altura de 6 metros?

191. ¿Cuál es la base de un triángulo isósceles que tiene 20 metros de altura, si es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen respectivamente 18 y 30 metros?

192. Hallar la altura de un triángulo cuya base tiene 70 metros, sabiendo que su superficie es una media proporcional entre las superficies de dos rectángulos que tienen 6^m50 de altura y por bases respectivas 32^m80 y 67^m70.

193. Un terreno triangular de 45 metros de base tiene 15 áreas 30 de superficie; hallar la superficie de otro terreno también triangular y semejante al primero que tiene 30 metros de base.

194. Calcular el área de los triángulos cuyos lados tienen respectivamente:

1º	135 ^m ,	85 ^m	y	75 ^m ;
2º	330 ^m ,	210 ^m 50	y	410 ^m 50;
3º	23 ^m 5,	31 ^m 50	y	17 ^m 40.

195. Dado el lado 0^m25 de un cuadrado, hallar el lado de un triángulo equilátero de área igual.

196. Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado tiene 10 metros.

Rombo y trapecio

197. Calcular el área de los rombos cuyas diagonales tienen:

1º	24 ^m	y	16 ^m ;	3º	73 ^m 15	y	42 ^m 20;
2º	47 ^m 25	y	17 ^m 32;	4º	89 ^m 90	y	66 ^m 70.

198. ¿Cuál es el área de los rombos en los cuales la suma de las diagonales es igual a 535^m 50, si estas diagonales son entre sí:

1º	Como	$\frac{4}{5}$;	3º	Como	$\frac{6}{11}$;
2º	"	$\frac{2}{7}$;	4º	"	$\frac{10}{11}$?

199. Calcular el área de varios rombos que tienen de lado y altura respectivamente:

1º	12 ^m	y	6 ^m ;	3º	49 ^m 24	y	32 ^m 15;
2º	20 ^m	y	15 ^m ;	4º	59 ^m 70	y	41 ^m 15.

200. Calcular el área de los trapecios cuya altura y bases respectivas tienen:

1º	Altura	16 ^m ,	bases	24 ^m	y	36 ^m ;
2º	"	20 ^m 15,	"	34 ^m 25	y	62 ^m 49;
3º	"	36 ^m 20,	"	75 ^m 70	y	85 ^m 80;
4º	"	35 ^m 50,	"	106 ^m 50	y	134 ^m 45.

201. Calcular las bases y la altura de un trapecio de 100 metros cuadrados, sabiendo que la altura es igual a $\frac{1}{5}$ de la suma de las bases, y que la base menor es la mitad de la mayor.

202. Un trapecio tiene 700 metros cuadrados; los lados paralelos tienen 30 y 40 metros; ¿a qué es igual la altura?

203. ¿Cuál es la longitud de la base menor de un trapecio de 200 metros cuadrados, si la base mayor mide 18 metros y la altura 12?

204. El área de un trapecio es de 900^m2; las dos bases y la altura son entre sí como 2, 3, 4. Calcular las bases.

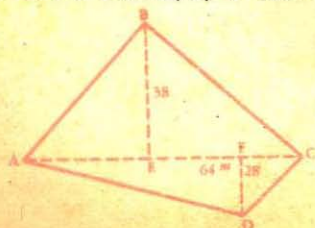


Fig. 1°

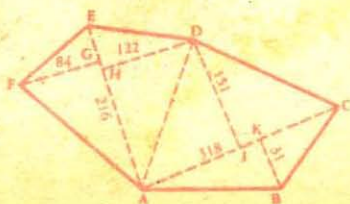
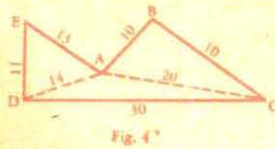
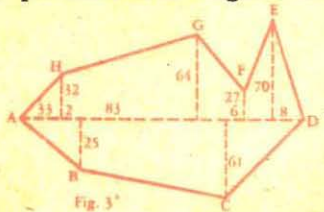


Fig. 2°

205. El área de un rombo es igual a 60 metros cuadrados; ¿cuál es su perímetro si la diagonal menor es igual al lado?



206. Calcular el área de cada una de las 4 figuras arriba indicadas.

Área de las figuras curvilíneas

CÍRCULO

207. ¿Cuál es el área de los círculos cuyos radios tienen:
- | | | | |
|----|--------------------|----|--------------------|
| 1º | 9 ^m ; | 3º | 6 ^m 45; |
| 2º | 7 ^m 50; | 4º | 0 ^m 25? |
208. ¿Cuál es el área de los círculos cuyo diámetro es de:
- | | | | |
|----|--------------------|----|--------------------|
| 1º | 7 ^m ; | 3º | 1 ^m 75; |
| 2º | 0 ^m 65; | 4º | 2 ^m 25? |
209. ¿Cuál es el radio de los círculos cuya área es de:
- | | | | |
|----|---------------------|----|---------------------|
| 1º | 42 ^m 25; | 3º | 12 ^m 64; |
| 2º | 1 ^m 28; | 4º | 12 ^m 96? |
210. ¿Cuál es el área de los círculos que tienen de circunferencia:
- | | | | |
|----|--------------------|----|--------------------|
| 1º | 3 ^m 60; | 3º | 3 ^m 52; |
| 2º | 0 ^m 72; | 4º | 4 ^m 50? |
211. En una lámina de hoja de lata que tiene 80 centímetros de largo por 64 de ancho, ¿cuántos agujeros de 4 centímetros de radio se pueden abrir si las circunferencias han de ser tangentes, y cuál es en decímetros cuadrados el área de los espacios que queden?
212. ¿Cuántos círculos de 5 centímetros de radio se pueden sacar de una lámina de hoja de lata que tiene 60 centímetros de largo por 40 de ancho?
213. Se hace una puerta cochera cimbrada: la parte rectangular tiene 6^m 20 de altura y 4^m 50 de anchura; el arco forma un semicírculo que tiene por diámetro la anchura de la puerta. El salario del carpintero es de 45 pts. por metro cuadrado; el del pintor 4 pts. 25 el metro cuadrado por la parte exterior que ha de estar bronceada, y 3 pts. el metro cuadrado por la parte interior. ¿Cuánto costará esta puerta si hay que pagar 125 pts. por la ferretería?
214. Hallar el área de un círculo cuya circunferencia es de 1^m.
215. Midiendo la circunferencia de un árbol, se ve que tiene 92 centímetros, ¿cuál es la superficie de la sección que se obtendría en este sitio?

216. Se mide la circunferencia de la base de una columna y se ve que tiene $1^m 20$. Calcular la superficie de esta base.

217. El anillo concéntrico o corona de un círculo de 12 metros de diámetro tiene 120 metros cuadrados de área. Calcular el diámetro mayor.

218. Alrededor de un círculo de 11 metros de circunferencia se quiere tener una corona de 20 metros cuadrados. ¿Cuál será la circunferencia mayor?

219. Cuando se prolonga el diámetro de un círculo $3^m 50$, el área se aumenta en $31^m 25$. Hallar el diámetro primitivo.

SECTORES Y SEGMENTOS

220. ¿Cuál es el área de un sector de 30° en un círculo de $6^m 40$ de radio?

221. ¿Cuál es el área de un sector de 36° en un círculo de 10^m de radio?

222. ¿Cuál es el área de un sector de 75° en un círculo de $11^m 30$ de radio?

223. ¿Cuál es el área de un sector de $140^\circ 36'$ en un círculo de 7^m de radio?

224. En un círculo de 25^m de radio, ¿cuál es el ángulo del sector:
 1° de $3^m 60$; 3° de $4^m 76$;
 2° de $8^m 30$; 4° de $16^m 57$?

225. De un círculo de 14 metros de diámetro se quita un sector de 44 metros cuadrados. ¿Cuál es la longitud y el número de grados del arco?

226. Un sector tiene 200 metros cuadrados y el ángulo central 60° . ¿Cuál es la longitud del diámetro?

227. El arco de un sector es de 72° ; ¿cuál es el diámetro del círculo, si este sector tiene 150 metros cuadrados de área?

228. El área de un sector ha de ser de 60 metros cuadrados: ¿cuál es la longitud de su arco, si el ángulo central tiene 50° ?

229. El área de un sector es igual a 60 metros cuadrados: ¿cuál es su ángulo central, si el arco mide 10 metros?

230. ¿Cuál es el área de un sector en el cual el arco es de 72° y mide 15 metros?

231. ¿Cuál es, conociendo el radio, el área del segmento que corresponde a un ángulo central de 120° ? Aplicación para $R = 60^m$.

232. ¿Cuál es, conociendo el radio, el área del segmento cuyo arco sería de 120° ? Aplicación para $R = 6^m$.

233. Se inscribe un círculo en un segmento correspondiente a un sector de 120° : ¿cuál es el área restante del segmento? Aplicación para $R = 2$.

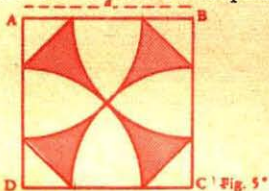
234. Se inscribe un círculo en un segmento correspondiente a un sector de 60° ; ¿cuál es el área restante del segmento? Aplicación para $R = 2$.

235. En un círculo de 15 metros de radio, ¿cuál es el ángulo del sector cuya área es de 600 metros cuadrados?

AREA DE LAS FIGURAS CURVILINEAS

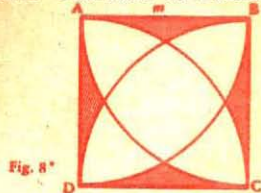
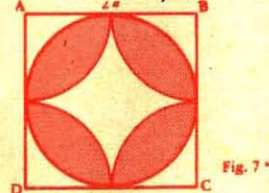
236. En un círculo O se construye un sector de 60° , luego se describe la circunferencia O' tangente en A y en B , extremos de los radios del sector. Calcular la superficie de la parte común a los dos círculos. Aplicación para $R = 2$.

237. Siendo a el lado de un cuadrado (fig. 5*), búsquese la superficie de la cruz de Malta, que se obtendría trazando arcos tangentes de dos en dos en el punto medio de las diagonales.

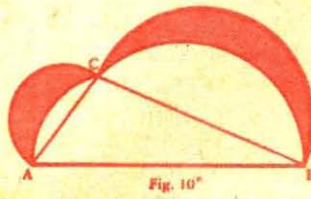
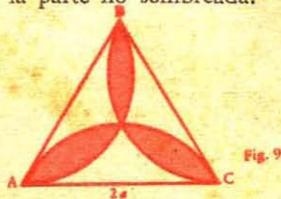


238. En un cuadrado de lado m (fig. 6*), desde dos vértices opuestos, con un radio m , se describen dos arcos de círculo que por sus intersecciones determinan una naveta; calcúlese su área.

239. En un cuadrado cuyo lado es igual a $2a$ (fig. 7*), se inscribe una circunferencia; desde los vértices del mismo cuadrado se describen, con el mismo radio, arcos que determinan la figura sombreada. Calcular el área de esta figura.



240. Desde cada vértice de un cuadrado de lado m , y con m por radio, se describen arcos como lo indica la figura 8*. Búsquese el área de la parte no sombreada.



241. Dado un triángulo equilátero (fig. 9*) cuyo lado es igual a $2a$. Se hacen pasar, por el centro y por los vértices, arcos que figuran una hoja de trébol; calcular la superficie de ésta.

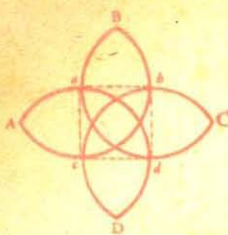


Fig. 11*

242. Sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo tomada como diámetro (fig. 10*) describábase una semicircunferencia; hágase lo mismo sobre los catetos y calcúlese la superficie comprendida entre los arcos secantes. Comparar esta superficie con la del triángulo rectángulo.

243. Siendo m el radio de dos arcos, hallar la superficie de la cruz ABCD (fig. 11*) y su relación con la superficie de la cruz $abcd$. (Los centros de los arcos son los vértices del cuadrado $abcd$).

AREA DE ALGUNOS POLIGCNOS

244. Hallar el área de un triángulo equilátero de $1^m 20$ de lado.
245. Hallar el área de un triángulo equilátero inscrito en un círculo de 60 centímetros de radio.
246. Un triángulo isósceles tiene 87 centímetros de altura; el ángulo de la base vale 30° , ¿cuál es el área de este triángulo?
247. ¿Cuál es el área de un cuadrado inscrito en un círculo de 20 centímetros de radio?
248. ¿Cuánto ha de tener el lado de un triángulo equilátero para que el área sea de 12 metros cuadrados?
249. ¿Cuál es el área del octógono regular inscrito:
- 1º En un círculo de 80 centímetros de radio;
 - 2º En un círculo de $1^m 20$ de radio;
 - 3º En un círculo de 4 metros de radio?
250. ¿Cuál es el área de los exágonos regulares que tienen de lado:
- 1º 3 metros;
 - 2º $1^m 50$;
 - 3º 20 centímetros?
251. ¿Cuánto ha de tener el lado de un exágono regular para que su área sea de 30 metros cuadrados?
252. ¿Cuál es el área del dodecágono inscrito en un círculo de $2^m 10$ de radio?
253. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de un octógono regular para que su área sea de 12 metros cuadrados?
254. Cuántas baldosas en forma de exágono regular de 80 ctms. de lado, se necesitan para embaldosar una habitación de $6^m 50$ de longitud por $4^m 72$ de ancho?
255. ¿Cuántas baldosas en forma de triángulo equilátero de 15 centímetros de lado se necesitan para embaldosar una habitación de $4^m 38$ de longitud por $2^m 75$ de ancho?

RELACION ENTRE LAS AREAS DE LAS FIGURAS SEMEJANTES

256. ¿Cuál es la relación entre las áreas de dos cuadrados que tienen por lados, respectivamente 5 y 12 metros?

257. ¿Cuál es la relación entre las áreas de dos círculos que tienen por radio, el primero 4 metros, y el segundo 10?

258. ¿Cuál es la relación entre las áreas de dos octógonos regulares que tienen por radio de los círculos circunscritos, el primero 15^{mm} , y 25 el segundo?

259. ¿Cuál es el área de un rombo cuyas diagonales son el doble de las de otro rombo de 60 metros cuadrados?

260. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyos lados son la mitad de los de otro que tiene 100 metros cuadrados?

261. ¿Cuál es el área de un círculo cuyo radio es tres veces mayor que el de otro círculo que tiene 40 metros cuadrados?

262. Los lados de un triángulo tienen 12, 25 y 32 metros; ¿cuánto medirán los lados de otro triángulo semejante cuya área es cuatro veces mayor?

263. El lado de un cuadrado mide 18 metros; ¿cuánto mide el lado de un cuadrado de área dos veces mayor?

264. Un rectángulo mide 72 metros de base y 5 de altura; ¿cuáles serían las medidas de la base y altura de un rectángulo semejante, de área tres veces mayor?

265. Un círculo tiene 12 metros de radio, ¿cuánto mide el radio de otro círculo de área cinco veces mayor?

266. Un polígono irregular tiene $25^{\text{m}} 15$ de lado. ¿Cuál es la medida del lado homólogo del polígono semejante cuya área es seis veces mayor?

267. Un polígono tiene 7 metros de lado; ¿cuál será la longitud del lado homólogo de otro polígono semejante pero de área mitad?

268. ¿Cuál es el área de un trapecio cuyos lados son el tercio de los de otro trapecio semejante, de 324 metros cuadrados de área?

269. ¿Cuánto mide el lado de un triángulo equilátero equivalente a la suma de otros tres triángulos equiláteros cuyos lados miden 10, 15 y 25 metros?

270. ¿Cuánto mide el radio de un círculo equivalente a la suma de otros cuatro círculos cuyos radios tienen 6, 9, 12 y 15 metros?

271. Calcular el lado de un exágono regular igual a la diferencia de dos exágonos regulares cuyos lados tienen 12 y 6 metros.

272. ¿Cuál es el radio del círculo en el cual un triángulo equilátero inscrito es cuádruplo del triángulo equilátero inscrito en un círculo de 12^{mm} de radio?

273. Para enladrillar un aposento se han necesitado 1.236 baldosas que tienen la forma de triángulo equilátero de 16 centímetros de lado; ¿cuántas se hubieran necesitado si tan solo hubiesen tenido 12 centímetros de lado?

274. Para enladrillar un cuarto se necesitaron 1.854 baldosas de forma exagonal y de 8 centímetros de lado; ¿cuántas hubieran sido menester si sólo hubiesen tenido 1 decímetro de lado?

275. Se ha enladrillado un aposento de $7^m 35$ de longitud por $6^m 85$ de anchura, con exágonos regulares y rombos de 90 centímetros de lado; ¿cuántos han sido menester de cada clase, sabiendo que el número de rombos es igual al de exágonos?

276. ¿Cuántos octógonos y cuadrados de 12 centímetros de lado se necesitan para embaldosar un aposento que tiene 6 metros de longitud por $4^m 25$ de ancho, si el número de octógonos es igual al de cuadrados?

277. ¿Cuántos exágonos y triángulos de 12 centímetros de lado se necesitan para embaldosar un aposento que tiene $5^m 45$ de longitud por $3^m 50$ de anchura, si el número de triángulos es doble del de exágonos?

278. Se quiere cubrir un entarimado de $8^m 75$ de longitud por $6^m 50$ de anchura con dodecágonos y triángulos equiláteros de 8 centímetros de lado; ¿cuántos de cada clase serán menester, sabiendo que el número de triángulos es doble del de dodecágonos?

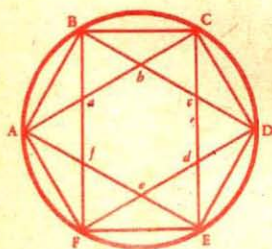


Fig. 12*

279. Siendo el radio del círculo circuncrito igual a r (fig. 12*), calcular el área:

- 1º Del exágono ABCDEF;
- 2º Del triángulo aBb ;
- 3º Del triángulo AaB ;
- 4º Del exágono $abcdef$;
- 5º Del segmento BmC ;
- 6º La relación entre los dos exágonos;

7º La superficie de la estrella $AaBbCcDd...$

280. Conociendo el radio de la figura 13*, calcular:

- 1º El área del círculo;
- 2º " del triángulo rectilíneo ABC;
- 3º " del triángulo curvilíneo ABC;
- 4º " de la parte más sombreada;
- 5º " de la parte menos sombreada;
- 6º La relación entre estas dos últimas áreas y también la relación de cada una de ellas, 1º con el círculo, y 2º con el triángulo rectilíneo;

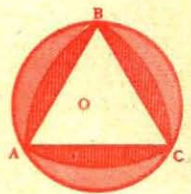


Fig. 13*

7º La relación del área del triángulo curvilíneo con la del círculo.

TRANSFORMACION DE FIGURAS

281. Sobre una recta dada m construir un rectángulo equivalente a un cuadrado dado a^2 .

282. Transformar en un cuadrado equivalente: 1º un paralelogramo; 2º un trapecio; 3º un triángulo.

283. ¿Cuál es la altura de un triángulo que tiene 12 metros de base, y que es equivalente a otro cuya base es de 20 metros y la altura de 6?

284. ¿Cuál es la base de un triángulo isósceles de 20 metros de altura, y que es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen 18 y 30 metros?

285. ¿Cuál es la altura de un triángulo cuya base es igual a 16 metros, sabiendo que este triángulo es equivalente a un círculo de 11 metros de diámetro?

286. ¿Cuál es el lado del cuadrado equivalente:

- 1º A un triángulo cuya base es de 16 metros y la altura de 12 metros;
- 2º A un triángulo equilátero cuyo lado es de 12 metros;
- 3º A un rectángulo cuya base es de 15 metros y la altura de 10 metros;
- 4º A un rombo cuyas diagonales tienen 7 y 17 metros;
- 5º A un trapecio cuya altura es de 9 metros y las dos bases de 14 y 19 metros?

287. Sobre una misma base de 15 metros, ¿cuáles son las varias alturas que sería preciso tomar para construir rectángulos equivalentes en superficie:

- 1º A un triángulo que tiene 25 metros de base y 18 de altura;
- 2º A un cuadrado de 30 metros de lado;
- 3º A un rectángulo cuya base es de 17 metros y la altura de 12 metros;
- 4º A un rombo cuyas dos diagonales tienen 12 y 8 metros;
- 5º A un círculo cuyo radio es de 8 metros?

288. ¿Qué altura hay que dar a los trapecios que tienen por bases respectivas 6 y 10 metros, si han de ser equivalentes:

- 1º A un cuadrado de 10 metros de lado;
- 2º A un rectángulo cuya base es de 9 metros y la altura 6;
- 3º A otro trapecio cuyas bases son de 7 y 19 metros y la altura de 4 metros;
- 4º A un rombo cuyas diagonales miden 15 y 12 metros;
- 5º A un círculo de 12 metros de radio?

289. Se tiene una serie de rombos con una misma diagonal de 50 metros; ¿cuál es la segunda diagonal de cada uno de ellos, sabiendo que han de ser equivalentes:

- 1º A un triángulo isósceles cuya base es de 30 metros, y los dos lados iguales de 25 metros cada uno;
- 2º A un cuadrado de 25 metros de lado;
- 3º A un rectángulo cuya base es de 18 mts. y la altura de 7 mts.;
- 4º A otro rombo cuyas diagonales tienen 15 y 14 metros;

5º A un trapecio cuya altura es de 6 metros, y las dos bases de 11 y 18 metros?

290. Calcular los radios de los círculos equivalentes:

1º A un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 11 y 17 metros;

2º A un cuadrado de 47 metros de lado;

3º A un triángulo cuya base es de 11 metros, y la altura de 7 mts.;

4º A un rombo cuyas diagonales tienen 15 y 25 metros;

5º A un trapecio cuya altura es de 15 metros, y las dos bases de 15 y 20 metros?

291. ¿Qué lado habrá que dar a un exágono para que sea equivalente a un cuadrado de 1^m 50 de lado?

292. Un triángulo equilátero de 15 metros de perímetro ha de transformarse en un exágono regular equivalente. ¿Cuál será su lado?

293. ¿Cuál es el diámetro de un círculo equivalente a un cuadrado de 6 metros de lado?

294. Las diagonales de un rombo miden 1^m 20 y 1^m 60; se quiere construir otro equivalente, compuesto de dos triángulos equiláteros. ¿Cuál será su lado?

295. Un círculo ha de ser equivalente a una corona de 7 metros de anchura y 14 de diámetro interior, ¿qué radio hay que darle?

296. Un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados iguales miden 18 metros, ha de transformarse en un cuadrado. ¿Cuál será la longitud del lado de este cuadrado?

297. ¿Qué dimensiones han de darse a un rectángulo equivalente a un cuadrado de 15 metros de lado, si estas dimensiones han de ser entre sí como 3 : 5?

298. La diagonal de un rectángulo es de 20 centímetros y una de sus dimensiones de 15 centímetros. ¿Cuál es el lado del cuadrado equivalente?

299. Se quiere transformar un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 10 centímetros en un triángulo equilátero. ¿Cuál será la longitud de su lado?

300. ¿Cuál es la longitud del lado de un cuadrado equivalente a un exágono regular de 3^m 6 de perímetro?

DIVISION DE FIGURAS

301. Hallar un punto interior de un triángulo, de manera que uniéndolo con el punto medio de los lados, el triángulo quede dividido en tres partes equivalentes.

302. Dados dos triángulos cualesquiera, si se divide la base del primero en tres partes iguales, la del segundo en cuatro y se une el vértice con los puntos de división, ¿en cuántas partes equivalentes estará dividido cada triángulo? ¿Por qué son equivalentes estas partes?

303. Dado un triángulo, divídase su base en ocho partes iguales y únase el vértice con la segunda y quinta división. ¿En qué proporción estarán las partes así obtenidas:

1º Entre sí;

2º Con el triángulo entero?

304. Un campo triangular, cuya base es de $145^m 2$ y la altura de $109^m 65$, ha de dividirse en tres partes que estén en la relación de $1 : 3 : 4$. ¿Cuál será la base y la superficie de cada parte?

305. Dados un rectángulo y un rombo, divídase la base del rectángulo en 4 y la del rombo en 5 partes iguales, y por los puntos de división trácense paralelas a los lados. ¿En cuántas partes iguales quedará dividida cada figura, y por qué estas partes serán iguales?

306. Se quiere dividir un rectángulo, cuya base es de $61^m 2$, en tres partes que sean entre sí como los números 1, 2, 5. ¿Cómo hay que proceder? ¿Cuál será la base de cada una de estas partes?

307. En un paralelogramo se junta uno de los vértices con la mitad de la base. ¿En qué relación está el área del triángulo obtenido con la del paralelogramo entero?

308. Tomando la mitad de cada uno de los lados de un triángulo y uniendo estas mitades de dos en dos, ¿cómo queda dividido el triángulo?

309. Una recta corta a dos lados de un triángulo, al uno en la cuarta parte, al otro en la tercera a contar desde la base. ¿En qué proporción queda dividido el triángulo?

310. Dado un triángulo, trácese una recta que pase por dos puntos situados el uno en los dos tercios de uno de sus lados, y el otro en la cuarta parte del otro, a partir del mismo vértice. Se pregunta qué relación hay entre el triángulo parcial y el triángulo total.

311. Un campo rectangular EFGH (fig. 14*) de 125 metros de longitud y de $72^m 50$ de anchura ha de ser atravesado por una calzada, como lo indica la figura: HK mide $5^m 20$. ¿Cuánto recibirá el propietario por la superficie cedida, si el terreno entero ha sido avaluado en 3.000 pesetas?

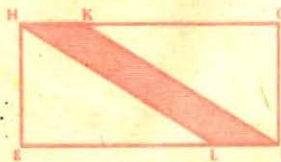


Fig. 14*

312. Por una paralela a las bases, divídase un trapecio en dos partes equivalentes.

313. Las dos bases de un trapecio miden 12 y 7 metros y la altura 6 metros; calcular

la posición de la recta paralela a las bases, que dividiría el trapecio en dos partes equivalentes.

314. Por un punto dado en el perímetro de un triángulo ABC, trazar una recta que divida este triángulo en dos partes equivalentes.

315. Divídase un triángulo en dos partes equivalentes, por medio de una recta perpendicular a la base.

316. Por un punto dado en la altura de un triángulo isósceles, trazar una recta diferente de la altura que divida al triángulo en dos partes equivalentes.

317. Por medio de rectas que encuentren a las bases, dividir un trapecio en tres partes equivalentes.

318. Hágase lo mismo por medio de rectas paralelas a uno de los lados no paralelos.

319. Divídase un cuadrilátero en dos partes equivalentes, por medio de una recta que salga de un punto dado en el perímetro.

320. Desde un punto dado en un polígono, trazar rectas que dividan este polígono en dos partes equivalentes.

DEMOSTRAR LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES

321. El área de un polígono circunscrito a un círculo es igual al semi-producto de su perímetro por el radio del círculo.

322. Un triángulo rectángulo es equivalente al rectángulo construido con los segmentos determinados en la hipotenusa por el punto de contacto del círculo inscrito.

323. Toda recta trazada por la mitad de la base media de un trapecio, y que encuentra a las dos bases, divide a la superficie en dos partes equivalentes.

324. Por un punto de la diagonal de un paralelogramo se trazan paralelas a los lados de esta figura; demostrar que los paralelogramos opuestos por el vértice son equivalentes.

325. Se une cada vértice de un paralelogramo con un punto interior de esa figura; demostrar que la suma de los triángulos cuyas bases son dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos triángulos.

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

GEOMETRIA PLANA

326. ¿Cuál es el área del círculo inscrito en un sector de 120° ?



Fig. 1*

327. Dado el lado AB de un decágono regular inscrito en un círculo O (fig. 1*), uniendo el centro con los extremos A y B, y trazando la bisectriz del ángulo A, demostrar que esta bisectriz encuentra a la circunferencia en un punto D tal que el arco AD es triple del arco AB.

328. Dado un paralelogramo ABCD (fig. 2*) y una recta cualquiera XY que pasa por uno de los vértices, si se bajan desde los demás vértices perpendiculares sobre XY, demostrar que la perpendicular bajada desde el vértice opuesto a aquel por el cual pasa la línea XY es igual a la suma o a la diferencia de las otras dos perpendiculares.

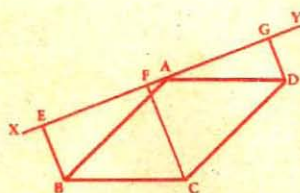


Fig. 2*

329. El vestíbulo del "Frontón Barcelonés" es una rotonda de 16^m de diámetro. Hallar su área; ¿cuál sería el lado de un cuadrado equivalente?

330. Construir un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa tenga 8 centímetros de longitud, y un cuadrado cuya superficie sea triple de la superficie de este triángulo.

331. Dado un exágono regular de 2 centímetros de lado, construir otro concéntrico cuya superficie sea la mitad del primero.

332. Se da un círculo y un ángulo recto circunscrito a este círculo (fig. 3*). Se junta el vértice S del ángulo recto con el centro O del círculo, por los puntos en que esta recta OS encuentre a la circunferencia se trazan perpendiculares a la misma OS. Determinar

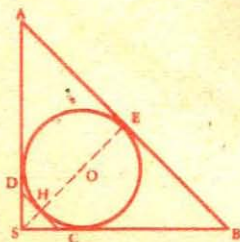


Fig. 3*

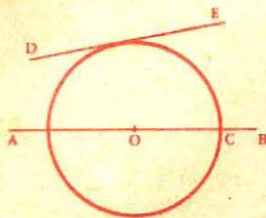


Fig. 4*

la superficie del trapezio obtenido y demostrar que es doble de la superficie del octógono regular inscrito en el mismo círculo.

333. Describir una circunferencia que tenga su centro en una recta AB (fig. 4*), que pase por un punto C de esta recta y sea tangente a otra recta dada DE.

334. Inscribir y circunscribir a una circunferencia, triángulos semejantes a un triángulo dado.



Fig. 5*

335. Desde el extremo A del diámetro AB de una circunferencia O (fig. 5*) se levanta una perpendicular, y desde un punto cualquiera C de esta perpendicular se traza una tangente a la circunferencia, desde el punto de contacto D se baja una perpendicular DE al diámetro AB; por último se traza CB. Demostrar que F es el punto medio de DE.

336. Construir gráficamente un exágono regular cuya superficie sea doble de la de otro que tiene 25 centímetros cuadrados.

337. Los puntos H y G (fig. 6*) son los puntos medios de los lados DC y DE de un exágono regular ABCDEF. Demostrar que las rectas AH y AG dividen el exágono en tres partes equivalentes.

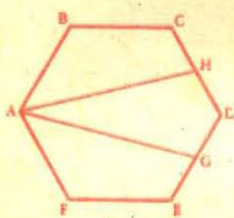


Fig. 6*

338. En un círculo se inscriben un exágono regular, un cuadrado y un triángulo equilátero. Demostrar cómo con los tres lados de dichos polígonos se puede construir un triángulo rectángulo.

339. Suponiendo que el lado de un triángulo equilátero tiene $5^m 80$ de longitud, hallar las áreas del círculo inscrito y del círculo circunscrito.

340. Dado un cuadrado de un decímetro de lado, ¿qué longitud es preciso señalar a cada lado de los vértices para que juntando consecutivamente los puntos obtenidos resulte un octógono regular?

341. En un triángulo cualquiera, inscribir un cuadrado.

342. Inscribir un cuadrado en un semicírculo de $0^m, 025$ de radio, y hallar el área de este cuadrado.

343. Se da el lado l de un exágono regular: construir un triángulo equilátero equivalente.

344. Construir un cuadrado equivalente a los $\frac{2}{3}$ de un pentágono dado.

345. En un círculo dado inscribir tres círculos, tangentes de dos en dos y tangentes al círculo dado.

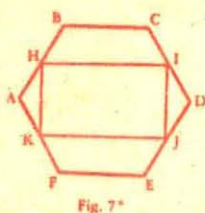


Fig. 7*

346. Dado un ángulo de 60° circunscrito a un círculo de 1^m de radio, hallar el área de la superficie comprendida entre los lados del ángulo y el círculo.

347. Un exágono regular ABCDEF (fig. 7*) tiene 4^m de lado. Si se unen los puntos medios de los lados AB, CD, DE, FA, demostrar que la figura HIJK es un rectángulo, y calcular su área.

348. En un círculo O (fig. 8*) se traza un diámetro AB y una cuerda CD paralela a AB; desde los puntos C y D se bajan a AB las perpendiculares CE, DF. Demostrar que $EA = FB$. Suponiendo que el arco BD es de $22^\circ 30'$, expresar DF en función del radio R.

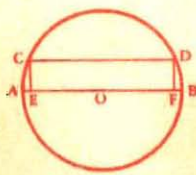


Fig. 8*

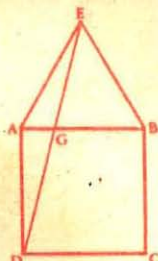


Fig. 9*

349. Sobre el lado AB de un cuadrado ABCD (fig. 9*) se construye un triángulo equilátero AEB y se unen los puntos E y D. Determinar en función de $AB = l$: 1° el área del triángulo ADE; 2° la longitud de la recta ED; 3° la longitud de la recta AG. Aplicación para $l = 0^m 80$.

350. Dos caminos AB y CD (fig. 10*) forman entre sí un ángulo de 60° ; se propone enlazar el camino AB con el camino CD, partiendo desde el punto A y juntándolo hacia C o hacia D por un arco de círculo tangente a las rectas AB y CD. — Determinése el radio de cada uno de estos caminos circulares, e indíquese cómo se pueden hallar sus centros, suponiendo que la distancia

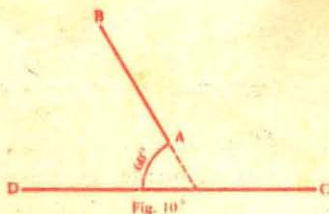


Fig. 10*

del punto A a la línea CD sea igual a una longitud conocida, 45 metros por ejemplo.

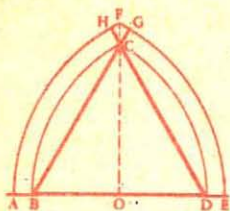


Fig. 11*

351. En una recta, se han señalado dos puntos B y D (fig. 11*), distantes de $5^m 40$, y otros dos A y E, tales que $AB = DE = 0^m 60$. — Desde el punto B como centro, se han descrito los arcos CD y EF, luego desde el punto D, los arcos BC y AF que encuentran a los primeros en C y F. Calcúlese: 1º las alturas OC y OF; 2º la longitud de las curvas BCD y AFE; 3º la superficie comprendida entre estas dos curvas.

NOTA. Se consideran las partes FG y FH como rectilíneas.

352. Haciendo centro en los vértices de un cuadrado ABCD (fig. 12*), se describen arcos de círculo con un radio igual a la mitad de la diagonal, y se trazan las rectas EP, RG, MH, NF. Si la media diagonal es igual a 1^m , calcular EP, PR, RG... y deducir cuál sea la naturaleza del octógono, y su área.

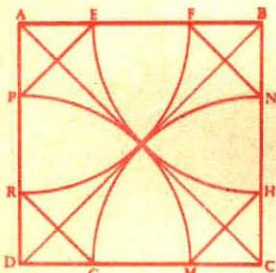


Fig. 12*

353. Dos líneas férreas convergen formando un ángulo de 120° . Se las quiere enlazar por medio de un arco de círculo de 450^m de radio. ¿A qué distancia del vértice del ángulo ha

de principiar el arco de enlace y a qué distancia pasará de dicho vértice?

354. Dadas la cuerda y la sagita de un arco de círculo, calcular su diámetro. Construir la figura y efectuar el cálculo según los siguientes datos: 1º cuerda 3 centímetros, sagita 1 centímetro; 2º cuerda 1 centímetro, sagita 3 centímetros.

355. Por un punto exterior a un círculo hacer pasar una secante tal que su segmento interior sea igual al radio.

356. Construir geoméricamente un pentágono regular que tenga 1 centímetros de lado, y calcular con la aproximación de $\frac{1}{1000}$, el radio de la circunferencia inscrita en este polígono.

Se sabe que el lado del pentágono regular inscrito, en función del radio, se obtiene por la fórmula:

$$l = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

357. Por un punto tomado en el interior de un exágono regular de 10^m de lado, se traza una perpendicular a cada lado. Calcular la suma de las longitudes de las perpendiculares.

358. Demostrar que uniendo consecutivamente las mitades de los lados de un cuadrilátero, se forma un paralelogramo cuya área es la mitad del área del cuadrilátero. Calcular el área de este cuadrilátero, suponiendo que las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos sean perpendiculares y tengan respectivamente por longitud $96^m 58$ y $126^m 30$.

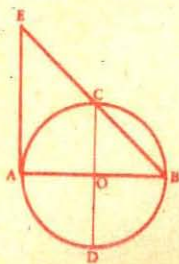


Fig. 13*

359. En un círculo de $1^m 60$ de radio (fig. 13*) se trazan dos diámetros perpendiculares AB y CD; se une B con C, y por el punto A se traza una tangente que encuentre a BC en un punto E. Hallar la superficie limitada por las rectas AE, CE y el arco AC.

360. Desde un punto A dado en una circunferencia, se toman en la misma dirección dos arcos AC, AD, que tienen respectivamente 45° y 60° ; por los puntos C y D se trazan CE, DF paralelas al diámetro que pasa por A. ¿Cuál es el área del trapecio CDFE, si el radio del círculo es de 2 centímetros?

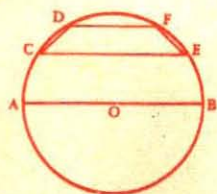


Fig. 14*

361. La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 9 metros, la proyección sobre la hipotenusa de uno de los catetos tiene 1 metro. Calcular los lados del ángulo recto y la perpendicular bajada desde el vértice de este ángulo a la hipotenusa.

362. En un rectángulo ABCD se trazan las bisectrices de los 4 ángulos y se unen los puntos M y N en que se encuentran. Demostrar 1º que el cuadrilátero AMNB es un trapecio isósceles; 2º que la recta MN es igual a la diferencia de los lados adyacentes del rectángulo; 3º que si BC es los $\frac{2}{3}$ de AB, el trapecio AMNB será el tercio del rectángulo. Calcular el área y los lados no paralelos de este trapecio, sabiendo que las dimensiones del rectángulo son 45 y 28 milímetros.

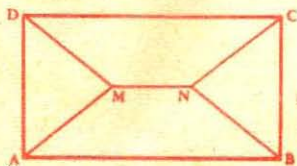


Fig. 15*

363. Dos aldeas, A y B, distantes 1.200 metros, están separadas por un río de riberas rectilíneas y paralelas, y cuya anchura es de 250 metros. Se quiere unir estas aldeas por un puente perpendicular a las riberas; ¿a qué distancia de cada aldea han de estar las entradas del puente para que el camino entre A y B sea el más corto posible? La aldea A dista 100 m. del río, y B, 350.

364. ¿Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular cuya área es de 5.292 m^2 , sabiendo que su anchura es igual a los $\frac{3}{4}$ de su longitud?

365. En un círculo de $1^{\text{m}} 40$ de radio el ángulo central AOB (fig. 16*) tiene 60° ; calcular el área del círculo O' tangente a los dos lados del ángulo y a la circunferencia O.

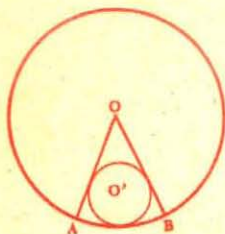


Fig. 16*

366. ¿Cuál es el lado del cuadrado que tiene la misma área que un triángulo cuyos lados miden 25^{m} , 30^{m} y 45^{m} ?

367. Un trapecio simétrico tiene 12^{m} de altura y $84^{\text{m}} 84$ de perímetro; la diferencia de las bases es de 16^{m} . Determinar el área de este polígono.

368. Calcular el área de un cuadrilátero cuyas diagonales tienen respectivamente 56 y 64 centímetros, sabiendo que forman entre sí un ángulo de 60° .

369. ¿Cuánto se gastará en hacer el cielo raso de un salón que tiene la forma de un exágono regular cuyo perímetro mide 30^{m} , si se paga a razón de $2 \text{ pts. } 45$ el m^2 ?

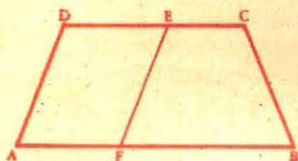


Fig. 17*

370. Las dos bases de un trapecio ABCD (fig. 17*) tienen respectivamente $8^{\text{m}} 25$ y $3^{\text{m}} 20$, y la altura $4^{\text{m}} 60$. Desde el punto E que dista

$1^{\text{m}} 90$ del punto D, se traza EF que divide al trapecio en dos partes tales que ADEF sea los $\frac{3}{5}$ del trapecio total. Calcular AF.

371. Un trapecio de gimnasio tiene 2^{m} de altura; las argollas distan entre sí 80 centímetros y el palo tiene $1^{\text{m}} 20$; ¿cuál es la longitud de las cuerdas?

372. Calcular la superficie de la figura ABOCD (fig. 18*) cuyos lados paralelos AB, CD, y su distancia EF son conocidos. $AB = 1^{\text{m}} 20$; $CD = 4^{\text{m}} 17$, y $EF = 3^{\text{m}} 50$.

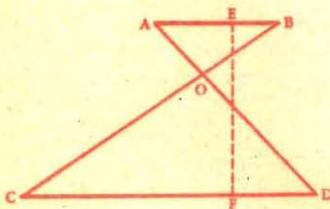


Fig. 18*

373. Las bases de un trapecio simétrico tienen respectivamente 156 y 92^{m} . Calcular el área de este trapecio, sabiendo que uno de sus ángulos tiene 135° .

374. ¿Cuál es el lado de un cuadrado, sabiendo que si se aumenta su lado con $7^{\text{m}} 30$ su área aumenta con 1.032^{m^2} ?

375. Los lados paralelos de un trapecio rectángulo tienen de longitud $324^{\text{m}} \frac{2}{3}$ y $572^{\text{m}} \frac{4}{7}$; la diagonal mayor es de $715^{\text{m}} \frac{3}{4}$. Calcular el área de este trapecio.

376. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuya diagonal y lado suman $7^m 24^s$?

377. ¿Cuál es el área: 1º del círculo inscrito en un cuadrado de 6^m de lado?; 2º del círculo circunscrito?

378. Sabiendo que el lado del triángulo equilátero inscrito en un círculo tiene 8 centímetros, hallar la longitud del lado del triángulo equilátero circunscrito y el área de cada uno de estos dos triángulos.

379. Tres rectas que unen los puntos medios de tres lados consecutivos de un cuadrilátero irregular tienen de longitud 50, 41 y 39^m . ¿Cuál será el área de este cuadrilátero?

380. Una parcela de terreno tiene la forma de un cuadrilátero irregular cuyas diagonales se cortan en ángulo recto. Demostrar que para obtener el área de este cuadrilátero, basta conocer las longitudes de sus diagonales. Aplicación para el caso en que dichas diagonales tengan 143 y 102^m con 80 centímetros.

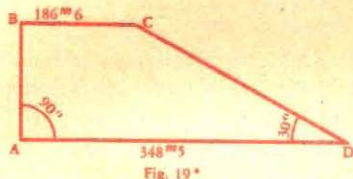


Fig. 19*

381. Calcular el área del trapecio ABCD (fig 19*), si el ángulo A es recto, el ángulo D de 30° , la base AD igual a $348^m 50$, y la base BC de $186^m 60$.

382. Hallar el área de un trapecio cuyas bases tienen 180 y 120^m , sabiendo que los lados concurrentes forman, con la base mayor, ángulos de 45° .

383. En un trapecio isósceles ABCD (fig. 20*), se conoce la base mayor AB, la altura CH, y uno de los lados no paralelos BC. Calcular: 1º el área de este trapecio; 2º el lado del cuadrado equivalente. $AB = 151^m 27$, $CH = 45^m 39$, $BC = 52^m 76$.

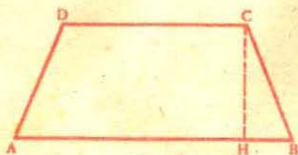


Fig. 20*

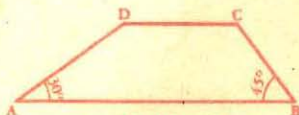


Fig. 21*

384. La base mayor AB de un trapecio ABCD (fig. 21*) tiene 120^m . El lado AD que mide 54^m forma con esta base un ángulo de 30° ; el lado BC forma un ángulo de 45° con la misma base. Calcular: 1º el área del trapecio; 2º el área del triángulo formado por la base menor y la prolongación de los lados no paralelos.

385. Un terreno tiene la forma trapecial ABCD (fig. 22*); la

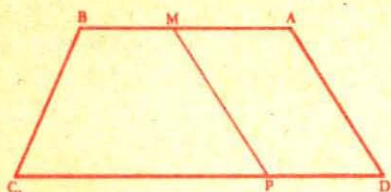


Fig. 22*

base mayor CD mide 64^m , la base menor 28 y la altura 25. En el lado CD hay un pozo P a 24^m del vértice D. Hágase pasar por el centro del pozo una recta PM que divida el terreno en dos partes equivalentes, y determínese el punto en que corta el lado AB.

386. Un terreno tiene la forma de trapecio isósceles cuyas bases miden 108^m y 42^m , y el lado $58^m 50$. Calcular: 1º el área del terreno; 2º el área del terreno triangular que resultaría prolongando los lados no paralelos.

387. Las bases de un trapecio tienen 29 y 80^m , y los otros lados, 20 y 37^m . Calcular la altura y el área de este trapecio.

388. ¿Cuál es la extensión de una plaza de toros cuyo radio es de 50^m ? ¿Cuántos espectadores cabrán en esa plaza, siendo el radio del círculo de arena 20^m , y ocupando cada tres personas un metro cuadrado?

389. Dos círculos tangentes exteriormente tienen de radio 6 y 24^m respectivamente; trazar una tangente exterior que les sea común. Calcular el área del trapecio formado por esta tangente, la línea que une los centros y los radios que terminan en los puntos de contacto.

390. Los centros O y O' de dos circunferencias distan entre sí 165 milímetros; los radios de estas circunferencias miden 62 y 48 milímetros. Si a 30 milímetros de la línea de los centros y paralelamente a ella, se traza una recta, calcular la parte de ésta comprendida entre las dos circunferencias.

391. ¿Cuál es el área de un rombo circunscrito a un círculo de 2 centímetros de radio, siendo uno de los ángulos del rombo igual a 60° ?

392. El perímetro de un campo de forma rectangular tiene 780^m , y la diferencia entre la base y la altura de este rectángulo es de 150^m . Calcular: 1º el área del campo; 2º el radio del círculo equivalente; 3º el área y el lado del rombo cuyas diagonales fueran respectivamente iguales a la base y a la altura del rectángulo.

393. Para cubrir una mesa con duros, cuyo diámetro mide 37 milímetros, se necesitan 117 filas de 84 monedas cada una. Calcular: 1º el número de duros necesarios; 2º la superficie de la mesa; 3º la superficie de los vacíos que dejan los duros entre sí.

394. El lado de un triángulo equilátero es de $5^m 24$. Hállese la longitud de las circunferencias inscrita y circunscrita.

395. Una circunferencia es tangente a los lados de un ángulo recto, y la superficie comprendida entre la circunferencia y los lados del ángulo mide 5.842 cm^2 . Calcular el radio del círculo.

396. Los radios de dos circunferencias tienen respectivamente 3^m y $1^m 20$; la distancia de los centros es de $6^m 40$. Calcular la longitud de la tangente común interior.

397. Un círculo tiene 3 centímetros de radio; calcular la superficie de los segmentos cuyo arco es de: $1^\circ 45'$; $2^\circ 90'$; $3^\circ 120'$.

398. Desde un punto situado a $2^m 36$ de una circunferencia de $1^m 24$ de radio se traza al círculo una secante tal que, el segmento externo sea el doble del segmento interno. Calcular la longitud de esta secante.

399. Dos circunferencias tienen 3 y 4 centímetros de radio. Calcular el punto en que las tangentes interiores cortan a la línea de los centros, si ésta es de 10 centímetros.

400. ¿Cuál es el apotema de un dodecágono regular, si su área es de $1^m 2 2969$, y su perímetro, de $3^m 96$?

401. Un sector de 13° tiene 72 decim.² de área; calcular el área del exágono inscrito en el círculo.

402. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo isósceles cuyo perímetro tiene 120^m de longitud?

403. ¿Cuál es el área de la corona comprendida entre la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero de $3^m 464$ de lado, y la circunferencia inscrita en el mismo triángulo?

404. Calcular el área del rosetón ABCDEF (fig. 23*) inscrito en un círculo de 60 centímetros de radio.

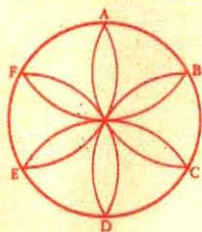


Fig. 23 *

405. ¿Cuál es el área del espacio comprendido entre 3 circunferencias iguales y tangentes entre sí, siendo el radio de 3 centímetros?

406. Calcular el área del sector circular correspondiente a un arco de $53^\circ 24' 37''$, si el radio de la circunferencia tiene $958^m 62$.

407. El Panteón de los Reyes en el Escorial tiene la forma de un octógono regular. Si el diámetro del círculo circunscrito tiene 10^m , calcular: 1° el lado; 2° el apotema del octógono.

408. Un terreno que tiene la forma de un trapecio rectángulo cuyas bases tienen 200^m y 180^m , y la altura 120^m , ha de dividirse en tres parcelas de modo que sus dueños puedan, sin salir de sus heredades respectivas, ir por agua a un pozo situado en la base superior DC, a 75^m del punto D. Calcular los segmentos de la base inferior.

409. La distancia de dos circunferencias es de 1 metro y los radios tienen respectivamente 90 y 60 centímetros de longitud. Calcular la longitud del segmento de la tangente exterior común comprendido entre los puntos de contacto.

41. Un círculo es tal que el sector de $26^{\circ} 28'$, tomado en él, es equivalente al sector de $38^{\circ} 15'$ tomado en otro de $9^m 15$ de radio. Calcular el radio del primer círculo.

411. Tres octógonos regulares tienen respectivamente de lado 12, 16 y 48^m . Calcular el lado y el área del octógono regular equivalente a la suma de los tres primeros.

412. Hallar la diferencia que hay entre el área del exágono regular circunscrito a un círculo de 10 centímetros de radio y la del exágono regular inscrito en el mismo.

413. Dos circunferencias iguales O y O' (fig. 24*), cuyos radios miden 10^m , se cortan en A y B de modo que la distancia de los centros OO' es igual al radio. Calcular el arco AOB .

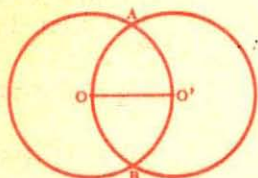


Fig. 24 *

414. En un triángulo de $17^m 40$ de base y $12^m 60$ de altura se inscribe un cuadrado de modo que un lado esté sobre su base. Calcular el lado de este cuadrado.

415. En un triángulo de $3^m 75$ de base y $2^m 25$ de altura se inscribe un rectángulo cuyo perímetro es de $5^m 80$. ¿Cuáles son las dimensiones de este rectángulo, si descansa sobre la base del triángulo?

416. Desde cada uno de los vértices de un triángulo equilátero, y con el lado por radio, se describe un arco de círculo entre los otros vértices. Calcular el área del triángulo curvilíneo así trazado, si el lado del triángulo dado es de 10 centímetros.

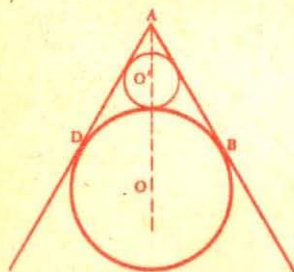


Fig. 25 *

417. Dos tangentes AB y AD (fig. 25*) forman un ángulo de 60° . La circunferencia O' es a la vez tangente a la circunferencia O y a las dos rectas AB y AD . Si el radio de la circunferencia O tiene $1^m 40$, calcular: 1º el área del círculo O' ; 2º la razón de las áreas de los dos círculos.

418. Un vapor cuyo mástil tiene 40^m se aleja de un faro de 55^m de altura. ¿A qué distancia del faro estará el buque cuando el vigía del faro no ve ya la punta del mástil? Se supone que el radio de la tierra es de 6.366 kilómetros.



Fig. 26

419. Hallar el área de un rombo de 5^m de lado, si su diagonal mayor es el duplo de la menor.

420. Si se divide en seis partes iguales una circunferencia de 30 centímetros

de radio (fig. 26*) y luego se unen de dos en dos los puntos de división, calcular: 1º el área de los triángulos ALG, BGH, etc.; 2º el área del exágono GHIJKL.

421. Calcular el área comprendida entre el perímetro de un exágono regular y el del triángulo

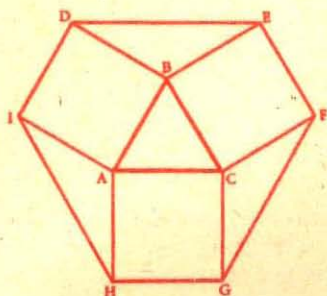


Fig. 27

que se forma uniendo de dos en dos los vértices del exágono, si el radio de la circunferencia circunscrita al exágono es de 1^m 75.

422. Dado un triángulo equilátero ABC (fig. 27*), sobre sus lados se construyen cuadrados cuyos vértices exteriores adyacentes se juntan. Demostrar que cada uno de los triángulos así formados es equivalente al triángulo ABC; calcular el área del exágono irregular

obtenido, si el lado del triángulo equilátero tiene 2 centímetros 20.

423. Calcular las diagonales y área de un rombo cuyo lado tiene 30^m , y uno de los ángulos agudos 30° .

424. Dado un exágono cuyo lado es de 1^m , si sobre cada uno de sus lados se construye un cuadrado exterior, demostrar: 1º que los vértices exteriores de los 6 cuadrados son vértices de un polígono regular de 12 lados; 2º calcular el área del polígono así obtenido.

425. Un exágono regular tiene 2 centímetros de lado; si se prolongan los lados en las dos direcciones y se juntan consecutivamente los puntos de intersección, determinar la naturaleza y el área del polígono obtenido.

426. En una circunferencia de 45 milímetros de radio se inscriben dos circunferencias cuyo diámetro es el radio de la primera, y tangentes mutuamente. Describir otras dos circunferencias tangentes a las tres primeras, y calcular sus radios.

427. En una circunferencia de 60 centímetros de radio (fig. 28*) se inscribe un octógono regular ABCDEFGH. Sobre las cuerdas AB,

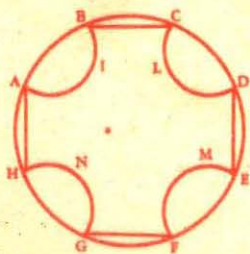


Fig. 28

CD, etc., por diámetros se describen semicircunferencias cuya convexidad está hacia el centro. ¿Cuál será el área de la parte AIBCLDEMFGNHA?

428. El radio de un círculo tiene 60 centímetros. Calcular el área del decágono regular inscrito en este círculo.

429. Las diagonales de un cuadrilátero tienen respectivamente de longitud 91 y 105^m , y la recta que une los puntos medios de dos lados opuestos tiene

49^m. Calcular el área de este polígono. Con estos datos ¿se puede construir gráficamente un cuadrilátero semejante al propuesto?

430. Sobre los lados de un cuadrado ABCD se construyen cuatro rectángulos iguales. ¿Cuál ha de ser su altura común para que, juntando los vértices exteriores, el octógono que resulte sea regular? Siendo el lado del cuadrado de 1^m 60, calcular el área del octógono regular así formado.

431. El radio de una circunferencia tiene 2^m y está dividido, por una circunferencia concéntrica, en media y extrema razón; calcular la longitud de una cuerda de la circunferencia mayor que fuera tangente a la menor.

432. Un campo tiene la forma de un pentágono irregular inscrito en un círculo de 100^m de radio. Desde el centro, se ven los lados bajo ángulos de 45°, 60°, 45°, 90°, 120°. Calcular el área del polígono.

433. En un trapecio la altura es de 3^m, y el área es equivalente a la del rectángulo construido con las bases por lados; además una de las bases, más dos veces la otra, dan una suma triple del número que expresa la altura. Calcular las bases y la altura del trapecio.

GEOMETRIA DEL ESPACIO

LIBRO V

LINEAS RECTAS Y PLANOS

NOCIONES PRELIMINARES

414. La *Geometría del espacio* tiene por objeto el estudio de las figuras cuyos elementos no están situados en un mismo plano. —

La *noción de plano*, como la de línea recta, es intuitiva y de origen experimental. La superficie de un cristal bien terso, de una pizarra bien pulimentada, nos dan idea del plano. Dicha noción se completa con las siguientes propiedades del mismo:

415. Plano es una superficie indefinida que contiene enteramente cualquier línea recta que tenga en él dos de sus puntos. Por consiguiente, *en un plano pueden trazarse infinitas rectas.*

Todo plano es *indefinido*, esto es, ha de suponerse prolongado indefinidamente; pero para facilitar las demostraciones lo suponemos como si estuviera limitado, y lo representamos por una porción rectangular de plano, cuya perspectiva se asemeja a un paralelogramo.

Por dos puntos del espacio, o por una recta, pueden pasar infinitos planos; v. gr.: una puerta al girar sobre sus goznes puede ocupar una infinidad de posiciones.

416. Determinación del plano. — *Tres puntos determinan un plano, esto es: por tres puntos que no estén en línea recta puede pasar un plano, y sólo uno.*

Dados tres puntos A, B y D que no están en línea recta, si por dos de ellos, A y B, o sea por la recta AB que estos puntos determinan, se hace pasar un plano; entre las distintas posiciones que ocupe dicho plano girando alrededor de AB, hay una en que este plano pasará por el punto D.



Fig. 328

El plano quedará así en una posición fija porque no puede continuar su movimiento alrededor de AB sin dejar de pasar por el punto D.

417. Luego, la posición de un plano queda determinada:

- 1º Por tres puntos que no estén en línea recta;
- 2º Por una recta y un punto exterior a ella;
- 3º Por dos rectas concurrentes;
- 4º Por dos paralelas.

418. La intersección de dos planos es una línea recta, pues de lo contrario, los dos planos tendrían al menos tres puntos comunes y no en línea recta, y por lo tanto coincidirían; lo cual va contra el supuesto.

419. **Generación del plano.** — Se puede considerar un plano como engendrado por una recta que se mueve:

- 1º *Sobre dos rectas concurrentes o paralelas;*
- 2º *Sobre una recta y pasando por un punto fijo, exterior a la recta;*
- 3º *Girando alrededor de una recta fija y perpendicularmente a la misma.*

CAPITULO I

RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES

DEFINICIONES

420. La recta, con relación al plano, puede tener tres posiciones:

- 1º *Estar contenida en el plano, en cuyo caso el plano pasa por la recta;*
- 2º *Atravesar el plano, entonces es secante, y puede ser perpendicular u oblicua al plano;*
- 3º *Ser paralela al plano, en cuyo caso el plano es también paralelo a la recta.*

En la primera posición, todos los puntos de la recta son comunes con el plano; cuando la recta es secante, sólo tiene un punto común con el plano, y no tiene ninguno cuando es paralela.

421. *Pie de una secante es el punto común a la recta y al plano. Una recta es perpendicular a un plano cuando lo es a todas las rectas que pasan por su pie en el mismo plano.*

Cuando una recta es perpendicular a un plano, el plano lo es a la recta.

Oblicua a un plano es toda secante que no le es perpendicular.

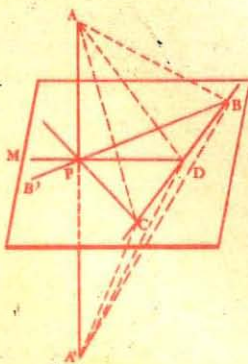


Fig. 329

Teorema.

422. *Toda recta perpendicular a otras dos que pasan por su pie en un plano, es perpendicular a cualquier otra recta que pase por su pie en el mismo plano, y por consiguiente perpendicular al plano.*

Sea la recta AP perpendicular a PB y a PC; demostremos que lo es también a PD.

Para ello, tracemos una recta CB que corte a PB, PD y PC; prolonguemos la recta AP, tomemos $PA' = PA$ y tracemos AB, AD, AC, A'B, A'D, A'C.

Las rectas BA y BA' son iguales como oblicuas que se apartan igualmente del pie de la perpendicular; por análoga razón

lo son también las rectas CA y CA'. Luego los triángulos ABC y A'BC son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; de donde resulta:

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'BC}.$$

Por consiguiente, los triángulos ABD y A'BD son iguales (Nº 60), y $AD = A'D$. Por lo tanto, la recta PD cuyos puntos P y D equidistan de A y A', será perpendicular a AA' (Nº 51), y recíprocamente AA' lo será a PD.

Luego, *toda recta...*

423. Corolario. Por un punto de una recta se puede trazar un plano perpendicular a dicha recta y sólo uno, porque si en el punto P (fig. 329) se levantan dos perpendiculares PB y PC a la recta AP, éstas determinan el plano M perpendicular a AP.

NOTA. — Este plano puede considerarse como engendrado por la recta PB girando alrededor de la recta AP, permaneciendo siempre perpendicular a ella.

Teorema.

424. Si desde un punto exterior a un plano se trazan a éste una perpendicular y varias oblicuas:

- 1º La perpendicular es menor que cualquiera oblicua;
- 2º Dos oblicuas que equidistan del pie de la perpendicular son iguales;
- 3º De dos oblicuas que se apartan desigualmente del pie de la perpendicular, la que se aparta más es la mayor.

1º Sea AP una perpendicular y AB una oblicua. Tracemos BP. Siendo AP perpendicular al plano M, lo será también a la recta PB (Nº 421).

En el triángulo rectángulo APB tenemos:

$$AP < AB$$

2º Sean las oblicuas AB y AC que equidistan del pie de la perpendicular.

Los triángulos APB y APC son iguales por tener un ángulo igual (ángulo recto) comprendido por lados respectivamente iguales; luego,

$$AB = AC.$$

3º Sean las oblicuas AD y AB, en las cuales $PD < PB$.

Tomemos $PC = PB$, y tracemos AC que será igual a AB (2º); como en la figura plana APD, AD es mayor que AC (Nº 46), también tendremos:

$$AD > AB.$$

Luego, *si desde un punto...*

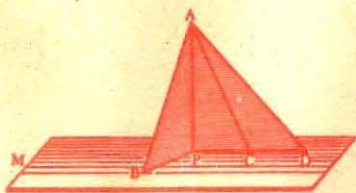


Fig. 330

425. **Recíproco.** 1º La línea menor que pueda trazarse desde un punto del espacio a un plano es la perpendicular bajada desde dicho punto al plano; por lo tanto, esta perpendicular determina la distancia del punto al plano;

2º Si dos oblicuas que parten desde un mismo punto exterior a un plano son iguales, sus pies equidistan del pie de la perpendicular;

3º Si dos oblicuas que parten desde un mismo punto exterior a un plano son desiguales, la mayor es la que se aparta más del pie de la perpendicular.

Teorema.

426. Si desde el pie de una perpendicular (AP) a un plano (M), se traza una perpendicular, (PB) a una recta, (CD) situada en dicho plano, la recta (AB) que une el pie de esta segunda perpendicular con un punto cualquiera (A) de la primera, será perpendicular a la recta (CD) del plano.

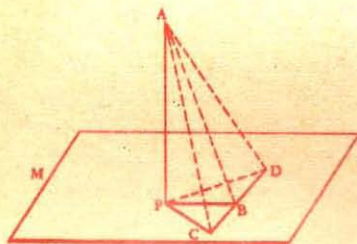


Fig. 331

ACD es isósceles por tener iguales los lados AC y AD; luego AB es perpendicular a la recta CD (Nº 70) ¹.

En efecto, tomemos $BC = BD$, y tracemos PC, PD, AC, AD. Las rectas PD y PC son iguales por ser PB perpendicular en el punto medio de CD; luego, los triángulos rectángulos APC y APD son iguales por tener un ángulo igual comprendido por lados respectivamente iguales. Así pues el triángulo

CAPITULO II

PARALELISMO DE RECTAS Y PLANOS

DEFINICIONES

427. Dos planos pueden tener las siguientes posiciones relativas:

1º Coincidir;

2º Ser secantes, en cuyo caso serán *perpendiculares* u *oblicuos*;

3º Ser paralelos.

En la primera posición, toda recta del uno pertenece también al otro; en la segunda, los planos tienen una recta común, y no tienen ningún punto común cuando son paralelos.

428. *Intersección de dos planos* es la recta común a ambos.

Un plano es perpendicular a otro cuando forma con él dos ángulos diedros rectos (véase Nº 436).

Dos planos son *oblicuos* cuando son secantes, sin ser perpendiculares.

¹ Este teorema se conoce con el nombre de *teorema de las tres perpendiculares*.

Son *paralelos* cuando no se encuentran por más que se prolonguen.

429. De las definiciones de las rectas paralelas (Libro I), y de las rectas y planos paralelos (Nos. 420 y 427), resultan varias propiedades, siendo las principales:

Por un punto del espacio no puede pasar más que una paralela a una recta dada.

Dos rectas paralelas a otra lo son entre sí.

Cuando dos planos son paralelos, toda recta trazada en uno de ellos es paralela al otro.

Si dos rectas son paralelas entre sí, todo plano trazado por una de ellas es paralelo a la otra.

Dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre sí.

Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí.

430. Llámase *ángulo de dos rectas que no se cortan en el espacio*, al ángulo formado por dos rectas trazadas por un punto cualquiera del espacio paralelamente a las rectas dadas. Como este punto es arbitrario, para hallar el ángulo de dos rectas, desde un punto cualquiera de una de ellas, basta trazar una paralela a la otra.

Teorema.

431. *Si una recta, exterior a un plano, es paralela a otra que está situada en él, también es paralela a dicho plano.*

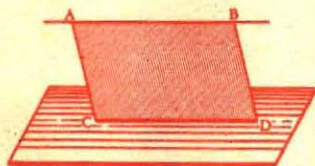


Fig. 332

Sea AB paralela a CD.

Tracemos el plano AD.

Por estar AB y CD en un mismo plano, la recta AB no podría encontrar al plano M sin encontrar a su paralela CD, lo que es imposible por ser paralelas por hipótesis.

Luego, si una recta...

Teorema.

432. *Dos rectas concurrentes paralelas a un plano determinan otro plano paralelo al primero.*

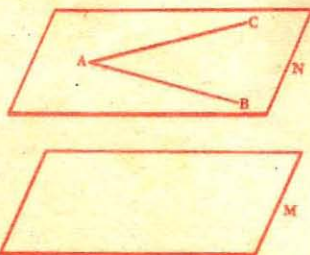


Fig. 333

Sea el plano N determinado por las rectas AB y AC, paralelas al plano M.

Si estos planos se encontrasen, su intersección cortaría por lo menos a una de las rectas AB, AC, y ésta encontraría al plano M, lo que está en pugna con el supuesto.

Luego, 2 rectas concurrentes...

Teorema.

433. Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son paralelas.

Estas intersecciones se hallan en el plano secante P y también en los planos paralelos M y N; luego son paralelas, porque si no

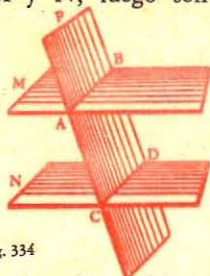


Fig. 334

lo fuesen, se encontrarían los planos M y N, lo que va contra el supuesto.

Luego, las intersecciones...

Teorema.

434. Los segmentos de rectas paralelas, comprendidos entre dos planos paralelos, son iguales.

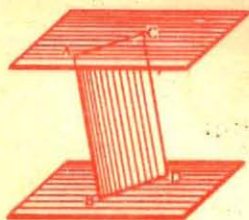


Fig. 335

Sean las paralelas AB y CD, comprendidas entre los planos paralelos M y N.

Por AB y CD hagamos pasar el plano AD; sus intersecciones AC y BD son paralelas (Nº 433). Luego el cuadrilátero ABDC es un paralelogramo (Nº 99), y $AB = CD$ (Nº 102).

Luego, los segmentos de rectas paralelas...

Teorema.

435. Dos ángulos, situados en diferentes planos, que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales o suplementarios, y los planos que determinan son paralelos.

Sean los ángulos BAC y EDF (fig. 336), que tienen el lado AB paralelo a DE y AC paralelo a DF.

1º Tomemos $AB = DE$, $AC = DF$ y tracemos las rectas AD, CF, BE, CB y FE.

El cuadrilátero ABED es un paralelogramo, por ser AB igual y paralela a DE; luego BE es igual y paralela a AD.

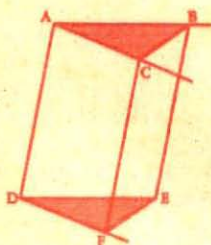


Fig. 336

Por análoga razón, CF es igual y paralela a AD en el paralelogramo ACFD.

De que BE y CF son iguales y paralelas a AD, se infiere que son iguales y paralelas entre sí, y por consiguiente el cuadrilátero BCFE es un paralelogramo y $CB = FE$; luego los triángulos ACB y DFE son iguales por tener sus lados respectivamente iguales, y por lo tanto:

$$\widehat{BAC} = \widehat{EDF}.$$

2º Sean los ángulos GDF y BAC (fig. 337) que tienen los lados respectivamente paralelos, y dos de ellos dirigidos en sentido contrario.



Fig. 337

El ángulo GDF tiene por suplemento el ángulo EDF; pero $\widehat{EDF} = \widehat{BAC}$. (1º)

Luego los ángulos GDF y BAC son suplementarios.

3º Los planos ABC y DEF son paralelos, por estar cada uno de ellos determinado por dos rectas paralelas al otro (Nº 432).

CAPITULO III

ANGULOS DIEDROS Y PLANOS

PERPENDICULARES

DEFINICIONES

436. Llámase *ángulo diedro* a la figura formada por dos planos que se cortan, limitándose en su intersección.

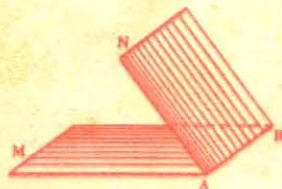


Fig. 338

Estos planos son las *caras* del diedro, y su intersección se llama *arista*.

El ángulo diedro se designa con las letras de su arista; v. gr.: ángulo diedro AB (fig. 338).

La magnitud de un ángulo diedro no depende de la mayor o menor extensión de sus caras, sino de la mayor o menor separación de las mismas.

437. Llámase *ángulo plano correspondiente a un diedro* al ángulo rectilíneo formado por dos perpendiculares levantadas en un

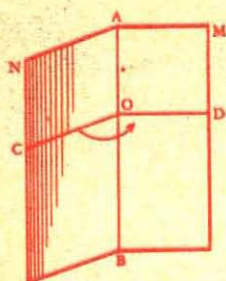


Fig. 339

440. Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por ella es perpendicular al primero.

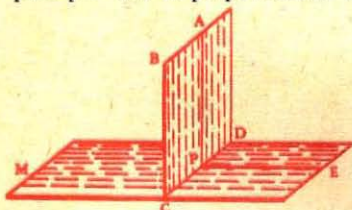


Fig. 340

el diedro CD, y por consiguiente el plano BD será perpendicular al plano M.

Luego, si una recta...

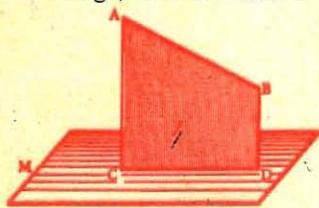


Fig. 341

442. Si dos planos son perpendiculares entre sí, toda recta trazada en uno de ellos y perpendicularmente a su intersección, es también perpendicular al otro.

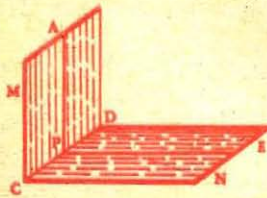


Fig. 342

punto cualquiera de la arista y situadas una en cada plano.

El ángulo COD es el ángulo plano del diedro AB.

438. Un ángulo diedro será recto, obtuso o agudo según que su ángulo plano sea recto, obtuso o agudo.

439. Dos ángulos diedros son proporcionales a sus ángulos planos; luego la medida de un ángulo diedro es la misma que la de su ángulo plano.

Teorema.

Sea la recta AP perpendicular al plano M, y el plano BD que pasa por la recta AP.

Por el punto P tracemos en el plano M la recta PE perpendicular a CD, intersección de los planos.

La recta AP es perpendicular a PE (Nº 422); por lo tanto el ángulo APE es recto, así como también

el diedro CD, y por consiguiente el plano BD será perpendicular al plano M.

441. Corolario. Para hacer pasar por una recta AB un plano perpendicular a otro dado M, basta bajar desde un punto cualquiera A de la recta AB una perpendicular AC al plano M; con lo cual el plano que pase por AB y AC será perpendicular al plano M (Nº 440).

Teorema.

Sean M y N dos planos perpendiculares, y la recta AP del plano M, perpendicular a la intersección CD.

En el plano N tracemos PE perpendicular a la misma intersección CD.

Siendo recto por hipótesis el diedro CD, infiérese que lo será también su án-

gulo plano APE; por lo tanto AP es perpendicular a PE y al plano N, por ser perpendicular a CD y a PE, que son dos rectas de dicho plano (Nº 422).

Luego, si dos planos...

Teorema.

443. Cuando dos planos son perpendiculares entre sí, toda recta perpendicular a uno de ellos en un punto de su intersección está situada enteramente en el otro.

Sean M y N dos planos perpendiculares, y P un punto cualquiera de la intersección de dichos planos.

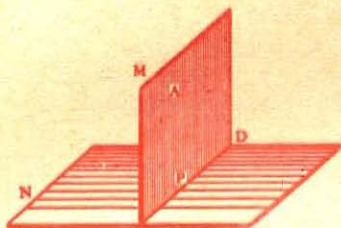


Fig. 343

Demostremos que la recta AP, perpendicular al plano N, está en el plano M. En efecto, si AP no estuviera en el plano M, por AP y CD se podría trazar un plano perpendicular al plano N (Nº 440), y como ya el plano M, que también pasa por CD, es perpendicular al plano N por hipótesis, resultaría que por una recta situada en un plano podrían pasar dos planos perpendiculares al primero, lo que es imposible.

Luego, cuando dos planos...

Teorema.

444. La intersección de dos planos perpendiculares a un tercero es también perpendicular a este último.

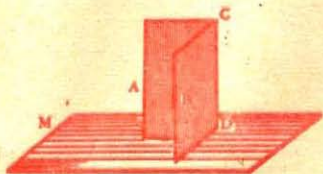


Fig. 344

Sean los planos A y B, perpendiculares a M.

Demostremos que CD es también perpendicular a M.

En efecto, si desde el punto D, común a los tres planos, levantamos una perpendicular al plano M, dicha perpendicular tendrá que encontrarse a la vez en cada

uno de los planos A y B (Nº 443), y por lo tanto se confundirá con su intersección CD.

Luego, la intersección...

445. Recíproco. Todo plano perpendicular a la intersección de otros dos, es perpendicular a cada uno de ellos.

CAPITULO IV

PROYECCIONES SOBRE UN PLANO

DEFINICIONES

446. La *proyección de un punto sobre un plano* es el pie de la perpendicular trazada desde dicho punto al plano.

La *proyección de una recta sobre un plano* es el conjunto de las proyecciones de los distintos puntos de la recta sobre el plano.

La *proyección de una figura cualquiera sobre un plano* es el conjunto de las proyecciones de todos los puntos de la figura sobre el mismo.

El plano que contiene a una recta y a su proyección se llama *plano proyectante*, y el plano sobre el cual se proyecta, *plano de proyección*.

Cota de un punto es la distancia que media entre este punto y el plano de proyección.

Teorema.

447. La *proyección de una recta sobre un plano es otra recta*.

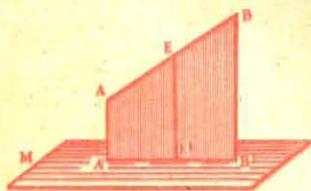


Fig. 345

Sea la recta AB.

Por AB tracemos el plano AB' perpendicular al plano M (Nº 441).

Si desde un punto cualquiera E de la recta AB, bajamos una perpendicular al plano M, dicha perpendicular se hallará en el plano AB, (Nº 443) y E, proyección del punto E, se encontrará en A'B', intersección del plano AB' con el plano M. Lo mismo ocurrirá con los demás puntos de AB; luego la recta A'B' es la proyección de AB.

448. NOTA.—Casos particulares: 1º Si la recta AB fuese *paralela* al plano de proyección M, su proyección le sería *paralela e igual*.

2º Si AB fuese *perpendicular* al plano M, su proyección sobre él sería *un punto*.

449. Escolio. Una recta cualquiera y su proyección sobre un plano están en un mismo plano perpendicular al plano de proyección.

Teorema.

450. El ángulo que forma una recta con su proyección es menor que el que forma con cualquier otra recta que pasa por su pie en el plano de proyección.

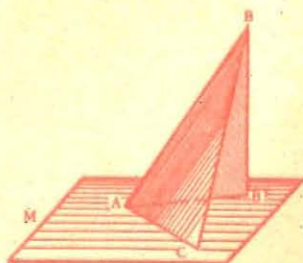


Fig. 346

Sea la recta AB , AB' su proyección sobre el plano M , y AC otra recta trazada en el plano.

Tomemos $AC = AB'$ y tracemos BC ; esta recta es oblicua al plano M y por consiguiente mayor que BB' . Los triángulos ABB' y ABC tienen dos lados respectivamente iguales, a saber: $AB' = AC$, AB es lado común; luego BAB' , opuesto al lado menor, es menor que BAC , opuesto al lado mayor (N° 65).

451. Escolio. Si desde un punto del espacio se trazan varias oblicuas a un plano:

- 1^o Dos oblicuas iguales forman con el plano ángulos iguales;
- 2^o De dos oblicuas desiguales, la menor forma ángulo mayor.

452. Definición. Llámase *ángulo de una recta con un plano* al ángulo agudo que forma una recta con su proyección sobre el plano. Se obtiene este ángulo ya prolongando la recta hasta el plano, ya trazando por un punto cualquiera de la misma una paralela a su proyección sobre el plano.

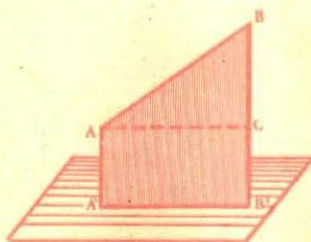


Fig. 347

453. La pendiente de una recta es el resultado de dividir la diferencia de las distancias de sus extremos al plano por la proyección de dicha recta. La pendiente de la recta AB (fig. 347) será:

$$\frac{BB' - AA'}{A'B'} \quad \text{o sea} \quad \frac{BC}{A'B'}$$

CAPITULO V

ANGULOS POLIEDROS

DEFINICIONES

454. *Ángulo poliedro o sólido* es la figura formada por varios ángulos planos que tienen un mismo vértice, y de dos en dos un lado común; por ejemplo, el formado por la aguja de un campanario.

El punto común se llama *vértice* del ángulo sólido; llámase *cara* a cada uno de los planos de que consta el ángulo poliedro; las intersecciones de las caras son las *aristas*.

455. *Triedro* es un ángulo sólido que consta de tres caras. En el triedro se consideran seis elementos, a saber: tres *caras* y tres *die-*

dros. Los diedros se designan ya por las aristas SA, SB, SC (fig. 348), ya por A, B, C; y las caras respectivamente opuestas, por las mismas letras, pero minúsculas a, b, c .

456. Un ángulo sólido es convexo cuando al cortar todas sus aristas por un plano, la sección que resulta es un polígono convexo.

Teorema.

457. En todo triedro una cara cualquiera es menor que la suma de las otras dos, y mayor que su diferencia.

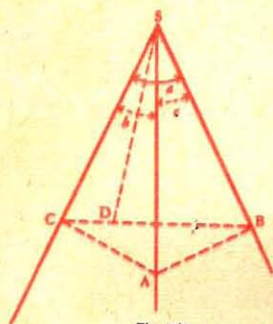


Fig. 348

Sea el ángulo triedro S y sean a, b, c , sus caras.

1º Siendo evidente la primera parte de este teorema con respecto a las caras menor y mediana, basta demostrar que la cara mayor es menor que la suma de las otras dos.

Para ello, tracemos una recta CB que corte a SC y a SB; luego tracemos SD que forme un ángulo BSD igual al ángulo BSA; tomemos $SA = SD$ y tracemos el plano ABC.

Los triángulo BSA y BSD son iguales por tener un ángulo igual comprendido por lados respectivamente iguales; luego $BD = BA$. Pero en el triángulo ABC tenemos:

$$BC < BA + AC$$

$$BD + DC < BA + AC$$

o $DC < AC$, por ser $BD = BA$;

y por consiguiente (Nº 65):

$$\widehat{DSC} < \widehat{ASC}.$$

Añadiendo a ambos miembros respectivamente los ángulos iguales BSD y BSA, tendremos:

$$\widehat{DSC} + \widehat{BSD} < \widehat{ASC} + \widehat{BSA},$$

o

$$\widehat{BSC} < \widehat{ASC} + \widehat{BSA},$$

o sea

$$a < b + c.$$

2º La desigualdad $a < b + c$ puede escribirse:

$$b + c > a$$

de donde resulta:

$$b > a - c, \text{ y } c > a - b.$$

Esta propiedad es evidente para la cara mayor.

Luego, en todo triedro...

Teorema.

458. En todo ángulo sólido convexo la suma de sus caras es menor que cuatro ángulos rectos.

Sea S un ángulo sólido. Tracemos un plano cualquiera que corte a todas sus aristas; así resulta el polígono convexo ABCDE.

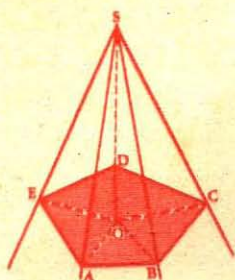


Fig. 349

Unamos los vértices de este polígono con cualquier punto interior O, y consideremos las dos series de triángulos, cuyo vértice común es O para la primera, y S para la segunda.

Como estas dos series constan del mismo número de triángulos, en ambas la suma de todos los ángulos es igual.

Tenemos (Nº 457):

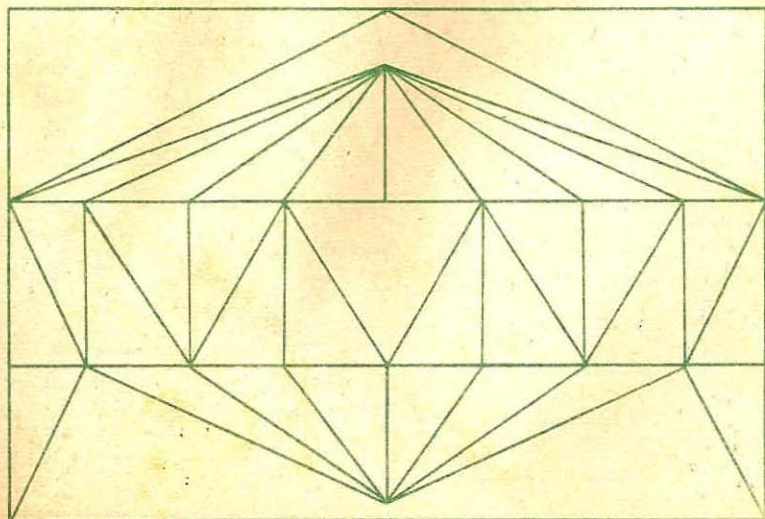
$$\widehat{BAE} < \widehat{BAS} + \widehat{EAS}$$

y

$$\widehat{CBA} < \widehat{CBS} + \widehat{ABS}, \text{ etc.}$$

Luego, la suma de los ángulos en la base es menor en la primera serie que en la segunda. Por lo tanto, la suma de los ángulos en el vértice es mayor en la primera que en la segunda; esto es, la suma de los ángulos en O, o 4 rectos, es mayor que la suma de los ángulos en S.

Luego, en todo ángulo sólido...



APLICACIONES

EJERCICIOS

434. Hallar la distancia que media entre un punto y un plano dados.

435. La aguja de un campanario forma un ángulo sólido de ocho caras cuya suma es de 90° . Hallar el valor de cada uno de los ángulos en la base de las caras laterales.

436. Dadas dos rectas indefinidas, trazar un plano paralelo a ambas rectas y a igual distancia de cada una de ellas.

437. Por una recta dada, trazar un plano que pase a igual distancia de dos puntos dados.

438. Por un punto dado, trazar un plano que pase a igual distancia de otros tres puntos dados.

Demostrar las siguientes proposiciones

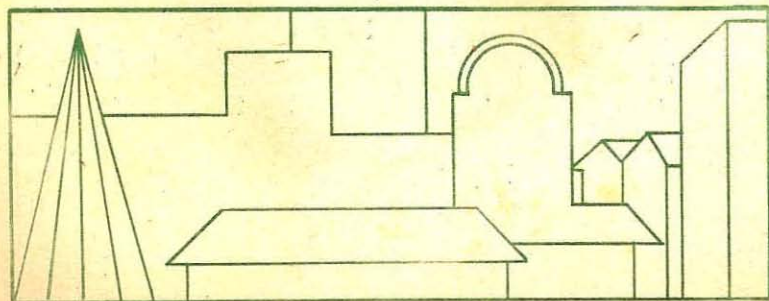
439. Si una recta y un plano son paralelos, todo plano perpendicular a la recta es también perpendicular al plano propuesto, y recíprocamente.

440. Una recta y un plano perpendiculares a una misma recta son paralelos.

441. Si dos planos son respectivamente paralelos a otros dos que se cortan, las intersecciones son paralelas.

442. Dos triedros que tienen dos caras respectivamente iguales y el diedro comprendido desigual, tienen también la tercera cara desigual, y recíprocamente.

443. En todo triedro, a mayor diedro se opone mayor cara, y recíprocamente.



LIBRO VI

POLIEDROS

NOCIONES PRELIMINARES

459. *Poliedro* o *sólido geométrico* es una figura limitada por superficies planas.

En un sólido hay que considerar:

Las *caras*, que son polígonos planos cuyo conjunto forma la superficie del poliedro;

Las *aristas*, o lados de dichos polígonos; cada una es común a dos caras contiguas;

Los *vértices*, o extremos de las aristas; en cada vértice concurren a lo menos tres aristas;

Los *ángulos diedros* formados en cada arista y los *ángulos sólidos*, formados en cada vértice del poliedro;

Las *diagonales*, que son rectas uniendo dos vértices situados en distinta cara.

460. El *tetraedro* es el más sencillo de los poliedros; consta de 4 caras triangulares, 4 ángulos triedros y 6 aristas.

El poliedro de 5 caras se llama *pentaedro*;

" 6 " " *exaedro*;

" 8 " " *octaedro*;

" 12 " " *dodecaedro*;

" 20 " " *icosaedro*.

Los demás se designan por el número de sus caras. — Ciertos poliedros tienen denominaciones particulares; los principales son el *prisma* y la *pirámide*.

461. Un poliedro es *convexo*, cuando su sección por un plano no puede ser sino un polígono convexo. El polígono convexo está situado del todo a un mismo lado del plano de una de sus caras.

462. Llámase *poliedro regular* al que tiene iguales sus ángulos sólidos, y cuyas caras son polígonos regulares iguales.

Los poliedros regulares convexos son cinco:



Fig. 350

1º *Tetraedro regular*, limitado por 4 triángulos equiláteros unidos de 3 en 3;

2º *Octaedro regular*, limitado por 8 triángulos equiláteros unidos de 4 en 4;

3º *Icosaedro regular*, limitado por 20 triángulos equiláteros unidos de 5 en 5.

4º *Exaedro regular o cubo*, limitado por 6 cuadrados unidos de 3 en 3;

5º *Dodecaedro regular*, limitado por 12 pentágonos regulares unidos de 3 en 3¹.

No puede haber más poliedros regulares que éstos. En efecto, para formar ángulos sólidos se necesitan por lo menos tres caras, cuya suma ha de valer menos que 4 rectos (Nº 458). Ahora bien: 6 ángulos de triángulo equilátero valen 4 rectos, así como 4 ángulos de cuadrado; 4 ángulos de pentágono regular valen más. Luego, con dichos polígonos no se pueden formar más combinaciones.

Además, no se pueden formar ángulos sólidos con otros polígonos regulares, pues 3 ángulos de exágono valen 4 rectos, 3 de heptágono valen más, etc.

463. *Dos poliedros son iguales* cuando pueden coincidir por superposición.

Dos poliedros son equivalentes cuando tienen igual volumen y distinta forma.

CAPITULO I

PRISMA

DEFINICIONES

464. Llámase *prisma* al poliedro comprendido entre dos polígonos iguales y paralelos, y cuyas caras laterales son paralelogramos.

Los dos polígonos iguales y paralelos son las *bases* del prisma.

Altura de un prisma es la distancia de sus bases.

Sección recta es toda sección determinada por un plano perpendicular a las aristas laterales.

465. *Tronco de prisma* es la porción de este comprendida entre la base y un plano no paralelo a ella que corte a todas las aristas laterales.

466. Un prisma es *recto* (fig. 353) u *oblicuo* (fig. 355), según que sus aristas sean o no perpendiculares a los planos de las bases.

El prisma recibe distintas denominaciones según la forma de sus bases; así se llamará *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.

El prisma es *regular* cuando, siendo recto, sus bases son polígonos regulares, e *irregular* en el caso contrario.

467. *Paralelepípedo* es el prisma cuyas bases son paralelogramos.

¹ Las formas de estos poliedros nos las ofrece la naturaleza en los cuerpos cristalizados. El *zinc sulfurado* cristalizado tiene la forma de tetraedros; la *sal común*, de cubos; el *diamante*, de octaedros, etc.

Un *paralelepípedo rectángulo* es un prisma recto cuyas bases son rectángulos.

Cubo es un paralelepípedo rectángulo cuyas tres dimensiones son iguales; sus seis caras son cuadrados.

468. La *superficie lateral* de un prisma es la suma de las superficies de sus caras laterales.

La *superficie total* consta de la superficie lateral y de la superficie de ambas bases.

469. *Unidad de volumen.* Tómate por *unidad de volumen*, el volumen de un cubo construido con la *unidad de longitud* por arista.

Según que la unidad de longitud sea el metro o uno de sus submúltiplos, la unidad de volumen será el *metro cúbico* o uno de sus submúltiplos.

Teorema.

470. Las caras opuestas de un paralelepípedo son iguales y paralelas.

Sea el paralelepípedo AG, y las caras opuestas AH y BG.

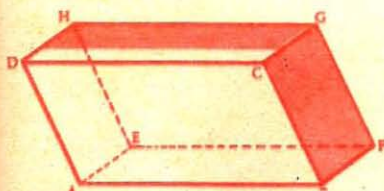


Fig. 351

Las rectas AD y BC, como también AE y BF, son iguales y paralelas entre sí por ser todas las caras del sólido, paralelogramos.

Luego los ángulos DAE y CBF son iguales, y sus planos paralelos (N^o 435).

Por consiguiente, los paralelogramos AH y BG, que tienen un ángulo igual comprendido por la-

dos respectivamente iguales, son iguales porque podrían coincidir.

Luego, las caras...

471. *Corolario.* En todo paralelepípedo se pueden tomar por bases dos caras opuestas cualesquiera.

Teorema.

472. En todo paralelepípedo rectángulo, el cuadrado de la diagonal es igual a la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones.

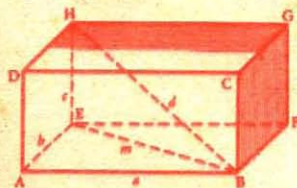


Fig. 352

Sea AG un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son a , b , c , y sea d una diagonal.

El triángulo BEH es rectángulo en E, y el triángulo ABE es rectángulo en A. Luego:

$$d^2 = m^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Si se tratase de un cubo, llamando a a la arista, tendríamos:

$$d^2 = 3a^2$$

Teorema.

473. *Dos prismas rectos de igual base y altura son iguales.*

Sean los prismas P y P' , de igual base y altura.

Hagamos coincidir las bases inferiores B y B' de los prismas. Las aristas AE y $A'E'$ coinciden, por ser dos perpendiculares iguales, levantadas en el mismo punto de un mismo plano.

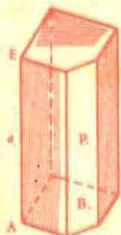


Fig. 353



Del mismo modo demostraríamos que han de coincidir las demás aristas.

Luego los dos prismas P y P' coinciden, y por lo tanto son iguales.

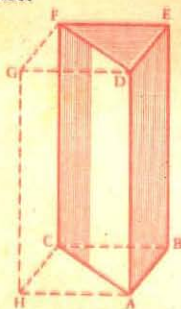


Fig. 354

474. *Escolio. El plano trazado por dos aristas opuestas de un paralelepípedo rectangular lo divide en dos prismas triangulares iguales.*

Sea el plano AF trazado por las aristas opuestas AD y CF .

Las diagonales FD y CA dividen las bases del paralelepípedo en dos partes iguales; además los prismas que resultan tienen la misma altura CF .

Por lo tanto, estos prismas parciales son iguales por tener igual base y altura.

475. *Corolario. Dos troncos de prismas rectos son iguales cuando tienen la base igual y las aristas laterales iguales de dos en dos.*

Teorema.

476. *Toda sección de un prisma paralela a la base es igual a dicha base.*

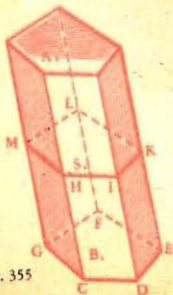


Fig. 355

Sea en el prisma AB la sección S paralela a la base B .

Las rectas CD y HI son paralelas por ser intersecciones de dos planos paralelos, B y S , con un tercero DH ; luego el cuadrilátero $CDIH$ es un paralelogramo y $CD = HI$.

Del mismo modo se demostraría que ED y KI , EF y KL , etc., son paralelas e iguales; luego los dos polígonos B y S

tienen los lados respectivamente iguales. Además, los ángulos de dichos polígonos son iguales de dos en dos por tener los lados paralelos dirigidos en el mismo sentido. Luego estos polígonos son iguales.

Teorema.

477. **Área lateral del prisma.** *El área lateral de un prisma es igual al producto de una arista lateral por el perímetro de la sección recta.*

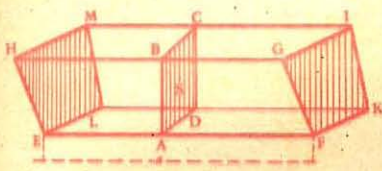


Fig. 356

Sea el prisma EI, a una arista lateral, y S una sección recta.

Las aristas laterales EF, HG, etc., son perpendiculares a la sección recta (Nº 464), y por consiguiente a las rectas AB, BC, CD, DA (Nº 421). Luego cada cara lateral es un paralelogramo cuya base es la arista a y la altura una de

las rectas AB, BC, CD, DA.

De donde se infiere que *el área lateral es igual al producto, etc.*

478. **Escolios.** I. *El área total es igual al área lateral más el área de las dos bases.*

II. *El área lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de la base por la altura.*

Teorema.

479. **Volumen del paralelepípedo rectángulo.** *El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones.*

Sea el paralelepípedo P.

Supongamos que sean conmensurables sus tres dimensiones, y que la medida común que tomaremos por *unidad de longitud*, esté contenida 7 veces en la longitud, 4 en la anchura y 3 en la altura.

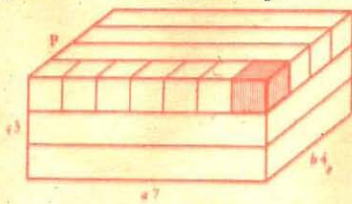


Fig. 357

Por medio de planos paralelos a la base, el paralelepípedo puede descomponerse en tres paralelepípedos parciales que tengan 7 unidades de largo, 4 de ancho y una de alto. Cada uno de éstos puede dividirse en otros 4, de 7 unidades

de largo, una de ancho y una de alto. Por último, cada uno de éstos puede subdividirse en 7 cubos iguales a la *unidad de volumen*, por tener la unidad de longitud por arista.

El paralelepípedo contendrá un número de unidades de volumen igual al producto:

$$7 \times 4 \times 3$$

y por lo tanto, este producto expresará su volumen.

Por pequeña que sea la medida común, la demostración será exacta, y siempre podrá expresarse el volumen de un paralelepípedo rectángulo por el producto de los números que expresen sus tres dimensiones.

480. Escolio. 1º Llamando b , c , a a las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo, la fórmula de su volumen será:

$$V = bca.$$

2º Como el producto de b por c expresa el área de la base, dícese también *que el volumen del paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

$$V = B a.$$

3º *El volumen de un cubo es igual al producto de tres factores iguales a su arista, o sea a la tercera potencia de la misma.*

$$V = a^3.$$

Por eso se suele llamar *cubo* de un número a la tercera potencia de este número.

Teorema.

481. Volumen del paralelepípedo recto. *El volumen de un paralelepípedo recto es igual al producto de su base por su altura.*

Sea el paralelepípedo recto BH cuya base es el paralelogramo ABCD.

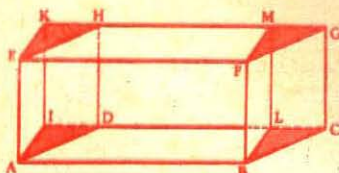


Fig. 358

Hagamos pasar los planos AK y BM perpendicularmente a las caras paralelas AF y DG. Los triángulos ADI y BCL son iguales por tener el ángulo A igual al ángulo B (Nº 87), comprendido por lados respectivamente iguales; luego los prismas rectos ADIK y BCLM son iguales (Nº 473).

Por consiguiente el paralelepípedo ABCDHE es equivalente al paralelepípedo rectángulo ABLIK, que tiene igual altura y base equivalente; luego para ambos *el volumen es igual al producto de su base por su altura.*

Teorema.

482. Volumen del prisma recto. *El volumen de un prisma recto es igual al producto de su base por su altura.*

Distinguiremos dos casos: 1º que la base sea un triángulo; 2º que sea un polígono cualquiera.

1º Sea el prisma triangular recto ABCDEF. Prolonguemos los planos de las bases, y por medio de planos paralelos a las caras AE y CE, formemos el paralelepípedo recto HE, cuya base será un pa-

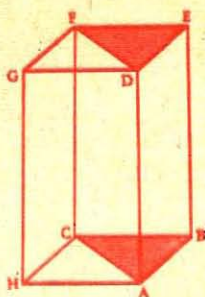


Fig. 359

2º Si por una arista del prisma propuesto se trazan planos diagonales, quedará dividido el prisma en otros tres triangulares de igual altura que el dado. Llamando T , T' y T'' a las bases de dichos prismas, y a a la altura común, los volúmenes parciales serán:



Fig. 360

II. Dos prismas son equivalentes cuando tienen igual altura y bases equivalentes.

Teorema.

484. Volumen de un prisma cualquiera. *El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de una de sus aristas laterales por la sección recta.*

Basta demostrar que un prisma oblicuo es equivalente a otro recto, cuya base sea su sección recta, y la arista lateral, su altura.

Sea el prisma $ABCD A'B'C'D'$; prolonguemos las aristas laterales y tomemos en una de ellas, en AA' , por ejemplo, $LL' = AA'$, y por los puntos L y L' tracemos las secciones rectas $LMNP$ y $L'M'N'P'$.

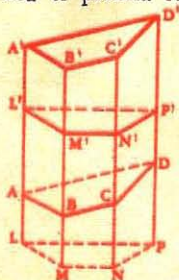


Fig. 361

Para probar la equivalencia de los prismas AD' y LP' , basta demostrar la igualdad de los troncos de prisma LD y $L'D'$. Estos troncos son iguales por tener sus bases $LMNP$ y $L'M'N'P'$ iguales (Nº 476), y sus aristas respectivamente iguales:

$$L'A' = LA, MB = M'B', \text{ etc.}$$

Luego el prisma oblicuo AD' es equivalente al prisma recto LP' .

ralelogramo de superficie dos veces mayor que la del triángulo ABC .

Ya sabemos (Nº 474) que el prisma triangular $ABCF$ es la mitad del paralelepípedo HE .

Siendo el volumen de éste:

$$ABCH \times CF,$$

el del prisma propuesto será:

$$ABCH \times CF$$

2

$$\text{o sea } ABC \times CF.$$

$$T \times a, T' \times a, T'' \times a,$$

y el del prisma propuesto:

$$V = (T + T' + T'') \times a, \text{ o } B \times a.$$

483. Corolarios. I. *Dos prismas son proporcionales a los productos de sus bases por sus alturas.*

Pero el volumen de éste es igual al producto de su base LMNP por su altura LL' (o AA') (Nº 482); luego ese volumen será también el del prisma oblicuo propuesto.

485. **Corolario.** En un prisma cualquiera el producto de la base por la altura es igual al producto de la sección recta por la arista lateral.

Llamemos B a la base, a a la altura, S a la sección recta y l a la arista lateral.

$$\begin{aligned} \text{Tenemos (Nº 482): Volumen} &= B \times a \\ \text{(Nº 484): Volumen} &= S \times l \\ \text{luego } B \times a &= S \times l. \end{aligned}$$

CAPITULO II

PIRAMIDE

DEFINICIONES

486. *Pirámide* es un poliedro limitado por la superficie de un ángulo sólido y un plano que corta a todas sus aristas.

La pirámide tiene por *base* un polígono cualquiera, y por caras laterales triángulos que tienen un vértice común. Este punto se llama *vértice* o *cúspide* de la pirámide.

Altura de la pirámide es la distancia del vértice al plano de la base.

487. Una pirámide se llama *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc., según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

La pirámide triangular se llama también *tetraedro*.

488. Una pirámide es *regular* cuando su base es un polígono regular, y su altura cae en el centro de la misma.

En una pirámide regular, todas las aristas laterales son iguales, y las caras laterales son triángulos isósceles iguales; la altura de cada uno de éstos se llama *apotema de la pirámide*, el cual no ha de confundirse con el *apotema de la base*.

489. *Pirámide truncada* o *tronco de pirámide* es la parte de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte a todas sus aristas laterales.

Cuando la sección es paralela a la base, resulta un *tronco de pirámide de bases paralelas*; su *altura* es la distancia de las bases.

Un *tronco de pirámide regular* es la porción de pirámide regular comprendida entre la base y una sección paralela a la misma; las caras laterales son trapecios isósceles iguales, y la altura de cada uno de ellos se llama *apotema del tronco*.

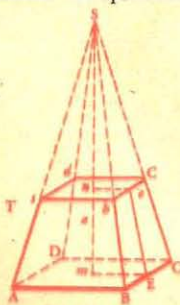


Fig. 362

Pirámide *deficiente* es la parte de pirámide comprendida entre el vértice y el plano secante. V. gr.: *Sabcd* (fig. 362).

Teorema.

490. Si se corta una pirámide por un plano paralelo a la base:

1º Las aristas laterales y la altura quedan divididas en partes proporcionales;

2º La sección y la base son polígonos semejantes;

3º Estos polígonos son proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice de la pirámide.

Sea la pirámide SABCD y el plano EG paralelo a la base. Tracemos en los planos EG y AC las rectas EI y AH.

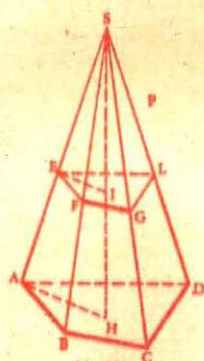


Fig. 363

1º Las rectas FG y BC son paralelas (Nº 433), así como AB y EF, AD y EL, etc.; luego el triángulo SEF es semejante al triángulo SAB, el SFG al SBC, etc.; lo mismo ocurre respecto de los triángulos SEI y SAH, por ser EI paralela a AH. Y como estos triángulos tienen lados comunes, se deduce:

$$\frac{SF}{SB} = \frac{SG}{SC} = \frac{SL}{SD} = \frac{SE}{SA} = \frac{SI}{SH}, \text{ etc.}$$

2º Siendo igual la razón de semejanza de todos estos triángulos, se infiere:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GL}{CD} = \frac{EL}{AD}$$

Luego en los polígonos EG y AC la razón de los lados es la misma; además sus ángulos son respectivamente iguales (Nº 435). Por lo tanto la sección EG es semejante a la base AC.

3º De la semejanza de los triángulos que tienen su vértice común en S resulta:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{SE}{SA} = \frac{SI}{SH};$$

$$\frac{EF^2}{AB^2} = \frac{SE^2}{SA^2} = \frac{SI^2}{SH^2}$$

Por otra parte, siendo semejantes los polígonos EG y AC, tenemos:

$$\frac{\text{Polígono EG}}{\text{Polígono AC}} = \frac{EF^2}{AB^2} = \frac{SE^2}{SA^2} = \frac{SI^2}{SH^2}, \text{ etc.}$$

Luego, si se corta una pirámide...

Teorema.

491. **Área lateral de la pirámide regular.** *El área lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto del perímetro de la base por el apotema de la pirámide; porque todas las caras laterales son triángulos isósceles cuya altura es el apotema de la pirámide, y cuyas bases son los distintos lados del polígono de su base.*

492. **Escolios. I.** *El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual al producto de su apotema por la semisuma de los perímetros de las dos bases.*

Porque esta área consta de trapecios iguales cuya altura es el apotema del tronco y cuyas bases son los lados de las bases de dicho tronco.

II. *El área total de una pirámide consta del área lateral añadida a la de la base.*

III. *El área total de una pirámide truncada es igual al área lateral más el área de ambas bases.*

Teorema.

493. **Dos tetraedros de igual altura y bases equivalentes son equivalentes.**

Sea P y Q los volúmenes de los tetraedros dados.

Supongamos colocadas las bases de ambos tetraedros en un mismo plano, y dividida su altura a en un número cualquiera n de partes iguales. Si por los puntos de división se trazan planos paralelos a las bases, las secciones correspondientes de cada uno de estos planos serán equivalentes por ser dos secciones correspondientes, proporcionales a los cuadrados de sus distancias al vértice (N^o 490, 3^o), e iguales las alturas.

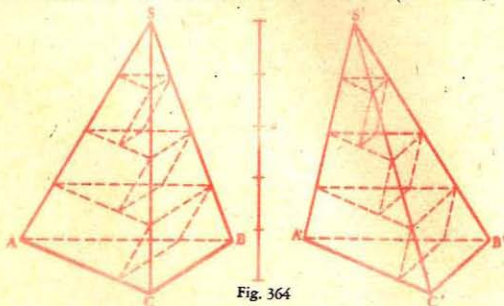


Fig. 364

Consideremos estas secciones como bases de prismas internos, y construídos paralelamente a las aristas SA y S'A'; estos prismas serán respectivamente equivalentes, por serlo sus bases, y tener igual altura

$$\frac{a}{n}$$

Llamando p, p', p'', \dots , a los volúmenes de los prismas inscritos en P, y S a la suma correspondiente;

Llamando q, q', q'', \dots , a los volúmenes de los inscritos en Q, y T a la suma de dichos volúmenes, tendremos:

$$\begin{aligned} p &= q; p' = q'; p'' = q''; \dots \\ \text{luego} \quad p + p' + p'' + \dots &= q + q' + q'' + \dots \\ \text{o} \quad S &= T. \end{aligned}$$

Siendo estas dos sumas constantemente iguales cuando n aumente indefinidamente, sus límites lo serán también:

$$\text{límite } S = \text{límite } T.$$

Pero los límites de S y de T son los volúmenes P y Q de los tetraedros; luego

$$P = Q.$$

494. Corolarios. I. *Dos pirámides cualesquiera de igual altura y bases equivalentes son equivalentes*; pues, dividiendo la base en triángulos por medio de diagonales que partan desde el mismo vértice, y trazando planos por estas diagonales y las aristas correspondientes, quedará la pirámide descompuesta en tetraedros cuya altura común será la de la pirámide. Entonces podrá aplicarse la demostración anterior.

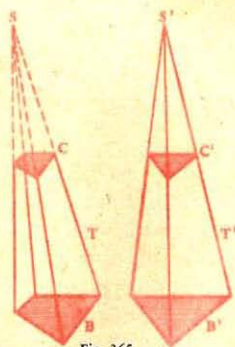


Fig. 365

II. *Dos troncos de pirámide de igual altura y de bases equivalentes son equivalentes.*

Porque si SB y S'B' son pirámides que tienen la misma altura y bases equivalentes B y B', las secciones C y C' hechas a igual altura son equivalentes, por ser las pirámides SB y S'B' equivalentes, así como también las pirámides deficientes SC y S'C' (Nº 493). Por lo tanto ocurrirá lo mismo con los troncos T y T'.

495. Escolio. *El vértice de una pirámide puede moverse sobre un plano paralelo a la base sin que por eso cambie de volumen la pirámide.*

Teorema.

496. *Todo prisma triangular puede descomponerse en tres pirámides equivalentes.*

Sea ABCDEF un prisma triangular.

Tracemos los planos AEC y AEF.

Las pirámides EABC y ADEF son equivalentes por tener iguales sus bases ABC y DEF y la misma altura que es la del prisma. Tomando ahora por vértice del tetraedro ADEF el punto E, su base será el triángulo ADF, y las dos pirámides ADEF y CAEF serán

equivalentes por tener igual base, esto es la mitad del paralelogramo ACFD, y la misma altura, o sea la distancia del punto E al plano AF.

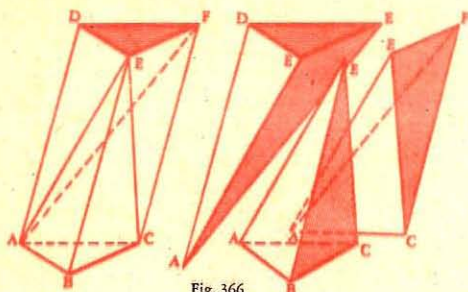


Fig. 366

Luego, todo prisma triangular...

497. Corolario. Una pirámide triangular o tetraedro es la tercera parte del prisma que tuviere igual base y altura.

Teorema.

498. Volumen de la pirámide. El volumen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.

1^o La pirámide es triangular. Siendo una pirámide triangular la tercera parte del prisma de igual base y altura (N^o 497), su volumen será el tercio del producto de la base por la altura.

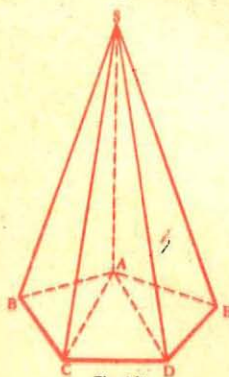


Fig. 367

2^o Es una pirámide cualquiera. Una pirámide cualquiera SABCDE puede descomponerse en pirámides triangulares de igual altura, siendo la suma de las bases igual a la base de la pirámide propuesta; y por ser el volumen de cada pirámide parcial igual al tercio del producto de su base por su altura, se deduce que el volumen de la pirámide total será también igual al tercio del producto de su base por su altura, o sea:

$$V = \frac{1}{3} B a.$$

Luego, el volumen...

Teorema.

499. Un tronco de pirámide de bases paralelas es equivalente a la suma de tres pirámides que tengan la misma altura que el tronco y por bases respectivas las dos bases del tronco y su media geométrica.

Consideraremos:

1º Un tronco de pirámide triangular. Sea CEDC'E'D' un tronco de pirámide de bases paralelas; tracemos los planos D'CE y D'C'E, y quedará el sólido descompuesto en tres pirámides triangulares D'CDE o P, EC'D'E' o p, D'CC'E o P''.

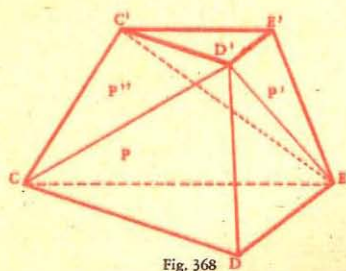


Fig. 368

Las pirámides P y P' tienen la misma altura que el tronco, y sus bases respectivas son las del mismo tronco.

Sólo falta demostrar que la tercera pirámide P'' es una media proporcional entre las dos primeras.

Sea $k = \frac{CD}{C'D'} = \frac{CE}{C'E'}$, la razón de semejanza de las bases del tronco.

Con relación al vértice E las pirámides P y P'' que tienen la misma altura son proporcionales a sus bases. Estas bases son triángulos que tienen la misma altura y que por consiguiente son proporcionales a sus lados paralelos:

$$\frac{P}{P''} = \frac{DCD'}{CC'D'} = \frac{CD}{C'D'} = k.$$

Además, teniendo las pirámides, P'' y P', la misma altura con relación al vértice D', resulta:

$$\frac{P''}{P'} = \frac{C'CE}{EC'E'} = \frac{CE}{C'E'} = k.$$

De la igualdad de estas razones se deduce la proporción:

$$\frac{P}{P''} = \frac{P''}{P'}$$

de donde:

$$P'' = \sqrt{P P'}$$

2º Un tronco de pirámide cualquiera. El teorema que acabamos de demostrar puede aplicarse a un tronco de pirámide cualquiera, porque todo tronco es equivalente al triangular que tenga la misma altura y cuyas bases sean respectivamente equivalentes (Nº 494, II).

Luego, un tronco de pirámide...

Teorema.

500. Volumen del tronco de pirámide de bases paralelas. El volumen de un tronco de pirámide de bases paralelas es igual a la tercera parte del producto de su altura por la suma de sus bases y de una media geométrica entre ellas.

Según el teorema anterior, el tronco CEDC'E'D' o T (fig. 368) es equivalente a la suma de tres pirámides P, P' y P'', cuya altura común es a , y cuyas bases respectivas son B, B', y su media geométrica $\sqrt{B \cdot B'}$.

Pero tenemos (Nº 498):

$$P = \frac{Ba}{3}; P' = \frac{B'a}{3} \text{ y } P'' = \frac{\sqrt{B \cdot B'} \times a}{3}.$$

Sumando ordenadamente:

$$P + P' + P'' \text{ o } T = \frac{a}{3} (B + B' + \sqrt{B \cdot B'}).$$

Teorema.

501. *Un prisma triangular truncado es equivalente a la suma de tres pirámides triangulares cuya base común es una de las del prisma y cuyos vértices son los de la otra.*

Sea el prisma triangular truncado AMD (fig. 369). Tracemos los planos ASC y ESC y resultarán tres pirámides SAMC, SACE, SCDE. La pirámide SAMC tiene por base AMC, y su vértice es el punto S.

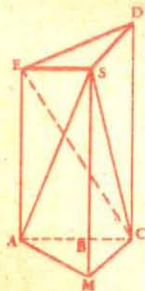


Fig. 369



Fig. 370



Fig. 371

La pirámide SACE se puede sustituir por otra equivalente que se obtendrá haciendo pasar el vértice S al M (Nº 495); entonces esta pirámide tendrá por base AMC y por vértice el punto E (fig. 370).

La pirámide SCDE puede sustituirse por otra haciendo pasar el vértice S a M, y esta última por otra, pasando el vértice E al A (fig. 371). Así transformada, esta pirámide tiene por base AMC y por vértice el punto D.

Luego el prisma truncado equivale a la suma de las tres pirámides cuya base común es AMC y cuyos vértices respectivos son los puntos S, E, D.

Luego, un prisma...

Teorema.

502. Volumen del prisma triangular truncado. *El volumen de un prisma triangular truncado es igual al producto de una de sus bases por el tercio de la suma de las distancias a dicha base de los tres vértices de la otra.*

Sea el prisma triangular truncado AMD (fig. 369).

Llamemos B a la superficie de la base AMC, y a, a', a'' a las distancias de los vértices E, S, D a esta base. Siendo este tronco de prisma equivalente a la suma de tres pirámides que tienen B por base, y por alturas respectivas, a, a', a'' (Nº 501), su volumen será igual a:

$$V = B \cdot \frac{\frac{Ba}{3} + \frac{Ba'}{3} + \frac{Ba''}{3}}{3} = B \cdot \frac{a + a' + a''}{3}$$

Luego, el volumen...

Teorema.

503. *El volumen de un prisma triangular truncado es igual al producto de su sección recta por el tercio de la suma de sus aristas laterales.*

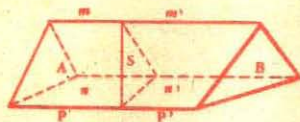


Fig. 372

Sea el tronco de prisma AB, una sección recta S lo divide en dos troncos rectos y cada una de las aristas a, b, c , queda dividida en dos partes, $m, m'; n, n'; p, p'$.

Según lo que acabamos de demostrar, los volúmenes respectivos de estos sólidos parciales son:

$$S \cdot \frac{m + n + p}{3} \text{ y } S \cdot \frac{m' + n' + p'}{3}$$

De donde resulta el volumen total:

$$V = S \cdot \frac{(m + m') + (n + n') + (p + p')}{3} = S \cdot \frac{a + b + c}{3}$$

Advertencia. La propiedad anterior no se aplica sino a un tronco de prisma triangular; para hallar el volumen de un tronco de prisma cualquiera se divide el sólido en troncos triangulares, luego se calcula el volumen de cada uno de ellos y se suman estos volúmenes parciales.

CAPITULO III

POLIEDROS SEMEJANTES

DEFINICIONES

504. Poliedros semejantes son los que tienen respectivamente iguales los ángulos sólidos, y semejantes las caras homólogas.

De esta definición se desprende que cuando dos poliedros son semejantes:

1º Sus diedros homólogos son iguales;

2º Todas sus dimensiones homólogas son proporcionales.

Teorema.

505. Todo plano trazado paralelamente a la base de una pirámide determina otra pirámide semejante a la propuesta.

Sea P una pirámide cualquiera y sea EG una sección paralela a la base AC.

Hay que demostrar que las pirámides SEFGL y SABCD tienen las caras homólogas semejantes y los ángulos sólidos respectivamente iguales (Nº 504).

1º Las caras homólogas son semejantes. Los polígonos EFGH y ABCD son semejantes (Nº 490, 2º) y las caras laterales lo son también por tener en S un ángulo igual comprendido por lados proporcionales (Nº 504).

2º Los ángulos sólidos son respectivamente iguales. El ángulo sólido S es común a las dos pirámides; en los triedros A y E los ángulos de las caras son respectivamente iguales por pertenecer a polígonos semejantes; luego estos ángulos triedros podrían coincidir; lo mismo ocurriría con los demás triedros.

Luego, todo plano...

506. Lema. Dos poliedros semejantes pueden descomponerse en igual número de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos.

Teorema.

507. Los volúmenes de dos poliedros semejantes son proporcionales a los cubos de sus aristas homólogas.

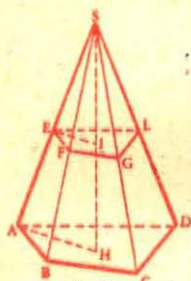


Fig. 373

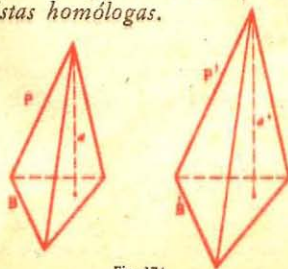


Fig. 374

Consideraremos:

1º *Dos tetraedros semejantes.* Sean P y P' dos tetraedros semejantes, B y B' sus bases, a y a' las alturas correspondientes, y k la razón de semejanza, o sea la razón de las líneas homólogas.

Tenemos (Nº 483):

$$\frac{P}{P'} = \frac{B \cdot a}{B' \cdot a'} = \frac{B}{B'} = \frac{a}{a'}$$

Ahora bien: la razón de las áreas homólogas $\frac{B}{B'}$ es igual a k^2

(Nº 364), y la razón de las líneas homólogas $\frac{a}{a'}$ es igual a k.

Luego:

$$\frac{P}{P'} = k^2 \cdot k = k^3.$$

2º *Dos poliedros semejantes.* Sean P y P' dos poliedros semejantes cualesquiera, y k la razón de semejanza.

Estos poliedros pueden descomponerse en tetraedros A, B, C, ..., A', B', C', ..., respectivamente semejantes, y cuya razón de semejanza es también igual a k.

Ya tenemos (1º):

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \dots = k^3$$

Sumando los numeradores y denominadores:

$$\frac{A + B + C + \dots}{A' + B' + C' + \dots} = \frac{A}{A'} = k^3$$

o sea

$$\frac{P}{P'} = k^3$$

508. Escolio. Si dos sólidos son semejantes:

1º Todas las dimensiones homólogas son proporcionales a la razón de semejanza;

2º Todas las superficies homólogas son proporcionales al cuadrado de la razón de semejanza;

3º Todos los volúmenes parciales homólogos son proporcionales al cubo de la razón de semejanza.

APLICACIONES

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DE ALGUNOS SOLIDOS

509. Desarrollar la superficie de un sólido es extender sobre un plano las superficies que lo limitan.

PRISMA

510. El desarrollo de la superficie de un cubo se compone de seis cuadrados iguales (fig. 375).

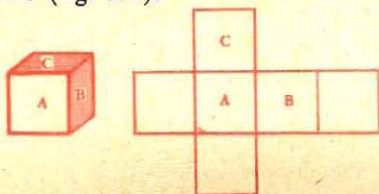


Fig. 375

511. El desarrollo de la superficie de un *paralelepípedo rectangular* se compone de seis rectángulos iguales de dos en dos (fig. 376).



Fig. 376

512. El desarrollo de la superficie lateral de un *prisma regular* es un rectángulo cuya altura es la del prisma, y cuya base es el perímetro de la base del mismo (fig. 377).

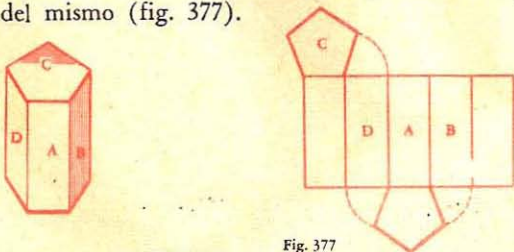


Fig. 377

PIRAMIDE

513. El desarrollo de la superficie lateral de una *pirámide regular*, es un sector poligonal regular.

El radio del sector es igual a la arista de la pirámide, y la línea poligonal del sector, al perímetro de la base de la misma (fig. 378).

514. El desarrollo de la superficie lateral del tronco de pirámide regular es una figura limitada por dos líneas poligonales regulares que

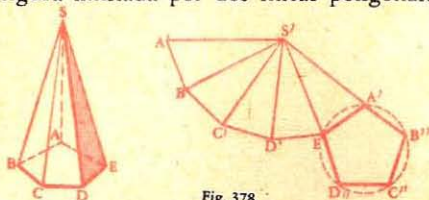


Fig. 378

tienen el mismo centro. Estas líneas son iguales a los perímetros de ambas bases (fig. 379).

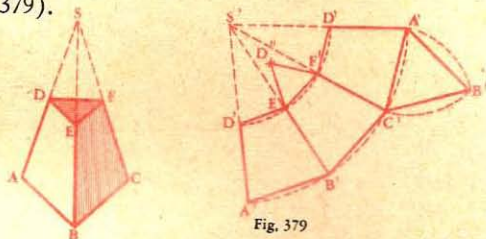


Fig. 379

PROBLEMA

515. Hallar el volumen del tetraedro regular en función de su arista.

Sea $SABC$ un tetraedro regular, SH la altura y ASD una sección que pasa por la altura SH y por el vértice A .

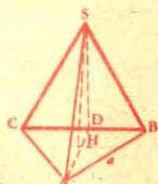


Fig. 380

$$\begin{aligned} \text{Volumen } SABC &= \frac{1}{3} \text{ superf. } ABC \times SH \\ &= \frac{1}{3} BD \ AD \ SH \end{aligned}$$

Calculemos BD , AD y SH en función de la arista a :

$$BD = \frac{1}{2} a.$$

$$\overline{AD}^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4};$$

$$AD = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

$$\overline{SH}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{AH}^2,$$

pero

$$AH = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3};$$

$$\overline{AH}^2 = \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{3}$$

$$\text{Luego } \overline{SH}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{AH}^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3};$$

$$SH = a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Y el volumen} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}.$$

EJERCICIOS

AREA DEL PRISMA

444. Si a representa la longitud de la arista de un cubo, ¿cuál será la fórmula:

1º De la suma de las aristas;

2º Del área total de las caras?

445. Las tres dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son a , b y c ; ¿cuál es:

1º La fórmula de la suma de las aristas;

2º Del área total?

446. ¿Cuál es el área lateral de un paralelepípedo rectángulo que tiene 5 m. 25 de largo, 4 m. 50 de ancho y 3 m. 75 de alto? Calcular también el área total.

447. ¿Cuál es el área lateral de un prisma recto si el perímetro de la base es de 7 metros y su altura de 2 m. 25?

448. ¿Cuál es el área lateral de un prisma recto de 9 metros de alto, si la base es un triángulo equilátero de 1 m. 80 de lado?

449. ¿Cuál es la superficie total de una pilastra de 8 metros de alto, cuya base es un cuadrado de 5 m² 2250 de superficie y cuyas caras laterales son rectángulos?

450. Se quiere empapelar un cuarto cuya longitud tiene 9 m. 25, la anchura 4 m. 75 y la altura 4 m. 80; las aberturas no empapeladas representan una superficie total de 12 m² 25. ¿Cuántos rollos de 12 metros por 50 centímetros se necesitarán, y cuál será el gasto si el rollo cuesta 3,75 ptas.?

451. Un paralelepípedo rectángulo tiene 3 metros de largo, 5 de ancho y 8 de alto; calcular:

1º El área lateral del sólido;

2º El lado de un cubo que tenga igual superficie total que el paralelepípedo.

452. Las caras de un cubo tienen juntas 54 m²; ¿cuál es:

1º La longitud de una arista;

2º El volumen del cubo?

453. La altura, anchura y largura de un paralelepípedo rectángulo tienen respectivamente 2, 3 y 4 metros; ¿cuál es:

- 1º El volumen;
- 2º El área total;
- 3º La diagonal;
- 4º La suma de las aristas;
- 5º La arista de un cubo equivalente;
- 6º La diferencia de superficie de los dos sólidos;
- 7º La diferencia de las sumas de sus aristas respectivas?

454. ¿Cuál es la superficie de la base de un prisma cuadrangular que tiene 15 metros de alto, y cuyo volumen es de 4 m^3 250?

455. ¿Cuál es la altura de un prisma cuya base tiene 3 m^2 50 de superficie, y cuyo volumen es de 5 m^3 750?

456. El área lateral de un paralelepípedo rectángulo de 7 metros de altura mide 63 m^2 ; ¿cuál es el perímetro de la base?

457. ¿Cuál es la altura de un prisma recto cuya área lateral es de 104 m^2 , si la base es un pentágono regular de 2 m. 6 de lado?

458. ¿Cuál es la anchura de un paralelepípedo rectángulo cuya área lateral mide 196 m^2 , la longitud 9 metros y la altura 7?

459. ¿Cuál es el lado de un cubo cuya área total tiene 384 m^2 ?

VOLUMEN DEL PRISMA

460. ¿Cuál es el volumen de un cubo de 6 m. 25 de lado?

461. ¿Cuál es el volumen de un prisma que tiene 5 m^2 de base, y cuya altura es de 2 m. 40?

462. ¿Cuál es el volumen de un prisma triangular si la base del triángulo mide 1 m. 02, su altura 80 centímetros, y la altura del prisma 2 m. 6?

463. ¿Cuántos estéreos tiene una pila de leña de 15 m. 50 de largo, 4 m. de ancho y 7 m. 25 de alto? ¿cuál es el volumen real, si los vacíos se evalúan en $\frac{1}{7}$?

464. ¿Cuál es el volumen de una pared que tiene 4 m. 5 de largo, 25 centímetros de espesor y 3 m. 20 de alto?

465. ¿Qué volumen tiene un prisma triangular regular, de 2 m. 24 de alto, si el perímetro de la base tiene 3 m. 75?

466. Una caja de hoja de lata tiene 1 m. 80 de largo, 1 m. 08 de ancho y 1 m. 50 de profundidad. ¿Cuál es en litros su capacidad?

467. Un aljibe rectangular tiene 12 m. 25 de largo y 75 centímetros de ancho y profundidad; calcular su capacidad en hectolitros.

468. Una clase tiene 8 m. 25 de largo, 7 de ancho y 3 m. 45 de alto; pregúntase:

- 1º ¿Qué volumen de aire contiene;
- 2º Cuánto pesa este aire en París, si a la altitud de esa ciudad un litro de aire pesa 1 gr. 30;
- 3º En Quito, si un litro de aire pesa 0 gr. 96?

469. Las dimensiones exteriores de un edificio son 17 m. 25 de largo, 11 m. 5 de ancho y 10 m. 5 de alto; las paredes exteriores miden, en término medio, 62 centímetros de espesor. Hay 24 ventanas de 1 metro de ancho por 1 m. 72, y 2 puertas de 1 m. 15 de ancho por 2 m. 58 de alto. ¿Cuál es el volumen de la mampostería en estas paredes?

470. Hay que demoler hasta los cimientos una pared que tiene 46 metros de largo, 1 m. 50 de alto y 70 centímetros de espesor. Re-dificada, tendrá 80 centímetros de espesor y un metro de alto. Por la demolición de la pared antigua, extracción de piedras y acarreo de escombros, se paga 1 pta. 40 por metro cúbico, y 4,50 por la construcción de 1 m³ de la nueva; ¿cuánto costará el trabajo?

471. Una caja de embalaje ha sido guarnecida interiormente de una lámina de zinc que presenta un desarrollo superficial de 3 m² 60. Hállese el volumen interior de la caja, siendo la largura el doble de la anchura, y las caras extremas, cuadrados iguales.

472. Un hojalatero quiere hacer un cubo con una lámina de zinc de 8 m² 64; ¿cuál será:

1º La longitud de la arista;

2º El volumen del cubo?

473. Un ferrocarril atraviesa una llanura por un terraplén cuya sección representa un trapecio de 6 metros de alto y 8 metros de ancho en la parte superior. Los taludes forman una pendiente de 75 centímetros por metro. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra se han necesitado por kilómetro para este terraplén, y cuál es la superficie del talud?

474. Se quiere construir un dique de piedra de granito que tenga 750 metros de largo, 3 m. 5 de alto, 4 m. 75 de ancho en la base y 2 m. 20 en la parte superior. El metro cúbico de granito pesa 2.500 kgr. y el kgr: cuesta 0.03 pts. ¿Cuál será el precio de este dique?

475. La altura de un prisma recto es de 4 decímetros, cada base es un rectángulo, y uno de los lados es el doble del otro; la superficie total es de 28 dm². Pregúntase cuál es el área de cada una de las caras laterales y de las bases. Pregúntase además, el peso del mercurio contenido en este prisma, suponiéndolo hueco. Densidad del mercurio: 13.59.

476. La superficie total de un prisma de aluminio y de forma exagonal regular es de 12 dm²; su altura mide 1 decímetro. Calcular el volumen y el peso del sólido si la densidad del aluminio es de 2.5.

477. Un prisma exagonal tiene 3 m. 82 de alto; cada arista de la base mide 34 centímetros. ¿Cuál es su volumen?

478. Un aljibe tiene la forma de un prisma octogonal regular de 80 metros de perímetro. ¿Qué volumen de agua contiene cuando ésta sube a 75 centímetros?

479. ¿Cuánto costará la mampostería de un pabellón de forma octogonal regular de 3 metros de lado, 4 metros de alto a flor de tierra y 1 metro de cimientos, a razón de 5 pts. el m² de mampostería? Los huecos de puertas y ventanas no entran en cuenta.

480. ¿Cuánto se pagará por cavar una bodega de 11 m. 50 de largo, 8 m. 80 de ancho y 4 m. 62 de profundidad si la extracción y acarreo de 1 m. cúbico cuesta 4,50 pts.?

481. ¿Cuál es la longitud de un aljibe rectangular de 2 metros de ancho y 2 m. 50 de alto, si su volumen es de 225 hectolitros?

482. ¿Cuál es la profundidad de un estanque de forma cuadrada que tiene 2 m. 4 de lado, y del cual se han sacado 82 metros cúbicos de tierra?

483. ¿Qué altura tiene un prisma de 5 metros cúbicos 75 de volumen si su base tiene 3 m² 05?

484. ¿Cuál será la profundidad de un pilón rectangular de 48 centímetros de largo y 36 de ancho si ha de contener 56 litros?

485. En una zanja de 4 m. 10 de largo por 3 m. 50 de ancho, han de caber 24 m. de cal; ¿cuál será su profundidad?

486. ¿Cuántas herraduras se pueden fabricar con una barra de hierro de 3 m. 50 de largo por 25 milímetros de espesor y de ancho? Una herradura pesa 450 gr. y la densidad del hierro forjado es de 7,78.

487. Se emplea la décima parte de un metro cúbico de cal viva para revocar 300 m². ¿A qué altura, en una zanja de 1 m. 50 de largo por 1 m. 20 de ancho, se elevará la cal viva necesaria para revocar 3.500 m²?

488. ¿Cuántos hectolitros de trigo puede contener un granero de 8 m. 67 de largo y 5 metros de ancho, cuando sólo está lleno hasta una altura de 30 centímetros? Exprésese en kilogramos el peso que sostiene el piso, si un hectolitro de trigo pesa 70 kilogramos.

489. En la construcción de una vía férrea se extrae un montón de tierra de 186 metros de largo por 6 de alto. La zanja tiene 20 metros de ancho en la parte superior y 7 m. 50 en la inferior. Este montón se esparce en capas iguales en un terreno de 24 áreas. ¿En cuánto aumentará la altura de ese terreno?

490. ¿Cuánto pesa el aire contenido en una sala de 6 m. 20 de largo por 2 m. 75 de ancho y 2 m. 88 de alto, si un litro de aire pesa 1 gr. 293?

491. En una pared de ladrillos, los espacios vacíos están avaluados en un 20% del volumen total. ¿Qué cantidad de argamasa se necesitará para llenar estos vacíos, si la pared tiene 2 m. 40 de alto, 9 m. 50 de largo y 20 centímetros de espesor?

492. Para una construcción se necesitan 5.424 metros lineales de madera. Un tercio de esta madera tiene una sección rectangular de 16 centímetros por 20, otro tercio tiene una sección de 15 centímetros por 16, un sexto de 20 centímetros por 22, y el último sexto de 12

centímetros por 15. El carpintero recibe por cada metro lineal 1 pta. 10. ¿Cuál será su beneficio o su pérdida si el metro cúbico, contado el transporte, le cuesta 22 pesetas?

493. Un ladrillo mide 25 centímetros de largo, 12 de ancho y 65 milímetros de espesor. ¿Cuál es su volumen? ¿Cuántos ladrillos se necesitarían para construir una pared de 5 m. 20 de largo, 1 m. 15 de alto y 56 centímetros de espesor, descontando para las juntas un 30% del volumen?

494. Una sala tiene la forma de paralelepípedo rectángulo, la diagonal mide 14 m. 50, y las tres dimensiones son entre sí como los números 3, 6 y 7; pregúntase qué volumen de aire contiene.

495. El volumen de un prisma hexagonal regular es de 71 metros cúbicos 112; el lado del hexágono mide 2 m. 34; calcular:

1º La superficie de la base;

2º La altura del prisma.

496. Se fabrica con oro unas hojas que tienen una diezmilésima de espesor. ¿Qué superficie se podría cubrir con 5 gr. de estas hojas? Densidad del oro: 19,50.

497. ¿Cuál es el peso y cuál el precio de un tronco rectangular de caoba de 2 m. 75 de largo, 35 centímetros de espesor y 2 metros 25 de ancho, si 1 metro cúbico pesa 12 quintales y cuesta 285 pesetas?

498. ¿Cuál es la arista de un cubo de 216 centímetros cúbicos de volumen?

499. ¿Cuál es el peso de un prisma cuadrangular de hierro colado de 5 metros 27 de alto, y cuyos lados tienen 12 y 16 centímetros? La densidad del hierro colado es de 7,25.

500. ¿Cuánto pesa la hulla que ocupa un espacio de 6 metros de largo, 4 metros de ancho y 1 m. 80 de alto, si la densidad de la hulla es 1,4, y si se descuenta por los vacíos un 15% del volumen?

501. La arista de un cubo es de 1 metro; calcular la superficie de una sección trazada según dos aristas opuestas.

502. La densidad del oro fundido es de 19,258, la del cobre 8,788; si se hiciera un cubo con el oro puro contenido en un millón de monedas de 20 pesetas, y otro con el cobre contenido en las mismas, ¿cuáles serían las aristas de estos dos cubos?

503. Un sillar mide 3 metros de largo, 1 m. 80 de ancho y 2 m. 40 de alto. ¿Cuál sería la arista de una piedra cúbica de igual volumen?

504. ¿Cuál será la arista de una zanja cúbica cuyo volumen ha de ser el doble de otra que mide 2 m. 20 de lado?

505. Se quiere fundir en uno solo dos cubos de latón cuyas aristas respectivas miden 15 y 24 centímetros; ¿cuál será la arista del cubo?

506. La tierra de miga de una bodega de 7 m. 60 de largo, 5 m. 75 de ancho y 2 m. 80 de profundidad se ha transportado en carretas que contienen 0 metros cúbicos 450. Si el volumen de la tierra firme

es al volumen de la tierra de miga como 10 es a 17, y si los obreros reciben 1,75 pesetas por la extracción y transporte de 1 metro cúbico de tierra firme, pregúntase:

- 1º Cuántos metros cúbicos de tierra firme han transportado los obreros;
- 2º Cuántos metros cúbicos de tierra de miga;
- 3º Cuántas carretas se han llenado;
- 4º Cuánto ha pagado el propietario;
- 5º Cuánto habría tenido que pagar de más, si hubiera pagado el metro cúbico de tierra de miga a igual precio que el de tierra firme?

507. ¿Cuánto pesan 50 metros lineales de hierro forjado de 12 milímetros de espesor por 56 milímetros de ancho, si la densidad del hierro forjado es de 7.78?

508. ¿Cuál es el peso de un bloque de hielo de 6 m. 80 de largo, 3 m. 20 de ancho y 75 centímetros de espesor, si el peso del agua y el del hielo están en la relación de 16 a 15?

509. Un montón de greda es dos veces tan ancho y cuatro veces tan largo como alto. Su volumen es de 2 metros cúbicos 16. ¿Cuáles son sus dimensiones?

510. Calcular la diagonal de una caja de forma cúbica que tiene un metro de lado.

511. Calcular la diagonal de un cubo que tiene 1 m² de área total.

512. El volumen de un paralelepípedo rectángulo es de 4.762 centímetros cúbicos, sus aristas son entre sí como los números 3, 5, 7. ¿Cuál es, en centímetros, la longitud de estas aristas?

513. Sabiendo que todo cuerpo sumergido en el agua pierde de su peso una parte igual al peso del volumen de agua que desaloja, ¿cuánto pesa en el agua un cuerpo de 400 kgrs., si sus dimensiones son 1 m. 20, 62 centímetros y 40 centímetros?

514. Un tablón paralelepípedo de madera de haya que tiene 20 centímetros de alto flota sobre el agua; ¿cuál es el espesor de la parte que sobrenada, si la densidad del haya es de 0.80?

515. Un paralelepípedo rectángulo de hielo de 10 m. 50 de alto está sumergido en agua de mar. La densidad del hielo es 0,93 y la del agua de mar 1,026. ¿Cuál será la altura de la parte del paralelepípedo que sobrenada?

DESARROLLO DEL PRISMA

516. Construir el desarrollo de la superficie total de un prisma triangular regular de 60 milímetros de alto, si la arista de la base tiene 1 centímetro.

517. Construir el desarrollo de la superficie total de un cubo de 2 centímetros de lado.

518. Construir el desarrollo de la superficie total de un paralelepípedo recto cuya altura sea de 6 centímetros y la base un cuadrado de 1 centímetro de lado.

519. Construir el desarrollo de la superficie total de un prisma recto de 60 milímetros de alto, y cuya base es un pentágono regular de 10 milímetros de lado.

520. Hágase lo propio con una pirámide exagonal regular recta de 60 milímetros de altura y 10 milímetros de lado.

521. En los ejercicios 516, 517, 518, 519, 520, añádase 1 centímetro a las dimensiones y búsquese el desarrollo gráficamente. En una de las caras, escríbase, con fórmula y solución, la superficie total; en otra, con fórmula y solución, el volumen del sólido; después córtense y júntense las caras.

AREA DE LA PIRAMIDE

522. ¿Cuál es el área lateral de una pirámide regular que tiene por base un triángulo equilátero de 5 metros de lado, si el apotema de las caras mide 8 m. 165?

523. ¿Cuál es el área total de la misma?

524. ¿Cuál es el área total de una pirámide que tiene por base un triángulo equilátero, siendo la arista de la base de 8 metros y la lateral de 10 metros?

525. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular tiene 5 metros. Determinar el área de esta pirámide, siendo su apotema de 8 metros.

526. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 metros de lado, las aristas laterales tienen también 10 metros; ¿cuál es el área total de esa pirámide?

527. ¿Cuál es el área lateral de una pirámide pentagonal regular en la que el lado de la base tiene 5 m. 25, y el apotema de las caras 0 m. 56?

528. En una pirámide pentagonal regular de 4 m. 80 centímetros de lado las aristas laterales tienen 5 m. 25. Hallar el área lateral.

529. Cada arista lateral de una pirámide exagonal regular mide 15 metros. Determinar:

1º El área lateral, si el lado del exágono tiene 8 metros;

2º El área total.

530. ¿Cuál es el área total de un tetraedro regular de 4 metros de lado?

531. La altura de una pirámide exagonal regular tiene 8 metros; ¿cuál es el área lateral si el exágono de la base tiene 6 metros de lado?

VOLUMEN DE LA PIRAMIDE

532. ¿Cuál es el volumen de una pirámide si la superficie de la base tiene 4 m^2 36, y la altura 1 m. 80?

533. La altura de una pirámide tiene 9 metros; la base, que es un octógono regular, mide 11 m^2 24; ¿cuál es su volumen?

534. ¿Cuál es el volumen de una pirámide de 2 m. 40 de alto, si su base es un decágono regular de 4 m^2 de área?

535. La base de una pirámide es de 25 m^2 , y su altura de 7 m. 20; ¿cuál es su volumen?

536. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular de 2 m. 55 de alto, si el triángulo de la base tiene 75 centímetros de alto por 80 de base?

537. La altura de una pirámide tiene 3 m. 60 y la base, de forma triangular, tiene 3 m. 24 de base por 2 m. 75 de altura. Hallar el volumen.

538. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular regular de 2 metros de alto, si el lado de la base tiene 80 centímetros?

539. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular de 3 metros de alto, si los tres lados de la base miden 1 m. 50, 1 m. 90 y 2 m. 60?

540. ¿Cuál es el volumen de un monolito piramidal cuya base cuadrada tiene 1 m. 89 de lado; la altura de la pirámide tiene 4 m. 12?

541. Amontonando piedras en forma de pirámide rectangular, los lados de la base miden 4 m. 50 y 3 m. 30, y la altura del montón 7 m. ¿Cuántas carretadas se llevarán si en cada una cabe 0 m^3 750?

542. ¿Cuál es el volumen de una pirámide de 4 metros de alto, si la base es un trapecio cuyos lados paralelos tienen 5 m. 72, 5 m. 80, y la altura 8 m. 19?

543. ¿Cuál es el volumen de una pirámide exagonal regular de 3 m. 60 de alto si el lado del exágono es de 3 m. 60?

544. ¿Cuál es el volumen de una pirámide exagonal regular si el lado del exágono tiene 1 m. 60 y las aristas laterales del sólido 4 metros?

545. La base de una pirámide regular es un exágono de 6 m. 12 de perímetro; la altura de la pirámide es igual a los $\frac{2}{3}$ del perímetro. ¿cuál es su área total y cuál su volumen?

AREA DEL TRONCO DE PIRAMIDE

546. Calcular el área lateral de un tronco de pirámide triangular de bases paralelas, en el que los tres lados de la base mayor son de 2, 3 y 4 m. 25. El primer lado de la base menor tiene 95 centímetros, y las alturas de los tres trapecios 5, 6 y 6 m. 45.

547. ¿Cuál es el área total de un tronco de pirámide regular de bases paralelas que son cuadrados de 4 y 2 metros de lado? La altura del tronco es de 4 metros.

548. ¿Cuál es el área lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas con siete lados, si los polígonos de las bases tienen 1 m. 64 y 1 m. de lado, y la altura de los trapecios 2 m. 25?

VOLUMEN DEL TRONCO DE LA PIRAMIDE

549. ¿Cuál es el volumen de una pirámide truncada cuya base mayor es de 114 m^2 , la base menor 81 m^2 y la altura 15 metros?

550. ¿Cuál es el volumen de un tronco de pirámide de 8 metros de alto siendo la superficie de las bases paralelas de $2 \text{ m}^2 30$ y $0 \text{ m}^2 80$?

551. Las bases paralelas y cuadradas de un tronco de pirámide regular tienen de lado 9 y 4 decímetros, la altura del tronco es de 15 decímetros. Calcular su volumen.

552. ¿Cuál es el volumen de un tablón de 3 metros de largo que tiene secciones paralelas cuadradas de 58 y 28 centímetros de lado?

553. Las dos bases de un tronco de pirámide son cuadradas y paralelas, sus lados miden 9 y 8 metros, la altura del tronco 3 metros; calcular su volumen.

554. La base mayor de una viga tiene 30 decímetros cuadrados; la base menor es los $\frac{5}{6}$ de la mayor, y la longitud de la viga es de 4 metros. ¿Cuál es su volumen?

555. ¿Cuál es en litros la capacidad de una artesa de 1 m. 40 de profundidad y cuya forma es la de una pirámide truncada, pero invertida? La abertura superior es un cuadrado de 1 m. 15 de lado, y cada lado de la base inferior mide 86 centímetros.

556. ¿Cuál es el volumen de un tronco de pirámide exagonal regular de bases paralelas de 70 y 20 centímetros de lado, si la altura tiene 2 metros?

557. ¿Cuál es el volumen de un tronco de pirámide exagonal regular de 3 m. 80 de alto, siendo los radios de las bases de 40 y 20 centímetros?

558. El área lateral de una pirámide triangular regular tiene 45 metros cuadrados; determinar la longitud de la arista si el apotema es de 6 metros.

559. ¿Cuál es la longitud de la arista de un tetraedro regular cuya área total es de 36 m^2 ?

560. ¿Cuál es la altura de un tetraedro regular que tiene 1 m^2 de área total?

561. El área lateral de una pirámide exagonal regular es de 180 m^2 y el lado de la base tiene 6 metros, calcular:

1º El apotema de las caras;

2º La altura de la pirámide;

3º La longitud de una arista lateral;

4º La pendiente del apotema de las caras;

5º La pendiente de una arista lateral.

562. ¿Cuál es la base de una pirámide de $5 \text{ m}^3 445$ de volumen y 3 m. 3 de alto?

563. Una pirámide cuyo volumen es de 68 m^3 tiene 12 m. 75 de altura; ¿cuál es el área de la base?

564. El volumen de una pirámide pentagonal es de 86 m^3 85; ¿cuál es su altura si el polígono de la base tiene 17 m^2 37?

565. ¿Cuál es la altura de una pirámide cuyo volumen es de 1 m^3 35, y la superficie de la base de 3 m^2 ?

566. Una pirámide tiene 27 m^3 de volumen. La base de forma trapezoidal tiene 17 metros por sumas de los lados paralelos que distan 3 metros. Calcular la altura de la pirámide.

567. ¿Cuál es la altura de una pirámide triangular de 8 m^3 6,957 de volumen, si los tres lados de la base miden respectivamente 2 metros, 2 m. 15 y 1 m. 85?

568. ¿Qué arista se ha de dar a un tetraedro regular para que su volumen sea de un decímetro cúbico?

569. Un tronco piramidal regular tiene 1 decímetro cúbico de volumen y 15 centímetros de alto; una de las bases, de forma cuadrada, tiene 6 centímetros de lado; calcular el lado de la otra.

570. ¿Cuál es la profundidad de una zanja en forma de tronco de pirámide cuadrangular regular, si el lado de la abertura tiene 2 m. 30, el del fondo 1 m. 40, y el volumen 36 m^3 40?

571. Un tronco de pirámide tiene 1 decímetro cúbico de volumen, y sus bases son triángulos equiláteros de 12 y 18 centímetros de lado; calcular la altura.

572. El volumen de un obelisco es de 128 m^3 102; este obelisco tiene la forma de un tronco de pirámide de bases cuadradas y paralelas de 2 m. 40 y 72 centímetros de lado. Calcular:

1º Su altura;

2º La longitud de una arista lateral.

573. ¿Cuál es la longitud de una viga cuyas extremidades son rectángulos paralelos que tienen el uno 33 centímetros por 28, y el otro 28 centímetros por 0 m. 2375, si esta viga se paga en 42 pts., a razón de 30 pts. el m^3 ?

574. ¿Cuál es el peso de una pirámide de asperón de 4 m^2 de base y 3 metros de alto, si su densidad es de 2,2?

575. ¿Cuál es el peso de una pirámide cuadrangular regular de hierro de 2 m. 59 de alto, si el lado de la base tiene 58 centímetros? Densidad del hierro: 7,788.

576. Una pirámide de base cuadrada tiene 23 m. 48 de lado y 46 m. 18 de altura. Suponiendo que esta pirámide sea de piedra de una densidad igual a 2,75 calcular su peso.

577. Calcular el peso de un pedrusco de granito cuya forma es la de un tronco de pirámide de bases que tienen respectivamente 3 m^2 55 y 0 m^2 78, si la altura del tronco mide 2 m. 80 y la densidad del granito es de 2,780.

578. Un mausoleo tiene la forma de una pirámide truncada de siete caras y de bases paralelas de $2 \text{ m}^2 50$ y $1 \text{ m}^2 80$. ¿Cuánto pesa este mausoleo si la altura es de 3 metros y la densidad de la piedra 2,419?

579. ¿Cuál es el peso de una viga de encina de 4 m. 60 de largo, si la suma de las bases es de $1 \text{ m}^2 09$, y su diferencia $0 \text{ m}^2 25$? Densidad de la encina: 0,690.

580. ¿Cuál es el volumen de un tetraedro regular de 1 decímetro de arista?

581. Un tronco de pirámide regular de 4 metros de alto tiene bases cuadradas y paralelas de 3 y 5 metros de lado. Calcular:

- 1º La longitud de las aristas laterales de la pirámide;
- 2º La altura de los cuatro trapecios.

582. Las aristas laterales de un tronco de prisma triangular regular miden 2 m. 50, 2 m. 60, y 2 m. 65, y la base tiene 38 centímetros de lado. Hallar la altura de una pirámide equivalente y de base igual.

583. Una pirámide está limitada por una base cuadrada de 40 centímetros de lado y por cuatro triángulos equiláteros. Calcular:

- 1º Su superficie total;
- 2º Su altura;
- 3º Su volumen.

584. Una pirámide de nogal de forma exagonal regular, tiene 40 centímetros de altura, y el lado de la base 15 centímetros. Calcular:

- 1º Su superficie total;
- 2º Su volumen;
- 3º Su peso, si la densidad del nogal es de 0,600.

585. Una pirámide cuadrangular regular de granito tiene 3 m. 60 de alto y pesa 18,316 kilogr. 8. ¿Cuál es la arista de la base? Densidad del granito: 2,65.

586. Las dos bases de un tronco de pirámide miden respectivamente 8 y 2 m^2 . Construir un prisma equivalente de igual altura y de base cuadrada, ¿Cuál será el lado de esta base?

587. El techo de un pabellón tiene la forma de una pirámide exagonal regular. ¿Cuántas tablas de 4 metros de largo por 24 centímetros de ancho se necesitarán para cubrirlo, si el lado del pabellón tiene 3 metros y la altura del techo 4 m. 45?

588. Hallar el volumen de la más alta de las pirámides de Egipto cuya base es un cuadrado de 230 metros de lado, sabiendo que las caras laterales son triángulos equiláteros.

589. En un círculo de 10 metros de radio se inscribe un triángulo equilátero. ¿Cuál sería el volumen de una pirámide que tuviera ese triángulo por base, y de altura 12 metros?

590. La aguja de un campanario es una pirámide cuadrangular que se ha de retejar con pizarras de 24 centímetros de largo por 20 de ancho, de modo que se cubran entre sí en $\frac{1}{3}$ de su superficie:

1º ¿Cuántas pizarras se necesitarán, si la aguja tiene 10 m. 50 de arista y la base 2 m. 80 de lado?

2º ¿Cuál es la altura de la aguja?

591. Un obelisco de granito que tiene la forma de un tronco de pirámide de bases cuadradas tiene por coronamiento una piramidita. Las bases tienen de lado respectivamente 2 m. 42 y 1 m. 50, y su distancia es de 21 m. 60. Hallar el peso de este obelisco que tiene 22 m. 80 de altura total. Densidad del granito: 2,75.

592. Hallar la altura de una pirámide regular con base cuadrada de 6 m², 783 de superficie, si cada arista tiene 3 m. 89.

593. Las dos bases de una chimenea forman cuadrados de 1 m. 40 y 0 m. 60 de lado, la altura es de 12 m. 50. Hallar el volumen de la mampostería, descontando el vacío interior que es de 44 centímetros por 38.

DESARROLLO DE LA PIRAMIDE Y DEL TRONCO DE PIRAMIDE

594. Trazar el desarrollo de la superficie de un tetraedro regular de 12 milímetros de lado.

595. Trazar el desarrollo de la superficie de una pirámide regular de 40 milímetros de arista y cuya base es un triángulo equilátero que tiene 20 milímetros de lado.

596. Trazar el desarrollo de la superficie de una pirámide regular cuya arista tiene 40 milímetros, y cuya base es un cuadrado de 20 milímetros de lado.

597. Trazar el desarrollo de la superficie de una pirámide regular cuya arista tiene 40 milímetros y la base es un exágono regular que tiene 20 milímetros de lado.

598. Trazar el desarrollo de la superficie de un tronco de pirámide triangular regular cuya arista tiene 15 milímetros; el lado del triángulo de la base mayor es de 80 milímetros y el del triángulo de la base menor 30.

599. Trazar el desarrollo de la superficie de un tronco de pirámide regular cuya arista tiene 40 milímetros; las bases que son cuadrados tienen de lado respectivamente 20 y 5 milímetros.

600. Trazar el desarrollo de la superficie de un tronco de pirámide regular, cuya arista es de 45 milímetros y las dos bases que son exágonos regulares tienen 20 y 5 milímetros de lado.

POLIEDROS SEMEJANTES

CUBO

601. ¿Cuál será el área de un cubo si se duplica, triplica, cuatricula la arista?

602. ¿Cuál será el área de un cubo si se divide su arista en dos, tres o cuatro partes iguales?

603. ¿Cuál será el área de un cubo si se multiplica su arista por $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$?

604. ¿Cuál será el volumen de un cubo si se duplica, triplica, cuadruplica la arista?

605. ¿Cuál será el volumen de un cubo, cuando se divide su arista en 2, 3 ó 4 partes iguales?

606. ¿Cuál será el volumen de un cubo cuando se multiplica su arista por $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$?

607. ¿Cuál será el área de un cubo si se divide el volumen por 2, 3 ó 4?

608. ¿Cuál será el volumen de un cubo si se duplica, triplica, etc., su superficie?

609. ¿Cuál será el volumen de un cubo cuando se divide su área por 2, 3 ó 4?

610. ¿Cuál será el volumen de un cubo cuando se multiplica su área por $\frac{2}{3}$, ó $\frac{3}{4}$, ó $\frac{3}{2}$, ó $\frac{4}{3}$?

611. ¿Cuál será la arista de un cubo cuando se duplica, triplica, etc., su superficie?

612. ¿Cuál será la arista de un cubo si se divide el área por 2, 3 ó 4?

613. ¿Cuál será la arista de un cubo si se duplica, triplica, cuadruplica, el volumen?

614. ¿Cuál será la arista de un cubo si se divide el volumen por 2, 3 ó 4?

615. Una arista de un sólido mide 1 metro, ¿cuál será la longitud de la arista homóloga en un sólido semejante cuyo volumen es el doble del primero?

616. ¿Cuál será el volumen de una caja si se duplica, triplica, solo una dimensión?

617. ¿Cuál será si se duplican, triplican dos dimensiones?

618. ¿Cuál si se duplican, triplican, las tres dimensiones?

PRISMAS SEMEJANTES

619. El área de un prisma tiene $22 \text{ m}^2 04$; ¿cuál es el área de un prisma semejante cuyas dimensiones son la mitad de las primeras?

620. ¿Qué lado se ha de dar a un cubo para que su área sea la mitad de la de otro de 16 metros de lado?

621. Un prisma tiene $12 \text{ m}^2 25$ de área lateral; ¿cuál es el área de otro semejante cuyas aristas tienen una longitud tres veces mayor que las del primero?

622. Se trata de reducir un prisma triangular de 3 m. 50 de alto y 2 m^2 de base a otro semejante que tenga sólo un metro de alto; ¿cuál será el área de su base?

623. ¿En qué proporción están las áreas y volúmenes de dos cubos que tienen respectivamente 2 y 4 metros de lado?

624. Si se hacen los planos de un edificio según la escala de 1 centímetro por metro, ¿cuáles serían, con relación a este plano, las dimensiones, áreas y volúmenes verdaderos?

625. Un aprendiz de carpintero tiene que hacer una caja semejante a otra cuyas dimensiones son: altura, 30 centímetros; anchura, 48 centímetros; longitud 60. Esta caja ha de tener 4 centímetros menos en la altura, y el aprendiz hace la caja con 4 centímetros menos en cada dimensión. ¿Cuál es el error cometido?

626. La arista de un cubo es de 0 m. 37; ¿cuál es la arista de un cubo doble?

627. Un paralelepípedo tiene 16 m³ de volumen; ¿cuál será el volumen de otro semejante de aristas tres veces mayores?

628. ¿Cuáles son las dimensiones de una caja en forma de prisma regular de base cuadrada cuya capacidad es de 4 m³, y su altura el triple del lado de la base?

629. Las dimensiones de dos paralelepípedos de madera son: altura, 2, y 3 metros; longitud, 6 y 7 metros; anchura, 3 m. 5 y 4 m. 5; ¿son semejantes? En caso contrario, ¿qué se ha de modificar en la longitud y anchura del menor para hacerlos semejantes, sin mudar la altura?

630. Un paralelepípedo tiene 5 metros de largo, 4 de ancho y 3 de alto; otro semejante tiene 6 metros de ancho. ¿Cuáles serán sus demás dimensiones?

631. Tres cubos tienen de lado respectivamente 3, 4 y 5 metros. Hallar el lado de otro cubo equivalente a los tres primeros.

632. El peñón errático de Pravolla, en los Alpes, tiene 17.000 m³ de volumen; ¿cuáles serían sus dimensiones si se quisiera labrar con él un paralelepípedo de bases cuadradas y de altura doble del lado de las bases? Se concede que para esta operación el volumen del peñón se reduce a los $\frac{2}{10}$ del volumen primitivo.

PIRAMIDES SEMEJANTES

633. Hallar el lado de un tetraedro regular de 10 m³ de volumen.

634. Un tetraedro regular de 1 metro de lado tiene un volumen igual a 0 m³ 117,851. Hallar el volumen de los tetraedros regulares cuyos lados miden:

1º	50 centímetros;
2º	10 centímetros;
3º	4 m 50

635. Una pirámide triangular regular tiene de altura 4 m. 50 y por lado de la base 2 m. 25. Hallar la longitud del lado de la base de otra semejante que tenga 3 metros de alto.

636. Hallar la altura y el volumen de dos pirámides semejantes cuyas bases cuadradas tienen 2,025 y 1,681 m² de superficie, suponiendo que la pendiente de sus aristas laterales es de 3 m. 139.

637. Se quiere hacer seis zócalos de piedra de sillería superpuestos en gradas de igual altura que es de 1 m. 80 para los seis zócalos. El primero debe tener 6 metros de lado e introducirse 42 centímetros en el que le sigue y así sucesivamente. Hallar la altura de cada zócalo, la longitud del lado de la base de cada uno, y el volumen total.

638. ¿A qué distancia del vértice debe cortarse una pirámide paralelamente a la base para que resulten dos partes equivalentes?

639. Un tronco de pirámide tiene 1 decímetro³ de volumen, y 15 centímetros de altura; la base menor es un cuadrado de 6 centímetros de lado. Hallar el volumen de la pirámide total.

640. Un tronco de pirámide tiene por volumen 1 decímetro³, y sus bases son triángulos equiláteros de 12 y 7 centímetros de lado. Hallar la altura y el volumen de la pirámide total.

641. Por un plano que pasa por el tercio de las aristas a contar desde el vértice, y paralelo a la base, se corta una pirámide. ¿Cuántas veces contiene la pirámide primitiva a la pirámide deficiente?

642. Una pirámide de 36 centímetros de altura tiene por base un exágono regular de 12 centímetros de lado. ¿A qué distancia del vértice se halla una sección paralela a la base, si el área de ésta es de 1 decímetro²?

643. En la misma pirámide ¿a qué distancia se halla la sección si el volumen del tronco restante es de 2 decímetros³?

644. La parte principal del obelisco de Lucsor, que se halla en París, es un tronco de pirámide de 21 m. 60 de altura. Las bases cuadradas tienen respectivamente 2 m. 42 y 1 m. 54 de lado. ¿Cuál sería la altura si estuviese entera la pirámide?

645. Una estatua maciza de bronce, de tamaño natural, pesa 482 kgs.; ¿cuánto pesará otra estatua cuyo tamaño sea la cuarta parte del de la primera?

646. Las chapas de blindaje, fabricadas en el Creusot, pesan hasta 7.000 kgrs. ¿Cuáles son las dimensiones de una de ellas de forma paralelepípedica, si las aristas son entre sí como los números 6, 80 y 120? Densidad del hierro: 7.788.

647. En la fábrica de Essen, donde se funden los cañones Krupp, se obtienen masas de acero fundido que pesan hasta 37.000 kgrs. ¿Cuáles serían las dimensiones de una de ellas de forma prismática con base rectangular y cuyas aristas fueran entre sí como los números 3, 4 y 5? Densidad del acero: 7.829.

648. En la misma fábrica funciona un martinete que pesa 50.000 kgrs. ¿Cuáles son sus dimensiones, sabiendo que tiene forma de una pirámide truncada de base cuadrada, cuyos lados son entre sí como 4 y 3 $\frac{1}{2}$ y cuya altura es igual a dos veces y media el lado de la base mayor? Densidad del hierro: 7.788.

649. Un martillo de hierro colado tiene las dimensiones expresadas en la figura 1*, y la forma de un prisma cuadrangular que termina por otro de base trapezoidal. ¿Cuál es el volumen de este martillo y cuáles serían las dimensiones de otro semejante que pesase 10 kg. 290? Densidad del hierro colado: 7.202.

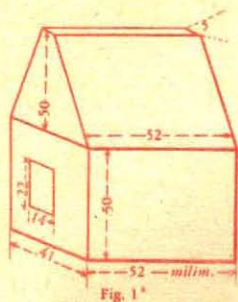


Fig. 1*

650. Con la hulla extraída durante el año 1875 se hubiera podido construir una pirámide exagonal regular de 10 kilómetros de lado, y de 200 millones de toneladas de peso. ¿Cuál sería la altura de esta pirámide? Densidad de la hulla: 1.135.

651. ¿Cuáles serían las dimensiones de una pirámide semejante a la anterior, construída con el cobre extraído durante el mismo año, si la producción total se evalúa en 70.000 toneladas? Densidad del cobre: 8.788.

POLIEDROS REGULARES

652. ¿Cuál es el número de aristas de un octaedro regular?
 653. ¿Cuál es el área de un octaedro regular de 3 centím. de arista?
 654. ¿Cómo puede descomponerse el volumen el octaedro regular?
 655. ¿Cuál es el volumen del mismo?
 656. ¿Cuál es el número de aristas de un icosaedro regular?
 657. ¿Cuál es el área de un icosaedro de 3 centímetros de arista?
 658. ¿Cuál es la arista de un icosaedro regular de 1 decím.² de área?
 659. ¿Cuál es el número de aristas de un dodecaedro?
 660. ¿Cuál es el área de un dodecaedro de 3 centímetros de lado?
 661. ¿Cuál es la arista de un dodecaedro de 1 decímetro² de área?

DESARROLLO

662. Trazar el desarrollo de la superficie total de un octaedro regular de 1 centímetro de lado.

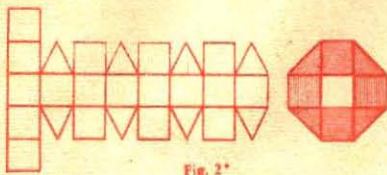


Fig. 2*

663. Trazar el desarrollo de un icosaedro de 1 centímetro de arista.

664. Trazar el desarrollo de un dodecaedro de 1 centímetro y medio de arista.

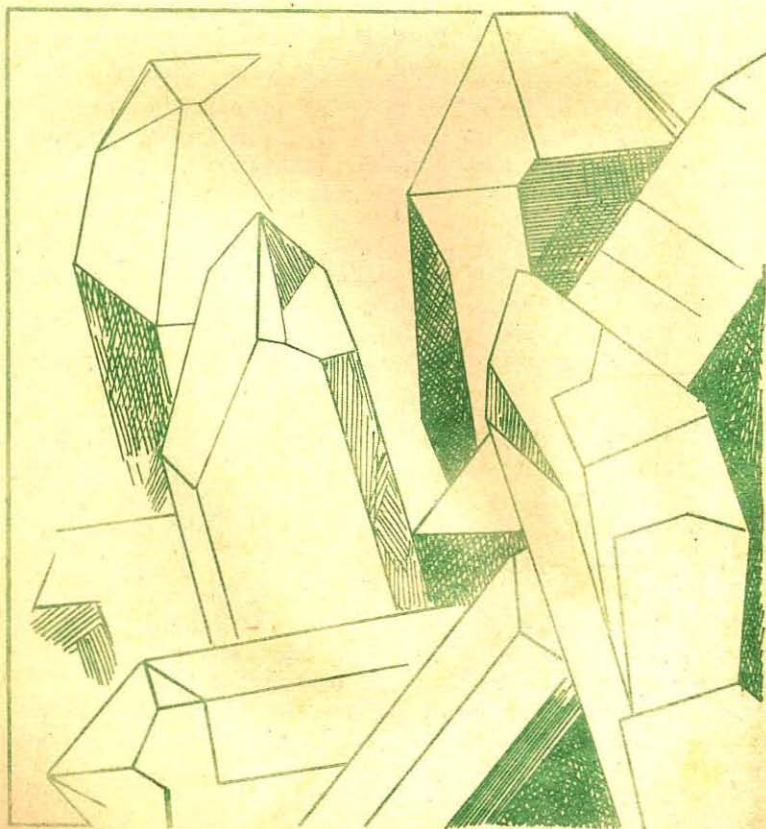
665. Cortar, ensamblar y encolar estos varios desarrollos.

666. Trazar el desarrollo de la superficie total del sólido de Arquímedes, y calcular esta superficie cuando la arista es de 1 centímetro 5 milímetros.

Este desarrollo consta de 18 cuadrados iguales y de 8 triángulos equiláteros iguales.

DEMOSTRAR LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES

667. Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en sus mitades.
668. El volumen de un prisma triangular es igual al producto de una cara lateral por la mitad de la distancia de esta cara a la arista opuesta.
669. El volumen de un prisma regular es igual al producto del área lateral por la mitad del apotema de la base.
670. En un cubo, el plano que pasa por el punto medio de tres aristas no paralelas y no concurrentes corta el sólido según un exágono regular.
671. ¿A qué distancia, desde el vértice, hay que cortar una pirámide, paralelamente a la base, para que las dos porciones resulten equivalentes?



LIBRO VII

LOS TRES CUERPOS REDONDOS

NOCIONES PRELIMINARES

516. Se da el nombre de *sólido de revolución* al cuerpo engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje situado en su plano, v. gr.: fig. 381.



Fig. 381

La *superficie de revolución* es la superficie engendrada por una línea que gira alrededor de un eje.

La figura que gira se llama *figura generatriz*; cada uno de sus puntos describe una circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje, y cuyo centro está en el mismo.

La línea que limita la figura generatriz que engendra al cuerpo de revolución, engendra también a la superficie lateral o de revolución del sólido. Así, la superficie MABCDN (fig. 381) engendra al volumen, y la línea ABCD engendra a la superficie de revolución.

Si se corta un sólido de revolución por un plano perpendicular al eje, la sección que resulta es un círculo.

517. Los principales sólidos de revolución son: el cilindro, el cono y la esfera, que se conocen con el nombre de *cuerpos redondos*.

CAPITULO I

CILINDRO

DEFINICIONES

518. *Cilindro de revolución* o *cilindro circular recto* es el sólido engendrado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados (fig. 382).

El lado a , alrededor del cual gira el rectángulo generador, es a la vez *eje* y *altura*.

El lado l opuesto al eje se llama *generatriz* del cilindro; este lado engendra a la superficie lateral del cilindro.

Los otros dos lados del rectángulo generador son radios del cilindro, y engendran a los círculos que son las *bases* del sólido. Estas bases son perpendiculares al eje.

519. Se puede considerar el cilindro como el límite de un prisma regular inscrito en el cual el número de caras va duplicándose indefinidamente.



Fig. 382

520. Llámase *tronco de cilindro* a la parte de cilindro comprendida entre una base y una sección oblicua a ésta.

Teorema.

521. Area lateral del cilindro. *El área lateral de un cilindro de revolución es igual al producto de la circunferencia de su base por su altura.*



Fig. 383

En efecto, siendo el cilindro recto el límite de un prisma regular inscrito en que el número de caras va aumentando indefinidamente, se encontrará su área lateral multiplicando la altura por el perímetro (Nº 478), esto es por la circunferencia de la base; luego:

$$\text{Area lat.} = 2\pi r a.$$

522. Escolio. *El área total del cilindro se compone del área de los círculos que le sirven de bases, sumada con el área lateral:*

$$\text{Area tot.} = 2\pi r a + 2\pi r^2 = 2\pi r (a + r).$$

Teorema.

523. Volumen del cilindro. *El volumen de un cilindro de revolución es igual al producto de su base por su altura.*

En efecto: siendo el cilindro de revolución el límite de un prisma regular inscrito, cuyo número de caras va duplicándose indefinidamente, su volumen tendrá por expresión $B a$; y como la base es un círculo, el volumen será:

$$V = \pi r^2 a.$$

524. Escolio. *El volumen de un cilindro cualquiera es igual al producto de la sección recta por la generatriz.*

CAPITULO II

CONO

DEFINICIONES.

525. Llámase *cono de revolución* al sólido engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos (fig. 384).



Fig. 384

El cateto a cuyo derredor gira el triángulo rectángulo generador es a la vez *eje* y *altura* del cono.

La hipotenusa es la *generatriz* del cono; este lado engendra a la *superficie lateral* del cono.

El otro cateto del triángulo generador es el *radio* del cono, y engendra al círculo que le sirve de base.

526. El cono de revolución puede considerarse como el límite de una pirámide regular inscrita en que el número de caras va aumentando indefinidamente.

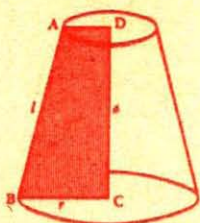


Fig. 385

DC o a es la altura; AB o l es la generatriz.

527. Tronco de cono de revolución de bases paralelas es la porción de cono de revolución comprendida entre la base del mismo y una sección paralela a ésta.

El tronco de cono de revolución de bases paralelas (fig. 385) puede considerarse como engendrado por el trapezoido rectángulo ABCD que gira alrededor del lado DC perpendicular a las bases.

Teorema.

528. Área lateral del cono. El área lateral de un cono de revolución es igual a la mitad del producto de la generatriz por la circunferencia de la base.

En efecto, siendo el cono de revolución el límite de una pirámide regular inscrita cuyo número de caras va aumentando indefinidamente, en el límite, el perímetro de la base se confunde con la circunferencia, y el apotema, con la generatriz. Luego, el área lateral de dicho cono será igual a la mitad del producto de la generatriz por la circunferencia de la base.

Llamando l a la generatriz y r al radio de la base, el área lateral del cono se expresará como sigue:

$$\text{Área lat.} = \frac{1}{2} 2\pi r l \text{ o } \pi r l.$$

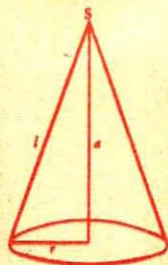


Fig. 386

529. Escolio. El área total es igual al área lateral sumada con la del círculo de la base.

$$\text{Área tot.} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r).$$

Teorema.

530. Volumen del cono. El volumen de un cono de revolución es igual al tercio del producto de su base por su altura.

En efecto: siendo el cono de revolución el límite de una pirámide regular inscrita cuyo número de caras va aumentando indefinidamente, su volumen tendrá por expresión $\frac{Ba}{3}$; y como la base es un círculo, el volumen será:

$$V = \frac{\pi r^2 a}{3}, \text{ o } \frac{1}{3} \pi r^2 a.$$

531. Escolio. *El volumen de un cono es el tercio del volumen de un cilindro de igual base y altura.*

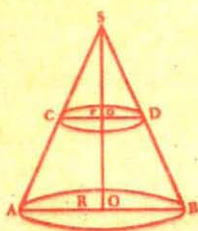


Fig. 387

532. Advertencia. Todo plano paralelo a la base de un cono determina otro cono semejante al propuesto.

Sea el cono SCD semejante a otro SAB. Estos conos semejantes son proporcionales a los cubos de las líneas homólogas.

$$\frac{\text{Cono SCD}}{\text{Cono SAB}} = \frac{\overline{SC^3}}{\overline{SA^3}} = \frac{\overline{SO'^3}}{\overline{SO^3}} = \frac{r^3}{R^3}$$

Las superficies de estos conos son proporcionales a los cuadrados de las dimensiones homólogas:

$$\frac{\text{Superf. SCD}}{\text{Superf. SAB}} = \frac{\overline{SC^2}}{\overline{SA^2}} = \frac{\overline{SO'^2}}{\overline{SO^2}} = \frac{r^2}{R^2}$$

Teorema.

533. Área lateral del tronco de cono. *El área lateral de un tronco de cono de revolución de bases paralelas es igual al producto de la generatriz por la semisuma de la circunferencia de sus bases.*

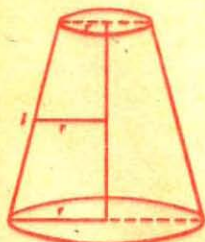


Fig. 388

Un tronco de cono puede considerarse como el límite de un tronco de pirámide regular cuyas bases son polígonos en los cuales el número de lados se duplica indefinidamente, luego se expresará su área lateral como la del tronco de pirámide regular (Nº 492):

$$\text{Área lat.} = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} l = \pi(r + r') l$$

534. Escolios. I. *El área lateral de un tronco de cono de revolución es también igual al producto de la circunferencia media por la generatriz.*

$$\text{De que } \frac{r + r'}{2} = r'', \text{ resulta } \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} = 2\pi r'';$$

multiplicando ambos miembros por l :

$$\text{Área lat.} = \pi(r + r') l = 2\pi r'' l$$

535. II. *El área total del tronco de cono se compone del área de los círculos de las bases sumada con el área lateral.*

$$\text{Área tot.} = \pi l(r + r') + \pi r^2 + \pi r'^2$$

Teorema.

536. Volumen del tronco de cono. *El volumen de un tronco de cono de revolución es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y de la media proporcional entre estas dos bases.*

El tronco de cono de revolución es el límite de la pirámide truncada regular inscrita, cuyo número de lados se duplica indefinidamente. En el límite, los polígonos de las bases se confunden con los círculos circunscritos; por lo tanto el volumen del tronco de cono será igual al tercio del producto, por la altura, de la suma de los círculos de las bases y de la media proporcional entre ellos (Nº 500).

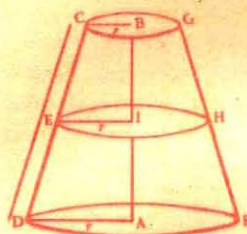


Fig. 389

537. Escolio I. Llamando a a la altura de un tronco de cono, r y r' a los radios de las bases, la fórmula:

$$V = \frac{a}{3} (B + B' + \sqrt{BB'}) \quad (\text{N}^\circ 500)$$

se transformará en la siguiente:

$$V = \frac{a}{3} (\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi r'^2}),$$

$$\text{o} \quad V = \frac{\pi a}{3} (r^2 + r'^2 + rr').$$

538. Escolio II. La fórmula anterior puede escribirse también:

$$V = a \left(\frac{1}{3} \pi r^2 + \frac{1}{3} \pi r'^2 + \frac{1}{3} \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi r'^2} \right);$$

de donde se infiere que *un tronco de cono es equivalente a la suma de tres conos cuya altura común es la del tronco, y cuyas bases son la base inferior, la superior y la media geométrica entre ambas.*

CAPITULO III

ESFERA

DEFINICIONES

539. *Esfera* es un sólido que termina por una superficie cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro.

Puede definirse también diciendo: *esfera* es un sólido engendrado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.

En la rotación, la semicircunferencia describe la *superficie de la esfera*.

El centro, radio y diámetro del semicírculo generador son el *centro, radio y diámetro* de la esfera.

Toda recta trazada por el centro de la esfera, y que por ambos extremos termina en la superficie, es un *diámetro*.

540. *Un plano es tangente a una esfera* cuando tiene con ella sólo un punto común que se llama de *contacto*.

Dos esferas son tangentes cuando sus superficies tienen un solo punto de contacto. Pueden ser tangentes ya exterior o interiormente, así como también pueden ser *exteriores, secantes, interiores y concéntricas*.

Teorema.

541. *Toda sección de la esfera por un plano es un círculo.*



Fig. 390

Sea el plano MN que corta a una esfera cuyo centro es O. Tracemos la recta OI perpendicular al plano secante, y los radios OA, OB, OC, a varios puntos de la intersección del plano con la superficie de la esfera; tracemos también las rectas IA, IB, IC.

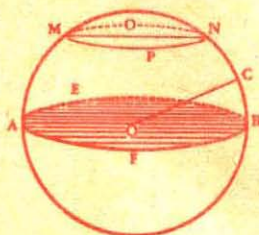
Los radios OA, OB, OC son oblicuas iguales; luego $IA = IB = IC$ (N^o 425, 2^o). Equidistando el

punto I de todos los puntos del perímetro ABC, dicho perímetro será una circunferencia, y la sección un círculo.

Luego, *toda sección...*

542. *Círculo máximo y círculo menor.* *Círculo máximo* es una

sección cuyo plano pasa por el centro de la esfera; y *círculo menor*, la sección cuyo plano no pasa por el centro.



AOB diámetro.
AEBF círculo máximo.
MO'NP círculo menor.
Fig. 391.

Todos los círculos máximos de una misma esfera son iguales.

543. *Polos.* Llámase *polos de un círculo* de la esfera a los extremos del diámetro perpendicular a su plano. Los puntos P y P' (fig. 390) son los polos del círculo ABCI.

Los polos de un círculo equidistan de todos los puntos de la circunferencia de dicho círculo.

- 544.** **Compás esférico.** Para trazar arcos en la superficie de una esfera, se usa un compás a propósito, llamado *compás esférico*, cuyas ramas son curvas (fig. 392).

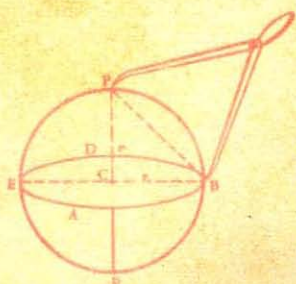


Fig. 392

Desde un mismo polo pueden describirse infinitos círculos, paralelos entre sí, por ser perpendiculares a la línea de los polos.

Para describir en la superficie de una esfera un arco de círculo máximo (fig. 392), se toma una distancia polar igual a la cuerda de un cuadrante o sea $PB = r\sqrt{2}$.

Teorema.

- 545.** *Todo plano tangente a una esfera es perpendicular al radio en el punto de contacto.*

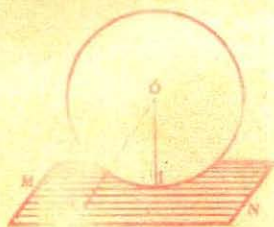


Fig. 393

Sea MN un plano tangente a la esfera O, y sea OI el radio trazado al punto de contacto.

Siendo I el único punto común al plano y a la esfera, cualquier otro, K, del plano estará fuera de la esfera, y la distancia OK será mayor que OI. Luego OI es perpendicular al plano MN (Nº 425, 1º).

- 546.** **Recíproco.** *Todo plano perpendicular al radio, en su extremo, es tangente a la esfera.*

Problema.

- 547.** *Hallar el radio de una esfera.*

Desde dos puntos cualesquiera A y B, tomados como polos, se describen arcos para determinar tres puntos C, D, E, equidistantes de ellos.

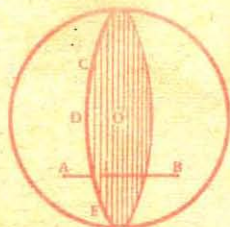


Fig. 394

Estos tres puntos determinan un plano perpendicular a la cuerda AB en su punto medio, y que pasa necesariamente por el centro de la esfera por ser el lugar geométrico de los puntos que equidista de A y B (Nº 539), y por lo tanto, corta a la esfera según un círculo máximo.

En seguida, basta medir las distancias CD, CE, DE y construir un triángulo con estas tres distancias; el radio del círculo circunscrito a este triángulo será el de la esfera dada.

Para hallar el diámetro de la esfera se puede emplear el compás esférico (fig. 395), o también si se quiere, el procedimiento indicado en la fig. 396. La línea AB representa el diámetro buscado.



Fig. 395

AREA DE LA ESFERA

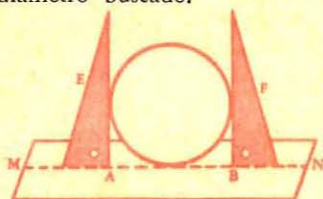


Fig. 396

DEFINICIONES

548. Zona es la porción de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos; v. gr.: la superficie comprendida entre los planos que pasan por A y por B (fig. 397).

La altura de una zona es la distancia a' de los planos que la determinan.

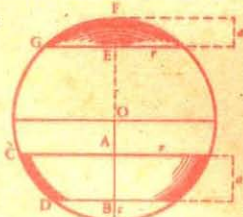


Fig. 397

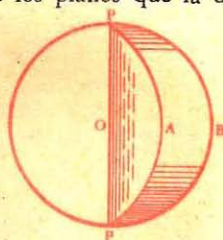


Fig. 398

Casquete esférico es la porción de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos, cuando uno de ellos es tangente a la esfera; v. gr.: AMD (fig. 403).

Huso esférico es la porción de superficie esférica limitada por dos semicircunferencias máximas (fig. 398).

Teorema.

549. Cuando una recta, de longitud determinada, y un eje se hallan en un mismo plano, la superficie engendrada por la recta que gira alrededor del eje equivale a la de un cilindro que tiene por altura la proyección de la recta sobre el eje, y por radio de su base la perpendicular levantada a dicha recta en su punto medio, y prolongada hasta encontrar al eje.

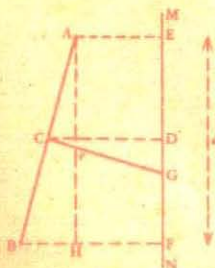


Fig. 399

Pueden ocurrir tres casos, en los cuales supondremos la recta a un mismo lado del eje.

I. La recta AB no encuentra al eje MN, ni le es paralela (fig. 399).

La superficie engendrada es la superficie lateral de un tronco de cono cuya generatriz es AB y cuya altura es su proyección EF.

$$\text{Sup.} = 2\pi \cdot \text{CD} \cdot \text{AB} \quad (\text{N}^{\circ} 534).$$

Basta ahora transformar esta expresión. Sean CG la perpendicular levantada en el punto medio de AB, y AH igual y paralela a la altura.

Los triángulos rectángulos AHB, CDG son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares (N^o 274);

$$\frac{\text{AB}}{\text{CG}} = \frac{\text{AH}}{\text{CD}}, \text{ o } \frac{\text{AB}}{r} = \frac{a}{\text{CD}};$$

por lo tanto
y

$$\begin{aligned} \text{AB} \cdot \text{CD} &= ra \\ 2\pi \text{AB} \cdot \text{CD} &= 2\pi ra. \end{aligned}$$

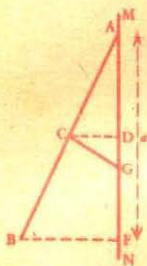


Fig. 400



Fig. 401

II. La recta AB encuentra al eje (fig. 400).

La superficie engendrada es la de un cono. Considerando como en el caso anterior los dos triángulos semejantes ABF y CDG, tendremos:

$$\frac{\text{AB}}{r} = \frac{a}{\text{CD}};$$

luego
y

$$\begin{aligned} \text{AB} \times \text{CD} &= ra, \\ \text{Sup.} &= 2\pi \text{CD} \cdot \text{AB} = 2\pi ra. \end{aligned}$$

III. La recta AB es paralela al eje (fig. 401).

La superficie engendrada es la superficie lateral de un cilindro. La generatriz AB es igual a la altura a , y la perpendicular CD, levantada en el punto medio de la generatriz, es igual al radio r . Luego

$$\text{Sup.} = 2\pi ra.$$

Teorema.

550. Si una línea poligonal regular gira alrededor de un eje situado en su plano, y que pasa por su centro, la superficie engendrada tiene por expresión de su área el producto de la circunferencia cuyo radio sería el apotema de la línea poligonal, por la proyección de dicha línea sobre el eje.



Fig. 402

Sea ABCD la línea poligonal regular, O su centro, OI su apotema, y MN el eje de revolución.

En la rotación, el trapecio rectángulo AEFB engendra un tronco de cono cuya superficie lateral es igual a

$$EF \times \text{Circunf. OI (N}^\circ \text{ 549).}$$

La superficie engendrada por BC es igual a

$$FG \times \text{Circunf. OI,}$$

y la superficie engendrada por CD a

$$GH \times \text{Circunf. OI.}$$

Luego la superficie engendrada por ABCD será:

$$\text{Circunf. OI. (EF + FG + GH),}$$

y su área tendrá por expresión:

$$A = \text{Circunf. OI.EH.}$$

Luego, si una línea poligonal...

Teorema.

551. Área de la zona. *El área de una zona es igual al producto de la circunferencia de un círculo máximo por la altura de dicha zona.*

La zona ABCD está engendrada por la revolución del arco AIB alrededor del diámetro MN.

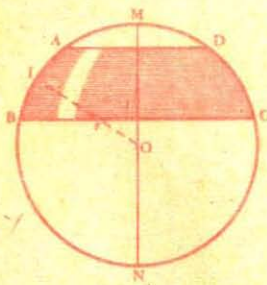


Fig. 403

Pero este arco puede considerarse como una línea poligonal regular inscrita cuyo número de lados va aumentando indefinidamente, llegando el apotema a confundirse con el radio de la esfera.

Luego podemos aplicar el teorema anterior (N^o 550), y decir que el área de la zona es igual al producto de la circunferencia de un círculo máximo por la altura de la zona.

$$A = 2\pi r a.$$

552. Escolios. I. De la fórmula anterior resulta que una zona cualquiera es equivalente al área lateral de un cilindro cuya altura sea la de la zona, y su radio el de la esfera.

II. En una misma esfera, o en esferas iguales las zonas que tienen la misma altura son equivalentes, y dos zonas cualesquiera son proporcionales a sus alturas.

III. El área de un casquete esférico es igual al área de un círculo cuyo radio fuera la cuerda del arco generador de dicho casquete.

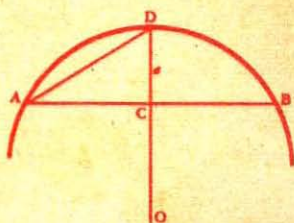


Fig. 404

Siendo el casquete esférico una zona, tenemos:

$$\text{Área} = 2\pi r a.$$

Pero tenemos también (Nº 308):

$$\overline{AD^2} = 2r \text{ CD} = 2ra.$$

Multiplicando por π :

$$\pi \overline{AD^2} = 2\pi r a,$$

o

$$A = \pi \overline{AD^2}.$$

Teorema.

553. Área de la esfera. El área de una esfera es igual al producto de su circunferencia por su diámetro.

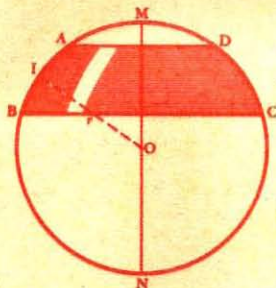


Fig. 405

En efecto, la esfera de radio r es una zona cuya altura es igual al diámetro $2r$.

Luego su área será (Nº 551):

$$A = 2\pi r a = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2.$$

554. Escolios. I. El área de la esfera es equivalente:

1º A cuatro círculos máximos;

2º Al círculo cuyo radio sea el diámetro de la esfera; pues

$$4\pi r^2 = \pi d^2.$$

II. El área de la esfera es equivalente al área lateral del cilindro circunscrito a la misma; pues

$$4\pi r^2 = 2\pi r \cdot d.$$

III. El área total del cilindro circunscrito a la esfera es igual a 6 veces el área de un círculo máximo.

$$4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2.$$

555. Corolario. Las áreas de dos esferas cualesquiera son proporcionales a los cuadrados de los radios o de los diámetros. Porque tenemos:

$$\frac{A}{A'} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2};$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{\pi d^2}{\pi d'^2} = \frac{d^2}{d'^2}.$$

556. **Area del huso.** *El área de un huso esférico es igual al área de la esfera multiplicada por la relación entre el ángulo del huso y 360° .*

Llamando n al ángulo del huso, su área será:

$$A = \frac{4\pi r^2 n}{360} = \frac{\pi r^2 n}{90}.$$

VOLUMEN DE LA ESFERA

DEFINICIONES

557. **Sector esférico** es el volumen engendrado por un sector circular que gira alrededor de un diámetro situado en su plano, pero que no atraviesa a la superficie generatriz.

Segmento esférico es la parte de volumen de la esfera comprendida entre dos planos secantes paralelos.

Cuña esférica es la parte de la esfera comprendida entre dos semicírculos máximos. Su ángulo es el diedro formado por los mismos.

Teorema.

558. *El volumen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje trazado por uno de sus vértices, en su plano y sin cortarlo, es igual al tercio del producto de la superficie engendrada por el lado opuesto al vértice situado en el eje, multiplicado por la altura correspondiente a dicho lado.*

Sea un triángulo ABC que gira alrededor del eje MN; bajemos la altura BH, y demostremos que:

$$\text{Vol. (ABC)} = \frac{1}{3} \text{sup. (AC)} \times a.$$

Pueden ocurrir tres casos:

I. *El eje MN coincide con un lado BC del triángulo* (fig. 406).

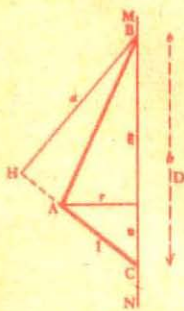


Fig. 406

Tracemos $AD = r$; llamemos m al segmento BD, n al segmento DC, y b a la recta BC. El volumen engendrado por ABC es la suma de los conos engendrados por los triángulos rectángulos BAD y CAD:

$$\text{Vol. (ABC)} = \frac{1}{3} \pi r^2 (m + n) = \frac{1}{3} \pi r^2 b.$$

En esta igualdad podemos sustituir rb por la , por ser ambos productos iguales al duplo de la superficie del triángulo ABC, y tendremos:

$$\text{Vol. (ABC)} = \frac{1}{3} \pi r la.$$

Pero $\pi r l$ es la expresión de la superficie engendrada por el lado AC (Nº 528); por lo tanto:

$$\text{Vol. (ABC)} = \frac{1}{3} \text{sup. (AC)} \times a.$$

II. El eje MN encuentra la prolongación del lado AC (fig. 407).

El volumen engendrado por ABC es la diferencia de los volúmenes engendrados por los triángulos BAD y BCD que tienen la misma altura BH.

$$\begin{aligned} \text{Vol. (ABC)} &= \frac{1}{3} \text{sup. (AD)} \times a - \frac{1}{3} \text{sup. (CD)} \times a \\ &= \frac{1}{3} a \left[\text{sup. (AD)} - \text{sup. (CD)} \right] = \frac{1}{3} a \times \text{sup. (AC)} \end{aligned}$$

III. El eje MN es paralelo al lado AC del triángulo (fig. 408).

Tracemos la altura BH y las perpendiculares AF y CE. Según que el punto H caiga sobre la base AC o sobre su prolongación, el volumen engendrado por ABC será la suma o la diferencia de los volúmenes engendrados por los triángulos BHA y BHC.

Pero como cada uno de ellos es equivalente a los dos tercios del cilindro engendrado por uno de los rectángulos BHAF o BHCE (Nº 531), en la fig. 408 tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Vol. (ABC)} &= \frac{2}{3} \pi a^2 HC - \frac{2}{3} \pi a^2 HA \\ &= \frac{2}{3} \pi a^2 (HC - HA) = \frac{2}{3} \pi a^2 l \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2 \pi a^2 \cdot l = \frac{1}{3} \text{área (AC)} \times a. \end{aligned}$$

Teorema.

559. El volumen engendrado por un sector poligonal regular que gira alrededor de un diámetro exterior al mismo es igual al tercio del producto de la superficie que engendra la línea poligonal regular por el apotema de la misma.

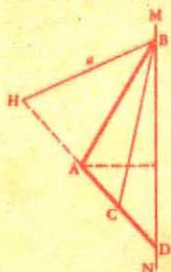


Fig. 407

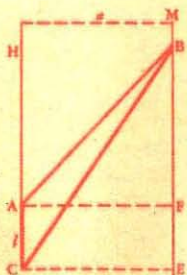


Fig. 408

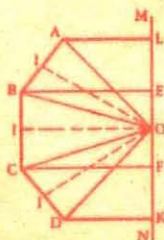


Fig. 409

Sea el sector poligonal regular OABCD que gira alrededor del diámetro MON. El volumen total es la suma de los volúmenes engendrados por los triángulos OAB, OBC..., etc., cuya altura común es el apotema OI. Luego, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Vol. (OABCD)} &= \frac{1}{3} \text{sup. (AB)} \times \text{OI} + \frac{1}{3} \text{sup. (BC)} \times \text{OI} + \\ &\quad + \frac{1}{3} \text{sup. (CD)} \times \text{OI}. \\ &= \frac{1}{3} \text{OI} \left[\text{sup. (AB)} + \text{sup. (BC)} + \text{sup. (CD)} \right] \\ &= \frac{1}{3} \text{sup. (ABCD)} \times \text{OI}. \end{aligned}$$

560. Advertencia. Llamando S a la superficie engendada por el sector poligonal, y a al apotema, el volumen engendrado por el mismo tendrá por expresión:

$$\text{Vol.} = \frac{1}{3} S \times a.$$

Teorema.

561. Volumen del sector esférico. *El volumen de un sector esférico es igual al tercio del producto de la zona correspondiente por el radio de la esfera.*

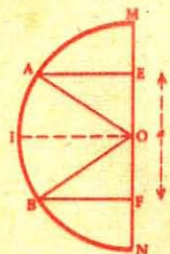


Fig. 410

Sea el sector esférico engendrado por la revolución del sector circular OAB alrededor del diámetro MN.

Demostremos que su volumen tiene por expresión:

$$V = \frac{1}{3} Zr,$$

en la cual Z representa el área de la zona AIB, y r el radio de la esfera.

Siendo el sector circular OAB el límite del sector poligonal inscrito cuyo número de lados va aumentando indefinidamente, el volumen engendrado por el primero será también el límite del volumen engendrado por el segundo.

El volumen engendrado por el sector poligonal tendrá por expresión (Nº 559):

$$\text{Vol.} = \frac{1}{3} S \times a.$$

En el límite, la superficie S será igual a la zona correspondiente al sector circular, y el apotema a , al radio r . Luego

$$\text{Vol.} = \frac{1}{3} Z \times r.$$

[562.] **Corolario.** *El sector esférico es equivalente a los $\frac{2}{3}$ del cilindro cuyo radio es el de la esfera, y cuya altura es la de la zona correspondiente.*

Porque si la altura de la zona es a , su área será (Nº 551):

$$Z = 2\pi r a,$$

y el volumen del sector esférico (Nº 561):

$$V = \frac{1}{3} \times 2\pi r a \times r = \frac{2}{3} \pi r^2 a.$$

Siendo $\pi r^2 a$ la expresión del volumen del cilindro, ya se ve que el volumen del sector esférico es igual a los $\frac{2}{3}$ del mismo.

Teorema.

[563.] **Volumen de la esfera.** *El volumen de la esfera es igual al tercio del producto de la superficie esférica por el radio.*

En efecto, puede considerarse la esfera como un sector esférico cuya zona se extiende a la superficie entera de la misma.

Si representamos por S la superficie de una esfera de radio r , tendremos:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot r.$$

Pero siendo S igual a $4\pi r^2$ (Nº 553), el volumen será:

$$V = \frac{1}{3} 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

[564.] **NOTA.** La misma fórmula puede hallarse también considerando la esfera como el límite de un poliedro regular cuyo número de caras se duplica indefinidamente. Este poliedro puede descomponerse en pirámides cuyas bases sean las caras del poliedro, y su vértice común el centro de la esfera. En tal caso, siendo el volumen de cada una de estas pirámides el producto de su base por el tercio de su altura, el volumen del poliedro total, y por lo tanto el de la esfera, será igual al producto de su área por el tercio del radio.

[565.] **Escolio I.** En función del diámetro el volumen de la esfera será:

$$\frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{d^3}{8} = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

566. Escolio II. Dos esferas cualesquiera son proporcionales a los cubos de sus radios o de sus diámetros, porque:

$$\begin{array}{l} \text{Esf. S} \quad \frac{4}{3} \pi r^3 \quad r^3 \\ \hline \text{Esf. S'} \quad \frac{4}{3} \pi r'^3 \quad r'^3 \\ \hline \text{Esf. S} \quad \frac{1}{6} \pi d^3 \quad d^3 \\ \hline \text{Esf. S'} \quad \frac{1}{6} \pi d'^3 \quad d'^3 \end{array}$$

y

Luego, todas las esferas son sólidos semejantes.

567. Volumen de la cuña esférica. El volumen de una cuña esférica es igual al producto del volumen de la esfera por la relación de su ángulo a 360° .

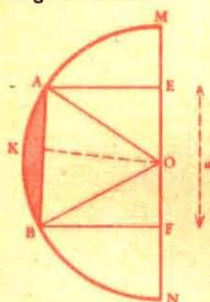


Fig. 411

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \times \frac{n}{360} = \frac{\pi r^3 n}{270}$$

568. Volumen del anillo esférico. El volumen engendrado por un segmento circular girando alrededor de un diámetro exterior a este segmento es igual a la sexta parte del volumen de un cilindro que tiene por radio la cuerda del segmento, y por altura la proyección de esta cuerda sobre el eje.

$$\text{Vol. (AKB)} = \frac{1}{6} \pi \overline{AB^2} \cdot a.$$

Teorema.

569. Volumen del segmento esférico. El volumen de un segmento esférico es igual a la esfera que tenga su altura por diámetro, más el cilindro de igual altura y cuya base sea la semisuma de las dos bases del segmento.

1º Segmento de dos bases. El segmento engendrado por la figura AEFBK se compone del volumen engendrado por el segmento circular AKB y del tronco de cono engendrado por el trapecio EABF.

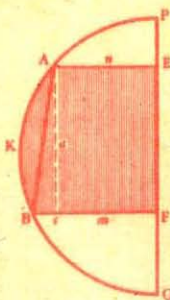


Fig. 412

$$\begin{aligned} \text{Vol. (AKB)} &= \frac{1}{6} \pi \cdot \overline{AB^2} \cdot a = \frac{1}{6} \pi a (\overline{AC^2} + \overline{BC^2}) \quad (\text{N}^\circ 568) \\ &= \frac{1}{6} \pi a [a^2 + (m-n)^2] \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6}\pi a^3 + \frac{1}{6}\pi a(m^2 + n^2 - 2mn). \quad (1)$$

$$\text{Vol (EABF)} = \frac{1}{3}\pi a(m^2 + n^2 + mn) \quad (\text{N}^\circ 537)$$

$$\text{o sea:} \quad \frac{1}{6}\pi a(2m^2 + 2n^2 + 2mn). \quad (2)$$

$$\text{Vol total} = [(1) + (2)] = \frac{1}{6}\pi a^3 + \frac{1}{6}\pi a(3m^2 + 3n^2)$$

$$\text{o sea:} \quad V = \frac{1}{6}\pi a^3 + \frac{1}{2}(\pi m^2 + \pi n^2)a. \quad (3)$$

2º *Segmento de una base.* El segmento de una base no es más que un caso particular del segmento de dos bases; uno de los radios, n por ejemplo, se anula; entonces la fórmula (3) se simplifica en la siguiente:

$$V = \frac{1}{6}\pi a^3 + \frac{1}{2}\pi m^2 a.$$

TEOREMA DE ARQUIMEDES

570. 1º *El área de una esfera es los dos tercios del área total del cilindro circunscrito;*

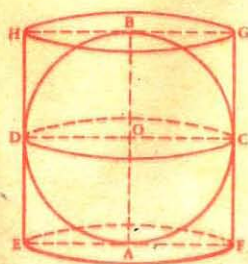


Fig. 413

2º *El volumen de la esfera es los dos tercios del volumen del cilindro circunscrito.*

Sea una esfera de radio r , y el cilindro circunscrito EFGH.

1º El área total del cilindro es:

$$2\pi r \times 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2.$$

Por lo tanto tenemos:

$$\frac{\text{área esf.} \quad 4\pi r^2 \quad \cdot 2}{\text{área cilind.} \quad 6\pi r^2 \quad \quad 3}$$

2º El volumen del cilindro circunscrito es

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

$$\text{Luego} \quad \frac{\text{Vol. esf.} \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \cdot 2}{\text{Vol. cilind.} \quad 2\pi r^3 \quad \quad 3}$$

APLICACIONES

LOS TRES CUERPOS REDONDOS

CILINDRO

571. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro es un rectángulo que tiene por altura la del cilindro y por base la circunferencia del mismo.

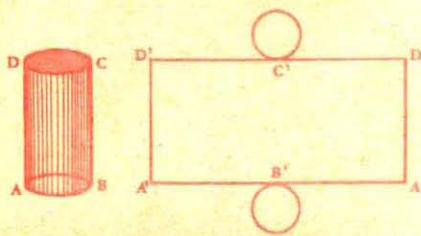


Fig. 414

CONO

572. El desarrollo de la superficie lateral del cono es un sector

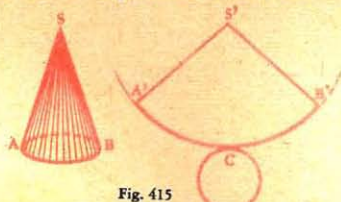


Fig. 415

circular que tiene por radio la generatriz del cono y cuyo arco es igual a la longitud de la circunferencia de la base del cono.

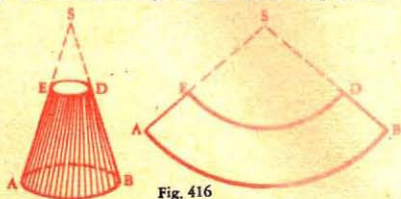


Fig. 416

573. El desarrollo de la superficie lateral del tronco de cono forma un segmento de corona circular; los dos arcos son iguales a las circunferencias de las bases del tronco de cono.

ESFERA

574. La superficie de la esfera no puede desarrollarse con exactitud; pero si se descompone en husos, fácilmente se logra desarrollarla en la práctica con una aproximación suficiente como sucede por ejemplo para la construcción de globos.

Sea desarrollar la superficie de una esfera de 7 mm. de radio.

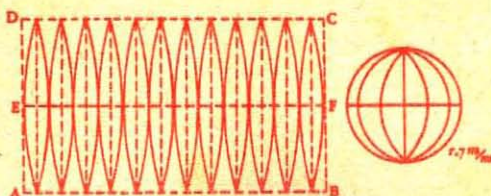


Fig. 417

Supongamos la esfera descompuesta en 12 husos iguales.

La circunferencia de un círculo máximo es igual a:

$$2\pi r = 2 \times 3,1416 \times 7 = 44 \text{ mm.}$$

44

Se construye un rectángulo ABCD de 44 mm. de base y $\frac{44}{2}$ mm.

de altura. Desde el punto E, mitad de AD, se traza EF paralela a AB.

Luego se divide EF en 12 partes iguales y en medio de cada división se traza una perpendicular hasta encontrar AB y DC; por último se une los extremos de cada perpendicular por medio de dos arcos de círculo.

EJERCICIOS

AREA DEL CILINDRO

672. ¿Cuál es el área lateral de un cilindro, si el diámetro tiene 4 metros y la altura 3 m. 75?

673. El radio de la base de un cilindro es de 2 m. 80, la altura es igual a los $\frac{3}{5}$ de la circunferencia de la base; ¿cuál es el área lateral de este cilindro?

674. El radio de una columna cilíndrica tiene 58 centímetros y 4 metros de altura; ¿cuál es el área lateral?

675. El área de la base de un cilindro es de 3 m² 08. Hallar el área lateral, sabiendo que la altura es igual a 3 veces el radio de la base.

676. El radio de la base de un cilindro tiene 35 centímetros; la altura es el duplo del diámetro; hallar:

- 1º El área lateral del cilindro;
- 2º El área de las bases.

VOLUMEN DEL CILINDRO

677. ¿Cuál es el volumen de un cilindro que tiene 85 centímetros de altura, y cuya base tiene 35 centímetros de radio?

678. ¿Cuál es el volumen de un cilindro cuya base tiene 2 m² y la altura 1 m. 46?

679. ¿Cuál es el volumen de un cilindro cuya circunferencia de la base mide 3 m. 08 y la altura 1 m. 50?

680. ¿Cuántos litros contiene una cuba cilíndrica de 4 m. 80 de diámetro y 1 m. 96 de profundidad?

681. Se echa una piedra en una vasija cilíndrica de 8 decímetros de diámetro, en parte llena de agua; ¿cuál es el volumen de la piedra, si después de la inmersión, sube el agua a 483 milímetros más que antes?

DIMENSIONES DEL CILINDRO

682. Hallar la altura de un cilindro de 2 m³ 7 de volumen y 3 m³ 25 de base.

683. La capacidad de un depósito es de 7.640 hectolitros; ¿cuál es su profundidad si el radio de la base mide 12 metros?

684. Un tonelero tiene que hacer una cuba cilíndrica de 2 m. 60 de profundidad. ¿Cuál será el diámetro, debiendo ser la capacidad de 150 hectolitros?

685. ¿Cuál es la superficie de la base de un cilindro cuyo volumen es de 248 decímetros³, y la altura de 1 m. 20?

686. ¿Cuál es el radio de la base de un depósito cilíndrico de 5.000 hectolitros de capacidad, y cuya profundidad es de 5 metros?

687. De un depósito cilíndrico cuyo diámetro mide 8 m. 8 salen dos litros de agua por segundo; ¿de cuánto habrá bajado el nivel al cabo de $\frac{3}{4}$ de hora?

688. Hallar la altura de un cilindro cuya base mide 84 m², si esta altura es la mitad del diámetro.

689. ¿Cuál es la superficie de la base de un cilindro cuyo volumen tiene 3 m³ 60 y la altura 1 m. 50?

690. El agua contenida en un vaso cilíndrico de 35 centímetros de diámetro y de 1 metro de altura ha de envasarse en otro también cilíndrico y de 80 centímetros de diámetro. ¿Hasta qué altura subirá el agua?

691. En un tubo cilíndrico de 10 centímetros de diámetro interior se vierten 4 kilogramos 04.481 de leche cuya densidad es igual a 1,03. ¿Qué altura alcanza el líquido?

692. Un cilindro de 1 m³ de volumen tiene el diámetro doble de la altura:

1º ¿Cuál es ese diámetro?

2º ¿Cuál la altura?

3º ¿Cuál la superficie total?

693. Un cilindro cuya altura es igual al diámetro tiene por superficie total un metro cuadrado:

1º ¿Cuál es su altura?

2º ¿Cuál su volumen?

694. Las medidas de capacidad usadas en el comercio por mayor son cilindros cuya profundidad es igual al diámetro. ¿Cuál es el diámetro de las medidas siguientes:

- 1º Del doble hectolitro;
- 2º Del hectolitro;
- 3º Del medio hectolitro;
- 4º Del doble decalitro;
- 5º Del decalitro;
- 6º Del medio decalitro?

695. ¿Cuál es la superficie total de una cisterna cilíndrica de 1.200 m³ de capacidad, si su altura es igual al diámetro?

696. Hallar en metros cúbicos la cantidad de materiales que necesitó la construcción de una torre cuya circunferencia exterior tiene 24 metros, siendo el espesor de la pared de 1 metro, y la altura de 13 m. 50.

697. La circunferencia exterior de la mampostería de un pozo tiene 6 metros; la circunferencia interior 3 metros y la profundidad es de 15 metros. ¿Cuánto habrá costado la mampostería, a razón de 18 pesetas el metro cúbico?

APLICACIONES

698. Hallar el peso de un tubo de plomo de 2 m. de largo, 18 centímetros de diámetro interior y cuyo espesor mide 8 milímetros. Densidad del plomo: 11,4.

699. ¿Cuál es el peso de un tronco de árbol cilíndrico que tiene 10 m. 02 de largo y 374 milímetros de diámetro? Densidad de la madera: 0,6.

700. ¿A cuántos kilogramos equivale la presión del agua en el fondo de una cisterna cilíndrica de 5 m. 75 de diámetro, si el agua llega a una altura de 3 m. 4?

701. Calcular el peso de la leche contenida en un vaso cilíndrico que tiene 40 centímetros de diámetro interior y 50 centímetros de alto. Densidad de la leche: 1,03.

702. Un cilindro lleno de un líquido cuya densidad es igual a 0,915 tiene 25 centímetros de altura y 20 de diámetro interior. Hallar el peso total si el vaso tiene 1 milímetro de espesor. Densidad de la envoltura: 4,4.

703. La altura de un vaso de zinc de 1 litro de capacidad y de forma cilíndrica es el doble del diámetro, y su espesor es de 5 milímetros; hallar su peso. Densidad del zinc: 7,19.

704. La densidad del vapor de agua es los $\frac{5}{8}$ de la densidad del aire, y un litro de aire para 1 gr. 293 en París. Hallar el peso del vapor contenido en el cilindro de una caldera que mide 50 centímetros de diámetro y 80 de largo.

705. Tres piezas cilíndricas de varias clases de madera miden 4 m. 60 de largo y 34 centímetros de diámetro, y tienen respectivamente por densidad 0,750, 0,560, 0,690. Hallar su peso total.

706. Seis columnas de asperón miden cada una 56 centímetros de diámetro y 4 metros de altura. Hallar su peso total si la densidad del asperón es de 2,35.

707. Un cilindro de hierro colado tiene 1 m. 40 de largo y 86 milímetros de diámetro. Después de pasado al torno, su diámetro se disminuye de 3 mm. 5. Hallar el peso que se ha disminuído. Densidad del hierro colado: 7.25.

708. Una cuba cilíndrica de 1 metro de diámetro pesa 45,350 gramos. Después de puesta en un estanque, se envasan en ella 151 litros de agua. ¿Cuántos centímetros se hundirá?

709. Un cilindro de corcho tiene 40 centímetros de altura y 60 de diámetro. Hallar su peso, sabiendo que la densidad del corcho es $\frac{1}{4}$ de la del agua. ¿Con qué peso será necesario cargarlo para que se hunda por completo en el agua?

710. Un tubo cilíndrico de bronce tiene 75 centímetros de largo y 36 centímetros de diámetro interior. Siendo de 8 centímetros el espesor del metal, hallar:

1º El peso del tubo vacío;

2º El peso del tubo lleno de agua. Densidad del bronce: 8,46.

711. ¿Cuánto se pagará por labrar un cilindro de asperón que tiene 66 centímetros de diámetro y 2 m. 40 de largo, a 7,5 pesetas el metro cuadrado?

712. Hallar el valor de un cilindro macizo de latón de 38 centímetros de largo y 9 de diámetro, a razón de 6 pts. el kilogramo. Densidad del latón: 8,750.

713. Un tronco de roble de 5 m. 75 de largo y 76 centímetros de diámetro vale 85 pts. ¿Cuál es el precio del metro cúbico?

714. Una columna cilíndrica de madera de 5 metros de altura y 25 centímetros de diámetro ha de cubrirse de una chapa de hierro batido de 2 milímetros de espesor cuyo precio es de 50 pts. el quintal. ¿Cuánto costará este trabajo, si se paga 5 pts. por la hechura? Densidad del hierro: 7,80.

715. ¿Cuál será el precio de la cal necesaria para blanquear una torre de 6 m. 80 de diámetro y 25 metros de altura? — Sábese que con un hectolitro de cal que vale 3,45 pts. se pueden blanquear 10 m².

716. En la catedral de Córdoba hay 1.000 columnas de 1 m. 5 de diámetro y 35 de altura. ¿Cuál es el volumen de cada columna, y cuál el volumen total?

717. ¿Cuánto se pagará por cavar un pozo de 15 metros de profundidad y 2 m. 30 de diámetro? Se sabe que hasta 3 metros de profundidad se pagan 50 céntimos por metro cúbico; desde 3 hasta 6 metros se pagan 30 céntimos más por metro cúbico, y así sucesivamente.

718. Un chapa rectangular de hierro batido que tiene 1 m. 75 por 80 centímetros puede ser enrollada en forma de tubo por lo

largo o por lo ancho. Hallar el diámetro y el volumen en ambos casos, y el peso del tubo, si el metro cuadrado de hierro batido pesa 8 kgrs. 25; hallar también el precio del tubo si el medio kilogramo de hierro batido vale 65 céntimos.

719. ¿Cuál es el lado de un cubo cuyo volumen es equivalente al de un cilindro de 1 m. 40 de altura y 10 centímetros de diámetro?

720. ¿Cuál es la superficie total de un cilindro que tiene 1 metro de altura y de diámetro? ¿Cuál sería el lado de un cubo de igual superficie?

721. Hay que agotar un pozo de 8 m. 60 de profundidad por 2 m. de diámetro, con una bomba que saca 10 litros cada dos minutos. ¿Cuánto tiempo se necesitará para agotarlo?

722. ¿Cuál es el volumen de una bóveda semicilíndrica que mide 6 metros de largo y 5 m. 80 de diámetro interior, siendo de 86 centímetros el espesor de la obra? ¿Cuánto costará la construcción de esta bóveda a razón de 40 pts. el metro cúbico?

723. Un cilindro de 1 metro de diámetro está circunscrito a un cubo. ¿Cuál es la diferencia de volúmenes entre los dos sólidos?

724. Un cubo cuya arista tiene 1 metro está circunscrito a un cilindro. Hallar la diferencia de volúmenes entre los dos sólidos.

725. Un depósito circular tiene 5 m. 4 de diámetro y 1 m. 40 de profundidad; ¿en cuánto tiempo lo llenará un grifo que da 0 litros 4 por segundo?

726. Un depósito cilíndrico tiene 2 m. 30 de altura y 3 m. 50 de diámetro; ¿cuántas veces ha de verse en él, para llenarlo, el contenido de un vaso cilíndrico que mide 43 centímetros de altura y 32 de diámetro?

727. Se quiere forrar completamente con bramante de 2 mm. de diámetro la superficie lateral de un cilindro de 80 centímetros de diámetro y 1 m. 20 de largo; ¿cuántos metros de bramante serán menester?

728. ¿Qué cantidad de agua sacará a cada movimiento del émbolo una bomba cuyo tubo tiene 16 centímetros de diámetro, siendo de 46 centímetros la altura debajo del émbolo?

729. ¿Cuál es el volumen del "Drago de Orotava" si su circunferencia media es de 24 metros y la altura de 24 metros, suponiendo que es un cilindro perfecto?

730. Un rectángulo de 40 centímetros de largo por 5 de ancho gira tanto alrededor de su lado mayor como al de su lado menor. Hallar el volumen y la superficie total engendrados cada vez.

731. ¿Cuántos ladrillos se necesitarán para construir un pozo de 3 m. 45 de profundidad y de 1 m. 10 de diámetro, si los ladrillos tienen 12 centímetros de ancho y 6 centímetros de alto (contando las juntas)? La largura del ladrillo representa el espesor de la pared.

732. Se corta a escuadra un cilindro de madera que tiene 5 metros de largo y 60 centímetros de diámetro. Hallar:

- 1º El volumen de la madera cortada;
- 2º La superficie total de los cuatro segmentos.

733. Si se necesita un centímetro³ de oro para dorar la superficie lateral de un cilindro de 75 centímetros de altura y 20 centímetros de radio, ¿cuál será el espesor de la capa de oro que supongamos igual en todo el cilindro?

734. Dos hojas de zinc rectangulares tienen ambas 1 m. 60 por 60 centímetros. Se enrolla la primera a lo largo, ajustando los bordes, y la segunda del mismo modo, pero a lo ancho. Hallar la diferencia de capacidad de los cilindros resultantes.

735. Un tubo metálico tiene 1 m. 50 de largo, 40 centímetros de diámetro exterior, y pesa 700 kgrs. 969. Hallar el espesor de sus paredes si la densidad del metal es de 7,7.

736. Calcular el volumen de la mampostería de un depósito elíptico cuyo eje mayor tiene interiormente 5 m. 80, el eje menor 4 m. 90, y cuya profundidad es de 85 centímetros; el espesor de las paredes es de 33 centímetros y el del fondo 20 centímetros.

737. ¿Cuál es la capacidad de una bañera de 1 metro de altura, y de base elíptica cuyos ejes tienen 1 m. 85 y 64 centímetros?

738. A un cilindro de 1 metro de alto y 35 centímetros de diámetro se le quita un sector cuyo ángulo central tiene 140°. Hallar el volumen de este sector y su superficie total.

739. A un cilindro de 1 metro de largo y 30 centímetros de diámetro se le quita un prisma triangular cuya base es un triángulo equilátero inscrito. Hallar el volumen de este prisma y el de la parte restante.

740. En un cilindro de 1 m. 50 de largo y 40 centímetros de diámetro se inscribe un prisma exagonal regular. Hallar el volumen de la parte restante del cilindro.

741. Una bóveda semicilíndrica de 5 m. de largo tiene su diámetro interior de 2 m. 05, y el exterior de 2 m. 62. Hallar el volumen de la mampostería.

742. Una bóveda tiene 7 m. 40 de largo y 42 centímetros de espesor; su arco interior pertenece a un círculo de 4 m. 30 de radio, y corresponde a un ángulo central de 135°. Hallar el volumen de la mampostería de esta bóveda.

743. Trazar el desarrollo de la superficie total de un cilindro recto de 80 milímetros de altura, cuya base es un círculo de 15 milímetros de radio; cortar y encolar.

744. Hállese la fórmula del área total del cono circular recto, con relación al radio y a la generatriz.

745. Hállese la fórmula del área lateral del cono circular recto, con relación al radio y a la altura.

746. Hállese la fórmula del área total del cono circular recto, con relación al radio y a la altura.

747. Hállese la fórmula del área lateral del cono circular recto, con relación a la altura y a la generatriz.

748. Hállese la fórmula del área total del cono circular recto, con relación a la generatriz l y a la altura a .

749. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuya generatriz tiene 4 m. 50, y la circunferencia de su base 6 m. 25?

750. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuya generatriz es de 3 m. 75 y el radio de su base 1 m. 89?

751. Calcular el área total del mismo.

752. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuya altura mide 3 m. 25, y el radio de la base 1 m. 25?

753. Calcular el área total del mismo.

754. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto que tiene 2 m. 08 de altura y 1 m. 04 por radio de su base?

755. ¿Cuál es el área total de un cono cuya altura sea de 10 m., y la circunferencia de su base de 314 decímetros?

756. Un cono recto cortado por un plano que pasa por el eje tiene por sección un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 1 m. 80. ¿Cuál es el área lateral del cono?

757. Hallar el área total de uno de los sectores del mismo cono.

758. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuya altura mide 4 m. y la generatriz 5 metros?

759. ¿Cuál es el área total de un cono recto que tiene 3 m. 69 de altura, y 4 m. 95 de generatriz?

760. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto que tiene 5 m. 25 de altura y 4 m. 62 la circunferencia de su base?

761. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuyo radio de la base tiene 1 m. 40, y cuya generatriz es los $\frac{5}{4}$ de la circunferencia de esta base?

762. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuya generatriz tiene 3 metros, siendo el diámetro de la base el doble de la altura?

763. ¿Cuánto pesa el tejado de zinc de una torrecilla cuyo remate es un cono de 3 metros de lado y 2 m. 70 de diámetro? Se sabe que la hoja de zinc tiene 1 milímetro de espesor y que su densidad es de 6,86.

VOLUMEN DEL CONO

764. Hállese la fórmula del volumen del cono en función de la generatriz y del radio.

765. Hállese la fórmula del volumen del cono en función de la generatriz y de la altura.

766. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya altura es de 1 m. 35 y la superficie de la base 3 m.² 40?

767. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya altura mide 2 m. 10 y el radio de la base 56 centímetros?

768. ¿Cuál es el volumen de un cono cuyo diámetro de la base tiene 32 centímetros y la altura 24 centímetros?

769. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya altura mide 4 metros y el lado 5 metros?

770. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya generatriz mide 1 m. 60 y la altura 1 m. 02?

771. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya circunferencia de la base es de 1 m. 98 y la altura de 1 m. 23?

772. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya generatriz tiene 5 m. 25 y el diámetro de la base 4 m. 13?

773. ¿En qué proporción están los volúmenes de dos conos de una misma altura y cuyos diámetros respectivos tienen 56 centímetros y 1 m. 12?

774. Una barra cilíndrica de hierro de 2 metros de largo termina por sus extremos en punta cónica. Cada uno de estos conos tiene 25 centímetros de altura, y su diámetro, que es el de la parte cilíndrica, tiene 9 centímetros. Hallar el volumen de la barra y su peso, si la densidad del hierro es de 7,788.

775. Un cono y un cilindro tienen iguales las bases y las alturas. ¿En qué proporción están sus volúmenes?

AREA DEL TRONCO DE CONO

776. Hallar la fórmula del área total del tronco de cono en función del lado y de los radios.

777. Hallar una fórmula para el área total del tronco de cono en función de la altura y de los radios.

778. ¿Cuál es el área lateral de un tronco de cono cuya generatriz tiene 3 metros y los radios de las bases paralelas 2 m. 10 y 2 m. 80?

779. ¿Cuál es la superficie lateral de una cuba si el diámetro del fondo mide 2 m. 10, el de la abertura 2 m. 30, y la generatriz 3 m. 84?

780. ¿Cuál es el área de un tronco de cono si la generatriz es de 6 metros y la suma de las circunferencias de las bases paralelas 8 m. 48?

781. ¿Cuántos metros cuadrados de hoja de lata se necesitan para hacer un vaso cuya forma es la de un tronco de cono con tapa; las dos bases tienen 30 y 40 centímetros de radio y la profundidad 50 centímetros?

782. Hallar la superficie interior y exterior de una chimenea que mide 22 metros de altura y cuyos radios interior y exterior de la base superior tienen 30 y 40 centímetros y los de la base inferior 1 metro y 1 m. 20.

783. En un cono de 6 metros de altura y 4 metros de radio se hace a 2 metros del vértice una sección paralela a la base. Hallar la superficie lateral del tronco de cono que resulta.

VOLUMEN DEL TRONCO DE CONO

784. ¿Cuál es el volumen de un tronco de cono de bases paralelas, si la base inferior tiene 2 m.^2 25, la superior 1 m.^2 21, y la altura del tronco 90 centímetros?

785. ¿Cuál es el volumen de un tronco de cono de bases paralelas cuyo radio de la base superior mide 42 centímetros, el de la base inferior 63 centímetros y la altura del tronco 2 m. 10?

786. ¿Cuál es el volumen de un árbol de 9 m. 25 de largo, si las circunferencias de los extremos miden 1 m. 50 y 55 centímetros?

787. ¿Cuál es el volumen de un árbol cuya longitud es igual a 12 veces la suma de las circunferencias de sus extremos, si sus diámetros respectivos tienen 50 y 12 centímetros?

788. Los radios de un tronco de cono miden respectivamente 90 y 40 centímetros y la altura es igual al duplo de la media geométrica de estos radios. ¿Cuál es el volumen?

789. Los radios de un tronco de cono miden respectivamente 90 y 40 centímetros, y el lado es igual a la suma de los radios. ¿Cuál es el volumen?

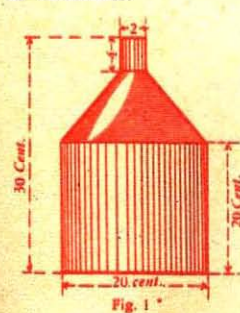


Fig. 1 *

790. Una cúa llena de vino tiene la forma de un cono truncado de 1 metro de profundidad; el diámetro del fondo mide 85 centímetros, el de la abertura 1 m. 25. ¿Cuántos toneles de 108 litros de capacidad se podrán llenar con este vino?

791. Un hojalatero tiene que hacer una alcuza de forma análoga a la de la figura 1*, y con las dimensiones indicadas en la misma. Hallar la superficie lateral y el volumen de esa alcuza.

CONO Y TRONCO DE CONO

792. ¿Cuál es la fórmula que permite hallar la generatriz l de un cono, en función de la altura y del radio?

793. Hallar la altura de un cono en función de la generatriz y del radio.

794. Calcular el radio de un cono en función de la generatriz y de la altura.

795. ¿Cuál es la generatriz de los conos que tienen las dimensiones respectivas siguientes: alturas 6, 9 y 12 metros; radios 4, 3 y 4 metros?

796. ¿Cuál es la altura de los conos que tienen las siguientes dimensiones respectivas: generatrices 12, 16 y 20 m.; alturas 4, 5 y 6 metros?

797. ¿Cuál es el radio de los conos que tienen las siguientes dimensiones respectivas: generatrices 6, 9 y 12 m.; alturas 5, 6 y 4 metros?

798. ¿Cuál es el lado de un cono recto cuya área lateral tiene 30 m^2 80 y el radio de la base 2 m. 109?
799. ¿Cuál es la circunferencia de la base de un cono cuya área lateral mide 28 m^2 , y el lado 7 metros?
800. ¿Cuál es la altura de un cono que tiene 3 m^2 077 de volumen y 35 centímetros de radio de la base?
801. ¿Cuál es la altura de un cono cuyo volumen es de 0 m^3 18865, y la circunferencia de la base, 1 m. 54?
802. ¿Cuál es la altura de un cono cuyo volumen tiene 4 m^3 , y la base 3 m^3 60?
803. ¿Cuál es la base de un cono cuyo volumen mide 1 m^3 60, y la altura 80 centímetros?
804. Un embudo de 20 centímetros de diámetro ha de tener 2 litros de capacidad; ¿cuál será su altura?
805. ¿Cuál es el diámetro de un cono de estaño que tiene 25 centímetros de altura y cuyo peso es de 19 114 gr.? Densidad del estaño: 7,3.
806. El radio de la base de un cono recto mide 2 m. 10, y la generatriz es los $\frac{4}{5}$ de la circunferencia de la base; hállese:
1º El área lateral del cono;
2º La altura del mismo.
807. Un embudo tiene 13 litros de capacidad; hallar su diámetro y su profundidad, siendo ésta el duplo del diámetro.
808. Hallar el radio de la base de un cono que tiene 1 m^3 de volumen y 3 metros de altura.
809. Hallar la altura de un cono truncado en función del volumen y de los radios.
810. ¿Cuál es el radio de la base inferior de un tronco de cono recto que tiene 24 m. 5 de área lateral, 1 m. 95 de generatriz, si el radio de la base superior es de 1 m. 40?
811. ¿Cuál es la altura de un tronco de cono que tiene 84 m^3 de volumen, si la base superior mide 3 m^2 y la inferior 12 m^2 ?
812. ¿Cuál es la profundidad de un vaso de 12 litros de capacidad y cuya forma es la de un cono truncado, sabiendo que el diámetro superior mide 24 centímetros y el inferior 28?
813. Un cono tiene 2 m. 25 de radio y 3 metros de altura; ¿cuál es por metro la inclinación de la generatriz?
814. Un cono tiene 3 metros de altura y 4 de diámetro; ¿cuál es el ángulo formado por la altura y la generatriz?
815. ¿Cuál es el precio de 4 troncos de árbol de 4 metros de largo sabiéndose que los radios de los extremos de cada uno tienen 34 y 26 centímetros y que el metro cúbico vale 49 pesetas? ¿Cuál sería la diferencia de precio si se consideraran como cilindros cuya base fuera la media aritmética de las bases dadas?

816. Dado un cono truncado cuyos radios de las bases miden 6 y 4 metros, hallar el radio de un cilindro de igual altura y cuyo volumen es equivalente al del tronco propuesto.

817. Desde un ángulo de una hoja de lata rectangular (fig. 2*), se describe un arco de círculo con un radio igual al lado menor, y se hace un cono con el sector así trazado. Buscar la altura y el volumen de este cono.



Fig. 2*

818. Un hojalatero hace semejante operación en una hoja cuadrada cuyo lado mide 40 centímetros. Siendo el sector quitado $\frac{1}{4}$ de un círculo de 40 centímetros de radio, dígame si en lo sobrante hallará el hojalatero lo necesario para hacer la base de este cono.

819. Tres conos macizos de latón, de 50 centímetros de altura, tienen por diámetro 12, 24 y 36 centímetros. Hallar la arista del cubo equivalente a estos tres conos.

820. Dos vasos de forma cónica, y de peso igual, miden 25 centímetros de altura interior y 12 centímetros de diámetro. Se llena el uno con éter cuya densidad es 0,71, y el otro con ácido sulfúrico cuya densidad es 1,84. Hállese la diferencia de peso de los dos vasos.

821. Las dos bases paralelas de un tronco de cono son de 22 y 40 decímetros cuadrados. Hallar el diámetro que ha de darse a un cilindro de igual altura y de volumen equivalente.

822. Se ha plantado verticalmente en el suelo, cerca de un árbol cuya sombra tiene 34 metros, un palo de 1 m. 40 de alto y cuya sombra mide 2 m. 10. Hallar:

- 1º La altura del árbol;
- 2º Su volumen, siendo de 1 m. 20 la circunferencia de la base.

823. El triángulo ABC (fig. 3*) gira alrededor de BC; buscar:

- 1º La superficie total engendrada;
- 2º El volumen.

824. Hallar la superficie total y el volumen, si el mismo triángulo gira alrededor de AB.



Fig. 3*

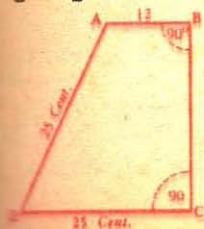


Fig. 4*

825. El trapecio ABCD (fig. 4*) gira alrededor de BC. Hallar la superficie engendrada por AD, y el volumen engendrado por la superficie entera.

826. Hallar la superficie total engendrada y el volumen, si el mismo trapecio gira alrededor de DC.

827. El agua contenida en un vaso cónico de 18 centímetros de altura y 24 centímetros de diámetro se vierte en un vaso cilíndrico de 10 centímetros de diámetro. ¿Hasta qué altura subirá el agua?

828. Una cuba tiene la base elíptica; los ejes del fondo miden respectivamente 1 m. 80 y 1 m. 20; los de la abertura tienen 2 m. 08 y 1 m. 50. ¿Cuál es su capacidad si la altura es de 86 centímetros?

829. Hallar el ángulo del sector formado por el desarrollo de la superficie lateral de un cono de 4 metros de circunferencia y 5 metros de lado.

830. En un círculo de hoja de lata de 86 centímetros de radio, se corta un sector de 150° para hacer un cono. Hallar:

1º El radio de la base de este cono;

2º El volumen.

831. En el problema anterior ¿cuál sería el volumen del cono hecho con lo sobrante de la hoja?

DESARROLLO DEL CONO

832. Trácese el desarrollo de la superficie lateral de un cono recto cuya generatriz mide 60 milímetros y el radio de la base 10 milímetros.

833. Trácese el desarrollo de la superficie lateral de un cono recto de 50 milímetros de altura y 15 de radio.

834. Trácese el desarrollo de la superficie lateral de un cono truncado recto cuya generatriz mide 70 milímetros y los radios de las bases 40 y 80 milímetros.

835. Trácese el desarrollo de la superficie lateral de un tronco de cono recto que tiene 30 milímetros de lado, y cuyos radios de las bases son de 6 y 15 milímetros.

AREA DE LA ESFERA

836. Una esfera tiene 3 m. 08 de radio; ¿cuál es:

1º La circunferencia de un círculo máximo;

2º El área de la esfera?

837. ¿Cuál es el área de una sección central en una esfera de 2 m. 40 de radio?

838. Expresar en función del radio y de una esfera el área total de un hemisferio y de su base.

839. ¿Cuál es el área de una esfera, si la circunferencia de un círculo máximo tiene 4 m. 84?

840. Expresar el radio de una esfera en función del área.

841. ¿Cuál es el radio de una esfera que tiene 6 m^2 16 de área?

842. Expresar la circunferencia de un círculo máximo de una esfera en función de la superficie S , de esta esfera.

843. ¿Cuál es la circunferencia de un círculo máximo de una esfera que tiene 12 m^2 de área?

844. ¿Cuál es en función del diámetro exterior D y del espesor a : la superficie interior y exterior de una esfera hueca?

845. ¿Cuál es la superficie exterior e interior de una esfera hueca de 35 milímetros de espesor, si el diámetro exterior tiene 1 m. 05?
846. ¿Cuál es en decímetros cuadrados la superficie de una bala de cañón cuyo radio mide 10 centímetros?
847. ¿Cuál es el espesor de una esfera hueca cuyas superficies interior y exterior miden 3 m^2 y 3 m^2 12?
848. ¿Cuál es el área total de un cilindro, de un cono y de una esfera, siendo r el radio de estos tres cuerpos y $2r$ la altura de los dos primeros?
849. Aplicación al caso en que $r = 25$ centímetros.
850. ¿Cuál es el área total de un casquete esférico de 80 centímetros de altura en una esfera de 2 m. 10 de radio?
851. Expresar la altura de un casquete esférico en función de su área y del radio de la esfera.
852. ¿Cuál es la altura de un casquete esférico de 3 m^2 en una esfera de 1 metro de radio?
853. ¿Cuál es el radio de una esfera en la cual un casquete de 35 centímetros de altura tiene un área igual a 2 m^2 ?
854. El área de un casquete esférico es de 2 m^2 85; hallar el área de la esfera correspondiente si la altura del casquete es de 45 centímetros.
855. ¿Cuál ha de ser la altura de un casquete tomado en una esfera de 9 metros de radio para que tenga 169 m^2 6.464 de área?
856. Una esfera cuyo radio tiene 4 metros está cortada por dos planos que pasan al mismo lado, a 2 y a 3 metros del centro. Se pregunta:
- 1º ¿Cuál es el área de la zona resultante?
 - 2º ¿Cuáles son las áreas de las dos bases de esta zona?
857. Una esfera tiene 1 m. 80 de radio. ¿Cuál sería el radio de un círculo equivalente a una zona de esta esfera, cuya altura fuera de 20 centímetros?
858. En una esfera de 1 m. 30 de radio se considera una zona de dos bases; la base más cercana al centro se halla a la distancia de 50 centímetros y la superficie de la zona es igual a 12 m^2 . Hallar la superficie de las bases de esta zona.
859. En una esfera de 42 centímetros de radio se trazan, a un mismo lado del centro, planos paralelos, a 14 centímetros de distancia. Hallar los radios de las bases de las zonas y del casquete que resultan.
860. ¿Cuál es la superficie convexa de un huso de 80° en una esfera de 88 milímetros de radio?
861. ¿Cuál es la superficie total de un huso de 25° en una esfera de 88 centímetros de radio?
862. ¿Cuál es el radio de una esfera en la cual la superficie de un huso de 45° mide 1 m^2 ?
863. ¿Cuál es el ángulo de un huso esférico cuya superficie tiene 101 m^2 72, si el radio de la esfera es de 10 metros?

864. Una caldera de vapor de forma cilíndrica termina en sus extremos en una media esfera de 40 centímetros de radio. Hallar la superficie externa de esta caldera si el cilindro tiene un radio igual al de las esferas y la longitud es doble del diámetro.

865. ¿Cuánto costará el dorado de una bola de 25 centímetros de radio, si el metro cuadrado de ese dorado vale 53 pesetas 50?

866. Siendo de 1 kgr. 026 la presión del aire sobre un centímetro cuadrado, calcular la fuerza necesaria para separar dos hemisferios de Magdeburgo de 6 centímetros de radio.

VOLUMEN DE LA ESFERA

867. ¿Cuál es el volumen de una esfera de 84 centímetros de radio?

868. ¿Cuál es el volumen de una esfera de 4 centímetros de diámetro?

869. ¿Cuál es el volumen de una esfera cuya superficie mide 55 metros² 44?

870. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la cual la circunferencia de uno de sus círculos máximos mide 4 m. 62?

871. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que un círculo máximo tiene 6 m² 16?

872. ¿Cuál es el radio de una esfera en función de su volumen?

873. ¿Cuál es el radio de una esfera cuyo volumen es de 179 decímetros³?

874. ¿Cuál es el diámetro de una esfera en función de su volumen?

875. ¿Cuál es el diámetro de una esfera de 40 decímetros³ de volumen?

876. ¿Cuál es la superficie de una esfera de 1 m³ de volumen?

877. ¿Cuál es la circunferencia de un círculo máximo de una esfera que tiene de volumen 14 centímetros³?

878. Se corta una esfera de 1 m. 20 de radio por dos planos paralelos distantes 90 centímetros, que pasan a ambos lados del centro. Hallar el volumen del segmento esférico que resulta.

879. La altura de un casquete esférico mide 25 centímetros; el radio de la esfera 84 centímetros. Hallar el volumen del sector esférico.

880. Un sector circular de 60 centímetros de radio, y cuyo ángulo tiene 30°, gira alrededor de uno de sus radios. Hallar:

1º El volumen del sector esférico engendrado;

2º La superficie total de este sector.

881. El radio de una esfera es de 1 m. 50; uno de sus sectores esféricos tiene 1 m³ 545. Hallar la superficie del casquete que le sirve de base.

882. ¿Cuál es el radio de la esfera en la cual un sector esférico de 0 m³ 633 tiene por superficie un casquete de 1 m² 2?

883. En una esfera de 1 metro de radio las alturas de dos casquetes opuestos son de 4 y de 6 decímetros. Calcular el volumen:

- 1º Del sector correspondiente a cada casquete;
- 2º Del cono correspondiente a cada casquete;
- 3º Del segmento correspondiente a cada casquete;
- 4º Del segmento esférico comprendido entre los dos segmentos.

mentos.

884. En la figura 5*, $BO = 20$ centímetros, $AI = 5$ centímetros, calcular el volumen:

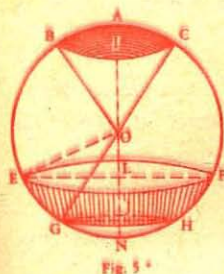


Fig. 5*

- 1º Del sector BACO;
- 2º Del cono BICO;
- 3º Del segmento BAC.

885. En la misma figura, con las mismas dimensiones, se hace $OL = 10$ centímetros y $JN = 5$ centímetros. Hallar el volumen del segmento de dos bases EFGH.

886. ¿Cuál es el volumen de una cuña esférica que pertenece a una esfera de 1 m^3 , si el ángulo del huso es de 25° ?

887. ¿Cuál es el volumen de una cuña esférica si el radio de la esfera mide 12 decímetros, y el ángulo del huso es de $51^\circ 39' 45''$?

888. ¿Cuál es el radio de una esfera si una cuña esférica es de 21 decímetros³ y el ángulo del huso 15° ?

889. En un cilindro cuya altura es igual al diámetro se inscriben: 1º una esfera; 2º un cono. Calcular la razón de los volúmenes de estos tres cuerpos.

890. El radio mayor de una esfera hueca tiene 25 centímetros. ¿Cuál es el espesor de la envoltura si su volumen es de 4 decímetros³?

891. ¿Cuál es el volumen de una envoltura esférica de 2 centímetros de espesor, si el diámetro exterior mide 2 m. 22?

892. ¿Cuál es el peso de una envoltura esférica de cobre de 25 milímetros de espesor, sabiéndose:

- 1º Que el diámetro exterior es de 1 m. 35;
- 2º Que la densidad del cobre es de 8,78?

893. ¿Cuál es el espesor de la pared de una bola de jabón, si una gota de agua cuyo diámetro mide 2 milímetros, produce una bola de 15 centímetros de radio?

894. Una esfera hueca tiene 43 centímetros de radio exterior y 4 de espesor. Hallar el radio de otra esfera maciza de igual volumen.

895. Hallar el peso de una bola de madera de 35 centímetros de diámetro, sabiendo que metida en el agua se sumerge 6 centímetros.

896. Un cubo y una esfera tienen igual superficie, que es de $2 \text{ m.}^2 4$; ¿qué diferencia de volumen hay entre ambos cuerpos?

897. Un cubo de madera de 36 centímetros de lado se tornea para hacer una bola. Hallar lo que pierde de su peso, siendo la densidad de la madera 0,57.

898. Hallar el peso de una bola de billar de 14 centímetros de circunferencia; densidad del marfil: 1,9.

899. ¿Cuál es el diámetro de una bola de oro que vale 350.000 pesetas, si el $\frac{1}{2}$ kilogramo vale 1.687 pts. 50? Densidad del oro: 19,20.

900. En un vaso cilíndrico de 68 centímetros de diámetro, en parte lleno de agua, se echan 80 bolas de igual diámetro. Si el nivel del agua sube 20 centímetros, hallar el diámetro de una de las bolas.

901. Se funde un cubo metálico de 80 centímetros de lado y se lo transforma en una esfera. Hallar:

1º Su diámetro;

2º En cuánto la superficie del cubo excede a la de la esfera.

902. Se inscribe un cubo en una esfera; expresar su arista en función del radio de la esfera.

903. ¿Cuál es el volumen del cubo inscrito en una esfera de 800 decímetros?

904. ¿Cuál es el peso de una bola de 20 centímetros de diámetro, sabiéndose que cuando se mete en el agua, el nivel del líquido determina en ella una circunferencia de círculo máximo?

905. Una esfera de cobre de 18 centímetros de radio contiene otra de platino de 5 centímetros de radio, de modo que no hay ningún vacío entre las esferas. ¿Cuál es el peso de la masa resultante? Densidad del platino: 21,5; densidad del cobre: 8,85.

906. Un cubo, un cilindro y una esfera que tienen el diámetro igual a la altura, miden cada uno 1 m^2 de superficie; hallar el volumen de cada uno de estos tres cuerpos.

907. Un cubo, una esfera y un cilindro cuya altura es igual al diámetro miden cada uno 1 m^3 de volumen. Hallar la razón de sus superficies.

908. Tres bolas metálicas que tienen por diámetro respectivamente 1 m. 20, 30 centímetros y 40 centímetros, han de fundirse en una sola; ¿cuál será su diámetro?

909. La circunferencia exterior de una bola hueca tiene 72 centímetros y su espesor 24 milímetros. ¿Cuál es su capacidad y cuál el volumen de la envoltura?

910. Una bóveda semiesférica tiene por diámetro interior 4 m. 80 y su espesor es de 70 centímetros. Hallar el volumen de la mampostería.

911. Un objeto macizo de hierro colado consta de tres partes:

1º De un cubo cuya arista mide 42 centímetros;

2º De un cilindro de 1 m. 20 de altura y 28 centímetros de diámetro;

3º De una esfera de 60 centímetros de radio. Hallar el volumen y el peso de este objeto. Densidad del hierro colado: 7,25.

912. Una bala de cañón de hierro colado pesa 12 kilogr. Calcular:

1º Su radio;

2º El peso del oro necesario para formar una capa de $\frac{6}{10}$ de milímetro de espesor alrededor de ella. Densidad del oro: 19,26; densidad del hierro colado: 7,25.

913. Siendo 5,44 la densidad media del globo terráqueo, hallar el peso de la tierra, tomando el millón de toneladas por unidad.

914. ¿Cuántas balas de plomo se fabricarán con un kg. de este metal, siendo su diámetro de 2 centímetros? Densidad del plomo: 7,25.

915. ¿Cuál es el peso de una esfera de vidrio llena de agua, siendo de 30 centímetros el diámetro interior, de 1 milímetro el espesor del vidrio, y de 2,64 la densidad del mismo?

916. ¿Cuál es el volumen de la capa atmosférica que envuelve a la tierra, siendo su espesor $\frac{1}{60}$ del radio terrestre?

917. Se ha dorado por galvanización una esfera de 9 centímetros de radio y 850 gr. de peso, y al sacarla del baño su peso ha aumentado con 12 gr. Siendo 19,258 la densidad del oro, hallar el espesor de la capa de este metal.

918. La figura 6* representa un sólido en el cual AC es la generatriz de un cono ACBE tangente a la esfera AO, de 11 centímetros de radio. Si OC tiene 25 centímetros, calcular.

- 1º La tangente AC;
- 2º La cuerda AB;
- 3º La altura del cono ACB;
- 4º El volumen del mismo;
- 5º El volumen del sector esférico AOB;
- 6º La superficie total del sólido;
- 7º El volumen total del sólido;
- 8º El ángulo AOB.

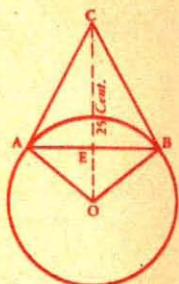


Fig. 6*

919. La figura 7* representa dos conos ACD y BCD de igual base que tiene 16 centímetros de radio, y cuya altura total es de 43 centímetros. Hallar el radio de una esfera equivalente.



Fig. 7*

920. Un globo de tafetán barnizado mide 10 metros de diámetro y pesa 250 gr. el metro cuadrado. Hallar:

- 1º El peso de la envoltura;
- 2º El volumen del globo.

921. El vacío de una esfera de plomo hueca, cuyo diámetro mide 5 centímetros, es de 5 centímetros³ 45. Hallar el peso de esta esfera si la densidad del plomo es de 11,35.

922. El diámetro de una esfera mide 60 centímetros. ¿Cuál es el diámetro de la base de un cono de volumen equivalente y de 30 centímetros de altura?

923. Una bola de madera de 128 milímetros de diámetro se hunde 44 milímetros en el agua pura; ¿cuál es la densidad de la madera?

924. Una caldera de vapor de forma cilíndrica mide 4 m. 80 de largo y 90 centímetros de diámetro y termina en sus extremos por una semiesfera. Calcular:

- 1º El número de litros de agua necesarios para llenarla hasta los $\frac{7}{8}$;
- 2º La presión en su superficie cuando el vapor ejerce en cada centímetro cuadrado una presión de 6 kgr. 18.

925. Calcular en función de la arista a de un tetraedro regular, el radio, la superficie y el volumen de la esfera inscrita y de la esfera circunscrita.

926. Hágase lo mismo respecto del exaedro.

927. Resuélvase el mismo problema respecto del octaedro.

928. El lado de un tetraedro mide 1 m 20; ¿cuál será el radio de las esferas inscrita y circunscrita?

929. El lado de un octaedro mide 1 m. 20; ¿cuál es el radio de las esferas inscrita y circunscrita?

930. De una esfera que tiene 2 m. 40 de radio se quiere sacar el tetraedro mayor. Calcular la arista de este tetraedro.

931. Calcular la arista de un octaedro inscrito en una esfera de 2 m. 40 de radio.

CILINDROS Y CONOS SEMEJANTES

932. Dígase en qué casos son semejantes dos cilindros.

933. ¿En qué proporción están las superficies de dos cilindros semejantes?

934. ¿En qué proporción están los volúmenes de dos cilindros semejantes?

935. ¿En qué proporción están las alturas y los radios de dos cilindros semejantes, conociendo las superficies y los volúmenes?

936. ¿Qué aumento tiene el volumen de un cilindro si se multiplica por 2 la altura y el diámetro?

937. ¿Qué ocurriría si se multiplicara sólo la altura?

938. ¿Qué, si se multiplicara sólo el diámetro?

939. Dos cilindros son semejantes: el primero tiene 2 m² de área total y 50 centímetros de altura; el segundo tiene 1 m² de área total. Hallar las dimensiones de ambos cilindros.

940. Dos cilindros semejantes tienen: el primero 40 centímetros de radio y 50 centímetros de altura; el segundo 1 m² 80 de área total. Hallar las dimensiones de este segundo cilindro.

941. Dos cilindros semejantes tienen: el primero 30 centímetros de radio y 1 m³ de volumen; el segundo 1 m³ 500. ¿Cuáles son las dimensiones de ambos cilindros?

942. Un cilindro tiene 16 decímetros de diámetro y 24 decímetros de altura; calcular el radio y la altura de otro cilindro semejante cuyo volumen fuera la mitad del primero.

943. ¿En qué casos son semejantes:

- 1º Dos conos;
2º Dos troncos de cono?

944. ¿En qué proporción están:

- 1º Las áreas;
2º Los volúmenes;
3º Los radios y alturas de dos conos semejantes?

945. ¿Qué llegaría a ser el volumen de un cono si se duplicara:

- 1º La altura;
2º El diámetro;
3º La altura y el diámetro?

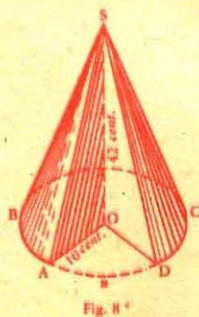
946. Dos conos semejantes tienen: el primero, 25 centímetros de radio y 8 500 centímetros² de superficie total, el segundo tiene 600 centímetros² de superficie total. ¿Cuáles son las dimensiones y los volúmenes de ambos conos?

947. En la figura 8* que representa un cono *decentado*:

$$a = 42 \text{ centímetros}$$

$$r = 10 \text{ centímetros}$$

$$\text{arco } ABCD = 47 \text{ centímetros.}$$



Calcular:

- 1º El volumen de la parte quitada;
2º La generatriz del cono;
3º El área total de lo restante;
4º El ángulo AOD.

948. El radio de la base de un cono tiene 5 metros, y la altura 10 metros. Hallar a qué distancia de la base ha de pasar un plano paralelo a ella para que el volumen del cono quitado sea de 20 m³.

949. Un cono recto tiene 20 metros de altura y 387 m³ de volumen; ¿a qué distancia del vértice ha de pasar un plano paralelo a la base para que el cono quitado sea de 95 m³?

950. Un cono tiene 90 centímetros de radio y 27 de altura. Calcular el radio y la altura de un cono semejante cuyo volumen fuera tres veces menor.

951. ¿Qué dimensiones han de darse a un cono para que su volumen sea igual a 1 m³ 350, sabiéndose que el radio de la base debe ser los $\frac{2}{5}$ de la altura?



952. Por la mitad de las generatrices de un cono se traza un plano paralelo a la base. ¿Cuántas veces el cono así formado estará contenido en el cono total?

953. Una regadera cónica (fig. 9*) de 20 centímetros de altura, está llena de agua. ¿Hasta qué altura subirá el agua cuando se haya derramado la mitad?

954. En una copa (fig. 10*) de 15 centímetros de altura y 10 de diámetro, se echan 120 gr. de mercurio y 25 gr. de agua. Calcular las distancias que hay desde los niveles de los líquidos hasta el fondo del vaso. Densidad del mercurio: 13,60.

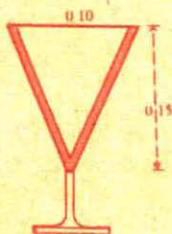


Fig. 10*

955. Se ha dorado un cono de 2 m^2 05 de superficie lateral, hasta la tercera parte de la altura a contar desde el vértice. ¿Cuántas hojas de oro se han empleado, si cada una forma un cuadrado de 5 centímetros de lado?

956. Una copa de forma cónica tiene 1 litro de capacidad y 25 centímetros de diámetro. Se la llena con agua y mercurio. ¿Cuál es el espesor de la capa de agua, siendo igual el peso de ambos líquidos?

957. Los radios de las bases de un tronco de cono tienen 3 m. 50 y 7 m. 8, y la altura del tronco 2 metros. Calcular el área y el volumen del cono entero.

958. Un vaso de forma cónica (fig. 11*) y de 6 centímetros de diámetro interior, se llena con mercurio, agua y aceite de modo que cada capa tenga 5 centímetros de espesor. Calcular el peso del mercurio, del agua y del aceite. Densidad del mercurio: 13,6; densidad del aceite: 0,92.



959. Un plato tiene la forma de un cono truncado y los radios de sus bases miden 19 centímetros y 24 centímetros y la altura 4 centímetros 8. ¿Cuáles son las dimensiones de otro plato de 25 centilitros más de capacidad?

960. ¿En qué caso son semejantes:

- 1º Dos casquetes;
- 2º Dos zonas;
- 3º Dos husos esféricos?

961. ¿En qué proporción están las áreas de dos esferas o partes semejantes de esfera?

962. ¿En qué proporción están los volúmenes de dos esferas o partes semejantes de esfera?

963. ¿En qué proporción están los radios de dos esferas o partes semejantes de esfera, dadas las áreas?

964. ¿En qué proporción están los radios de dos esferas o partes semejantes de esfera, dados los volúmenes?

965. ¿Qué radio ha de darse a una esfera para que su volumen sea 4 veces menor que el de otra, cuyo radio mide 1 m. 92?

966. ¿Qué radio ha de darse a una esfera para que su área sea 4 veces menor que la de otra esfera cuyo radio mide 3 m. 20?

967. El diámetro de una esfera tiene 40 centímetros y el de otra 1 m. 20. ¿En qué proporción están:

1º Sus áreas?

2º Sus volúmenes?

968. En un armario caben 4.580 bolas de 48 milímetros de diámetro. Dígase cuántas cabrían si el diámetro fuera de 60 milímetros.

969. Por medio de un plano se quita un casquete de $0 \text{ m}^2 5655$ a una esfera de 60 centímetros de radio. ¿Cuál sería la altura de otro casquete semejante pero de área triple?

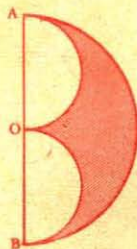


Fig. 12*

970. El área de la zona comprendida entre dos planos paralelos distantes 40 centímetros es de $1 \text{ m}^2 25$. Hallar el radio de la esfera en la que una zona semejante tiene una área 10 veces mayor.

971. Un sector correspondiente a una esfera de 4 decímetros de radio tiene 67 decímetros^3 de volumen. ¿Cuál será el de un sector semejante tomado en una esfera cuyo radio es los $\frac{2}{5}$ del anterior?

972. En la figura 12*, AB es el diámetro de un semicírculo que tiene O por centro. Sobre cada uno de los radios OA y OB se describe un semicírculo. Hallar con relación al radio el volumen engendrado por la superficie comprendida entre los tres semicírculos, cuando la figura da la vuelta completa alrededor de AB. Calcular este volumen suponiendo que AB tiene 40 centímetros.

LIBRO VIII

CURVAS USUALES

NOCIONES PRELIMINARES

575. Llámase *curva plana* aquella cuyos puntos todos están situados en un mismo plano.

Eje de una curva es una recta que la divide en dos partes simétricas, es decir, en dos partes que coinciden cuando se dobla el plano por dicha recta.

Vértice es el punto en que el eje encuentra a la curva.

Centro de una curva es el punto que divide en dos partes iguales a todas las cuerdas que pasan por él.

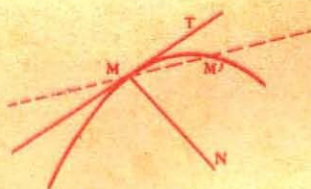


Fig. 418*

576. Tangente a una curva es el límite MT de las posiciones de una secante MM' que se mueve al rededor del punto M , de modo que el segundo punto de intersección M' se vaya acercando indefinidamente al primero.

Llámase *normal* de una curva la perpendicular a la tangente en el punto de contacto; v. g. MN .

577. *Coordenadas rectilíneas.* Para determinar la posición de un punto en un plano, se trazan por él paralelas a dos rectas perpendiculares, dadas en el mismo plano.

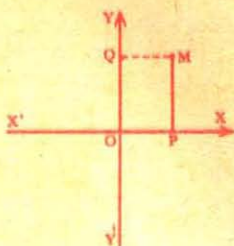


Fig. 419*

Sea M un punto situado en el plano de las rectas perpendiculares $X'OX$, $Y'OY$. La distancia PM u OQ es la *ordenada* del punto M ; QM u OP es su *abscisa*; estas distancias son las *coordenadas* del punto M .

Las rectas OX , OY se llaman *ejes coordenados*; su intersección es el *origen de las coordenadas*.

Las *ordenadas* se consideran como *positivas* cuando se hallan encima del origen, y *negativas* cuando debajo. Las *abscisas* son *positivas* a la derecha del origen y *negativas* a la izquierda.

CAPITULO I

ELIPSE

DEFINICIONES

578. *Elipse* es una curva plana y cerrada en la que es constante la suma de las distancias de cada uno de sus puntos a otros dos fijos llamados *focos*, y situados en su plano.

Radios vectores son las rectas que unen un punto cualquiera de la curva con los dos focos. Las rectas MF y MF' son los radios vectores del punto M .

Sea AA' una longitud constante, F y F' dos puntos fijos; si, para cada punto de la curva MM' , resulta $MF + MF' = AA'$, esta curva es una elipse.

La suma *constante* se representa por $2a$.

La distancia FF' llamada *distancia focal*, se representa por $2c$.

Para que sea posible el triángulo MFF' , es preciso que salga:

$$FF' < MF + MF', \text{ esto es } 2c < 2a.$$

Llámanse *círculos directores* de la elipse las circunferencias descriptas desde cada foco como centro, con un radio igual a $2a$.

La elipse tiene dos círculos directores.

579. *Construcción de la elipse.* Para esta construcción se pueden emplear varios procedimientos:

1er. Procedimiento. *Por un movimiento continuo.*

Fijando en los puntos F, F' los extremos de un hilo cuya longitud sea igual al eje mayor, se estira el hilo por medio de un lápiz; se hace resbalar la punta del lápiz, teniendo el hilo siempre bien tirante; y este movimiento irá describiendo la elipse.

580. **2º Procedimiento.** *Por medio de puntos,* dados los focos y el eje mayor $AA' = 2a$.

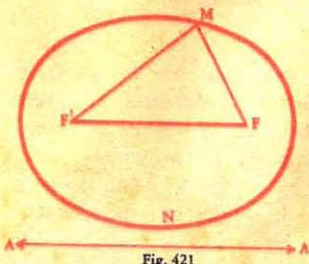


Fig. 421

Se unen los focos por medio de una recta, y se encuentra el punto O levantando una perpendicular en medio de FF' .

Se toma:
$$OA = OA' = \frac{1}{2} AA'.$$

Desde el foco F , con un radio igual a la mitad de AA' , se describen dos arcos que determinan los puntos B y B' , extremos de la curva. Para obtener otros distintos puntos de la misma, se señala sobre AA' el punto D comprendido entre los focos; desde F, F' con los radios respectivos $A'D$ y AD se trazan arcos de círculo que se cortarán en los puntos M, M', N, N' pertenecientes igualmente a la curva.

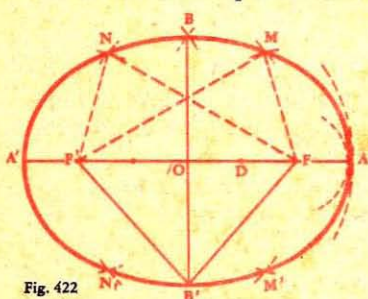


Fig. 422

De este modo, se pueden obtener cuantos puntos se desee de la curva pedida, y uniéndolos por una línea continua trazada a pulso, tendremos la elipse deseada¹.

Teorema.

581. Si un punto está dentro de la elipse, la suma de sus distancias a los focos es menor que el eje mayor; y si un punto está fuera de la elipse, esta suma es mayor que el eje mayor.

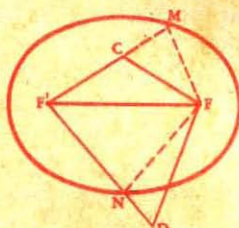


Fig. 423

1º Unamos los focos con un punto interior C ; prolonguemos $F'C$ hasta M , y tracemos MF ; tenemos:

$$CF + CF' < MF + MF',$$

o sea $< 2a$.

2º Unamos los focos con un punto exterior D , y tracemos FN ; tenemos:

$$DF + DF' > NF + NF',$$

o sea $> 2a$.

Luego, si un punto...

Teorema.

582. La elipse tiene por ejes la recta que pasa por los focos, y la perpendicular levantada en el punto medio de la recta que une los mismos; su centro es el punto de intersección de los ejes.

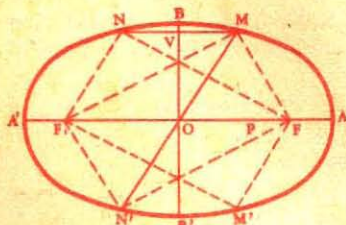


Fig. 424

Sea M un punto cualquiera de la elipse. Prolonguemos las perpendiculares MP y MV y la recta MO ; tomemos $PM' = PM$, $VN = VM$, $ON' = OM$, y así determinaremos los puntos simétricos de M con relación a AA' , a BB' y al punto O ; basta demostrar que estos puntos pertenecen a la curva.

¹ Véanse a continuación, Nos. 592 y 593, otros procedimientos.

1º FF' es perpendicular en el punto medio de MM' ;
 luego $MF = M'F$, y $MF' = M'F'$;
 de donde $M'F + M'F' = MF + MF' = 2a$;
 luego M' es un punto de la elipse (Nº 578).

2º Los trapezios rectángulos $OFMV$ y $OF'NV$ se pueden superponer, siendo iguales sus bases; luego $MF = NF'$, y los ángulos en F y F' son iguales. Los triángulos $FF'M$ y $FF'N$ son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales; luego $NF = MF'$, y ya que $NF' = MF$, tenemos $NF + NF' = MF + MF' = 2a$; por lo tanto el punto N pertenece a la elipse.

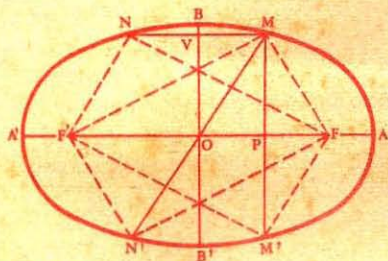


Fig. 425

Por consiguiente AA' y BB' son los ejes, y su punto de intersección O es el centro de la curva.

583. Escolio. 1º *La elipse tiene cuatro vértices.*

El eje focal FF' encuentra a la curva en dos vértices A, A' , cuya distancia se llama longitud del *eje mayor* de la elipse.

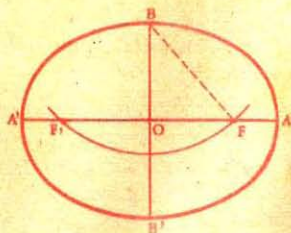


Fig. 426

El eje perpendicular a FF' corta a la elipse en los dos vértices B, B' , cuya distancia se llama longitud del *eje menor*.

Se escribe:

$$AA' = 2a; BB' = 2b; FF' = 2c.$$

El triángulo rectángulo BOF da la relación:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

2º *Una elipse se determina por sus ejes AA', BB' .*

Para determinar los focos, conociendo los ejes, hay que tomar por centro el punto B , y describir un arco de círculo con a por radio; la intersección de este arco con AA' dará F y F' .

Excentricidad. Llámase *excentricidad* de la elipse la relación entre la distancia focal y el eje focal, esto es, la razón $\frac{c}{a}$

Siendo el segmento FF' siempre interior a AA' , la excentricidad de la elipse no puede variar sino entre 0 y 1.

Cuando $b = a$, la excentricidad es nula, y la elipse es un círculo.

Cuando $b = 0$, la excentricidad es igual a 1, y la elipse se reduce a su eje mayor.

Teorema.

584. La tangente a la elipse forma ángulos iguales con los radios vectores del punto de contacto.

Consideremos una secante cualquiera MM' ; desde uno de los focos tracemos la perpendicular FC , y tomemos CF_1 , igual a CF ; tracemos $F'F_1$, unamos el punto D con el foco F , y el punto M con los tres puntos F' , F , F_1 .

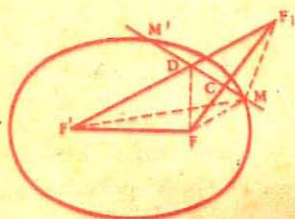


Fig. 427

Demostremos primero que el punto D está situado entre los puntos de intersección M y M' , y en seguida, que la secante MM' forma ángulos iguales con DF y DF' .

1º Tenemos:

$$MF_1 = MF \text{ y } DF_1 = DF;$$

$$\text{luego } DF' + DF = F'F.$$

$$\text{Pero } MF' + MF_1 = MF' + MF = 2a,$$

$$\text{y } F'F_1 \text{ es menor que } MF' + MF_1 \text{ o } 2a;$$

$$\text{luego } DF' + DF < 2a.$$

Siendo menor que $2a$ la suma de las distancias del punto D a los dos focos, este punto está dentro de la elipse; por lo tanto se halla entre M y M' .

2º Los ángulos FDM y $F'DM'$ son iguales, siendo cada uno igual al ángulo MDF_1 .

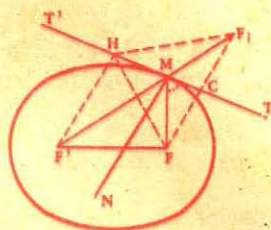


Fig. 428

Estos resultados son verdaderos para cualquier secante, y por lo tanto por más próximos que estén los puntos M y M' ; pero en el límite, cuando M' se confunde con M , la secante llega a ser tangente.

Luego, la tangente...

585. **Corolarios. I.** La normal MN es bisectriz del ángulo de los radios vectores en el punto de contacto; pues los ángulos que forma con MF y MF' tienen por complementos los ángulos iguales que la tangente forma con los mismos radios.

II. La tangente MT es perpendicular en el punto medio de FF_1 .

III. La recta $F'F_1$ que une un foco con el punto simétrico del otro respecto a la tangente, pasa por el punto de contacto.

Teorema.

- 586.** El lugar geométrico del punto simétrico de un foco, con relación a una tangente cualquiera, es el círculo director descrito desde el otro foco.

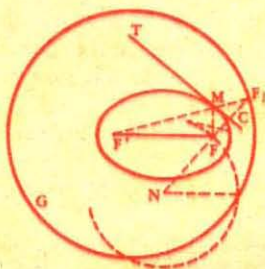


Fig. 429

Sea F_1 el punto simétrico del foco F , con relación a la tangente MT , la recta $F'F_1$ pasa por el punto de contacto (N° 585, III); y ya que la tangente es perpendicular en el punto medio de FF_1 , la recta

$$F'F_1 = MF' + MF = 2a.$$

Luego el punto F_1 , simétrico del foco F , está en el círculo director descrito desde el foco F' .

Problema.

- 587.** Trazar una tangente a la elipse en un punto de esta curva.

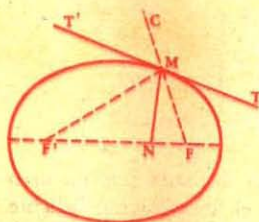


Fig. 430

Sea M un punto de la curva. Tracemos los radios vectores del punto de contacto; prolonguemos FM y tracemos la bisectriz del ángulo exterior $F'MC$. Esta bisectriz es tangente, pues los ángulos FMT y $F'MT'$ son iguales (N° 584).

588. Escolio. Para encontrar la normal en un punto M de la curva, basta trazar la bisectriz del ángulo FMF' de los radios vectores (N° 585, I).

Problema.

- 589.** Trazar una tangente a la elipse por un punto dado fuera de la curva.

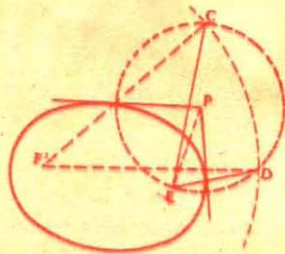


Fig. 431

Sea P el punto exterior dado, y CD el círculo director relativo al foco F' ; la circunferencia descrita con el radio PF corta al círculo director en los puntos C y D , unamos estos puntos con el foco F ; las perpendiculares levantadas en el punto medio de FC y de FD son tangentes (N° 585, II), y pasan por el punto P , centro de los arcos CF y FD ; las rectas $F'C$ y $F'D$ determinan los puntos de contacto (N° 585, III).

Teorema.

590. El área de la elipse es igual al producto de sus semi-ejes por el número constante π .

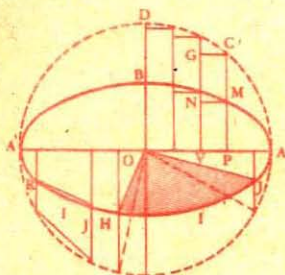


Fig. 432

Por medio de unos teoremas que no incluimos, se demuestra que la proyección de un círculo sobre un plano es una elipse:

Consideremos varias ordenadas equidistantes.

Por los puntos C y M tracemos paralelas a AA'.

La elipse es el límite de la suma de los rectángulos análogos a MPVN, y el círculo, el límite de la suma de

los rectángulos tales como CPVG. Pero, teniendo los dos rectángulos igual altura VP, serán entre sí como sus bases MP y CP, o sea $\frac{b}{a}$.

Lo mismo ocurre con los límites a que se aproximan las sumas de estos rectángulos.

Luego:

$$\frac{\text{elipse}}{\text{círculo}} = \frac{b}{a};$$

$$\text{elipse} = \text{círculo} \times \frac{b}{a} = \pi a^2 + \frac{b}{a} = \pi ab.$$

591. Corolarios I. Para valuar una área limitada por un arco de elipse, por ejemplo el sector OHIJ, se busca el área correspondiente en el círculo principal, esto es, el círculo descrito desde el centro de la elipse con a por radio, y se la multiplica por la relación $\frac{b}{a}$.

Así el área del sector elíptico será:

$$\frac{\pi R^2 n}{360} \frac{b}{a}.$$

II. La elipse πab es media proporcional entre los círculos πa^2 y πb^2 descritos sobre los ejes; pues

$$\sqrt{\pi a^2 \cdot \pi b^2} = \pi ab.$$

Problema.

592. Trazar una elipse por medio de las circunferencias descritas con los ejes por diámetros.

Se describen dos circunferencias concéntricas, cuyos diámetros sean respectivamente iguales a los ejes dados, se traza un radio cualquiera,

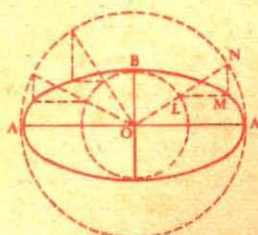


Fig. 433

los cuales unidos por medio de un trazo continuo darán la elipse pedida.

Problema.

593. Trazar una elipse por medio de una tira de papel.

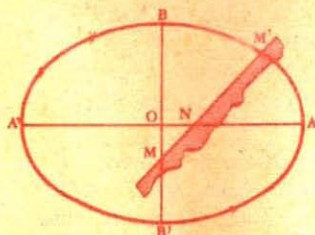


Fig. 434

Dados los ejes AA' y BB' , se toma sobre una tira de papel $MM' = OA$, y $NM' = OB$. Luego se aplica la tira de modo que el punto M permanezca siempre sobre BB' , y el punto N sobre AA' . El punto M' será un punto de la curva. De este modo pueden obtenerse cuantos puntos se quiera de la misma, los cuales unidos a pulso por medio de una línea continua, darán la elipse pedida.

CAPITULO II

PARABOLA

DEFINICIONES

594. *Parábola* es una curva plana y no cerrada, con una sola rama que se extiende indefinidamente, y en la cual cada punto equidista de un punto fijo y de una recta fija dados en su plano.

El punto fijo se llama *foco*, y la recta dada, *directriz*.

Llámanse *radio vector* la recta que une el foco con un punto cualquiera de la curva.

Sean F un punto fijo, y CD una recta fija; si, para cada punto de la curva MAM' , tenemos $MF = MC$, dicha curva es una *parábola*.

El punto A , mitad de la perpendicular FD , pertenece a la curva. La parábola no

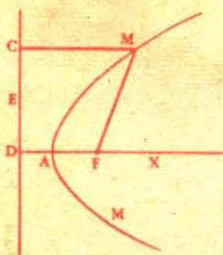


Fig. 435

puede extenderse al lado de la directriz opuesto al foco; pues todo punto E, tomado por este lado, está más cerca de la directriz que del foco.

La distancia FD del foco a la directriz se llama *parámetro* y se representa por p .

595. Construcción de la parábola. Para construir la parábola por un movimiento continuo, conociendo la directriz y el foco, se coloca el cartabón de modo que uno de los catetos coincida con la directriz; se fijan los extremos de un hilo, cuya longitud sea igual al otro cateto del cartabón, uno en el foco F, y el otro en el vértice G del cartabón.

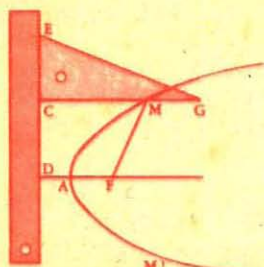


Fig. 436

Si se hace correr el cartabón a lo largo de la directriz, la púa con que se traza, que pondrá el hilo tirante al aplicarlo contra CG, describe una porción de la parábola, pues siempre tenemos:

$$MF = MC.$$

596. Trazar la parábola por medio de puntos, conociendo la directriz y el foco:

Desde el foco, bajemos la perpendicular FD a la directriz, y tomemos el punto medio A del parámetro FD; tracemos una recta cualquiera MM' paralela a la directriz, y desde el foco F como centro, con un radio igual a la distancia DG de la directriz a su paralela, describamos una circunferencia; los puntos de intersección de esta circunferencia con la recta MM' pertenecen a la parábola.

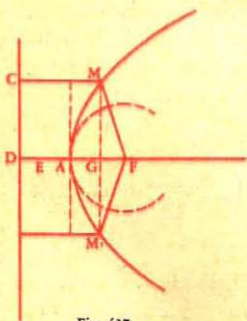


Fig. 437

directriz, y todo punto fuera de ella se aleja más de él.

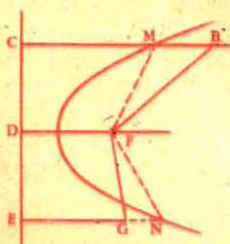


Fig. 438

(15) Teorema.

597. Todo punto dentro de la parábola se acerca más al foco que a la

1º Desde el punto interior B, tracemos BC perpendicular a la directriz, y unamos el foco con los puntos M y B.

Tenemos:

$$BF < BM + MF \text{ o } BF < BM + MC$$

o sea $BF < BC.$

2º Desde el punto exterior G, tracemos la perpendicular GE, y unamos el foco con los puntos N y G.

Tenemos: $GF > NF - NG$, o $GF > NE - NG$,
o sea $GF > GE$.

Luego *todo punto...*

598. **Escolio.** Según la distancia de un punto al foco sea menor o mayor que la distancia de este mismo punto a la directriz, o igual a ella, este punto estará dentro o fuera de la parábola, o pertenecerá a la curva; por lo tanto, *la parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta y de un punto dados.*

Teorema.

599. *La parábola tiene por eje la perpendicular bajada a la directriz desde el foco.*

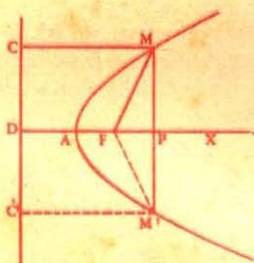


Fig. 439

Sea M un punto cualquiera de la parábola; bajemos la perpendicular MP, y tomemos $PM' = PM$.

Demostremos que M' , simétrico del punto dado, pertenece a la curva. Para ello, tracemos MF, MC, $M'F$, $M'C'$, distancias de los puntos M y M' al foco y a la directriz. Ya que DP es perpendicular a la directriz y a MM' , en su punto medio P, tenemos:

$$FM' = FM, M'C' = MC;$$

luego $M'F = M'C'$, y por lo tanto, el punto M' pertenece a la parábola (Nº 598).

Luego, la perpendicular FD es un eje (Nº 575).

600. **Escolio.** El punto A es el único vértice de la curva. La parábola no tiene centro.

Teorema.

601. *La tangente a la parábola forma ángulos iguales con el radio vector del punto de contacto y la paralela al eje trazada por este mismo punto.*

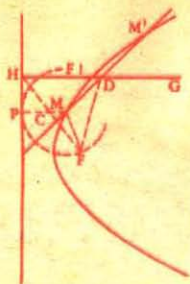


Fig. 440

Consideremos una secante cualquiera MM' ; desde el foco, bajemos la perpendicular FC, y tomemos $CF_1 = CF$; por el punto F_1 , tracemos una paralela al eje; esta paralela corta a la secante en el punto D; tracemos las rectas que indican las distancias de los puntos M y D al foco y a la directriz.

La circunferencia descrita desde el punto M, con el radio MF o MP, es tangente a la directriz en P, y encuentra a DH en el punto F_1 simétrico de F; luego este punto F_1 está situado entre la directriz y el foco; por lo tanto,

$$DF_1 < DH.$$

Las oblicuas DF y DF_1 son iguales; luego DF es menor que DH . El punto D se hallará dentro de la curva por estar más cerca del foco que de la directriz (Nº 598); y la paralela F_1D pasa siempre por entre los puntos de intersección M y M' ; además, los ángulos $M'DG$, MDF_1 , MDF son iguales, lo que ocurre por próximos que estén los puntos M y M' ; pero en el límite, cuando M' se confunde con M , la secante llega a ser tangente (Nº 576).

Luego, la tangente...

602. Corolarios. I. La normal MN es bisectriz del ángulo formado por el radio vector del punto de contacto y por la paralela al eje trazada por este mismo punto; pues los ángulos que forma con MF y MC tienen por complementos los ángulos iguales que forma la tangente con estas mismas líneas.

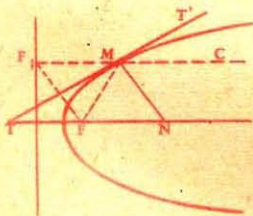


Fig. 441

II. La tangente en un punto M de la parábola es perpendicular en la mitad de la recta FF_1 que une el foco con la proyección del punto de contacto sobre la directriz; porque el triángulo FMF_1 tiene dos lados iguales, y la tangente es bisectriz del ángulo del vértice (Nº 601).

III. La paralela al eje, trazada por el punto F_1 simétrico del foco respecto a la tangente, pasa por el punto de contacto.

Teorema.

603. El lugar geométrico del punto simétrico del foco, respecto a una tangente cualquiera, es la directriz de la parábola.

Sea F_1 el punto simétrico de F respecto a la tangente MT ; la paralela al eje trazada por el punto F_1 pasa por el punto de contacto (Nº 602, III); ya que la tangente es perpendicular en el punto medio de FF_1 , la recta $MF' = MF$; luego el punto F_1 , simétrico del foco, está sobre la directriz.

Luego, el lugar...

Problema.

604. Por un punto dado en la curva, trazar una tangente a la parábola.

Sea M el punto dado en la curva. Proyectemos M sobre la directriz, unamos M con el foco, tracemos la bisectriz del ángulo FMF_1 ,

o levantemos una perpendicular en el punto medio de FF_1 .

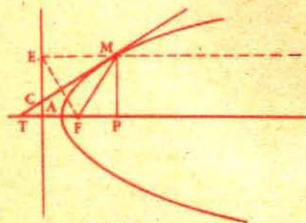


Fig. 443

Problema.

605. Por un punto dado fuera de la curva, trazar una tangente a la parábola.

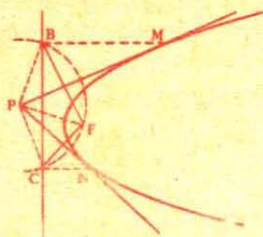


Fig. 444

Sea P el punto exterior dado; desde este punto como centro, y con PF por radio, describamos una circunferencia, la cual corta a la directriz en dos puntos. La perpendicular levantada en el punto medio de BF es tangente, y pasa por el punto P, centro del arco BF; la paralela al eje determina el punto de contacto M.

Hay otra tangente PN.

CAPITULO III

HIPERBOLA

DEFINICIONES

606. Hipérbola es una curva plana no cerrada, formada de dos ramas que se extienden al infinito y en sentido contrario, y tal que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos a dos puntos fijos situados en su plano es constante.

Los puntos fijos se llaman focos.

Llámanse *radios vectores* las rectas que unen un punto cualquiera de la curva con los dos focos.

Sean AA' una longitud constante, F, F' dos puntos fijos; si para cada punto M o N de la curva resulta:

$$MF' - MF = AA',$$

$$\text{o} \quad NF - NF' = AA'.$$

la curva es una hipérbola.

La *diferencia constante* AA' se representa por 2a.

La distancia FF' de los focos es la *distancia focal* y se representa por 2c.

Para que los triángulos MFF' y NFF' sean posibles, se debe tener $FF' > MF' - MF$ y $FF' > NF - NF'$, esto es, $2c > 2a$.

Llámanse *círculos directores* de la hipérbola los círculos descritos desde cada foco como centro, con 2a por radio.

La hipérbola tiene dos círculos directores.

607. Construcción de la hipérbola. Para *construir una hipérbola por un movimiento continuo*, conociendo los focos y 2a, se toma una regla, mayor que la distancia focal, y un hilo igual a la longitud de la regla, menos 2a; se fijan los extremos del hilo en C (sobre la regla) y en F. Puesto bien tirante el hilo a lo largo de la regla, y haciendo

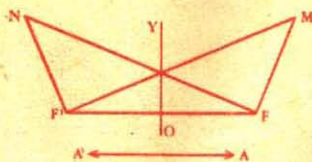


Fig. 445

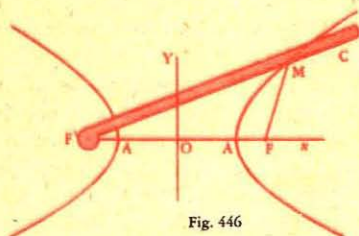


Fig. 446

608. Se puede trazar la hipérbola por puntos, conociendo los focos y $2a$. Desde el punto O, mitad de la distancia focal, tomemos:

$$OA = OA' = a.$$

Sea D un punto cualquiera de AA' , pero fuera de los focos; con los radios DA y DA' cuya diferencia es igual a $2a$, describamos dos circunferencias, la una desde el punto F por centro, y la otra desde el punto F' .

Los puntos de intersección pertenecen a la hipérbola.

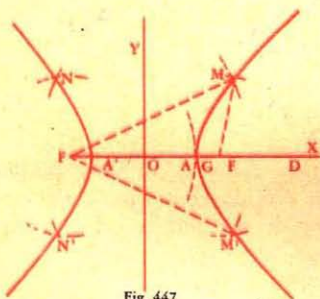


Fig. 447

Teorema.

609. Para cualquier punto interior de la hipérbola, la diferencia de las distancias a los focos es mayor que $2a$, y menor que $2a$ para cualquier punto exterior.

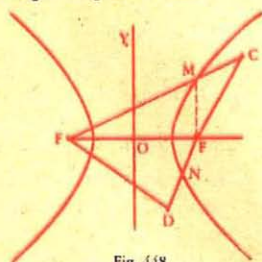


Fig. 448

Un punto es *interior* cuando se halla en una de las dos partes del plano donde están los focos, y *exterior* cuando está entre las dos partes separadas de la curva.

1º Unamos el punto interior C con los dos focos, y tracemos MF.

Tenemos: $CF < CM + MF$,

luego $CF' - CF > CF' - (CM + MF)$,

$$\text{o } CF' - CF > MF' - MF,$$

Luego $CF' - CF > 2a$.

2º Unamos el punto exterior D con los dos focos y tracemos $F'N$.

Tenemos: $F'D < NF' + ND$,

luego $F'D - DF < NF' + ND - DF$,

o $F'D - DF < NF' - NF$,

por lo tanto $F'D - DF < 2a$.

Luego, para cualquier punto...

Teorema.

610. La hipérbola tiene por ejes la recta que pasa por los focos, y la perpendicular levantada en el punto medio de la recta que une los mismos; su centro es el punto de intersección de los ejes.

Sea M un punto cualquiera de la hipérbola. Prolonguemos las perpendiculares MP y MV, y la recta MO; tomemos:

$$PM' = PM, VN = VM, ON' = OM;$$

M', N y N' son puntos simétricos de M con relación a AA', a BB' y al punto O, basta demostrar que estos puntos M', N y N' pertenecen a la curva.

1º FF' es perpendicular en el punto medio de MM'; luego

$$M'F = MF, \text{ y } M'F' = MF',$$

de donde

$$M'F' - M'F = MF' - MF = 2a;$$

luego M' es un punto de la hipérbola (Nº 606).



Fig. 449

2º Los trapecios rectángulos OFMV y OF'NV pueden superponerse por ser iguales sus bases; luego $NF' = MF$, y los ángulos en F y F' son iguales. Los triángulos FF'N y FF'M son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales; luego $NF = MF'$; y ya que $NF' = MF$, tenemos:

$NF - NF' = MF' - MF = 2a$,
luego N pertenece a la hipérbola.

3º Las rectas MN' y FF' se cortan en sus mitades, por lo tanto la figura MFN'F' es un paralelogramo, y la diferencia de dos lados adyacentes es igual a la diferencia de los otros dos lados; luego

$$N'F - N'F' = MF' - MF = 2a.$$

Luego AA' y la perpendicular YY' son los ejes, y su intersección es el centro de la curva.

611. Escolio. El eje FF' (fig. 449) se llama *eje transversal* porque encuentra a la curva en dos puntos AA'. Su longitud AA' es igual a la diferencia constante 2a.

El otro eje, que no encuentra a la curva, se llama *eje no transversal*; su longitud se representa por 2b; luego

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

La hipérbola tiene dos vértices: A y A'.

612. La *hipérbola equilátera* es aquella en que son iguales los dos ejes; en cuyo caso $c^2 = 2a^2$; y $c = a\sqrt{2}$.

Teorema.

613. *La tangente a la hipérbola es bisectriz del ángulo de los radios vectores en el punto de contacto.*

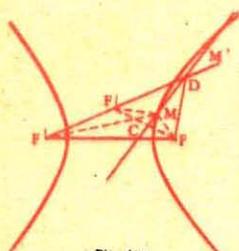


Fig. 450

1º Tenemos: $MF = MF_1$ y $DF_1 = DF$,
 luego $DF' - DF = F'F_1$.
 Pero $MF' - MF_1 = MF' - MF = 2a$,
 y $F'F_1 > F'M - MF_1$ o $2a$,
 luego $DF' - DF > 2a$.

Siendo mayor que $2a$ la diferencia de las distancias del punto D a los dos focos, el punto está en el interior de la hipérbola (Nº 607), y por lo tanto entre M y M' .

2º Los ángulos FDM y $F'DM'$ (fig. 450) son iguales por ser igual cada uno al ángulo MDF_1 .

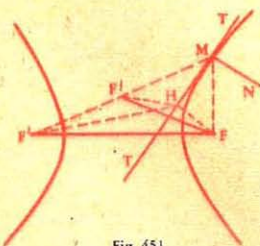


Fig. 451

Estos resultados se verifican para cualquier secante, y por lo tanto, por más próximos que estén los puntos M y M' , pero en el límite, cuando M' se confunde con M , la secante llega a ser tangente (Nº 576).

Luego, la tangente...

614. **Corolarios.** I. *La normal MN (fig. 451) es bisectriz del ángulo exterior formado por los radios vectores en el punto de contacto, pues es perpendicular a la bisectriz interior;*

II. *La tangente MT es perpendicular en el punto medio de FF_1 .*

III. *La recta $F'F_1$ que une un foco con el punto simétrico del otro respecto a la tangente, pasa por el punto de contacto.*

Teorema.

- 615.** El lugar geométrico del punto simétrico de un foco, respecto a una tangente cualquiera, es el círculo director descrito desde el otro foco.

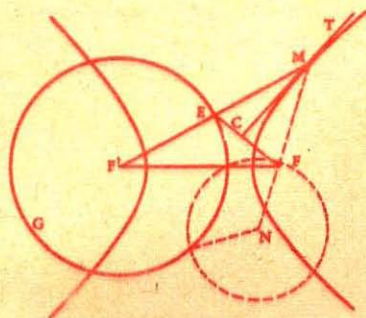


Fig. 452

Sea F_1 el punto simétrico del foco F respecto a la tangente MT . la recta $F'F_1$ pasa por el punto de contacto (N° 614, III), y ya que la tangente es perpendicular en el punto medio de FF_1 , tenemos:

$$F'F_1 = MF' - MF = 2a.$$

Luego el punto F_1 , simétrico del foco F , está en el círculo director descrito desde el foco F' .

ASINTOTAS DE LA HIPERBOLA

DEFINICIONES

- 616.** Llámense *asintotas* de la hipérbola las tangentes cuyo punto de contacto se encuentra indefinidamente lejos del vértice de la curva.

Teorema.

- 617.** La hipérbola tiene dos *asintotas*, y estas líneas pasan por el centro de la curva.

La recta FF_1 que une el foco F con un punto cualquiera F_1 del círculo director relativo a F' , puede llegar a ser tangente de este círculo, sea FG esta posición particular.

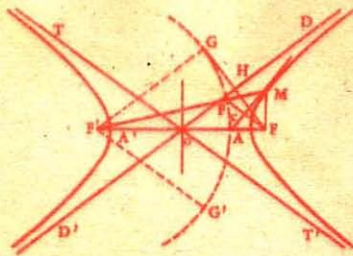


Fig. 453

La perpendicular HD , levantada en el punto medio de esta recta, es tangente a la hipérbola (N° 614, II); se determina el punto de contacto prolongando el radio $F'G$ (N° 614, III); pero las rectas HD y $F'G$, perpendiculares a FG , son paralelas entre sí; luego el punto de contacto se halla infinitamente

lejos del vértice A , y la línea HD es asíntota de la rama AM .

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

GEOMETRIA DEL ESPACIO

973. Para respirar como es debido, cada persona necesita 8 metros cúbicos de aire. Calcular la longitud de una sala que ha de dar cabida a 135 personas, si la altura es de 3 m. 75, y la anchura de 8 m. 694.

974. En un día de lluvia ha caído 1 milímetro de agua; ¿qué cantidad en litros podrá recogerse en un vaso cuya abertura es un cuadrado de 1 m. 25 de lado?

975. Un terreno de 84 áreas de superficie se cubre con una capa de mantillo de 25 centímetros de espesor. ¿Cuál sería el espesor si con la misma cantidad de mantillo se cubriera un terreno de 3 hectáreas y media?

976. ¿Cuántas pastillas de jabón de base cuadrada cuyo lado mide 13 centímetros, y 29 centímetros la altura, podrán caber en una caja cuyas dimensiones son las siguientes: 1 m. 17, 90 centímetros y 1 m. 04, debiendo reservar los $\frac{3}{25}$ del volumen de la caja para el embalaje?

977. Una pradera de forma trapecial tiene las dimensiones siguientes: base menor 125 m., altura 60 m.; los lados oblicuos tienen 65 y 75 m. Calcular: 1º el área de esta pradera, 2º el volumen del agua necesaria para inundarla con una capa de 10 centímetros de altura.

978. ¿Cuál es el área que se cubriría con el desarrollo de las caras de un cubo cuya arista mide 50 centímetros?

979. Un pozo tiene 12 m. 60 de profundidad y 84 centímetros de diámetro. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarlo un manantial que da 12 litros 50 por minuto?

980. En un vaso cilíndrico cuya base mide 2 dm², y que contiene agua, se echa una piedra cuyo volumen es de 3 decímetros cúbicos y que está enteramente sumergida. ¿Cuánto ha subido el nivel del agua?

981. Calcular la capacidad de un depósito cuya forma es la de un prisma octogonal regular, y que tiene 12 m. 34 de lado y 2 m. 25 de altura.

982. Se quiere construir una cisterna cúbica; ¿cuáles son las dimensiones que se le han de dar para que, llena hasta los $\frac{2}{3}$, pueda contener 677 hectolitros $\frac{1}{2}$ de agua?

983. ¿Cuál es el volumen de un cubo que tiene de superficie total 3 m² 1974?

984. Una pirámide de base cuadrada pesa 50 kilogramos. Calcúlese su altura, si un lado de la base tiene 25 centímetros; esta pirámide es de bronce, y un centímetro cúbico de este metal pesa 9 gramos.

985. Por un plano paralelo a la base se corta la pirámide SABC (fig. 1*) en el tercio de la arista a contar desde el vértice. ¿Cuál será el volumen del tronco de pirámide ABCDEF, si la pirámide deficiente SDEF, tiene 3 m. cúbicos?

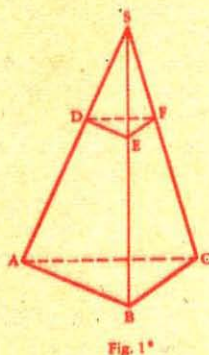


Fig. 1*

986. Un dique de granito descansa sobre una base rectangular de 64 m. de largo y 4 de ancho. Por un lado es vertical y su altura mide 5 m. y por el otro lado está en forma de plano inclinado, de modo que este dique tiene sólo 2 m. de ancho en la parte superior. Hallar su volumen.
987. ¿Cuál es la arista de un cubo equivalente a la suma de otros tres cuyas aristas tienen respectivamente 30, 40 y 50 centímetros?
988. En una caja cuya anchura es los $\frac{2}{3}$ de la longitud se echa agua hasta la altura de 28 centímetros; entonces la caja contiene 2.940 litros de agua. Calcular la longitud y la latitud.
989. Un paralelepípedo rectángulo mide de largo 2 m. 40, de ancho 1 m. 60, y de alto 1 m. 30. Hallar la longitud de cada una de sus diagonales.
990. Calcular el volumen de un tronco de prisma triangular cuyas aristas miden 33, 38 y 42 centímetros. Se sabe que una de las bases es perpendicular a las aristas y que tiene la forma de un triángulo equilátero de 13 centímetros de lado. Calcular también la superficie de la segunda base.
991. Se quiere construir un aljibe de 1.299 Hl. 375 de capacidad; este aljibe ha de tener la forma de un paralelepípedo cuyas dimensiones sean entre sí como los números 4, 7 y 11. Calcular estas dimensiones.
992. Hallar el valor de un tetraedro regular macizo de oro puro cuya arista mide 6 centímetros. Densidad del oro: 19,26; valor de un grano de oro puro: 3 pesetas 437.
993. ¿Cuál es en kgr. la presión atmosférica sobre una superficie octogonal regular de 3 centímetros de lado, cuando el barómetro marca 76 centímetros? Densidad del mercurio: 13,6.
994. ¿Cuál es el lado de un cubo equivalente a una pirámide que tiene por base un triángulo equilátero de 4 centímetros de lado y por altura la del triángulo equilátero que le sirve de base?
995. Un cartón cuya forma es la de un triángulo equilátero de 24 centímetros de lado se pliega en sus tres ángulos para obtener un tetraedro regular. Hallar el volumen de este tetraedro.
996. El lado de un tetraedro regular tiene 24 m. 96. Calcular su volumen y el radio de la esfera inscrita.
997. Una piedra que pesa 75 kgr. y cuya densidad es 2,50, tiene la forma de un prisma exagonal regular de 30 centímetros de altura.

Se le hace un hueco cilíndrico cuyo eje es el del prisma y cuyo diámetro es igual a los $\frac{2}{5}$ del lado del exágono de la base. Calcular este lado.

998. Se construye un pabellón cuya forma es la de un prisma exagonal de base regular, que remata en una pirámide regular cuya base es la base superior del prisma. Toda la superficie exterior del pabellón se ha pintado a razón de 2 pesetas el metro cuadrado. Se sabe: 1º que el gasto total por esta pintura es de 2.916 pesetas; 2º que la altura del prisma es el duplo del lado de la base; 3º que la altura de uno de los triángulos isósceles que forman las caras laterales de la pirámide es los $\frac{2}{3}$ de la altura del prisma. Calcular: 1º el lado de la base; 2º la altura del pabellón.

999. Con cartón se quiere hacer una cesta cuya forma es la de una pirámide truncada regular de bases paralelas. La base inferior es un pentágono regular inscrito en un círculo de 3 centímetros de radio; las caras laterales son trapecios iguales, en los cuales la base mayor mide 7 centímetros y la altura 35 milímetros.

Trazar la base y las caras laterales que se suponen desarrolladas en el papel, como si se tratara de hacer la cesta; calcular en milímetros cuadrados la superficie de cartón que se necesitará.

1000. Calcular el volumen de un tronco de pirámide regular de bases paralelas; la base inferior es un exágono de 80 centímetros de lado. El lado de la base superior mide 40 centímetros y la altura del tronco 12 centímetros.

1001. Un obelisco tiene la forma de un tronco de pirámide de base cuadrada. La base inferior tiene 1 m. 20 de lado, la superior 70 centímetros y la altura 15 metros. Este tronco remata en una pirámide regular cuyas caras laterales son triángulos equiláteros. Hallar el volumen del obelisco.

1002. Una barra de oro puro tiene la forma de una pirámide regular cuya base es un exágono regular de 5 centímetros de lado, y cuya superficie lateral es igual a 7 veces la de la base. Calcular la altura de la pirámide, su volumen, su peso, su valor. Densidad del oro: 19,36.

1003. La altura de una pirámide es de 5 m. 40, la base es un cuadrado de 2 m. 25 de lado. Paralelamente a la base se traza un plano que determina en la pirámide una sección de 3 m² 24. Hallar la distancia de esta sección a la base.

1004. El fondo de un foso es un rectángulo de 2 m. 10 de largo y 1 m. de ancho; la cara superior, también de forma rectangular, tiene 3 m. 15 de largo y 1 m. 50 de ancho. Calcular su capacidad en hectolitros si la altura mide 1 m. 50, y demostrar que este foso tiene la forma de un tronco de pirámide de bases paralelas.

1005. Dado un tronco de pirámide triangular cuyas bases tienen 10 m² 24 y 6 m² 25, y cuya altura es de 4 m. 20, hallar el volumen

de la pirámide formada por la base menor y la prolongación de las caras laterales del tronco.

1006. Calcular el peso de una barra de metal de 11,35 de densidad, si su forma es la de un cono recto cuyo lado tiene 36 centímetros y la circunferencia de la base 84 centímetros.

1007. Con oro se hace una pirámide cuadrangular regular cuya base tiene por radio 86 centímetros y cuyo apotema mide 5 m. 76. ¿Cuál es su peso si el oro tiene por densidad 19,25? ¿Cuál sería el radio de la base de un cono recto de 1 m. 86 de altura y cuyo volumen fuera el de la pirámide?

1008. Un cilindro de 45 centímetros de diámetro y de altura encierra un cono de platino de igual base y altura. Hallar: 1º el peso de este cono; 2º el peso del agua que acabaría de llenar el cilindro, si la densidad del platino es de 22.

1009. Un rectángulo ABCD (fig. 2*) girando alrededor de CB engendra un volumen ECDADF; el arco descrito desde el extremo A del lado DA es igual a $30^{\circ} 30'$; el lado CB del rectángulo tiene 5 m. y 3 m. el lado AB.

Hallar el volumen así engendrado.

1010. Con tafetán que pesa 250 gr. el m^2 se quiere hacer un globo esférico de 904 m. cúbicos 780 de capacidad. Hallar el peso del tafetán empleado.

1011. El peso de una esfera de cobre es de 26 kgr. 364; siendo de 8,788 la densidad del cobre, hallar la superficie de esta esfera.

1012. Un depósito semiesférico tiene 50 hectolitros de capacidad, calcular su diámetro interior.

1013. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es de 6 centímetros y uno de los ángulos agudos 60° , gira alrededor del lado opuesto al ángulo de 60° . ¿Cuál es el volumen engendrado, si el triángulo ha dado la vuelta completa?

1014. ¿Cuál es el volumen engendrado por la revolución completa de un triángulo equilátero alrededor de uno de sus lados, si el lado tiene 4 centímetros?

1015. Una cúpula semiesférica tiene 7 m. 50 de diámetro interior, y el espesor de la mampostería mide 50 centímetros. ¿Cuál es el precio: 1º de la mampostería, si cuesta 16 pesetas 60 el metro cúbico; 2º el precio de la pintura de la cúpula a razón de 6,40 pesetas el metro cuadrado?

1016. La arista de un cubo es de 36 centímetros. Calcular: 1º la superficie de la esfera circunscrita a éste; 2º su volumen; 3º su peso, si es de hierro. Densidad del hierro: 7,8.

1017. El radio de un círculo menor trazado en una esfera es de 53 milímetros; la distancia rectilínea de un punto de la circunferen-

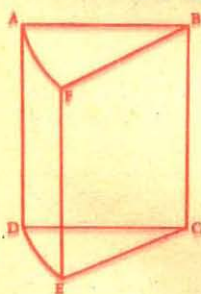


Fig. 2*

cia de este círculo a su polo mide 65 milímetros. Calcular el radio de la esfera.

1018. ¿Cuáles son las dimensiones del medio hectolitro de madera que se usa en el comercio?

1019. La circunferencia de la base de un cono recto tiene 3 m. 62 y las generatrices forman con el plano de la base un ángulo de 60° . Calcular el volumen y la superficie total del cono.

1020. Una esfera tiene 3 centímetros de radio; ¿a qué distancia del centro ha de trazarse un plano para que la sección que resulte sea $\frac{1}{3}$ de la superficie de un círculo máximo?

1021. Considerando la tierra como si fuera esférica, hallar en hectáreas la superficie de la zona comprendida entre los paralelos situados en el hemisferio norte, el uno a 45° y el otro a 30° de latitud.

1022. Al echar en un vaso lleno de agua 3 bolas metálicas cuyos diámetros son entre sí como los números 3, 5 y 7, se derraman 3 decilitros 96 de agua. Calcular el volumen de cada una de estas bolas y el diámetro de la menor.

1023. El cuerpo del areómetro de Nicholson está formado por un cilindro que termina en dos conos de igual base; su longitud total mide 20 centímetros y la altura de cada cono es el tercio de la del cilindro. Hallar el radio de la base del cilindro, sabiendo que el volumen total del cuerpo del areómetro es de 934 centímetros cúb. 437504.

1024. Una caldera está formada de un cilindro que remata en dos hemisferios del mismo radio que el cilindro. Determinar la longitud total de la caldera que debe tener 15 hectolitros de capacidad, si la razón de la longitud del cilindro a la del radio de las esferas es 4.

1025. La sección de un canal tiene la forma de un trapecio isósceles cuyas bases miden 3 m. 15 y 1 m. 46, y la altura 2 m. 58. Este canal está lleno hasta los $\frac{4}{5}$ de su altura, y la velocidad de la corriente es de 34 centímetros por segundo. Calcular el tiempo necesario para que el agua desviada llene un depósito que tiene la forma de un cono truncado de 6 m. 89 de profundidad, si los radios de las bases son de 25 y 16 metros.

1026. ¿Cómo ha de cortarse una hoja de papel para formar una pantalla que tenga 23 centímetros de diámetro por abertura superior, y 35 por abertura inferior, si su lado mide 18 centímetros?

1027. Las bases de un tronco de cono tienen 1 m. 25 y 86 centímetros de circunferencia, y la arista lateral 72 centímetros. Calcular el volumen y el área lateral de este tronco.

1028. Se funde una barra cilíndrica de 50 centímetros de longitud y 24 milímetros de diámetro para formar una esfera que ha de cubrirse con una capa de plata de 1 milímetro de espesor. Calcular el peso de esta capa, si la densidad de la plata es de 10,47.

1029. Un fuste de columna de 6 m. de altura está formado de un cilindro que remata en cono truncado cuya altura es el doble de

la del cilindro. El radio de la base superior del tronco es los $\frac{5}{6}$ del de la base inferior que es el del cilindro. Calcular el radio de la base del cilindro, siendo el volumen del fuste 4 m. cúbicos 177.

1030. La circunferencia externa de la sección recta de una caldera de cobre mide 3 m. 142. El largo de la parte cilíndrica es de 3 m. y el espesor, de 1 milímetro $\frac{1}{2}$; la parte cilíndrica termina en dos hemisferios cuyo radio es el de la caldera. Hallar el volumen y el peso si la densidad del cobre es de 8,85.

Se tomará $\pi = 3,142$.

1031. Dado un cono cuya altura mide 6 m., y 4 el radio de la base, se lo corta por medio de un plano paralelo a la base, a 2 m. del vértice. Calcular el área lateral y el volumen del tronco resultante.

1032. Sobre un plano se desarrolla la superficie convexa de un cono de 22 centímetros de altura y 490 centímetros cúbicos de volumen. Calcular el radio, el ángulo central y la superficie del sector circular que resulta.

1033. Hallar el volumen y la superficie total de un cono formado con un sector circular cuyo arco tiene 45° y el radio 25 centímetros.

1034. En un triángulo rectángulo los catetos tienen respectivamente 108 y 144 milímetros. ¿A qué altura desde la hipotenusa ha de trazarse una paralela a ella para obtener un trapecio de 972 milímetros cuadrados? Si se hace girar este triángulo alrededor de la hipotenusa, ¿cuáles serán el volumen y la superficie del sólido engendrado?

1035. Un vaso cilíndrico vertical, de un hectolitro de capacidad, tiene el diámetro igual a la altura y está lleno de agua hasta la mitad. Se echa en él una esfera de plomo que pesa 200 kgr. Calcular: 1º cuántos centímetros subirá el nivel del agua; 2º a qué distancia del nivel se hallará el punto más alto de la esfera si la densidad del plomo es de 11,30.

1036. Un semi-exágono regular de 2 m. 35 de lado gira alrededor del diámetro del círculo circunscrito. Hallar el radio de la esfera que tenga una superficie equivalente a la engendrada por el perímetro del semi-exágono.

1037. Un cono de plomo cuyo lado es igual al diámetro de la base pesa 10 kgr. Calcular las dimensiones de este cono, su superficie lateral y total, el peso del plomo que se le ha de quitar para reducirlo a la esfera que le está inscrita, y el radio de la esfera que se haría con el plomo quitado.

1038. El peso de un cubo de plomo es de 3 kgr. Hallar el peso del plomo que se le ha de quitar para transformarlo en un cilindro de base circular tan grande como se pueda.

1039. Se pinta interior y exteriormente una cuba de madera cuya forma es la de un tronco de cono. La base superior tiene 1 m. 70 de diámetro interior. El lado que tiene 1 m. 10 sería $\frac{1}{4}$ de la arista total del cono si se la prolongara hasta el vértice. ¿Cuál es el importe del

trabajo a razón de 0,75 pta. el metro cuadrado? Se supone que la superficie exterior es igual a la interior.

1040. Un crisol que tiene la forma de un cono truncado de 4 centímetros de diámetro en el fondo, 7 en el borde superior y 10 de altura está lleno de un metal fundido que se quiere colar en un molde esférico. ¿Cuál ha de ser el radio de este molde para que el metal lo llene exactamente?

1041. En un molde cuya forma es la de un cono equilátero se vierten 1360 kgr. de hierro fundido que lo llenan hasta los $\frac{2}{3}$ de la altura a contar desde la base. ¿Cuál es el radio de la base de este cono? Densidad del hierro colado: 7,2.

1042. Un vaso tiene la forma de un cono truncado de 90 centímetros de altura; el fondo tiene 30 centímetros de diámetro, y la abertura 45 centímetros. El vaso contiene, hasta los $\frac{2}{3}$ de la altura, pólvora para bombas esféricas de 10 centímetros de diámetro interior. ¿Cuántas bombas se podrán llenar?

1043. Se quiere cortar un cartón para hacer una pantalla en forma de un tronco de cono en el que las circunferencias de las bases tengan 1 m. 005 y 189 milímetros y el lado 18 centímetros. Si se desarrolla esta pantalla, ¿cuál es el valor del ángulo central del sector que resultará, y la longitud del radio que termine en el arco mayor?

1044. En un crisol de forma de cono truncado que tiene 30 milímetros de diámetro en el fondo, 60 en la abertura y 80 de altura, hay acero fundido cuya superficie mide 50 milímetros de diámetro. ¿Cuál ha de ser el radio del molde en que ha de colarse todo este acero para hacer una bala de cañón?

1045. Un vaso tiene la forma de un cono circular recto cuyo ángulo en el vértice mide 60° . En este vaso se vierten 345 gr. de mercurio. Calcular la altura a que llegará el mercurio. Densidad del mercurio: 13,59.

1046. Un cono de plomo cuya altura es igual al diámetro de la base pesa 2 kgr. y se corta en dos partes de igual altura, por medio de un plano paralelo a la base. El tronco de cono así obtenido se funde para darle: 1º forma esférica; 2º forma de un cilindro de diámetro igual a la altura. Calcular la superficie de esta esfera y la superficie total del cilindro. Densidad del plomo: 11,3.

1047. Un sector circular ACR (fig. 3*), cuyo arco tiene 60° , gira alrededor del radio CA; ¿cuál será el volumen engendrado si el radio del círculo a que pertenece este sector mide 3 centímetros?

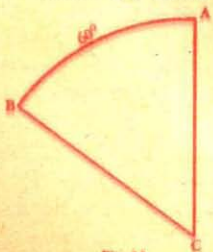


Fig. 3*

1048. La longitud de un cateto de un triángulo rectángulo mide 28 m. Sabiendo que la suma de los otros dos lados es igual al duplo del primero, calcular la arista del cubo equivalente al cono engendrado por este triángulo girando alrededor del lado conocido.

1049. Un vaso cuya forma es la de un tronco de cono contiene agua. El radio de la base inferior mide 60 centímetros; la superficie del agua tiene 80 centímetros de radio, y su profundidad 2 m. 50. En este vaso se echa un cubo de mármol cuyo lado mide 60 centímetros. ¿A qué altura subirá el agua?

1050. Se tiene un tronco de cono en el que la esfera tangente a sus bases lo es también a la superficie lateral. Hallar su volumen, si las bases tienen 16 y 36 centímetros de radio.

1051. En un semicírculo de hierro batido se juntan borde con borde las dos mitades del diámetro para formar un cono recto de base circular, y de un litro de capacidad. Calcular el radio del semicírculo.

1052. A una esfera metálica de 9 centímetros de radio se la somete al dorado galvánico; después de algún tiempo de inmersión su peso ha aumentado con 12 gr. Hallar el espesor de la capa de oro si la densidad de este metal es de 19,26.

1053. ¿Cuál ha de ser el espesor que tendrá una esfera de cobre hueca para mantenerse en equilibrio en el agua de modo que el nivel del líquido se halle a la altura del centro? El diámetro exterior de la esfera tiene 20 centímetros y la densidad del cobre es de 8,8.

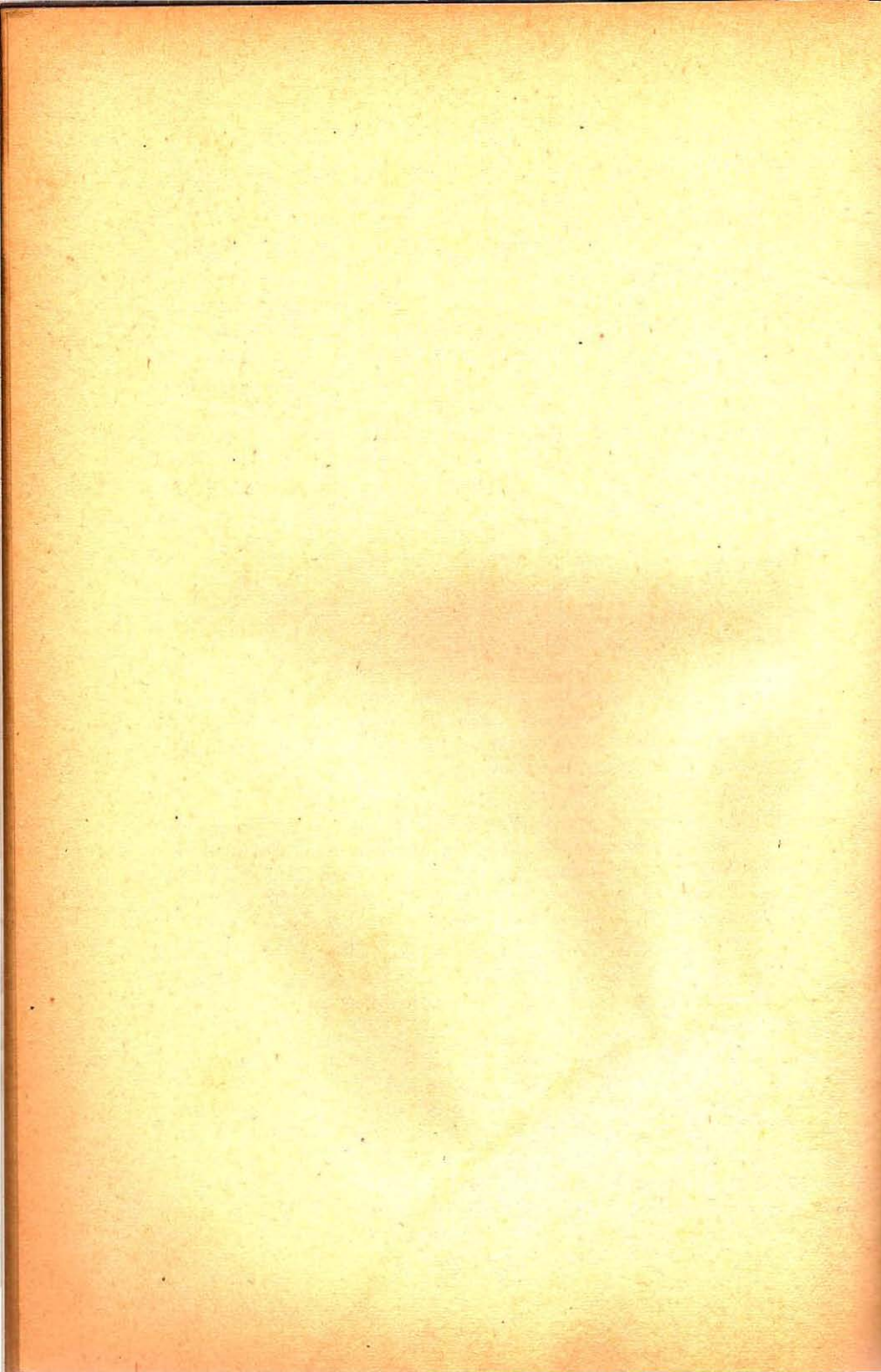
1054. Un cono circular de madera tiene por radio de la base 40 centímetros y pesa 100 kgr.; por medio de una sección paralela a la base se lo corta en dos partes de igual altura. Calcular los pesos, los volúmenes y las superficies laterales de las dos partes así obtenidas; densidad de la madera: 0,6.

1055. En un vaso de forma cónica, lleno de agua hasta los $\frac{3}{4}$ de su altura a contar desde el fondo, se vierte mercurio hasta que se llene con el agua contenida. Calcular el espesor y los pesos de las dos capas líquidas superpuestas, suponiendo que el vaso tenga 15 centímetros de profundidad y 6 de abertura. Densidad del mercurio: 13,59.

1056. Un aeronauta ha alcanzado la altura de 10 kilómetros; calcular la parte de la superficie terrestre que puede divisar desde esa altura, suponiendo que la tierra es esférica y que su radio es de 6.366 kilómetros.

1057. Demostrar que si se tiene un cilindro y un cono equilátero circunscritos a una esfera: 1º la superficie total del cilindro es una media geométrica entre las de la esfera y del cono; 2º el volumen del cilindro es también una media geométrica entre los volúmenes de la esfera y del cono.

1058. El estanque del Retiro de Madrid, cuya forma es la de un paralelepípedo rectángulo, tiene 330 m. de longitud, 145 m. de latitud y 4 m. de profundidad. Calcular su capacidad en metros cúbicos.



NOCIONES DE AGRIMENSURA Y NIVELACION

SECCION I AGRIMENSURA CAPITULO I

INSTRUMENTOS TOPOGRAFICOS

1. Agrimensura es el arte de medir la superficie de un terreno.
2. En agrimensura se suelen emplear los instrumentos siguientes: los *jalones*, la *cadena de agrimensor*, las *agujas*, la *escuadra de agrimensor*.

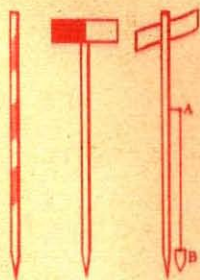


Fig. 1

3. **Jalones.** Los jalones (fig. 1) son listones o estacas de madera, de 1 metro 50, a 2 metros de largo y de 3 a 4 centímetros de grueso, pintados de blanco y encarnado, que a veces llevan en la parte superior una tablilla pintada de colores, o una banderola que permita verlos a grandes distancias. Los jalones tienen por contera un regatón de hierro para poderlos clavar en el suelo.

Los jalones han de clavarse verticalmente, y al efecto el agrimensor puede utilizar la plomada (fig. 1, AB).

4. **Cadena de agrimensor.** La cadena de agrimensor (fig. 2), llamada también *decámetro*, consta de cincuenta eslabones de alambre no muy grueso, unidos por medio de anillas circulares.

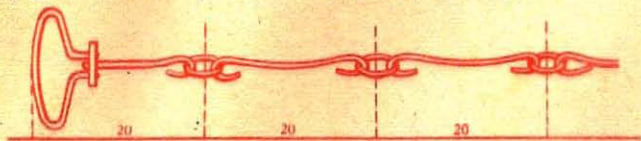


Fig. 2

Un eslabón y la mitad de las dos anillas adyacentes tienen 20 centímetros de longitud. La cadena termina en ambos extremos por agarraderas, dispuestas de manera que la distancia desde su extremo hasta el centro de la primera anilla sea de 20 centímetros. De cinco en cinco eslabones las anillas son de latón para que se distingan los metros. El medio de la cadena se señala con un medio eslabón que pende de la anilla correspondiente.

CAPITULO II

ALINEACIONES

12. Llámase *alineación* de dos puntos a la intersección de la superficie del terreno con el plano vertical que pasa por esos puntos.

En la práctica, una alineación recibe el nombre de *línea recta*.

La dirección de una alineación se indica por medio de jalones.

§ I. — Trazado de alineaciones.

13. **Problema.** *Trazar la alineación de dos puntos A y B.*

En los puntos dados A y B (fig. 14) se clavan, lo más verticalmente que se pueda, dos jalones o banderolas. Luego el agrimensor

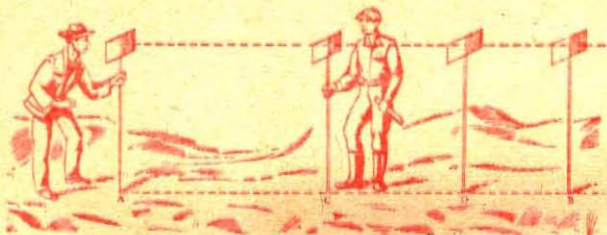


Fig. 14

se coloca tras el jalón A, y mirando en la dirección AB, hace clavar por su ayudante o peón uno o varios jalones intermedios C, D, de modo que la visual AB pase por dichos jalones; con lo cual se hallarán éstos en el plano vertical que pasa por A y B.

14. **NOTA I.** Plantado el jalón intermedio C, el ayudante puede con facilidad colocar otro intermedio D, poniéndose en la dirección AC, de modo que el jalón D oculte los jalones ya colocados.

15. **NOTA II.** Si el agrimensor está solo, tiene que fijar primero los jalones A y B (fig. 15); luego coloca el jalón C entre los dos pri-



Fig. 15

meros y vuelve al jalón A para ver si el C sigue la dirección AB. Uno o dos tanteos bastarán para hallar la verdadera posición del jalón C, y entonces el agrimensor procederá como queda indicado más arriba.

16. **Problema.** *Prolongar una alineación en terreno accesible.* Para prolongar la alineación AB (fig. 16), basta ir colocando sucesivamente los jalones C, D, E en la misma alineación.

17. Problema. Con auxilio de la escuadra, trazar una alineación determinada por dos puntos A y D (fig. 17).



Fig. 16

Se coloca primero la escuadra en el punto A, y un jalón en el punto D; luego se dirige hacia D una de las visuales y el agrimensor dispone que el peón clave sucesivamente, y en la misma visual, los jalones B y C.

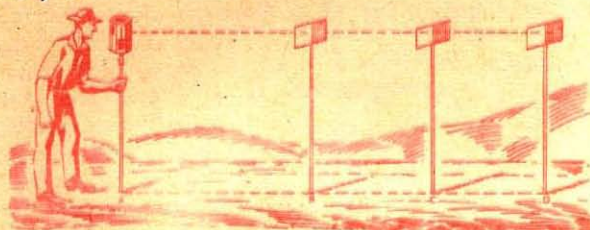


Fig. 17

18. Problema. Con ayuda de la escuadra colocar un jalón intermedio E en la alineación determinada por otros dos A y B (fig. 18).



Fig. 18

El agrimensor puede colocarlo sin necesidad de auxiliar; para lo cual basta con que, después de colocada verticalmente la escuadra en un punto E, que supone estar en la alineación AB, dirija una visual al jalón A, y luego mire desde el lado opuesto de la escuadra, sin modificar su posición, para ver si la misma visual pasa por el jalón B. Si así no ocurre, cambia la posición del aparato; uno o dos tanteos bastan, por lo común, para hallar la posición del jalón.

19. Problema. Por medio de la escuadra, prolongar una alineación.

Sea AB (fig. 17) la alineación que se ha de prolongar. Se coloca la escuadra en B y se dirige una visual hacia A; luego el agrimensor mira por el lado opuesto del instrumento sin modificar su primera posición, y manda se coloquen sucesivamente los jalones C, D, etc.

20. Problema. Trazar, por medio de la escuadra, una alineación entre los puntos A y B separados por un obstáculo (fig. 19).



Fig. 19

Se coloca verticalmente la escuadra en un punto D, desde el cual se puedan ver los jalones plantados en A y en B; luego se procede como en el N^o 18.

21. Problema. Prolongar una alineación interceptada por algún obstáculo.

1er. Procedimiento. Sea AB la alineación que se quiere prolongar (fig. 20). En el punto B se levanta la perpendicular BE, y a ésta, otra perpendicular EF. Por el punto F se traza CF perpendicular a EF e igual a BE, y por último la línea CD perpendicular a CF, la cual estará en la alineación pedida.



Fig. 20

línea CD perpendicular a CF, la cual estará en la alineación pedida.

22. 2^o Procedimiento. Por el punto A (fig. 21) se traza una recta cualquiera AH, y a esta recta se levantan las perpendiculares EB, FC, HD; la primera pasa por el punto B de la alineación dada,



y las otras, más allá del obstáculo. Se miden las distancias AE, AF, AH, BE, y se calculan CF y DH, por medio de las proporciones siguientes que resultan de la semejanza de los triángulos ABE, ACF, ADH.

$$\frac{CF}{BE} = \frac{AF}{AE}; \quad CF = \frac{BE \times AF}{AE} = \frac{24 \times 108}{36} = 72 \text{ m.}$$

$$\frac{DH}{BE} = \frac{AH}{AE}; \quad DH = \frac{BE \times AH}{AE} = \frac{24 \times 144}{36} = 96 \text{ m.}$$

Basta tomar $FC = 72 \text{ m.}$ y $HD = 96 \text{ m.}$ y los puntos C y D estarán en la prolongación de la alineación AB.

23. Problema. Hallar la intersección de dos alineaciones CD y AB (fig. 22).

El ayudante camina en dirección de la alineación CD, y el agrimensor, colocado en A, le manda adelantar o atrasar hasta que esté en la alineación AB.

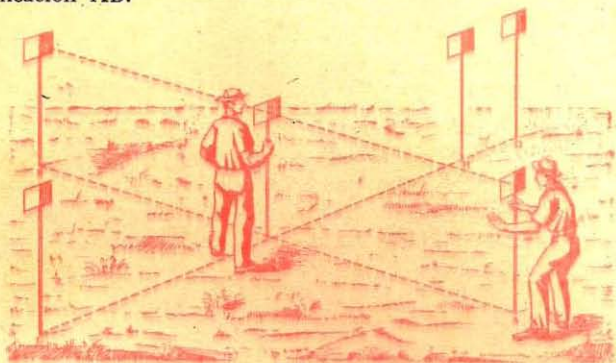


Fig. 22

§ II. — Medida de las distancias.

24. Problema. Medir en el terreno una distancia horizontal (fig. 23).



Fig. 23

Primero se jalona la recta, para que sea más fácil mantenerse en la alineación. Luego el agrimensor se coloca en uno de los extremos de la alineación y apoya junto al jalón A la agarradera que tiene en

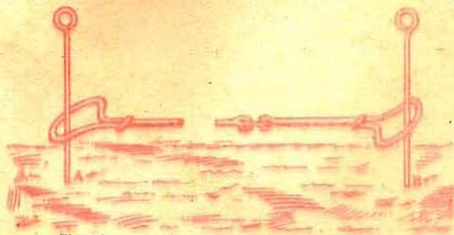


Fig. 24

la mano izquierda. El peón, tomando la segunda agarradera también en la mano izquierda y las agujas en la derecha, anda en la direc-

ción de B hasta que la cadena esté bien tendida, entonces clava en el suelo una aguja de modo que enrase con el extremo de la agarradera.



Fig. 25

Luego los operadores levantan la cadena y andan en la dirección de B. Al llegar a la aguja clavada por el ayudante, el agrimensor coloca la agarradera de modo que enrase con ella, como lo indica la fig. 24.

El peón sigue andando hasta que la cadena esté bien tendida; entonces clava una segunda aguja, y así sucesivamente.



Fig. 26

Al dejar una estación, el agrimensor recoge la aguja en la mano derecha, cuando tiene diez de ellas se las devuelve al ayudante, apunta diez decámetros y sigue la operación.

25. Base productiva. Llámase base productiva de un terreno a la proyección de este terreno sobre un plano horizontal¹. En la fig. 25, CB es la base productiva de AB. Se supone que esta base produce tanto como el terreno: según esto, se suele medir el área reducida a su proyección horizontal, como lo indica la fig. 26, y no el área del terreno inclinado, puesto que, si bien éste es mayor que su proyección horizontal, no produce por eso mayor cantidad de plantas, ni en él se puede construir un edificio de mayor extensión.

¹ La proyección de un punto M (fig. 27) sobre un plano horizontal es el pie m de la perpendicular bajada desde dicho punto a ese plano.

La proyección de una recta AB (fig. 27) es la recta ab situada en el

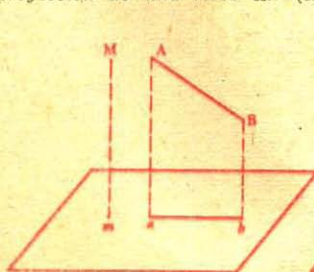


Fig. 27

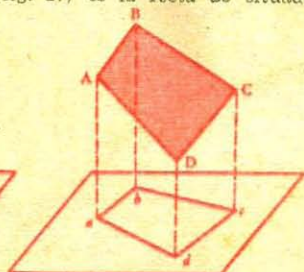


Fig. 28

plano y determinada por las dos perpendiculares bajadas desde los extremos de la recta.

La proyección de un polígono ABCD (fig. 28) es la figura abcd que se obtiene al bajar, sobre el plano, perpendiculares desde los vértices del polígono.

§ III. — Trazado de perpendiculares.

26. Problema. Por un punto C, dado en una alineación AB (fig. 29), levantar una perpendicular a la misma.

Se coloca la escuadra en el punto C de modo que una visual coincida con la recta AB; se mira después por la visual perpendicular

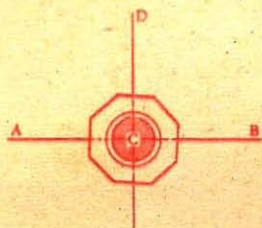


Fig. 29

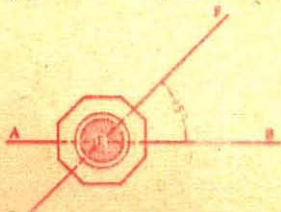


Fig. 30

a la primera y se planta un jalón en D, con lo cual los puntos C y D pertenecerán a la perpendicular pedida.

De modo análogo se obtiene el ángulo de 45° (fig. 30).

27. Problema. A una alineación AB trazar una perpendicular que pase por un punto exterior D (fig. 31).

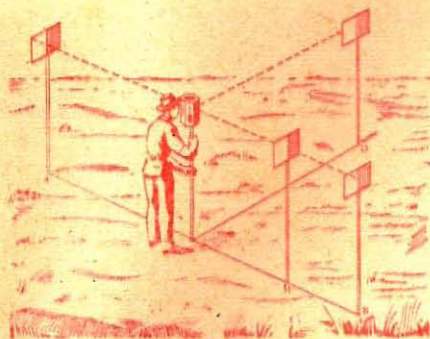


Fig. 31

El observador camina con la escuadra, siguiendo la dirección AB hasta encontrar, por tanteos, un punto C tal que una visual coincida con la recta AB, y la otra pase por el punto D. El punto C será el pie de la perpendicular pedida.

NOTA. Un jalón intermedio H facilitará al observador el permanecer en la alineación AB (fig. 31).

28. Problema. Por medio de la cadena levantar una perpendicular a una alineación.

Para levantar una perpendicular a AB en el punto A, se mide una longitud $AB = 3$ metros. En A se fija un extremo de la cadena, y en B el extremo del noveno metro. Luego se toma en la cadena

AC = 4 m., BC = 5 m., y en el punto C se estiran las dos partes de la cadena hasta que AC y BC estén bien tirantes.

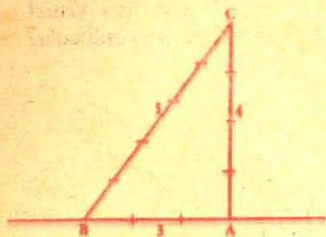


Fig. 32

Entonces, AC será perpendicular a AB, porque

$$\overline{BC^2} = \overline{AC^2} + \overline{AB^2}$$

o sea $5^2 = 4^2 + 3^2$
 $25 = 16 + 9.$

De donde se infiere que el triángulo ABC es rectángulo.

Este procedimiento es de poca precisión y no debe emplearse sino cuando no se tiene a mano la escuadra.

CAPITULO III

MEDIDA DEL AREA DE LOS TERRENOS

§ I. — Nociones preliminares.

29. Medir un terreno es calcular su área.

Antes de medir un terreno, conviene fijarse en sus límites, trazar un croquis y plantar algunos jalones en los vértices de sus ángulos. Este trabajo preliminar facilita la elección del procedimiento que conviene emplear para medirlo.

30. Los límites de un terreno pueden ser *naturales* o *convencionales*.

Los límites *naturales* son los ríos, los caminos públicos, las zanjas, etc.

Los límites *convencionales* son las líneas que unen los mojones entre sí.

31. Los *mojones* (fig. 33) son piedras de 50 a 60 centímetros de altura, enclavadas en el suelo de trecho en trecho y que indican el perímetro de una propiedad. Entre dos mojones consecutivos el perímetro se considera recto.



Fig. 33

Para distinguir un mojón de cualquier otra piedra que se encuentre en el perímetro, se suele labrar una cruz en su parte superior; en algunos países se pone en la base del mojón dos mitades de una misma piedra, que reciben el nombre de *testigos del mojón* (fig. 33).

32. *Croquis*. Llámase *croquis* o borrador al dibujo aproximado del perímetro del terreno que ha de medirse.

El croquis de que hablamos más arriba se completa con los resultados de todas las observaciones y cuantos datos puedan contribuir a la mayor perfección del plano.

33. Varios procedimientos para valuar el área de los terrenos.

1º Por medio de la cadena;

2º Por medio de la cadena y de la escuadra.

§ II. — Con sólo la cadena.

34. Para valuar el área de un terreno con la cadena, se descompone dicho terreno en triángulos y se busca separadamente el área de cada uno de ellos.

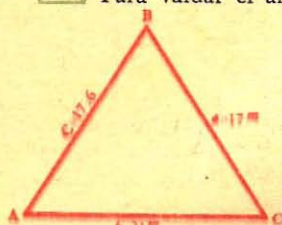


Fig. 34

35. Medida de un terreno triangular ABC (fig. 34).

Se miden los tres lados y se halla su área con la fórmula:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(Véase Geometría, N° 389).

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{17 + 21 + 17,6}{2} = 27 \text{ m, } 80$$

$$(p-a) = 27,8 - 17 = 10,80$$

$$(p-b) = 27,8 - 21 = 6,80$$

$$(p-c) = 27,8 - 17,6 = 10,20$$

$$A = \sqrt{27,8 \times 10,8 \times 6,8 \times 10,20} = 144 \text{ m}^2, 30.$$

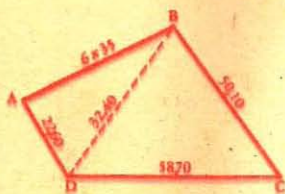


Fig. 35

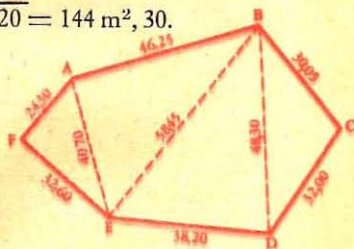


Fig. 36

36. Medida de un terreno cuadrangular ABCD (fig. 35).

Primero se jalona la diagonal BD; luego se mide esta diagonal y los lados del polígono.

$$\text{Triángulo ABD} = \sqrt{61,675 \times 13,35 \times 9,3 \times 39,10} = 547 \text{ m}^2, 17$$

$$\text{" BCD} = \sqrt{80,6 \times 28,2 \times 30,5 \times 21,9} = 1232 \text{ m}^2, 20$$

$$\text{Area total} = 1779 \text{ m}^2, 37$$

37. Medida de un terreno poligonal cualquiera (fig. 36).

Se trazan primero las diagonales AE, BE y BD; luego se miden los lados y las diagonales, y se procede como en el problema anterior.

§ III. — Con la cadena y la escuadra.

38. Medida de un terreno triangular (fig. 37).

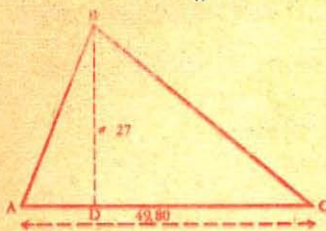


Fig. 37

Con ayuda de la escuadra se determina la altura BD del triángulo ABC; luego con la cadena se mide esta altura y el lado AC; por último se aplica la fórmula del área del triángulo

$$A = \frac{ba}{2} = \frac{49,8 \times 27}{2} = 672 \text{ m}^2, 30.$$

39. Medida de un terreno poligonal.

1er. Procedimiento. Por triangulación. Este procedimiento consiste en descomponer la superficie del terreno en triángulos (fig. 38), cuya área se busca luego, como queda dicho, N° 38.

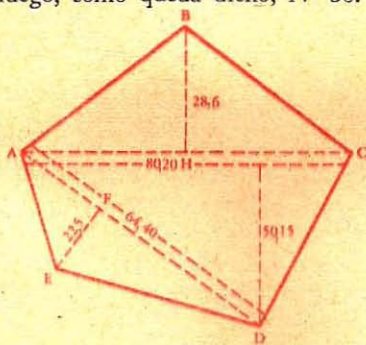


Fig. 38

$$\begin{aligned} \text{Triángulo ABC} &= \frac{80,2 \times 28,6}{2} = 1146,86 \\ \text{" ACD} &= \frac{80,2 \times 50,15}{2} = 2011,01 \\ \text{" ADE} &= \frac{64,40 \times 22,50}{2} = 724,50 \end{aligned}$$

$$\text{Área total} = 3882 \text{ m}^2, 37$$

40. 2º Procedimiento. Por descomposición en triángulos y trapecios rectángulos.

En este procedimiento, llamado de *alineación o directriz*¹, se descompone el terreno poligonal en trapecios y triángulos rectángulos, valiéndose de una o varias directrices.

¹ La *directriz* es la alineación sobre la cual se levantan perpendiculares que pasan por los vértices del polígono; estas perpendiculares se llaman *ordenadas*.

Se elige la directriz de modo que, siguiendo su dirección, el observador pueda ver todos los jalones plantados en los vértices del polígono. Conviene dirigirla en sentido de la mayor dimensión del terreno a fin de que las ordenadas sean lo más cortas posible.

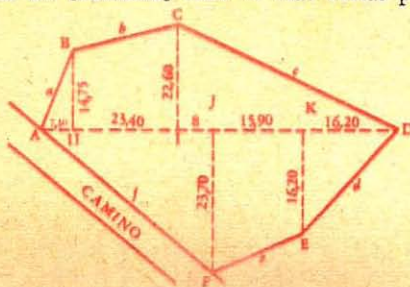


Fig. 39.

Sea ABCDEF (fig. 39) el terreno que se ha de medir. Se toma AD por directriz, se la jalona, y se levantan perpendiculares que pasen por los vértices. Luego se miden las ordenadas y las longitudes AH, HI, etc.

Los resultados se anotan inmediatamente en el croquis preparado al efecto, para hacer luego los cálculos.

TABLA DE LOS CALCULOS

FIGURAS	ALTURAS	BASES	AREAS
Triángulo <i>a</i>	7,3	14,75	53,84
Trapezio <i>b</i>	23,4	$\frac{14,75 + 22,6}{2}$	436,99
Triángulo <i>c</i>	40,1	$\frac{22,6}{2}$	453,13
Triángulo <i>d</i>	16,2	$\frac{16,2}{2}$	131,22
Trapezio <i>e</i>	15,9	$\frac{16,2 + 23,7}{2}$	317,21
Triángulo <i>f</i>	38,7	$\frac{23,7}{2}$	458,59
		Area total	1850 m ² , 98

41. Caso particular. A veces es difícil elegir como directriz una diagonal del terreno; en este caso una o varias ordenadas pueden caer fuera del polígono, como ocurre con BM en la figura 40.

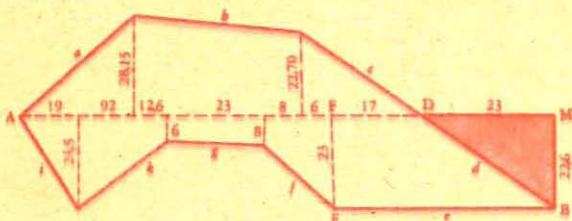


Fig. 40

Para obtener el área de este terreno se opera como más arriba queda indicado, pero calculada el área del trapecio BMFE, se le resta la del triángulo BMD.

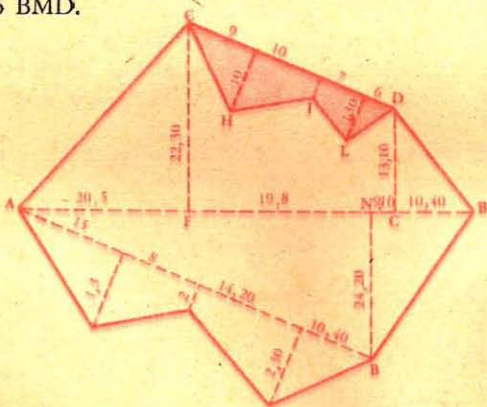


Fig. 41

Es ventajoso servirse de directrices secundarias para evitar ordenadas demasiado largas. En la fig. 41 empleamos las dos directrices auxiliares CD y AE.

Para hallar el área del terreno, se resta del trapecio CDGF el área de CDLIH.

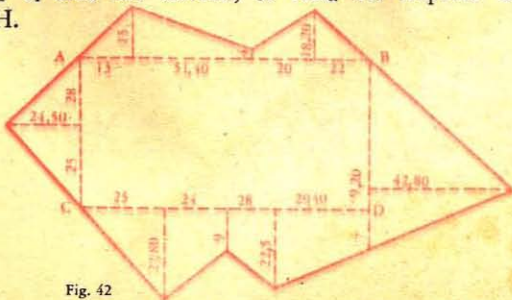


Fig. 42

42. 3er. procedimiento. *Por polígonos inscritos y circunscritos.*

1º *Por polígonos inscritos.* Para elegir el polígono, el agrimensor ha de tener en cuenta la configuración del terreno.

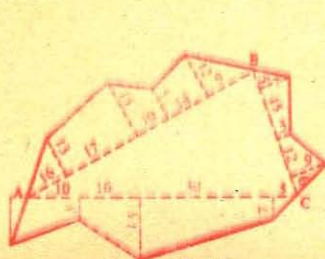


Fig. 43

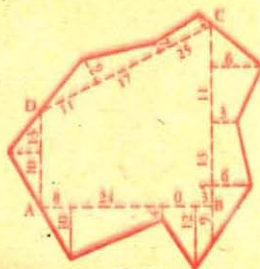


Fig. 44

Los polígonos que se suelen inscribir son: el rectángulo (fig. 42), el triángulo (fig. 43), el trapecio rectángulo (fig. 44).

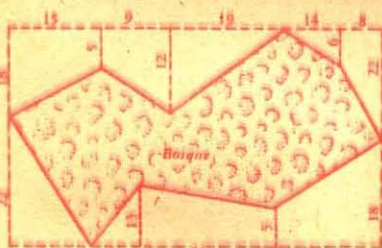


Fig. 45

2º *Por polígonos circunscritos.*

Se emplea este procedimiento si no se puede entrar fácilmente en el terreno, como por ejemplo en un bosque (fig. 45); en este caso se determina el rectángulo ABCD, u otro polígono cualquiera, cuyos lados se miden con exactitud. Luego, desde los vértices de los ángulos del terreno se bajan perpendiculares a estos lados. Por último se

calcula el área del rectángulo y la suma de las áreas de los triángulos y trapecios exteriores; de la diferencia de ambos resultados se obtendrá el área del bosque.

§ IV. — Medida de terrenos limitados por curvas.

43. Si el terreno linda con algún camino o río (fig. 46), la línea que lo limita por esta parte es de ordinario curva; en este caso se colocan jalones en todas las sinuosidades de los lados curvilíneos y se bajan perpendiculares a AB, a AF, a FR. Así el terreno resulta dividido en triángulos y trapecios rectángulos.

Se colocarán tantos jalones cuantos requiera el contorno, para que el límite entre dos jalones consecutivos pueda considerarse como si fuera recto.

CAPITULO IV

LEVANTAMIENTO DE PLANOS

§ I. — Nociones preliminares.

44. Las operaciones que constituyen el levantamiento de un plano son:

1º Tomar las medidas en el terreno y anotarlas en el croquis;

2º Trazar en el papel el dibujo en una escala determinada.

45. Las líneas no horizontales se miden como queda indicado (Nº 25), es decir, tomando sus proyecciones sobre un plano horizontal, con lo cual en el levantamiento de planos tendremos una figura semejante a la proyección del contorno del terreno sobre un plano horizontal.

46. Escala. Escala numérica de un plano es la razón constante entre las líneas del plano y sus homólogas naturales. Así, por ejemplo,

decir que la escala de un plano es de $\frac{1}{200}$, significa que una línea

de un decímetro en el papel representa en el terreno una longitud de 200 veces un decímetro, o sea de 20 metros.

Escala gráfica es una recta dividida en partes iguales; cada una de ellas representa la unidad de medida adoptada para las rectas del terreno, la cual se halla con la tomada en la recta, en la relación numérica adoptada.

Las escalas generalmente adoptadas en las operaciones de medida de terrenos son las de milímetros y medios milímetros que tienen las reglas de marfil de dos decímetros de longitud, construídas para este objeto.

47. Supongamos que se ha de delinear en la escala de 1 milímetro por metro un terreno triangular cuyos lados miden 25 m, 23 m y 13 m.

El decímetro servirá de escala. Se trazará una recta AB de 25 milímetros y con aberturas de compás iguales respectivamente a 23 y a 13 milímetros desde

los extremos A y B se describirán arcos que se corten en C. La figura ABC representará el plano del terreno.

NOTA. En los planos hay que indicar la escala que se ha adoptado para su construcción.

48. Construcción de ángulos.

Siendo iguales los ángulos del plano y sus homólogos del terreno, por medio del transportador (fig. 48), se construyen gráficamente aquéllos, conociendo éstos.

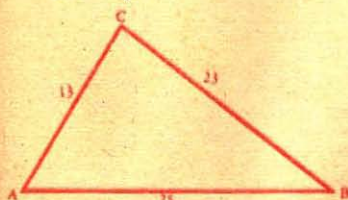


Fig. 47

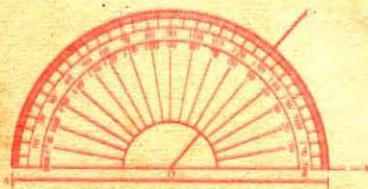


Fig. 48

§ II. — Varios procedimientos para levantar el plano de un terreno.

49. Los principales procedimientos para levantar los planos son los siguientes:

- 1º *Por triangulación*, con la cadena, o con la cadena y escuadra;
- 2º *Por alineación o por directriz*, con la escuadra y la cadena;
- 3º *Por radiación*, con el grafómetro o la plancheta;
- 4º *Por intersección*, con el grafómetro ó la plancheta;
- 5º *Por rodeo*, con el grafómetro, la plancheta o la brújula.

En esta obrita sólo trataremos del levantamiento de planos con la cadena, la escuadra y el grafómetro.

CON LA CADENA

50. Se descompone el terreno en triángulos y se procede como queda indicado en los Nos. 35, 36, 37.

51. Problema. *Construir un polígono cuyo plano se ha levantado con la cadena.*



Fig. 49

LADOS	DIAGONALES
AB . . . 32,5
BC . . . 41	BF . . . 44
CD . . . 30	BE . . . 51
DE . . . 39	CE . . . 48,7
EF . . . 30,4
FA . . . 27

Basta trazar en el papel una figura semejante a la del terreno, reducida a la escala que se quiera.

PLANO LEVANTADO CON LA CADENA

Escala de $\frac{1}{2}$ milímetro por metro.

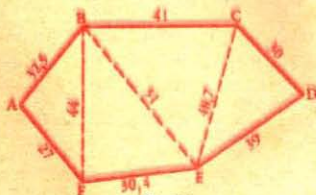
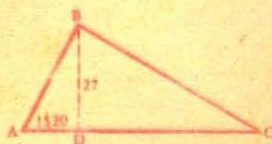


Fig. 50

(Véase *Geometría*, N° 156).

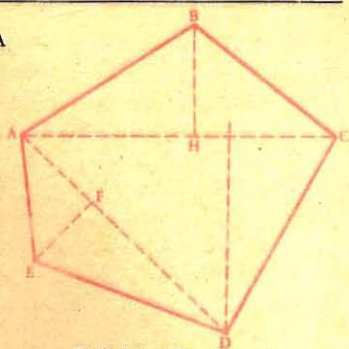
CON LA ESCUADRA

52. 1º *Por triangulación*. Se descompone el terreno en triángulos, y desde los vértices se bajan perpendiculares como lo indicamos en los Nos. 38 y 40.

PLANOS LEVANTADOS CON LA ESCUADRA
Y LA CADENA

Escala de 1 milim. por metro.

Fig. 51



Escala de 1/2 milim. por metro.

Fig. 52

53. Problema. Construir el plano de los terrenos de que se trata en los Nos. 38 y 40.

54. 2º *Por alineación o por directriz.* Se traza una directriz como en el Nº 40, y desde los vértices se bajan perpendiculares a esta directriz (Véase Nº 40).

55. Problema. Construir un polígono cuyo plano se ha levantado con la escuadra según el método de alineación.

Para reproducir en la escala de 1 mm. el plano que representa el croquis (fig. 53), sobre una recta AB (fig. 54) se señalan sucesivamente 6 milímetros, 4 milímetros, 7 milímetros, 2 etc.; luego en

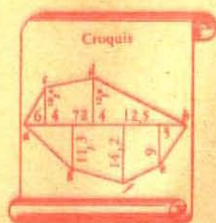
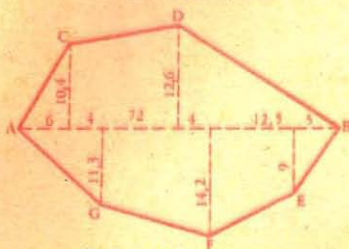
PLANO LEVANTADO CON LA ESCUADRA
POR ALINEACION

Fig. 53



Escala de 1 milim. por metro.

Fig. 54

cada uno de estos puntos se levantan perpendiculares sobre las cuales se señalan las longitudes correspondientes: 10,4, 11,3, etc.; los puntos obtenidos son los vértices del polígono pedido.

CON EL GRAFOMETRO

56. El *grafómetro* (fig. 55) es un instrumento que sirve para medir los ángulos y consta:

1º De un semicírculo de metal de 8 a 12 centímetros de radio, dividido en grados y medios grados, con doble graduación;

2º De dos alidadas¹ o reglas, con pínulas en los extremos, fija la una en la dirección $0 \dots 180^\circ$ del limbo, y la otra movable alrededor del centro del semicírculo.

La dirección AB se llama línea de fe o de colimación.

El limbo tiene en su centro, y por debajo de él, un mango metálico F que va atravesado en su parte superior por un tornillo que sujeta dos piezas esféricas cóncavas E en forma de conchas, las cuales abrazan una esfera que lleva el limbo en su parte inferior; esta esfera se puede mover dentro de las conchas en todos sentidos, para colocar el plano del limbo en la posición que convenga.

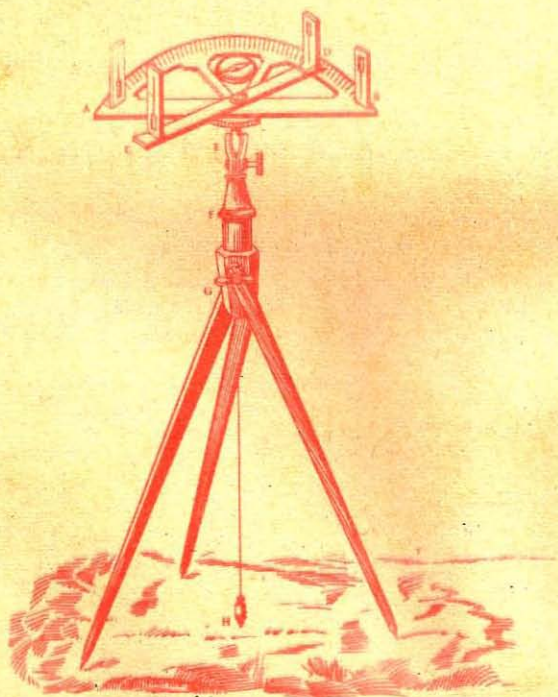


Fig. 55

57. *Modo de medir con el grafómetro el ángulo que forman dos rectas en el terreno.*

Primero se clavan jalones en los lados del ángulo (fig. 56), y después se coloca el grafómetro de modo que el centro del limbo y el vértice del ángulo estén en una misma vertical (lo que se consigue con

¹ Se da el nombre de *alidada* a la parte de un instrumento destinada a determinar la dirección de una visual.

la plomada), y por medio del nivel de aire se pone horizontal el limbo. Luego, se dirigen dos visuales: una en la dirección AB por la alidada fija, y la otra por la movable en la dirección AC; el número de grados del arco comprendido entre los ceros de las dos alidadas dará la medida del ángulo propuesto.

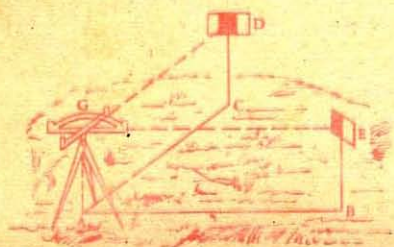


Fig. 56

58. Lectura del ángulo en el grafómetro. La división del limbo facilita la lectura de los grados y medios grados; los minutos se valúan por medio de un arco dividido en 30 partes iguales, indicadas en la alidada móvil; este arco se llama *nonio* o *vernier* del grafómetro. Las

30 divisiones del nonio valen 29 del limbo. La diferencia entre una división del nonio y una división del limbo vale $\frac{1}{30}$ de la división del limbo, esto es $\frac{1}{30}$ de medio grado, o sea un minuto.

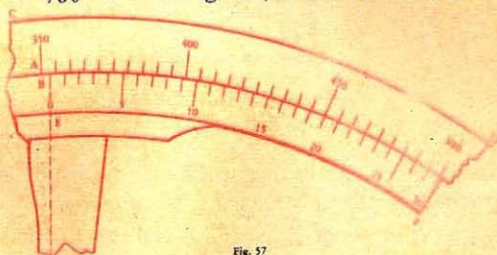
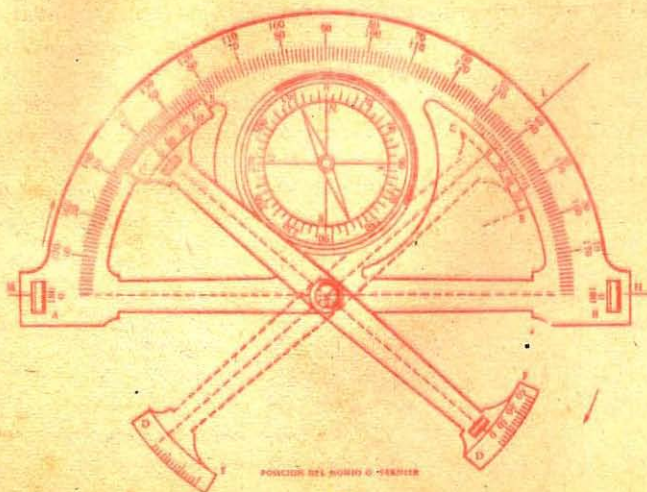


Fig. 57



POSICION DEL NONIO O -VERNIER

Fig. 58

El cero del nonio se halla en la visual de la alidada movable.

Admitamos que el cero de esta alidada se halle en la posición de la fig. 57; entonces se leerá 35° en el limbo. Pero hemos de valuar el arco AB comprendido entre el 35° del limbo y el cero del nonio; para lo cual hay que ver qué raya del nonio corresponde a otra del limbo: en el presente caso es la división décima. Luego, $AB = 10$ minutos.

59. Levantamiento de un plano.

1º *Por radiación.* Se coloca el grafómetro en una estación central O (fig. 59) desde la cual se vean todos los vértices del polígono,

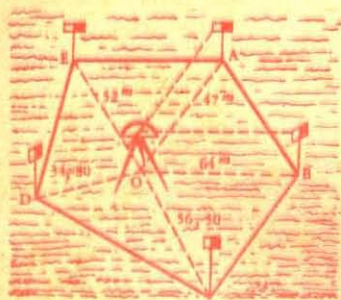


Fig. 59

LADOS		ANGULOS	
AO	47 ^m	AOB	70°12'
BO	64 ^m	BOC	47°27'
CO	56 ^m ,50	COD	72°15'
DO	34 ^m ,80	DOE	115°22'
EO	52 ^m	EOA	54°44'

señalados anticipadamente con jalones; luego se valúan los ángulos formados por los radios OA, OB, OC, etc., y se miden estos radios.

Para trazar el plano sobre el papel se construyen, por medio del graduador, ángulos iguales a los del terreno, y sobre sus lados se toman las longitudes respectivas reducidas a la escala pedida.

60. 2º *Por intersección.* Este procedimiento consiste en medir sólo una base horizontal entre dos puntos A y B (fig. 60), desde los cuales se vean los jalones que determinan los varios vértices del terreno; luego, desde A se dirige según AB la visual de la alidada fija, y visuales a los jalones por la alidada movable para tomar todos los ángulos que estas visuales forman con la base. Después se pasará a hacer estación en el extremo B, para tomar los ángulos que las visuales dirigidas a los mismos vértices forman con la base.

Para reproducir gráficamente el plano, se trazará una recta *ab* de 75 partes de la escala adoptada, y se construirán ángulos iguales a los observados en el terreno.

ANGULOS OBSERVADOS			
Estación A		Estación B	
BAC	102°18'	ABD	104°
BAD	32°25'	ABC	50°12'
BAE	20°32'	ABE	102°45'
BAF	127°15'	ABF	40°54'

La parte curva FHE se levanta separadamente por medio de ordenadas.

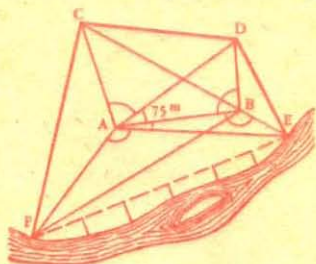
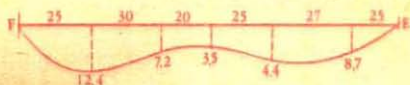


Fig. 60

DETALLES SOBRE EF



61. Advertencia. I. En la práctica se combinan con frecuencia los distintos métodos de levantamiento de planos, según lo requiera la configuración del terreno.

II. Hay costumbre de orientar los planos, esto es de indicar en el papel la dirección de los puntos cardinales respecto al plano representado. Para conseguirlo, ordinariamente se hace uso de la brújula, pero he aquí un procedimiento muy sencillo y al alcance de todos.

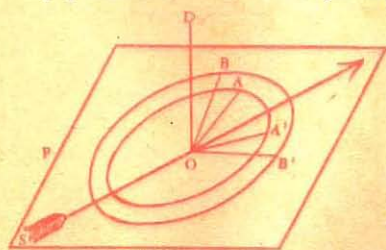


Fig. 61

En un plano horizontal se trazan varias circunferencias concéntricas (fig. 61) en cuyo centro se coloca verticalmente una varilla cualquiera OD. Se señalan los puntos A, A', B, B' en los que el extremo de la sombra de la varilla encuentra, por la mañana y por la tarde, a cada una de las circunferencias.

La bisectriz común a los ángulos AOA', BOB' indicará la dirección S—N.

CAPITULO V

MEDIDA DE DISTANCIAS INACCESIBLES

62. Con la cadena. Para hallar la distancia entre dos puntos C y M, separados por un obstáculo (fig. 62), puede procederse como sigue:

Se coloca el operador en O desde donde puedan verse ambos puntos, se mide OC y se prolonga de modo que $OC' = OC$; también se prolonga OM de manera que $OM' = OM$.

La recta $C'M' = CM$, por ser iguales los triángulos OCM y $OC'M'$.



Fig. 62

Con la escuadra.

63. 1er. Procedimiento. Hallar la distancia entre los puntos A y B (fig. 63).

En el punto B se construye un ángulo recto ABC, luego sobre la perpendicular BC se toma un punto C tal que el ángulo ACB sea de 45° .

Entonces el triángulo ABC será isósceles, y $AB = BC$.

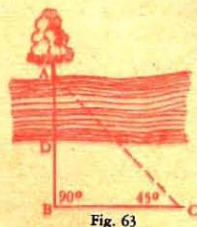


Fig. 63

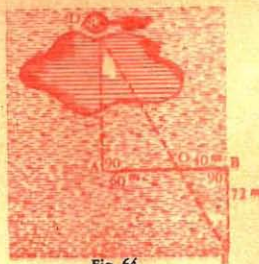


Fig. 64

64. 2º Procedimiento. Hallar la distancia entre los puntos A y D (fig. 64).

Se construye un ángulo recto DAB y se toma AB de longitud cualquiera; luego se señala sobre AB el punto O en la alineación DE; por último se miden AO, OB y BE.

Por ser semejantes los triángulos AOD y BOE, tenemos la proporción:

$$\frac{AD}{AO} = \frac{BE}{BO};$$

$$\frac{AD}{60} = \frac{72}{40};$$

o sea

de donde

$$AD = 108 \text{ m.}$$

65. Con el grafómetro. Hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles D y C (fig. 65).

En terreno accesible se elige como base una recta AB cuyos extremos se vean desde los puntos D y C; se mide dicha recta, así como los ángulos que forma con las visuales dirigidas desde A y B a los puntos inaccesibles C y D.

Luego se reproduce gráficamente la figura ABCD, tomando *ab* igual a 254 m. de la escala adoptada, y construyendo en *a* ángulos de

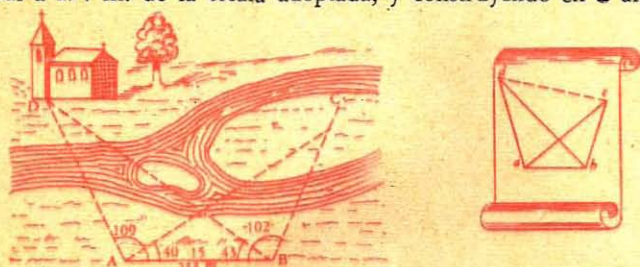


Fig. 65

109° y de $40^\circ 15'$, lo mismo que en *b* ángulos de 102° y de 43° ; por último se mide *dc* en la misma escala.

CAPITULO VI

MEDIDA DE ALTURAS¹

66. Por medio de la sombra. Para medir la altura del árbol AB (fig. 66), suponiendo que el terreno sea llano y accesible, se planta un jalón *ab* de altura conocida, en un punto cualquiera *a* y cerca del árbol; luego se mide, al mismo tiempo, la sombra del jalón y la del árbol. De la semejanza de los triángulos ABD y *abd* se deduce la proporción:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{ab}{ad};$$

$$\text{o sea } \frac{AB}{6} = \frac{1,20}{0,50};$$

$$AB = 14^m,4.$$



Fig. 66

67. Por reflexión. Para medir la altura de la cruz AB (fig. 67) se pone horizontalmente un espejo y se determina el punto II en que

1. Estas operaciones y las que indicamos en la nivelación únicamente se refieren a pequeñas altitudes. Para valuar la altura de las montañas se suele emplear un procedimiento fundado en la presión barométrica.

se forma la imagen del extremo B de la cruz, por una posición dada del ojo del espectador.

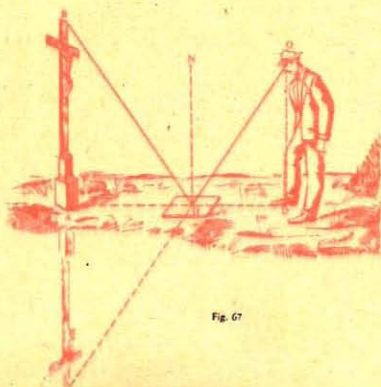


Fig. 67

Los ángulos NHB y NHO, llamados de incidencia y de reflexión, son iguales, así como BHA y OHD. Luego los triángulos rectángulos BAH y ODH son semejantes y dan la proporción siguiente:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{OD}{HD}$$

Sustituyendo AH, OD, HD por su valor, tendremos:

$$\frac{AB}{4,5} = \frac{1,5}{1,10};$$

de donde:

$$AB = 6^m,14$$

NOTA. En vez del espejo puede emplearse una vasija llena de agua.

Por medio del grafómetro.

68. 1º Medir la altura de un edificio a cuyo pie A se puede llegar (fig. 68).

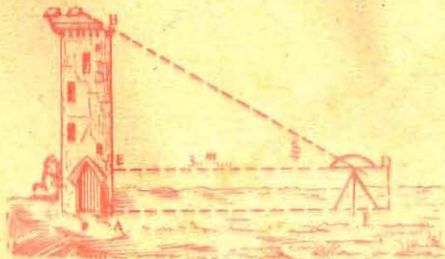
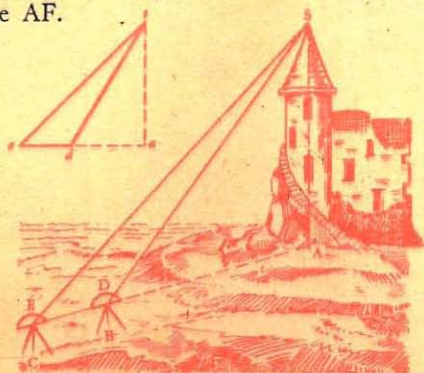


Fig. 68

Se coloca el grafómetro en F, de modo que el limbo esté vertical y la alidada fija bien horizontal; luego, con la alidada movable, se di-

rige una visual al extremo superior de la torre para valuar el ángulo BDE, y se mide AF.



$$\text{Angulo SDE} = 115^\circ \quad \text{Angulo DES} = 48^\circ \quad BC = DE = 29^\circ$$

Fig. 69

Entonces puede construirse gráficamente el triángulo BED, y por lo tanto hallar con la escala el valor de EB. Añadiendo a EB el segmento AE o FD, tendremos la altura total AB.

69. 2ª Medir la altura de un edificio a cuyo pie no se puede llegar (fig. 69).

Elígese primero una base BC en terreno horizontal, y situada en el plano vertical de la altura AS que se quiere medir. Luego se miden los ángulos formados por esta base y las visuales dirigidas hacia el vértice S, y se mide también la base BC.

Con estos datos puede construirse gráficamente en el papel el triángulo *eds*, semejante al triángulo del espacio, EDS.

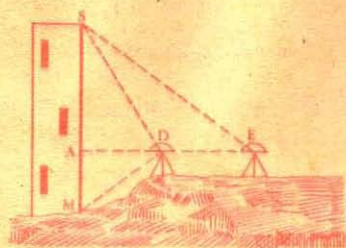


Fig. 70

La línea *sa*, perpendicular a la base *de* prolongada, expresará en menor escala la altura SA.

NOTA. Si no fuese horizontal el terreno, como ocurre en la fig. 70, se mediría el ángulo ADM, y la construcción gráfica semejante daría el valor de AM.

70. Otro procedimiento. Medir la altura de una torre AS (fig. 71).

Elegida la base de operación BD que se procurará sea horizontal, se coloca horizontalmente en la estación B el grafómetro, de manera que la alidada fija esté en la dirección BD; se dirige por la alidada móvil una visual que pase por el plano vertical determinado por el vértice S.

Así se obtiene en el limbo horizontal el valor del ángulo AHN ; luego se hace estación en el extremo D para medir el ángulo ANH .

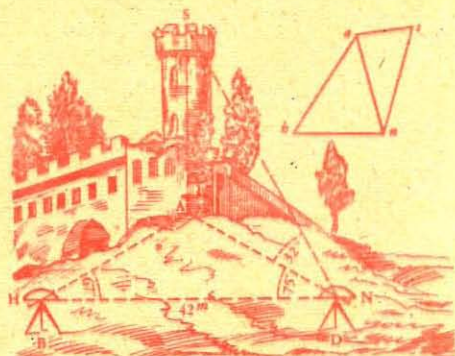


Fig. 71

Por último se valúa el ángulo ANS y se mide la base BD .

Con estos datos se podrá construir gráficamente el triángulo ahn ; sobre el lado an se construye el triángulo rectángulo ans , y así se obtendrá la línea sa , la cual medida a escala, dará la altura SA .



Fig. 72

71. Altura de una montaña. Para determinar la altura de una montaña (fig. 72) se procede como anteriormente, tomando una base de operación BD .

SECCION II

NIVELACION

§ I. — Nociones preliminares.

72. *Nivelación* es la operación que tiene por objeto determinar la diferencia de altitud de dos o más puntos del terreno con relación a una superficie dada, que se llama *superficie de nivel o de comparación*.

Dícese que dos puntos *están a nivel* cuando se hallan en el mismo plano horizontal, v. gr.: B y D (fig. 73).



Fig. 73

La diferencia de nivel entre dos puntos A y B (fig. 73) es la distancia *d*, que hay entre los planos horizontales que pasan por estos puntos.

Entre las distintas superficies de nivel se ha convenido en elegir como superficie general de comparación, la del Océano para que los resultados de las distintas nivelaciones sean comparables.

§ II. — Instrumentos empleados en la nivelación.

Los principales instrumentos empleados en la nivelación son el *nivel* y la *mira*.

NIVEL

73. *Nivel* es un instrumento que determina las líneas y planos horizontales.

74. Varias clases de niveles. Los niveles se dividen en tres clases:

- 1º El nivel de albañil;
- 2º El de aire;
- 3º El de agua.

75. Nivel de albañil o de aplomo (fig. 74). Este nivel consta de dos reglas iguales AB y BC ensambladas en ángulo recto, y de una tercera que las une.

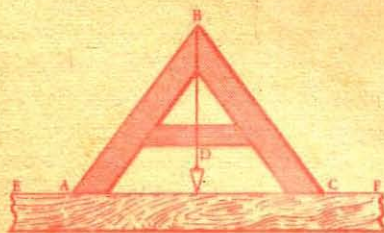


Fig. 74

Esta última tiene señalado el punto medio D por una línea llamada *de fe*; del vértice B está suspendida una plomada. La dirección AC será horizontal si el *perpendicular* o *plomada* pasa por la línea de fe.

76. Nivel de aire. El *nivel de aire* (fig. 75) consiste en un tubo de cristal de longitud variable, ligeramente convexo en su parte superior, ajustado en una guarnición metálica *ab* descubierta por su parte superior, y lleno de agua o de alcohol, a excepción de una pequeña porción ocupada por una burbuja de aire. El tubo, así encerrado, queda fijo por medio de dos soportes a una regla metálica perfectamente plana. El líquido está generalmente coloreado para que se destaque más la burbuja.

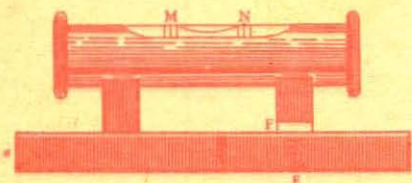


Fig. 75

Cuando el nivel está horizontal, la burbuja se halla exactamente en medio del tubo¹; cuando no lo está, el aire se corre a uno de los extremos. Luego, para que esté horizontal un plano, basta elevarlo o bajarlo hasta que la burbuja se halle exactamente en medio del tubo. Repitiendo la misma operación en dos direcciones perpendiculares del plano, quedará éste horizontal.

77. Nivel de agua. El *nivel de agua* (fig. 76) es un tubo de latón o de otro metal cualquiera, de un metro poco más o menos de longitud, doblado perpendicularmente en sus extremos en los cuales recibe dos frascos de cristal de unos 10 centímetros de altura y de igual diámetro.

El tubo y los frascos constituyen lo que se llama en física *tubo de brazos comunicantes*.

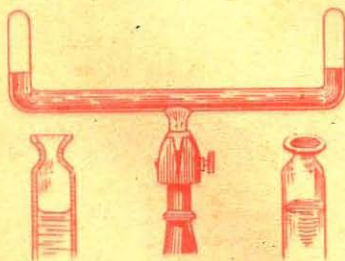


Fig. 76

El nivel de agua se encaja en un trípode.

En el tubo puesto aproximadamente horizontal se introduce agua por uno de los cilindros de cristal. El líquido pasa al otro, y la superficie del agua en los dos cilindros determina un plano horizontal. Conviene echar en el líquido una corta cantidad

de vino o tinta encarnada para destacar más las superficies de nivel.

Este instrumento sirve para hallar el desnivel entre dos puntos.

78. Modo de servirse de este aparato. Después de encajado el nivel en el trípode, y descubiertos los cilindros, el observador, colocado a unos centímetros del aparato (fig. 77), dirige una visual tangente

¹ El cristal está graduado para apreciar la verdadera posición de la burbuja de aire cuando el nivel está horizontal.

a las intersecciones de los cristales con la superficie del agua; esta visual es una línea horizontal.

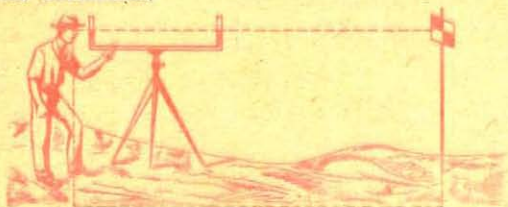


Fig. 77

79. Nivel de líquido cerrado. De dos años a esta parte se ha extendido mucho un nivel de *líquido cerrado* inventado por el pro-



Fig. 78

fesor BRUYERE, de las *Escuelas cristianas*. Como lo indica la fig. 78, un tubo horizontal une la parte superior de los vasos que por su parte inferior ya están unidos por el tubo principal, y así el líquido permanece en el aparato, facilitando de este modo el manejo del mismo. El líquido es alcohol coloreado, así que el menisco que forma en los vasos es muy distinto. A más de esto, las oscilaciones del líquido son pocas, merced al aire que contiene el aparato.

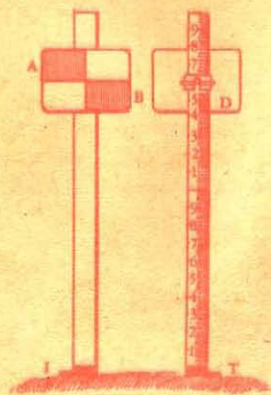


Fig. 79

Con ingeniosas modificaciones, el Sr. BRUYERE ha conseguido hacer de su nivel de líquido cerrado un nivel universal *uniendo a las propiedades del nivel de agua las de nivel de aire, de escuadra a ángulo recto, de escuadra de agrimensor, de stadia, de clisímetro y de taqueómetro*¹.

MIRA

80. Miras son unas reglas de dos a cuatro metros de altura, graduadas en centímetros, y que se emplean en la nivelación (fig. 79);

¹ Dépôt rue des Farges, 11. — Le Puy (Haute-Loire). — Francia.

una tablilla AB pintada de varios colores puede correr en sentido vertical a lo largo de la regla, quedando fija por medio de una rosca.

La visual de nivel debe dirigirse al punto medio de la tablilla.

§ III. — Nivelación simple.

81. La *nivelación simple* es la que se ejecuta sin variar el nivel de posición.

82. *Nivelación entre dos puntos A y B* (fig. 80). Para determinar la diferencia de nivel entre estos dos puntos, se coloca el nivel en un punto intermedio S de la recta AB, y la mira, primero en uno y después en el otro punto.

El observador dirige una visual hacia A; el peón corre la tablilla hasta que la línea media coincida con dicha visual, y se anota la altura Aa. La misma operación se repite dirigiendo la visual hacia B.

La diferencia de las alturas observadas representará la diferencia de nivel entre los puntos A y B:

$$1 \text{ m}, 75 - 0,60 = 1 \text{ m}, 15.$$

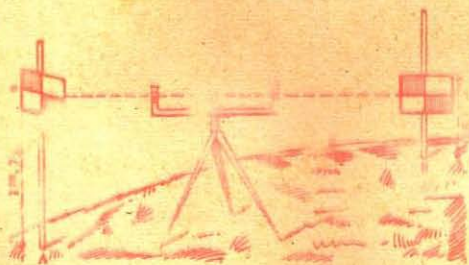


Fig. 80

La representación gráfica en el papel se hace como lo indica la fig. 81, en la cual A'b' representa un plano de *comparación* que pasa por el punto A; en este caso la cota del punto A es cero, y la de B es 1 m, 15.



Fig. 81

La recta A'B' representa la pendiente del terreno.

83. *Nivelación entre más de dos puntos que se hallan en la misma alineación.*

Se coloca el nivel como lo indica la fig. 82, y se dirigen visuales a la mira, colocada sucesivamente en los puntos A, B, C, D, E; luego se anota la cota correspondiente a cada uno.

84. Para facilitar la representación gráfica de la nivelación, puede prepararse un registro que indique los puntos nivelados, las distancias entre sí, las cotas registradas en la mira, las diferencias de nivel



Fig. 82

de los mismos, ya subiendo, ya bajando, las cotas calculadas con relación al plano de comparación elegido, y por último las observaciones que se crean convenientes.

REGISTRO DE NIVELACION SIMPLE DE VARIOS PUNTOS SITUADOS
EN UNA MISMA ALINEACION

Puntos nivelados	Distancias entre los puntos	Cotas leídas	DIFERENCIAS		Cotas calculadas	Observaciones
			Subiendo	Bajando		
A	0,00	5,75	"	"	10,00	cota dada
B	21,50	3,05	2,70	"	12,70	
C	26,90	1,70	1,35	"	14,05	
D	19,80	0,75	0,95	"	15,00	
E	12,30	2,12	"	1,37	13,63	

85. La representación gráfica en el papel se hará como se indica en la fig. 83.

NOTA. Para dar más relieve a la desigualdad del terreno se suelen tomar escalas diferentes para las longitudes y las alturas. En la

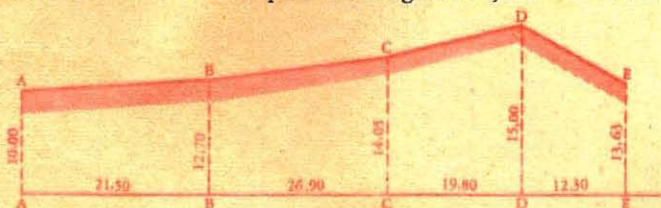


Fig. 83

fig. 81 la escala es de 1 milímetro por metro para las longitudes, y de 1 centímetro para las alturas. En la fig. 83 la escala de las distancias es de 1 milímetro por metro, y la de las alturas, de 1 milímetro $\frac{1}{2}$.

§ IV. — Nivelación compuesta.

86. *Nivelación compuesta* es aquella en la que el nivel ha de usarse en distintas posiciones.

Empléase la nivelación compuesta cuando la distancia de los puntos, cuya diferencia de nivel se ha de calcular, es considerable y el terreno quebrado, o que la diferencia de las alturas de estos puntos es mayor que la altura de la mira.

87. *Ejemplo de nivelación compuesta. Hallar la diferencia de nivel entre los puntos A y G (fig. 84).*

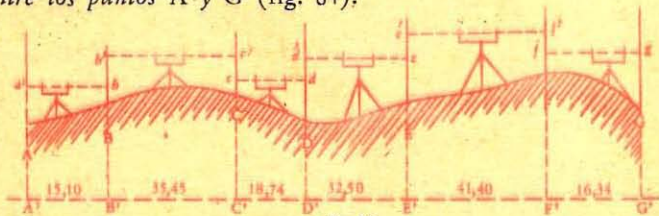


Fig. 84

Puesto el instrumento en el lugar H, se nivelan los puntos A y B, como indicamos anteriormente, y se anotan las cotas Aa' y Bb'. Dejando la mira en B y trasladando el nivel a otro sitio I, se obtendrá la cota Bb'; luego, colocando la mira en C, se obtendrá la cota Cc, y así sucesivamente hasta llegar a G.

88. *Mira atrás o de espalda, mira adelante o de frente.* En el ejercicio anterior, llámase *mira atrás* a la visual dirigida por el observador hacia la mira que ha traspasado, y *mira adelante* a la visual dirigida hacia la mira a la que aun no ha llegado.

Estando el nivel en la estación I, la mira atrás dará la cota Bb', y la mira adelante la cota Cc.

El primer punto A no tiene más que mira atrás, y el último G, sólo mira adelante.

REGISTRO DE NIVELACION COMPUESTA ENTRE LOS PUNTOS A Y G

Puntos nivelados	Distanc. entre los puntos	MIRAS		Diferenc. de nivel		Cotas	Observaciones
		Atrás	Adelante	Subien.	Bajand.		
A	0,00	3,20	"			10	El plano de comparación está 10 m. debajo de A.
B	15,10	3,15	1,20	2,00	"	12	
C	35,45	1,00	2,75	0,40	"	12,40	
D	18,74	3,74	1,85		0,85	11,55	
E	32,50	3,56	0,45	3,29	"	14,84	
F	41,40	1,15	1,17	2,39	"	17,23	
G	16,34	"	3,29	"	2,14	15,09	
Sumas		15,80	10,71	8,08	2,99		
Diferencias		5,09		5,09			

Siendo 10 la cota de A, las cotas de los demás puntos se obtendrán, ya añadiendo sucesivamente las diferencias *subiendo*, ya restando las diferencias *bajando*.

La diferencia entre las sumas de las miras atrás y de las miras adelante dará la diferencia de nivel entre los puntos extremos A y G.

89. Para representar gráficamente los accidentes del terreno nivelado, se trazará una recta A'G' (fig. 85) que represente el plano

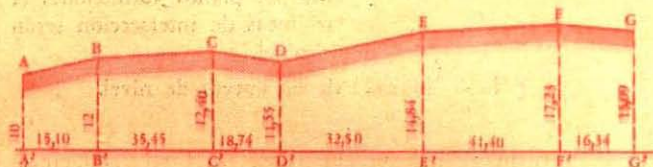


Fig. 85

de comparación. Luego se señalarán las distancias A'B', B'C', etc., iguales a 15 m, 10, 35 m, 45, etc., y se levantarán las perpendiculares iguales a las cotas observadas: 10 m, 12 m, etc.

APENDICE

NOCIONES SOBRE LAS CURVAS DE NIVEL

- 90.** *Curva de nivel* es aquella cuyos puntos tienen una misma cota; por ejemplo, la línea según la cual las aguas de un lago encuentran el suelo.



Fig. 86

Todos los puntos de la curva de nivel están en el mismo plano horizontal. Así, supuesto un terreno cortado por planos horizontales (fig. 86), las líneas de intersección serán curvas de nivel.

§ I. — Trazado de las curvas de nivel.

PROCEDIMIENTO PRIMERO

- 91.** Si se quiere obtener curvas de nivel en cada cinco metros de un terreno poligonal, se levanta el plano del terreno (fig. 87) y la nivelación del perímetro.

También se puede hacer una o varias nivelaciones atravesadas. En el caso actual se ha nivelado siguiendo la dirección del camino ANMH que atraviesa por el campo. Luego se dibujan con la misma escala los perfiles de los distintos lados del polígono y de las otras líneas niveladas (perfiles 1, 2, 3).

Se trazan horizontales de 5, 10, 15 y 20 metros de cota. Los puntos en que éstas cortan a las líneas de los perfiles tienen por cota 5, 10, 15, 20 metros, etc.; se proyectan esos puntos sobre las líneas AH, AD, DA de los perfiles.

Así en el perfil 3 se ve que la horizontal cuya cota es 15 corta al perfil en el punto a' , la horizontal cuya cota es 10, corta el perfil en el punto b' . Estos puntos proyectados sobre DE, determinan los puntos a y b , cota 15 y 10. Se señalan esas proyecciones sobre el plano y se unen por medio de una línea continua los puntos que tienen igual señal, obteniendo así las curvas de nivel.

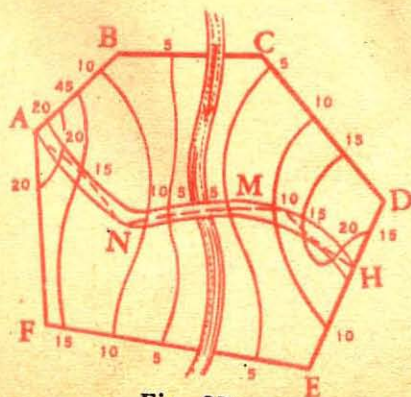


Fig. 87



PROCEDIMIENTO SEGUNDO

92. Problema preparatorio. Hallar sobre una recta ab , un punto d (fig. 88), conociendo su cota, así como las de los extremos de dicha recta.

Las cotas de la recta ab son $a = 4\text{ m}, 10$, $b = 1\text{ m}, 25$, y se quiere determinar el punto d , cuya cota es de 3 metros.

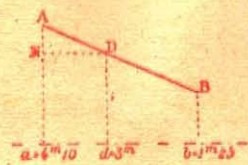


Fig. 88.

Se trazan dos paralelas, Aa , Bb , que tienen, sea cual fuere la escala, $4\text{ m}, 10$ y $1\text{ m}, 25$, y se junta A con B.

Luego se toma $aN = 3\text{ m}$, y se traza ND paralela a ab , después Dd paralela a Aa . El punto d tiene una cota de 3 metros.

93. Problema. Trazar las curvas de nivel en un plano acotado.

Para trazar las curvas de nivel en un plano acotado se busca, como en el problema preparatorio, un punto que tenga, por ejemplo,

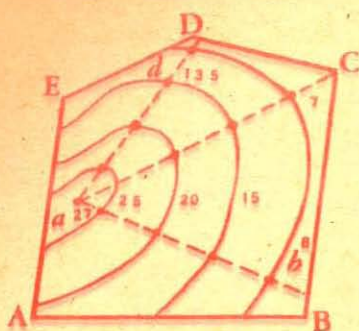


Fig. 89

una cota de 25 metros (fig. 89), y se repite esta operación hasta que se tenga suficiente número de puntos cuya cota sea de 25 metros; estos puntos se unen luego por medio de una curva continua.

Se procede de igual modo para los puntos que tengan por cota 20 metros, luego para los que tengan 15 metros, y así de los demás.

94. Fácilmente podemos

darnos cuenta de la desigualdad de un terreno por medio de un *plano topográfico*, en el que están dibujadas las curvas de nivel; para lo cual basta suponer el corte vertical de un terreno en una dirección dada.

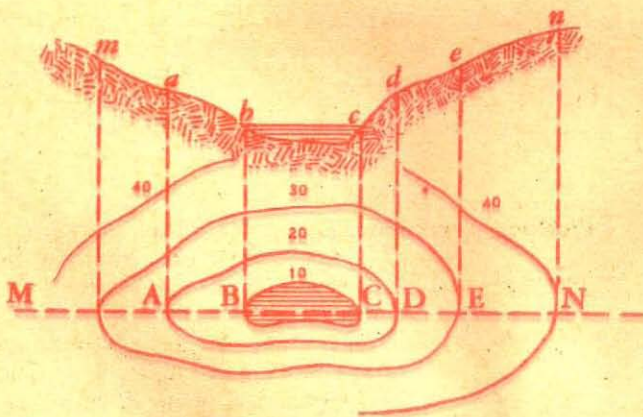


Fig. 90

Así en el ejemplo (fig. 90) un corte en la dirección MN permitirá obtener el perfil m, a, b, c, d, e, n , dando a las ordenadas $Mm, Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Nn$, las respectivas longitudes indicadas por las correspondientes curvas de nivel 30 m, 20 m, 10 m, 10 m, 20 m, 30 m, 40 m.

§ II. — Aplicaciones de las curvas de nivel.

95. Problema. Unir de dos en dos unas curvas de nivel, con rectas que tengan un declive determinado, $\frac{1}{8}$ por ejemplo.

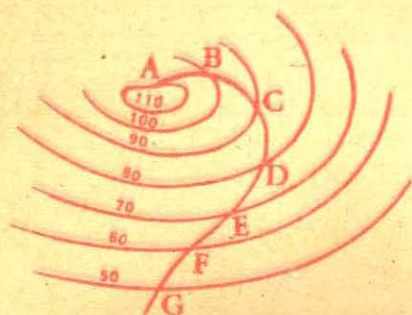


Fig. 91

cho punto se describirá un arco que corte a la segunda curva en B: luego, haciendo centro en B, se cortará la tercera curva en C, y así por las demás.

96. Relieve. Para representar el relieve del suelo se le supone cortado por planos horizontales, equidistantes de 5 en 5, o bien de

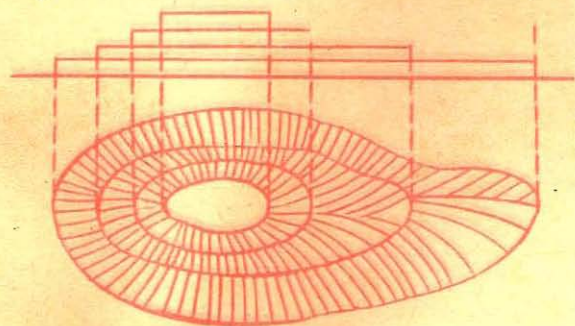


Fig. 92

10 en 10 metros, y se levantan las curvas de nivel determinadas por esos planos.

Luego se construyen con yeso, arcilla o cartón, y según la escala que se adopte, unos pequeños sólidos cuyas respectivas bases sean planos limitados por cada una de las curvas de nivel, y cuya altura común sea la longitud 5 o 10 metros, reducida a la escala adoptada.

Estos sólidos se colocan unos sobre otros (fig. 92), orientando cada una de las curvas de nivel con relación a la precedente. Se rebajan luego las aristas con objeto de obtener una superficie continua.

97. Aplicaciones de las curvas de nivel en Geografía. Para tener idea exacta del relieve de un país se trazan los mapas hipsométricos con curvas de nivel. Se supone el terreno cortado por planos horizon-

tales a 100, 300, 500 metros sobre el nivel del mar, y se trazan las curvas de nivel que resultan de la intersección de esos planos con el suelo.

Cuando las curvas de nivel están delineadas en un mapa, es fácil obtener cortes en cualquier dirección.

NUMEROS USUALES PARA FACILITAR LOS CALCULOS

	Valores		Valores
$\sqrt{2}$	1,4142	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7071
$\sqrt{3}$	1,7320		$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sqrt{5}$	2,2361	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0,4472
$\sqrt{10}$	3,1623	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	0,3162
$\sqrt[3]{2}$	1,2598	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	0,7937
$\sqrt[3]{3}$	1,4423	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	0,6933
π	3,1416	$\frac{1}{\pi}$	0,3183
2π	6,2832	$\frac{1}{2\pi}$	0,1591
3π	9,4248	$\frac{1}{3\pi}$	0,1061
4π	12,5664	$\frac{1}{4\pi}$	0,0796
$\frac{\pi}{2}$	1,5708	$\frac{2}{\pi}$	0,6366
$\frac{\pi}{3}$	1,0472	$\frac{3}{\pi}$	0,9549
$\frac{\pi}{4}$	0,7854	$\frac{4}{\pi}$	1,2732
$\frac{\pi}{180}$ arco de 1°	0,01745	$\frac{180}{\pi}$	57,296
$\frac{\pi}{10800}$ arco de 1'	0,0002909	$\frac{10\ 800}{\pi}$	3437,7
$\frac{4}{3}\pi$	4,1888	$\frac{3}{4\pi}$	0,2380
π^2	9,8696	$\frac{1}{\pi^2}$	0,1013
$\sqrt{\pi}$	1,7724	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ó $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,5642
$\sqrt{2\pi}$	2,5066	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0,3989
$\sqrt{4\pi}$	3,5449	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	0,2821
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4646	$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ ó $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$	0,6828

FORMULAS PRINCIPALES

GEOMETRIA PLANA

Suma de los ángulos de un triángulo	$A + B + C = 2 \text{ rectos.}$
Suma de los ángulos de un polígono	$2r(n-2).$
	4 rectos
Angulo en el centro de un polígono regular	$\frac{\quad}{n}$
	$2r(n-2)$
Angulo de un polígono regular	$\frac{\quad}{n}$
Longitud de la circunferencia	$C = 2\pi r.$
Lado del cuadrado inscrito	$l = r\sqrt{2}.$
Diagonal del cuadrado	$d = l\sqrt{2}.$
Lado del triángulo equilátero inscrito	$l = r\sqrt{3}.$
	l
Altura del triángulo equilátero	$a = \frac{\quad}{2}\sqrt{3}.$
	$2a$
Lado del triángulo equilátero	$l = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$
Area del cuadrado	$A = l^2.$
" rectángulo	$A = ba.$
" paralelogramo	$A = ba.$
" triángulo	$A = \frac{1}{2} ba.$
" trapezio	$A = a \left(\frac{b+b'}{2} \right)$
" polígono regular	$A = \frac{1}{2} ap.$
Area del círculo	$A = \frac{1}{2} \text{circ.} \times \text{radio.}$
<i>id.</i>	$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$
<i>id.</i>	$A = \frac{1}{\pi} \left(\frac{C}{2} \right)^2$
Area del sector	$A = \frac{1}{2} \text{arco} \times \text{radio} = \frac{\quad}{360} \times n.$
" de la corona	$A = \pi (R^2 - r^2)$

Area del triángulo equilátero inscrito	$A = \frac{3r^2}{4} \sqrt{3}.$
" del cuadrado inscrito	$A = 2r^2.$
" del octógono regular inscrito	$A = 2r^2 \sqrt{2}.$
" del dodecágono regular inscrito	$A = 3r^2.$
" del triángulo equilátero	$A = \frac{l^2}{4} \sqrt{3}.$
" del exágono regular	$A = \frac{3l^2}{2} \sqrt{3}.$
" de la elipse	$A = \pi ab.$

GEOMETRIA DEL ESPACIO

Volumen del cubo	$V = a^3.$
Volumen del prisma	$V = B \times a.$
<i>id.</i>	$V = \text{sección recta} \times \text{arista}.$
Volumen de la pirámide	$V = \frac{1}{3} Ba.$
Tronco de pirámide de bases paralelas	$V = \frac{1}{3} a (B + B' + \sqrt{BB'}).$
Tronco de prisma triangular	$V = B \left) \frac{m + n + p}{3}$
Area lateral del cilindro	$A = 2\pi ra.$
Area total del cilindro	$A = 2\pi r (a + r).$
Volumen del cilindro	$V = \pi r^2 a.$
Area lateral del cono	$A = \pi rl.$
Area total del cono	$A = \pi r (l + r).$
Volumen del cono	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 a.$
Area lateral del tronco de cono	$A = \pi (r + r')l.$
Volumen del tronco de cono	$V = \frac{\pi a}{3} (r^2 + r'^2 + rr').$
Area de la zona	$A = 2\pi ra.$
Area de la esfera	$A = 4\pi r^2 = \pi d^2.$
Volumen de la esfera	$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi d^3.$

SUPPLEMENT

LIBRO VI. — POLIEDROS

CAPITULO II. — PIRAMIDE

500. Otra demostración. El tronco de pirámide de bases paralelas B y B' y de altura a, es la diferencia entre dos pirámides semejantes, de bases B y B', y cuyas alturas son h y h'.

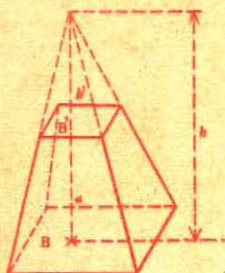


Fig. 368 bis

Su volumen será, pues,

$$V = \frac{1}{3} (Bh - B'h').$$

Pero

$$h - h' = a; \quad \frac{h^2}{B} = \frac{h'^2}{B'}$$

(Nº 490, 3º). De donde

$$\frac{h}{\sqrt{B}} = \frac{h'}{\sqrt{B'}} = \frac{h - h'}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} = \frac{a}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}};$$

$$h = \frac{a\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}, \quad \text{y} \quad h' = \frac{a\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$$

Sustituyendo h y h' por estos valores, la fórmula

$$V = \frac{1}{3} (Bh - B'h')$$

se transforma en

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{aB\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} - \frac{aB'\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} \right) = \frac{a}{3} \left(\frac{B\sqrt{B} - B'\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} \right)$$

Efectuando la división

$$(B\sqrt{B} - B'\sqrt{B'}) : (\sqrt{B} - \sqrt{B'}) = B + \sqrt{BB'} + B'$$

se tiene

$$V = \frac{a}{3} (B + \sqrt{BB'} + B'),$$

o

$$\frac{a}{3} (B + B' + \sqrt{BB'}).$$

Luego, el volumen...

LIBRO VII. — LOS TRES CUERPOS REDONDOS

CAPITULO II. — CONO

537 bis. La fórmula $V = \frac{\pi a}{3} (r^2 + r'^2 + rr')$ puede estable-

cerse directamente. En efecto, el tronco de cono es la diferencia de dos conos semejantes. Sean h y h' las alturas de estos conos, r y r' los radios de las bases; y $h - h' = a$ la altura del tronco.

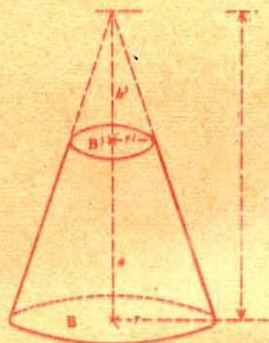


Fig. 369 bis

El volumen del tronco de cono será:

$$V = \frac{1}{3} (\pi r^2 h - \pi r'^2 h'),$$

$$\text{o} \quad V = \frac{\pi}{3} (r^2 h - r'^2 h').$$

Basta, en esta fórmula, sustituir h y h' por sus valores en función de r , r' y a .

$$\text{Se tiene} \quad \frac{h}{r} = \frac{h'}{r'} = \frac{h - h'}{r - r'} = \frac{a}{r - r'} \quad (\text{N}^\circ 490, 3^\circ).$$

$$\text{De donde} \quad h = \frac{ar}{r - r'}, \quad h' = \frac{ar'}{r - r'}.$$

Sustituyendo h y h' por estos valores, la fórmula:

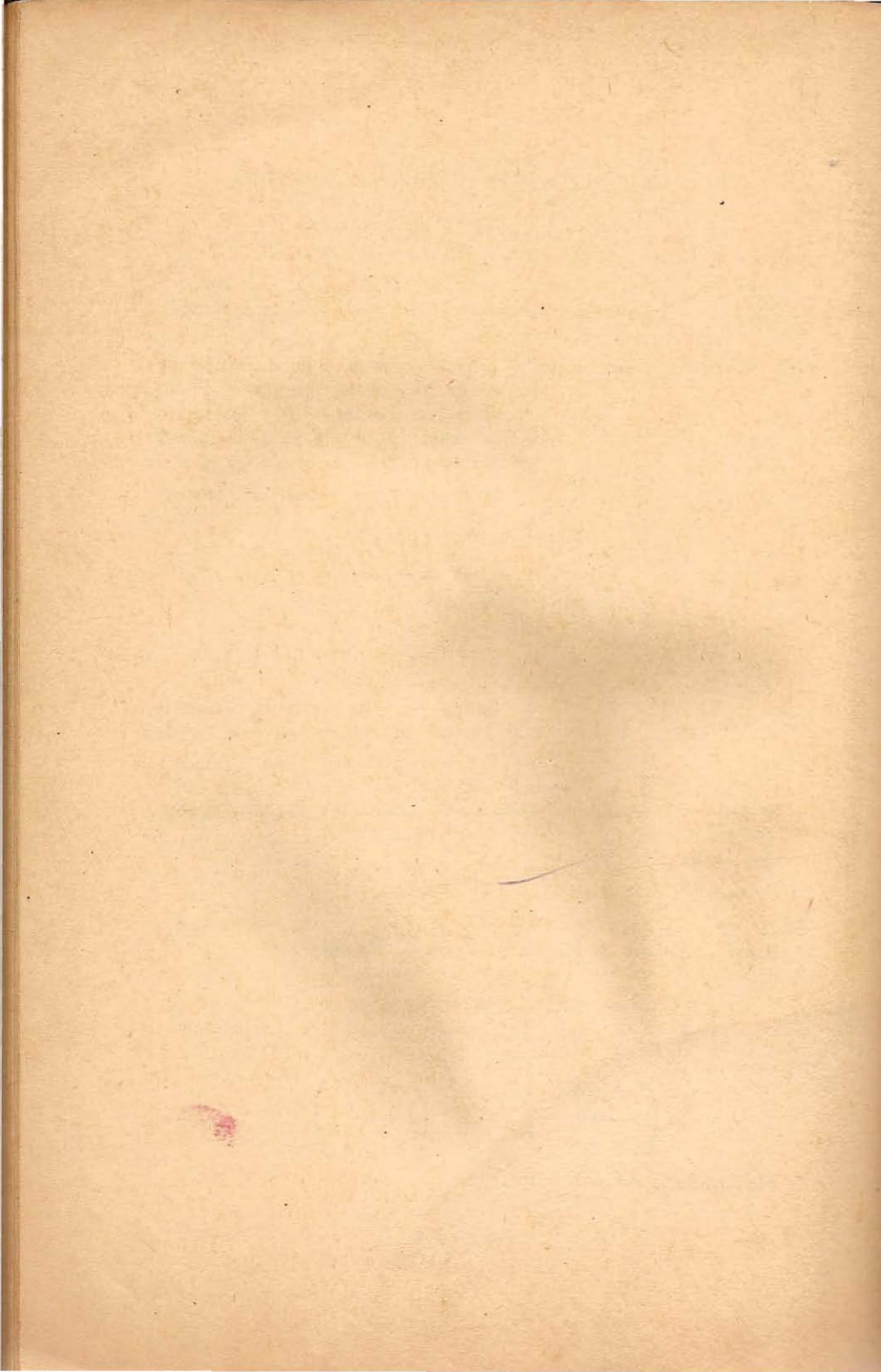
$$V = \frac{\pi}{3} (r^2 h - r'^2 h')$$

se transforma en

$$V = \frac{\pi}{3} \left(\frac{ar^3 - ar'^3}{r - r'} \right) = \frac{\pi a}{3} \left(\frac{r^3 - r'^3}{r - r'} \right)$$

Efectuando la división resulta:

$$V = \frac{\pi a}{3} (r^2 + rr' + r'^2).$$



INDICE

Introducción	7
--------------------	---

GEOMETRIA PLANA

LIBRO I

Línea Recta y Angulos

Cap. I. — Angulos perpendiculares y oblicuos	11
Cap. II. — Triángulos	17
Cap. III. — Rectas paralelas	23
Cap. IV. — Polígonos	27

APLICACIONES

Preliminares	35
Cap. I. — <i>Perpendiculares, oblicuas y ángulos</i>	37
Cap. II. — <i>Triángulos</i>	42
Cap. III. — <i>Polígonos</i>	43
Ejercicios	47

LIBRO II

Circunferencia

Cap. I. — Arcos y cuerdas	51
Cap. II. — Tangentes	55
Cap. III. — Medida de los ángulos	57
Cap. IV. — Polígonos regulares	61

APLICACIONES

Cap. I. — <i>Perpendiculares, oblicuas y ángulos</i>	64
Cap. II. — <i>Arcos, cuerdas y tangentes</i>	68
Cap. III. — <i>Polígonos regulares</i>	76
Ejercicios	81

LIBRO III

Figuras semejantes

Cap. I. — Líneas proporcionales	83
Cap. II. — Triángulos semejantes	86
Cap. III. — Polígonos semejantes	90
Cap. IV. — Relaciones métricas entre las líneas de los triángulos	94
Cap. V. — Relaciones métricas entre las líneas del círculo	99

APLICACIONES

<i>Figuras semejantes y relaciones métricas</i>	102
<i>Ejercicios</i>	107

LIBRO IV

Áreas

Cap. I. — Determinación de las áreas	114
Cap. II. — Relaciones métricas entre las áreas	123

APLICACIONES

§ I. — <i>Aplicaciones del teorema de Pitágoras</i>	127
§ II. — <i>Área de los polígonos regulares en función del círculo circunscrito</i>	130
§ III. — <i>Área de los polígonos regulares en función de su lado</i>	132
§ IV. — <i>Problemas relativos al área de los triángulos</i>	134
§ V. — <i>Transformación de figuras</i>	136
§ VI. — <i>División de figuras</i>	140
<i>Ejercicios</i>	144
<i>Ejercicios de recapitulación - Geometría plana</i>	159

GEOMETRIA DEL ESPACIO

LIBRO V

Líneas rectas y planos

<i>Nociones preliminares</i>	171
Cap. I. — Rectas y planos perpendiculares	172
Cap. II. — Paralelismo de rectas y planos	174
Cap. III. — Ángulos diedros y planos perpendiculares	177
Cap. IV. — Proyecciones sobre un plano	180
Cap. V. — Ángulos poliedros	181

APLICACIONES

<i>Ejercicios</i>	184
-------------------------	-----

LIBRO VI

Poliedros

<i>Nociones preliminares</i>	185
Cap. I. — Prisma	186
Cap. II. — Pirámide	192
Cap. III. — Poliedros semejantes	200

APLICACIONES

<i>Desarrollo de la superficie de algunos poliedros</i>	202
<i>Ejercicios</i>	204

LIBRO VII

Los tres cuerpos redondos

<i>Nociones preliminares</i>	221
Cap. I. — Cilindro	221
Cap. II. — Cono	222
Cap. III. — Esfera	225

APLICACIONES

<i>Desarrollo de la superficie del cilindro, del cono y de la esfera</i>	238
<i>Ejercicios</i>	239

LIBRO VIII

Curvas usuales

<i>Nociones preliminares</i>	260
Cap. I. — Elipse	261
Cap. II. — Parábola	267
Cap. III. — Hipérbola	271

APLICACIONES

<i>Ejercicios</i>	277
<i>Ejercicios de recapitulación. - Geometría del espacio</i>	278

NOCIONES DE AGRIMENSURA Y NIVELACION

SECCION I

Agrimensura

Cap. I. — Instrumentos topográficos	287
Cap. II. — Alineaciones	290
Cap. III. — Medida del área de los terrenos	296
Cap. IV. — Levantamiento de planos	303
Cap. V. — Medida de distancias inaccesibles	309
Cap. VI. — Medida de alturas	311

SECCION II

Nivelación

§ I. — Nociones preliminares	315
§ II. — Instrumentos empleados en la nivelación	315
§ III. — Nivelación simple	318
§ IV. — Nivelación compuesta	320

APENDICE

<i>Nociones sobre las curvas de nivel</i>	322
<i>Números usuales</i>	327
<i>Fórmulas</i>	328

*La impresión de la presente obra
se terminó el día 18 de Enero de
1965, en los talleres de la Editorial
BEDOUT — Medellín - Colombia.*