CURSO
SUPERIOR
CLAVE

EDICIONES BRUÑO

GEOMETRIA

EDICIONES BRUÑO

GEOMETRIA

CURSO SUPERIOR

SOLUCIONARIO

9.ª EDICION
Notablemente mejorada

BRUÑO

DISTRIBUCIÓN:

Joaquín Costa, 21. - Madrid-6
Teléfono 261 82 38

F. Luis de León, 14 - Valladolid
Teléfono 23104

Alta de S. Pedro, 17 - Barcelona-3
Teléfono 221 13 06

B.º de Loyola - San Sebastián
Teléfono 11164

Benlliure, 4 - Paterna (Valencia) - Teléfono 74

Geometría plana

SÍMBOLOS Y ABREVIATURAS

Siguiendo convenios muy generalizados adoptamos los siguientes:

$\angle$ A ángulo A	$\triangle$ triángulo
$\widehat{AB}$ arco AB	$\sim$ semejante

Los grupos de 3 cifras en un número entero o decimal se separan por un espacio en blanco y no por un punto; y la parte entera de la decimál mediante una coma en la parte inferior.

Eje.: 82 534   891 306,427 52.

Los nombres de las unidades, incluso los formados de nombres de sabios, se escriben con minúscula; con todo, en este último caso la primera letra del símbolo se escribe con mayúscula.

Ej.: 9 kilogramos : 9 kg
6 amperios : 6 A

Los símbolos se escriben sin punto final (a menos que sean final de frase) y sin *s* de plural.

Ej.: 5 m, 64 kg   y no   5 m., 64 kgs.

Estos símbolos no se escriben entre la parte entera y la decimal sino después del número.

Ej.: 325,45 pts, 28,50 mm

Si el símbolo de un múltiplo o submúltiplo lleva un exponente, éste afecta a todo el símbolo.

Ej.: dam^2 significa $(dam)^2$, área de un cuadrado de 10 m de lado, es decir, 100 m^2 y no $da(m)^2$, o sea, 10 m^2

De igual modo el cuadrado de 38 y de $\overline{AB}$ se escribirá 38^2, AB^2 sin necesidad de poner $(38)^2$, $(AB)^2$ ni $\overline{38}^2$, $\overline{AB}^2$.

1

GEOMETRIA PLANA

I. Angulos

1. ¿Cuál es la suma de los ángulos cuyos valores respectivos son:

1.º	14º 37′,	38º 46′,	25º 53′?	**Resp.**	**79º 16′**
2.º	18º 35′,	22º 23′,	15º 41′?	»	**56º 39′**
3.º	5º 18′,	11º 27′,	13º 52′?	»	**30º 37′**

2. ¿Cuál es la diferencia entre los ángulos cuyos valores respectivos son:

1.º	84º 47′	y	52º 24′?	**Resp.**	**32º 23′**
2.º	65º 18′	y	25º 46′?	»	**39º 32′**

3. ¿Cuál es la medida de un ángulo:

1.º Que es triple de otro de 15º 37′?
2.º Que vale cuatro veces un ángulo de 21º 36′?
3.º Que vale la quinta parte que otro de 96º?
4.º Que vale la cuarta parte que otro de 108º 65′ 21″?
5.º Que vale el tercio de un ángulo de 127º 24′ 13″?

Resp.	1.º	15º 37′ × 3	= **46º 51′**
	2.º	21º 36′ × 4	= **86º 24′**
	3.º	96º : 5	= **19º 12′**
	4.º	109º 5′ 21″ : 4	= **27º 16′ 20″ 1/4**
	5.º	127º 24′ 13″ : 3	= **42º 28′ 4″ 1/3**

4. ¿Cuál es el complemento:

1.º	Del ángulo de 28º?	**Resp.**	90º − 28º = **62º**
2.º	Del ángulo de 38º 32′?	»	90º − 38º 32′ = **51º 28′**
3.º	Del ángulo de 65º 15′?	»	90º − 65º 15′ = **24º 45′**

5. ¿Cuál es el suplemento:

1.° Del ángulo de 89°? **Resp.** $180^\circ - 89^\circ = \mathbf{91^\circ}$
2.° Del ángulo de 113° 35′? » $180^\circ - 113^\circ\,35' = \mathbf{66^\circ\,25'}$

6. Hállese el suplemento de la suma de los ángulos siguientes: 22° 35′ y 98° 45′ 5″.

$$180^\circ - (22^\circ\,35' + 98^\circ\,45'\,5'') = \mathbf{58^\circ\,39'\,55''}$$

7. La suma de dos ángulos es 8° 47′ 23″ y su diferencia 1° 1′ 1″. ¿Cuáles son esos ángulos?

$$\textit{Angulo mayor} = \frac{8^\circ\,47'\,23'' + 1^\circ\,1'\,1''}{2} = \mathbf{4^\circ\,54'\,12''}$$

$$\textit{Angulo menor} = \frac{8^\circ\,47'\,23'' - 1^\circ\,1'\,1''}{2} = \mathbf{3^\circ\,53'\,11''}$$

8. Averígüese: 1.° en grados sexagesimales, 2.° en grados centesimales, el complemento y suplemento del ángulo 3/8 de recto.

1.° $$90^\circ - 90^\circ \times \frac{3}{8} = 90^\circ\left(1 - \frac{3}{8}\right) = 90^\circ \times \frac{5}{8} = \mathbf{56^\circ\,15'}$$

$$180^\circ - 90^\circ \times \frac{3}{8} = 90^\circ\left(2 - \frac{3}{8}\right) = 90^\circ \times \frac{13}{8} = \mathbf{146^\circ\,15'}$$

2.° $$100^g - 100^g \times \frac{3}{8} = 100^g \times \frac{5}{8} = \mathbf{62{,}50^g}$$

$$200^g - 100^g \times \frac{3}{8} = 100^g \times \frac{13}{8} = \mathbf{162{,}50^g}$$

9. Dados los ángulos consecutivos 32° 41′ y 48° 35′, hállese en grados sexagesimales y centesimales el ángulo que forman sus bisectrices.

El ángulo que forman las bisectrices es igual a la semisuma de los ángulos dados, luego:

- 1.° *En grados sexagesimales* $\dfrac{32^\circ\,41' + 48^\circ\,35'}{2} = \mathbf{40^\circ\,38'}$
- 2.° *Estos grados, convertidos en grados centesimales, darán:*

$$40^\circ = \frac{40 \times 10}{9} = 44{,}4444^g$$

$$38' = \frac{38 \times 10}{60 \times 9} = 0{,}7037^g$$

por tanto: $\mathbf{40^\circ\,38' = 45{,}1481^g}$

10. Dos ángulos consecutivos valen respectivamente 11/15 y 19/15 de ángulo recto. Calcúlese en grados sexagesimales y centesimales lo que vale el ángulo que forman sus bisectrices. Consecuencia:

Suma de los ángulos:

$$\frac{11 \times 90^o}{15} + \frac{19 \times 90^o}{15} = \frac{30 \times 90^o}{15} = 180^o \text{ o bien } 200^g$$

Angulo de las bisectrices:

$$\frac{180^o}{2} = \mathbf{90^o} \quad \text{o bien} \quad \frac{200}{2} = \mathbf{100^g}$$

Consecuencia.—*Las bisectrices de dos ángulos suplementarios forman un ángulo recto.*

11. Dos ángulos opuestos por el vértice valen cada uno 120º. Hállese la suma de los ángulos que forman las bisectrices, situados a un mismo lado de éstas. ¿Es esta suma independiente del valor de los ángulos? Consecuencia.

La bisectriz forma con los lados del ángulo, ángulos de 60º; el que forman las prolongaciones de los lados es también de 60º; la suma será:

$$60^o + 60^o + 60^o = \mathbf{180^o}$$

Dicha suma es independiente del valor de los ángulos dados. De aquí:

Consecuencia.—*Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice están en línea recta.*

12. La latitud de Dunkerque es de 50º 2′ N., y la de Barcelona, que está sobre el mismo meridiano, es de 41º 23′ N. Calcúlese la distancia angular entre estas dos ciudades. En una esfera terrestre dicha distancia mide 5,8 cm. ¿Cuál será la longitud de un meridiano en esa esfera terrestre?

- 1.º *El arco comprendido entre Barcelona y Dunkerque será:*

$$50^o\,2' - 41^o\,23' = \mathbf{8^o\,39'}$$

- 2.º *Midiendo este arco 5,8 cm, el meridiano entero será:*

$$\frac{5{,}8 \times 21\,600}{519} = \mathbf{241{,}4\ cm} \text{ por exceso.}$$

13. La diferencia de dos ángulos es de 90º. ¿Cuánto valdrá el ángulo que forman sus bisectrices? (fig. 1).

- 1.º *Los ángulos tienen el mismo origen, por ejemplo, los ángulos* AOC *y* AOB.

Sea $\angle AOC = \angle a; \angle AOB = 90^o + \angle a$

$$\angle AOD = 45^o + \frac{\angle a}{2} \text{ y } \angle AOF = \frac{\angle a}{2}$$

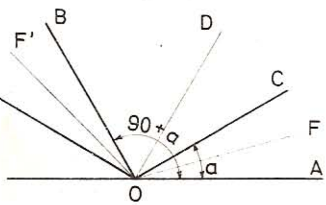


Fig. 1

de donde $$\angle \mathbf{FOD} = 45^o + \frac{\angle a}{2} - \frac{\angle a}{2} = \mathbf{45^o}$$

- 2.º *Los ángulos* AOB *y* BOC′ *son consecutivos.*

Entonces será: $$\angle \mathbf{DOF'} = 45^o + \frac{\angle a}{2} + \frac{\angle a}{2} = \mathbf{45^o} + \angle \mathbf{a}$$

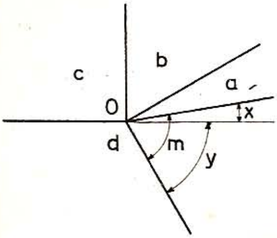


Fig. 2

14. Cinco rayos o semirrectas forman alrededor del punto O los cinco ángulos consecutivos $\angle a = 25^o; \angle b = 60^o; \angle c = 90^o; \angle d = 120^o$, y$\angle m$ que abarca lo restante del plano. Hállese el valor de los dos ángulos que forma la semirrecta opuesta a la cuarta con los lados del ángulo m (fig. 2).

La semirrecta opuesta a la cuarta determina el suplemento de los ángulos situados en una misma región de esa recta, esto es:

$$\angle \mathbf{x} = 180^o - (90^o + 60^o + 25^o) = \mathbf{5^o}$$
$$\angle \mathbf{y} = 180^o - 120^o = \mathbf{60^o}$$

15. Cinco rayos o semirrectas que parten del punto O forman cinco ángulos proporcionales a los números 2, 3, 4, 5 y 6. Calcúlese el valor de esos ángulos en grados sexagesimales y centesimales.

La suma de los ángulos dados es 360°, *la cual, dividida en partes proporcionales a los números* 2, 3, 4, 5 *y* 6, *dará:*

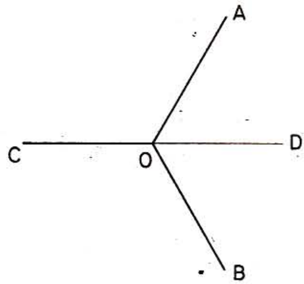
El 1.°: $\dfrac{360^o \times 2}{20} = 18 \times 2 = \mathbf{36^o}$ *o bien* $\mathbf{40^g}$

» 2.°: $18 \times 3 = \mathbf{54^o}$ o bien $\mathbf{60^g}$
» 3.°: $18 \times 4 = \mathbf{72^o}$ » $\mathbf{80^g}$
» 4.°: $18 \times 5 = \mathbf{90^o}$ » $\mathbf{100^g}$
» 5.°: $18 \times 6 = \mathbf{108^o}$ » $\mathbf{120^g}$

16. Tres semirrectas OA, OB, OC (fig. 3) forman alrededor del punto O los tres ángulos consecutivos iguales:

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$$

Demuéstrese que la bisectriz de cada ángulo es la prolongación de un lado.



Uno de los tres ángulos iguales valdrá:

$$360^o : 3 = 120^o$$

Sea OD *la bisectriz de*$\angle$AOB, *tendremos:*

$$\angle AOD = 120^o : 2 = 60^o$$

de donde$\angle AOC + \angle AOD = 120^o + 60^o = 180^o$

Los ángulos adyacentes AOC *y* AOD *tendrán, pues, sus lados exteriores* OC *y* OD *en línea recta, siendo* **OD la prolongación de CO.**

17. Señalar sobre una recta XY cuatro puntos A, B, C, M tales que:

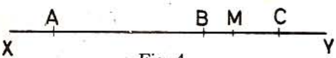


Fig. 4

$$AB + AC = 10 \text{ cm}$$
$$AC - AB = 2 \text{ cm}$$
$$AM = 4 \text{ CM}$$

Sumando las dos primeras igualdades, resulta:

$$2AC = 12 \text{ cm} \qquad \textit{es decir} \qquad AC = 6 \text{ cm}$$

Marcado el punto A (fig. 4), *se toma* **AC = 6 cm**
AB = 6 − 2 = **4 cm**

Como AM = 4CM *resulta* AC = 5CM. *Luego para hallar* M, *se divide* AC *en cinco partes iguales:*

$$6 : 5 = 1{,}2 \text{ cm}$$
$$\mathbf{AM} = 1{,}2 \times 4 = \mathbf{4{,}8\ cm}$$

18. Dado un punto M en el interior de un ángulo de 39°, hállese en grados centesimales el ángulo que forman las perpendiculares trazadas a los lados del ángulo dado (figura 5).

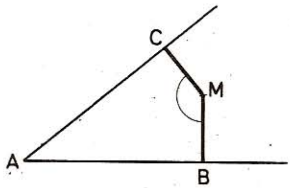


Fig. 5

$$39^{o} = \frac{39^{o} \times 10}{9} = 43{,}3333^{g}$$

El$\angle$CMB *suplemento del*$\angle$CAB *será:*

$$\angle \mathbf{CMB} = 200^{g} - 43{,}3333^{g} = \mathbf{156{,}6667^{g}}$$

19. Dado el ángulo A = 82° del triángulo ABC, averiguar el ángulo D formado por las bisectrices de los otros dos:

1.° Cuando las bisectrices son interiores.
2.° Cuando una es interior y otra exterior (fig. 6).
Dense los resultados en grados sexagesimales y centesimales.

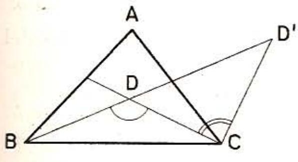


Fig. 6

• 1.° *En el* $\triangle$BDC:

$$\angle D = 180^{o} - \frac{\angle B + \angle C}{2}$$

En el $\triangle$BAC:

$$\angle B + \angle C = 180^{o} - \angle A = 180^{o} - 82^{o} = 98^{o}$$

Luego, $\dfrac{\angle B + \angle C}{2} = \dfrac{98^{o}}{2} = 49^{o}$

Por tanto: $\angle \mathbf{D} = 180^{o} - 49^{o} = \mathbf{131^{o}}$

• 2.° *En el* $\triangle$DD′C: $\angle$DCD′ = 90° (las bisectrices de $\angle$C son perpendiculares).

Por ser áng. exterior: $\angle BDC = 90^{o} + \angle D'$
Luego $\angle \mathbf{D'} = \angle BDC - 90^{o} = 131^{o} - 90^{o} = \mathbf{41^{o}}$
Expresándolo en grados centesimales, vendrá:

$$\angle \mathbf{D} = \frac{131 \times 10}{9} = \mathbf{145{,}5555^{g}}$$

$$\angle \mathbf{D'} = \frac{41 \times 10}{9} = \mathbf{45{,}5555^{g}}$$

II. Perpendiculares y oblicuas

20. Dados dos puntos A y B, tomados fuera de una recta CD (fig. 7) y en el mismo semiplano, hallar sobre ésta un punto que equidiste de aquéllos.

El lugar geométrico de los puntos equidistantes de A *y* B *es la mediatriz de* AB; *el punto* **P** *en que ésta corta a* CD, *es el punto que se busca.*

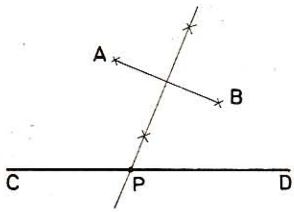


Fig. 7

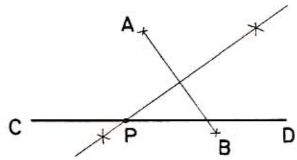


Fig. 8

21. Dados dos puntos A y B a distinto lado de una recta CD (fig. 8), hallar sobre ésta otro punto que equidiste de aquéllos.

Como en el problema anterior, el punto de intersección de la mediatriz del segmento AB *con la recta* CD *será el punto pedido.*

- *Si la mediatriz de* AB *fuese paralela a* CD *no habría solución.*
- *Si los puntos* A *y* B *estuviesen a igual distancia de la recta* CD, *el punto medio de* AB *sería la solución.*
- *Si la mediatriz de* AB *coincidiese con* CD, *cualquier punto de* CD *sería solución.*

22. Dado un segmento rectilíneo AB (fig. 9), hallar, sirviéndose sólo del compás, otros puntos que pertenezcan a la prolongación del segmento dado.

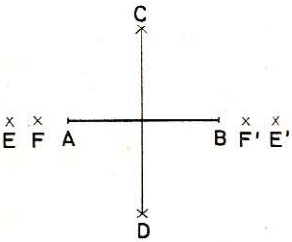


Fig. 9

Tanto los puntos que se buscan, como los puntos A *y* B, *equidistan de* C *y* D, *simétricos respecto del segmento dado. Así, pues, éste será la mediatriz de* CD; *por tanto, después de haber hallado los puntos* C *y* D, *desde éstos como centros, se describen arcos de radios*

$$\mathbf{CF} = \mathbf{DF} \quad y \quad \mathbf{CE} = \mathbf{DE}, \textit{ etc.}$$

23. Dados dos puntos A y B fuera de una recta y en la misma región, hallar el camino más corto para ir desde A a B tocando a la recta dada (fig. 10).

Sea P *el punto que se busca y* A′ *el simétrico de* A *respecto de* CD; *se tiene:*

$$PA' = PA \quad y \quad PA + PB = A'B$$

Para cualquier otro punto P′ *de la recta* CD, *se tiene:*

$$A'B < A'P' + P'B$$

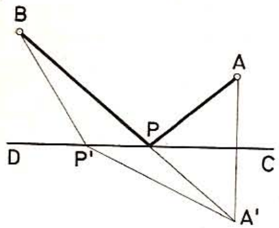


Fig. 10

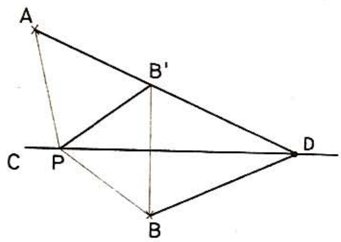


Fig. 11

Por tanto, se halla el punto A′ *simétrico de* A *respecto de* CD, *se traza* A′B *y el punto de intersección* **P** *con* CD *será el punto pedido.*

24. Dados dos puntos A y B, situados fuera de una recta CD (fig. 11), y a distinto lado de la misma, hallar sobre esta recta un punto D tal que la diferencia de sus distancias a los puntos A y B sea la mayor posible.

Sea D *el punto buscado y* B′ *el simétrico de* B *respecto de* CD; *se tiene:*

$$DA - DB = DA - DB' = AB'$$

Para otro punto cualquiera, P, *de* CD *se tendrá:*

$$PA - PB = PA - PB'$$

pero $$PA - PB' < AB'$$

luego $$PA - PB < AB'$$

AB′ *es, por tanto, la diferencia máxima.*

Para obtenerla se une A *con el simétrico de* B *respecto de* CD *y el punto de intersección,* **D**, *de ambas rectas es el punto pedido.*

III. Triángulos

25. ¿Cuál es la medida de un ángulo de la base en un triángulo isósceles, si el ángulo del vértice vale 35° 24′?

$$\frac{180^\circ - 35^\circ\,24'}{2} = \frac{144^\circ\,36'}{2} = \mathbf{72^\circ\,18'}$$

26. En un triángulo uno de los ángulos tiene 19° 43′ y el segundo 105° 31′. ¿Cuántos grados tendrá el ángulo exterior al tercero?

El ángulo pedido es igual a la suma de los ángulos dados.

$$19^\circ\,43' + 105^\circ\,31' = \mathbf{125^\circ\,14'}.$$

27. El ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide $42^\circ\ 28'$. ¿Cuál es el valor del ángulo exterior formado por uno de los lados iguales y la prolongación de la base?

En un triángulo isósceles cada ángulo de la base es la mitad del suplemento del ángulo del vértice:

$$\frac{180 - 42^\circ\ 28'}{2} = 68^\circ\ 46'$$

Angulo pedido: $180^\circ - 68^\circ\ 46' = \mathbf{111^\circ\ 14'}$.

28. Calcular los ángulos de un triángulo en los casos siguientes:

1.º $\angle B = 2\ \angle A$ y $\angle C = 3\ \angle A$
2.º $\angle A = 3\ \angle B$ y $\angle C = 45^\circ$.
3.º $\angle A + \angle B = 90^\circ$ y $\angle C - \angle A = 30^\circ$.
4.º $\angle A - \angle B = 45^\circ$ y $\angle A - \angle C = 30^\circ$.

En todo triángulo tenemos: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

Remplazando valores tendremos:

● 1.º $\angle A + 2\ \angle A + 3\ \angle A = 180^\circ$ *o sea* $6\ \angle A = 180^\circ$

de donde $\angle \mathbf{A} = \mathbf{30^\circ}$ $\angle \mathbf{B} = \mathbf{60}$ *y* $\angle \mathbf{C} = \mathbf{90^\circ}$

● 2.º $3\ \angle B + \angle B + 45^\circ = 180^\circ$ *o sea* $4\ \angle B = 135^\circ$

de donde $\angle \mathbf{B} = \mathbf{33^\circ\ 45'}$ *y* $\angle \mathbf{A} = \mathbf{101^\circ\ 15'}$

● 3.º $90^\circ + \angle C = 180^\circ$ *de donde* $\angle \mathbf{C} = \mathbf{90^\circ}$

$$\angle \mathbf{A} = \angle C - 30^\circ = 90^\circ - 30^\circ = \mathbf{60^\circ}$$
$$\angle \mathbf{B} = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 60^\circ = \mathbf{30^\circ}$$

● 4.º $\angle B = \angle A - 45^\circ$ *y* $\angle C = \angle A - 30^\circ$

de donde $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A + \angle A - 45^\circ + \angle A - 30^\circ = 180^\circ$

y $3\ \angle A = 180^\circ + 75^\circ = 255^\circ$

y $\angle \mathbf{A} = \mathbf{85^\circ}$; $\angle \mathbf{B} = 85^\circ - 45^\circ = \mathbf{40^\circ}$; $\angle \mathbf{C} = 85^\circ - 30^\circ = \mathbf{55^\circ}$

29. El ángulo que forman las bisectrices de los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles vale tres veces más que el del vértice. ¿Cuál será en grados centesimales el valor de éste?

Por hipótesis: $$200^g - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 3\ \angle A$$

de donde

$$400^g - \angle B - \angle C = 6\ \angle A$$
$$400^g = \angle B + \angle C + \angle A + 5\ \angle A$$
$$5\ \angle A = 400^g - 200^g = 200^g$$
$$\angle \mathbf{A} = \mathbf{40^g}$$

30. Los ángulos del triángulo ABC (fig. 12) valen: $\angle A = 60°$, $\angle B = 100°$. Prolongando AB una longitud BD = BC, calcúlense los ángulos del triángulo CBD.

En el $\triangle CBD$: $\angle B = 180° - 100° = 80°$.

Por ser $\triangle CBD$ *isósceles:*

$$\angle \mathbf{C} = \angle \mathbf{D} = \frac{100°}{2} = \mathbf{50°}$$

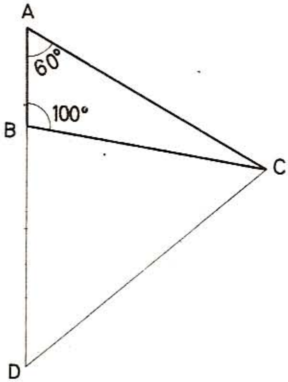


Fig. 12

31. Los ángulos B y C de un triángulo valen: $\angle B = 75°$, $\angle C = 35°$. Hallar:

1.° Los ángulos formados por las alturas tomadas dos a dos.

2.° Los ángulos formados por las bisectrices, tomadas también dos a dos.

● 1.° *Siendo las alturas perpendiculares a los lados, formarán entre sí ángulos iguales a los del triángulo; así:*

El que forman las alturas de

A *y* B *será* $\angle \mathbf{C} = \mathbf{35°}$

A *y* C » $\angle \mathbf{B} = \mathbf{75°}$

B *y* C » $\angle \mathbf{A} = \mathbf{70°}$

● 2.° *El áng. agudo de las bisectrices de*

$\angle A$ *y* $\angle B$ *será* $\dfrac{\angle A + \angle B}{2} = \mathbf{72°\ 30'}$

$\angle A$ *y* $\angle C$ » $\dfrac{\angle A + \angle C}{2} = \mathbf{52°\ 30'}$

$\angle B$ *y* $\angle C$ » $\dfrac{\angle B + \angle C}{2} = \mathbf{55°}$

32. En un triángulo ABC, el $\angle B = 60°$ y el $\angle C = 20°$. ¿Cuál será el ángulo que forman la altura y bisectriz trazadas del vértice A?

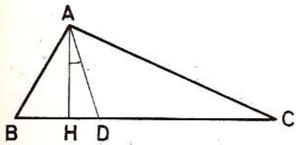


Fig. 13

$$\angle BAH = 90° - 60° = 30°$$

$$\angle BAD = \frac{\angle A}{2} = \frac{180° - 80°}{2} = 50°$$

$$\angle \mathbf{HAD} = 50° - 30° = \mathbf{20°}$$

33. Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo valen $\angle B = 24°$ y $\angle C = 66°$. Hállese el ángulo que forman la altura y mediana trazadas desde el vértice A.

El triángulo rectángulo BAC es la mitad del rectángulo BACE cuyas diagonales AE y BC son iguales, y se cortan en su punto medio D. Luego

$$AD = DE = BD = DC.$$

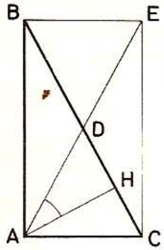


Fig. 14

El $\triangle BAD$ es isósceles; por tanto:

$$\angle BAD = \angle ABD = \angle B = 24^o$$
$$\angle HAB = 90^o - 24^o = 66^o$$
$$\angle \mathbf{HAD} = \angle HAB - \angle DAB = 66^o - 24^o = \mathbf{42^o}$$

34. En un triángulo rectángulo BAC, $\angle B = 2/5$ de recto. Calcular:

1.º Los dos ángulos que forma la altura AH con los catetos AB y AC.

2.º Los dos ángulos que forman con la hipotenusa, la mediana AD y la bisectriz AI trazadas desde el vértice A.

● 1.º $\angle B = 90^o \times 2/5 = 36^o$

$$\angle C = 90^o - \angle B = 90^o - 36^o = 54^o$$
$$\angle \mathbf{HAB} = 90^o - \angle B = 90^o - 36^o = \mathbf{54^o}$$
$$\angle \mathbf{HAC} = 90^o - \angle C = 90^o - 54^o = \mathbf{36^o}$$

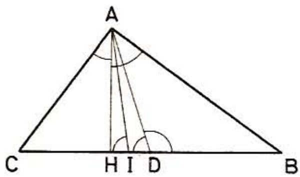


Fig. 15

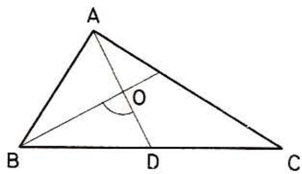


Fig. 16

(También podría decirse $\angle HAB = \angle C$ por tener sus lados respectivamente perpendiculares y $\angle HAC = \angle B$ por la misma razón.)

● 2.º El triángulo ADB es isósceles (n.º **33**), luego

$$\angle DAB = \angle B = 36^o$$
$$\angle \mathbf{ADB} = 180^o - 2 \times \angle B = 180^o - 72^o = \mathbf{108^o}$$
$$\mathbf{ADC} = 180^o - \angle ADB = 180^o - 108^o = \mathbf{72^o}$$
$$\angle IAC = \angle IAB = 90^o : 2 = 45^o$$
$$\angle \mathbf{AIC} = 180^o - \angle IAC - \angle C = 180^o - 45^o - 54^o = \mathbf{81^o}$$
$$\angle \mathbf{AIB} = 180^o - \angle AIC = 180^o - 81^o = \mathbf{99^o}$$

35. Calcular los ángulos que forma la mediana relativa a la hipotenusa con las bisectrices de los ángulos agudos, siendo $\angle B = 65^g$.

● 1.º *El triángulo* DAB *es isósceles* (n.º **33**), *luego*

$$\angle DAB = \angle DBA = \angle B = 65^g$$

$$\angle \mathbf{DOB} = \angle OAB + \angle ABO = \angle B + \frac{\angle B}{2} = 65^g + 32{,}5^g = \mathbf{97{,}5^g}$$

• 2.º *Del mismo modo, el ángulo de la bisectriz* CO *con la mediana* AD *es:*

$$\angle \mathbf{C} + \frac{\angle \mathbf{C}}{\mathbf{2}} = 35^g + 17{,}5^g = 52{,}5^g$$

36. En un triángulo rectángulo $\angle B = 32^o$. ¿Cuánto valdrá el $\angle AIC$, formado en el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos A y C?

$$\angle ACB = 90^o - 32^o = 58^o$$

$$\angle ACI = \frac{\angle ACB}{2} = \frac{58^o}{2} = 29^o$$

$$\angle CAI = \frac{90^o}{2} = 45^o$$

$$\angle \mathbf{AIC} = 180^o - (\angle ACI + \angle CAI) = 180^o - (29^o + 45^o) = \mathbf{106^o}$$

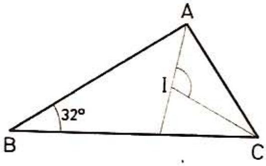


Fig. 17

37. Se forra un tapete cuadrado de 1,4 m de lado con tela que tiene 0,55 m de anchura. ¿Qué longitud habrá que comprar, suponiendo que para fijar el forro al tapete hay que hacer un dobladillo de 15 mm en las orillas del forro? ¿Qué longitud tendrán las costuras que habrá que hacer para juntar piezas y fijar el forro en las orillas?

• *Siendo la anchura de la tela de* 0,55 m, *habrá que juntar* 3 *tiras para forrar el tapete; cada una debe tener*

$$140 + (0{,}015 \times 2) = 1{,}43 \text{ m } \textit{de longitud}$$

Forro necesario: $1{,}43 \times 3 =$ **4,29 m**

• *Se deben hacer dos costuras de* 1,43 m *para unir las piezas, y cuatro de* 1,40 m *para fijar el forro a las orillas.*

Long. costuras: $(1{,}43 \times 2) + (1{,}40 \times 4) =$ **8,46 m**

38. Valiendo los tres ángulos de un triángulo 180°, hállese el valor de cada uno:

1.º En el caso en que el menor sea 1/3 del mayor y cuando el mediano sea la semisuma de los otros dos.

2.º Cuando el mediano valga 30° menos que el mayor y 20° más que el menor.

• 1.º *Sea* x *el valor del mayor.*

El menor valdrá: $\dfrac{x}{3}$

Y el mediano $\left(x + \dfrac{x}{3}\right) : 2 = \dfrac{4x}{3} : 2 = \dfrac{2x}{3}$

Por tanto, $$x + \frac{x}{3} + \frac{2x}{3} = 180^o$$

$$x = \mathbf{90^o}$$

Los otros dos valdrán: **30°** y **60°**.

● 2.º *Representando los valores por*

$$x, \quad (x + 20^\circ), \quad (x + 20^\circ + 30^\circ)$$

tendremos
$$3x + 70^\circ = 180^\circ$$

$$x = \frac{180^\circ - 70^\circ}{3} = \mathbf{36^\circ\ 40'}$$

y los otros serán: $\mathbf{56^\circ\ 40'}$ *y* $\mathbf{86^\circ\ 40'}$.

39. Demostrar que el ángulo que forma la mediana AM con la altura AH de un triángulo rectángulo BAC (fig. 18) trazadas ambas desde el vértice del ángulo recto, es igual a $\angle B - \angle C$.

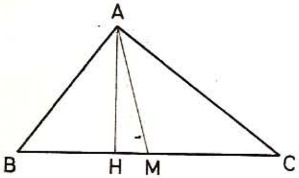


Fig. 18

Por tener sus lados perpendiculares:

$$\angle CAH = \angle B$$

por tanto: $\angle CAM + \angle MAH = \angle B$

y $\angle MAH = \angle B - \angle CAM$

El $\triangle AMC$ *es isósceles* (n.º **33**), AM = MC,

por tanto: $\angle CAM = \angle C$

y $\mathbf{\angle MAH = \angle B - \angle C}$

40. Dado un triángulo ABC tal que AB < AC (fig. 19) se toma sobre este último lado una longitud AD = AB y resulta que el punto D equidista de los vértices B y C.

Según esto, demostrar que $\angle B = 3\ \angle C$.

Si D *equidista de* B *y* C, *el* $\triangle BCD$ *es isósceles y se tendrá:*

$$\angle CBD = \angle DCB = \angle C$$

Por hipótesis tenemos que AD = AB, *por tanto:*

$$\angle ABD = \angle ADB$$

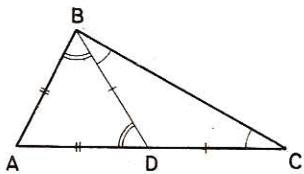


Fig. 19

Asimismo el ángulo ADB *externo del triángulo* BDC *es igual a la suma de los ángulos no adyacentes a él, o sea:*

$$\angle ADB = \angle CBD + \angle DCB = 2\ \angle C$$

Por consiguiente:

$$\angle CBD + \angle ABD = \angle C + 2\ \angle C = 3\ \angle C$$

es decir:
$$\mathbf{\angle B = 3\ \angle C}$$

41. Demostrar que en el triángulo ABC (fig. 20), el ángulo O, que forman las bisectrices de los ángulos B y C, es igual a un ángulo recto más $\angle A/2$.

Como las bisectrices OB *y* OC *dividen a los ángulos* B *y* C *en partes iguales, tendremos:*

$$\angle CBO = \frac{\angle B}{2} \qquad \angle BCO = \frac{\angle C}{2}$$

En $\triangle$OBC: $\angle BOC = 2 \text{ rectos} - (\angle CBO + \angle BCO)$

$$= 2 \text{ rectos} - \frac{\angle B + \angle C}{2} \qquad (1)$$

Pero en $\triangle$ABC:

$$\angle B + \angle C = 2 \text{ rectos} - \angle A$$

de donde $$\frac{\angle B + \angle C}{2} = 1 \text{ recto} - \frac{\angle A}{2}$$

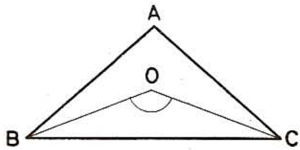


Fig. 20

Remplazando valores en la (1), *tendremos:*

$$\angle BOC = 2 \text{ rectos} - \left(1 \text{ recto} - \frac{\angle A}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{\angle BOC = 1 \text{ recto} + \frac{\angle A}{2}}$$

IV. Construcción de triángulos

42. Construir un triángulo equilátero, conociendo:

1.º El lado.
2.º El perímetro.
3.º La altura.

● 1.º El lado.—*Se traza un segmento* BC *igual al lado; desde los puntos* B *y* C, *con un radio igual a* BC, *se describen arcos que se corten en* A. *Este punto es el tercer vértice del triángulo* (fig. 21).

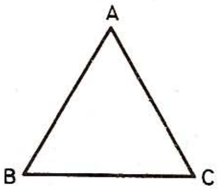


Fig. 21

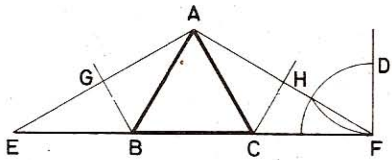


Fig. 22

● 2.º El perímetro.—*Se divide el perímetro en tres partes iguales y se vuelve al caso precedente; también puede procederse del modo siguiente* (fig. 22):

Se traza un segmento EF *igual al perímetro y en sus extremos* E, F *se construyen ángulos de* 30º; *las rectas* AE *y* AF *se cortan en* A; *se trazan las mediatrices* BG *y* CH *de* AE *y* AF, *con lo cual quedan determinados los vértices* B *y* C.

El triángulo ABC *es equilátero por ser cada ángulo igual a* 60º.

● 3.º La altura.—*Sobre una recta* (fig. 23) *se traza una perpendicular, en la cual se toma* MN *igual a la altura dada; luego en* N *y a cada lado de* MN *se trazan ángulos de* 30º. *El triángulo total tiene dos lados iguales, y como el ángulo en el vértice,* N, *vale* 60º, *cada uno de los ángulos básicos valdrá:*

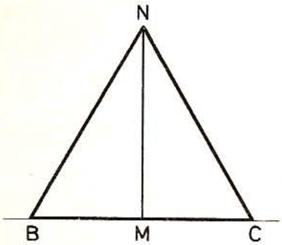


Fig. 23

$$\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

43. Construir un triángulo isósceles, conociendo:

1.º La base y la altura.
2.º La base y un ángulo adyacente.
3.º La base y un lado.
4.º La base y el ángulo opuesto.
5.º El perímetro y la base.
6.º El perímetro y la altura.
7.º La altura y un ángulo.
8.º La altura y uno de los lados iguales.
9.º Un lado, la altura correspondiente y un ángulo adyacente a este lado.

● 1.º La base y la altura.—*Se traza una perpendicular en el punto medio de la base* BC (fig. 24), *y se toma* DA *igual a la altura dada. El triángulo* ABC *será isósceles por tener* AB = AC.

● 2.º La base y un ángulo adyacente.—*En los extremos* B *y* C *se construyen ángulos iguales al ángulo dado, y el triángulo obtenido será isósceles por tener dos ángulos iguales.*

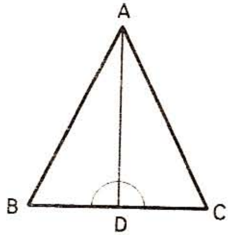


Fig. 24

● 3.º La base y un lado.—*Desde los extremos* B *y* C *de la base, con un radio igual al lado dado, se describen arcos que se cortan en* A.

● 4.º La base y el ángulo opuesto.—*En los extremos de la base se construyen ángulos iguales al complemento de la mitad del ángulo dado. Las rectas que forman estos ángulos determinarán el triángulo pedido.*

● 5.º El perímetro y la base.—*Al restar del perímetro la longitud de la base, resulta el doble de cada uno de los otros lados; después se procede como en el caso* 3.º.

● 6.º El perímetro y la altura.—*Sea* EF *el perímetro; en* D, *punto medio de este segmento se traza una perpendicular* DA *igual a la altura, la mediatriz de* AE *cortará a la recta* EF *en un punto* B *que será uno de los vértices del triángulo, porque* AB = BE; *encontraremos el otro vértice* C *trazando la mediatriz de* AF.

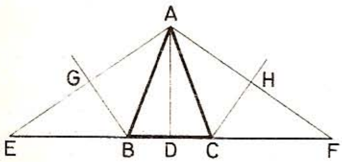


Fig. 25

● 7.º La altura y un ángulo.—*Sobre una recta se traza una perpendicular* DA (fig. 25) *igual a la altura dada. Si se conoce el ángulo en el vértice, se construyen en* A *y a cada lado de* AD, *ángulos iguales a la mitad de dicho ángulo; si se conoce el ángulo básico a cada lado de* AD, *se construyen en* A *ángulos iguales al complemento del ángulo dado.*

• 8.º La altura y uno de los lados iguales.—*Sobre una recta se traza una perpendicular* DA (fig. 25) *igual a la altura. Desde el punto* A *como centro, y con un radio igual al lado, se describe un arco que corte a la recta en dos puntos* B *y* C *que serán los extremos de la base del triángulo pedido.*

• 9.º Un lado, la altura correspondiente y un ángulo adyacente a este lado. *Para determinar un triángulo isósceles, bastan dos cualesquiera de las condiciones siguientes:*

a) Un lado AB y la altura correspondiente CE (fig. 26).—*Sobre una recta se traza una perpendicular* EC *igual a la altura dada; desde el punto* C *como centro, y con el lado dado por radio, se corta en* A *la primera recta, luego se toma* AB = AC.

b) Un lado AB y un ángulo adyacente a este lado (fig. 26).—*Si se da el ángulo en el vértice* A, *se toma* AC = AB. *Si se da el ángulo básico, sobre un lado del ángulo se señala la distancia* AB; *desde el punto* A *por centro, con* AB *por radio, se corta en* C *el segundo lado del ángulo.*

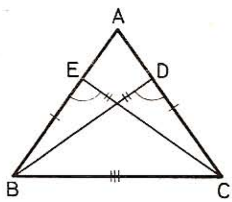


Fig. 26

c) La altura CE y un ángulo.—*Sobre una recta se traza una perpendicular* EC (fig. 26) *igual a la altura, y con* CE *por lado, se construye en el punto* C *un ángulo complementario del ángulo dado; si se conoce* A, *hay que tomar* AB = AC; *si se conoce* B, *se traza una perpendicular en el punto medio de* BC, *y así queda determinado el vértice* A.

44. Construir un triángulo isósceles, conociendo:

1.º La hipotenusa.
2.º Un cateto.
3.º La altura.
4.º El perímetro.

• 1.º La hipotenusa.—*En el punto medio de la hipotenusa se levanta una perpendicular igual a la mitad de dicha hipotenusa.*

• 2.º Un cateto.—*En cada lado de un ángulo recto se toma una longitud igual al cateto dado.*

• 3.º La altura.—*Sobre una recta se traza una perpendicular igual a la altura, y en la recta se señala la longitud de la altura a cada lado del pie de esta perpendicular.*

• 4.º El perímetro.—*Se procede como en el problema número* **42,** 2.º; *pero en los extremos del perímetro se construyen ángulos de* 22º 30′, *o sea iguales a la mitad del ángulo de* 45º.

45. Construir un triángulo rectángulo, conociendo:

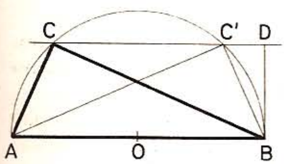


Fig. 27

1.º La hipotenusa y la altura correspondiente.
2.º La hipotenusa y un cateto.
3.º La hipotenusa y un ángulo agudo.
4.º La hipotenusa y la diferencia de los ángulos agudos.
5.º La hipotenusa y el punto de intersección de las medianas.

• 1.º La hipotenusa y la altura correspondiente. *Siendo recto el ángulo inscrito en una semicircunferencia* (fig. 27), *sobre la hipotenusa* AB *como diámetro* *se describe una semicircunferencia, se traza una perpendicular* BD *igual a la altura dada y se traza* DC *paralela a* AB. *Los puntos* C *y* C′ *en que esta paralela corta a la semicircunferencia, son los vértices de los triángulos iguales pedidos* ABC *y* ABC′.

• 2.º La hipotenusa y un cateto.—*Sobre la hipotenusa como diámetro se describe una semicircunferencia, y desde el punto* A *como centro con un radio igual al cateto dado, se describe un arco que corte a la semicircunferencia en un punto* C *que será un vértice del triángulo pedido.*

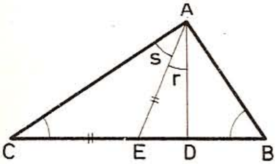


Fig. 28

• 3.º La hipotenusa y un ángulo agudo.—*Sobre la hipotenusa* AB *como diámetro se describe una semicircunferencia, y en el punto* A *se construye un ángulo igual al ángulo dado. El punto* C *en que el lado* AC *corta a la semicircunferencia será el vértice del triángulo pedido.*

• 4.º La hipotenusa y la diferencia de los ángulos agudos.—*En todo triángulo rectángulo el ángulo formado por la altura y la mediana que parten desde el vértice del ángulo recto es igual a la diferencia de los ángulos agudos* (n.º **39**).

Para obtener el triángulo pedido hay que construir un ángulo r (fig. 28) *igual al ángulo dado, y en la mediana se toma* AE *igual a la mitad de la hipotenusa, y desde el punto* E *se trazará una perpendicular* ED *al otro lado* AD. *Se prolongará esta perpendicular, sobre la cual se señalarán en cada lado del punto* E, *longitudes* EB *y* EC *iguales a la mitad de la hipotenusa. Los puntos* A, B *y* C *son los vértices del triángulo solución.*

• 5.º La hipotenusa y el punto de intersección de las medianas.—*Si se conoce la posición de la hipotenusa* AB *y el punto* O, *intersección de las medianas* (fig. 29), *para construir el triángulo se une el punto* O *con el punto* D, *mitad de la hipotenusa; luego se prolonga* OD *una longitud* OC *doble de* OD, *pues las medianas se cortan en los 2/3 de su longitud, desde el vértice.*

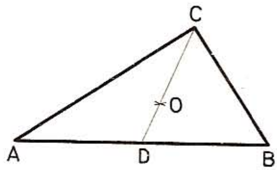


Fig. 29

Por último se une el punto C *con los extremos* A *y* B *de la hipotenusa.*

46. Construir un triángulo, conociendo:
1.º Dos medianas y el lado comprendido.
2.º Dos medianas y el lado adyacente.
3.º Una mediana y dos lados.
4.º Las tres medianas.
5.º Un lado y el punto de intersección de las medianas.
6.º La base, la altura correspondiente y el ángulo opuesto a la base.
7.º Un lado, el ángulo opuesto y una altura que no caiga sobre este lado.
8.º Un lado, un ángulo adyacente y la mediana que parte desde el extremo de la base en que no está el ángulo.

• 1.º Dos medianas y el lado comprendido.—*Con el lado* BC *y las medianas* BE *y* CF *se construye el triángulo* BOC, *tomando los 2/3 de las medianas dadas; luego se prolongan estas medianas hasta que tengan su verdadera longitud, y se trazan las rectas* BF *y* CE *cuya intersección determinará el vértice* A.

• 2.º Dos medianas y el lado adyacente.—*Con las medianas* AD *y* BE, *y el lado* BC (fig. 30) *puede construirse el triángulo* BOD; *luego dando a las rectas* BDC *y* DOA *sus verdaderas longitudes, resultarán los vértices* C *y* A.

• 3.º Una mediana y dos lados.—a) *Con los lados* AB *y* BC *y la mediana* AD (fig. 30), *puede construirse el triángulo* ABD *y con él obtenerse el vértice* C.

b) *Con los lados* AB *y* AC *y la mediana* AD *puede construirse el triángulo* ABA′ (*tomando* BA′ = AC *y* AA′ = 2AD); *en este triángulo se trazará la mediana* BD *que se prolongará con su propia longitud, y así resultará el tercer vértice.*

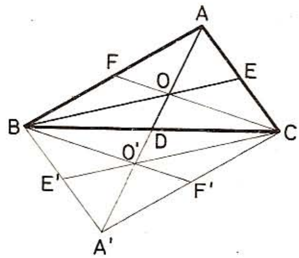


Fig. 30

• 4.º Las tres medianas.—*Con las tres medianas se puede construir el triángulo* BOO′ (fig. 30), *cuyos lados tengan por longitud los 2/3 de las medianas dadas. En este triángulo se trazará la mediana* BD *que se prolongará con su propia longitud, y así resultará el vértice* C; *por último, dando a* DOA *su verdadera longitud, tendremos el vértice* A.

• 5.º Un lado y el punto de intersección de las medianas.—*Se unen los extremos del lado dado con el punto en que se cortan las medianas y se prolonga cada uno de los segmentos trazados una cantidad igual a la mitad de su longitud; así resulta el punto medio de cada uno de los otros dos lados.*

• 6.º La base, la altura correspondiente y el ángulo opuesto a la base.—*Si no tuviéramos en cuenta la altura, el vértice podría hallarse en un punto cualquiera del arco* ACB, *capaz del ángulo dado* (fig. 31).

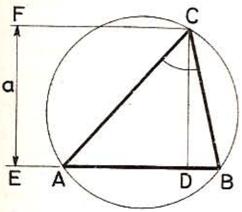


Fig. 31

Pero todos los triángulos que tienen AB *por base y* a *por altura tienen su tercer vértice en una paralela* FC, *distante de* AB *una longitud dada* a. *Luego el vértice* C *será el punto de intersección de la paralela* FC *y del arco capaz del ángulo dado.*

• 7.º Un lado, el ángulo opuesto y una altura que no caiga sobre este lado.—*Sea* AB *el lado dado* (figura 32).

Sobre esta recta como diámetro se describe una semicircunferencia y desde el punto B *como centro, con un radio igual a la altura dada, se describe un arco que corte a la semicircunferencia en el punto* D. *Uniendo este punto con los extremos del diámetro* AB, *resulta el triángulo rectángulo* ABD. *En la prolongación de* AD *se construye el ángulo* C′ *igual al ángulo dado; luego desde* B *se traza una paralela al lado* C′E, *y así resulta el triángulo pedido* ABC.

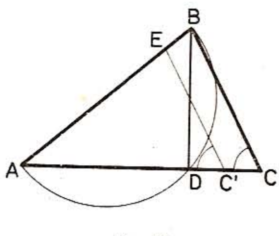


Fig. 32

• 8.º Un lado, un ángulo adyacente y la mediana que parte desde el extremo de la base en que no está el ángulo.—*Conociendo el lado* BC, *el ángulo* B *y la mediana* CF, *se traza* BC *y se construye* *el ángulo* B; *desde el punto* C, *con un radio igual a la mediana dada, se describe un arco que determina el pie* F *de esta mediana. Se obtiene el tercer vértice tomando* FB = FA.

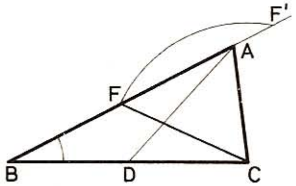


Fig. 33

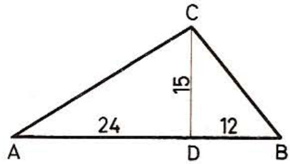


Fig. 34

Si CF *es menor que* CB, *el arco descrito desde* C *corta a* BA *en dos puntos y el problema tiene dos soluciones.*

47. Construir un triángulo cualquiera, conociendo:

1.º La base y la altura cuyo pie se halla a los 2/3 de dicha base.
2.º La base, la mediana y la altura que parten desde el mismo vértice.
3.º Los puntos medios de los tres lados.
4.º Dos lados y la altura relativa a uno de ellos.
5.º Dos lados y la altura relativa al tercero.
6.º El perímetro y los ángulos.
7.º Un lado, un ángulo adyacente y la suma o la diferencia de los otros lados.

● 1.º La base y la altura cuyo pie se halla a los 2/3 de dicha base. — *En el punto* D (fig. 34) *tomado a los 2/3 de la base, se traza una perpendicular* DC *igual a la altura dada.*

● 2.º La base, la mediana y la altura que parten desde el mismo vértice. *Se construye un triángulo rectángulo* DAE (fig. 28) *con la mediana* AE *por hipotenusa, y la altura* AD *por uno de los catetos* (GEOM. **263,** *a*); *luego se toma* EB *y* EC *iguales a la mitad de la base.*

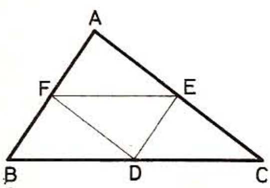


Fig. 35

● 3.º Los puntos medios de los tres lados. — *Sea* ABC (fig. 35) *un triángulo cualquiera y* D, E, F *los puntos medios de los tres lados. Los lados del triángulo* DEF *son paralelos, respectivamente, a los del triángulo* ABC.

Por tanto, basta construir el triángulo DEF *y trazar, desde los vértices, paralelas a los lados opuestos; así resultará el triángulo* ABC.

● 4.º Dos lados y la altura relativa a uno de ellos. — *Sea* ABC (fig. 36) *el triángulo pedido. Conociendo los lados* AB *y* BC *y la altura* AD, *se trazará una recta* BC, *y en un punto cualquiera* D *se trazará la altura* DA; *desde el punto* A, *con* AB *por radio, se cortará* BC *en* B, *y a* BC *se le dará su longitud.*

• 5.° Dos lados y la altura relativa al tercero. *Conociendo los lados* AB *y* AC (fig. 36) *y la altura* AD, *en una recta* BC *se trazará una perpendicular* AD *igual a la altura; desde el punto* A *como centro y con radios iguales a los lados dados se cortará* BC *en* B *y* C, *lo que determinará el triángulo.*

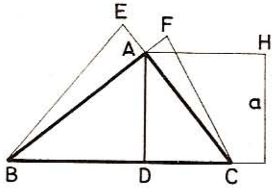


Fig. 36

• 6.° El perímetro y los ángulos. — *Consideremos un triángulo cualquiera* ABC (fig. 37), *prolonguemos* BC *en ambos sentidos, tomemos* BD = BA, CE = CA *y tracemos* AD *y* AE.

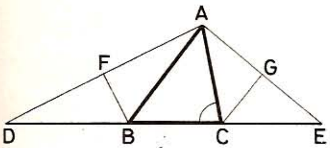


Fig. 37

El triángulo ABD *es isósceles, así como el triángulo* ACE. *Por tanto, el ángulo* D *es la mitad del ángulo en* B, *exterior al triángulo* ABD. *También* $\angle E = \angle C : 2$.

Luego, se traza una recta DE *igual al perímetro dado, y se construyen en* D *y* E *ángulos que sean la mitad de dos de los ángulos dados; así se determina el vértice* A; *las mediatrices de* AD *y* AE *darán los otros dos vértices* B *y* C.

• 7.° Un lado, un ángulo adyacente y la suma o la diferencia de los otros lados. — *Sea el triángulo* ABC *del cual se conoce el lado* AB, *el ángulo* A *y la suma* (fig. 38) *o la diferencia* (fig. 39), AD, *de los otros dos lados. Puede construirse el*

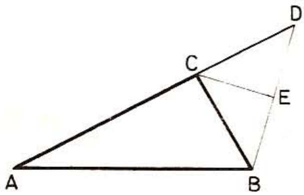


Fig. 38

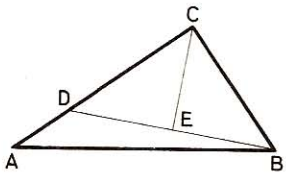


Fig. 39

ángulo A, *y en sus lados señalar las longitudes* AB *y* AD. *Siendo el segmento* CD *igual a* CB, *el triángulo* BCD *es isósceles; por consiguiente se trazará* BD; *y en su punto medio la perpendicular* EC *señalará el tercer vértice del triángulo.*

48. Construir un triángulo dados los lados AB = 8 cm y AC = 7 cm, así como la mediana AM = 7 cm.

Supongamos el problema resuelto. Construido el triángulo ABC (fig. 40) *y trazada la mediana* AM, *se prolonga ésta una parte* MD = MA *y se une* D *con* B *y* C. *La figura que resulta es un paralelogramo, pues* $\triangle AMB = \triangle DMC$ *por tener un ángulo igual en* M *y los lados que le forman también iguales,*

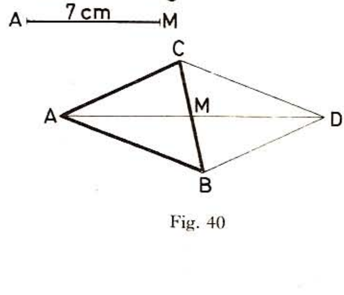


Fig. 40

ocurriendo otro tanto con los triángulos AMC *y* DMB; *por tanto:* BD = AC. *Pero en* $\triangle$ADB *tenemos:*

$$\mathrm{AB} = 8 \text{ cm} \qquad \mathrm{BD} = \mathrm{AC} = 7 \text{ cm} \qquad y \qquad \mathrm{AM} = \frac{\mathrm{AD}}{2} = 7 \text{ cm}$$

Luego bastará construir este triángulo y unir luego M *con* B, *la cual se prolonga, tomando* MC = MB *para hallar el vértice* C.

49. Construir un triángulo, dados el ángulo ABC (fig. 41) y las alturas AH y BD.

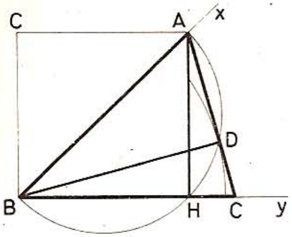


Fig. 41

Construyamos el ángulo yBx *igual al dado; desde* B *tracemos la perpendicular* BE *igual a la altura* AH.

La paralela a By *trazada por el punto* E *dará el* A *vértice del triángulo.*

La altura BD *perpendicular a* AC *determina el triángulo rectángulo* ADB, *cuyo ángulo recto está sobre la circunferencia, que tiene* AB *por diámetro.*

Descrita esta circunferencia, con un radio igual a la altura BD, *desde* B *se obtendrá el* D, *el cual, unido con* A *y prolongado el segmento, nos dará el* C; *con lo cual queda construido el triángulo pedido.*

V. Teoremas

50. Uniendo los tres vértices de un triángulo con un punto interior de este triángulo, la suma de los tres segmentos de unión está comprendida entre la suma y la semisuma de los tres lados del triángulo.

Sabemos que:

$$\left.\begin{aligned} c < m + n < a + b \\ a < n + r < b + c \\ b < m + r < a + c \end{aligned}\right\} \textit{sumando}$$

$$a + b + c < 2m + 2n + 2r < 2a + 2b + 2c$$

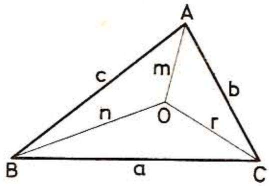


Fig. 42

y finalmente

$$\frac{\mathbf{a + b + c}}{2} < \mathbf{m + n + r < a + b + c}$$

51. Cortándose las alturas AH y BP del triángulo ABC (fig. 43) en el punto T, y siendo $\angle$C = 52°, ¿cuál será el valor de los ángulos que se forman en el punto T?

- 1.° El triángulo es acutángulo.—*En este caso, el punto* T *se hallará en el interior del triángulo. La suma de los ángulos del cuadrilátero birrectángulo* CPTH *es igual a cuatro rectos. Siendo rectos los* $\angle$P *y* $\angle$H, *el* $\angle$PTH *será el suplemento del* $\angle$C, *por tanto:*

$$\angle \mathbf{PTH} = \angle \mathrm{ATB} = 180^\circ - 52^\circ = \mathbf{128^\circ}$$

Los ángulos iguales PTA *y* HTB, *como suplementos de los anteriores, serán iguales al* $\angle$C, *esto es, de* **52°**.

2.° El triángulo es obtusángulo. — *Si es* $\angle$B *el ángulo obtuso, el punto* T, *donde se cortan las alturas, estará situado en su prolongación fuera del triángulo* (fig. 44).

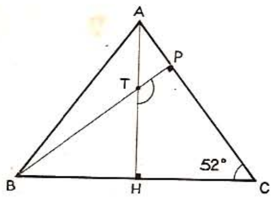


Fig. 43

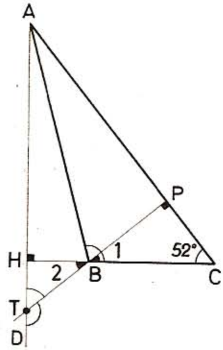


Fig. 44

Los ángulos 1 *y* 2, *opuestos por el vértice, son iguales, siendo uno complemento del* $\angle$C *y el otro del* $\angle$PTA; *de aquí que este último será igual al* $\angle$C = **52°** *y el* $\angle$DTB, *su suplemento, será:*

$$\angle \mathbf{DTB} = 180° - 52° = \mathbf{128°}$$

52. Dado un triángulo ABC (fig. 45) en el cual es AB = AC. Si por un punto D, tomado en AB, se traza el segmento DE, paralelo a BC, demuéstrese que BD = CE.

Por ser DE *paralelo a* BC, *tendremos:*

$$\left.\begin{array}{l}\angle E = \angle C \\ \angle D = \angle B\end{array}\right\} \angle E = \angle D$$

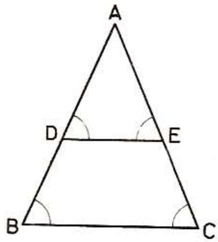


Fig. 45

Siendo iguales los segundos miembros, los primeros también lo serán; por tanto, el triángulo parcial ADE *será isósceles, lo mismo que el triángulo dado, luego:*

$$\left.\begin{array}{l}AB = AC \\ AD = AE\end{array}\right\} \text{restando}$$
$$\overline{\mathbf{DB}} = \overline{\mathbf{EC}}$$

53. Dado un triángulo ABC (fig. 46), se traza la bisectriz exterior AA′ del ángulo A y sobre AC, se toma una longitud AD = AB. Demostrar que el segmento BD es paralelo a AA′.

Por construcción, el $\triangle$ABD *es isósceles; por tanto:*

$$\angle B = \angle D.$$

Siendo el ángulo externo BAE, *la suma de esos dos ángulos iguales, su mitad* $\angle$A′AE *igualará a* $\angle$ABD, *y como son correspondientes con relación a la secante* AD *y a las rectas* AA′ *y* BD, *estas dos últimas serán paralelas.*

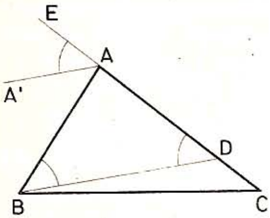


Fig. 46

54. Si en un triángulo rectángulo uno de los ángulos agudos es la mitad del otro, el cateto menor será la mitad de la hipotenusa.

En este caso uno de los ángulos agudos valdrá 30º *y el otro* 60º. *Véase problema n.º* **88.**

55. En un triángulo isósceles ABC (AB = AC) (figura 47), se toma un punto cualquiera, M, sobre la altura AH y por él trazamos un segmento ED perpendicular a ésta. Demuéstrese que se verifican las igualdades:

$$EM = MB \qquad EH = DH \qquad y \qquad \angle BEH = \angle HDC$$

La altura AH *del triángulo isósceles es además bisectriz de* $\angle A$ *y mediatriz de* BC; *por tanto:*

$$BH = HC \qquad (1)$$

Se cumple $\triangle AME = \triangle AMD$

por tener un lado igual AM *común adyacente a ángulos respectivamente iguales:*

$$\angle A_1 = \angle A_2 \qquad y \qquad \angle AME = \angle AMD = 90^\circ$$

Por tanto: **EM = MD**

También $\triangle EBH = \triangle DCH$

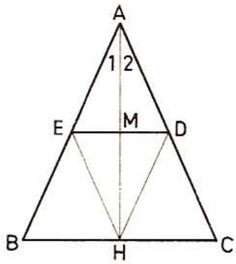


Fig. 47

por tener un ángulo igual $\angle B = \angle C$ *comprendido entre lados respectivamente iguales:*

$$BH = HC \quad (1) \qquad y \qquad BE = CD \quad (\text{n.º } \mathbf{52})$$

Por tanto: **EH = DH** *y* $\angle$ **BEH** = $\angle$ **HDC**

56. Dado un triángulo ABC (fig. 48), se trazan las bisectrices interiores a los ángulos B y C y por el punto D, donde se cortan, trazamos el segmento MN paralelo al lado BC. Demuéstrese que se realiza la igualdad:

$$MN = MB + NC$$

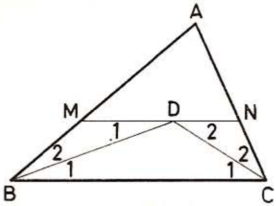


Fig. 48

Por hipótesis $\angle B_1 = \angle B_2$

Por alternos internos: $\angle D_1 = \angle B_1$

luego $\angle D_1 = \angle B_2$

Por tanto $\triangle MBD$ *es isósceles*

y $MD = MB \qquad (1)$

También $\triangle NDC$ *es isósceles*

y $ND = NC \qquad (2)$

Sumando (1) *con* (2) *se obtiene:*

$$MD + ND = MB + NC$$

O sea **MN = MB + NC**

57. Dado un triángulo ABC (fig. 49), se construyen los triángulos equiláteros ABC′, ACB′, BCA′. Demostrar que se tienen las igualdades:

$$AA' = BB' = CC'$$

Los triángulos ACA′ *y* BCB′ *tienen:*

$$AC = CB' = b$$
$$CA' = CB = a$$
$$\angle ACA' = \angle BCB'$$

por estar compuestos de una parte común, $\angle ACB$, *y de un ángulo del triángulo equilátero.*

Por tanto $\triangle ACA' = \triangle BCB'$

y $AA' = BB'$

Del mismo modo demostraríamos que

$\triangle BAB' = \triangle CAC'$ *y* $BB' = CC'$

Por consiguiente: $\mathbf{AA' = BB' = CC'}$

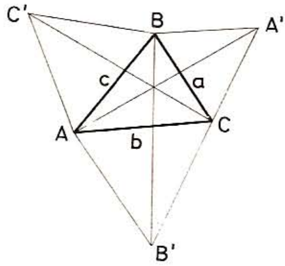


Fig. 49

58. En todo triángulo isósceles, al desplazarse un punto cualquiera M sobre la base BC (fig. 50), la suma de las distancias de dicho punto a los lados iguales AB y AC es constante.

Tracemos ME *y* MD *perpendiculares a los lados* AB *y* AC.

Tracemos también CF *perpendicular a* AB *y* MH *perpendicular a* CF, *es decir, paralela a* AB.

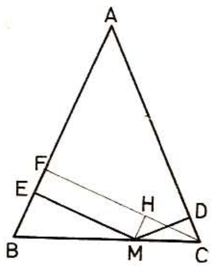


Fig. 50

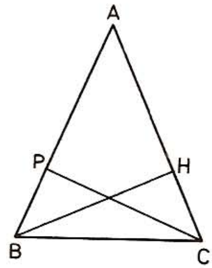


Fig. 51

El cuadrilátero MHFE *es un rectángulo y por tanto* $ME = HF$ (1)

Los triángulos rectángulos MHC *y* MDC *tienen la hipotenusa común y un ángulo agudo igual* $\angle HMC = \angle DCM$ *por ser ambos iguales al ángulo* $\angle B$ *del triángulo isósceles dado:* $\angle DCM = \angle B$ *por hipótesis;* $\angle HMC = \angle B$ *por correspondientes.*

Luego $MD = HC$ (2)

Sumando miembro a miembro (1) *y* (2) *tenemos:*

$$ME + MD = HF + HC = CF = \text{Cte}$$

Luego, *la suma de las distancias del punto* M *a los dos lados del triángulo, es igual a la altura trazada desde uno de los ángulos básicos.*

59. En un triángulo ABC (fig. 51) las alturas BH y CP son iguales. Demuéstrese que el triángulo es isósceles.

De la igualdad de los triángulos rectángulos BCH *y* CBP *se deduce que* $\angle$ PBC = $\angle$ HCB.

Como el $\triangle$ABC *tiene* $\angle$ B = $\angle$ C, *también tendrá* **AB** = **AC** *y, por tanto, será isósceles.*

60. En todo triángulo rectángulo el segmento perpendicular trazado desde el ángulo recto a la hipotenusa es menor que ésta.

El segmento perpendicular AD *trazado desde el punto* A *es menor que cualquier segmento que parta del mismo punto, luego* AD < AB.

Comparando los segmentos BA *y* BC *trazados desde* B *sobre* AC, *tenemos:*

$$AB < BC$$

Por tanto:

$$\mathbf{AD} < AB < \mathbf{BC}$$

61. En todo triángulo (fig. 52), una altura es menor que la semisuma de los lados adyacentes, y la suma de las tres alturas, es menor que el perímetro del triángulo.

Sea AD *la altura relativa a* BC, *tendremos:*

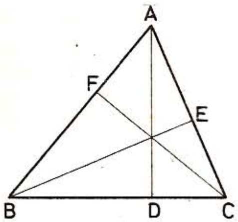


Fig. 52

$$\left.\begin{matrix} AD < AB \\ AD < AC \end{matrix}\right\} \; 2\,AD < AB + AC$$

$$AD < \frac{AB + AC}{2} \qquad (1)$$

Análogamente:

$$BE < \frac{AB + BC}{2} \qquad (2)$$

$$CF < \frac{AC + BC}{2} \qquad (3)$$

y sumando:

$$\mathbf{AD} + \mathbf{BE} + \mathbf{CF} < \mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{AC}$$

62. Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto O, centro de la circunferencia circunscrita a ese triángulo.

Sea el triángulo ABC (fig. 53). *Las* 3 *mediatrices de un triángulo* (GEOM. **152**) *se cortan en un punto que equidista de los vértices.*

Es decir: OA = OB = OC

Por consiguiente, O *es el centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices, por lo que se le da el nombre de circunscrita al triángulo.*

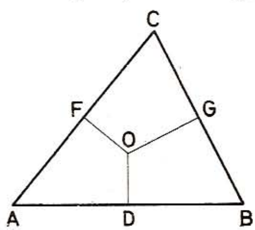


Fig. 53

63. La mediatriz de la base de un triángulo isósceles pasa por el vértice opuesto y es bisectriz del ángulo en el vértice de ese triángulo.

Sea el triángulo ABC (fig. 59). *Las dos oblicuas* *iguales* AB *y* AC, *que equidistan del punto* D *medio de* BC, *demuestran que* AD *es la perpendicular trazada desde el vértice* A; *por tanto, la mediatriz* AD *es al propio tiempo altura y mediana del triángulo* ABC.

Si hacemos girar el triángulo ADC *tomando a* AD *por eje de giro, por ser rectos los dos ángulos en* D, *y* **DC = DB,** *el triángulo* ADC *coincidirá con* ADB, *siendo por tanto iguales; de aquí que los dos ángulos en* A *lo serán también; por consiguiente, la recta* AD *es la bisectriz del ángulo* A.

64. Enumerar las propiedades principales del triángulo isósceles.

- 1.ª *A los lados iguales corresponden ángulos iguales.*
- 2.ª *Las alturas y medianas correspondientes a los lados iguales, son iguales; lo mismo que las bisectrices de los ángulos iguales comprendidas entre el vértice y el lado opuesto.*
- 3.ª *La altura relativa al lado desigual es, a la vez, mediana y mediatriz de ese mismo lado y bisectriz del ángulo opuesto.*
- 4.ª *La bisectriz del ángulo externo del ángulo del vértice, o sea del ángulo externo de* $\angle$ A, *es paralela al lado desigual* BC.
- 5.ª *Dos triángulos isósceles son iguales si tienen el ángulo en el vértice igual y la altura correspondiente al mismo, igual.*
- 6.ª *Dos triángulos isósceles son iguales cuando tienen iguales la base y la altura correspondiente a la misma.*

65. Dado un triángulo rectángulo ABC (fig. 54), tal que sea AB < AC, se traza la altura AH, y se toma, sobre HC, un segmento HD = HB. Se traza AD, y se prolonga, tomando en esta prolongación el punto E, el cual se une al C, de modo que $\angle$ECD = $\angle$ACD. Demuéstrese que $\angle$DEC es recto.

Señalemos con el número 1 *el* $\angle$ ABC; *con el* 2, *el* $\angle$ACB; *con el* 3 *y el* 4, *los dos ángulos opuestos en* D; *y con el* 5, *el* $\angle$ DCE.

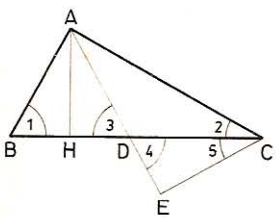


Fig. 54

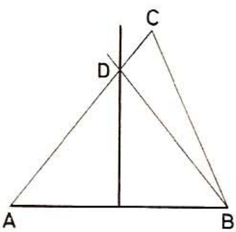


Fig. 55

Los ángulos 2 *y* 5 *son iguales por construcción, los* $\angle 3$ *y* $\angle 4$, *por opuestos por el vértice, y el* $\angle 1$ *y* $\angle 3$, *por ser el triángulo* ABD *isósceles.*

Pero el $\angle 1$ *y* $\angle 2$ *son complementarios; por tanto, el* $\angle 4$ *y* $\angle 5$ *lo serán también, porque*

$$\angle 5 = \angle 2 \quad y \quad \angle 4 = \angle 3 = \angle 1$$

Por consiguiente, el $\angle$ **E será recto.**

66. Demuéstrese directamente que todo punto exterior a la mediatriz de un segmento, no equidista de los extremos de éste (fig. 55).

Tenemos: $\quad \mathrm{AC} = \mathrm{AD} + \mathrm{DC} = \mathrm{BD} + \mathrm{DC}$

pero $\quad \mathrm{BD} + \mathrm{DC} > \mathrm{BC}$

por tanto $\quad \mathbf{AC} > \mathbf{BC}$

67. La suma de las tres alturas de un triángulo (fig. 56), es menor que el perímetro de dicho triángulo.

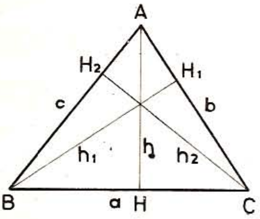


Fig. 56

Tenemos: $\quad h < c \quad$ y $\quad h < b$

de donde $\quad 2\,h < b + c,$

$$h < \frac{b + c}{2}$$

y análogamente $\quad h_1 < \dfrac{a + c}{2}$

$$h_2 < \frac{a + b}{2}$$

luego $\quad \mathbf{h} + \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 < \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

68. La mediana de un triángulo es menor que la semisuma de los dos lados adyacentes.

Sea AO *una mediana del triángulo* ABC (fig. 57). *Prolonguemos* AO *y tomemos* $\mathrm{OD} = \mathrm{AO}$ *y tracemos* BD.

$$\triangle \mathrm{AOC} = \triangle \mathrm{BOD}$$

por tener en O *un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales; por tanto* $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$. *Además, en el triángulo* ABD *tenemos:*

$$\mathrm{AD} < \mathrm{AB} + \mathrm{BD}$$

o sea $\quad \mathrm{AD} < \mathrm{AB} + \mathrm{AC}$

de donde $\quad \mathbf{AO} < \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,(\mathbf{AB} + \mathbf{AC})$

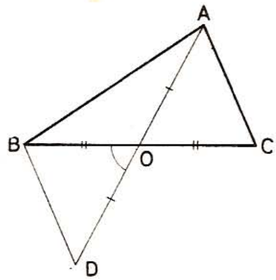


Fig. 57

69. La suma de las tres medianas de un triángulo está comprendida entre el perímetro y el semiperímetro del mismo.

Sean AD, BE *y* CF *las tres medianas del triángulo* ABC (fig. 58). *Siendo cada mediana menor que la semisuma de los dos lados adyacentes se tendrá:*

$$\mathrm{AD} < \frac{1}{2}\,\mathrm{AB} + \frac{1}{2}\,\mathrm{AC}$$

$$\mathrm{BE} < \frac{1}{2}\,\mathrm{AB} + \frac{1}{2}\,\mathrm{BC}$$

$$\mathrm{CF} < \frac{1}{2}\,\mathrm{AC} + \frac{1}{2}\,\mathrm{BC}$$

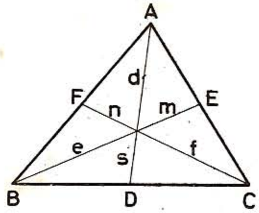


Fig. 58

de donde

$$\mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF} < \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{AC} = 2p$$

Por otra parte tenemos:

$$e + s > \mathrm{BD}; \quad f + m > \mathrm{CE}; \quad d + n > \mathrm{AF}$$

y sumando estas tres desigualdades, tendremos:

$$\mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF} > \mathrm{BD} + \mathrm{CE} + \mathrm{AF} = p$$

por tanto: $\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{AC} > \mathrm{AD} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF} > \mathrm{BD} + \mathrm{CE} + \mathrm{AF}$

o bien $$\mathbf{2p > AD + BE + CF > p}$$

70. La suma de las tres medianas de un triángulo es mayor que los 3/4 del perímetro.

Sean a, b, c, *los lados del triángulo;* m, n, p, *las medianas. Como el punto de intersección está a los* 2/3 *de cada una, se tendrá:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}n &> c \\ \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}p &> a \\ \frac{2}{3}p + \frac{2}{3}m &> b \end{aligned}\right\}\ \textit{sumando}$$

$$\frac{4}{3}(m+n+p) > a+b+c$$

o bien $$\mathbf{m + n + p > \frac{3}{4}(a + b + c)}$$

71. Un triángulo en el cual una recta es al mismo tiempo bisectriz y altura, es isósceles.

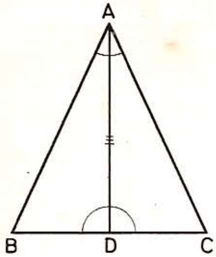


Fig. 59

Sea el triángulo ABC (fig. 59) *en el que la recta* AD *es a la vez altura y bisectriz.*

Por ser AD *bisectriz, los ángulos en* A *son iguales; los ángulos en* D *lo son también por ser* AD *altura.*

Luego △ADB = △ADC *por tener un lado igual,* AD, *adyacente a ángulos respectivamente iguales* (GEOM. **65**).

Por tanto, **AB = AC,** *y el triángulo* ABC *será isósceles.*

72. Todo triángulo isósceles tiene dos medianas iguales, dos bisectrices iguales y dos alturas iguales.

Sea el triángulo isósceles ABC (fig. 60); *demostremos:*

- 1.º Las dos medianas BD y CD son iguales.

En efecto, △BDA = △ECA (2.º criterio), *por tanto,* **BD = CE.**

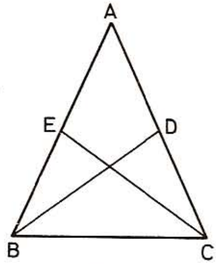


Fig. 60

- 2.º Las bisectrices BD y CE son iguales.

En efecto, △BDA = △ECA (1.$^{\text{er}}$ criterio), *pues* ∠A *es común y* $\frac{\angle B}{2} = \frac{\angle C}{2}$; *por consiguiente,* **BD = CE.**

- 3.º Las alturas BD y CE son iguales. *En efecto,* △BDA = △ECA, *rectángulos que tienen la hipotenusa igual* (AB = AC), *y el ángulo agudo* A *común; luego* **BD = CE.**

73. Todo punto tomado fuera de la bisectriz de un ángulo no equidista de los lados de este ángulo (fig. 61).

Sea D *un punto tomado fuera de la bisectriz* AO *del ángulo* A, *y* DE *y* DC *las distancias de este punto a los lados* AE *y* AB. *Tracemos la perpendicular* OB *a* AE *y la recta* BD.

Por estar el punto O *sobre la bisectriz, será:*

$$OB = OC$$

pero

$$DE < DB < OB + OD$$

de donde

$$\mathbf{DE < DC}$$

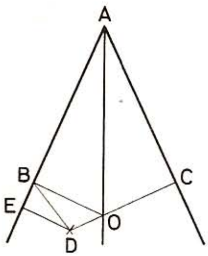


Fig. 61

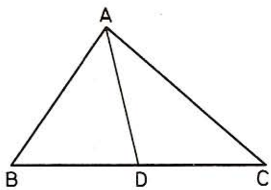


Fig. 62

74. Dado un triángulo ABC (fig. 62), trazamos la mediana AD. Demuéstrese que si el ángulo ADB es agudo y el ADC obtuso, será AB < AC.

En efecto, los triángulos ADB *y* ADC *tienen dos lados iguales, pero los ángulos comprendidos son desiguales; los lados opuestos a éstos serán también desiguales, siendo menor el lado opuesto al ángulo menor* (GEOM. **87**).

Por tanto, **AB < AC**

75. En los dos triángulos ABC y A′B′C′ (fig. 63) se tiene AB = A′B′ y ∠B = ∠B′. Demuéstrese que si AC < A′C′, también será BC < B′C′.

Tracemos la perpendicular AD, *en el triángulo* ABC *y en el* A′B′C′ *la* A′D′. *Llevemos el triángulo* A′B′C′ *sobre el* ABC, *de modo que* A′B′ *caiga sobre* AB. *Por ser* ∠B = = ∠B′, *la recta* B′C′ *tomará la dirección de* BC, *y como los pies de dos oblicuas iguales se apartan igualmente del pie de la perpendicular, tendremos que* B′D′ = BD *y los puntos* D′ *y* D *coinciden.*

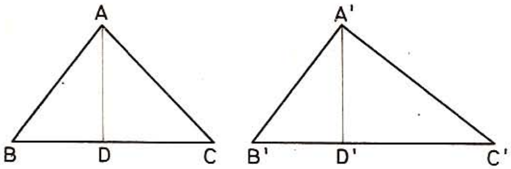


Fig. 63

Pero como los pies de dos oblicuas desiguales se apartan desigualmente del pie de la perpendicular, siendo el pie de la mayor el que más se aleja, el punto C′ *se hallará en la prolongación de* BC *y, por tanto,*

B′C′ > BC *o sea* **BC < B′C′**

76. ¿Cuáles son los dos casos particulares de igualdad de los triángulos rectángulos?

1.^er^ caso.—*Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen la hipotenusa igual y un ángulo agudo igual; porque la hipotenusa y un cateto vienen a ser como una oblicua y perpendicular trazadas desde un punto; los pies de estas oblicuas iguales equidistan del pie de la perpendicular y, como desde un punto, sólo se puede trazar una perpendicular, si se superponen los triángulos de modo que coincidan las hipotenusas, esta superposición implica la de los catetos.*

2.º caso.—*Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen las hipotenusas iguales y un cateto igual, pues siendo las hipotenusas oblicuas iguales, sus pies equidistarán del pie de la perpendicular, y por tanto los otros dos catetos serán también iguales.*

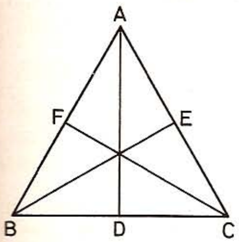


Fig. 64

77. Si las tres alturas de un triángulo son iguales, dicho triángulo es equilátero (fig. 64).

Por ser △ADB = △BEA ⟶ ∠ABC = ∠BAC
» △ADC = △CFA ⟶ ∠ACB = ∠BAC
Por tanto: ∠ABC = ∠BAC = ∠ACB

y al ser el triángulo equiángulo es equilátero.

78. Dado un ángulo XOY (fig. 65), se toma sobre OX una longitud OA y sobre OY otra OB, tales que OA = OB, uniendo A con B. Demuéstrese que la bisectriz del ángulo pasará por el punto medio M de AB. Aplicación para el trazado de la bisectriz de un ángulo.

Por ser $\triangle$OAM = $\triangle$OBM *tendremos que* MA = MB, *y* **M será el punto medio de AB.**

Para trazar la bisectriz de un ángulo se toman, a partir del vértice, longitudes iguales en cada lado, se unen los extremos, y por el punto medio de la recta que los une y el vértice, se traza la recta OM, *que será la bisectriz pedida.*

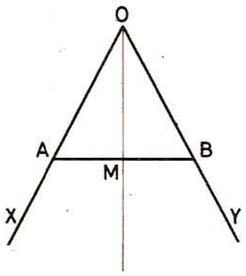


Fig. 65

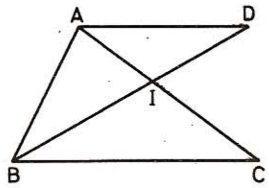


Fig. 66

79. Cuando dos triángulos ABC y ABD (fig. 66) tienen un lado común AB y los AC y BD que se cortan, la suma de los lados que no se cortan es menor que la suma de los otros dos.

Sea I *el punto de intersección de los lados* AC *y* BD, *tendremos:*

$$\begin{array}{c} BC < CI + BI \\ AD < AI + DI \\ \hline \mathbf{BC + AD < AC + BD} \end{array}$$

80. Dado un ángulo agudo XOY (fig. 67) y un punto A tomado en el interior de ese ángulo, tomemos los puntos simétricos A′ y A″ de ese punto respecto de los lados del ángulo; se traza la recta A′A″, la cual determina los puntos B y C sobre dichos lados. Demuéstrese que el perímetro del triángulo ABC es menor que el de cualquiera otro AB′C′, cuyos vértices estén sobre los lados OX y OY.

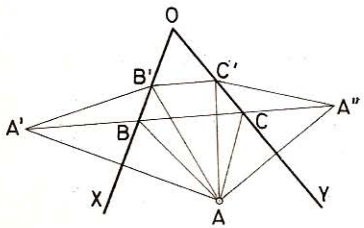


Fig. 67

En el $\triangle$ ABA′ *se tiene* AB = A′B
» $\triangle$ ACA′ » AC = A″C
» $\triangle$ AB′A′ » AB′ = A′B′
» $\triangle$ AC′A″ » AC′ = A″C′

La línea envuelta es menor que la envolvente, por tanto:

$$A'B + BC + CA'' < A'B' + B'C' + C'A''$$

y, remplazando valores, vendrá:

$$\mathbf{AB + BC + AC < AB' + B'C' + AC'}$$

Lo mismo se demostraría para cualquier otra posición de B′ *y* C′ *distinta de* B *y* C.

81. El segmento que une los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto de la bisectriz de un ángulo a los lados de éste, es perpendicular a la bisectriz.

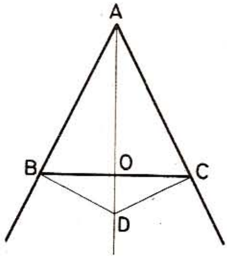


Fig. 68

Sea AD *la bisectriz del ángulo* BAC (fig. 68) *y* DC, DB *las perpendiculares trazadas desde el punto* D *a los lados* AC *y* AB; *decimos que* BC *es perpendicular a* AD.

En efecto, los triángulos rectángulos ABD *y* ACD *son iguales, por tener la hipotenusa* AD *común, y el ángulo en* A *igual.*

Por tanto: $AB = AC$

Los triángulos ABO *y* ACO *son también iguales* (2.º criterio); *de aquí que los ángulos en* O *serán iguales, y como son suplementarios serán rectos; por tanto, la recta* **BC** *será perpendicular a la* **AD.**

82. Dado un triángulo ABC (fig. 69) y la mediana AD, demuéstrese que, si se tiene $AC > AB$, también será $\angle ADC > \angle ADB$ y $\angle DAC < \angle DAB$.

● 1.º *Los dos triángulos* ADB *y* ADC *tienen dos lados iguales,* AD *común y* $BD = DC$ *por construcción; pero el tercero desigual* $AC > AB$, *por tanto,* $\angle \mathbf{ADC} > \angle \mathbf{ADB}$.

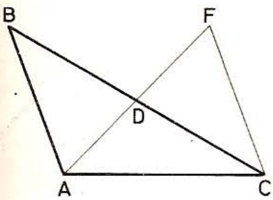


Fig. 69

● 2.º *Prolongando la mediana y tomando* $DF = AD$, *resulta:*

$$\triangle DFC = \triangle BDA \quad (2.^{\circ}\ \textit{criterio}).$$

Así pues, $FC = AB$

pero en $\triangle AFC$: $\angle FC = AB < AC$

por tanto: $\angle DAC < \angle AFC$

o bien $\angle \mathbf{DAC} < \angle \mathbf{DAB}$

83. La recta que pasa por el vértice de un triángulo y el punto medio de una mediana, divide al lado opuesto en dos segmentos que son el uno duplo del otro (fig. 70).

Tracemos por el punto medio M *del lado* AC, *la recta* MN, *paralela a la* AD; *esta recta pasará por el punto medio de* DC; *así pues, se tendrá:*

$$DN = NC$$

Análogamente, en el triángulo BMN *la* LD, *paralela a* MN, *dividirá a* BN *en dos partes iguales, por tanto,*

$$BD = DN$$

luego: $\mathbf{DC = 2BD}$

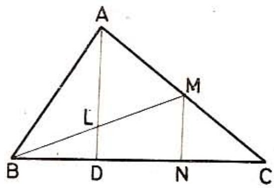


Fig. 70

84. Tomando, sobre los lados del ángulo O (figura 71), longitudes iguales $OA = OB$ y uniendo los puntos A y B con un punto cualquiera M de su bisectriz, demuéstrese que $MA = MB$.

$\triangle$AMO = $\triangle$BMO (2.º *criterio*), *por tanto*,

$$\mathbf{MA = MB}$$

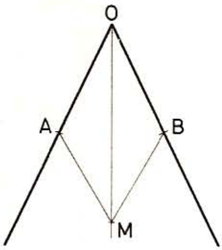


Fig. 71

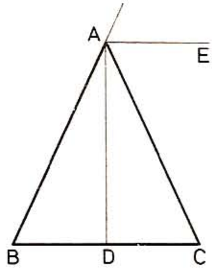


Fig. 72

85. Cuando la bisectriz del ángulo exterior del ángulo en el vértice es paralela a la base, el triángulo es isósceles.

Sea el triángulo ABC (fig. 72) *cuya bisectriz exterior* AE *es paralela a* BC; *trazando también la bisectriz interior* AD *tendremos* $\angle$DAE = 90º, *porque cuando dos ángulos son suplementarios sus bisectrices se cortan en ángulo recto.*

Siendo, pues, AE *y* DC *paralelas, será*

$$\angle \text{ADC} = 90^{\circ}$$

y la bisectriz AD *será, al mismo tiempo, altura, y, por consiguiente, el* $\triangle$**ABC será isósceles.**

86. Dado un triángulo isósceles ABC (fig. 73), se prolonga la base BC una longitud CD = AC y se traza la recta DAE. Demuéstrese que

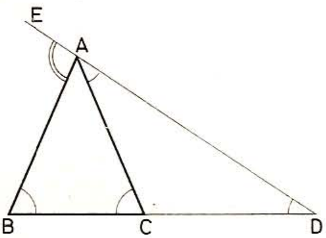


Fig. 73

$$\angle \text{BAE} = 3\ \angle \text{CAD}$$

$\triangle$ACD *es isósceles, luego:*

$$\angle \text{CDA} = \angle \text{CAD}$$

pero $\angle \text{C} = 2\ \angle \text{CAD} = \angle \text{B}$

luego

$$\angle \mathbf{BAE} = \angle \text{B} + \angle \text{CDA} = \mathbf{3}\ \angle \mathbf{CAD}$$

87. Prolongando por igual y en el mismo sentido los lados de un triángulo equilátero, demuéstrese que los puntos obtenidos son los vértices de otro triángulo equilátero.

Los tres triángulos ADE, CEF *y* BFD (fig. 74) *que se forman, son iguales* (2.º criterio); *por tanto:*

$$\text{DE} = \text{EF} = \text{FD}$$

luego $\triangle$**DEF es equilátero.**

88. Si un triángulo rectángulo (fig. 75) tiene un ángulo de 30°, el cateto *opuesto* a este ángulo es la mitad de la hipotenusa, y recíprocamente.

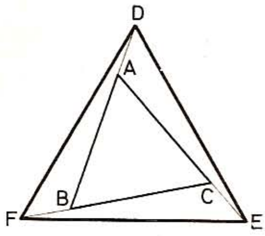


Fig. 74

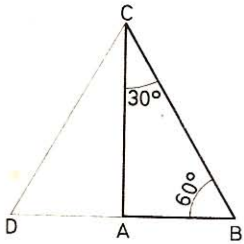


Fig. 75

Construyamos el simétrico del $\triangle$ABC, *respecto del cateto* AC; *el triángulo* DCB *es equilátero, pues* $\angle B = 60°$, $\angle DCB = 2\ \angle C = 60°$ *y* $\angle D = 60°$.

Por tanto:
$$\mathbf{AB} = \frac{BD}{2} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{2}}$$

Recíprocamente, si AB = BC/2, *el triángulo* DCB *tiene sus tres lados iguales, y sus ángulos también, siendo cada uno de* 60°, *luego*

$$\angle\mathbf{B} = \mathbf{60°} \quad y \quad \angle\mathbf{C} = \frac{\angle DCB}{2} = \mathbf{30°}$$

89. Se dividen en tres segmentos iguales los lados de un triángulo equilátero, y se unen los puntos del mismo orden. Pruébese que:

1.° El triángulo que se forma es equilátero también.

2.° Sus lados son perpendiculares a los del primero.

• 1.° *Los triángulos* ADF, FEC, EBD (fig. 76) *son iguales* (2.° criterio); *luego* DE = EF = FD *y, por tanto,* $\triangle$**DEF es equilátero.**

• 2.° $DA = \dfrac{AF}{2}$ *y* $\angle A = 60°$, *por consiguiente, el triángulo* DAF *es la mitad de un triángulo equilátero y* $\angle$**ADF = 90°.**

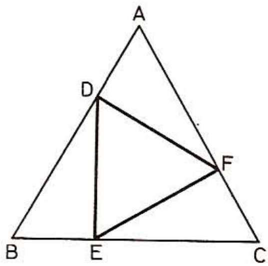


Fig. 76

90. En un triángulo rectángulo ABC (fig. 77), en que $\angle B = 2\ \angle C$ y AH es la altura relativa a BC, se prolonga AB una porción BD = BH y se traza DH hasta que corte a AC en O. Pruébese que OH = OA = OC.

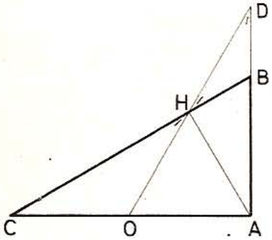


Fig. 77

El triángulo isósceles HBD *nos dará:*

$$\angle BHD = \angle BDH = \frac{\angle B}{2} = 30^{\circ} = \angle DAH$$

Análogamente tendremos:

$$\angle CHO = \angle C = 30^{\circ}$$

y $$\angle HOA = \angle HAO = \angle OHA = 60^{\circ}$$

Por consiguiente

$$\mathbf{OC} = \mathbf{OH} = \mathbf{OA} = AH = HD$$

91. En un triángulo rectángulo en A se traza el segmento CD perpendicular e igual a AC. Demuéstrese que AD es la bisectriz del ángulo A (fig. 78).

El triángulo construido es rectángulo isósceles; por tanto, $\angle CAD = 45^{\circ}$.

La recta **DA** *es, por consiguiente,* **bisectriz del ángulo A.**

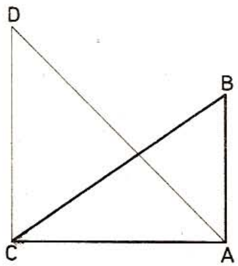


Fig. 78

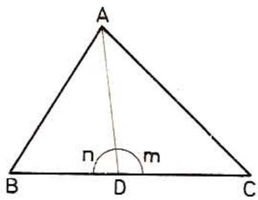


Fig. 79

92. La bisectriz del ángulo A de un triángulo ABC (fig. 79) forma con la base BC dos ángulos cuya diferencia es igual a la de los ángulos B y C de la base.

En $\triangle$BDA, *por ángulo exterior:* $\angle m = \angle B + \frac{\angle A}{2}$

» $\triangle$ADC » » $\angle n = \angle C + \frac{\angle A}{2}$

Restando ordenadamente: $\angle \mathbf{m} - \angle \mathbf{n} = \angle \mathbf{B} - \angle \mathbf{C}$

93. Demostrar que dos triángulos ABC y A′B′C′ (fig. 80) son iguales cuando tienen dos lados iguales AB = A′B′, AC = A′C′ y la mediana relativa a estos lados también igual: BM = B′M′, o bien $AM_1 = A'M'_1$.

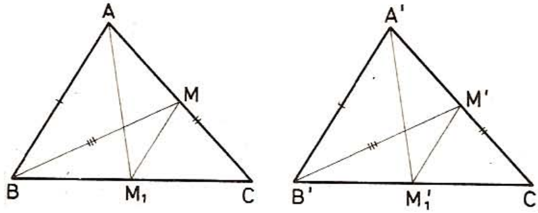


Fig. 80

● a) $\triangle ABM = \triangle A'B'M'$ *por tener sus tres lados iguales; por tanto*

$$\angle AMB = \angle A'M'B'$$
$$\angle BMC = \angle B'M'C'$$

$\triangle BMC = \triangle B'M'C'$ *por tener dos lados iguales y el ángulo comprendido, por consiguiente:* $BC = B'C'$.

Luego $\triangle \mathbf{ABC} = \triangle \mathbf{A'B'C'}$.

● b) *Uniendo el punto medio* M *de* AC *con* M_1, *y el* M', *medio de* A'C', *con* M_1', *tendremos que:*

$$MM_1 = \frac{AB}{2} \quad y \quad M'M_1' = \frac{A'B'}{2}$$

y como $AB = A'B'$, *también será* $MM_1 = M'M_1'$, *y* $\triangle AMM_1 = \triangle A'M'M_1'$, *por tener sus tres lados iguales.*

Los suplementos $\angle M_1MC$ *y* $\angle M_1'M'C'$ *serán iguales y* $\triangle MM_1C = \triangle M'M_1'C'$ *por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales,*

de donde $$M_1C = M_1'C'$$

y, por tanto, $$BC = B'C'$$

Luego en ambos casos $\triangle \mathbf{ABC} = \triangle \mathbf{A'B'C'}$.

94. Dado un triángulo ABC (fig. 81) y la mediana AM, se prolonga ésta una longitud $MD = AM$, y uniendo el punto D con B y C, compárense los triángulos AMC y BMD, lo mismo que AMB y CMD, y dígase en qué caso serían iguales los cuatro triángulos mencionados.

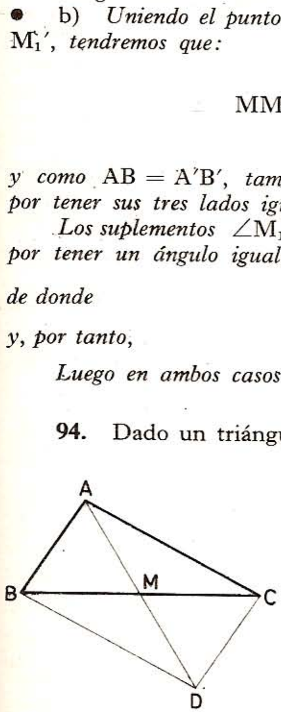


Fig. 81

Los ángulos en M *son iguales por opuestos por el vértice, por tanto,* $\triangle AMC = \triangle BMD$ *por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido.*

Lo mismo se demostraría que $\triangle AMB = \triangle CMD$.

Para que fuesen iguales los cuatro triángulos tendrían que serlo AMB *y* AMC; *para lo cual bastaría que* $AB = AC$, *esto es, que el triángulo dado* ABC *fuese isósceles, y en ese caso la mediana* AM *sería altura y los cuatro triángulos rectángulos en* M.

95. Dado un ángulo XAY (fig. 82), desde el vértice A se toman las longitudes AB, AC y AB', AC' sobre los lados AX y AY, de suerte que sean iguales respectivamente, y se unen B con C' y C con B', y el punto O de intersección de estas rectas con el vértice A. Demuéstrese la igualdad de los triángulos AOB y AOB', así como la de BOC y B'OC', y dígase el valor del ángulo COC', cuando se tenga $AO = OC$.

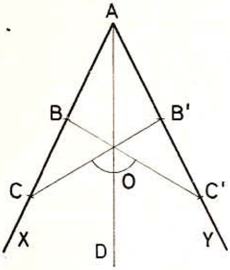


Fig. 82

• 1.º $\triangle ABC' = \triangle AB'C$ *por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales, por tanto*

$$\angle B = \angle B' \quad y \quad \angle C = \angle C'$$

$\triangle BOC = \triangle B'OC'$ *por tener igual un lado y los dos ángulos adyacentes; luego*

$$BO = B'O$$

Luego $\triangle \mathbf{AOB} = \triangle \mathbf{AOB'}$ *por tener los tres lados iguales.*

• 2.º *Si* AO = OC, *el triángulo* AOC *será isósceles, y se tendrá:*

$$\angle ACO = \angle CAO$$

La suma de éstos será igual a $\angle XAY$, *pues se tienen en* A *dos ángulos iguales. Prolongando* AO *hasta* D, *tendremos:*

$$\angle COD = \angle C + \angle CAO = \angle XAY$$

Por tanto: $$\angle \mathbf{COC'} = \mathbf{2}\ \angle \mathbf{XAY}$$

96. Si en un triángulo ABC (fig. 83), la mediana AM es perpendicular al lado BC, dicho triángulo es isósceles.

Siendo la mediana perpendicular al lado BC *forma en* M *dos ángulos adyacentes iguales.* $\triangle ABM = \triangle ACM$, *por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales. Luego* **AB = AC.**

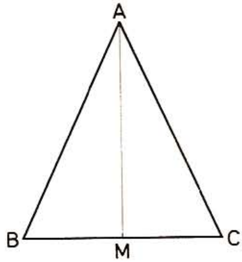


Fig. 83

VI. Cuadriláteros

97. ¿Cuál es el lado de un rombo, si su perímetro es igual al de un triángulo equilátero cuyo lado tiene 16 m de longitud?

Perímetro del triángulo equilátero: 16 × 3 = 48 m.
Lado del rombo: 48 : 4 = **12 m.**

98. Calcular la base y la altura de un rectángulo cuyo perímetro es igual a 80 m siendo la altura los 2/3 de la base.

Sea la base x, *la altura será* $\frac{2x}{3}$ *y el semiperímetro:*

$$x + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{3} = 40 \text{ m}$$

de donde $$x = \frac{40 \times 3}{5} = 24 \text{ m}$$

Base, 24 m; altura: $\frac{24 \times 2}{3} = \mathbf{16\ m}$

VII. Construcción de cuadriláteros

99. Construir un paralelogramo, dados los dos lados y la diagonal. *Aplicación:* Tomar para los lados 35 y 38 mm y 42 mm para la diagonal.

Basta construir el triángulo ABC (fig. 84) (Geom. **260**) *y por los puntos* A *y* C *trazar paralelas a los lados* BC *y* BA.

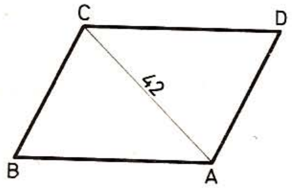


Fig. 84

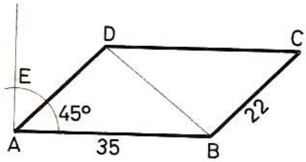


Fig. 85

100. Construir un paralelogramo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido. *Aplicación:* Tomar por lados 35 y 22 mm y el ángulo de 45°.

Constrúyase el triángulo BAD (fig. 85), *conociendo dos lados y el ángulo comprendido* (Geom. **259**); *luego trácense* DC *y* BC *paralelas a* AB *y a* AD.

101. Construir un cuadrilátero, conociendo sus lados y una diagonal. *Aplicación:* Tomar para los lados 40, 35, 56, 43 mm y 45 para la diagonal que une el primer vértice con el tercero.

Basta construir dos triángulos (Geom. **260**) *que tengan por lado común la diagonal* AC (fig. 86).

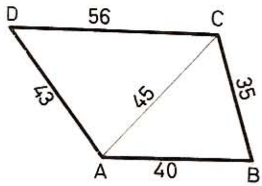


Fig. 86

102. Construir un trapecio rectángulo conociendo la altura, la base mayor y el ángulo de esta base con uno de los lados no paralelos. *Aplicación:* Las bases miden 28 y 50 mm y el ángulo 45°.

En los extremos de la base se construyen respectivamente un ángulo recto y otro de 45°; *en la perpendicular se señala la altura dada, y por el extremo de esta recta se traza una paralela a la base mayor.*

103. Construir un trapecio conociendo:

1.° Las bases y las diagonales.
2.° Las bases y los ángulos.

● 1.° *Se construye el triángulo* ADF (fig. 87), *cuya base* AF *es la suma de las bases del trapecio, y los otros dos lados las diagonales* AD *y* CB *del mismo.*

Luego por el vértice D *trazamos* DC, *paralelas a* AB *y por el punto* B *la recta* BC, *paralela a* DF.

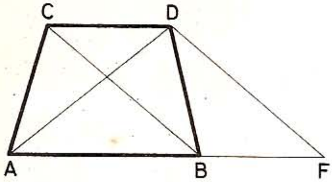


Fig. 87

El trapecio ABDC *es el pedido.*

- 2.º *Sobre* AF, *diferencia de las bases, se construye el triángulo cuyos ángulos* A *y* B *se conocen; luego por el vértice* C *se traza la paralela a la base* AB, *siendo* CD *igual a la base menor.*

104. Construir un trapecio ABCD (figura 88), dados el lado oblicuo BC, las dos diagonales AC y BD y el ángulo que forman BOC.

Tracemos la paralela BE *a la* AC; *la prolongación de* DC *dará el punto* E. *Así tendremos* BE = AC, *longitud conocida, y* $\angle$DBE = $\angle$DOC, *suplemento de* $\angle$BOC. *Ya podemos construir el triángulo* DBE.

Desde el vértice B, *con una abertura de compás igual a* BC, *determinamos el punto* C *sobre* DE. *Desde el mismo punto* B *trazamos la paralela* BA *a* CD; *luego, haciendo centro en* C *con una abertura de compás* CA, *se marca el punto* A *sobre la paralela* BA.

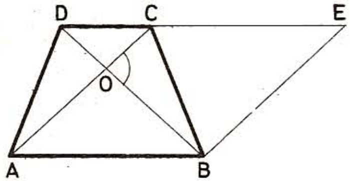


Fig. 88

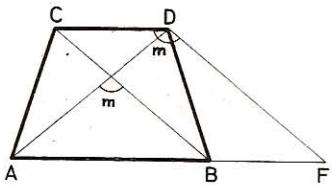


Fig. 89

105. Construir un trapecio isósceles (fig. 89), conocida la base AB, el ángulo *m* de las diagonales y el valor común de éstas, *l*.

Construimos un ángulo m, *en* D; *sobre sus lados se lleva la longitud común* AD = DF = l; *sobre* AF, *suma de las bases, tomamos* AB, *base dada; desde* B *trazamos la paralela* BC *a* DF, *y desde* D *la paralela* DC *a* AF.

106. Construir un cuadrado, dada la suma o la diferencia de la diagonal y del lado.

Sea AF *la suma de la diagonal y del lado del cuadrado* ACBD (fig. 90); *el triángulo isósceles* DBF *nos da:*

$$\angle F = \angle BDF = \frac{\angle ABD}{2} = 22^{o}\ 30'$$

Por consiguiente, sobre el lado de un ángulo de 45º se lleva la longitud AF *igual a la suma dada, se construye en* F *un ángulo de 22º 30′, cuyo lado* FD *encuentra a* AD *en el punto* D. *La mediatriz de* DF *determina el vértice* B *del cuadrado.*

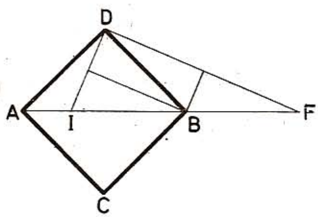


Fig. 90

Cuando se da la diferencia AI, *el ángulo* BID = 45° + 22° 30′, *y las operaciones son las mismas que para la suma.*

107. Construir un rombo, conocido el lado y la diferencia de las diagonales.

En el rombo ABCD (fig. 91), *llevamos sobre* OA *una longitud* OE = OB, *tendremos*

$$OA - OB = AE$$

semidiferencia de las diagonales del rombo.

En el triángulo rectángulo isósceles BOE, ∠E = 45° *y* ∠AEB = 135° *por ser suplementario del anterior; la perpendicular trazada en* H, *punto medio de la hipotenusa, pasará por el centro* O *del rombo; por consiguiente:*

Trazaremos ∠XEY = 135°; *sobre* EX *tomaremos* EA *igual a la semidiferencia de las diagonales. Desde* A, *con una abertura de compás igual al lado, señalaremos el vértice* B *sobre* EY. *Desde* H *trazaremos una perpendicular; el encuentro de ésta con la prolongación de* AE *dará el centro* O *del rombo.*

Bastará, pues, prolongar BO *y tomar* OD = OB *y* OC = OA *para tener los demás vértices del rombo deseado.*

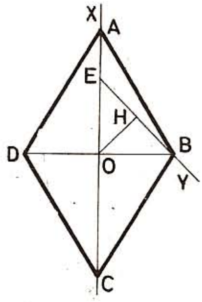


Fig. 91

VIII. Teoremas

108. Las bisectrices interiores de un cuadrilátero determinan otro cuadrilátero en el cual los ángulos opuestos son suplementarios (fig. 92).

Haciendo:

$$A = 2\angle a, \quad \angle B = 2\angle b, \quad \angle C = 2\angle c, \quad \angle D = 2\angle d$$

tendremos:

$$2\angle a + 2\angle b + 2\angle c + 2\angle d = 4 \textit{ rectos}$$

$$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d = 2 \textit{ rectos} \qquad (1)$$

En los triángulos AGB *y* DEC *tenemos:*

$$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle G + \angle E = 4 \textit{ rectos} \qquad (2)$$

De (2) *restamos* (1): $\angle \mathbf{G} + \angle \mathbf{E} = \mathbf{2\ rectos}$

y, por consiguiente:

$$\angle \mathbf{H} + \angle \mathbf{F} = 4 \text{ rectos} - 2 \text{ rectos} = \mathbf{2\ rectos}$$

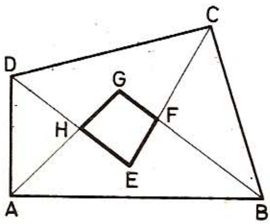


Fig. 92

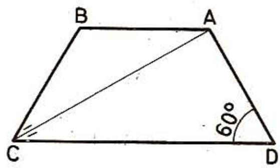


Fig. 93

109. Dado un trapecio isósceles ABCD (fig. 93), la base menor AB = 20 cm, el ángulo D = 60° y la diagonal AC, bisectriz del ángulo C, calcular los lados oblicuos del trapecio.

$$\angle ACD = 60^\circ : 2 = 30^\circ, \quad \textit{su igual} \ \angle BAC = 30^\circ$$

El triángulo isósceles ABC *da:*

$$BC = AB = 20 \text{ cm}$$

Y como el trapecio es isósceles:

$$\mathbf{AD = BC = 20\ cm}$$

110. Demostrar que en todo trapecio isósceles (fig. 94), siendo I el punto de intersección de las diagonales AC y BD, se tendrá:

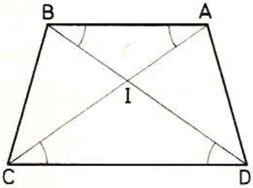


Fig. 94

$$AI = BI \quad y \quad DI = CI$$

En todo trapecio isósceles los ángulos adyacentes a una base son iguales lo mismo que los lados oblicuos, luego $\triangle ABD = \triangle ABC$ *y* $\angle ABD = \angle BAC$; *por tanto, el* $\triangle AIB$ *es isósceles y*

$$\mathbf{AI = BI}$$

Análogamente se demostraría que al ser $\triangle ACD = \triangle BDC$, *el triángulo* DIC *será isósceles y, por consiguiente:*

$$\mathbf{DI = CI}$$

111. La suma de las diagonales de un trapecio es menor que la suma de sus lados y mayor que su semisuma (fig. 95).

Con las diagonales AD *y* BC *y los triángulos que determinan tendremos, en efecto:*

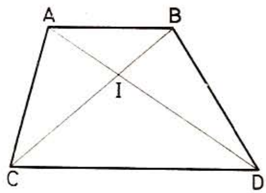


Fig. 95

$$\left.\begin{array}{l} AD < AB + BD \\ AD < DC + AC \\ BC < BD + DC \\ BC < AB + AC \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{sumando y} \\ \textit{dividiendo por 2} \end{array}$$

$$AD + BC < AB + BD + DC + AC$$

Por otra parte, si I *es el punto donde se cortan las dos diagonales, los cuatro triángulos que tienen ese punto por vértice común, nos darán:*

$$\left.\begin{array}{l} AI + BI > AB \\ BI + ID > BD \\ ID + IC > DC \\ IC + AI > CA \end{array}\right\} \textit{sumando}$$

$$2\,AI + 2\,ID + 2\,BI + 2\,IC > AB + BD + DC + CA$$

Dividiendo por 2 ambos miembros, y teniendo presente que

$$AI + ID = AD \quad y \quad BI + IC = BC$$

da:

$$\mathbf{AD + BC > \frac{AB + BD + DC + CA}{2}}$$

112. Dos cuadriláteros son iguales cuando tienen dos ángulos iguales comprendidos entre tres lados respectivamente iguales e igualmente dispuestos.

Sean los cuadriláteros ABCD *y* A′B′C′D′ (fig. 96) *que tienen:*

$$AB = A'B'; \quad BC = B'C'; \quad CD = C'D' \quad y \quad \angle B = \angle B'; \quad \angle C = \angle C'.$$

Trazadas las bisectrices AC *y* A′C′, *los triángulos* ABC *y* A′B′C′ *son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales. Los triángulos* ACD

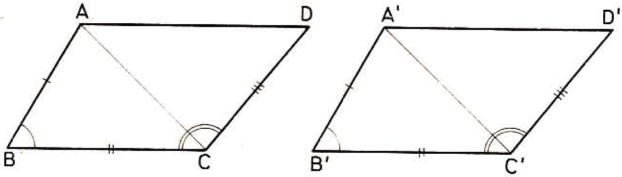


Fig. 96

y A′C′D′ *también son iguales por tener el lado* AC = A′C′; *el* CD = C′D′ *y el ángulo comprendido* ACD = A′C′D′. *Luego los cuadriláteros dados son iguales porque están compuestos de dos triángulos iguales e igualmente dispuestos.*

113. Si en el rectángulo ABCD (fig. 97) marcamos los puntos medios E de AB y F de DC y unimos D con E y B con F, y trazamos la diagonal AC que corta a DE en H y a FB en L y además trazamos EL y FH, dígase:

1.º Qué es la diagonal HL respecto de AC.

2.º La naturaleza del cuadrilátero ELFH.

● 1.º *Las rectas* DE *y* BF *determinan los dos triángulos rectángulos iguales* EAD *y* BCF, *pues tienen los catetos iguales; por tanto,*

$$DE = FB$$

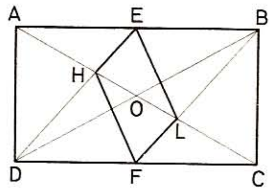


Fig. 97

El cuadrilátero BFDE *es un paralelogramo y las rectas* FL *y* EH *son paralelas.*

En el triángulo ABD, *las medianas* AO *y* DE *se cortan en los 2/3 de su longitud, de donde*

$$AH = 2HO = HL$$

pero

$$AH = CL$$

luego

$$\mathbf{HL = \frac{CA}{3}}$$

• 2.º *Asimismo, de la igualdad de las medianas* DE *y* BF, *resulta la de los segmentos* EH *y* FL, *los que, por otra parte, son paralelos; luego la figura* **ELFH es un paralelogramo.**

Dicho paralelogramo podría ser un rectángulo si fuese:

$$HL = EF \qquad \text{o sea} \qquad AD = \frac{AC}{3}$$

pero nunca podrá ser un cuadrado o un rombo, pues para ello tendría que tener diagonales rectangulares, es decir, que EF *fuese perpendicular a* HL, *lo que supone que la diagonal* AC *sea perpendicular a* AB.

114. Dado un triángulo ABC (fig. 98) de base BC, se unen los puntos medios D y F de los lados AB y AC, se traza la perpendicular AH sobre BC, se unen D y H y se traza EF paralela a AB. Demuéstrese que el cuadrilátero DFEH es un trapecio isósceles.

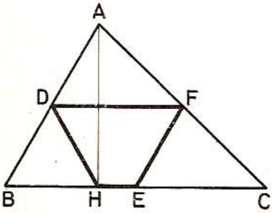


Fig. 98

El segmento DF *que une los puntos medios de dos lados del triángulo* ABC *es paralelo al segmento* HE.

Además, la recta EF *que pasa por el punto medio* F *de* AC *y es paralela a* AB *es igual a la mitad de ésta. En el triángulo rectángulo* AHB, DH *es mediana, por tanto, igual a la mitad de* AB; *por consiguiente,* EF = HD, *y* **el trapecio será isósceles.**

115. Todo trapecio, en el cual las diagonales son iguales, es un trapecio isósceles (fig. 99).

Trazando por B *una paralela a la diagonal* AC *hasta que corte a la prolongación de* CD *en el punto* F, *tendremos que el cuadrilátero* ABFC *es un paralelogramo, pues sus lados son paralelos dos a dos, por tanto* BF = AC, *y el triángulo* DBF *será isósceles y los ángulos en* F *y* D *iguales.*

Pero $\angle BFC = \angle ACD$ *(correspondientes)*

luego $\angle ACD = \angle BDC$.

Por consiguiente, $\triangle ADC = \triangle BCD$ *por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido, por tanto*

$$\mathbf{AD = BC}$$

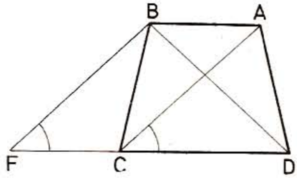


Fig. 99

116. El punto de concurso de las diagonales de un rombo equidista de los cuatro lados; las diagonales son bisectrices de los ángulos que forman entre sí las perpendiculares trazadas desde ese punto a los lados.

• 1.º *Sea* ABCD (fig. 100) *el rombo y las diagonales* AC > DB, *e* I *el punto de intersección de éstas.*

Si desde I *trazamos las perpendiculares* IE *sobre* AB, IF *sobre* BC, IG *sobre* CD *y* HI *sobre* AD, *se verifica*

$$IE = IF = IG = IH$$

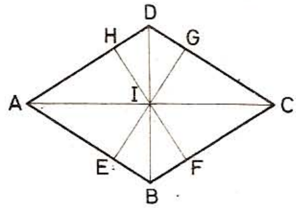


Fig. 100

En efecto, considerando los triángulos rectángulos IEB *e* IFB, *son iguales por tener un lado común* IB *y un ángulo agudo igual en* B, *pues las diagonales del rombo son a la vez bisectrices, luego*

$$IE = IF$$

Análogamente se demostraría que $\triangle IFC = \triangle IGC$ *y, por tanto,* $IG = IF$.

También $\triangle DIG = \triangle DIH$, *luego:* $IG = IH$; *en consecuencia* $\mathbf{IE = IF = IG = IH}$

● 2.º *Las diagonales del rombo son bisectrices de los ángulos formados por las perpendiculares trazadas desde ese punto* I *a los lados.*

En efecto, acabamos de ver que $\triangle IBE = \triangle IBF$; *por tanto, sus ángulos en* I *serán iguales y la recta* **IB será bisectriz** *del ángulo* EIF. *Del mismo modo, por ser* $\triangle DIG = \triangle DIH$ *los ángulos en* I *serán iguales e* **ID será la bisectriz** *del* $\angle HIG$.

Análogamente se demostraría que **IA es bisectriz** *de* $\angle HIE$ *y que* **IC es bisectriz** *de* $\angle GIF$.

117. En un trapezoide ABCD (fig. 101), por los vértices trazamos paralelas a las diagonales AC y BD.

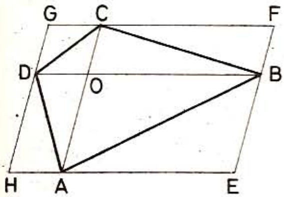


Fig. 101

1.º Demostrar que el cuadrilátero que resulta es un paralelogramo de doble área que el trapezoide dado.

2.º ¿En qué caso ese paralelogramo será un rectángulo?

● 1.º *Sea* GHEF *el cuadrilátero obtenido al trazar las paralelas a las diagonales* AC *y* BD *que se cortan en el punto* O.

Las rectas EF *y* GH *paralelas a* AC *serán paralelas entre sí; lo propio que* HE *y* GF *que son paralelas a* BD. *Por tanto, el cuadrilátero* **GHEF** *formado por cuatro rectas paralelas dos a dos* **será un paralelogramo.**

Este paralelogramo tiene un área duplo que el trapezoide dado.

En efecto, si consideramos el cuadrilátero COBF, *observamos que sus lados son paralelos dos a dos y, por tanto, iguales dos a dos y los triángulos* CFB *y* COB *iguales, por tener un lado común y los otros dos iguales, luego el cuadrilátero* COBF *es duplo del triángulo* OCB.

Lo mismo pudiéramos decir de los cuadriláteros AOBE, HDOA, DOCG *que son respectivamente doble de los triángulos* OAB, OAD *y* OCD; *por consiguiente* **el paralelogramo es duplo que el trapezoide** *dado.*

● 2.º *Para que el paralelogramo obtenido fuese un rectángulo se precisaría que las diagonales del trapezoide fuesen perpendiculares entre sí, ya que también lo serían los lados del paralelogramo formado.*

118. En el rectángulo ABCD (fig. 102), en que AB > BC, se trazan las bisectrices interiores. Demostrar:

1.º Que los puntos de concurso y cruce de dos de ellas equidistan de los vértices de donde parten.

2.º Que el cuadrilátero que forman esos puntos es un cuadrado cuyas diagonales son paralelas a los lados del rectángulo.

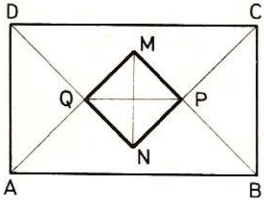


Fig. 102

● 1.º *Como* AM *y* BM *son bisectrices de ángulos rectos, el triángulo* AMB *será isósceles, y rectángulo en* M, *por tanto*

$$AM = BM \quad y \quad \angle M = 90^\circ$$

De igual modo en $\triangle DNC$:

$$CN = DN \quad y \quad \angle N = 90^\circ$$

y en los $\triangle CPB$ *y* $\triangle AQD$:

PB = PC; AQ = DQ *y* $\angle P = \angle Q = 90^\circ$

● 2.º *Hemos obtenido:*

y

$$\left.\begin{array}{l} ND = NC \\ DQ = CP \end{array}\right\} \text{ Restando}$$

$$NQ = NP$$

Por consiguiente, el cuadrilátero **MONP,** *que tiene los cuatro ángulos rectos y dos lados contiguos iguales,* **es un cuadrado.** *En el* n.º **123** *demostraremos que las diagonales son paralelas a los lados del rectángulo.*

119. Dado un rombo ABCD (fig. 103), se prolongan AB, CB, CD y AD, se toman segmentos iguales en las prolongaciones AE = CF = CG = AL, y se unen los puntos E, F, G y L. Demuéstrese que el cuadrilátero obtenido es un rectángulo.

En el rombo, los ángulos opuestos son iguales; así que $\triangle ALE = \triangle CFG$ *y* LE = GF.

Del mismo modo se vería que LG = EF *en los triángulos iguales* BEF *y* DLG.

Siendo iguales los lados del cuadrilátero EFLG *serán paralelos y, por tanto, el cuadrilátero será paralelogramo.*

Para que sea rectángulo deberá tener, además, los ángulos rectos.

Señalando con el número 1 *el* $\angle ALE$, *con el* 2 *el* $\angle GLE$ *y con el* 3 *el* $\angle ALG$, *tendremos en los triángulos isósceles* ALE *y* DLG.

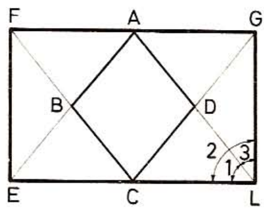


Fig. 103

$$\left.\begin{array}{l} \angle 1 = \dfrac{180^\circ - \angle A}{2} \\[2ex] \angle 3 = \dfrac{180^\circ - \angle B}{2} \end{array}\right\} \text{ sumando}$$

$$\angle 1 + \angle 3 = \frac{180^\circ - \angle A + 180^\circ - \angle D}{2} = \frac{2 \times 180 - (\angle A + \angle D)}{2}$$

pero como

$$A + \angle D = 180^\circ$$

$$\angle 1 + \angle 3 = \frac{180^\circ \times 2 - 180^\circ}{2} = 90^\circ$$

y siendo $$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$
$$\angle 2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Como hemos demostrado que es un paralelogramo y tiene un ángulo recto, el opuesto será recto, y lo mismo los otros dos que son suplementarios e iguales. Luego **el cuadrilátero es rectángulo.**

120. Las bisectrices interiores de un paralelogramo determinan un rectángulo (fig. 104).

En todo paralelogramo tenemos:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ$$

o bien
$$\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} = 90^\circ$$

y
$$\angle G = 180^\circ - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right)$$
$$\angle G = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

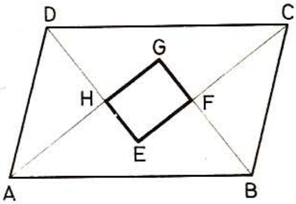


Fig. 104

Procediendo análogamente hallaríamos:

$$\angle \mathbf{E} = \angle \mathbf{H} = \angle \mathbf{F} = \mathbf{90^\circ}$$

121. Las rectas que unen los puntos medios de los lados adyacentes de un trapezoide convexo determinan un paralelogramo (fig. 105). ¿En qué caso la figura obtenida será un rectángulo? ¿Un rombo? ¿Un cuadrado?

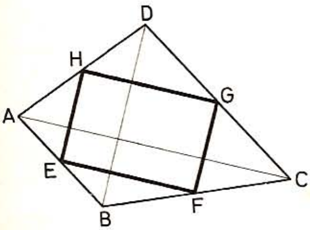


Fig. 105

El cuadrilátero que resulta EFGH *tiene los lados opuestos* EH *y* FG *paralelos e iguales, por ser cada uno paralelo a la diagonal* DB *e igual a* 1/2 *de ésta.*

Por un raciocinio análogo veríamos que EF *y* HG *son iguales y paralelos.*

Por consiguiente, el cuadrilátero **EFGH es un paralelogramo.**

Será: 1.º *Un rectángulo cuando las diagonales* AC *y* BD *sean perpendiculares.*

2.º *Un rombo si dichas diagonales son iguales.*

3.º *Un cuadrado si dichas diagonales son perpendiculares e iguales.*

122. Si desde un punto de la base de un triángulo isósceles se trazan paralelas a los otros dos lados, se obtiene un paralelogramo de perímetro constante.

Los triángulos BDE *y* DCF (fig. 106) *son isósceles y como las paralelas comprendidas entre paralelas son iguales, tendremos:*

$$\left.\begin{array}{l} ED = EB = AF \\ DF = AE = FC \end{array}\right\} \textit{Sumando}$$
$$\overline{\mathbf{ED + DF}} = \overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{AC}} = \textit{constante.}$$

123. Trazando desde los vértices de un rectángulo, perpendiculares a las diagonales, ¿qué figura resulta si se prolongan esas perpendiculares hasta que se encuentren?

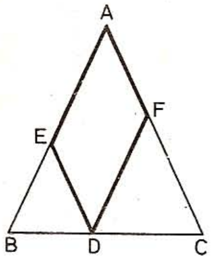


Fig. 106

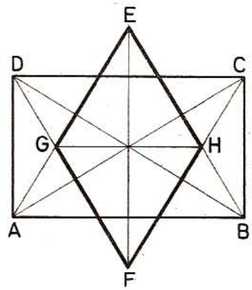


Fig. 107

Las perpendiculares AE, BE, DF, CF *a las diagonales* DB, AC *forman triángulos isósceles iguales dos a dos, estando los vértices* E, F, G, H *sobre las mediatrices de los lados del rectángulo* (fig. 107).

Estas mediatrices, perpendiculares en sus puntos medios, son las diagonales del cuadrilátero **EHFG.** *Dicho cuadrilátero* **es,** *pues,* **un rombo.**

124. Por el centro de un paralelogramo se trazan dos rectas cualesquiera. Demuéstrese que los puntos en que cortan a los lados son los vértices de un nuevo paralelogramo (fig. 108).

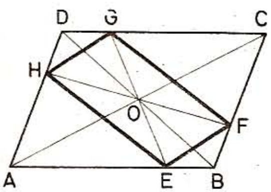


Fig. 108

$\triangle AEO = \triangle CGO$ **(1.er criterio),** *luego:*

$$OE = OG$$

$\triangle DOH = \triangle BOF$, *luego:*

$$OH = OF$$

Cortándose las diagonales EG *y* FH *en sus puntos medios, el cuadrilátero* **EFGH es un paralelogramo.**

125. El segmento que une un vértice de un paralelogramo con el punto medio de uno de los lados opuestos, divide a la diagonal en la relación de 1 a 3.

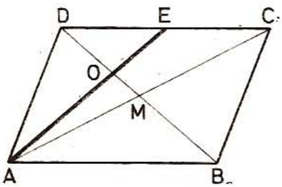


Fig. 109

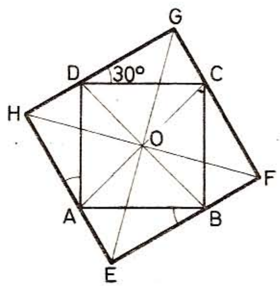


Fig. 110

Efectivamente, AE *y* DM *son las medianas del triángulo* ADC (fig. 109); *por consiguiente*

$$OD = \frac{2\,MD}{3} = \frac{DB}{3}$$

126. Por cada vértice de un cuadrado trazamos una recta en el mismo sentido e inclinada 30°. Demuéstrese que la figura que resulta es también un cuadrado, concéntrico con el primero (fig. 110).

1.° *Los ángulos* E, F, G, H *son rectos por suplementos de un recto.*

2.° *Los cuatro triángulos rectángulos que resultan son iguales por tener igual la hipotenusa y un ángulo agudo,* 30°, *por tanto*

$$EF = FG = GH = HE$$

3.° *Trazando* GO, EO, HO, FO *resultan los triángulos iguales* **(2.° criterio).**

$$\triangle AEO = \triangle CGO; \quad \triangle DOG = \triangle BOE$$
$$\triangle DOH = \triangle FOB$$

por tanto $OE = OG$; $OH = OF$; $\angle HOG = \angle DOC = 90°$

luego el **EFGH es un cuadrado** *concéntrico con el* **ABCD.**

127. En cada lado de un cuadrado, o en sus prolongaciones, se marcan distancias iguales en el mismo sentido. Demuéstrese que los puntos así marcados son los vértices de un nuevo cuadrado concéntrico con el primero.

1.° *Los lados del cuadrilátero* EFGH (fig. 111) *son iguales, porque los triángulos rectángulos* AEH, DHG, CGF, BFE *son iguales, por tener*

$$AH = DG = CF = BE \quad y \quad \angle A = \angle D = \angle C = \angle B = 90°$$

por tanto $HE = HG = GF = FE$

2.° *Los ángulos* E, F, G, H *son rectos como suplemento de ángulos cuya suma es un recto.*

Luego el cuadrilátero **EFGH es un cuadrado.**

3.° *Que los dos cuadrados son concéntricos se demuestra como en el número anterior.*

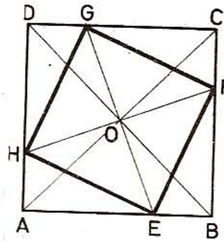


Fig. 111

128. En un cuadrilátero cóncavo ABCD (fig. 112) el ángulo cóncavo $\angle D = 360° - (\angle A + \angle B + \angle C)$.

En efecto:

$$\left.\begin{aligned} \angle BDE &= \angle B + \angle BAD \\ \angle CDE &= \angle C + \angle CAD \end{aligned}\right\} \textit{Sumando}$$

$$\angle BDE + \angle CDE = \angle B + \angle C + \angle BAD + \angle CAD$$

o sea $\angle BDC = \angle A + \angle B + \angle C$

y el cóncavo $\angle \mathbf{D} = \mathbf{360° - (\angle A + \angle B + \angle C)}$

129. Si los lados opuestos de un cuadrilátero cóncavo son perpendiculares entre sí, también lo serán las diagonales, *Siendo* BD *perpendicular a* AC *y* CD *perpendicular a* AB, D *será el ortocentro del triángulo* ABC, *por tanto* **AD** *es perpendicular a* **BC.**

130. El ángulo de las bisectrices de dos ángulos formados por los lados opuestos de un cuadrilátero cóncavo es igual a la semisuma de dos ángulos opuestos del mismo.

Los cuadriláteros cóncavos siguientes (fig. 112), *dan:*

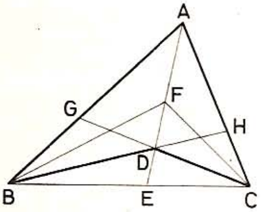


Fig. 112

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{El}\ \text{CFBD:} & \angle D = \angle F + \dfrac{\angle B}{2} + \dfrac{\angle C}{2} \\ \textit{El}\ \text{CABF:} & \angle F = \angle A + \dfrac{\angle B}{2} + \dfrac{\angle C}{2} \end{array}\right\}\textit{restando}$$

$$\angle D - \angle F = \angle F - \angle A$$

o sea:

$$2\angle F = \angle A + \angle D$$

$$\angle \mathbf{F} = \frac{\angle \mathbf{A} + \angle \mathbf{D}}{\mathbf{2}}$$

131. En todo trapezoide, los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos, se cortan en la mitad del que une los puntos medios de las diagonales.

Sea ABCD (fig. 113) *un trapezoide*, EG *y* FH *los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos*, AC *y* BD *las diagonales, e* IM *el segmento que une los puntos medios de las diagonales.*

Tracemos el cuadrilátero IFMH.

En el triángulo ABD, IF *es paralelo a* AD *y es la mitad del mismo; en el triángulo* ACD, HM *es paralelo a* AD *e igual a la mitad del mismo. Luego la figura* IFMH *es un paralelogramo por ser los segmentos* IF *y* MH *paralelos e iguales, y las diagonales* FH *e* IM *se cortan en sus mitades; pero* FH *y* EG *se cortan también en sus puntos medios.*

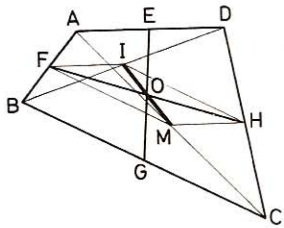


Fig. 113

Luego O *es el punto medio de los tres segmentos* EG, FH *e* IM.

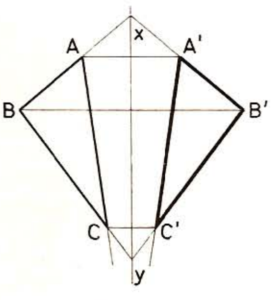


Fig. 114

IX. Construcciones gráficas

132. Construir, respecto del eje de simetría xy, un triángulo simétrico a otro dado.

Para hallar el simétrico del triángulo ABC (figura 114) *respecto del eje* xy, *bastará hallar los puntos simétricos de sus vértices; una vez determinados los los puntos* A′, B′, C′, *simétricos de los* A, B, C, *quedará construido el triángulo* A′B′C′, *simétrico del* ABC.

133. Por un punto dado M (fig. 115), trácese una recta que al cortar a otras dos OA, OB, determine segmentos iguales.

Se traza la bisectriz del ∠AOB *y por el punto* M *una perpendicular a esta bisectriz, con lo cual se tendrá* OA = OB, *por ser el triángulo* AOB *isósceles.*

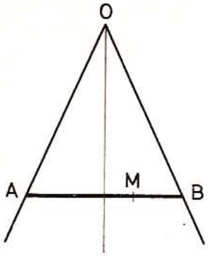


Fig. 115

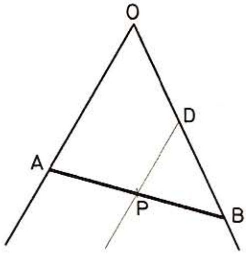


Fig. 116

134. Dado un punto P (fig. 116), interior a un ángulo, trazar por él una recta que quede dividida, por ese punto, en dos partes iguales.

Supongamos el problema resuelto y tendremos: AP = PB; *si trazamos por* P *una paralela a* OA, *tendremos también* OD = DB; *por consiguiente, para hallar el punto* B, *se traza la* PD *paralela a* AO *y llevando* BD = OD, *la recta* PB *nos dará* AP = PB.

135. Por un punto O, tomado dentro o fuera de la región comprendida entre dos paralelas, trazar una recta tal que el segmento comprendido entre esas paralelas tenga una longitud dada.

Sean las rectas paralelas AB *y* CD (figura 117). *Desde un punto cualquiera* P *de* AB, *se describe un arco de radio igual a la longitud dada, el cual cortará a* CD *en los puntos* E, F. *Las paralelas trazadas por el punto* O *a* EP *y* FP *resolverán el problema.*

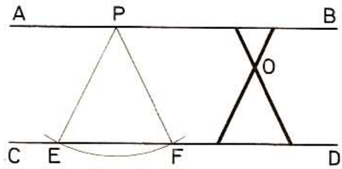


Fig. 117

136. Hallar un punto interior de un triángulo que equidiste de los lados. Dedúzcase de la solución una proposición general.

Sea el triángulo ABC (fig. 118). *El lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los lados* AB *y* AC *es la bisectriz del ángulo* A. *Asimismo, la bisectriz del ángulo* B *será el lugar geométrico de los puntos que equidistan de* AB *y* BC. *Por tanto, el punto de intersección de dos bisectrices será el punto que equidista de los tres lados del triángulo.*

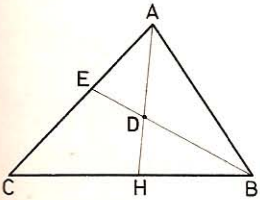


Fig. 118

137. Si en un triángulo cualquiera ABC (figura 119) se trazan las bisectrices exteriores e interiores de los ángulos B y C y luego se trazan desde el vértice A del triángulo las perpendiculares AF y AG a las bisectrices exteriores, y AE y AD a las interiores, demuéstrese que si unimos F con G, la recta resultante pasará por los puntos E y D.

Las bisectrices exterior e interior de un mismo ángulo son perpendiculares; así pues GB *y* BD *lo serán, y como* AD *es perpendicular también* por construcción *a* BD, *tendremos que* AD *y* GB *son paralelas. También lo son las rectas* AG *y* BD *por ser perpendiculares a la recta* GB.

Luego el cuadrilátero ADBG *es un paralelogramo; y por tener dos ángulos rectos será rectángulo y sus diagonales* AB *y* GD *se cortarán en el punto medio* M *de* AB.

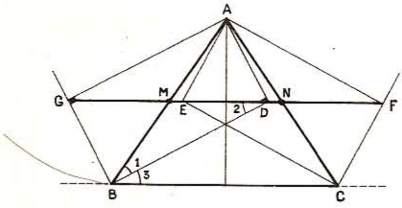


Fig. 119

Por un procedimiento análogo demostraríamos que AECF *es un rectángulo, siendo el punto* N *el punto medio de* AC.

Pero en el triángulo BMD, *isósceles, los ángulos* 1 *y* 2 *son iguales, el* $\angle 1$ *es igual al* $\angle 3$, *luego el* $\angle 2 = \angle 3$, *y siendo éstos alternos internos, las rectas* GD *y* BC *serán paralelas. La recta* GD *que pasa por el punto medio* M *de la* AB *pasará también por el* N *medio de* AC.

De la misma manera demostraríamos que EF *es paralela a* BC *y pasa por* M, *punto medio de* AB. *Luego las dos rectas* GD y FE *se confunden y los puntos* E *y* D *están situados sobre la misma recta* GF.

138. Dos lados de un triángulo tienen respectivamente 20 m y 30 m. Si el tercer lado es el duplo de uno de los otros dos, ¿cuál será su longitud?

Será **40 m,** *pues la solución* 60 m *es inadmisible porque se tendrá con ella* $60 > 20 + 30$.

139. Si se une un punto interior O de un triángulo ABC (fig. 120) con los tres vértices, demostrar que la suma de los tres segmentos trazados está comprendida entre el semiperímetro y el perímetro del triángulo dado.

1.º
$$AB < AO + BO$$
$$AC < AO + CO$$
$$BC < CO + BO$$

$$AB + AC + BC < 2AO + 2BO + 2CO$$

$$\frac{AB + AC + BC}{2} < AO + BO + CO$$

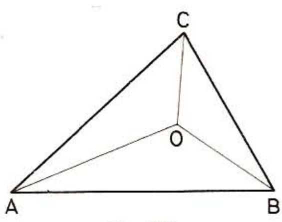


Fig. 120

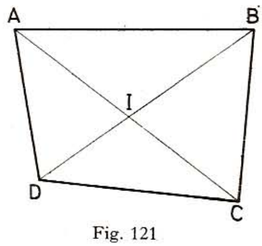


Fig. 121

2.º
$$\left.\begin{aligned} AO + BO &< AC + BC \\ AO + CO &< AB + BC \\ BO + CO &< AB + AC \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 2AO + 2BO + 2CO &< 2AB + 2AC + 2BC \\ AO + BO + CO &< AB + AC + BC \end{aligned}$$

Luego
$$\frac{AB + AC + BC}{2} < AO + BO + CO < AB + AC + BC$$

o bien
$$\mathbf{p < AO + BO + CO < 2p}$$

140. La suma de las diagonales de un cuadrilátero convexo (fig. 121) está comprendida entre el semiperímetro y el perímetro.

1.º
$$\begin{aligned} AC &< AB + BC \\ AC &< AD + DC \\ BD &< AB + AD \\ BD &< BC + CD \\ \hline 2\,(AC + BD) &< 2 \times 2p \\ AC + BD &< 2p \end{aligned}$$

2.º
$$\begin{aligned} AB &< AI + BI \\ BC &< BI + CI \\ CD &< CI + DI \\ AD &< AI + DI \\ \hline 2p &< 2\,(AC + BD) \\ p &< AC + BD \end{aligned}$$

Por tanto:
$$\mathbf{p < AC + BD < 2p}$$

2

CIRCUNFERENCIA

I. Rectas y circunferencias tangentes

141. Con un radio dado, describir una circunferencia tangente a dos rectas dadas.

1.er caso. Las dos rectas AB y CD son paralelas.—Sea d su distancia. Si $r = d/2$ hay una infinidad de soluciones. Los centros se hallan sobre la recta EF paralela a las rectas dadas y situada entre las dos a la distancia $d/2$.

Si $r \neq d/2$ el problema es imposible.

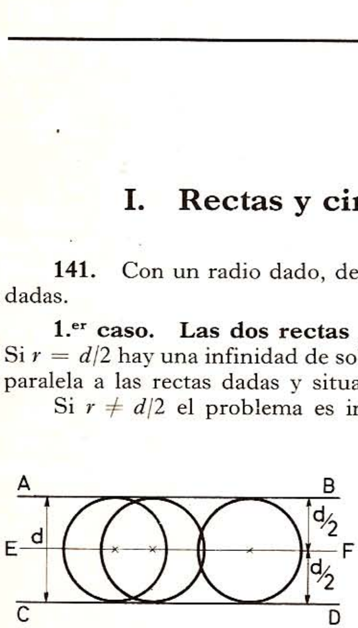


Fig. 122

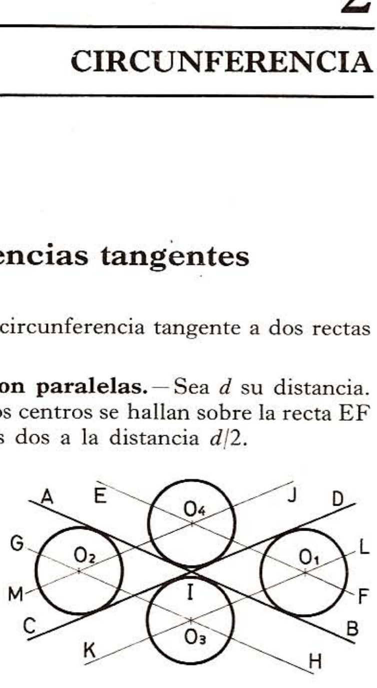


Fig. 123

2.º caso. Las dos rectas son secantes.—Sean AB y CD las dos rectas dadas, secantes en I.

Tracemos las rectas EF y GH paralelas a AB y a la distancia r de AB.

Tracemos igualmente las rectas MJ y KL paralelas a CD y a la distancia r de CD.

Las cuatro rectas EF, GH, MJ y KL se cortan dos a dos en los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 que distan r de las dos rectas dadas AB y CD; son pues los centros de las circunferencias buscadas.

El problema en este caso admite 4 soluciones, simétricas dos a dos con relación al punto I.

142. Con un radio dado describir una circunferencia tangente a una recta y a una circunferencia dadas.

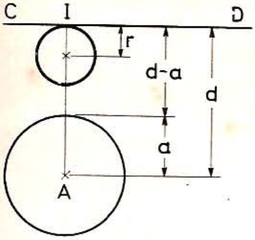


Fig. 124 - 1.er caso

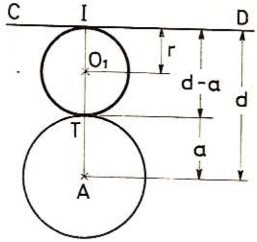


Fig. 125 - 2.º caso

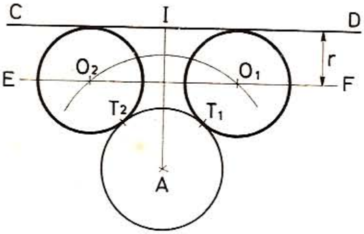


Fig. 126 - 3.er caso

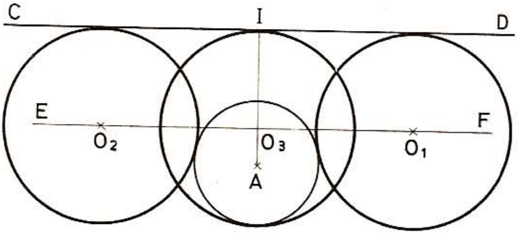


Fig. 127 - 4.º caso

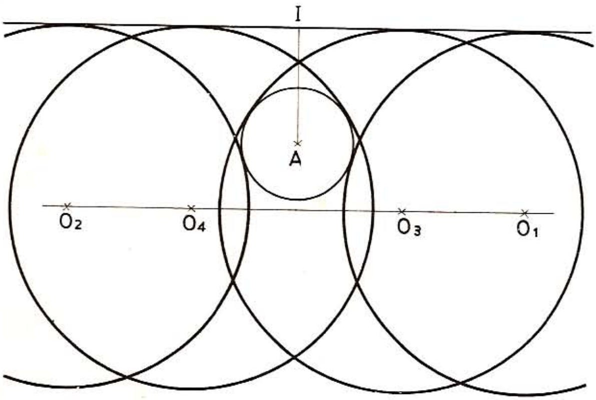


Fig. 128 - 5.º caso

Sea la recta CD *y la circunferencia de centro* A *y de radio* a. *Llamemos* d *a la distancia* AI *del centro de la circunferencia dada a la recta* CD. *Según los valores relativos de* r, d *y* a *pueden presentarse varios casos.*

Supongamos $d > a$:

1.er caso. $r < \frac{d - a}{2}$. El problema no admite solución.

2.º caso. $r = \frac{d - a}{2}$. Hay una solución de centro O tal que $IO = OT = r$.

3.er caso. $\frac{d - a}{2} < r < \frac{d + a}{2}$. Hay dos soluciones cuyos centros O_1 y O_2 se hallan en las intersecciones de la recta EF trazada paralelamente a CD y a la distancia r, con la circunferencia de centro A y de radio $(r + a)$.

4.º caso. $r = \frac{d + a}{2}$. Hay las dos soluciones O_1 y O_2 como en el caso anterior y además la solución cuyo centro O_3 se halla sobre IA, tal que $IO_3 = r = \frac{d + a}{2}$.

5.º caso. $r > \frac{d + a}{2}$. Hay cuatro soluciones, a saber: las soluciones O_1 y O_2 como en los casos **3.º** y **4.º**. Además, las soluciones cuyos centros O_3 y O_4 se hallan en los puntos de intersección de la recta EF con la circunferencia de centro A y de radio $(r - a)$.

143. Con un radio dado, describir una circunferencia tangente a dos circunferencias dadas.

Sean O *y* O′ *los centros de las circunferencias dadas,* R *y* R′ *sus respectivos radios* R > R′, *y* d *la distancia* OO′.

Según los valores relativos de R, R′, d *y* r, *el problema admite* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 *u* 8 *soluciones distintas, y en el caso particular en que* d = 0, *infinitas soluciones distintas.*

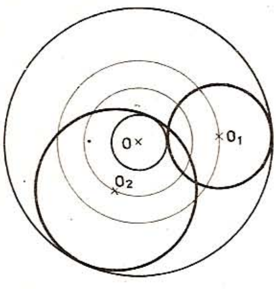


Fig. 129

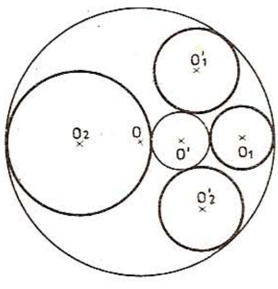


Fig. 130

1.er caso. $\mathbf{d = 0}$ (fig. 129):

Si $r = \frac{R - R'}{2}$. Una infinidad de soluciones cuyos centros O_1 se hallan sobre la circunferencia de centro O y de radio $\frac{R + R'}{2}$.

Si $r = \frac{R + R'}{2}$. Una infinidad de soluciones cuyos centros O_2 se hallan sobre la circunferencia de centro O y de radio $\frac{R - R'}{2}$.

Si $r \neq \frac{R + R'}{2}$ y $r \neq \frac{R - R'}{2}$, 0 soluciones.

2.º caso. $\mathbf{0 < d < R - R'}$ (fig. 130):

Si $r = \frac{R - d + R'}{2}$. Una solución cuyo centro O_1 se halla en la prolongación de OO′ y a una distancia $\frac{R + R' -}{2}$ de O′.

Si $r = \frac{R + d - R'}{2}$. Una solución cuyo centro O_2 se halla en la prolongación de O′O y a una distancia $\frac{R + R' - d}{2}$ de O.

Si $\frac{R - d - R}{2} < r < \frac{R + d - R'}{2}$, 2 soluciones cuyos centros O'_1 y O'_2 se hallan en la intersección de dos arcos de centro O y O′ con radios respectivos $R - r$ y $R' + r$. Son simétricas con relación a la recta OO′.

3.er caso. $\mathbf{d = R - R'}$ (circunferencias dadas tangentes interiormente en C) (fig. 131):

Si $r < \frac{R + d - R'}{2}$, 4 soluciones; una tiene su centro en O_1 en la prolongación de O′C; otra en O_2 en la prolongación de CO′. Las otras dos en O_3 y O_4 intersecciones de los arcos de centros O y O′ con radios respectivamente $(R - r)$ y $(R' + r)$. (Cuando $r = R'$ la solución O_2 se confunde con la circunferencia dada O′, de suerte que sólo hay tres soluciones.)

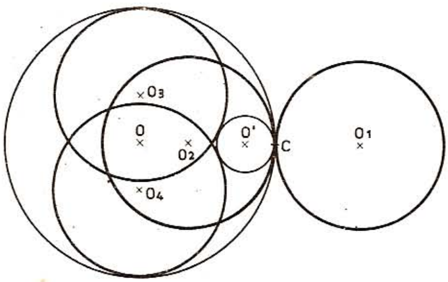


Fig. 131

Si $r = \frac{R + d - R'}{2}$ las soluciones O_3 y O_4 se confunden, de suerte que sólo hay tres soluciones distintas.

Si $r > \frac{R + d - R'}{2}$. Sólo existen las soluciones O_1 y O_2.

4.º caso. $\mathbf{R - R' < d < R + R'}$ (Circunf. dadas secantes) (fig. 132).

Si $r < \dfrac{R + R' - d}{2}$, 8 soluciones, dos O_1 y O_2 tienen su centro en la intersección de los arcos de centro O y O′ y de radios respectivamente $(R + r)$ y $(R' + r)$.

Dos O_3 y O_4 tienen su centro en la intersección de los arcos de centro O y O′ y de radios respectivamente $(R - r)$ y $(R' + r)$.

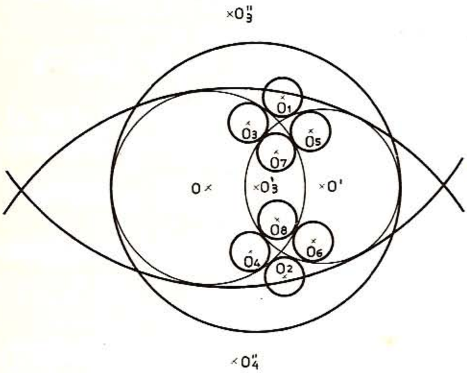


Fig. 132

Dos, O_5 y O_6 tienen su centro en la intersección de los arcos de centro O y O′ y de radios respectivamente $(R + r)$ y $(R' - r)$.

Dos, O_7 y O_8 tienen sus centros en la intersección de los arcos de centro O y O′ y de radios respectivamente $(R - r)$ y $(R' - r)$.

Si $r = \dfrac{R + R' - d}{2}$, 7 soluciones; las mismas que anteriormente excepto que las O_7 y O_8 se confunden; su centro común se halla sobre OO′.

Si $r = \dfrac{d + R' - R}{2}$, 5 soluciones. Las soluciones O_5 y O_6 se confunden; su centro común se halla en la prolongación de OO′.

Si $\dfrac{d + R' - R}{2} < r < \dfrac{R + d - R'}{2}$; 4 soluciones. Las soluciones O_5 y O_6 han desaparecido.

Si $r = \dfrac{R + d - R'}{2}$; 3 soluciones. Las soluciones O y O_4 se confunden, su centro común se halla en la prolongación de O′O.

Si $\dfrac{d + R - R'}{2} < r < \dfrac{d + R + R'}{2}$, 2 soluciones. Las soluciones O_3 y O_4 han desaparecido.

Si $r = \dfrac{d + R + R'}{2}$, 3 soluciones; O_1, O_2 y O'_3 cuyo centro se halla sobre OO′.

Si $r > \dfrac{d + R + R'}{2}$; 4 soluciones, O_1O_2 y $O_3''O_4''$. Los centros de estas dos últimas se hallan en la intersección de los arcos de centro O y O′ y de radios respectivamente $(r - R)$ y $(r - R')$.

5.º caso. d = R + R′ (Circunferencias dadas tangentes exteriormente en C) (fig. 133):

Si $r < R'$, 4 soluciones. Dos O_1 y O_2 tienen su centro en la intersección de los arcos de centro O y O′ y de radios respectivamente $(R + r)$ y $(R' + r)$. Dos O_3 y O_4 tienen sus centros respectivamente en la semirrecta CO′ y en la semirrecta CO.

Si $r = R'$, 3 soluciones, O_1, O_2 y O_4. La solución O_3 desaparece, pues se confunde con la circunferencia dada O′ (tiene infinitos contactos con ella).

Si $R' < r < R$, 4 soluciones; como anteriormente.

Si $r = R$, 3 soluciones O_1 y O_2 y O_3. La solución O_4 desaparece pues se confunde con la circunferencia dada O (tiene infinitos contactos con ella).

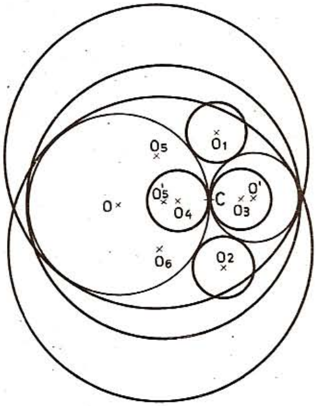


Fig. 133

Si $R < r < R + R'$, 4 soluciones como anteriormente.

Si $r = R + R'$, 5 soluciones, las cuatro anteriores y la solución O'_5 cuyo centro se halla entre O y O′.

Si $r > R + R'$, 6 soluciones; las cuatro anteriores y las soluciones O_5 y O_6 cuyos centros se hallan en la intersección de los arcos de centro O y O′ y de radios respectivamente $(r - R)$ y $(r - R')$.

6.º caso. d > R + R′ (circunferencias dadas exteriores) (fig. 134).

Si $r < \dfrac{d - R - R'}{2}$, 0 soluciones.

Si $r = \dfrac{d - R - R'}{2}$, 1 solución; su centro O'_1 se halla en el punto medio del segmento que las dos circunferencias dadas determinan sobre el segmento OO′.

Si $\dfrac{d - R - R'}{2} < r < \dfrac{d - R - R'}{2}$, 2 soluciones cuyos centros O_1 y O_2 se hallan en los puntos de intersección de los arcos de centro O y O′ y de radios $(R + r)$ y $(R' + r)$.

Si $r = \dfrac{d - R - R'}{2}$, 3 soluciones; las dos anteriores y además la que tiene en O'_3 sobre OO′.

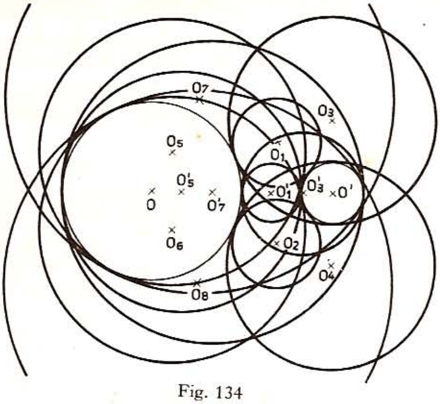


Fig. 134

Si $\frac{d + R - R'}{2} < r < \frac{d + R + R'}{2}$, 6 soluciones, O_1, O_2, O_3, O_4 como anteriormente y, además, dos soluciones cuyos centros O_5 y O_6 se hallan en la intersección de los arcos de centro O y O′ y de radios $(R - r)$ y $(R' + r)$.

Si $r = \frac{d + R + R'}{2}$, 7 soluciones; $O_1O_2O_3O_4O_5$ y O_6 como anteriormente y, además, la solución cuyo centro O'_7 se halla sobre OO′.

Si $r > \frac{d + R + R'}{2}$, 8 soluciones; $O_1O_2O_3O_4O_5$ y O_6 como anteriormente y, además, dos soluciones cuyos centros O_7 y O_8 se hallan en la intersección de los arcos de centro O y O′ y de radios $(r - R)$ y $(r - R')$.

144. Con la regla y el compás construir un ángulo:

1.º De 45º. 3.º De 135º.
2.º De 67º 30′ 4.º De 112º 30′

Nota.—*La resolución de los problemas relativos a la división de la circunferencia en partes iguales* (Geom. **457** *y siguientes*) *permite construir, con la regla y el compás, cuantos ángulos se quieran.*

● 1.º *Se divide el ángulo recto* ABC *en dos partes iguales* (Geom. **254**).

Otro procedimiento.—*Desde el vértice de un ángulo recto se describe un arco que corte a los dos lados, y se unen los dos puntos obtenidos.*

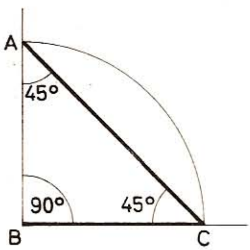


Fig. 135

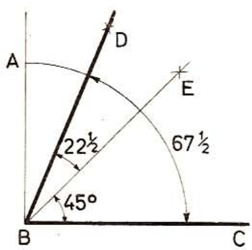


Fig. 136

Cada uno de los ángulos **A** *y* **C** *mide* 45º *por ser recto el ángulo* B, *o isósceles el triángulo* ABC (fig. 135).

• 2.º *El ángulo pedido es los 3/4 de un ángulo recto. Para obtenerlo se construye el ángulo recto* ABC (fig. 136); *luego se traza la bisectriz* BE *de este ángulo y la bisectriz* BD *del ángulo* ABE.

$$\angle \mathbf{DBC} = 45^\circ + 22^\circ\,30' = \mathbf{67^\circ\,30'}.$$

• 3.º *El ángulo pedido es los 3/4 de dos rectos. Para construirlo se traza sobre* AC (fig. 137) *una perpendicular* OB, *y luego la bisectriz del ángulo recto* BOC.

$$\angle \mathbf{AOD} = 90^\circ + 45^\circ = \mathbf{135^\circ}$$

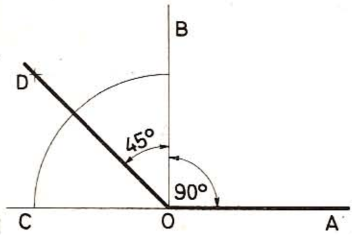


Fig. 137

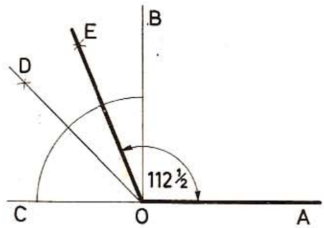


Fig. 138

• 4.º *El ángulo pedido es igual a un recto más 22º 30'; para construirlo se traza la bisectriz* OD *de un ángulo recto, luego la del ángulo* BOD (fig. 138)..

$$\angle \mathbf{AOE} = 90^\circ + 22^\circ\,30' = \mathbf{112^\circ\,30'}$$

145. Dada una circunferencia O, trácense los diámetros AB y CD (figura 139) y demuéstrese que

$$\widehat{AC} = \widehat{BD} \quad y \quad \widehat{CB} = \widehat{AD}$$

Dóblese la figura de suerte que el punto B *coincida con* C *y se demuestra por superposición.*

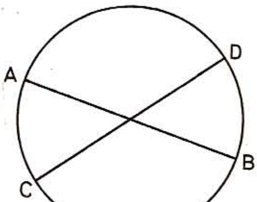


Fig. 139

146. En el problema anterior, ¿qué valor habrá que dar al arco $\widehat{AC}$ para que sea los 2/15 del $\widehat{BC}$? Dése el resultado en grados sexagesimales y centesimales.

El arco AC *valdrá* 2/17 *de la semicircunferencia, o sea:*

$$\widehat{AC} = \frac{180^\circ \times 2}{17} = \mathbf{21^\circ\,10'\,35''\ \frac{5}{17}}$$

$$\widehat{AC} = \frac{200 \times 2}{17} = \mathbf{23,\,529^g}\ \textit{por defecto}$$

147. Por un punto dado A, interior a una circunferencia, trazar la mayor cuerda y la menor que sean posibles.

La mayor será el diámetro que pase por el punto dado A *y la menor será la* *perpendicular al diámetro en ese mismo punto, pues cualquiera otra cuerda que pasara por ese punto se acercará al centro, y por tanto, sería mayor.*

148. Trazar en una circunferencia cuerdas iguales a una longitud dada l. (figura 140).

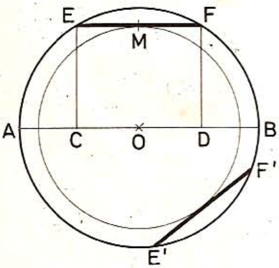


Fig. 140

Supondremos $0 < l < 2R$ *pues de lo contrario el problema no es posible.*

Sobre un diámetro AOB *llevamos los segmentos* $OC = OD = l/2$.

Luego tracemos las semicuerdas CE *y* DF *perpendiculares a* AB.

La cuerda EF *es solución.*

Tracemos la circunferencia de centro O *y de radio* OM *(*M *es el punto medio de* EF*). Todas las cuerdas de la circunferencia dada tangente a la circunferencia de radio* OM *son soluciones del problema, pues son iguales a* EF *ya que equidistan del centro* O.

149. Dado un punto C en la región interior de una circunferencia, trazar por él, una cuerda ACB (fig. 141) tal que la diferencia entre los segmentos BC y AC sea igual a una longitud dada l.

Sea ACB *la cuerda pedida; tomemos* DB = AC; CD *será la diferencia dada* l.

Como OA = OB *(radios) y* DB = AC *(por construcción) resulta* OD = OC *(segmentos oblicuos cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular* OM *trazada desde* O *a la cuerda* AB). *Luego los puntos* D, D′ *y* D″ *etc., se hallan en la intersección de la circunferencia de centro* O *y de radio* OC, *con la circunferencia de centro* C *y de radio* $CD = l$.

El problema admite, pues, dos soluciones siempre que $AC < CB$, $0 < l < 2R$ *y una solución cuando* $AC = CB$, $l = 0$; *y cuando* $AC = 0$, $l = 2R$.

El caso $AC > CB$ *supondría* $l < 0$ *lo que no suele hacerse*

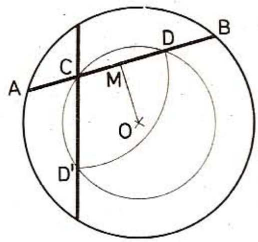


Fig. 141

150. Por uno de los puntos comunes a dos circunferencias secantes (figura 142) trazar una secante cuyo punto medio coincida con el punto dado.

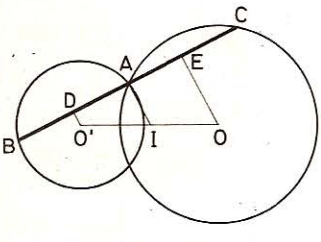


Fig. 142

Sea BC *la secante pedida cuyo punto medio es* A. *Por los puntos* O, O′ *y* A *tracemos los segmentos* OE, O′D *y* AI *perpendiculares a* BC.

Como AB = AC *resulta* AD = AE *(mitades de cuerdas iguales) y también* IO′ = IO *(secantes cortadas por paralelas equidistantes). De lo cual se deduce la construcción siguiente:*

Se une el punto medio I *del segmento* OO′ *con el punto* A *común a las dos circunferencias y por el punto* A *se traza la perpendicular* BC *al segmento* IA.

151. Desde los tres vértices de un triángulo como centros, describir circunferencias tangentes dos a dos.

Supongamos el problema resuelto (fig. 143) *y sean* D, E, F *los puntos de tangencia: Las tangentes en* D *y* E *se cortan necesariamente en un punto* I. *Como* ID = IE *(tangentes trazadas a una circunferencia desde un mismo punto),* I *tiene la misma potencia con relación a las tres circunferencias* ($ID^2 = IE^2$).

Luego I *pertenece al tercer eje radical y, por tanto,* $IF^2 = IE^2 = ID^2$.

I *equidista, pues, de los tres lados del triángulo. Es el incentro.*

De donde se deduce la construcción siguiente:

1.º *Se trazan dos bisectrices interiores cuya intersección* I *es el incentro.*

2.º *Se trazan los segmentos* ID, IE, IF *perpendiculares a los lados* AB, BC, CA.

3.º *Haciendo sucesivamente centro en* A, B *y* C *se describen las circunferencias tomando respectivamente por radios* AD = AF, BD = BE, *y* CE = CF.

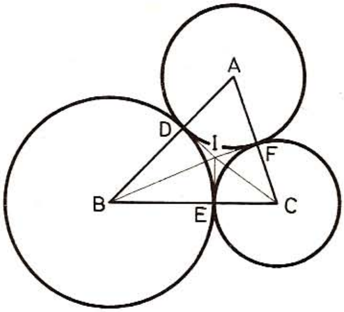


Fig. 143

152. Construir un triángulo, dados:

1.º Dos ángulos y el radio de la circunferencia circunscrita (fig. 144).

2.º Dos ángulos y el radio de la circunferencia inscrita (fig. 145).

3.º La base, el ángulo opuesto y la altura correspondiente a este ángulo (figura 146).

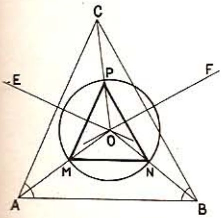


Fig. 144

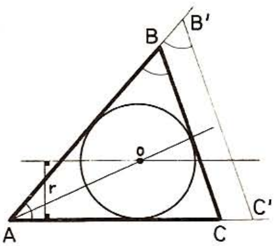


Fig. 145

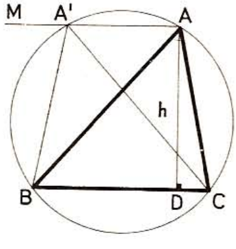


Fig. 146

1.º *Sobre un segmento cualquiera* AB *se construyen los ángulos dados* A *y* B *cuyos lados determinan el vértice* C. *Las mediatrices de estos lados dan el circuncentro del triángulo. Con un radio igual al dado y desde este centro se traza una circunferencia. Las rectas que unen el circuncentro con los vértices* A, B *y* C *determinan sobre esta circunferencia los vértices del triángulo pedido, ya que es semejante al construido y está inscrito en la circunferencia de radio igual al dado.*

2.º *Construido* $\angle$BAC *igual a uno de los ángulos dados, se determina el* *centro de la circunferencia inscrita trazando la bisectriz de* $\angle$ A *y una recta paralela a* AC *a una distancia igual al radio dado. El punto de intersección de ambas rectas es el centro de la circunferencia inscrita.*

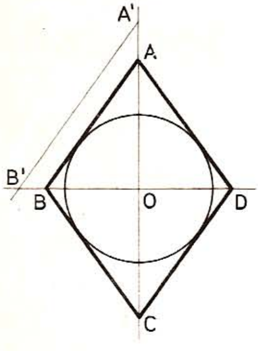


Fig. 147

Sobre la recta AB *construimos* $\angle B' = \angle B$. *La tangente a la circunferencia paralela a* B'C' *determina el triángulo pedido.*

● 3.º *Sobre la base* BC *se construye el arco capaz del ángulo dado* A; *los puntos de intersección de este lugar con la paralela* AM *a la base* BC, *que dista* h, *son los vértices* A *y* A' *de los dos triángulos iguales que solucionan el problema propuesto.*

153. Construir un rombo dados un ángulo y el radio de la circunferencia inscrita (fig. 147).

En la intersección O *de dos perpendiculares* OA *y* OB *se describe la circunferencia inscrita; sobre una de ellas se traza un ángulo igual a la mitad del ángulo dado y se traza la tangente* AB *paralela al lado* A'B' *del ángulo construido.*

Luego, desde A *se traza la tangente* AD; *se toman* OC = OA *y se trazan desde* C *las tangentes* CB *y* CD.

II. Teoremas

154. En un mismo círculo O (fig. 148), un ángulo central y otro inscrito valen cada uno 120º. Demuéstrese que las cuerdas correspondientes AB, CD son iguales.

Como $\angle AOB = 120^\circ$ *resulta* $\widehat{ANB} = 120^\circ$

y como $\angle CMD = 120^\circ$ *resulta* $\widehat{CND} = 240^\circ$

Luego $\widehat{CMD} = 360^\circ - \widehat{CND} = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$

Y las cuerdas **AB y CD son iguales** *ya que subtienden arcos iguales.*

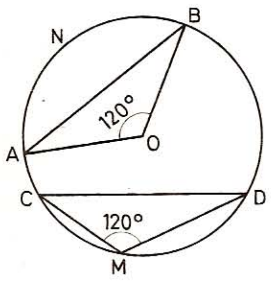


Fig. 148

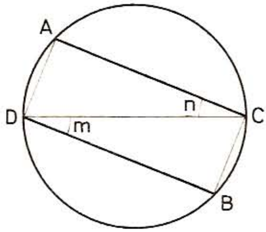


Fig. 149

155. Dos cuerdas paralelas trazadas por los extremos de un diámetro son iguales (fig. 149).

Los ángulos m *y* n *son iguales por alternos internos.*

Los triángulos rectángulos DAC *y* DBC *son iguales por tener la hipotenusa común y un ángulo agudo igual.*

Luego los catetos **AC** *y* **CB son iguales.**

156. Si dos cuerdas iguales se cortan en un punto interior del círculo (figura 150) los segmentos son recíprocamente iguales.

Sean las dos cuerdas $AB = CD$, *tenemos que* $\overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{CA}$.

Luego $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AD}$ *y, por tanto,* $\overline{CB} = \overline{AD}$.

Por otra parte $\angle BCD = \angle BAD = 1/2\ \overset{\frown}{BD}$

$$\angle CBA = \angle CDA = 1/2\ \overset{\frown}{CA}$$

Por tanto, $\triangle COB = \triangle AOD$ *(lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales).*

Luego $\mathbf{CO = OA}$ *y* $\mathbf{BO = OD}$

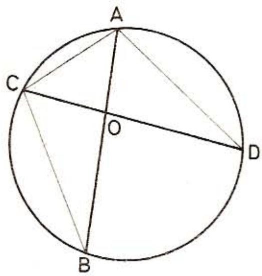


Fig. 150

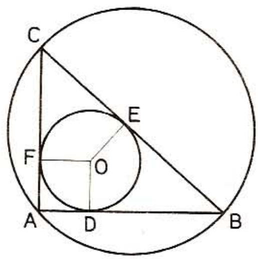


Fig. 151

157. La suma de los diámetros de las circunferencias circunscrita e inscrita a un triángulo rectángulo (fig. 151), es igual a la suma de los catetos.

Por ser iguales las tangentes trazadas desde el mismo punto:

$$\left.\begin{array}{l} CF = CE \\ BD = BE \\ AD = AF = r \end{array}\right\} \begin{array}{r} CB = 2R = CF + BD \\ 2r = AD + AF \end{array}$$

de donde:

$$2R + 2r = CF + BD + AD + AF$$

$$\mathbf{2R + 2r = AC + AB}$$

La relación anterior puede escribirse también

$$2r = b + c - a$$

es decir: *El diámetro de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo es igual a la suma de los catetos menos la hipotenusa.*

158. Calcular los segmentos que sobre los lados de un triángulo determinan las circunferencias inscrita y exinscrita al mismo.

Sean a, b, c *los lados y* 2p *el perímetro* (fig. 152).

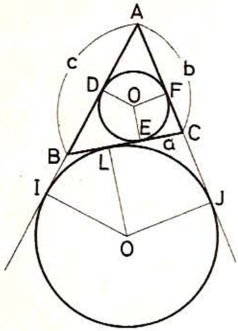


Fig. 152

● 1.º *Tenemos que*

$$\left.\begin{array}{l} AD = AF \\ BE = BD \\ CE = CF \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} 2AD + 2BE + 2CF = 2p \\ AD + BE + CF = p \end{array}$$

de donde:
$$\mathbf{AD} = p - (BE + CE) = \mathbf{p - a}$$
$$\mathbf{BE} = p - (AF + CF) = \mathbf{p - b}$$
$$\mathbf{CF} = p - (AD + DB) = \mathbf{p - c}$$

● 2.º *Las tangentes iguales* AI = AJ *a la circunferencia exinscrita darán:*

$$AI + AJ = c + b + CJ + BI$$

pero $$BI + CJ = BL + CL = a$$

por tanto $$2AI = 2AJ = a + b + c = 2p$$

de donde $$AI = AJ = p$$

y, por consiguiente,
$$\mathbf{BI} = \mathbf{BL} = AI - c = \mathbf{p - c}$$
$$\mathbf{CJ} = \mathbf{CL} = AJ - b = \mathbf{p - b}$$

159. Dada una circunferencia O y radio R (fig. 153) se trazan dos cuerdas paralelas, cada una a distinto lado del centro, tales que la AB sea el lado del triángulo equilátero inscrito, y la CD el lado del cuadrado inscrito. Calcular la longitud de estas cuerdas y la medida de los cuatro arcos que determinan.

● 1.º *Sabemos* (GEOM. **446** *y* **442**) *que*

$$\mathbf{AB = R\sqrt{3}} \quad y \quad \mathbf{CD = R\sqrt{2}}$$

● 2.º $$\mathbf{\overset{\frown}{AB} = 120^{o}} \quad y \quad \mathbf{\overset{\frown}{CD} = 90^{o}}$$

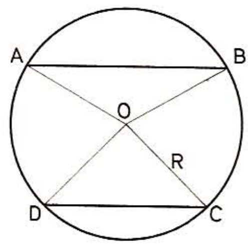


Fig. 153

Por otra parte $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ *(arcos comprendidos entre paralelas).*

Como $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = 360^{o} - 120^{o} - 90^{o} = 150^{o}$

resulta $$\mathbf{\overset{\frown}{AD}} = \mathbf{\overset{\frown}{BC}} = \frac{150^{o}}{2} = \mathbf{75^{o}}$$

Longitud de $\mathbf{\overset{\frown}{AB}} = \mathbf{\dfrac{2\,\pi R}{3}}$

Longitud de $\mathbf{\overset{\frown}{CD}} = \dfrac{2\,\pi R}{4} = \mathbf{\dfrac{\pi R}{2}}$

Longitud de $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} = \dfrac{1}{2}\left[2\,\pi R - \left(\dfrac{2\,\pi R}{3} + \dfrac{\pi R}{2}\right)\right]$

$$\mathbf{\overset{\frown}{AD}} = \mathbf{\overset{\frown}{BC}} = \frac{1}{2}\left(\frac{12\,\pi R - 7\,\pi R}{6}\right) = \mathbf{\frac{5\,\pi R}{12}}$$

160. Los puntos simétricos del ortocentro, con relación a los lados de un triángulo están sobre la circunferencia circunscrita a ese triángulo (fig. 154).

Sea H *el ortocentro. Tracemos los segmentos* AH, BH *y* CH, *y prolonguémoslos hasta los puntos* E, L, F *en que cortan a la circunferencia circunscrita. Tracemos las cuerdas* EB, EC, FB, FA *y* LA.

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Tenemos:} & \angle BCF = \angle BAE \text{ (lados perpend.)} \\ y & \angle BAE = \angle BCE = 1/2\,\widehat{BE} \end{array}\right\} \textit{luego } \angle BCF = \angle BCE$$

por lo que $\triangle HIC = \triangle EIC$ *(cateto común adyacente a ángulos iguales).*

Por consiguiente, HI = IE, *y* E *es simétrico de* H *respecto a* BC.

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{También:} & \angle BCF = \angle BAE \\ y & \angle BGF = \angle BAF = 1/2\,\widehat{BF} \end{array}\right\} \textit{luego } \angle BAE = \angle BAF$$

por lo que $\triangle AJH = \triangle AJF$.

Por consiguiente JF = JH, *y* F *es simétrico de* H *respecto a* BA

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Igualmente} & \angle CAE = \angle CBL \\ y & \angle CBL = \angle CAL = 1/2\,\widehat{CL} \end{array}\right\} \textit{luego } \angle CAE = \angle CAL$$

Por lo que $\triangle AKH = \triangle AKL$

Por consiguiente HK = KL, *y* L *es simétrico de* H *respecto a* AC.

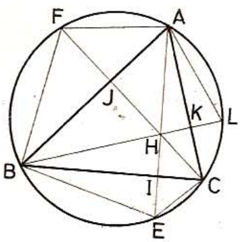


Fig. 154

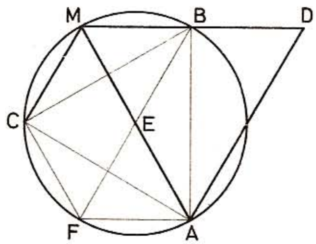


Fig. 155

161. La distancia de un punto M tomado en la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero, a uno de los vértices, es igual a la suma de las distancias de este mismo punto a los otros dos vértices.

Hallándose el punto M entre B y C, si se prolonga MC o MB una longitud tal que MD = MA, el triángulo MAD es equilátero (fig. 155).

• 1.º *Tracemos la cuerda* BF *paralela a* MC *y las cuerdas* CF *y* FA.

Resulta $\widehat{CF} = BM$

Tenemos $\angle AMB = \dfrac{\widehat{BA}}{2} = \dfrac{120^{o}}{2} = 60^{o}$

$$\angle FBM = \angle FBC + \angle CBM = \frac{\widehat{FC}}{2} + \frac{\widehat{CM}}{2} = \frac{\widehat{BM}}{2} + \frac{\widehat{CM}}{2} =$$

$$= \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\angle MEB = \frac{\widehat{MB}}{2} + \frac{\widehat{FA}}{2} = \frac{\widehat{CF}}{2} + \frac{\widehat{FA}}{2} = \frac{\widehat{CA}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

El triángulo MEB *es equiángulo y, por tanto, equilátero.*

Luego $$MB = ME \qquad (1)$$

Del mismo modo se demuestra que el $\triangle$FEA *es equiángulo y, por tanto, equilátero.*

Luego $$EA = FA$$

Por otra parte $$\widehat{AF} = \widehat{AC} - \widehat{FC} = 120^\circ - \widehat{FC}$$

$$\widehat{MC} = \widehat{BC} - \widehat{BM} = 120^\circ - \widehat{BM} = 120^\circ - \widehat{FC}\ (\text{ya que } \widehat{BM} = \widehat{FC})$$

Luego $\widehat{AF} = \widehat{MC}$ *y* FA = CM *y, por tanto,* CM = FA = EA (2)
Sumando miembro a miembro (1) *y* (2), *tenemos:*

$$\mathbf{MB + MC} = ME + EA = \mathbf{MA}$$

2.º *El* $\triangle$MAD *es isósceles, luego* $\angle A = \angle D$, *pero* $\angle M = 60^\circ$; *por tanto*

$$\angle A + \angle D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

y $$\angle A = \angle D = 60^\circ$$

por consiguiente, el **triángulo MAD es equilátero** *por ser equiángulo.*

162. Si dos circunferencias O y O′ (fig. 156) se cortan, los segmentos determinados por ellas sobre dos secantes paralelas trazadas por los puntos de intersección son iguales.

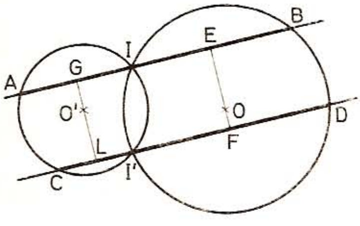


Fig. 156

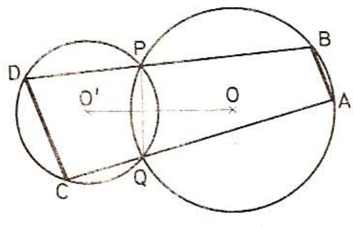


Fig. 157

Trazando los segmentos FOE *y* LO′G *perpendiculares a dichas secantes, tenemos:*

$$IE = EB; \quad IG = GA; \quad I'F = FD; \quad I'L = LC$$

por otra parte GE = LF *como segmentos paralelos comprendidos entre paralelas.*

Luego 2GE = 2LF *o bien* **AB = CD.**

163. Si dos circunferencias se cortan en los puntos P y Q (fig. 157) y por estos puntos se traza una secante a las dos, los segmentos que unen sus extremos en cada circunferencia son paralelas.

En efecto, $\angle C = \angle QPB$ *por tener ambos por suplemento* $\angle QPD$. *Pero* $\angle QPB$ *y* $\angle A$ *son suplementarios, por tanto* $\angle C$ *y* $\angle A$ *también lo serán, y como son conjugados,* **AB** *y* **CD serán paralelos.**

164. Dos circunferencias iguales O y O′ (fig. 158) se cortan en A y B. Por el punto A se traza la secante común CAD. Demuéstrese que el triángulo CBD es isósceles.

Siendo las circunferencias iguales y AB *una cuerda común:* $\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$.

Por otra parte $\angle BCD = 1/2\ \widehat{ANB}$

$\angle BDC = 1/2\ \widehat{AMB}$

Luego $\angle BCD = \angle BDC$ *y, por tanto, el* **△CBD es isósceles.**

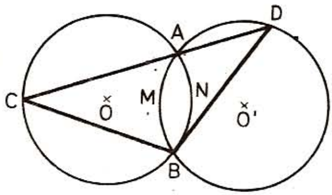


Fig. 158

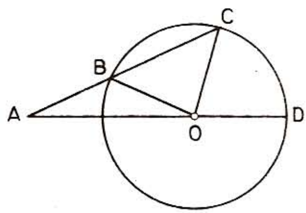


Fig. 159

165. Dada una circunferencia O (fig. 159), desde el punto A se traza la secante ABC, de modo que sea AB = R, y se traza la secante AOD que pasa por el centro. Demuéstrese que $\angle COD = 3\ \angle A$.

Por ser isósceles los triángulos AOB *y* COB *se desprende que:*

$$\angle OCB = \angle OBC = \angle OAB + \angle AOB = 2\ \angle OAB = 2\ \angle A$$
$$\angle \mathbf{COD} = \angle OAC + \angle OCA = \angle A + 2\ \angle A = \mathbf{3}\ \angle \mathbf{A}$$

166. Por el punto de tangencia de dos circunferencias (fig. 160) se traza una secante común. Demostrar:

1.º Que los radios trazados en los puntos de intersección de la secante son paralelos.

2.º Que las tangentes trazadas en esos mismos puntos serán también paralelas.

3.º Que los arcos determinados por la secante tienen igual medida.

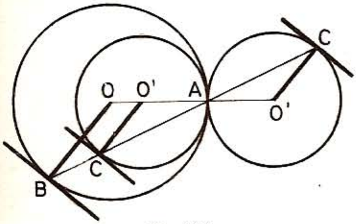


Fig. 160

● 1.º *Como los triángulos* BOA *y* CO′A *son isósceles, tendremos:*

$$\angle B = \angle A = \angle C$$

y los radios **OB** *y* **O′C serán paralelos.**

● 2.º *Las tangentes en* B *y* C *son perpendiculares a los radios paralelos* OB *y* O'C, *por tanto,* **serán también paralelas.**

● 3.º **Los arcos AB** *y* **AC** *tienen la misma medida que los ángulos correspondientes* BOA *y* CO'A, *y siendo éstos iguales, también lo* **serán aquéllos.**

167. Por el punto de contacto de dos circunferencias tangentes exteriormente (fig. 161) se trazan dos secantes comunes cualesquiera. Demostrar que las rectas que unen los extremos de dichas secantes en cada circunferencia son paralelas. ¿Sería lo mismo cuando las dos circunferencias fuesen tangentes interiormente?

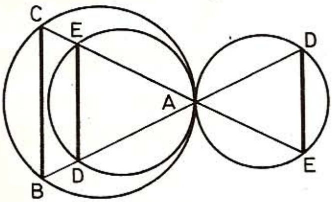


Fig. 161

● 1.º *Teniendo la misma medida los arcos* BA *y* AD, *los ángulos* C *y* E *serán iguales, y como son alternos, las rectas* BC *y* ED *serán paralelas.*

● 2.º *Lo propio ocurriría si las circunferencias fuesen tangentes interiormente, con la única diferencia de que en este caso, los ángulos* E *y* C *serían correspondientes.*

III. Lugares geométricos

168. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las rectas trazadas desde un punto a una recta dada.

Será **la paralela** *a las rectas dadas trazada por esos puntos medios.*

169. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos de recta comprendidos entre dos paralelas.

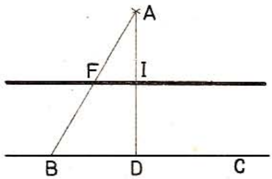


Fig. 162

Sea BC (fig. 162), *la recta dada y* A *el punto; tracemos la perpendicular* AD *a la* BC; *el punto* I, *medio de* AD, *pertenecerá a ese lugar geométrico.*

Sea AB *otra recta cualquiera; si unimos* I *con* F, *punto medio de* AB, *la recta* FI *será paralela a* BC (GEOM. **155**).

Así pues, **el lugar geométrico** *buscado* **será la paralela a la recta dada BC trazada por el punto medio de la perpendicular AD.**

170. Hallar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas que se cortan (fig. 163).

El lugar geométrico serán las **bisectrices** *de los cuatro ángulos que forman dichas rectas.*

171. Hallar los puntos que se encuentran a igual distancia de dos rectas dadas y que se hallan a una distancia dada del punto de intersección (fig. 163).

Estos puntos serán los **cuatro de intersección** *de las bisectrices de los ángulos que forman dichas rectas con la circunferencia descrita desde* O *con un radio igual a la distancia dada.*

172. Hallar el lugar geométrico de los centros de un rombo cuando uno de sus lados queda fijo (fig. 164).

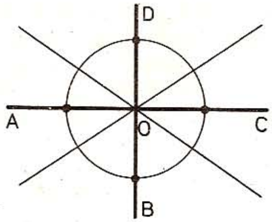


Fig. 163

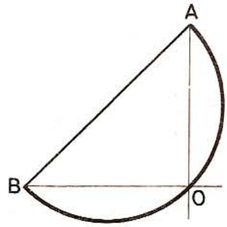


Fig. 164

El ángulo AOB *que forman las diagonales del rombo al ser recto, quedará inscrito en la semicircunferencia de diámetro* AB. *El lugar geométrico del vértice* O *de este ángulo será, pues, la* **semicircunferencia** *susodicha.*

173. Hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las circunferencias tangentes a una recta en dos puntos dados A y B y tangentes entre sí (fig. 165).

Los triángulos AOC *y* BO′C *son isósceles y* O *y* O′ *son suplementarios; por consiguiente*

$$2\angle n + 2\angle m = 180^\circ$$
$$\angle n + \angle m = 90^\circ$$

y

$$\angle ACB = 90^\circ$$

Por tanto, el lugar geométrico del punto de contacto C *será la* **circunferencia de diámetro AB.**

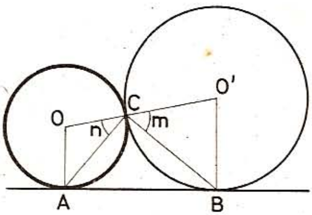


Fig. 165

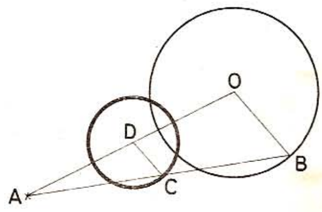


Fig. 166

174. Se une un punto A exterior a una circunferencia con un punto cualquiera B de esta circunferencia. Hállese el lugar geométrico del punto medio de AB (fig. 166).

Unamos el punto dado A *con el centro* O *de la circunferencia y con el punto* B *tomado sobre ésta, luego tracemos por el punto medio de* AB *la recta* CD *paralela a* OB, *con lo cual tendremos que* D *será el punto medio de* AO, *y* CD = OB/2.

Por tanto, el lugar geométrico pedido será **una circunferencia** *trazada desde* **D como centro,** *con un* **radio DC=OB/2.**

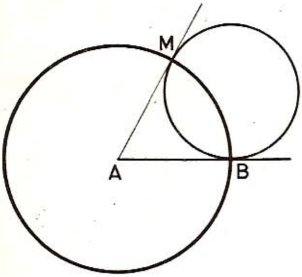


Fig. 167

175. Dada una circunferencia tangente en B a una recta AB (fig. 167), si por el punto A trazamos la tangente AM, hallar el lugar geométrico del punto de contacto M.

Para todas las tangentes se verifica:

$$AB = AM$$

por tanto, la **circunferencia descrita desde A con un radio AB,** *será el lugar geométrico del punto dado* M.

176. Hallar el lugar geométrico de los vértices de los triángulos de igual base y medianas iguales.

El lugar geométrico de todos los vértices A *será* (fig. 169) *la* **circunferencia de centro M y radio MA,** *igual a la mediana dada.*

177. Hallar el lugar geométrico de los puntos de concurrencia de las alturas de los triángulos de igual base e igual ángulo en el vértice.

El ángulo AOB *es el suplemento del ángulo* M (fig. 168), *por tanto, el lugar geométrico del ortocentro* O, *será* **el arco AOB** *simétrico del* ANB *respecto de la base dada* AB.

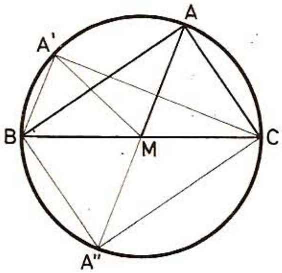


Fig. 168

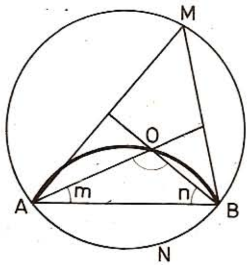


Fig. 169

178. El triángulo AMB (fig. 169) tiene la base fija AB como cuerda de una circunferencia y el vértice M se desplaza sobre el arco AMB que aquélla subtiende. ¿Cuál será el lugar geométrico del punto de concurrencia de las bisectrices del triángulo móvil?

Sea O *el incentro*

$$AOB = 180^\circ - (\angle m + \angle n) = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2}$$

Pero $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle M; \quad \frac{\angle A + \angle B}{2} = 90^\circ - \frac{\angle M}{2}$

Luego $\angle AOB = 180^o - \left(90^o - \frac{\angle M}{2}\right) = 90^o + \frac{\angle M}{2} = \text{Cte.}$

ya que $\angle M$ *es constante.*

Luego el vértice O *se desplazará sobre el* **arco BOA capaz del ángulo** $\mathbf{90^o + \frac{\angle M}{2}}$

179. La hipotenusa de un triángulo rectángulo oscila de tal manera que sus extremidades resbalan siempre sobre los dos catetos. Hallar el lugar geométrico de su punto medio.

Sea AB (fig. 170) *una posición de las infinitas que puede tener la recta móvil. Unamos su punto medio* M *con el vértice* C.

El segmento CM *es igual a la semihipotenusa* (33).

Luego $CM = \frac{AB}{2} = \text{Cte.}$

El lugar geométrico de M *es el* **cuadrante $\widehat{\text{EMD}}$ de centro C y de radio CM = AB/2.**

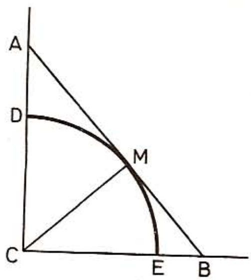


Fig. 170

180. Un segmento de recta AB se mueve paralelamente a una dirección dada de modo que el punto A describe la circunferencia O (fig. 171). ¿Cuál será el lugar geométrico del otro extremo B?

Sea CD *igual y paralelo a* BA. *Por el centro* O *tracemos* O′O *igual y paralelo a* AB.

El cuadrilátero ABO′O *será un paralelogramo; por tanto:*

$$OA = O'B$$

y
$$OD = O'C = r$$

El lugar geométrico será, pues, una **circunferencia igual a la primera.**

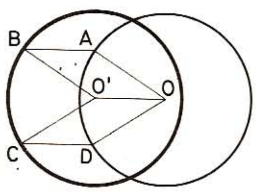


Fig. 171

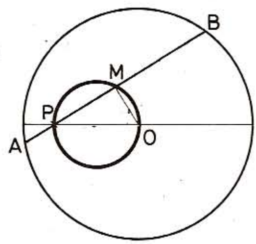


Fig. 172

180 bis. — Hallar el lugar geométrico de los puntos medios M de las cuerdas de una circunferencia dada, que pasen por un mismo punto P.

Sea la circunferencia de centro O (fig. 172); AB *una cuerda que pasa por el punto fijo* P. *Tracemos el segmento* OM. *Este segmento es perpendicular a la cuerda* (GEOM. **195**).

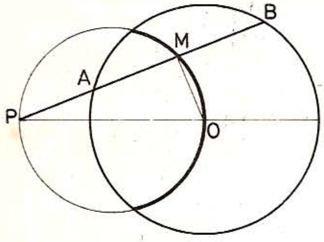


Fig. 173

El triángulo rectángulo POM *tiene la hipotenusa fija; luego el lugar geométrico del vértice* M *es la circunferencia de diámetro* PO.

Nota. — Si el punto P se halla fuera de la circunferencia dada (fig. 173), el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de dicha circunferencia cuyas prolongaciones pasen por P, sería sólo el arco de circunferencia de diámetro PO interceptado por la circunferencia dada.

IV. Problemas

181. Dado un triángulo ABC (fig. 174) en el cual $\angle B = 58^o$ y $\angle C = 70^o$, se desea saber:

1.º El valor del ángulo *d* formado por las bisectrices interiores BD y CF.
2.º El valor del ángulo *s* que forman las bisectrices exteriores EA y EC.
3.º El ángulo que forma la bisectriz BD con la altura BH.
4.º El ángulo que forman las alturas de los vértices B y A.

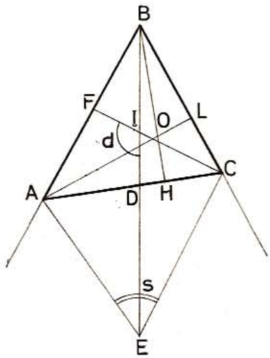


Fig. 174

• 1.º $\angle d = \angle CIB = 180^o - \dfrac{\angle B + \angle C}{2}$

$$\angle \mathbf{d} = 180^o - \frac{58^o + 70^o}{2} = \mathbf{116^o}$$

• 2.º $\angle A = 180^o - (\angle B + \angle C) =$
$= 180^o - 128^o = 52^o.$

Como las bisectrices exteriores son perpendiculares a las interiores correspondientes, $\angle s$ *es el suplemento del ángulo formado por* AI *y* CI

$$\angle AIC = 180^o - \frac{\angle A + \angle C}{2} =$$

$$= 180^o - \frac{52^o + 70^o}{2} = 180^o - 61^o$$

$$\angle \mathbf{s} = 180^o - \angle AIC = 180^o - 180^o + 61^o = \mathbf{61^o}$$

• 3.º $\angle DBH = \angle ABH - \angle ABD$

$$\angle ABH = 90^o - \quad A = 90^o - 52^o = 38^o$$

$$\angle ABD = \frac{\angle B}{2} = \frac{58^o}{2} = 29^o$$

$$\angle \mathbf{DBH} = 38^o - 29^o = \mathbf{9^o}$$

● 4.º *El ángulo que forman las alturas* BH *y* AL *tiene sus lados respectivamente perpendiculares a los lados del ángulo* C; *estos dos ángulos serán iguales o suplementarios; por tanto:*

$$\angle \mathbf{BOL} = \angle C = \mathbf{70^o} \quad \textit{o bien} \quad \angle \mathbf{AOB} = 180^o - \angle C = \mathbf{110^o}$$

182. En un triángulo ABC (fig. 175) rectángulo en A, se traza la altura AH y se toma sobre BC. HD = HB; por el extremo C se traza CE perpendicular a la prolongación de AD. Demuéstrese:

1.º Que la circunferencia de diámetro AC pasa por los puntos H y E.

2.º Deducir de lo expuesto, la igualdad de los segmentos AH y EH.

3.º Probar que $\angle$ACB = $\angle$DAH.

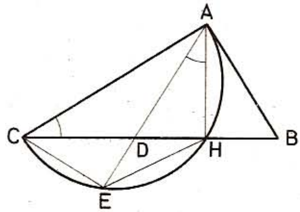


Fig. 175

● 1.º *Como los ángulos* AHC *y* AEC *son rectos, los vértices* H *y* E *estarán sobre la semicircunferencia de diámetro* AC.

● 2.º *El triángulo* ADB *es isósceles, pues la altura es al mismo tiempo mediana* (HD = HB), *también será bisectriz.*

$$\textit{Luego} \quad \angle DAH = \angle BAH \quad y \quad \frac{\widehat{EH}}{2} = \frac{\widehat{HA}}{2} \quad \textit{es decir,} \quad \widehat{EH} = \widehat{HA}$$

Por tanto, las cuerdas **AH** *y* **HE son iguales** *ya que subtienden arcos iguales.*

● 3.º $\angle$ACB = $\angle$BAH *por tener los lados respectivamente perpendiculares y ser de la misma especie*

pero $\angle BAH = \angle DAH$

luego $\angle \mathbf{ACB} = \angle \mathbf{DAH}$

183. Dado un triángulo ABC (fig. 176), se trazan las alturas BD y AE, las cuales se cortan en el punto H. Si el $\angle A = 45^o$ y $\angle C = 60^o$, hállese:

1.º El ángulo *m* formado por las alturas, y los ángulos *r* y *s* de éstas con los lados AB y BC.

2.º Demuéstrese que el cuadrilátero ADEB es inscriptible.

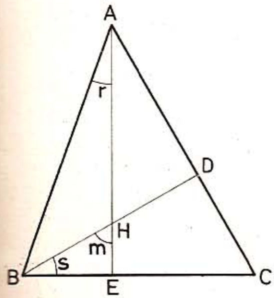


Fig. 176

● 1.º $\angle$m *y* $\angle$C *son de la misma especie y tienen los lados perpendiculares, luego:*

$$\angle m = \angle C = 60^o$$

$$\angle B = 180^o - (\angle A + \angle C)$$

$$\angle \mathbf{r} = 90^o - \angle B = 90^o - [180^o - (45^o + 60^o)] = \mathbf{15^o}$$

$$\angle \mathbf{s} = 90^o - \angle C = 90^o - 60^o = \mathbf{30^o}$$

● 2.º *Los ángulos* ADB *y* HEB *por ser rectos, sus vértices* D *y* E *estarán sobre la semicircunferencia de diámetro* AB; *por tanto, el cuadrilátero* **ADEB es inscriptible.**

184. En el trapecio ABCD (fig. 177), $\angle A = 68^o$ y $\angle B = 62^o\,30'$. Calcular:

1.° Los ángulos C y D del trapecio y el ángulo E formado por las prolongaciones de los lados no paralelos.

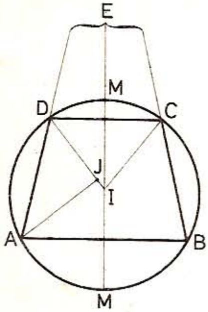


Fig. 177

2.° El ángulo DIC que forman las bisectrices de los ángulos C y D.

3.° Probar que las bisectrices de los ángulos A y D son perpendiculares.

4.° Sirviéndose del lugar geométrico, hallar un punto M equidistante de BC y de DA, desde el cual se vea AB bajo un ángulo recto.

● 1.° *En un trapecio, al ser las bases paralelas, los ángulos* A y D *serán suplementarios, lo mismo que los* $\angle$B *y* $\angle$C; *así pues:*

$$\angle \mathbf{C} = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 62^\circ\,30' = \mathbf{117^\circ\,30'}$$
$$\angle \mathbf{D} = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 68^\circ = \mathbf{112^\circ}$$

$\angle$E *es suplemento de* $\angle$A + $\angle$B; *por tanto*

$$\angle \mathbf{E} = 180^\circ - (68^\circ + 62^\circ\,30') = \mathbf{49^\circ\,30'}$$

● 2.° $\angle \mathbf{DIC} = 180^\circ - \dfrac{\angle C + \angle D}{2} = 180^\circ - \dfrac{117^\circ\,30 + 112^\circ}{2} = \mathbf{65^\circ\,15'}$

● 3.° *Los ángulos* A *y* D *son suplementarios, por tanto*

$$\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle D}{2} = 90^\circ$$

el ángulo de sus bisectrices será:

$$\angle \mathbf{AJD} = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle D}{2} = 180^\circ - 90^\circ = \mathbf{90^\circ}$$

● 4.° *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de* BC *y de* AD *es la bisectriz del ángulo formado por esas rectas, y el de los puntos desde las cuales se vea* AB *bajo un ángulo recto es la circunferencia de diámetro* AB; **los puntos M y M′,** *intersecciones de ambos lugares geométricos, son los puntos que resuelven el problema.*

185. En una circunferencia en la cual el arco BC = 60° (fig. 178), trazamos BD, perpendicular al diámetro AC, y DF, paralela al mismo diámetro.

1.° ¿Qué amplitud tienen los arcos DC, AB, FD?

2.° Sabiendo que BC es perpendicular a AB, ¿por qué CAB = $\angle$DBC?

3.° ¿Cómo se trazará la normal en el punto F?

4.° ¿Cómo se trazará una tangente paralela a AB?

● 1.° *Por ser* OC *perpendicular a* BD *divide a ésta y al arco que subtiende en dos partes iguales; por tanto*

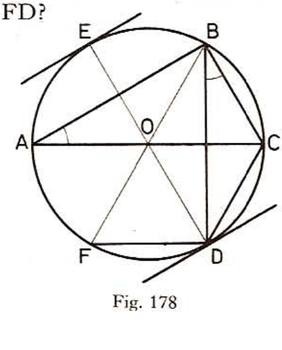


Fig. 178

$$\widehat{BC} = \widehat{\mathbf{DC}} = \mathbf{60^\circ}$$
$$\widehat{AB} + \widehat{BC} = 180^\circ$$

$$\widehat{\mathbf{AB}} = 180^\circ - \widehat{BC} = 180^\circ - 60^\circ = \mathbf{120^\circ}$$

Por ser FD *y* AC *paralelas* $\widehat{AF} = \widehat{CD} = 60^\circ$

y $$\widehat{\mathbf{FD}} = 180^\circ - (\widehat{AF} + \widehat{CD}) = \mathbf{60^\circ}$$

● 2.º *Los ángulos* CAB *y* DBC *son iguales* **por tener sus lados perpendiculares y ser ambos agudos.**

● 3.º *Para trazar la normal en el punto* F *bastará unir este punto con el centro de la circunferencia, pues el radio del punto de contacto* F *es perpendicular a la tangente trazada en ese punto.*

● 4.º *Para trazar una tangente paralela a* AB *bastará trazar* DE, *mediatriz de* AB, *y luego, por los puntos en que ésta corta a la circunferencia, se trazan paralelas a* AB, *o perpendiculares a la mediatriz* DE.

186. Sea O la circunferencia inscrita en el triángulo ABC (fig. 179) y sean M, N, R los puntos de tangencia.

1.º Hallar el valor de $\angle M$, $\angle N$, $\angle R$, en función de los ángulos A, B y C del triángulo.

2.º ¿Podrá ser rectángulo el triángulo MNR?

3.º Siendo O el centro de la circunferencia inscrita, hallar el valor de los ángulos NOR, NOM y MOR.

● 1.º AR = AM, BM = BN, CN = CR *(tangentes desde un punto a una circunferencia).*

OM = ON = OR *(radios de la misma circunferencia).*

Las bisectrices AO, BO *y* CO *son, pues, mediatrices de los segmentos* MR, MN, *y* NR. *En consecuencia, los ángulos* NMR, MNR *y* MRN *tienen sus lados respectivamente perpendiculares a los de los ángulos* BOA, BOC *y* COA *y como son de especie diferente, son suplementarios.*

$$\angle BOA = 180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2};\ \angle BOC = 180^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2};\ \angle COA = 180^\circ - \frac{\angle C + \angle A}{2}$$

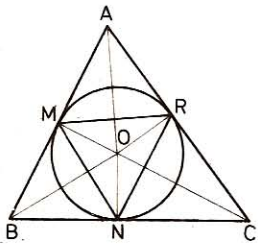


Fig. 179

de donde:

$$\angle M = \angle NMR = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{\angle A + \angle B}{2}\right) = \mathbf{\frac{\angle A + \angle B}{2}}$$

Del mismo modo:

$$\angle N = \mathbf{\frac{\angle B + \angle C}{2}} \quad y \quad \angle \mathbf{R} = \mathbf{\frac{\angle C + \angle A}{2}}$$

● 2.º *Como* $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ *resulta* $\dfrac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} = 90^\circ$

Luego

$$\angle M = \frac{\angle A + \angle B}{2} < \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} \quad \textit{es decir} \quad \angle M < 90^{\circ}$$

$$\angle N = \frac{\angle B + \angle C}{2} < \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} \quad \textit{es decir} \quad \angle N < 90^{\circ}$$

$$\angle R = \frac{\angle C + \angle A}{2} < \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} \quad \textit{es decir} \quad \angle R < 90^{\circ}$$

En consecuencia, el **triángulo MNR no puede ser rectángulo.**

• 3.º $\angle$NOR, $\angle$NOM *y* $\angle$MOR *tienen sus lados respectivamente perpendiculares a los lados de* $\angle$C, $\angle$B, *y* $\angle$A *y son de especie diferente.*

Luego **$\angle$ NOR, $\angle$ NOM** *y* **$\angle$ MOR son suplementarios de $\angle$C, $\angle$B y $\angle$A.**

187. Sea el triángulo ABC inscrito en la circunferencia O (fig. 180) tal que el arco AB = 120º y el arco BC = 72º.

1.º Demuéstrese que la recta BDE, que une el punto B con E, en donde el radio OE perpendicular a AC corta a la circunferencia, es bisectriz de B; dése el valor de $\angle B/2$.

2.º La tangente EF corta a la secante BC en F; calcular los ángulos DCF, DEF, BDC.

3.º Los lados AB, BC, ¿son lados de polígonos regulares que se pudieran inscribir en la circunferencia dada?

• 1.º *El radio perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales, lo mismo que al arco que ésta subtiende; así es que* $\widehat{CE} = \widehat{AE}$ *y la recta* BE *será bisectriz del ángulo* B:

$$\frac{\angle \mathbf{B}}{\mathbf{2}} = \frac{1}{2}[360^{\circ} - (120^{\circ} + 72^{\circ})] = \mathbf{84^{\circ}}$$

• 2.º

$$\angle \mathbf{DCF} = 180^{\circ} - \angle BCA = 180^{\circ} - 60^{\circ} = \mathbf{120^{\circ}}$$

$$\angle \mathbf{DEF} = \frac{\widehat{BC} + \widehat{EC}}{2} = \frac{72^{\circ} + 84^{\circ}}{2} = \mathbf{78^{\circ}}$$

$\angle$ **BDC** = $\angle$ **DEF** (DC *y* EF *son paralelas como perpendiculares a* OE).

• 3.º AB *es el* **lado de un triángulo equilátero inscrito,** *pues* 360º:3 = 120º *y* BC **es el lado del pentágono regular inscrito,** *pues* 360º : 5 = 72º.

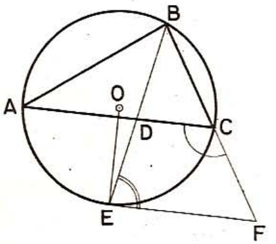


Fig. 180

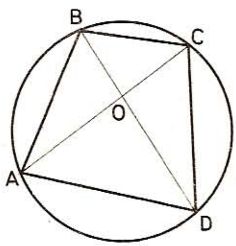


Fig. 181

188. Un cuadrilátero ABCD (fig. 181) está inscrito en una circunferencia O. Si AB es el lado del cuadrado inscrito, BC el lado del exágono regular inscrito y CD el lado del triángulo equilátero inscrito, se pregunta:

1.º El valor de los arcos AB, BC, CD y AD en grados sexagesimales y centesimales.

2.º Por qué la diagonal BD es un diámetro y cuánto valen los ángulos que forma con los lados AB, BC y con la otra diagonal AC.

● 1.º $\widehat{\mathbf{AB}} = 360^{\circ} : 4 = \mathbf{90^{\circ}} = \dfrac{90 \times 10}{9} = \mathbf{100^{g}}$

$$\widehat{\mathbf{BC}} = 360^{\circ} : 6 = \mathbf{60^{\circ}} = \frac{60 \times 10}{9} = \mathbf{66{,}6667^{g}}$$

$$\widehat{\mathbf{CD}} = 360^{\circ} : 3 = \mathbf{120^{\circ}} = \frac{120 \times 10}{9} = \mathbf{133{,}3333^{g}}$$

$$\widehat{\mathbf{AD}} = 360^{\circ} - (90^{\circ} + 60^{\circ} + 120^{\circ}) = \mathbf{90^{\circ}} = \mathbf{100^{g}}$$

● 2.º **BD es un diámetro,** *pues* BC + CD = 60º + 120º = 180º.

$$\angle \mathbf{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = 90^{\circ} : 2 = \mathbf{45^{\circ}}$$

$$\angle \mathbf{DBC} = \frac{\widehat{DC}}{2} = 120^{\circ} : 2 = \mathbf{60^{\circ}}$$

$$\angle \mathbf{BOC} = \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{90^{\circ} + 60^{\circ}}{2} = \mathbf{75^{\circ}}$$

V. Problemas suplementarios

189. Tres rectas OA, OB, OC (fig. 182) tomadas en un plano, forman entre sí ángulos de 120º. Si desde un punto P del mismo plano se bajan perpendiculares a dichas rectas, demuéstrese que los pies de las perpendiculares son los vértices de un triángulo equilátero.

Por ser rectos los ángulos en a, b, c, *serán inscritos en la circunferencia de diámetro* OP; *además* (n.º **16**)

$$\angle bOa = \angle cOa = 60^{\circ}$$

pero

$$\angle abc = \angle cOa = 60^{\circ}$$
$$\angle acb = \angle aOb = 60^{\circ}$$
$$\angle bac = \angle bPc = 60^{\circ}$$

Además, ba = ac = bc *por ser cuerdas que subtienden arcos iguales; luego...*

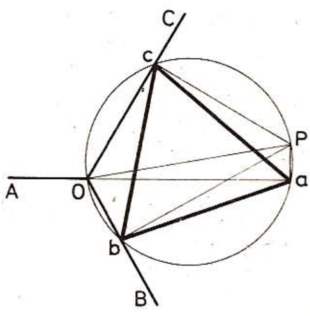


Fig. 182

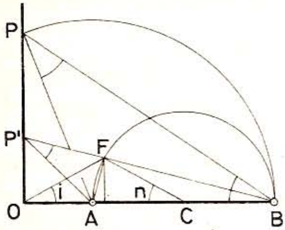


Fig. 183

190. Dado un ángulo recto O (fig. 183) y dos puntos A y B sobre uno de los catetos, hallar un punto P sobre el otro cateto, tal que se tenga:

1.º $\angle APB = \angle ABP$

2.º $\angle AP'B = 2\angle ABP'$

Condición de posibilidad.

• 1.º *Sea* $\angle APB = \angle ABP$. *El* $\triangle APB$ *es isósceles; por tanto,* AP = AB; *bastará pues describir desde* A *un arco de radio* AB, *el cual cortará al cateto* OP *en el punto* P.

Condición: **AB > OA.**

• 2.º *Sea* $\angle AP'B = 2\angle ABP'$. *También tenemos que* $\angle n = 2\angle ABP'$. *Por ser* $\angle O = \angle F = 90°$ *el cuadrilátero* P'OAF *es inscriptible y* $\angle P' = \angle i = \angle n$, *el triángulo* OFC *es isósceles y su altura mediatriz de* OC. *Bastará, por consiguiente, trazar la mediatriz de* OC, *la cual cortará a la semicircunferencia* AFB *en* F; *la recta* BF *dará el punto que se busca,* P'

Condición: **OA < AC.**

191. Construir un triángulo dados:

1.º Los lados AB, AC y la mediana BD relativa a uno de ellos.

2.º Los lados AB, BC y la mediana BD comprendida entre ellos.

3.º El lado AB y las medianas BD y AF que parten de sus extremos (figura 184).

Supongamos el problema resuelto:

• 1.º *En* $\triangle ABD$ *son conocidos los tres lados* AB, BD *y* AC/2; *bastará tomar* DC = AD *para que el vértice* C *quede determinado.*

• 2.º *Se construye el triángulo* BCE *cuyos lados son:*

$$BC, \quad CE = AB \quad y \quad BE = 2BD$$

• 3.º *Se construye el triángulo* AOB *de lados*

$$AB, \quad OA = \frac{2AF}{3} \quad y \quad BO = \frac{2BD}{3}$$

después se toma

$$OF = \frac{AF}{3} \quad y \quad OD = \frac{BD}{3}$$

y se trazan BC *y* AC.

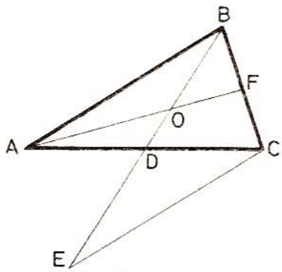


Fig. 184

192. Dos circunferencias O y O' (fig. 185) son tangentes exteriores en A. Se traza BAE y BD tangente a la circunferencia O', la cual corta a la circunferencia O en C. Demostrar que AD es bisectriz del ángulo CAE exterior del triángulo ABC.

Si AD *es bisectriz de* $\angle CAE$ *debemos tener*

$$\text{med. } \widehat{ED} = \widehat{BF} = \widehat{FC}$$

Prolongando AD *hasta* F *tenemos:*

$$\text{med. } \widehat{AD} = \text{med. } \widehat{AF} \quad (\text{n.º } \mathbf{166});$$

pero $\angle CAD = \angle CBF$ *por tener el mismo suplemento;*

mas $\quad \angle CBF = \angle ABF + \angle ABC$

y $\quad \angle ABF = \dfrac{\widehat{AF}}{2} = \dfrac{\widehat{AD}}{2}$

$$\angle ABC = \frac{\widehat{DE}}{2} - \frac{\widehat{AD}}{2}$$

de donde

$$\angle ABF + \angle ABC = \angle CBF = \frac{\widehat{DE}}{2} = \frac{\widehat{BF}}{2}$$

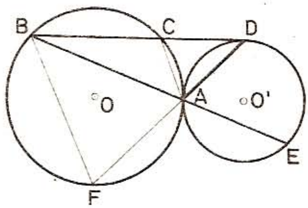


Fig. 185

luego $\quad \mathbf{\angle CAD = \angle DAE}$

193. Dadas dos circunferencias concéntricas de radios R y r y un punto A (fig. 186) sobre la circunferencia exterior, trazar desde ese punto una cuerda a la circunferencia mayor, que quede dividida en tres partes iguales por la circunferencia menor. Condición para que el problema sea posible.

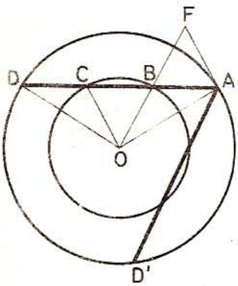


Fig. 186

Supongamos el problema resuelto, y $AB = BC = CD$; *en el triángulo* COA *se conocen dos lados y la mediana comprendida por los mismos; tomando* $OF = 2OB = 2r$, $OA = R$ *y* $AF = r$ *se obtiene el triángulo* OAF, *cuya mediana es* AB *igual a* AD/3.

Para que el problema tenga solución es necesario que el triángulo OAF *pueda construirse o sea*

1.º $\quad R + r > 2r \quad o \quad R \geqq r$;
para $R = r$, AD *será un punto.*

2.º $\quad R - r < 2r \quad o \quad R \geqq 3r$;
para $R = 3r$, AD *es el diámetro.*

194. Dada una circunferencia O (fig. 187) de diámetro AB, desde un punto C tomado en la periferia, se describe otra circunferencia tangente al diámetro de la primera, y desde los extremos de este diámetro A y B se trazan las tangentes AD y BF a la segunda circunferencia. Demostrar que estas tangentes son paralelas.

Supongamos el problema resuelto; si las tangentes AD *y* BF *son paralelas deberá tenerse:*

$$\angle DAB + \angle ABF = 180^\circ$$

pero CB *es bisectriz de los ángulos en* C *y en* B, *y* AC *es bisectriz de los ángulos en* A *y en* C *y* $\angle CAE = \angle ECB$ *por tener los lados perpendiculares.*

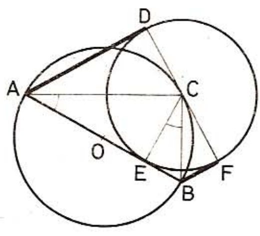


Fig. 187

Luego $\angle CAE + \angle CBE = 90^\circ$

y $2\angle CAE + 2\angle CBE = 180^\circ$

es decir $\angle DAE + \angle ABF = 180^\circ$

por tanto, **las tangentes AD y BF son paralelas.**

195. Dada una circunferencia O (fig. 188), trazar una cuerda de longitud conocida l, cuyo punto medio esté sobre otra cuerda AB de la misma circunferencia.

El lugar geométrico del punto medio de una cuerda dada es la circunferencia, cuyo radio es la distancia de esa cuerda al centro; por los puntos de intersección C *y* D, *de este lugar geométrico con* AB, *se trazan perpendiculares a los radios* OC *y* OD *y éstas serán las cuerdas que resuelven el problema. Para que tenga solución es preciso que* **AB** $\geqq l$.

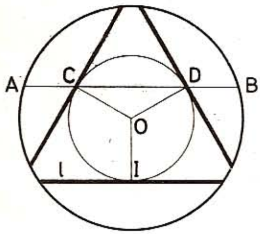


Fig. 188

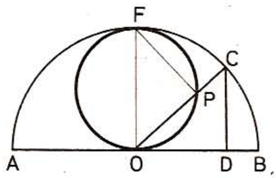


Fig. 189

196. En una semicircunferencia O, de diámetro AB (fig. 189), un punto C se mueve sobre la misma. Desde C se traza la perpendicular CD al diámetro, y se toma, sobre el radio OC, una longitud OP = CD. Hallar el lugar geométrico del punto P.

Cuando el punto C *está en* B, *el punto* P *está en el centro* O; *si* BOC = 90°, P *coincide con* C *en* F; *tracemos* OF. *Sea* P *un punto cualquiera del lugar geométrico; tracemos* PF; *los dos triángulos* CDO *y* OPF *son iguales por tener dos lados iguales y el ángulo comprendido; por consiguiente*

$$\angle CDO = \angle OPF = 90^\circ,$$

y **el lugar geométrico del punto P será la circunferencia del diámetro OF perpendicular a AB.**

197. En una circunferencia O (fig. 190), se toma un arco BC = 120° y se traza la cuerda BC y las tangentes en B y C, las cuales se cortan en un punto exterior A. Sobre el referido arco BC se marca un punto M y se traza la secante BM, la cual corta a AC en D, y la secante CM, que corta a AB en E. Demostrar que cualquiera que sea la posición del punto M sobre el arco BC, la suma AD + AE es una cantidad constante.

En el $\triangle$ABC, *cada uno de los ángulos* ABC *y* ACB *es igual a la mitad del* *arco* BC, *o sea* 60º; *de aquí que dicho triángulo es equilátero.*

Los triángulos ABD *y* BCE *son iguales, por tener un lado igual* AB = BC *y los ángulos adyacentes* $\angle$A = $\angle$B *y* $\angle$ABD = $\angle$BCE, *de donde*

$$AD = BE;$$

luego $$AD + AE = BE + AE = AB.$$

AD + AE = AB es una cantidad constante.

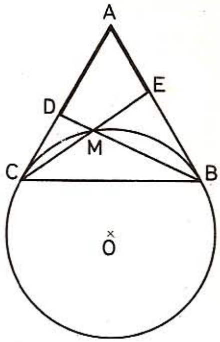


Fig. 190

198. Construir un triángulo dados el lado AB, el ángulo ABC y el radio R de la circunferencia inscrita (figura 191).

Se construye el ángulo ABX *igual al dado y se toma la longitud* AB *en uno de sus lados. En este ángulo se inscribe una circunferencia de radio* R. *Para ello se traza la bisectriz y una paralela a* AB *a una distancia igual al radio; la intersección de esta paralela con la bisectriz determina el centro* O.

Hecho esto se trazan desde los puntos A *y* B *las tangentes, y el punto donde se corten nos dará el vértice* C *del triángulo que se desea construir.*

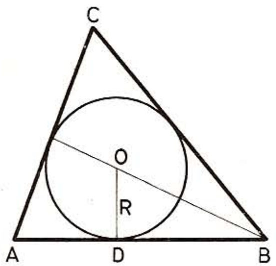


Fig. 191

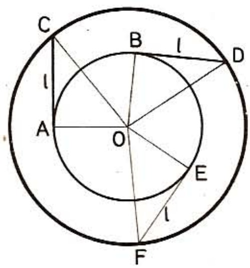


Fig. 192

199. Hallar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales las tangentes trazadas a una circunferencia O tengan una longitud dada *l* (fig. 192).

Los triángulos rectángulos que resultan uniendo los puntos A *y* C *con el centro* O, *y* B *y* D *con el mismo centro son iguales y por tanto las hipotenusas* CO = DO. *Lo mismo ocurriría con cualquiera otra tangente igual a* l. *Por donde se ve que las distancias de los extremos de las tangentes a la circunferencia* O *es constante e igual a* CO.

Luego **la circunferencia de radio OC es el lugar geométrico que se busca.**

200. Por un punto M tomado fuera de una circunferencia O (fig. 193),

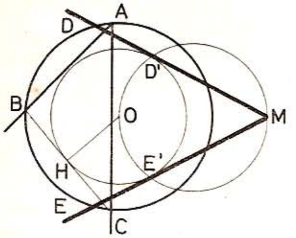


Fig. 193

trazar una secante que determine en dicha circunferencia un segmento capaz de un ángulo dado.

Tracemos en el círculo dado un ángulo inscrito BAC *igual al dado y la cuerda* BC *que abarcan sus lados.*

Esta cuerda determina el arco capaz del ángulo dado.

Pero toda otra cuerda igual a BC *equidista del centro* O, *siendo su distancia* OH. *Así pues, toda cuerda igual a* BC *será una tangente al círculo de radio* OH. *Trazando este círculo bastará después trazar desde el punto* M *una tangente a este círculo. El problema tiene dos soluciones, pues del punto* M *se pueden trazar dos tangentes* MD *y* ME. *Los segmentos* **DD′ y EE′ resuelven el problema.**

201. Construir un trapecio irregular dados la base mayor AB, el ángulo D, la altura DH y la diagonal AC (fig. 194).

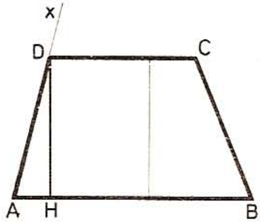


Fig. 194

Como el $\angle$A *es el suplemento del* $\angle$D, *queda conocido. Trazada la base* AB, *en el punto* A *construimos el* $\angle$BAD. *En un punto de* AB *tracemos la perpendicular igual a la altura dada; por el extremo se traza una paralela a* AB, *lo cual determinará el punto* D. *Desde* A, *con un radio igual a la diagonal se determina el punto* C. *Por fin se traza el lado* CB.

202. Dado un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia O (fig. 195) demuéstrese que en un punto cualquiera M del arco BC se tendrá: MA = MB + MC.

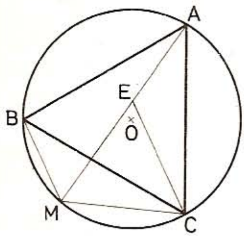


Fig. 195

Construyamos con MC *por lado el triángulo equilátero* MEC.

$\triangle$AEC = $\triangle$BMC, *por tener* AC = BC *y* EC = MC *y* $\angle$ACE = $\angle$BCM

por tanto AE = BM

En consecuencia:

$$ME + EA = MC + BM$$

o sea **MA = MB + MC**

Lo mismo ocurriría con cualquier otro punto tomado sobre el arco BC; *por consiguiente,* **el arco BC** *es el lugar geométrico de todos los puntos en los cuales se verifica que*

$$MA = MB + MC$$

203. En una circunferencia O (fig. 196), trazamos una cuerda AB y desde el punto medio del arco que ésta subtiende trazamos una tangente DC = AB. Si juntamos A con D y B con C, ¿qué clase de cuadrilátero se forma?

Trazando el radio OD, *éste será perpendicular a la tangente* DC *y terminará en el punto medio del arco* ADB, *siendo al mismo tiempo perpendicular a* AB. OD *es* *perpendicular a* AB *y* DC *luego éstas serán paralelas, y como* DC = AB, *el cuadrilátero* **ABCD es un paralelogramo.**

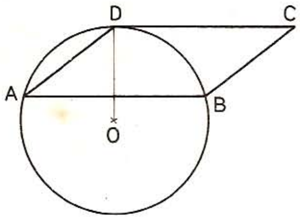


Fig. 196

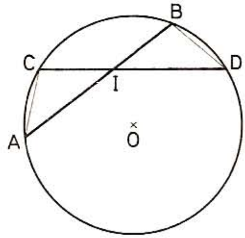


Fig. 197

204. Si en la circunferencia O (fig. 197) trazamos dos cuerdas AB y CD, de modo que al cortarse en el punto I se tenga

$$AI = ID \quad y \quad BI = IC$$

demostrar que los arcos AC y BD son iguales.

Uniendo los extremos A *y* C, B *y* D, *los triángulos* AIC *y* BID *serán iguales, por tener en* I *un ángulo igual y los dos lados que lo forman también iguales; por tanto,* AC = BD, *y como en circunferencias iguales a cuerdas iguales corresponden arcos iguales,* $\widehat{\mathbf{AC}} = \widehat{\mathbf{BD}}$**.**

205. Dada una circunferencia O (fig. 198) y un punto P exterior a ella, si desde éste trazamos las tangentes PA y PB, demostrar:

1.º Que dichas tangentes son iguales entre sí.

2.º Que la recta que va del punto P a O es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a las tangentes dadas.

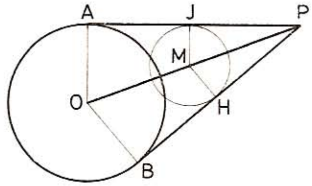


Fig. 198

● 1.º *Sean las tangentes* PA *y* PB; *tracemos* OP, OA *y* OB. *Los triángulos rectángulos* OPA *y* OBP *son iguales por tener* OP *común y* OA = OB, *por tanto* **AP = BP.**

● 2.º *Por ser los triángulos iguales se tendrá* $\angle$APO = $\angle$BPO *y la recta* OP *será la bisectriz del ángulo* APB. *Todos los puntos de esta bisectriz equidistan de las tangentes* AP *y* BP. *Sea, por ejemplo, el punto* M; *las perpendiculares* MJ = MH *trazadas respectivamente a* AP *y* BP *son dos radios de una circunferencia de centro* M, *tangente a las dos tangentes dadas* PA *y* PB.

206. Por un punto P, tomado en la prolongación del diámetro de una circunferencia O (fig. 199), se trazan dos secantes PA y PA′, tales que formen ángulos iguales con dicho diámetro. Demostrar que estas secantes son iguales lo mismo que las cuerdas que determinan. ¿Cómo se trazarán en esta misma circunferencia cuerdas iguales a las cuerdas anteriores?

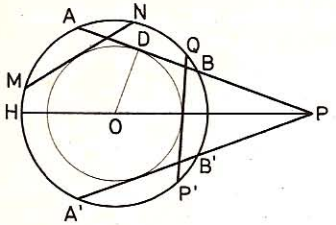


Fig. 199

● 1.º *Al formar las rectas* PA *y* PA′, *ángulos iguales con el diámetro* PH, *o eje de simetría de la circunferencia, si doblamos la figura por* PH, *la recta* PA *se colocará sobre* PA′ *y el punto* A *coincidirá con* A′ *y* B *con* B′, *siendo por tanto*

$$\mathbf{PA = PA'} \quad y \quad \mathbf{AB = A'B'}$$

● 2.º *Al ser las cuerdas* AB *y* A′B′ *iguales, equidistarán del centro* O; *luego todas las cuerdas que disten del centro un segmento igual a* OD *serán iguales a* AB. *Para hallarlas basta describir desde* O *una circunferencia de radio* OD *y trazar luego tangentes a ésta, como se ve con* MN *y* P′Q.

207. Dada una circunferencia O de diámetro AB, se divide AB en un número n de partes iguales y se describen interiormente n circunferencias de diámetro AB/n. Demuéstrese que sea cual fuere el número n, la suma de las longitudes de las circunferencias obtenidas es igual a la longitud de la circunferencia dada.

Longitud de la circunf. propuesta: $\mathbf{L = 2\pi R}$

» *de una circunf. pequeña:* $L_1 = 2\pi \times \dfrac{R}{n}$

» *de* n *circunf. pequeñas:* $\mathbf{L_2} = 2\pi \times \dfrac{R}{n} \times n = \mathbf{2\pi R}.$

208. Dado un ángulo $xAy = 60^{\circ}$ (fig. 200) y una distancia R, trazar una circunferencia, de radio R, tangente a los dos lados del ángulo. Sean P y Q los puntos de contacto de la circunferencia con los lados Ax y Ay y O el centro de la misma. Hállese el valor del ∠POQ.

● 1.º *Trazado el ángulo* xAy = 60º *por el procedimiento que se quiera, y la bisectriz de éste, el centro* O *de la circunferencia tangente a los lados del ángulo dado se hallará sobre esta bisectriz. Para hallarlo se traza desde un punto* B *la perpendicular* BM = R; *la intersección de la paralela a* AX *trazada por* M, *con la bisectriz del ángulo, nos dará el centro* O *de la circunferencia tangente de radio* R = BM.

● 2.º Valor del ángulo POQ.—*En el triángulo* APO *el ángulo* A = 30º *y el ángulo en* O = 60º.

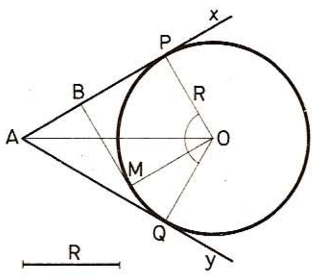


Fig. 200

$$\triangle APO = \triangle AQO, \quad \textit{luego:} \quad \angle \mathbf{POQ} = 60 \times 2 = \mathbf{120^{\circ}}$$

También pudiéramos hallar este valor observando que el ángulo POQ *es suplementario del* A *en el cuadrilátero birrectángulo* APOQ.

209. ¿Qué es menester para que un cuadrilátero sea inscriptible en una circunferencia? ¿Cuáles son los cuadriláteros inscriptibles?

Para que un cuadrilátero sea inscriptible basta que tenga dos ángulos opuestos suplementarios (GEOM. **234**).

Los cuadriláteros que cumplen esta condición son: el **rectángulo,** *el* **cuadrado** *y el* **trapecio isósceles.**

210. En todo cuadrilátero circunscrito la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos. Todo paralelogramo circunscrito es un cuadrado o un rombo.

1.° *Sea el cuadrilátero* ABCD (fig. 201) *circunscrito a la circunferencia, y* E, F, G *y* H *los puntos de tangencia.*

Como las tangentes trazadas desde un mismo punto son iguales, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} AE &= AH \\ BE &= BF \\ CG &= CF \\ DG &= DH \end{aligned}\right\} \textit{sumando}$$

$$\overline{AE + BE + CG + DG = AH + BF + CF + DH}$$
$$AB + CD = AD + BC$$

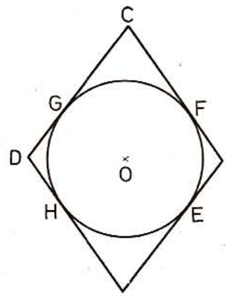


Fig. 201

2.° *En un paralelogramo los lados opuestos son iguales, luego si remplazamos el cuadrilátero dado por un paralelogramo tendremos:*

• $AB + CD = 2AB$ *y* $AD + BC = 2BC$

de donde $2AB = 2BC$

$$AB = BC$$

Pero si dos lados consecutivos son iguales, la figura será un cuadrado o un paralelogramo.

211. Si la mediana de un triángulo es la mitad del lado donde cae, el ángulo opuesto a ese lado es recto; si es mayor que la mitad, el ángulo opuesto será agudo, y si fuese menor, el ángulo opuesto al lado susodicho sería obtuso (figura 202).

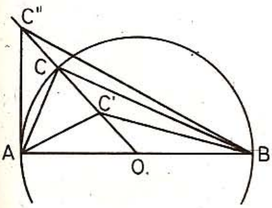


Fig. 202

• *Si* ($\triangle$ACB) $OC = \dfrac{AB}{2} = OA = OB$

el punto C *se halla en una semicircunferencia de diámetro* AB. *Por tanto:*

$$\angle ACB = \frac{180^{\circ}}{2} = 90^{\circ} \quad \textbf{áng. recto}$$

• *Si* ($\triangle$AC''B) $OC'' > \dfrac{AB}{2} = OC$

el $\angle$ AC''B *es exterior a la circunferencia de diámetro* AB *y menor que* $\angle$ ACB.

$$\angle AC''B < 90^{\circ} \quad \textbf{áng. agudo}$$

• *Si* $(\triangle AC'B)$ $OC' < \frac{AB}{2} = OC$

el $\angle AC'B$ *es interior a la circunferencia de diámetro* AB *y mayor que el* $\angle ACB$.

$$\angle AC'B > 90^{o} \qquad \textbf{áng. obtuso}$$

212. Un arco de 21° 15′, correspondiente a una circunferencia de radio R, tiene la misma longitud que otro arco de 35° 25′, relativo a una circunferencia de radio R′. Calcular la relación que existe entre los radios de esas circunferencias.

$$21^{o}\,15' = 1275' \quad y \quad 35^{o}\,25' = 2125'$$

El valor de los arcos dados, en función de sus radios, es:

$$\frac{2\pi R \times 1275}{360 \times 60} \quad y \quad \frac{2\pi R' \times 2125}{360 \times 60}$$

Como son iguales, tendremos:

$$2\pi R \times 1275 = 2\pi R' \times 2125$$

simplificando $1275\ R = 2125\ R'$

de donde: $\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R'}} = \frac{2125}{1225} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$

213. Demostrar que la amplitud de un ángulo interior a una circunferencia es igual a la semisuma de los arcos interceptados por él, y por su opuesto por el vértice.

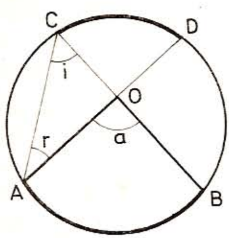


Fig. 203

Sea el ángulo interior $\angle AOB = \angle a$ (fig. 203); *su opuesto por el vértice es* $\angle COD$. *Tracemos la cuerda* AC.

En el $\triangle AOC$ *se tiene que el ángulo externo* $\angle AOB = \angle i + \angle r$, *pero éstos son inscritos y su amplitud es la mitad del arco interceptado; por tanto:*

$$\angle i = \frac{\widehat{AB}}{2}; \qquad \angle r = \frac{\widehat{CD}}{2}$$

de donde $\angle \mathbf{a} = \frac{\widehat{\mathbf{AB}} + \widehat{\mathbf{CD}}}{\mathbf{2}}$

214. Demostrar que la amplitud de un ángulo exterior, cuyos lados son dos secantes, es igual a la semidiferencia entre las amplitudes de los arcos interceptados por dicho ángulo.

Sea el ángulo exterior BAC (fig. 204) *formado por las secantes* AB *y* AC. *Trazando la cuerda* BD *tenemos:*

$$\angle x = \angle A + \angle B$$

de donde $\angle A = \angle x - \angle B$

Pero $$\angle x = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

y $$\angle B = \frac{\overset{\frown}{DF}}{2}$$

luego $$\angle A = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DF}}{2}$$

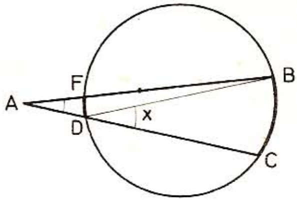


Fig. 204

215. Demostrar que dos cuerdas iguales, que se cortan en una misma circunferencia, son las diagonales de un trapecio isósceles.

Sean las cuerdas iguales AC *y* BD *que se cortan en el punto* I (fig. 205).

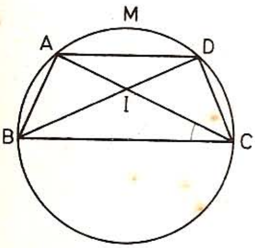


Fig. 205

Por ser AC = BD: $\overset{\frown}{AMC} = \overset{\frown}{BMD}$

y restando el arco común AMD *vendrá:*

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

y, por tanto, las cuerdas

$$AB = CD$$

y por ser inscritos,

$$\angle DAC = \angle ACB$$

luego las cuerdas AD *y* BC *serán paralelas y el cuadrilátero* **ABCD un trapecio isósceles.**

216. Demostrar que todo paralelogramo inscrito en una circunferencia es rectángulo y la diagonal de aquél será el diámetro de ésta.

● 1.° *Por ser* ABCD (fig. 206) *un paralelogramo, será* AD = BC, *de donde*

$$\overset{\frown}{AMD} = \overset{\frown}{BMC} \quad y \quad \overset{\frown}{ANB} = \overset{\frown}{CND}$$

Como además este paralelogramo es inscrito, se tendrá:

$$\angle A = \frac{\overset{\frown}{M} + \overset{\frown}{N}}{2}$$

$$\angle C = \frac{\overset{\frown}{M} + \overset{\frown}{N}}{2}$$

luego $$\angle A = \angle C = 90^\circ$$

Lo mismo se demostraría que

$$\angle B = \angle D = 90^\circ$$

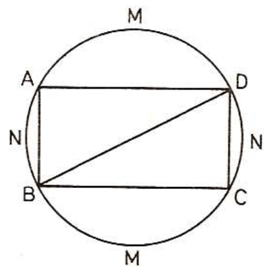


Fig. 206

Por tanto, **el paralelogramo es rectángulo.**

● 2.° *Siendo* $\angle$A, *por ejemplo, un ángulo inscrito recto, la diagonal* **BD será el diámetro de la circunferencia circunscrita.**

216 bis. — Entre los aparatos trisectores de ángulos hay uno que tiene la

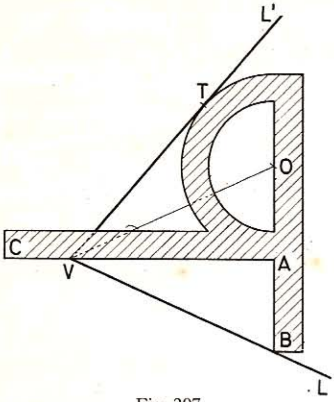


Fig. 207

forma adjunta. Consta de una semicorona circular con dos prolongaciones rectilíneas perpendiculares tales que AB = AO y AC tiene una longitud arbitraria.

Dado un ángulo LVL′, se coloca el aparato de manera que B apoye sobre un lado (VL, por ejemplo), AC pase por el vértice V y el otro lado VL′ sea tangente a la semicircunferencia exterior. Demostrar que $\angle BVA = \angle AVO = \angle OVT = \angle LVL'/3$

El triángulo BVO (fig. 207) *es isósceles ya que* VA *es mediatriz del segmento* BO. *Luego* $\angle BVA = \angle AVO$.

Por otra parte, si trazamos el radio OT, *los triángulos rectángulos* OAV *y* OTV *son iguales por tener la hipotenusa común y un cateto igual por construcción:* OA = OT.

Luego $\angle AVO = \angle OVT$.

En consecuencia: $\mathbf{\angle BVA = \angle AVO = \angle OVT = \dfrac{\angle LVL'}{3}}$

3

PROPORCIONALIDAD

I. Longitudes proporcionales

217. Resolver la expresión:

$$x^2 = M \times P \quad \text{cuando} \quad M = 3{,}8 \text{ cm} \quad \text{y} \quad P = 1{,}9 \text{ cm}$$

Será: $\mathbf{x} = \sqrt{3{,}8 \times 1{,}9} = \mathbf{2{,}687\ cm}$

Solución gráfica: GEOM. **409.**

218. Hallar una tercera proporcional entre M y N, siendo N la media proporcional. *Aplicación:* M = 2,8 cm; N = 4,1 cm.

Sea x *la tercera proporcional.*

debemos tener
$$\frac{x}{N} = \frac{N}{M}$$

de donde
$$\mathbf{x} = \frac{N^2}{M} = \frac{4{,}1^2}{2{,}8} = \mathbf{6\ cm}$$

Solución gráfica: GEOM. **408.**

219. El perímetro de un triángulo es 53 mm y sus lados son entre sí como los números 7, 8 y 11. ¿Cuánto mide cada lado?

Habrá que repartir los 53 mm *en partes proporcionales a* 7, 8 *y* 11.

$$53 \times \frac{7}{26} = \mathbf{14{,}26\ mm} \qquad 53 \times \frac{8}{26} = \mathbf{16{,}3\ mm} \qquad y \qquad 53 \times \frac{11}{26} = \mathbf{22{,}42\ mm}$$

220. Una recta paralela a un lado de un triángulo determina en el otro lado dos segmentos de 28 y de 17 m. ¿Cuánto miden los segmentos que forma con el lado restante si éste tiene 60 m?

Basta repartir 60 *en dos partes proporcionales a* 28 *y* 17.

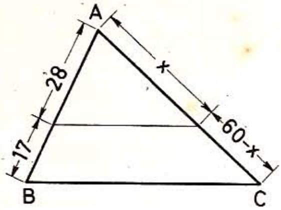


Fig. 208

O bien, si x *es una de dichas partes, la otra será* 60 — x *y tendremos:*

$$\frac{x}{60 - x} = \frac{28}{17}$$

$$\mathbf{x = 37\frac{1}{3}\ m}$$

$$\mathbf{60 - x = 22\frac{2}{3}\ m}$$

221. Dos lados de un triángulo tienen respectivamente 150 y 170 m; desde el vértice común se toma una longitud de 85 m sobre el primero. ¿Qué longitud será preciso tomar en el segundo para que la recta trazada por los dos puntos así obtenidos sea paralela al tercer lado?

El 2.º lado debe quedar dividido en la misma proporción que el 1.º. Sea x *la longitud pedida, tendremos:*

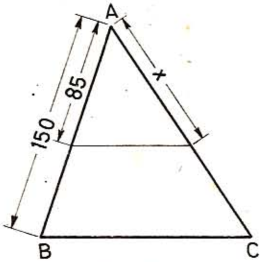


Fig. 209

$$\frac{x}{170} = \frac{85}{150}$$

$$\mathbf{x} = \frac{170 \times 85}{150} = \mathbf{96\frac{1}{3}\ m}$$

222. Los tres lados de un triángulo tienen respectivamente 18, 30 y 36 m. Calcular los segmentos que en cada uno determina la bisectriz correspondiente.

La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados, luego (fig. 210):

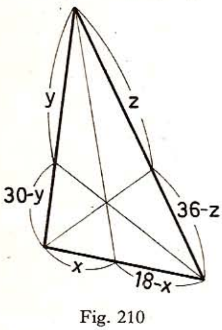


Fig. 210

$$\frac{x}{18 - x} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \qquad x = 8\frac{2}{11}\ \mathrm{m}$$

$$\frac{y}{30 - y} = \frac{36}{18} = 2 \qquad y = 10\ \mathrm{m}$$

$$\frac{z}{36 - z} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} \qquad z = 13{,}50\ \mathrm{m}$$

El lado de 18 m *queda dividido en* $\mathbf{8\frac{2}{11}\ m}$ *y* $\mathbf{9\frac{9}{11}\ m}$

El lado de 30 m *en* **10 m** *y* **20 m.**

El lado de 36 m *en* **13,50 m** *y* **22,50 m.**

223. Sobre una recta XY (fig. 211), tomemos el segmento rectilíneo AM = 12 mm y el AB = 20 mm. Hallar sobre esta recta otro punto M′ tal que tengamos la relación

$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{MA}{MB}$$

Como $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{12}{20-12} = \dfrac{3}{2}$

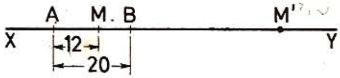


Fig. 211

debemos tener $\dfrac{M'A}{M'B} = \dfrac{3}{2}$

lo que supone: $M'A > M'B$

El punto M′ *se hallará a la derecha de* B, *y a una distancia*

$$M'A = M'B + 20$$

por tanto $$\frac{M'B + 20}{M'B} = \frac{3}{2}$$

de donde $$3M'B = 2M'B + 40$$
$$\mathbf{M'B = 40\ mm}$$

El punto M′ *se hallará en la prolongación de* AB *y a* **40 mm** *de* B.

224. Dada una recta y en ella un segmento AB (fig. 212), determinar el punto M sobre ella, de modo que se tenga:

Fig. 212

$$\frac{AM}{BM} = \frac{3}{5}$$

● 1.º *Supongamos que* M *se halle entre* A *y* B, *tendremos:*

$$AM + MB = AB \quad y \quad \frac{AM + BM}{BM} = \frac{3+5}{5} = \frac{8}{5} = \frac{AB}{BM}$$

Por donde se ve que habrá que dividir al segmento AB *en ocho partes y tomar* **AM** = **3** *y* **BM** = **5.**

● 2.º *El punto* M *puede hallarse en la prolongación de* AB, *y como* $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{3}{5}$, *el punto* M *ha de hallarse más próximo de* A *que de* B; *estará, pues, en la prolongación de* BA (fig. 213).

Sea $AM = x$, $BM = AB + x$; $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{3}{5}$ *será* $\dfrac{x}{AB + x} = \dfrac{3}{5}$

o sea $5x = 3AB + 3x$

$$x = \frac{3\,AB}{2} = AM$$

Fig. 213

$$\mathbf{BM} = \frac{3\,AB}{2} + AB = \mathbf{\frac{5AB}{2}}$$

225. Dado un triángulo ABC (fig. 214), si trazamos un segmento MN paralelo a BC, escribir todas las proporciones que por ello resulten.

Toda paralela a uno de los lados de un triángulo divide a los otros dos en partes proporcionales; por tanto, tendremos:

$$\mathbf{\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}} \qquad (1)$$

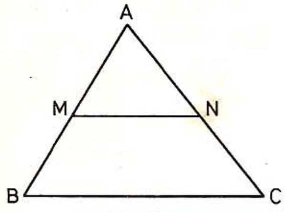


Fig. 214

y permutando los medios será:

$$\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AN}} = \frac{\mathbf{MB}}{\mathbf{NC}} \tag{2}$$

invirtiendo vendrá:

$$\frac{\mathbf{MB}}{\mathbf{AM}} = \frac{\mathbf{NC}}{\mathbf{AN}} \tag{3}$$

$$\frac{\mathbf{AN}}{\mathbf{AM}} = \frac{\mathbf{NC}}{\mathbf{MB}} \tag{4}$$

Como en toda proporción la suma del antecedente y consecuente de la primera razón es al antecedente o consecuente de la misma como la suma del antecedente y consecuente de la segunda a su antecedente o consecuente, las cuatro proporciones anteriores darán

$$\frac{AM + BM}{MB} = \frac{AN + NC}{NC} \quad \textit{o bien} \quad \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{MB}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{NC}} \tag{5}$$

$$\frac{AM + MB}{AM} = \frac{AN + NC}{AN} \quad \textit{o bien} \quad \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AM}} = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AN}} \tag{6}$$

226. Los lados de un triángulo son AB = 12; AC = 15 *y* BC = 15; si se traza MN paralela a BC de modo que AM = 8, calcular MB, AN y NC (figura 214).

$$MB = AB - AM = 12 - 8 = 4$$

La proporción (6) *del número anterior da:*

$$\frac{12}{8} = \frac{15}{AN}; \qquad \mathbf{AN} = \frac{8 \times 15}{12} = \mathbf{10}$$

y la (5) *da:*

$$\frac{12}{4} = \frac{15}{NC}; \qquad \mathbf{NC} = \frac{4 \times 15}{12} = \mathbf{5}$$

227. Dos lados de un triángulo tienen AB = 24 cm y AC = 32 cm. Si

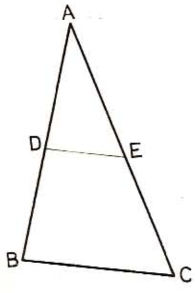


Fig. 215

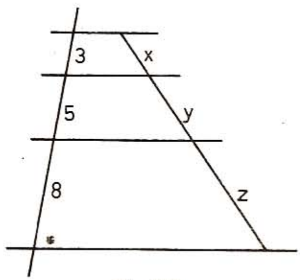


Fig. 216

tomamos sobre AB un segmento AD = 13 cm, ¿qué segmento AE habrá que tomar sobre AC para que el segmento DE sea paralelo a BC? (fig. 215).

Una paralela a la base de un triángulo divide a los otros dos lados en partes proporcionales, así pues:

$$\frac{13}{24} = \frac{x}{32}; \qquad \textit{de donde} \qquad \mathbf{x = 17\,\frac{1}{3}\ cm}$$

228. Cuatro paralelas determinan sobre una recta segmentos de 3, 5 y 8 cm. ¿Qué segmentos formarán en un segmento transversal que tiene 60 cm? (figura 216).

Las cuatro paralelas determinan 3 *segmentos* x, y, z *tales que:*

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{3+5+8} = \frac{60}{16} \qquad \textit{de donde}$$

$$x = \frac{60 \times 3}{16} = \mathbf{11{,}25\ cm}; \qquad y = \frac{60 \times 5}{16} = \mathbf{18{,}75\ cm}; \qquad z = \frac{60 \times 8}{16} = \mathbf{30\ cm}$$

229. Las bases de un trapecio tienen 4 m y 6 m y los lados 1,5 m y 2,5 m. Calcular los otros dos lados del triángulo menor que resulta al prolongar los lados no paralelos.

Sea P *el vértice obtenido, y* DE *una paralela a* PB (fig. 217).

$\triangle PDC \sim \triangle DAE$, *luego:* $\dfrac{PC}{DE} = \dfrac{DC}{AE} = \dfrac{PD}{AD}$

de donde

$$\mathbf{PC} = \frac{DE \times DC}{AE} = \frac{1{,}5 \times 4}{2} = \mathbf{3\ m}$$

$$\mathbf{PD} = \frac{DC \times AD}{AE} = \frac{4 \times 2{,}5}{2} = \mathbf{5\ m}$$

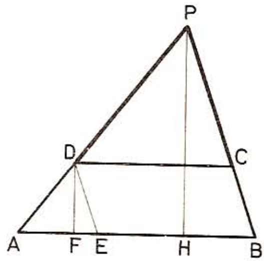


Fig. 217

230. ¿Qué altura tendrá el triángulo que se obtiene al prolongar los lados no paralelos de un trapecio cuyas bases tienen 27 m y 38,5 m y la altura es de 15 m?

En los triángulos semejantes PAB *y* DAE (fig. 219), *tendremos:*

$$\frac{PH}{DF} = \frac{AB}{AE}$$

de donde $$\mathbf{PH} = \frac{DF \times AB}{AE} = \frac{15 \times 38{,}5}{11{,}5} = \mathbf{50{,}217\ m}$$

231. Si los tres lados de un triángulo ABC son $a = 12$ cm, $b = 15$ cm, y $c = 24$ cm, ¿cuáles serán los segmentos que sobre el lado mayor determina la bisectriz del $\angle$C?

Sea x (fig. 218) *el segmento* BD *y* CD *la bisectriz del* $\angle$C. *Como esta bisectriz divide al lado opuesto* C *en partes proporcionales a los lados* a *y* b, *tendremos:*

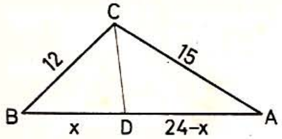


Fig. 218

$$\frac{x}{24 - x} = \frac{12}{15}$$

$$x = \mathbf{BD} = \mathbf{10{,}67\ cm}$$

$$24 - x = \mathbf{AD} = \mathbf{13{,}33\ cm}$$

232. Dado un ángulo XOY (fig. 219) sobre OX tomamos los segmentos OA, OB, OE, tales que OB es media proporcional entre OA y OE. Luego trazamos dos segmentos paralelos AC y BD. Demostrar que el segmento DE es paralelo a CB.

Por ser OB *media proporcional entre* OA *y* OE:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OE} \qquad (1)$$

Por el paralelismo de AC *y* BD, *tendremos:*

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \qquad (2)$$

De la (1) *y de la* (2) *se deduce*

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OB}{OE}$$

Aplicando a esta proporción una propiedad conocida, tendremos:

$$\frac{OC}{OD - OC} = \frac{OB}{OE - OB}$$

esto es

$$\frac{OC}{CD} = \frac{OB}{BE}$$

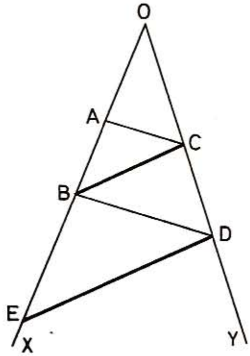


Fig. 219

Esta proporción entraña **el paralelismo de ED y BC.**

233. Dado un trapecio ABCD (fig. 220) cuyas bases son AB y CD, si por el punto medio E del lado AD se traza una paralela a las bases, demostrar que dicha paralela cortará a las diagonales y al lado oblicuo BC en sus puntos medios respectivos.

En el triángulo ADB *la recta* EF, *paralela a la base* AB, *determina sobre los otros dos lados segmentos proporcionales. Así pues:*

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FD}$$

pero como $AE = ED$

también será $\mathbf{BF = FD}$

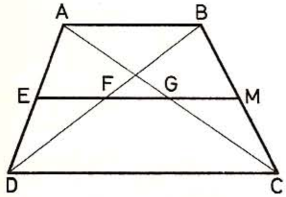


Fig. 220

Por lo mismo la recta EG *nos dará en el triángulo* ACD

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC} = 1$$

por tanto $\mathbf{AG = GC}$

Y con la recta GM *en el triángulo* ABC *se tendrá también:*

$$\frac{AG}{GC} = \frac{BM}{MC} = 1$$

o sea $$\mathbf{BM = MC}$$

Como desde un punto dado sólo se puede trazar una paralela a una recta, las rectas EF, EG *y* GM *se confunden en una sola, que será la* EM, *paralela a las dos bases* AB *y* DC.

234. Por el punto O trazamos cuatro semirrectas, OA, OB, OC, OD (figura 221), las cuales forman entre sí ángulos de 45°. Si cortamos dichas rectas por la secante AD, demuéstrese que:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \quad y \quad \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$$

- 1.° *Considerando el triángulo* AOC *y la bisectriz* OB, *tendremos:*

$$\frac{BA}{BC} = \frac{OA}{OC}$$

Y considerando la bisectriz OD *del ángulo externo, tendremos:*

$$\frac{DA}{DC} = \frac{OA}{OC}$$

Comparando estas dos igualdades se obtiene:

$$\mathbf{\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}}$$

- 2.° *Considerando el triángulo* BOD *y la bisectriz* OC, *se tendrá:*

$$\frac{OB}{OD} = \frac{CB}{CD}$$

y la bisectriz AO *del ángulo externo nos dará:*

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{AD}$$

de donde $$\mathbf{\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}}$$

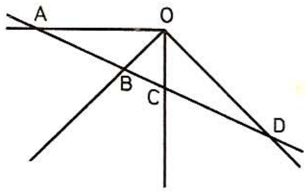


Fig. 221

También puede decirse: Las semirrectas OA, OB, OC, OD *forman un haz armónico y toda sección rectilínea de un haz armónico constituye una cuaterna armónica de puntos* (Geom. **333**).

Luego $$\frac{BA}{BC} = -\frac{DA}{DC} \qquad \frac{AB}{AD} = -\frac{CB}{CD}$$

y en valor absoluto: $$\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}$$

235. En un triángulo ABC (fig. 222) trazamos la bisectriz BD del ángulo B y desde D trazamos el segmento DE paralelo a BC. Hállense los segmentos BE y AE teniendo presente que:

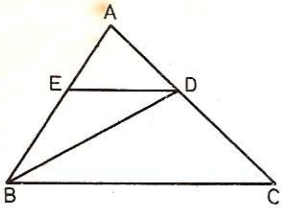


Fig. 222

$$AB = 4 \text{ cm} \quad y \quad BC = 6 \text{ cm}$$

La bisectriz BD *da:*

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Por el paralelismo de los segmentos DE *y* BC, *resulta:*

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{CD} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, para hallar AE *y* BE *basta repartir* AB = 4 cm *proporcionalmente a* 2 *y* 3.

$$\mathbf{AE} = \frac{4 \times 2}{2+3} = \mathbf{1{,}60\ cm} \qquad \mathbf{BE} = \frac{4 \times 3}{2+3} = \mathbf{2{,}40\ cm}$$

II. Polígonos regulares

236. La suma de los ángulos interiores de un polígono regular vale 56 ángulos rectos. ¿Cuál es el valor del ángulo central de este polígono?

$$2\,(n-2) = 56$$

de donde

$$n - 2 = \frac{56}{2} = 28$$

y

$$n = 30$$

El **ángulo central:** 360 : 30 = **12°.**

237. En un dodecágono regular, ¿cuál es el valor:
1.° Del ángulo central?
2.° De un ángulo interior del polígono?
3.° De un ángulo externo?

- 1.° *El* **ángulo central** *es igual a* 360 : 12 = **30°.**
- 2.° *La suma de los ángulos interiores es de* 180 × (12 − 2).

Un ángulo interior valdrá:

$$\frac{180 \times 10}{12} = \mathbf{150°}$$

- 3.° *La suma de los ángulos exteriores es de* 4 *rectos.*
Un **ángulo exterior** *valdrá:* 360 : 12 = **30°.**

238. En un pentágono regular, ¿cuánto valdrá el ángulo central y el ángulo del polígono?

- 1.º *El* **ángulo central** *valdrá:* 360º : 5 = **72º**
- 2.º *Y el ángulo del polígono:* $\frac{180 \times 3}{5} =$ **108º**

239. El ángulo externo de un polígono regular es igual a 15º; ¿cuántos lados tiene este polígono?

El número de ángulos exteriores, y por tanto de lados, es

360 : 15 = **24 lados**

240. ¿Se podrá embaldosar con azulejos en forma de pentágonos regulares?

No, pues 360º *no es divisible exactamente por* 108º *que es el valor del ángulo interior del pentágono regular.*

241. ¿Por qué, para embaldosar un pavimento, se pueden emplear simultáneamente el dodecágono regular y el triángulo equilátero?

El ángulo del dodecágono regular es de 150º

El ángulo del triángulo equilátero es de 60º

Alrededor de un punto se pueden colocar dos dodecágonos y un triángulo equilátero, *pues la suma de los ángulos es* (150 × 2) + 60 = 360º.

242. ¿Cuál es el valor del ángulo externo de un polígono regular de 9 lados? Deducir el valor del ángulo interno del polígono.

Cada ángulo externo vale 360 : 9 = **40º**.

El ángulo interno valdrá 180º − 40º = **140º**.

243. Con la regla y el compás construir ángulos de 60º, 15º, 30º, 105º, 75º, 108º, 54º, 69º.

1.º *Tracemos* (fig. 223) *una circunferencia de radio* R *y dos diámetros* X′OX *y* Y′OY *perpendiculares.*

2.º *Con una abertura de compás igual a* R *señalemos el arco* AC = 60º (Geom. **445**).

Obtenemos: ∠AOC = 60º *y* ∠COB = 30º.

3.º *La bisectriz del ángulo* COB *da:*

∠COD = ∠DOB = 15º

∠X′OD = ∠X′OB + ∠BOD = 90º + 15º = 105º

∠AOD = ∠AOC + ∠COD = 60º + 15º = 75º

4.º *Haciendo centro en* M *punto medio de* OA *y con un radio* MN *tracemos el arco* NP; *obtenemos* OP = *lado del decágono regular inscrito* (Geom. **460**) *y, por tanto, la cuerda de un arco de* 36º.

A partir de A *señalemos el arco* AQ = 36º *y luego* $\widehat{AK} = 3\widehat{AQ}$.

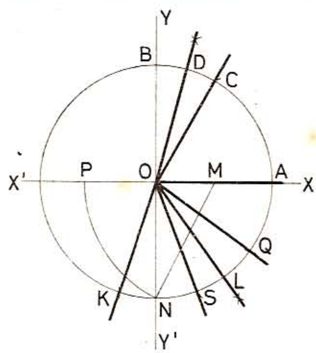


Fig. 223

Obtenemos: ∠AOK = 36º × 3 = 108º.

5.º *La bisectriz del ángulo* AOK *da:* ∠AOL = 54º.

6.º *Al arco* AL *añadamos el arco* LS = CD = 15º. *Obtenemos:*

∠AOS = ∠AOL + ∠LOS = 54º + 15º = 69º.

244. La suma de los ángulos internos de un polígono es de 2520°. ¿Qué polígono es ese? Si es regular, ¿cuánto valdrán los ángulos central, interno y externo?

Sea n *el número de lados de un polígono y* S *la suma de sus ángulos:*

$$S = 180^\circ (n - 2)$$

en el caso presente: $2520^\circ = 180^\circ (n - 2)$

de donde $$n = \frac{2520^\circ}{180^\circ} + 2 = 16$$

Luego: 1.° *El polígono dado tiene* **16 lados.**
2.° *Si es regular, el ángulo central valdrá:* 360° : 16 = **22° 30′**
3.° *El ángulo interno* 2520° : 16 = **157° 30′**
4.° *El ángulo externo* 180° — 157° 30° = **22° 30′**

245. La diferencia de los perímetros del exágono regular circunscrito e inscrito en una misma circunferencia es de 14,72 cm. Calcular el radio de dicha circunferencia.

Lado del exágono regular circunscrito, en función del radio (n.° **250**):

$$\frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

y el perímetro $4r\sqrt{3}$

El perímetro del exágono regular inscrito es 6r, *de donde*

$$4r\sqrt{3} - 6r = 14,72$$

$$2r\,(2\sqrt{3} - 3) = 14.72$$

$$\mathbf{r} = \frac{14,72}{2\,(2\sqrt{3} - 3)} = \frac{7,36}{2 \times 1,73 - 3} = \mathbf{16\ cm}$$

246. Desde los vértices del cuadrado ABCD (fig. 224) se describen cuadrantes de circunferencia en la región interna, con un radio igual a la mitad de la diagonal, y se unen luego los extremos de esos arcos. Demuéstrese que la figura EFGHILMN que resulta es un octógono regular.

Fig. 224

Por construcción tenemos:

$$AG = HB = BI = LC = CM,\ etc.;$$

por tanto, los triángulos rectángulos FAG, HBI, LCM *son isósceles e iguales* (Geom. **72,** *b*):

$$\angle HOI = \angle HOB + \angle BOI = \frac{\widehat{OH}}{2} + \frac{\widehat{OI}}{2} = $$
$$= \frac{45^\circ}{2} + \frac{45^\circ}{2} = 45^\circ$$

De donde resulta que todos los triángulos FOG, GOH, HOI, *etc., son iguales; por tanto,* FG = GH = HI... *y, por tanto,* **el polígono obtenido es un octógono regular.**

247. Calcular el lado y la diagonal de un cuadrado sabiendo que su suma o su diferencia es igual a $\sqrt{2}$.

● 1.º *Sea a el lado; la diagonal será:* $a\sqrt{2}$.

de donde
$$a + a\sqrt{2} = \sqrt{2}$$
$$a(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$
$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{2-1} = \mathbf{2-\sqrt{2}}$$

La diagonal $\quad \mathbf{a\sqrt{2} = 2(\sqrt{2}-1)}$

● 2.º *Tendremos:*
$$a\sqrt{2} - a = \sqrt{2}$$
$$a(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$$
$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \mathbf{2+\sqrt{2}}$$

y la diagonal $\quad \mathbf{a\sqrt{2} = 2(\sqrt{2}+1)}$

248. ¿Cuál será la apotema de un exágono regular que tiene 120 cm de perímetro?

El lado medirá: 120 : 6 = 20 cm.

La apotema es igual a la altura del triángulo equilátero que tuviese por lado el lado del exágono; luego
$$\mathbf{a} = \frac{20}{2}\sqrt{3} = 10\sqrt{3} = \mathbf{17{,}32\ cm}$$

249. La apotema de un exágono regular es de 2,80 cm. ¿Cuál será su perímetro?

Sabemos que la apotema es: $\quad a = \frac{l}{2}\sqrt{3}$

de donde $\quad l = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{2{,}8 \times 2 \times \sqrt{3}}{3}$

y el perímetro $\quad \mathbf{6l} = \frac{6 \times 2{,}8 \times 2 \times 1{,}732}{3} = \mathbf{19{,}398\ cm}$

250. Calcular, en función de radio r de la circunferencia inscrita, el lado del exágono regular circunscrito (fig. 225).

Sea EF = a; *tendremos:*
$$\text{AB} = \text{OC} = r$$
$$\text{OD} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

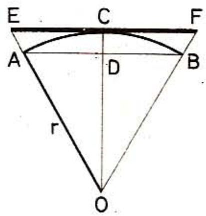


Fig. 225

$\triangle EOF \sim \triangle AOB$; *por tanto:* $$\frac{a}{r} = \frac{r}{\frac{r\sqrt{3}}{2}}$$

de donde $$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{2r\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$$

251. Calcular los segmentos que determinan sobre sí mismas las diagonales de un exágono regular al cortarse (fig. 226), y hállese la relación que tienen entre sí estos segmentos.

- 1.º *Hay 3 diagonales que son diámetros* BE, CF *y* AD *(no trazada en la figura).*

Estas tres se cortan entre sí en partes iguales (radios).

- 2.º *Hay 6 diagonales iguales entre sí e iguales al lado del triángulo equilátero inscrito:*

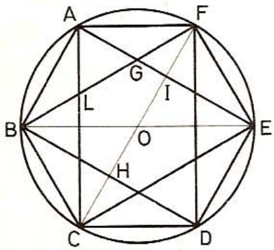


Fig. 226

$$AE = AC = CE = BD = DF = BF = r\sqrt{3}$$

Estas se cortan entre sí en segmentos tales que

$$BL = LG = GF$$

En efecto:

$$\angle ABF = \angle AFB \text{ y } \angle CAE = \angle ALF = \angle AGB$$

Los triángulos ABL *y* AGF *son, pues, isósceles y el triángulo* ALG *es equilátero por ser equiángulo.*

Luego: $$\mathbf{BL = LA = LG = GA = GF = \frac{r\sqrt{3}}{3}}$$

- 3.º *Cada diagonal diámetro corta a dos diagonales del segundo grupo (lados del triángulo equilátero inscrito) en dos segmentos iguales (diámetro perpendicular a una cuerda):*

$$\mathbf{AI = IE = BH = HD = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$$

- 4.º OI = OH *es la apotema del triáng. equilátero* ACE, *por tanto igual a* R/2, *luego*

$$\mathbf{OI = OH = IF = HC = \frac{R}{2}}$$

252. Un polígono regular tiene un lado más que otro y los ángulos de aquél tienen 4º más que los de éste. ¿Cuántos lados tiene cada uno de esos polígonos?

Sea n *el número de lados del primero,* n + 1 *serán los lados del segundo. Los ángulos de cada uno valdrán, respectivamente,*

$$\frac{180^\circ (n-2)}{n} \quad y \quad \frac{180^\circ (n-1)}{n+1}$$

Luego
$$\frac{180^\circ\,(n-2)}{n} + 4 = \frac{180^\circ\,(n-1)}{n+1}$$

de donde $\mathbf{n = 9} \quad y \quad \mathbf{n + 1 = 10}$

De otro modo. – *Como en dos polígonos regulares la diferencia de sus ángulos es igual a la diferencia de sus ángulos centrales, se tiene:*

$$\frac{360^\circ}{n} - \frac{360^\circ}{n+1} = 4$$

de donde $\mathbf{n = 9} \quad \mathbf{n + 1 = 10}$

253. Todo polígono equilátero inscrito en una circunferencia es un polígono regular.

Consideremos un polígono regular de n *lados inscrito en una circunferencia. Cada ángulo del polígono será un ángulo inscrito de igual medida, la mitad de* (n – 2) *divisiones de la circunferencia. Por tanto, todos serán iguales, y el polígono será regular.*

254. Todo polígono equiángulo circunscrito a una circunferencia es un polígono regular.

Sea el polígono equiángulo ABCDEF (fig. 227) *circunscrito a la circunferencia* O; *digo que es regular.*

Designando por M *y* N *los puntos de contacto de la circunferencia* O *con los lados* BC *y* ED, *tracemos* OB, OD, ON *y* OM. *Los segmentos* OB *y* OD *son las bisectrices respectivas de los ángulos* ABC *y* CDE. *Por tanto, los triángulos rectángulos* OMB *y* OND *serán iguales, por tener un lado igual* OM = ON *y* ∠OBM = ∠ODN *luego* BM = ND.

Análogamente se demostraría que MC = NE.

De donde se infiere que BC = DE.

Siendo, pues, iguales dos lados, los demás, sus iguales, lo serán también, y como además tenemos que es equiángulo, el **polígono ABCDEF** *equilátero y equiángulo, a la vez,* **será regular.**

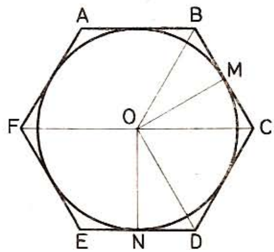


Fig. 227

255. Demostrar que si un polígono de $2n$ lados, inscrito en una circunferencia, es equiángulo, sus lados serán iguales dos a dos.

Sea el polígono equiángulo ABCDEFGH (figura 228) *de un número par de lados e inscrito en la circunferencia* O.

Como ∠B = ∠C *también serán*

$$\overset{\frown}{\mathrm{CDEFGHA}} = \overset{\frown}{\mathrm{DEFGHAB}}$$

Si de estos arcos iguales restamos el arco común DEFGHA, *tendremos*

$$\overset{\frown}{\mathrm{CD}} = \overset{\frown}{\mathrm{AB}}$$

de donde **CD = AB**

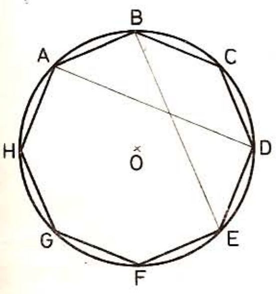


Fig. 228

256. Demostrar que si un polígono de $2n$ lados, circunscrito a una circunferencia, tiene los lados iguales, sus ángulos serán iguales dos a dos.

Sea el polígono ABCDEF (fig. 229) *de* 2n *lados, cuyos lados son iguales; tracemos los segmentos* OA, OC, OM, ON, OQ *y* OP.

Como los lados AMB *y* BNC *son iguales y además las tangentes* BM *y* BN *lo son también, tendremos que* AM = CN *y, por tanto, los triángulos rectángulos* OMA *y* ONC *serán iguales, pues tienen los catetos iguales; por consiguiente:*

$$\angle OAM = \angle OCN \qquad (1)$$

Por el mismo motivo también:

$$\triangle OQA = \triangle OPC \quad y \quad \angle OAQ = \angle OCP \qquad (2)$$

Sumando ordenadamente la (1) *y la* (2) *resulta*

$$\angle \mathbf{QAM} = \angle \mathbf{NCP}$$

Nota.—*En igualdad de condiciones, aun cuando el polígono tuviese un número impar de lados, sería* regular.

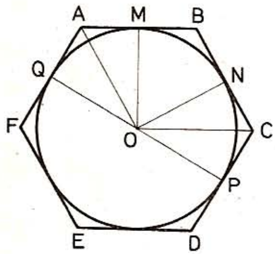


Fig. 229

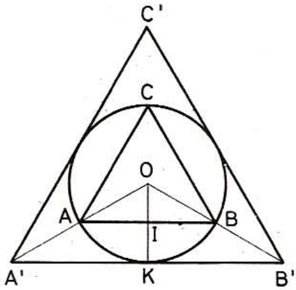


Fig 230

257. El lado de un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia es igual al duplo del lado del triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia.

Sea el triángulo equilátero ABC (fig. 230) *inscrito y el triángulo equilátero* A′B′C′ *circunscrito, cuyos lados son respectivamente paralelos.*

Tracemos los segmentos AOA′, BOB′ *y las apotemas* OI *y* OK.

OI = R/2 *y* OK = R (GEOM. **449** *y* **445**).

Los triángulos OA′B′ *y* OAB *son semejantes por tener los ángulos respectivamente iguales (correspondientes).*

Luego $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OK}{OI} = \frac{R}{R/2} = 2; \quad \mathbf{A'B' = 2AB}$$

258. En todo pentágono regular convexo:

1.º Cada diagonal es paralela a un lado.

2.º Las diagonales se cortan mutuamente en media y extrema razón.

Sea el pentágono regular convexo ABCDE (fig. 231).

● 1.º *En el cuadrilátero* CDEA *tenemos* CD = AE. *Luego* $\widehat{CD} = \widehat{AE}$

$$\left.\begin{array}{l} \angle EDA = \frac{1}{2}\widehat{AE} \\ \angle DAC = \frac{1}{2}\widehat{CD} \end{array}\right\} \angle EDA = \angle DAC$$

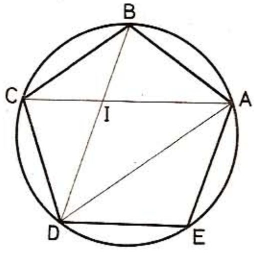


Fig. 231

Al ser los ángulos alternos internos $\angle EDA$ *y* $\angle DAC$ *iguales los segmentos* **DE** *y* **CA son paralelos.**

Del mismo modo se demostraría que las otras diagonales son paralelas a lados del polígono.

● 2.º $\angle DCI = \angle DIC = 1/5$ *de circunferencia. Luego* DC = DI.

$\angle IDA = \angle IAD = 1/10$ *de circunferencia. Luego* DI = IA.

Por tanto DC = DI = IA (1)

Por ser DI *bisectriz de* $\angle CDA$ *tenemos:* $\dfrac{IC}{IA} = \dfrac{DC}{DA}$

y como DC = IA (1) *y* DA = CA *(diagonales), resulta* $\dfrac{IC}{IA} = \dfrac{IA}{CA}$

Es decir: **el punto I divide a la diagonal CA en media y extrema razón.** *Del mismo modo se demostraría para las otras diagonales.*

259. Uniendo un punto cualquiera M de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero ABC (fig. 232) con los tres vértices del triángulo, una de dichas rectas es igual a la suma de las otras dos.

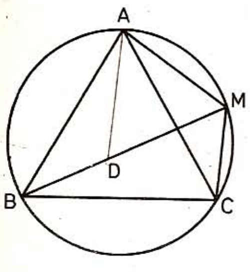


Fig. 232

Tomemos BD = MC *y tracemos* AD

$$\triangle ABD = \triangle ACM \quad \textit{luego} \quad AD = AM$$

Por tanto, $\triangle ADM$ *es isósceles.*

Pero en este mismo triángulo $\angle AMD = 60^\circ$, *luego* ADM *es equilátero y* MD = MA; *por tanto*

$$\mathbf{MB = MC + MA}$$

260. Dada una circunferencia de diámetro AOB (figura 233), se traza el radio OC perpendicular a AB y desde D, punto medio de OB, como centro y con un radio DC, se describe un arco el cual cortará a OA en E. Demostrar que OE y EC son respectivamente los lados del decágono y pentágono regulares convexos inscritos en dicha circunferencia.

En efecto, sea R *el radio de la circunferencia,*

$$DC = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{5}$$

Pero
$$OE = DE - OD = \frac{R}{2}\sqrt{5} - \frac{R}{2}$$

$$OE = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad [\textit{lado del pentágono regular inscrito}]$$

$$EC^2 = OC^2 + OE^2$$

$$EC^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(4 + 6 - 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})$$

$$EC = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad [\textit{lado del pentágono regular inscrito}]$$

Por consiguiente, el lado del pentágono regular es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y el lado del decágono regular.

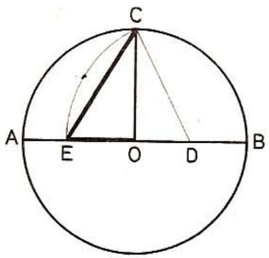


Fig. 233

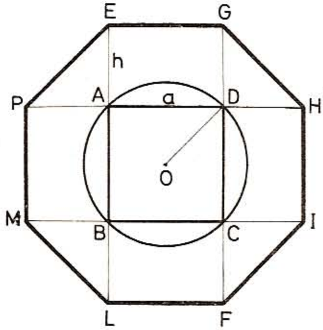


Fig. 234

261. Dado un cuadrado ABCD (fig. 234), si prolongamos sus lados en ambos sentidos una longitud igual al radio de la circunferencia circunscrita al mismo, obtendremos los vértices de un octógono regular.

En efecto, todos los lados son iguales a los lados del cuadrado dado ($R\sqrt{2}$), *y cada ángulo del octógono vale* $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$, *que es precisamente el valor del ángulo del* **octógono regular convexo.**

III. Polígonos semejantes

262. ¿Qué relación existe entre los perímetros de dos triángulos equiláteros que tienen respectivamente 10 y 18 m de lado?

Los perímetros de dos polígonos semejantes son proporcionales a los lados homólogos (GEOM. **338**); *luego la relación será:*

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{P'}} = \frac{10}{18} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}$$

263. Un triángulo tiene por lados 20, 26 y 30 m. ¿Cuáles son los lados de otro triángulo semejante de 114 m de perímetro?

$$\frac{114}{20 + 26 + 30} = \frac{3}{2} = \frac{x}{20} = \frac{y}{26} = \frac{z}{30}$$

$$x = \frac{20 \times 3}{2} = \mathbf{30\ m} \qquad y = \frac{26 \times 3}{2} = \mathbf{39\ m} \qquad z = \frac{30 \times 3}{2} = \mathbf{45\ m}$$

264. Construir un trapecio rectángulo que tenga por bases 40 y 25 mm y 12 mm de altura y luego otro semejante cuyo perímetro sea 1 dm.

• 1.º *Tracemos* (fig. 235) *un ángulo recto* BAC *y llevemos* AB = 40 mm *y* AC = 12 mm.

Tracemos un segmento CD *perpendicular a* AC *y de longitud* 25 mm.

El cuadrilátero BACD *es el trapecio pedido.*

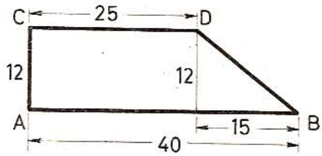


Fig. 235

$$BD = \sqrt{12^2 + 15^2} = \sqrt{144 + 225} = \sqrt{369} =$$
$$= 19{,}2 \text{ mm.}$$

El perímetro del trapecio BACD *es:* 40 + 12 + 26 + 19,2 = 96,2 mm.

• 2.º *Llamemos* B′A′C′D′ *al trapecio semejante cuyo perímetro es* 1 dm = = 100 mm

$$\frac{B'A'}{BA} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'B'}{DB} = \frac{B'A + A'C' + C'D' + D'B'}{BA + AC + CD + DB} = \frac{100}{96{,}2}$$

$$\frac{B'A'}{40} = \frac{100}{96{,}2}; \quad \frac{A'C'}{12} = \frac{100}{96{,}2}; \quad \frac{C'D'}{25} = \frac{100}{96{,}2}; \quad \frac{D'B'}{19{,}2} = \frac{100}{96{,}2}$$

Es decir $B'A' = \frac{40 \times 100}{96{,}2} = 41{,}58$ mm $\quad A'C' = \frac{12 \times 100}{96{,}2} = 12{,}47$ mm

$$C'D' = 25{,}98 \text{ mm} \qquad D'B' = 19{,}95 \text{ mm}$$

Luego se construye el trapecio B′A′C′D′ *como el* BACD, *con estas nuevas medidas.*

IV. Relaciones métricas entre líneas del triángulo

265. ¿Cuál es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen 15 y 10 m de longitud?

$$\mathbf{h} = \sqrt{15^2 + 10^2} = \sqrt{325} = \mathbf{18{,}027\ m}$$

266. ¿Cuáles son las diagonales de los rectángulos que tienen por dimensiones:

1.º Base, 29 m; altura, 11 m?
2.º — 46 m; — 25 m?
3.º — 6,4 m; — 2,5 m?

La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son los lados del rectángulo. Luego tendremos (GEOM. **355**):

- 1.º $\mathbf{d} = \sqrt{29^2 + 11^2} = \mathbf{31{,}01\ m}$
- 2.º $\mathbf{d} = \sqrt{46^2 + 25^2} = \mathbf{52{,}36\ m}$
- 3.º $\mathbf{d} = \sqrt{6{,}4^2 + 2{,}5^2} = \mathbf{6{,}87\ m}$

267. ¿Cuáles son los lados de los rombos cuyas diagonales miden:

1.º 6 m y 10 m?
2.º 12 m y 15 m?
3.º 3,50 m y 5,40 m?

Las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente y en su punto medio (GEOM. **147**). *El lado del rombo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son las semidiagonales.*

- 1.º $\mathbf{l} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \mathbf{5{,}83\ m}$
- 2.º $\mathbf{l} = \sqrt{6^2 + 7{,}5^2} = \mathbf{9{,}60\ m}$
- 3.º $\mathbf{l} = \sqrt{1{,}75^2 + 2{,}7^2} = \mathbf{3{,}21\ m}$

268. La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 20 m; ¿cuál será la longitud de los catetos, si éstos son entre sí como 2 es a 3?

Sean 2x *y* 3x *los catetos. De los datos del problema resulta:*

$$(2x)^2 + (3x)^2 = 20^2$$
$$4x^2 + 9x^2 = 400$$
$$x^2 = \frac{400}{13}$$
$$x = \sqrt{\frac{400}{13}}$$

$$\mathbf{2x} = \sqrt{\frac{400 \times 4}{13}} = \mathbf{11{,}09\ m} \qquad \mathbf{3x} = \sqrt{\frac{400 \times 9}{13}} = \mathbf{16{,}64\ m}$$

269. En un triángulo rectángulo, un cateto es doble que otro. ¿Cuál será la relación de sus cuadrados y cuál la relación del cuadrado de cada cateto con el cuadrado de la hipotenusa?

Sean los catetos x *y* 2x.

La hipotenusa al cuadrado será: $h^2 = x^2 + 4x^2 = 5x^2$.

- 1.ª *relación* $\frac{x^2}{4x^2} = \mathbf{\frac{1}{4}}$
- 2.ª *relación:* $\frac{x^2}{5x^2} = \mathbf{\frac{1}{5}}$; $\frac{4x^2}{5x^2} = \mathbf{\frac{4}{5}}$

270. Los catetos de un triángulo rectángulo son entre sí como 3 es a 4; ¿cuál será la relación de sus cuadrados con el de la hipotenusa?

Llamando m *y* n *a las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, tendremos* (GEOM. **353,** 3.º):

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{m}{n} = \frac{9}{16}$$

y también:

$$\frac{b^2}{b^2 + c^2} = \frac{m}{m + n} = \frac{9}{9 + 16} = \frac{9}{25} \quad \textit{o sea} \quad \frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{h}^2} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{25}}$$

y asimismo

$$\frac{\mathbf{c}^2}{\mathbf{h}^2} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{25}}$$

271. Los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo son entre sí como 1, 2 y 3. Si la hipotenusa tiene 30 m, ¿cuál será la longitud de los catetos?

Por hipótesis, tenemos:

$$\frac{b^2}{1} = \frac{c^2}{2} = \frac{h^2}{3} \quad \textit{o bien} \quad \frac{b^2}{1} = \frac{c^2}{2} = \frac{900}{3} = 300$$

de donde $b^2 = 300$ *y* $c^2 = 600$. *Por tanto,*

$$\mathbf{b} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\ \text{m} = \mathbf{17{,}32\ m}$$

$$\mathbf{c} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}\ \text{m} = \mathbf{24{,}49\ m}$$

272. En un triángulo rectángulo, los catetos son entre sí como 3 es a 2; si la hipotenusa tiene 26 m de longitud, ¿cuánto valdrán los cuadrados de los catetos?

Sean los catetos 2x *y* 3x; *sus cuadrados son* $4x^2$ *y* $9x^2$

$$4x^2 + 9x^2 = 26^2$$

$$x^2 = \frac{26^2}{13}$$

1.^{er} *cateto* $\quad \mathbf{4x^2} = \frac{26^2 \times 4}{13} = \mathbf{208\ m^2}$

2.º *cateto* $\quad \mathbf{9x^2} = \frac{26^2 \times 9}{13} = \mathbf{468\ m^2}$

273. En un triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre un cateto vale 500 m² más que el cuadrado construido sobre el otro; ¿cuál será la longitud de cada uno, si la hipotenusa mide 36 m?

$$\textit{Por hipótesis} \begin{cases} b^2 + c^2 = 36^2 = 1296 \\ b^2 - c^2 = 500 \end{cases}$$

Conociendo la suma y la diferencia de los cuadrados, éstos serán:

$$b^2 = \frac{1296 + 500}{2} = 898$$

$$c^2 = \frac{1296 - 500}{2} = 398$$

$$\mathbf{b} = \sqrt{898} = \mathbf{29{,}97\ m}$$

$$\mathbf{c} = \sqrt{398} = \mathbf{19{,}95\ m}$$

274. ¿Por qué el triángulo cuyos lados son entre sí como los números 3, 4 y 5 es siempre rectángulo?

Porque este triángulo es semejante al triángulo cuyos lados tienen 3, 4 *y* 5 m *el cual es rectángulo, pues*

$$5^2 = 3^2 + 4^2 \quad \text{ó} \quad 25 = 9 + 16$$

275. Se quiere construir un triángulo rectángulo en el que un cateto sea igual a la mitad de la hipotenusa; ¿cuál será la longitud de los catetos si el cuadrado de la hipotenusa es de 256 m?

La hipotenusa mide: $h = \sqrt{256} = 16$ m

Por ser mitad de la hipotenusa: $\mathbf{b} = \mathbf{8\ m}$

$$\mathbf{c} = \sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3} = \mathbf{13{,}856\ m}$$

276. *Dos viajeros que salen desde el mismo punto caminan el uno hacia el sur y el otro hacia el oeste.*

1.º ¿Qué distancia los separa cuando cada uno ha recorrido 80 km?

2.º ¿A qué distancia se hallarán del punto de partida cuando estén a 100 km el uno del otro, habiendo andado igual recorrido?

3.º ¿Cuántos kilómetros había caminado cada uno cuando la distancia que los separaba era de 60 km, siendo su velocidad como 3 es a 4?

4.º ¿Cuántos kilómetros hubiera recorrido cada uno si estuvieran a 80 km de distancia y uno hubiera caminado 16 km más que el otro?

● 1.º *La distancia* d *es la diagonal de un cuadrado de* 80 km *de lado.*

$$\mathbf{d} = 80\sqrt{2} = \mathbf{113{,}136\ km}$$

● 2.º *La distancia* a *hasta el punto de partida es igual al lado del cuadrado que tiene* 100 km *de diagonal:*

$$\mathbf{a} = \frac{100\sqrt{2}}{2} = \mathbf{70{,}710\ km}$$

● 3.º *Cuando uno recorre* 3 km *y el otro* 4, *están a la distancia de* 5 km **(274).** *Cuando estén a una distancia de* 60 km, *esto es,* 12 *veces* 5 km, *habrán recorrido el uno* 12 × 3 = **36 km** *y el otro* 12 × 4 = **48 km.**

● 4.º *Sean* b *y* c *el número de kilómetros recorridos por cada uno:*

$$\text{Por hipótesis} \begin{cases} b^2 + c^2 = 80^2 = 6400 & (1) \\ b - c = 16. & (2) \end{cases}$$

Elevemos (2) *al cuadrado:* $b^2 + c^2 - 2bc = 256$ (3)

Restemos (3) *de* (1): $2bc = 6144$ (4)

Sumemos (4) *y* (1):

$$b^2 + c^2 + 2bc, \quad \text{ó} \quad (b + c)^2 = 12\,544$$

$$b + c = \sqrt{12\,544} = 112$$

Conociendo la suma y la diferencia (b + c) *y* (b − c), *se hallará:*

$$b = \frac{112 + 16}{2} = \mathbf{64\ km}$$

$$c = \frac{112 - 16}{2} = \mathbf{48\ km}$$

Solución algebraica.—*Uno recorre* x km, *el otro,* x + 16 km

$$x^2 + (x + 16)^2 = 80^2$$
$$x^2 + 16x - 3072 = 0$$
$$x = -8 \pm \sqrt{64 + 3072} = -8 \pm 56 \begin{cases} x_1 = 48 \\ x_2 = -64 \end{cases}$$

Rechazando la solución negativa, queda:

Uno recorre **48 km** *y el otro* **64 km**

277. La diagonal de un rectángulo tiene 30 m y la altura es a la longitud como 4 es a 5. ¿Cuál es el valor de estas dos dimensiones?

Sean a *y* b *las dos dimensiones de este rectángulo.*

Sabemos $$a^2 + b^2 = d^2 = 900$$

por el enunciado $$\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

de donde $$\frac{a^2}{b^2} = \frac{16}{25}$$

De esta última igualdad resulta,

- 1.º $$\frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{16 + 25}{25} \quad \textit{o sea} \quad \frac{900}{b^2} = \frac{41}{25}$$

de donde $$\mathbf{b} = \sqrt{\frac{900 \times 25}{41}} = \mathbf{23{,}43\ m}$$

- 2.º $$\frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{16}{16 + 25} \quad ó \quad \frac{a^2}{900} = \frac{16}{41}$$

de donde $$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{900 \times 16}{41}} = \mathbf{18{,}74\ m}$$

Otro método.—*Sea la altura* 4x, *la longitud será* 5x.

Luego $$(4x)^2 + (5x)^2 = 30^2$$
$$41x^2 = 900$$

$$x = \sqrt{\frac{900}{41}}$$

$$\mathbf{4x} = \sqrt{\frac{900 \times 16}{41}} = \mathbf{18{,}74\ m}$$

$$\mathbf{5x} = \sqrt{\frac{900 \times 25}{41}} = \mathbf{23{,}43\ m}$$

278. En un triángulo rectángulo isósceles, la altura que parte del ángulo recto divide a la hipotenusa en dos segmentos de 6 m cada uno. Calcular la altura y los catetos.

La altura, en este caso, es también mediana e igual a la mitad de la hipotenusa **(33)**; *luego mide* 6 m.

Si x *es la longitud de un cateto, tenemos:*

$$x^2 = 6^2 + 6^2 \qquad \mathbf{x} = \sqrt{2 \times 6^2} = 6\sqrt{2} = \mathbf{8{,}49\ m}$$

279. Dado un triángulo rectángulo (fig. 236), hallar, en función de los catetos, la altura relativa a la hipotenusa:

1.º Para $b = 12, \quad c = 5.$
2.º Para $b = 8, \quad c = 6.$

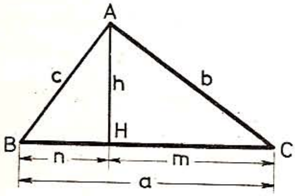


Fig. 236

Sabemos que $h^2 = m \times n,$

pero $m = \frac{b^2}{a}$ *y* $n = \frac{c^2}{a}$

de donde

$$h^2 = \frac{b^2}{a} \times \frac{c^2}{a} = \frac{b^2c^2}{a^2} = \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}$$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{b \cdot c}}{\sqrt{\mathbf{b^2 + c^2}}}$$

Aplicación

- 1.º $\mathbf{h} = \frac{60}{\sqrt{169}} = \frac{60}{18} = \mathbf{4{,}165\ m}$
- 2.º $\mathbf{h} = \frac{48}{\sqrt{100}} = \frac{48}{10} = \mathbf{4{,}80\ m}$

280. Colocando una mira en el cauce de un riachuelo a 4 m de la orilla, cuando está vertical, sobresale 3 m de la superficie del agua, y cuando está inclinada hacia la orilla, la extremidad superior coincide con ésta. ¿Qué profundidad tiene el riachuelo?

Sea x *la profundidad, la mira tendrá* x + 3 m *de altura y formará la hipotenusa de un triángulo rectángulo; por tanto,*

$$x^2 + 4^2 = (x + 3)^2$$
$$x^2 + 16 = x^2 + 6x + 9$$

$$\mathbf{x} = \frac{7}{6} = \mathbf{1{,}17\ m}$$

281. En un triángulo rectángulo, se nos da:

1.º $b + c = 35$ y $a = 25$
2.º $b + c = 49$ y $a = 35$

Calcular b, c, h y las proyecciones de b y c sobre a.

- 1.º $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc = 35^2 = 1225$ (1)

y $b^2 + c^2 = a^2 = 25^2 = 625$ (2)

Restando (2) *de* (1): $2bc = 600$ (3)

Restando (3) *de* (2): $b^2 + c^2 - 2bc = 25$

de donde $b - c = 5$

conociendo $b + c = 35$ y $b - c = 5$

hallaremos: $\mathbf{b = 20}$ y $\mathbf{c = 15}$

$$\mathbf{m} = \frac{b^2}{a} = \frac{400}{25} = \mathbf{16}$$

$$\mathbf{n} = \frac{c^2}{a} = \frac{225}{25} = \mathbf{9}$$

$$\mathbf{h} = \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{16 \cdot 9} = \mathbf{12}$$

- 2.º *Calculando de un modo análogo hallaríamos:*

$$\mathbf{b = 28,} \quad c = \mathbf{21,} \quad m = \mathbf{22{,}4,} \quad n = \mathbf{12{,}6,} \quad \mathbf{h = 16{,}8}$$

282. La altura de un triángulo rectángulo determina sobre la hipotenusa dos segmentos de 32 cm y 18 cm. Calcular los dos catetos.

$$\mathbf{b} = \sqrt{a \times m} = \sqrt{50 \times 32} = \sqrt{1600} = \mathbf{40\ cm}$$
$$\mathbf{c} = \sqrt{a \times n} = \sqrt{50 \times 18} = \sqrt{900} = \mathbf{30\ cm}$$

283. Calcular las tres medianas de un triángulo rectángulo, en función de los catetos b y c del mismo.

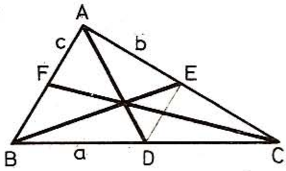


Fig. 237

Sea el triángulo ABC (fig. 237) *rectángulo en* A, AD *la mediana relativa a la hipotenusa* a; BE *la relativa al cateto* b *y* CF *la relativa al otro cateto* c. *Tracemos el segmento* ED, *el cual, por unir los puntos medios de dos lados del triángulo, será paralelo e igual a la mitad de* AB; *de aquí que*

$$\angle \text{AED} = 90^\circ \quad y \quad \text{DE} = \frac{\text{AB}}{2}$$

- 1.ª *En el triángulo rectángulo* BAC *la mediana* AD *es igual a la semihipotenusa* **(33).**

$$\mathbf{AD} = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathbf{b^2 + c^2}}$$

- 2.ª *En el triángulo rectángulo* BAE *se tendrá:*

$$\mathbf{BE} = \sqrt{\text{AE}^2 + \text{AB}^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2} = \sqrt{\frac{b^2 + 4c^2}{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{b^2 + 4c^2}}$$

- 3.ª *El triángulo rectángulo* CAF *nos dará:*

$$\mathbf{CF} = \sqrt{\text{CA}^2 + \text{AF}^2} = \sqrt{b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4b^2 + c^2}{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{4b^2 + c^2}}$$

284. En un triángulo rectángulo (fig. 238), el ángulo B = 60° y la altura relativa a la hipotenusa, AH = 12 cm. Hallar los tres lados y los segmentos m y n que la altura AH determina sobre la hipotenusa.

Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 60°, se le puede considerar como la mitad de un triángulo equilátero, y en ese caso la hipotenusa es el doble del cateto menor. Además, la altura AH *divide al triángulo* ABC *en otros dos parciales* AHB *y* AHC *semejantes al total.*

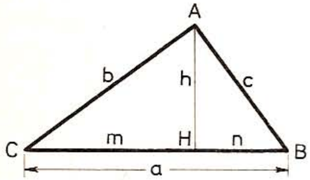


Fig. 238

En $\triangle$AHB: $AB = c; \quad BH = n; \quad AB = 2n$

$$c^2 - n^2 = h^2$$
$$4n^2 - n^2 = h^2$$
$$3n^2 = 12^2$$
$$\mathbf{n} = \mathbf{6{,}928\ cm}$$
$$\mathbf{c} = 2n = \mathbf{13{,}856\ cm}$$

En $\triangle$AHC: $\angle CAH = \angle B = 60°$

$$\mathbf{h} = 2AH = 12 \times 2 = \mathbf{24\ cm}$$
$$\mathbf{m} = \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{24^2 - 12^2} = \mathbf{20{,}784\ cm}$$
$$\mathbf{a} = 6{,}928 + 20{,}784 = \mathbf{27{,}782\ cm}$$

285. Calcular los lados de un triángulo rectángulo, teniendo en cuenta que la altura es de 12 m y los segmentos que la misma determina sobre la hipotenusa son entre sí como 9 a 16.

Sea $$\frac{n}{m} = \frac{9}{16} \qquad n = \frac{9m}{16}$$

y la fórmula $h^2 = mn$ *será:*

$$h^2 = \frac{9m^2}{16} \quad y \quad h = \frac{3m}{4} = 12$$

de donde $$m = 16$$
$$n = \frac{9 \times 16}{16} = 9$$

y, por tanto,

$$\mathbf{a} = m + n = 16 + 9 = \mathbf{25\ m}$$
$$\mathbf{b} = \sqrt{am} = \sqrt{25 \times 16} = \mathbf{20\ m}$$
$$\mathbf{c} = \sqrt{an} = \sqrt{25 \times 9} = \mathbf{15\ m}$$

286. La altura de un triángulo rectángulo tiene 26,4 m y los cuadrados de los catetos son entre sí como 9/16. Hallar éstos (fig. 239):

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{9}{16} \quad \text{de donde} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$$

Longitud de los catetos: $3x$ y $4x$

$$BC = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x$$

Expresión del doble del área:

$$3x \times 4x = 5x \times 26{,}4$$
$$x = 11$$

AB $= 4x =$ **44 m;** **AC** $= 3x =$ **33 m**

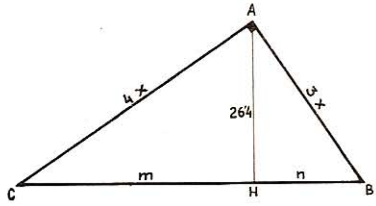


Fig. 239

287. En un triángulo rectángulo (fig. 240) tenemos:

$$c = 15 \text{ m} \qquad \text{y} \qquad h = 12 \text{ m}$$

Hallar a y b y los dos segmentos que determina la altura sobre la hipotenusa.

Tenemos:

$$n = \sqrt{c^2 - h^2} = \sqrt{225 - 144} = 9 \text{ m}$$

$$m = \frac{h^2}{n} = \frac{144}{9} = 16\ m$$

$$\mathbf{a} = m + n = 16 + 9 = \mathbf{25\ m}$$

$$\mathbf{b} = \sqrt{am} = \sqrt{25 \times 16} = \mathbf{20\ m}$$

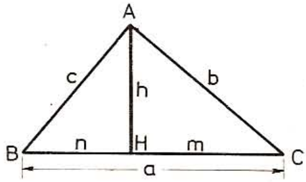


Fig. 240

288. La altura h_a de un triángulo rectángulo es 12 m y la diferencia entre las proyecciones m y n de los catetos b y c sobre la hipotenusa es 7 m. Hállese m y n y luego b y c.

Tenemos:

$$m \times n = h^2 = 144$$
$$(m - n)^2 = m^2 + n^2 - 2mn = 49$$

Añadiendo 4mn *a ambos miembros, se tiene:*

$$m^2 + n^2 + 2mn = 49 + 576 = 625$$

de donde $m + n = 25$

y como ya tenemos $m - n = 7$

$$\mathbf{m = 16\ m}$$
$$\mathbf{n = 9\ m}$$
$$a = m + n = 25 \text{ m}$$
$$\mathbf{b} = \sqrt{am} = \sqrt{25 \times 16} = \mathbf{20\ m}$$
$$\mathbf{c} = \sqrt{an} = \sqrt{25 \times 9} = \mathbf{15\ m}$$

289. En un triángulo rectángulo, la hipotenusa $a = 40$; $h = 19{,}20$. Hállense los otros lados.

Tenemos: $a = m + n = 40;\quad mn = h^2 = 19{,}2^2$

$$(m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn = 1600$$

Restando 4mn *de ambos miembros, viene:*

$$m^2 + n^2 - 2mn = 1600 - 1474{,}56$$

de donde $m - n = 11{,}2$

y como $m + n = 40;\quad m = 25{,}6 \quad \text{y} \quad n = 14{,}4$

$$\mathbf{b} = \sqrt{40 \times 25{,}6} = \mathbf{32};\qquad \mathbf{c} = \sqrt{40 \times 14{,}4} = \mathbf{24}$$

290. En un triángulo rectángulo ABC, $a = 100$; $b = 60$. Calcular el perímetro de los triángulos parciales que determina la altura sobre la hipotenusa.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100^2 - 60^2} = 80$$

Por ser $\triangle ABC \sim \triangle ABH \sim \triangle ACH$ *sus perímetros* p, p′, p″ *son entre sí como los lados homólogos; tendremos que*

$$\frac{p'}{p} = \frac{c}{a}; \quad \frac{p''}{p} = \frac{b}{a}$$

pero $$p = 100 + 60 + 80 = 240$$

por tanto $$\mathbf{p}' = \frac{p \cdot c}{a} = \frac{240 \times 80}{100} = \mathbf{192}$$

$$\mathbf{p}'' = \frac{p \cdot b}{a} = \frac{240 \times 60}{100} = \mathbf{144}$$

291. En un triángulo, rectángulo en A, $\angle B = 60°$. ¿En qué relación divide la bisectriz de este ángulo:

1.º Al lado AC.

2.º A la altura AH?

Al ser $B = 60°$, *el* $\triangle ABC$ (fig. 241) *es la mitad de un triángulo equilátero en el que* $AB = BC/2$. *Lo mismo ocurre con el* $\triangle ABH$; $AB = 2BH$.

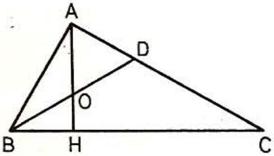


Fig. 241

Pero la bisectriz BD *divide al lado opuesto en la misma proporción que los lados adyacentes; por tanto,*

En $\triangle ABC$: $$\frac{\mathbf{AD}}{\mathbf{DC}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

En $\triangle ABH$: $$\frac{\mathbf{OH}}{\mathbf{OA}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

292. Los dos catetos de un triángulo rectángulo son b y c ($b > c$) (figura 242). ¿Qué relación debe haber entre ambos para que la mediana relativa a b sea perpendicular a la mediana relativa a la hipotenusa?

En $\triangle AED$ *(rectángulo)*: $AE = \frac{b}{2}$; $\quad DE = \frac{c}{2}$

de donde $$AD^2 = \frac{b^2 + c^2}{4}$$

En $\triangle ABE$: $$BE^2 = c^2 + \frac{b^2}{4}$$

En $\triangle ABO$: $$c^2 = BO^2 + AO^2$$

pero $$BO = \frac{2BE}{3} \quad y \quad AO = \frac{2AD}{3}$$

así pues $$c^2 = \frac{4c^2 + b^2}{9} + \frac{c^2 + b^2}{9}$$

de donde $$2b^2 = 4c^2$$

y $$\mathbf{b = c\sqrt{2}}$$

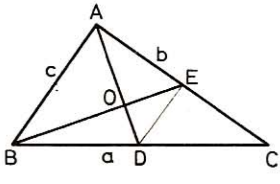


Fig. 242

293. Los lados de un triángulo tienen $a = 30$; $b = 24$; $c = 18$. Calcular, con estos datos, la altura relativa al lado a.

- 1.ª resolución.—*El triángulo dado es rectángulo, pues*

$$30^2 = 24^2 + 18^2$$

Expresión del doble del área:

$$30 \times h = 24 \times 18$$

de donde $$\mathbf{h} = \frac{24 \times 18}{30} = \mathbf{14{,}4}$$

- 2.ª resolución:

$$b^2 - h^2 = m^2 \quad (1)$$
$$c^2 - h^2 = n^2 \quad (2)$$

restamos (2) *de* (1): $$b^2 - c^2 = m^2 - n^2$$
$$b^2 - c^2 = (m + n)(m - n)$$

pero ya tenemos $$m + n = a = 30 \quad (3)$$

luego $$m - n = \frac{24^2 - 18^2}{30} = 8{,}4 \quad (4)$$

Sumando y restando (3) *y* (4), *da:*

$$m = 19{,}2 \quad \text{y} \quad n = 10{,}8$$
$$\mathbf{h} = \sqrt{m \times n} = \sqrt{19{,}2 \times 10{,}8} = \mathbf{14{,}4}$$

294. En un triángulo, cuyos lados son $a = 28$; $b = 40$; $c = 15$, se desea saber el valor de las proyecciones de a y b sobre c, así como también la altura relativa a este lado (figura 243).

Sea x = AH, *y* b = CH, *se tendrá:*

$$x^2 + h^2 = 40^2 \quad (1)$$
$$(x - 15)^2 + h^2 = 28^2 \quad (2)$$

Restando (2) *de* (1): $30x = 40^2 - 28^2 + 225$

de donde $$x = \mathbf{AH} = \mathbf{34{,}7}$$
$$\mathbf{BH} = 34{,}7 - 15 = \mathbf{19{,}7}$$
$$\mathbf{h} = \sqrt{40^2 - 34{,}7^2} = \mathbf{19{,}9}$$

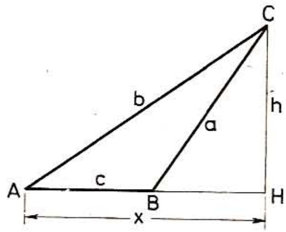


Fig. 243

295. Los tres lados de un triángulo rectángulo forman progresión aritmética cuya razón es 3. Hállense estos lados.

Si x *es el valor del mediano, el de los otros dos será:*

$$x - 3 \quad \text{y} \quad x + 3$$

por tanto: $$x^2 + (x - 3)^2 = (x + 3)^2$$
$$x^2 + x^2 - 6x + 9 = x^2 + 6x + 9$$
$$x^2 = 12x$$
$$x = 12$$

Los **lados** *serán* **9, 12, 15.**

296. En un triángulo ABC (fig. 244) tal que AB = 6 cm, AC = 7 cm y BC = 8 cm, ¿cuál será la naturaleza de sus ángulos? Hallar la altura AH trazada desde A sobre BC y los segmentos CH y BH que la misma determina sobre BC.

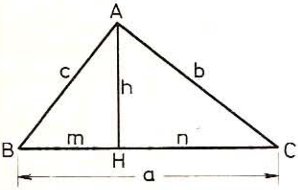


Fig. 244

• 1.º *En todo triángulo, si el cuadrado del lado mayor es menor, igual o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto será agudo, recto u obtuso. En el caso presente*

$$AB^2 + AC^2 = 36 + 49 = 85$$

y

$$BC^2 = 64 < 85$$

Luego BC *se opone a un ángulo agudo, y con mayor razón serán agudos los otros dos ángulos, por ser menores que éste. El triángulo dado será, pues,* **acutángulo.**

• 2.º Cálculo de BH = m.—*El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

Siendo BH = m *la proyección de* AB *sobre* AC, *tendremos:*

$$AC^2 = b^2 = c^2 + a^2 - 2am$$

de donde

$$m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$\mathbf{m} = \frac{64 + 36 - 49}{2 \times 8} = \mathbf{3{,}1875\ cm}$$

• 3.º Cálculo de CH = n

$$\mathbf{n} = a - m = 8 - 3{,}1875 = \mathbf{4{,}8125\ cm}$$

• 4.º Cálculo de la altura AH = h.—*El* △AHB *es rectángulo*

$$\mathbf{h} = \sqrt{36 - 3{,}1875^2} = \mathbf{5{,}08\ cm}$$

297. Dado el triángulo ABC (fig. 245), en el cual AB = 12 cm, AC = 5 cm y BC = 10 cm. Calcular la mediana, la bisectriz y la altura trazadas desde el vértice A.

Como $AC^2 + BC^2 = 25 + 100 = 125$ *y* $AB^2 = 12^2 = 144 > 125$, *el lado* AB *se opone a un ángulo obtuso, el* ∠ACB.

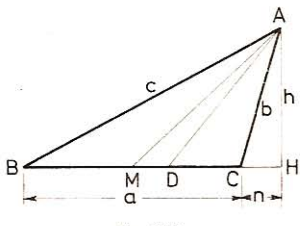


Fig. 245

• 1.º Cálculo de la mediana AM.—*El pie* H *de la altura* AH *se halla en la prolongación de* BC; CH = n *es la proyección de* AC; BH *la proyección de* AB *y* MH *la proyección de* AM, *todas sobre* BC.

En △AMB *(obtusángulo):* $AB^2 = AM^2 + BM^2 + 2MB \cdot MH$

En △ACM *(acutángulo):* $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \cdot MH$

Sumando, y teniendo en cuenta que MC = MB, *resultará:*

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2MB^2$$

de donde $$2AM^2 = AB^2 + AC^2 - 2MB^2$$

$$AM = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2 - 2MB^2}{2}}$$

$$\mathbf{AM} = \sqrt{\frac{144 + 25 - 50}{2}} = \mathbf{7{,}71\ cm}$$

● 2.º Cálculo de la altura AH.—*En el triángulo obtusángulo* ABC:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2an$$

de donde $$n = \frac{c^2 - (a^2 + b^2)}{2a}$$

$$n = \frac{144 - (25 + 100)}{2 \times 10} = 0{,}95 \text{ cm}$$

y por fin: $$\mathbf{h} = \sqrt{b^2 - n^2} = \sqrt{5^2 - 0{,}95^2} = \mathbf{4{,}9\ cm}$$

3.º Cálculo de la bisectriz AD.—*Hallemos antes el segmento* DC. *Sabido es que la bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados del ángulo. Así pues:*

$$\frac{DC}{10 - DC} = \frac{5}{12}$$

de donde $$DC = \frac{50}{17} = 2{,}94 \text{ cm}$$

En el triángulo rectángulo AHD *tenemos:*

$$DH = DC + CH = 2{,}94 + 0{,}95 = 3{,}89 \text{ cm}$$
$$\mathbf{AD} = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{4{,}9^2 + 3{,}89^2} = \mathbf{6{,}25\ cm}$$

298. En un triángulo ABC (fig. 246), la altura AH = 6 cm, divide a la base en dos segmentos BH = 3 cm y HC = 2 cm. Calcular:

1.º Los lados AB y AC.

2.º El radio de la circunferencia circunscrita al triángulo dado.

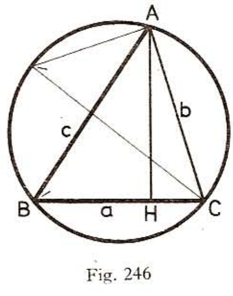


Fig. 246

1.º $\mathbf{AB} = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5} =$
$= \mathbf{6{,}708\ cm}$

$\mathbf{AC} = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10} = \mathbf{6{,}325\ cm}$

● 2.º *Sabemos que* bc = 2Rh (GEOM. **377**) *de donde*

$$R = \frac{bc}{2h} = \frac{3\sqrt{5} \times 2\sqrt{10}}{2 \times 6}$$

$$\mathbf{R} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \mathbf{3{,}5355\ cm}$$

299. Calcular el radio r de la circunferencia inscrita en un triángulo rectángulo cuyos catetos son $b = 21$ m y $c = 20$ m.

Sabemos (n.º **157**): $2r = b + c - a$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{841} = 29$$

Sustituyendo $2r = 21 + 20 - 29 = 12$

y $\mathbf{r = 6}$

Otra solución $a = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{841} = 29$

Expresión del doble del área: $2pr = b \cdot c$

$$\mathbf{r} = \frac{b \cdot c}{2p} = \frac{21 \times 20}{70} = \mathbf{6\ m}$$

300. En un triángulo equilátero inscrito ABC (fig. 247), se une el punto D, medio del arco BDC, con el punto E, medio del lado AC, y se prolonga hasta la circunferencia en F. Calcular, en función del radio R, los segmentos AF, DE, EF y BE.

- 1.º $AB = BC = CA = R\sqrt{3}$; $DE = \frac{R}{2}$; $DC = R$

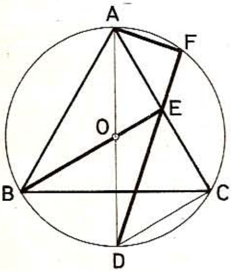


Fig. 247

$$BE = BO + OE$$

$$\mathbf{BE} = R + \frac{R}{2} = \mathbf{\frac{3R}{2}}$$ (Geom. **350**).

- 2.º $DE^2 = DC^2 + EC^2$

$$DE^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7R^2}{4}$$

$$\mathbf{DE} = \mathbf{\frac{R\sqrt{7}}{2}}$$

- 3.º $\triangle EDC \sim \triangle EAF$ *(ángulos respectivamente iguales)*

Luego $$\frac{EF}{EC} = \frac{AE}{ED} = \frac{AF}{DC}$$

en función de R: $$\frac{EF}{\frac{R}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{R\sqrt{7}}{2}} = \frac{AF}{R}$$

$$\mathbf{EF} = \frac{\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{R}{2}\sqrt{7}} = \mathbf{\frac{3R\sqrt{7}}{14}}$$

$$\mathbf{AF} = \frac{\frac{R}{2}\sqrt{3} \times R}{\frac{R}{2}\sqrt{7}} = \mathbf{\frac{R\sqrt{21}}{7}}$$

301. Calcular el perímetro de un triángulo rectángulo y la altura relativa a la hipotenusa sabiendo que dicha altura divide a la hipotenusa en dos segmentos

$$m = 10{,}8 \text{ cm} \qquad \text{y} \qquad n = 19{,}2 \text{ cm}$$

Designamos por a *la hipotenusa, por* b *y* c *los dos catetos, por* h *la altura y por* m *y* n *los dos segmentos que determina ésta sobre la hipotenusa.*

$$a = m + n = 10{,}8 + 19{,}2 = 30 \text{ cm}$$
$$b = \sqrt{am} = \sqrt{30 \times 10{,}8} = 18 \text{ cm}$$
$$c = \sqrt{an} = \sqrt{30 \times 19{,}2} = 24 \text{ cm}$$

Perímetro: $\mathbf{2p} = 30 + 18 + 24 = \mathbf{72\ cm}$

Altura: $\mathbf{h} = \sqrt{mn} = \sqrt{10{,}8 \times 19{,}2} = \mathbf{14{,}4\ cm}$

302. Dado un triángulo ABC, rectángulo en A y la altura AH $= h$, demuéstrese que si se construye otro que tenga por lados h, $(a + h)$ y $(b + c)$ será también rectángulo.

En efecto, el $\triangle$ABC *da:* $a^2 = b^2 + c^2$ *y* $ab = bc$.

Por otra parte: $(a + h)^2 = a^2 + h^2 + 2ah = b^2 + c^2 + h^2 + 2bc$, *es decir:* $(a + h)^2 = (b^2 + c^2 + 2bc) + h^2 = (b + c)^2 + h^2$.

El nuevo triángulo es, pues, rectángulo.

303. Dado un triángulo ABC (fig. 248) en el cual BC $= a = 10$ cm, AC $= b = 5$ cm y AB $= c =$ $= 9$ cm, demostrar que es acutángulo y hallar los segmentos que determinan las alturas sobre los lados respectivos.

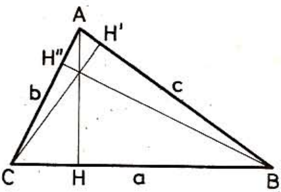


Fig. 248

● 1.º *En este triángulo tenemos que*

$$a^2 < b^2 + c^2 \qquad \textit{pues} \qquad 100 < 25 + 81$$

por tanto, aplicando el teorema de Euclides: El cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él», deducimos que este triángulo ABC es acutángulo.

● 2.º *Según el teorema anterior, tenemos:*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot \text{HB}$$

de donde

$$\text{HB} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$\mathbf{HB} = \frac{100 + 81 - 25}{20} = \mathbf{7{,}8\ cm}$$

Análogamente:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot \text{HC}$$

$$\text{HC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$\mathbf{HC} = \frac{100 + 25 - 81}{20} = \mathbf{2{,}2\ cm}$$

- 3.º

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot AH''$$

$$AH'' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$\mathbf{AH''} = \frac{25 + 81 - 100}{10} = \mathbf{0{,}6\ cm}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot CH''$$

$$CH'' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$$

$$\mathbf{CH''} = \frac{100 + 25 - 81}{10} = \mathbf{4{,}4\ cm}$$

- 4.º

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2c \cdot AH'$$

$$AH' = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$$

$$\mathbf{AH'} = \frac{81 + 25 - 100}{18} = \mathbf{\frac{1}{3}\ cm}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2c \cdot BH'$$

$$BH' = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$$

$$BH' = \frac{81 + 100 - 25}{18} = \mathbf{8\,\frac{2}{3}\ cm}$$

304. Demostrar que en todo triángulo, la suma de los cuadrados de dos lados es igual al duplo del cuadrado de la mediana relativa al tercer lado más el duplo del cuadrado de la mitad de este lado.

Aplicación.—Hallar los lados b y c de un triángulo sabiendo que $b = 2c$ y que el tercer lado $a = 11$ cm y la mediana d correspondiente a este lado a, es igual 3,4 cm.

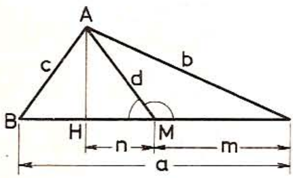


Fig. 249

Sea el triángulo ABC (fig. 249), *en el cual* AB = c *y* AC = b = 2c *y la mediana* AM = = d = 3,4 cm.

Trazando la altura AH, *su pie se hallará entre* B *y* M. *Sea* BM = MC = m *y* HM = n.

La mediana AM *forma con* BC *dos ángulos, uno agudo y otro obtuso.*

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{En } \triangle ABM: & c^2 = m^2 + d^2 - 2mn \\ \textit{En } \triangle ACM: & b^2 = m^2 + d^2 + 2mn \end{array}\right\} \textit{Sumando}$$

$$\mathbf{b^2 + c^2 = 2m^2 + 2d^2}$$

Aplicación.—*En el caso presente tenemos:* b = 2c

por tanto:
$$(2c)^2 + c^2 = 2d^2 + 2m^2$$
$$5c^2 = 2 \times 3{,}4^2 + 2 \times 5{,}5^2 = 83{,}62$$
$$\mathbf{c} = \sqrt{\frac{83{,}62}{5}} = \mathbf{4\ cm}\ \textit{por defecto}$$
$$\mathbf{b} = 2c = \mathbf{8\ cm}\ \textit{por defecto.}$$

305. Dado un paralelogramo ABCD (fig. 250) en el cual conocemos AB $= c = 40$ cm, BC $= a = 30$ cm y la diagonal AC $= 33$ cm, calcular la otra diagonal BD.

Las diagonales se cortan en el punto medio O. *En el triángulo* ABC, BO = d *es la mediana y* AO = OC = m.

Según el problema anterior:
$$a^2 + c^2 = 2d^2 + 2m^2$$
de donde
$$2d^2 = a^2 + c^2 - 2m^2$$
Y remplazando valores, se tendrá:
$$2d^2 = 30^2 + 40^2 - 2\left(\frac{33}{2}\right)^2 = 1955{,}5$$
$$d = \sqrt{977{,}75} = 31{,}7 \text{ cm } \textit{por exceso}$$
$$\mathbf{BD} = 2d = \mathbf{63{,}4\ cm}\ \textit{por exceso.}$$

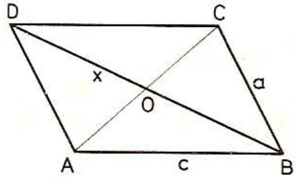


Fig. 250

V. Relaciones métricas en la circunferencia

306. Dada una circunferencia O, se trazan dos cuerdas paralelas a un mismo lado del centro, una de 15 cm y otra de 25 cm. Si distan entre sí 8 cm, ¿cuál será el radio de esa circunferencia? (fig. 251).

Sea R *el radio y* x *la distancia* OA. *En los triángulos rectángulos* ODC *y* OAB *tendremos:*

$$\mathrm{OD}^2 + \mathrm{DC}^2 = \mathrm{OC}^2 \quad \textit{o bien} \quad (x+8)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \mathrm{R}^2 \qquad (1)$$
$$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{OB}^2 \quad \textit{o bien} \quad x^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \mathrm{R}^2 \qquad (2)$$

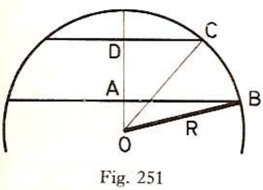


Fig. 251

de donde
$$x^2 + 16x + 64 + \frac{225}{4} = x^2 + \frac{625}{4}$$
$$16x = \frac{625 - 225}{4} - 64 = 36$$
$$x = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

Sustituyendo en (2) $$\mathbf{R} = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{625}{4}} = \frac{\sqrt{2581}}{4} = \mathbf{12{,}7\ cm}$$

307. Dadas dos cuerdas paralelas cuyas longitudes respectivas son 24 y 32 cm y su distancia 4 cm, hallar el radio de la circunferencia a que pertenecen y la distancia a que están del centro.

Sean R *el radio y* x *la distancia* OA (fig. 251).

- 1.º *Los triángulos rectángulos* ODC *y* OAB *darán:*

$$OD^2 + DC^2 = OC^2$$
$$OA^2 + AB^2 = OB^2$$

o sea
$$(x + 4)^2 + 12^2 = R^2 \qquad (1)$$
$$x^2 + 16^2 = R^2 \qquad (2)$$

de donde
$$(x + 4)^2 + 144 = x^2 + 256$$
$$x^2 + 8x + 16 + 144 = x^2 + 256$$
$$\mathbf{x = 96 : 8 = 12\ cm;} \qquad \mathbf{x + 4 = 16\ cm}$$

- 2.º *Sustituyendo en* (2): $144 + 256 = R^2$

de donde $$\mathbf{R = \sqrt{400} = 20\ cm}$$

308. En una circunferencia O y diámetro AB = 17 cm se traza una cuerda AM = 8 cm. Calcular su proyección sobre AB, la ordenada MP y la cuerda MB (figura 252).

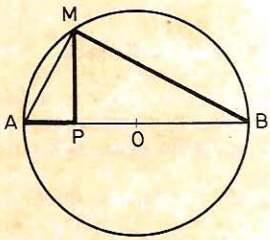


Fig. 252

Tenemos:
$$AM^2 = AB \times AP$$

de donde $$\mathbf{AP} = \frac{AM^2}{AB} = \frac{64}{17} = \mathbf{3{,}765\ cm}$$

$$PB = 17 - \frac{64}{17} = \frac{225}{17}$$

$$MP^2 = AP \times PB = \frac{64}{17} \times \frac{225}{17}$$

$$\mathbf{MP} = \sqrt{\frac{64}{17} \times \frac{225}{17}} = \frac{8 \times 15}{17} = \mathbf{7{,}06\ cm}$$

$$\mathbf{MB} = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = \mathbf{15\ cm}$$

309. Calcular el diámetro de una circunferencia conociendo una cuerda de la misma, $2c = 12$ cm y la sagita correspondiente $a = 4$ cm (fig. 253).

Por la propiedad de las cuerdas que se cortan:

$$6 \times 6 = 4x$$
$$x = \frac{36}{4} = 9$$

Diámetro: $4 + 9 = \mathbf{13\ cm}$

310. ¿A qué distancia del centro se halla una cuerda de 2,72 m en una circunferencia de 3,65 m de radio?

La distancia pedida es el cateto de un triángulo rectángulo; por tanto,

$$\mathbf{x} = \sqrt{3{,}65^2 - 1{,}36^2} = \mathbf{3{,}38\ m}$$

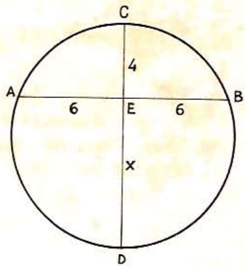


Fig. 253

311. En una circunferencia de 2,25 m de radio se traza una cuerda AB = a de 3 m. Calcular la cuerda que subtiende un arco que es la mitad que el anterior (fig. 254).

Sea AC *la cuerda pedida,* AB *la cuerda de arco doble y* OA *el radio.*

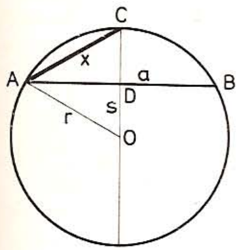


Fig. 254

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$
$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{2{,}25^2 - 1{,}5^2} = 1{,}68\ m$$
$$DC = OC - OD = 2{,}25 - 1{,}68 = 0{,}57\ m$$
$$\mathbf{AC} = \sqrt{1{,}5^2 + 0{,}57^2} = \mathbf{1{,}605\ m}$$

312. Una tangente y una secante parten desde un mismo punto; la tangente tiene 18 m y el segmento interior de la secante, 23. ¿Cuál es su segmento exterior?

Llamemos x *al segmento exterior, y tendremos la ecuación:*

$$(x + 23)\,x = 18^2$$

de donde

$$\mathbf{x = 9{,}86\ m}$$

313. En una circunferencia de 1,5 m de radio, una secante que pasa por el centro tiene 3,5 m de longitud. Calcular la tangente que parte del mismo punto.

Sea x *la tangente.*

El segmento exterior de la secante mide:

$$3{,}5 - 1{,}5 \times 2 = 0{,}5\ m$$

Luego

$$x^2 = 3{,}5 \times 0{,}5 = 1{,}75$$

de donde

$$\mathbf{x} = \sqrt{1{,}75} = \mathbf{1{,}32\ m}$$

314. El diámetro de una circunferencia tiene 32,5 m. Si se prolonga 4,5 m, ¿cuál será la longitud de la tangente trazada desde este extremo?

Sea x *la longitud de la tangente.*

Tenemos

$$x^2 = (32{,}5 + 4{,}5) \times 4{,}5$$
$$\mathbf{x = 12{,}9\ m}$$

315. El diámetro de una circunferencia es de 25,4 cm. ¿Cuánto habrá que prolongarle para que la tangente trazada desde el extremo tenga 12 cm?

Sea x *esa prolongación. Tendremos que*

$$12^2 = x\,(x + 25{,}4)$$

de donde $\mathbf{x = 4{,}77\ cm}$

316. Dos secantes parten de un mismo punto fuera de una circunferencia; se da la parte externa m y la interna n de una y la parte externa m' de la otra. Calcular la porción interna de ésta.

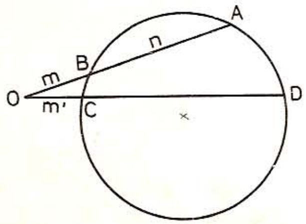


Fig. 255

Sea OB = m, AB = n *y* OC = m' (figura 255).

Tendremos: OA × OB = OD × OC

o bien $(m + n)\,m = \mathrm{OD} \times m'$

de donde $\mathrm{OD} = \dfrac{(m + n)\,m}{m'}$

OD *es una cuarta proporcional entre* (m + n), m *y* m'.

La porción interior DC = OD − OC, *o bien*

$$\mathbf{DC = \frac{(m + n)\,m}{m'} - m'}$$

317. Dos secantes parten desde un mismo punto; los segmentos interior y exterior de la primera tienen respectivamente 13 y 23 m, el segmento exterior de la segunda, 17. Calcular el segmento interior de ésta.

Llamemos x *al segmento interior. Tenemos* (GEOM. **375**)

$$(x + 17)\,17 = (23 + 13)\,23$$
$$\mathbf{x = 31{,}7\ m}$$

318. En dos cuerdas que se cortan, los dos segmentos de la una tienen respectivamente 15 y 10 m de longitud: Calcular los dos segmentos de la otra, siendo su longitud de 28 m.

Sean los segmentos: x *y* 28 − x. *Tenemos* (GEOM. **375**):

$$x\,(28 - x) = 15 \times 10; \quad \mathbf{x = 20{,}78\ m}$$
$$\mathbf{28 - x} = 28 - 20{,}78 = \mathbf{7{,}22\ m}$$

319. Una cuerda, CD, corta al diámetro AB en el punto medio O del radio, y los dos segmentos OC y OD en que queda dividida son entre sí como 1 es a 2. Hallar el valor de estos dos segmentos en función del R de la circunferencia.

Sea x *el segmento* OC, OD *será* 2x; *tendremos:*

$$x \times 2x = \frac{R}{2} \times \frac{3R}{2}$$

$$x^2 = \frac{3R^2}{4 \times 2} = \frac{6R^2}{16}$$

de donde: $x = \mathbf{OC} = \dfrac{\mathbf{R\sqrt{6}}}{\mathbf{4}}; \quad \mathbf{OD} = \dfrac{\mathbf{R\sqrt{6}}}{\mathbf{2}}$

320. En una circunferencia de 17 cm de radio, dos cuerdas se cortan de manera que el producto de los segmentos de cada una es 145 cm. Calcular a qué distancia del centro se halla el punto de intersección.

Sea x *la distancia buscada. Por el punto de intersección se traza un diámetro* AB (fig. 256), *los dos segmentos de este diámetro serán* R + x *y* R − x.

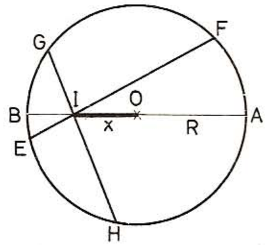


Fig. 256

$$(R + x)(R - x) = 145$$

$$R^2 - x^2 = 145$$

o sea $$289 - x^2 = 145$$

$$\mathbf{x} = \sqrt{289 - 145} = \mathbf{12\ cm}$$

321. En una circunferencia (fig. 257) trazamos una cuerda, AB = 40 cm, que prolongamos después una porción BC = 16 cm; además trazamos una secante, CDE, que pasa por el centro. Calcular:

1.º El radio de la circunferencia sabiendo que la sección externa CD = 14 centímetros.

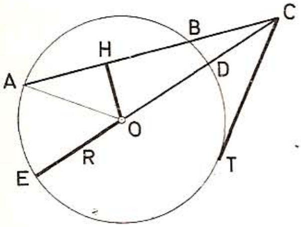


Fig. 257

2.º La tangente CT y la distancia OH de la cuerda AB al centro de la circunferencia.

● 1.º $(40 + 16) \times 16 = (2R + 14) \times 14$

de donde $\mathbf{R = 25\ cm}$

● 2.º $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 25^2 - 20^2 = 225$

de donde $\mathbf{OH = 15\ cm}$

● 3.º $CT^2 = AC \times BC = 56 \times 16 = 896$

de donde $\mathbf{CT = 29{,}93\ cm}$

322. Se traza una tangente, AB = 6,5 cm, a una circunferencia, y desde B se traza a la misma circunferencia una secante BCD (fig. 258), tal que la parte externa BC = 2,5 cm.

1.º Calcúlese la cuerda CD.

2.º Dígase si la cuerda AD pasará o no por el centro de la circunferencia.

3.º Hállese el radio de ésta.

● 1.º *Sea* x *la cuerda* CD. *Tendremos:*

$$(x + 2{,}5)\,2{,}5 = 6{,}5^2$$

de donde $\mathbf{x = CD = 14{,}4\ cm}$

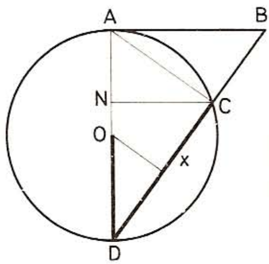


Fig. 258

● 2.º *Si* AD *es diámetro, los triángulos* DAB, ACD *y* ACB *son rectángulos y se debe tener:*

$$AC^2 = DC \times CB = AB^2 - BC^2$$

sustituyendo valores

$$AC^2 = 14{,}4 \times 2{,}5 = 6{,}5^2 - 2{,}5^2$$

vemos que las igualdades se realizan.

Luego **AD es un diámetro.**

- 3.º $4R^2 = AD^2 = BD \times CD$

de donde $2R = AD = \sqrt{(14{,}4 + 2{,}5)\,14{,}4} = \sqrt{243{,}36} = 15{,}6$

$$\mathbf{R} = \frac{15{,}6}{2} = \mathbf{7{,}80\ cm}$$

323. A una circunferencia de diámetro AOD = 40 cm se traza en A una tangente AB = 30 cm y se unen B y D con un segmento que corta a la circunferencia en C. Calcular los segmentos BD, BC, AC y la proyección de DC sobre el diámetro AD (fig. 258).

- 1.º $\mathbf{BD} = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = \mathbf{50\ cm}$
- 2.º $BC \times BD = AB^2$; $\mathbf{BC} = \frac{900}{50} = \mathbf{18\ cm}$
- 3.º $CD = 50 - 18 = 32$
  $AC^2 = CD \times BC = 32 \times 18$
  $\mathbf{AC} = \sqrt{32 \times 18} = \mathbf{24\ cm}$
- 4.º *Los triángulos rectángulos semejantes* BAD *y* CND *dan:*

$$\frac{ND}{AD} = \frac{CD}{BD}; \quad \mathbf{ND} = \frac{AD \times CD}{BD} = \frac{40 \times 32}{50} = \mathbf{25{,}6\ cm}$$

324. En una circunferencia de 6 cm de radio (fig. 259) se trazan el diámetro EF y el radio AO, perpendiculares entre sí. Sobre el radio OF se toma OD = 4,5 cm, se traza la cuerda ADB, el segmento BH perpendicular a EF y OM perpendicular a AB. Calcular los segmentos AD, DB, BH y OM.

- 1.º $\mathbf{AD} = \sqrt{R^2 + OD^2} = \sqrt{36 + 20{,}25} = \mathbf{7{,}5\ cm}$
- 2.º $AD \times DB = ED \times DF = 10{,}5 \times 1{,}5$

$$\mathbf{DB} = \frac{10{,}5 \times 1{,}5}{7{,}5} = \mathbf{2{,}1\ cm}$$

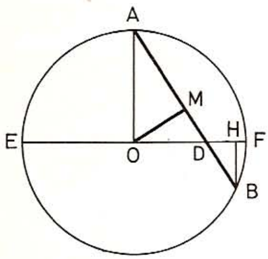


Fig. 259

- 3.º *Los triángulos rectángulos* AOD *y* BHD *son semejantes (ángulos respectivamente iguales).*

Luego $$\frac{BH}{OA} = \frac{BD}{AD}$$

$$\mathbf{BH} = \frac{OA \times BD}{AD} = \frac{6 \times 2{,}1}{7{,}5} = \mathbf{1{,}68\ cm}$$

- 4.º $OM^2 = R^2 - \left(\frac{AD + DB}{2}\right)^2$

$$\mathbf{OM} = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} = \sqrt{12{,}96} = \mathbf{3{,}6\ cm}$$

325. A una circunferencia de 7 cm de radio se traza una tangente AB = 24 cm en el punto A. Determinar la longitud de la secante BOD que pasa por el centro.

Sea x *la parte externa de la secante dada; de la relación*

$$(2R + x)\,x = AB^2 \quad \textit{o bien} \quad (14 + x)\,x = 24^2$$

se deduce
$$x^2 + 14x - 576 = 0$$

de donde
$$x = 18$$

$$\mathbf{BOD} = 18 + 14 = \mathbf{32\ cm}$$

326. Dada una circunferencia O (fig. 260) de radio R, en ella tomamos un sector AOB de 60° y en los extremos de cada radio OA, OB, trazamos una tangente; desde el punto de intersección de éstas describimos, con O′A por radio, otra circunferencia O′ y en ella tomamos también un sector A′O′B′ de 60°, y desde el punto O″ donde concurren las tangentes A′O″ y B′O″ describimos otra circunferencia O″ y así sucesivamente. Calcular el valor de los radios AO′, A′O″, A″O‴, etc., en función de AO = R.

AB *en el círculo* O *es el lado del exágono inscrito.*

Luego $$AB = R$$

AB *en el círculo* O′ *es el lado del triángulo equilátero inscrito.*

Luego $$AB = R'\sqrt{3}$$

Por tanto $$R'\sqrt{3} = R$$

$$R' = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

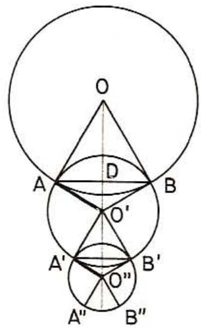


Fig. 260

Del mismo modo hallaríamos que

$$R'' = \frac{R'\sqrt{3}}{3}; \quad R''' = \frac{R''\sqrt{3}}{3}\ \textit{etc.}$$

Y, en función de R:

$$R'' = \frac{R\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{3}$$

$$R''' = \frac{R}{3\sqrt{3}},\ \textit{etc.}$$

Por donde se ve que los valores de los radios

$$\mathbf{R}; \quad \mathbf{R'} = \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{\mathbf{3}}}; \quad \mathbf{R''} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{3}}; \quad \mathbf{R'''} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}},\ \textit{etc.}$$

forman una progresión geométrica decreciente cuya razón es $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

327. En una circunferencia de radio R se trazan dos cuerdas AB y CD que se cortan en el punto I. Si AI = R/4 y BI = 4 R/3 y la segunda cuerda es igual a 7R/6, calcular CI y DI.

Sea x *el segmento* CI, DI *será* $\frac{7R}{6}$ – x *y tendremos:*

$$x\left(\frac{7R}{6}-x\right)=\frac{R}{4}\times\frac{4R}{3}$$

o sea
$$x^2-\frac{7R}{6}x+\frac{R^2}{3}=0$$

$$x=\mathbf{CI}=\frac{\mathbf{2R}}{\mathbf{3}}\quad y\quad \mathbf{DI}=\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2}}$$

328. Dada una circunferencia O, hallar sobre la prolongación del radio OA un punto P tal, que la tangente PB = 2PA.

Sea AP = x; PB *será* 2x, *y tendremos:*

$$4x^2=x\,(2R+x)=2Rx+x^2$$

o sea
$$3x^2=2Rx$$

de donde
$$x=\mathbf{AP}=\frac{\mathbf{2R}}{\mathbf{3}}$$

329. Dos circunferencias son tangentes exteriores; la distancia de los centros es 36 cm y la tangente común tiene 28 cm. Calcular los dos radios.

Sea AB (fig. 261), *la tangente y* O′D *una paralela a ésta:*

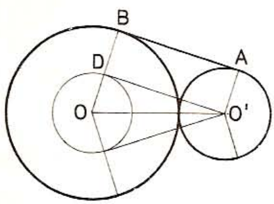


Fig. 261

$$OD=R-R'\quad y\quad OO'=R+R'$$

En el triángulo rectángulo OO′D:

$$(R-R')^2=(R+R')^2-O'D^2=36^2-28^2$$

o sea
$$R-R'=16\sqrt{2}$$

pero
$$R+R'=36$$

por tanto
$$\mathbf{R}=18+8\sqrt{2}=\mathbf{19{,}31\ cm}$$

y
$$\mathbf{R'}=18-8\sqrt{2}=\mathbf{6{,}69\ cm}$$

330. Los radios de dos circunferencias tienen 6 cm y 10 cm y la distancia de los centros OO′ es de 20 cm. Calcular el valor de la porción de tangente común AB limitada por los puntos de tangencia y la distancia IE entre los puntos donde las tangentes exteriores e interiores encuentran la recta que pasa por los centros (fig. 262).

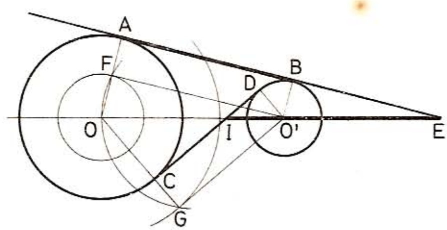


Fig. 262

● 1.º *Tracemos* O′F *paralela a* AB *y* O′G *paralela a* CD

$$\mathbf{AB}=FO'=\sqrt{OO'^2-(R-R')^2}=\sqrt{20^2-4^2}=\mathbf{19{,}596\ cm}$$
$$\mathbf{CD}=GO'=\sqrt{OO'^2-(R+R')^2}=\sqrt{20^2-16^2}=\mathbf{12\ cm}$$

2.º *Por ser* $\triangle OO'F \sim \triangle OEA$: $\dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OO'}{OF}$

de donde $$OE = \frac{OO' \times OA}{OF} = \frac{OO' \times R}{R - R'}$$

$$OE = \frac{20 \times 10}{4} = 50 \text{ cm}$$

Por ser $\triangle OIC \sim \triangle OO'G$: $\dfrac{OI}{R} = \dfrac{OO'}{OG}$

de donde $$OI = \frac{OO' \times R}{R + R'} = \frac{20 \times 10}{16} = 12{,}50 \text{ cm}$$

y $$\mathbf{IE} = OE - OI = 50 - 12{,}50 = \mathbf{37{,}50\ cm}$$

331. Dos circunferencias cuyos radios tienen 8 cm y 12 cm se cortan ortogonalmente (fig. 263). Calcular el valor de la tangente común.

Al ser las dos circunferencias ortogonales los radios OA, O'A *del punto de intersección forman ángulo recto en este punto. El triángulo* O'AO *es rectángulo en* A *y*

$$OO'^2 = R^2 + R'^2 = 12^2 + 8^2 = 208 \text{ cm}^2$$
$$O'D^2 = BC^2 = OO'^2 - (R - R')^2 = 208 - 16 = 192 \text{ cm}^2$$
$$\mathbf{O'D} = \mathbf{BC} = \sqrt{192} = \mathbf{13{,}86\ cm}$$

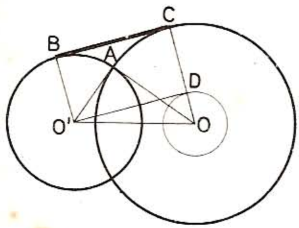


Fig. 263

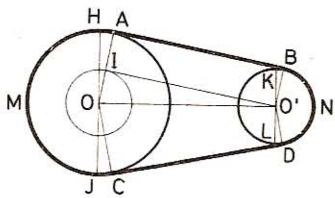


Fig. 264

332. Calcular la longitud de la correa de transmisión de dos ruedas cuyos radios son de 8 y 12 cm, si la distancia de los centros es de 49 cm (fig. 264).

a) **Las correas son tangentes exteriores.**

1.º *Cálculo de las tangentes* AB *y* CD.

Tracemos los radios paralelos OA *y* O'B, OC *y* O'D *a los puntos de contacto, la recta* O'I *paralela a* BA *y los diámetros* HOJ *y* KO'L *perpendiculares a* OO'.

$$OI = OA - IA = OA - O'B = 12 - 8 = 4 \text{ cm}$$

El triángulo rectángulo OIO' *da*

$$O'I = \sqrt{OO'^2 - OI^2} = \sqrt{49^2 - 4^2} = 48{,}836 \text{ cm}$$

Por tanto: $$AB + CD = 48{,}836 \times 2 = 97{,}672 \text{ cm}$$

2.º *Cálculo de los arcos* AMC *y* BND.

$$\mathrm{Tg\ AOO'} = \frac{\mathrm{O'I}}{\mathrm{OI}} = \frac{48{,}836}{4} = 12{,}209$$

$$\log \mathrm{tg\ AOO'} = \log 12{,}209 = 1{,}086680$$
$$\angle \mathrm{AOO'} = 85^\circ\, 19'\, 3''$$

$$\angle \mathrm{BO'D} = \angle \mathrm{AOC} = 2 \cdot \angle \mathrm{AOO'} = 89^\circ\, 19'\, 3'' \times 2 = 170^\circ\, 38'\, 6''$$
$$\angle \mathrm{AOC(M)} = 360 - 170^\circ\, 38'\, 6'' = 189^\circ\, 21'\, 54''$$

$$\textit{Longitud de } \widehat{\mathrm{BND}} = \frac{\pi \times 8 \times 170^\circ\, 38'\, 6''}{180} = 23{,}825 \text{ cm}$$

$$\textit{Longitud de } \widehat{\mathrm{AMC}} = \frac{\pi \times 12 \times 189^\circ\, 21'\, 54''}{180} = 39{,}661 \text{ cm}$$

Longitud de la correa: 97,672 + 23,825 + 39,661 = **161,158 cm.**

b) **Las correas son tangentes interiores.**

1.º *Cálculo de las tangentes* AB *y* CD (figura 265).

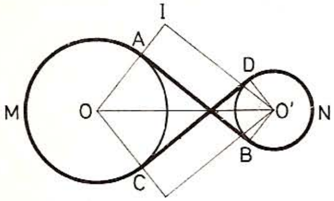


Fig. 265

Tracemos O'I *paralela a* AB *y prolonguemos* OA.

En el triángulo rectángulo OO'I *tendremos:*

$$\mathrm{O'I} = \sqrt{\mathrm{OO'}^2 - \mathrm{OI}^2} = \sqrt{49^2 - 20^2} = 44{,}733 \text{ cm}$$

2.º *Cálculo de los arcos* BND *y* AMC

$$\mathrm{Tg\ AOO'} = \frac{44{,}733}{20} = 2{,}23665$$

$$\log \mathrm{tg\ AOO'} = \log 2{,}23665 = 0{,}349598$$
$$\angle \mathrm{AOO'} = 65^\circ\, 54'\, 38{,}5''$$

$$\widehat{\mathrm{AMC}} = \widehat{\mathrm{BND}} = 360^\circ - 2 \times 65^\circ\, 54'\, 38{,}5'' = 228^\circ\, 10'\, 43''$$

$$\mathrm{Long}\ (\widehat{\mathrm{AMC}} + \widehat{\mathrm{BND}}) = \frac{\pi \times 8 \times 228^\circ\, 10'\, 43''}{180} + \frac{\pi \times 12 \times 228^\circ\, 10'\, 43''}{180}$$
$$= \frac{\pi \times 228^\circ\, 10'\, 43''\ (8 + 12)}{180} = 79{,}65 \text{ cm}$$

Longitud de la correa: 44,733 × 2 + 79,65 = **169,116 cm.**

333. Dos poleas están unidas con una correa. El radio OA de la polea mayor tiene 12 cm y forma con la línea OO' de los centros un ángulo de 60º. El radio de la polea menor tiene 3 cm. Se traza O'I paralela a la tangente AB. Demostrar que OO' = 2 OI. Se desea saber, además:

1.º La longitud de OO'.
2.º La longitud de las tangentes AB y CD.
3.º La longitud de la correa.

a) **La correa es tangente exterior** (figura 266).

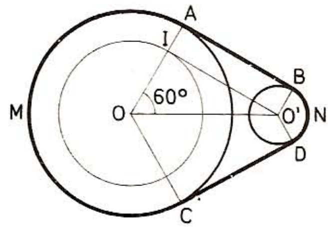


Fig. 266

- 1.º $\angle$ O'OA = 60º, *luego el triángulo rectángulo* O'OI *es un semitriángulo equilátero; por tanto,* **OO' = 2 OI.**
- 2.º OI = R − R' = 12 − 3 = 9 cm
  OO' = 9 × 2 = 18 cm

$$\mathbf{CD} = \mathbf{AB} = \mathrm{IO'} = \sqrt{18^2 - 9^2} = \mathbf{9\sqrt{3}} = \mathbf{15{,}588\ cm}$$

- 3.º $\angle$ BO'D = $\angle$ AOC *(misma especie y lados paralelos)*

$$\angle \mathrm{AOC} = 60^{\circ} \times 2 = 120^{\circ}$$

$$\widehat{\mathrm{BND}} = 120^{\circ} \quad y \quad \widehat{\mathrm{AMC}} = 360^{\circ} - 120^{\circ} = 240^{\circ}$$

$$\textit{Longitud}\ \widehat{\mathrm{BND}} = \frac{\pi \times 3 \times 120}{180} = 6{,}2832\ \mathrm{cm}$$

$$\textit{Longitud}\ \widehat{\mathrm{AMC}} = \frac{\pi \times 12 \times 240}{180} = 50{,}2656\ \mathrm{cm}$$

Longitud de la correa: (15,588 × 2) + 6,2832 + 50,2656 = **87,7248 cm.**

b) **La correa es tangente interior** (fig. 265).

- 1.º OI = R + R' = 15 cm; **OO' = 2 × OI = 30 cm**
- 2.º **CD = AB** = O'I = $\sqrt{30^2 - 15^2}$ = **15 $\sqrt{3}$ cm**
- 3.º *Los ángulos obtusos* AOC *y* BO'D *son iguales (misma especie y lados paralelos) y miden* 360º − (2 × 60º) = 240º.

$$\textit{Longitud}\ \widehat{\mathrm{AMC}} = \frac{\pi \times 12 \times 240}{180} = 16\,\pi\ \mathrm{cm}$$

$$\textit{Longitud}\ \widehat{\mathrm{BND}} = \frac{\pi \times 3 \times 240}{180} = 4\,\pi\ \mathrm{cm}$$

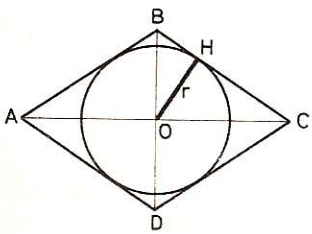


Fig. 267

Longitud de la correa:

$$15\sqrt{3} \times 2 + 20\pi = \mathbf{114{,}792\ cm.}$$

334. Hallar el radio de la circunferencia inscrita en un rombo cuyas diagonales tienen: AC = D = 9 m y BD = d = 6 m.

Sea O *(fig. 267) el centro del rombo y de la circunferencia inscrita, la perpendicular* OH *al lado será el radio* r *de la misma.*

$$\mathrm{BC} = \sqrt{\mathrm{OC}^2 + \mathrm{OB}^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 3^2} = 5{,}40\ \mathrm{m}$$

Dos expresiones del doble del área del $\triangle$OBC:

$$BC \times r = OC \times OB$$

$$\mathbf{r} = \frac{OC \times OB}{BC} = \frac{4{,}5 \times 3}{5{,}40} \simeq \mathbf{2{,}5\ cm}$$

335. Sean dos circunferencias O y O′ (fig. 268) exteriores, de radios $R = 16$ cm y $r = 4$ cm y la distancia de los centros $OO' = 31$ cm. Sea S el punto en la prolongación de OO′, en que se cortan las tangentes exteriores y S′, en la misma línea de los centros, donde se cortan las tangentes interiores. Calcular la distancia SS′.

- 1.º Cálculo de SO′ en función de R, r y d.—*Los triángulos* SA′O′, SAO *son semejantes y podremos escribir:*

$$\frac{SO'}{SO} = \frac{r}{R} \quad \textit{o bien} \quad \frac{SO'}{SO' + d} = \frac{r}{R}$$

de donde

$$SO' \times R = SO' \times r + dr$$

$$SO'\,(R - r) = dr$$

$$SO' = \frac{dr}{R - r}$$

- 2.º Cálculo de S′O′ en función de R, r y d.—$\triangle S'B'O' \sim \triangle S'BO$ *luego*

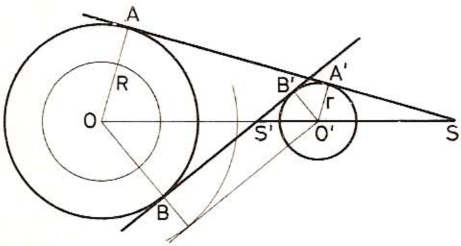


Fig. 268

$$\frac{S'O'}{S'O} = \frac{r}{R}$$

remplazando S′O *por* d − S′O′:

$$\frac{S'O'}{d - S'O'} = \frac{r}{R}$$

$$S'O' \times R = dr - S'O' \times r$$

$$S'O'(R + r) = dr$$

$$S'O' = \frac{dr}{R + r}$$

- 3.º Cálculo de $SS' = SO' + S'O' = \dfrac{dr}{R - r} + \dfrac{dr}{R + r}$

$$\mathbf{SS'} = \frac{dRr + dr^2 + dRr - dr^2}{R^2 - r^2} = \frac{\mathbf{2dRr}}{\mathbf{R^2 - r^2}}$$

Aplicación numérica:

$$\mathbf{SS'} = \frac{2 \times 31 \times 16 \times 4}{256 - 16} = \mathbf{16{,}5\ cm}$$

VI. Construcciones gráficas

336. Por un punto A, exterior al ángulo O, trazar una secante ABC, tal que sea $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{5}$.

Sea AC (fig. 269) *la recta en la cual*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{2}{5}$$

Si trazamos AD *paralela a* OC, *tendremos:*

$$\frac{DB}{DO} = \frac{2}{5}$$

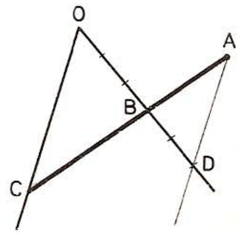


Fig. 269

de aquí la construcción siguiente: Se traza la paralela AD *a la* OC, *se divide* OD *en cinco partes iguales y se une el punto* A *con la segunda división a partir de* D, *obteniéndose con esto*

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DO} = \frac{2}{5}$$

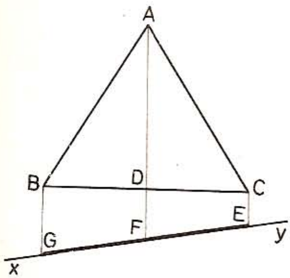


Fig. 270

337. Dado el triángulo ABC (fig. 270) y una recta cualquiera xy, trazar por los vértices A, B, C tres paralelas que determinen en xy dos segmentos iguales.

Sean CE, AF, BG *las paralelas pedidas; dichas rectas dividen también al lado* BC *en partes iguales; por tanto,* AD *es la mediana del triángulo* ABC. *Bastará, pues, trazar esta mediana y las paralelas a ésta,* CE *y* BG.

338. Construir un octógono regular dada la distancia entre dos lados paralelos.

El problema se reduce a construir un octógono regular inscrito en un cuadrado dado, pues la distancia entre dos lados paralelos no es otra que el lado del cuadrado. De ahí la construcción siguiente (fig. 271).

1.º *Se traza el cuadrado* ABCD *de lado* d *(distancia dada).*

2.º *A partir de los puntos medios* MNPQ *de los lados del cuadrado, se llevan los segmentos* ME = MF = NG = NH = PI = PJ = QK = QL = $= d/2\ (\sqrt{2} - 1)$.

3.º *Se trazan los segmentos* EL, FG, HI, JK. *El octógono* EFGHIJKL *es el octógono pedido.*

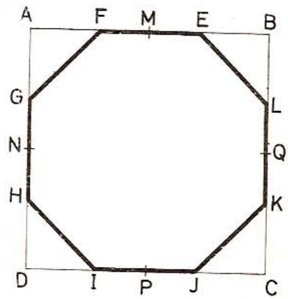


Fig. 271

En efecto: los triángulos rectángulos FAG, HDI, JCK *y* LBE *son isósceles; sus ángulos agudos miden todos* 45º.

Luego

$$\angle E = \angle F = \angle G = \angle H = \angle I = \angle J = \angle K = \angle L = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Por construcción $EF = GH = IJ = KL = 2 \times d/2\,(\sqrt{2} - 1) = d(\sqrt{2} - 1)$

y $\quad EL = KJ = IH = GF = \sqrt{EB^2 + BL^2} = \sqrt{2EB^2} = EB\sqrt{2}$

y $\quad EB = MB - ME = \dfrac{d}{2} - \dfrac{d}{2}(\sqrt{2} - 1) = \dfrac{d}{2}(2 - \sqrt{2})$

Luego $\quad EL = KJ = \ldots = d/2\,(2 - \sqrt{2})\sqrt{2} = d(\sqrt{2} - 1) = EF = GH = \ldots$

Otro método. — *Se traza una circunferencia* (fig. 272) *de radio* d/2, *se divide en* 8 *partes iguales y por los puntos de división se trazan tangentes. Las intersecciones de dos tangentes consecutivas dan los vértices del octógono.*

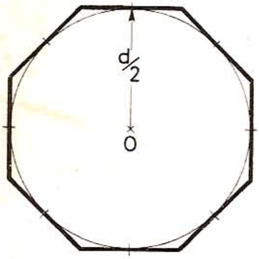


Fig. 272

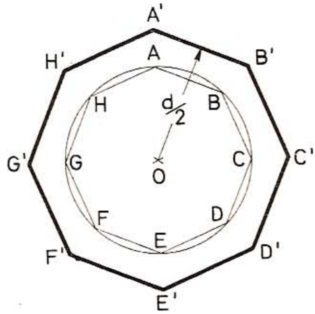


Fig. 273

Otro método. — *Se traza una circunferencia* (fig. 273) *de radio cualquiera y se inscribe un octógono regular* ABCDEFGH.

Luego a la distancia d/2 *del centro se trazan paralelas a los lados del octógono inscrito. Se obtiene el octógono* A'B'C'D'E'F'G'H' *pedido.*

339. Dos circunferencias se cortan en los puntos A y B. Trazar por A una secante común que quede dividida, por el referido punto, en dos segmentos iguales, y por B otra secante EF tal, que EB = BF/3.

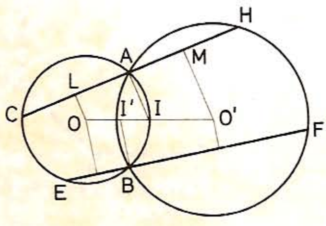


Fig. 274

Sea la secante CH (fig. 274) *tal que*

$$\frac{CA}{AH} = \frac{m}{n}$$

Tracemos OL, IA, O'M *perpendiculares a* CH; *éstas dividirán a* LM *y* OO' *en partes proporcionales; pero* L *y* M *son los puntos medios de las cuerdas* CA *y* AH, *por tanto*

$$\frac{OI}{O'I} = \frac{LA}{AM} = \frac{CA}{AH} = \frac{m}{n}$$

Bastará, pues, dividir OO′, *de modo que* $\frac{OI}{O'I} = \frac{m}{n}$, *trazar la recta* IA *y la* CAH *perpendicular a* IA.

- 1.º *Para* CA = AH *será* OI = O′I
- 2.º *Para* $EB = \frac{BF}{3}$ $OI' = \frac{O'I'}{3}$

340. Dado un exágono irregular ABCDEF (fig. 275), constrúyase otro exágono semejante AB′C′D′E′F′ de igual vértice A y tal que su perímetro sea: *a*) las dos terceras partes del perímetro del exágono dado; y *b*) el doble de dicho perímetro.

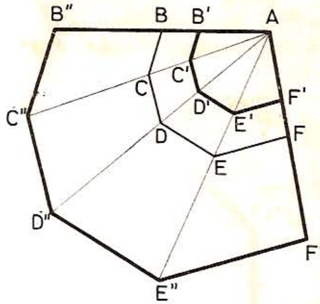


Fig. 275

- *a*) **Exágono de perímetro 2/3.**

En el exágono dado, únase el vértice A *con cada uno de los demás* C, D, E. *En el lado* AB *se toma una distancia*

$$AB' = \frac{2AB}{3}$$

Por B′ *se traza una paralela a* BC, *con lo que queda determinado el punto* C′; *por* C′ *una paralela a* CD *y así sucesivamente. El exágono* AB′C′D′E′F′ *es el pedido, puesto que es homotético con el dado y de razón* 2/3.

- *b*) **Exágono de perímetro doble.**—*Se procede como en el caso anterior después de haber prolongado* AB *y tomado en esta prolongación un segmento* AB″ = 2AB.

341. Dada una circunferencia O (fig. 276) y un punto M exterior a la misma, trazar desde él una secante MCD, tal que la circunferencia descrita con la cuerda CD como diámetro sea tangente al diámetro ABM de la circunferencia dada.

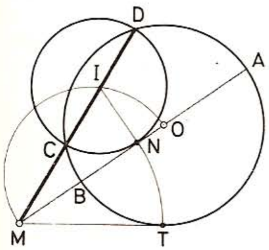


Fig. 276

La tangente MT *y las secantes* MA *y* MD *dan:*

$$MT^2 = MA \times MB = MD \times MC$$

Mas MN *deberá ser tangente a la circunferencia de diámetro* CD, *y dará:*

$$MN^2 = MD \times MC$$

Por consiguiente, MN = MT.

Pero el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas trazadas desde M *es el arco de circunferencia de diámetro* OM *interior a la circunferencia dada* **(180 bis)** *y el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes en* N *a la recta* MA *es la perpendicular* NI *a* MA. *El centro que se busca estará, por tanto, en la intersección* I *de los dos lugares geométricos descritos.*

VII. Relaciones

342. Desde los extremos A y B (fig. 277) de un segmento AB se trazan AC y BD perpendiculares a una recta *xy*. Demostrar que el punto O, medio de AB, equidista de C y D.

Por el punto medio O *de la recta* AB *trazamos la perpendicular* OE *a la recta* xy; *esta recta* OE, *paralela a* AC *y* BD, *divide a* AB *y* CD *en la misma relación; por tanto,* CE = DE.

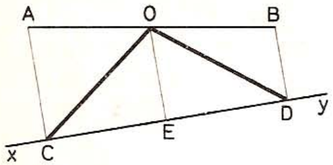


Fig. 277

Las oblicuas OC *y* OD *cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular* EO *son iguales.*

343. En un triángulo rectángulo la suma de los inversos de los cuadrados de los catetos es igual al inverso del cuadrado de la altura

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$

En efecto, dividiendo por b^2c^2 *los dos miembros de la igualdad*

$$b^2 + c^2 = a^2$$

tenemos:
$$\frac{b^2}{b^2c^2} + \frac{c^2}{b^2c^2} = \frac{a^2}{b^2c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \qquad (1)$$

pero
$$\left.\begin{aligned} b^2 &= am \\ c^2 &= an \\ h^2 &= mn \end{aligned}\right\} \; b^2c^2 = a^2mn = a^2h^2$$

Remplazando en (1):
$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}} = \frac{a^2}{a^2h^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{h^2}}$$

344. La proyección del punto medio de un cateto sobre la hipotenusa determina sobre ésta dos segmentos, cuya diferencia de cuadrados es igual al cuadrado del otro cateto (fig. 278).

Sea BD = m, DC = n; *los triángulos rectángulos* OAB, BDO *y* ODC *darán:*

$$OB^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} = m^2 + OD^2$$

de donde
$$m^2 = c^2 + \frac{b^2}{4} - OD^2 \qquad (1)$$

y
$$n^2 = \frac{b^2}{4} - OD^2 \qquad (2)$$

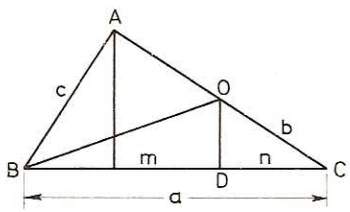


Fig. 278

Restando (2) *de* (1): $\mathbf{m^2 - n^2 = c^2}$

345. Sea un triángulo rectángulo ABC (fig. 279) inscrito en la circunferencia O. Desde un punto D del diámetro BC trazamos una perpendicular, la cual corta a la circunferencia en F y a los dos lados AC y AB en los puntos E y G respectivamente. Demostrar que

$$DF^2 = ED \times GD$$

Por ser $\triangle DCE \sim \triangle DGB$: $\dfrac{ED}{BD} = \dfrac{CD}{GD}$

de donde $ED \times GD = BD \times CD$

Pero $BD \times DC = DF^2$

por consiguiente, $\mathbf{DF^2 = ED \times GD}$

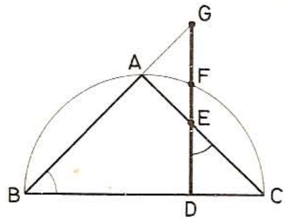


Fig. 279

346. La diferencia entre los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual a la diferencia entre los cuadrados de sus proyecciones sobre el tercer lado.

Sea HC = m, BH = n, AH = h. *Se tendrá:*

$$b^2 = m^2 + h^2$$
$$c^2 = n^2 + h^2$$

Restando: $\mathbf{b^2 - c^2 = m^2 - n^2}$

347. En dos triángulos rectángulos semejantes, el producto de las hipotenusas es igual a la suma de los productos de los catetos.

Sean a, b, c *y* a′, b′, c′ *los lados de los triángulos semejantes.*

Se tendrá que: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

Multiplicando cada razón por su numerador respectivo, tendremos:

$$\frac{a^2}{aa'} = \frac{b^2}{bb'} = \frac{c^2}{cc'}$$

de donde resulta: $\dfrac{a^2}{aa'} = \dfrac{b^2 + c^2}{bb' + cc'}$

Los numeradores son iguales, pues

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Por consiguiente, también lo serán los denominadores; por tanto:

$$\mathbf{aa' = bb' + cc'}$$

348. Sobre el lado AB de un triángulo equilátero (fig. 280), como diámetro y exterior al mismo se describe una semicircunferencia, la cual se divide en tres partes iguales: AD = DE = BE. Demostrar que las rectas DC y EC dividen a AB en tres segmentos iguales.

Por ser $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BE}$, *la recta* DE *es paralela a* AB.

El triángulo DEO *es equiángulo y, por tanto, equilátero.*

La semejanza de los triángulos equiláteros ABC *y* DEO *da:*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CO}{OH} = \frac{2}{1}$$

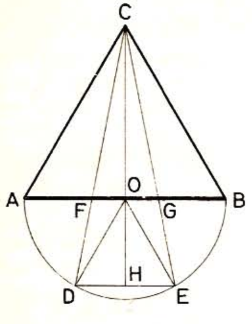


Fig. 280

de donde

$$DE = \frac{AB}{2} \quad y \quad CO = 2 \cdot OH$$

$\triangle FCG \sim \triangle DCE$ *por ser* FG *y* DE *paralelos; luego*

$$\frac{FG}{DE} = \frac{CO}{CH} = \frac{CO}{CO + OH} = \frac{2 \cdot OH}{3 \cdot OH} = \frac{2}{3}$$

de aquí $$2 \cdot DE = 3FG$$

sustituyendo $$2 \times \frac{AB}{2} = 3FG$$

$$\mathbf{AB = 3FG}$$

349. Las tres medianas AM, BN, CP de un triángulo ABC (fig. 281) concurren en el punto G; se traza la altura AH y las perpendiculares GL y NI al lado BC.

1.º Calcular la posición del punto G sobre la mediana AM.

2.º Hallar la relación entre GL y NI y la de GL y AH; y, en consecuencia, la de NI y AH. ¿Se podía prever esta última?

● 1.º *La mediana* AM *queda dividida* (GEOM. **156**) *por el punto* G *en la proporción*

$$\frac{GM}{AG} = \frac{1}{2} \quad o\ sea \quad \mathbf{\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}}$$

● 2.º *De la semejanza entre los triángulos rectángulos* BIN *y* BLG *se deduce:*

$$\frac{\mathbf{GL}}{\mathbf{NI}} = \frac{BG}{BN} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \qquad (1)$$

y de los triángulos MLG *y* MHA *se obtiene:*

$$\frac{\mathbf{GL}}{\mathbf{AH}} = \frac{GM}{AM} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \qquad (2)$$

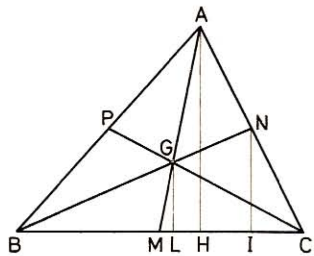


Fig. 281

Dividiendo la (2) *por la* (1) *viene:*

$$\frac{GL \times NI}{AH \times GL} = \frac{\mathbf{NI}}{\mathbf{AH}} = \frac{1 \times 3}{3 \times 2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Al ser $\triangle ICN \sim \triangle HCA$ *se podía prever la relación*

$$\frac{NI}{AH} = \frac{NC}{AC} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

350. Dada una circunferencia O (fig. 282) de diámetro $AB = 2R$, sobre AO como diámetro, se describe otra circunferencia O′, y desde A se traza una secante cualquiera que la corta en C y encuentra a la primera en D.

1.º Demostrar que los triángulos AOC y COD son iguales, y por tanto, que el punto C está en la mitad de AD.

2.º Probar que las tangentes en C y en D son paralelas.

3.º Construir la secante ACD de tal suerte que la tangente en C pase por B, y en ese caso, calcular, en función de R, la proyección de AC sobre AB.

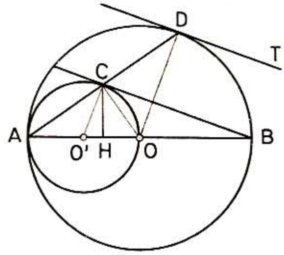


Fig. 282

● 1.º *En el triángulo isósceles* AOD *tendremos* $\angle A = \angle D$; *además,* $\angle ACO$ *es recto, así que los triángulos rectángulos* ACO *y* DCO *serán iguales (hipotenusas iguales y un ángulo agudo igual) y, por tanto,* $AC = CD$.

● 2.º *El radio* O′C *es paralelo a* OD, *pues divide a* AD *y* AO *en dos partes iguales; luego las tangentes en* C *y* D *serán también paralelas ya que los ángulos* O′CB *y* ODT *son iguales por ser rectos.*

● 3.º *El radio* O′C *es perpendicular a la tangente* CB; *el lugar geométrico de los puntos de contacto es la circunferencia de diámetro* O′B; *su intersección con la circunferencia* O′ *es el punto* C *y* ACD *será la secante que soluciona el problema.*

En el triángulo rectángulo O′BC *tendremos:*

$$O'C^2 = O'B \times O'H \quad \textit{de donde} \quad O'H = \frac{O'C^2}{O'B}$$

pero
$$O'C = \frac{R}{2}, \quad O'B = \frac{3R}{2}$$

por tanto
$$O'H = \frac{R^2 \times 2}{4 \times 3R} = \frac{R}{6}$$

y
$$\mathbf{AH} = AO' + O'H = \frac{R}{2} + \frac{R}{6} = \mathbf{\frac{2R}{3}}$$

351. Sea ABC (fig. 283) un triángulo cualquiera y AD la bisectriz que encuentra en E a la circunferencia circunscrita. Demostrar que

$$BE^2 = ED \times AE$$

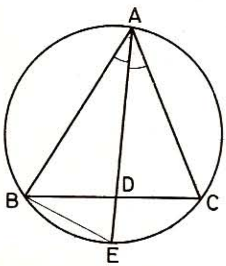


Fig. 283

Por ser AE *bisectriz:*

$$\angle BAE = \angle EAC$$

y, por tanto,
$$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC}$$

$$\triangle ABE \sim \triangle BED$$

pues $\angle BAE = \angle DBE$ *y* $\angle E$ *es común; por tanto*

$$\frac{BE}{ED} = \frac{AE}{BE}$$

de donde
$$\mathbf{BE^2 = ED \times AE}$$

352. Sea un triángulo ABC (fig. 284). Se describe una circunferencia que pase por el vértice A y que sea tangente al lado BC en el punto D de la bisectriz de $\angle$ A. Esta circunferencia corta en E y en F a los lados AB y AC. Demostrar:

1.º Que EF es paralela a BC.

2.º Que AE $\times$ AC = AF $\times$ AB = AD^2.

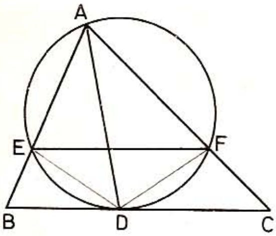


Fig. 284

● 1.º *Siendo* AD *bisectriz,* $\widehat{ED} = \widehat{DF}$ *y* $\angle$ FDC= =$\angle$ EFD, *y por tanto,* EF *y* BC *serán paralelas.*

● 2.º *Por tener sus ángulos respectivamente iguales*

$$\triangle AEF \sim \triangle ABC, \triangle AED \sim \triangle ADC, \triangle AFD \sim \triangle ADB.$$

Luego

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}; \quad \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB}$$

de donde

$$\mathbf{AD^2 = AE \times AC = AF \times AB}$$

353. En todo paralelogramo la suma de los cuadrados de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

En los triángulos ADB *y* ABC (fig. 285) *se verifica:*

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times n \qquad (1)$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times n' \qquad (2)$$

Pero DC = AB, BC = AD y $n = n'$

Sumando, pues, la (1) *y* (2) *vendrá:*

$$\mathbf{BD^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2}$$

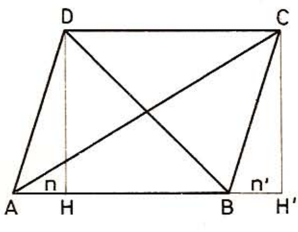


Fig. 285

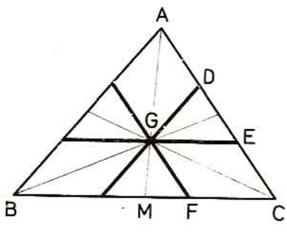


Fig. 286

354. Las paralelas a los lados de un triángulo trazadas por el punto de concurso de las medianas, dividen a los lados en tres segmentos iguales.

En el haz de rectas concurrentes AB, AM, AC (fig. 286), *las paralelas* BC *y* GE *dividen a* AM *en la relación* $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$

También se tiene:

$$\frac{EC}{AC} = \frac{1}{3} \quad y \quad \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

Como DE = AC − EC − AD, *resulta:*

$$\frac{DE}{AC} = \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AC} - \frac{AD}{AC} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

y
$$\mathbf{AD = DE = EC}$$

El mismo raciocinio se aplica a los otros dos lados.

355. Por el punto de contacto de dos circunferencias tangentes exteriores se trazan dos secantes perpendiculares entre sí. Pruébese que la suma de los cuadrados de los dos segmentos interceptados es igual al cuadrado de la suma de los diámetros de las circunferencias dadas (fig. 287).

Tracemos: GD, FH, GF, OL *paralela a* DF, *y* O'L *paralela a* HG.

En los triángulos DGF *y* GHF *tenemos*

$$OL = \frac{DF}{2} \quad y \quad O'L = \frac{HG}{2}$$

En el $\triangle$OLO' *el ángulo* OLO' *es recto (lados paralelos a las secantes), por tanto:*

$$OL^2 + O'L^2 = OO'^2$$

o bien
$$\frac{DF^2}{4} + \frac{HG^2}{4} = OO'$$

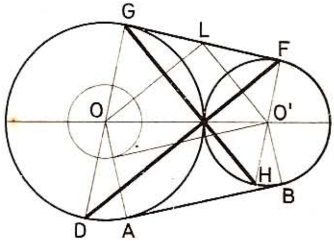


Fig. 287

$$\mathbf{DF^2 + HG^2} = (2 \cdot OO')^2 = [2(R + R')]^2 = \mathbf{(d + d')^2}$$

VIII. Problemas

356. Por el punto medio D del cateto mayor AC de un triángulo rectángulo (fig. 288) se traza DE perpendicular a la hipotenusa BC. Calcular DE, EC y BE, sabiendo que AB = 12 cm y AC = 16 cm.

$\triangle$ABC $\sim$ $\triangle$DEC *(rectángulos con un ángulo agudo igual).*

Luego:
$$\frac{EC}{AC} = \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC}$$

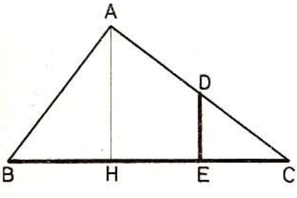


Fig. 288

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \quad cm$$

$$\mathbf{EC} = \frac{AC \times DC}{BC} = \frac{16 \times 8}{20} = \mathbf{6{,}4\ cm}$$

$$\mathbf{DE} = \frac{AB \times DC}{BC} = \frac{12 \times 8}{20} = \mathbf{4{,}8\ cm}$$

$$\mathbf{BE} = BC - EC = 20 - 6{,}40 = \mathbf{13{,}6\ cm}$$

357. Sea un triángulo ABC (fig. 289) rectángulo en A. En C se traza una perpendicular a la hipotenusa, la cual cortará en D a la prolongación del cateto AB. Calcular los lados CD y AD del triángulo ACD, si AB = 15 cm y AC = 20 cm.

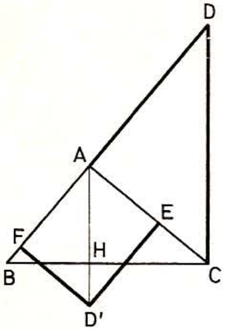


Fig. 289

Tenemos $\angle$ ACD = $\angle$ ABC *(misma especie y lados perpendiculares)*.

Los triángulos rectángulos CAB *y* DAC *son, pues, semejantes, y tenemos:*

$$\frac{AD}{AC} = \frac{CD}{BC} = \frac{AC}{AB}$$

pero $\qquad BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ cm}$

de donde $\qquad \mathbf{AD} = \frac{AC^2}{AB} = \frac{20^2}{15} = \mathbf{26{,}667\ cm}$

y $\qquad \mathbf{CD} = \frac{BC \times AC}{AB} = \frac{25 \times 20}{15} = \mathbf{33{,}333\ cm}$

358. Los lados del triángulo rectángulo ABC tienen 27, 36 y 45 cm respectivamente. Sobre la altura AH se lleva AD′ = 32 cm y se trazan D′E y D′F perpendiculares a los catetos AC y AB. Calcular el valor de estos segmentos perpendiculares (fig. 289).

Tenemos $\angle$ AD′F = $\angle$ CBA *y* $\angle$ AD′E = $\angle$ BCA *(misma especie y lados perpendiculares)*.

Los triángulos rectángulos BAC, AD′F *y* AD′E *son, pues, semejantes y, en consecuencia*,

$$\frac{D'E}{AC} = \frac{D'F}{AB} = \frac{AD'}{BC}$$

de donde $\qquad \mathbf{D'F} = \frac{AB \times AD'}{BC} = \frac{27 \times 32}{45} = \mathbf{19{,}2\ cm}$

y $\qquad \mathbf{D'E} = \frac{AC \times AD'}{BC} = \frac{36 \times 32}{45} = \mathbf{25{,}6\ cm}$

359. En un triángulo ABC (fig. 290) la altura BH = h es igual a la base AC = b. El pie de la altura BH divide a AC de tal suerte que

$$AH = \frac{2n}{3} \quad y \quad HC = \frac{h}{3}$$

Calcular:

1.º Los lados AB y BC.

2.º Las distancias MH y NH de H a los dos lados BC y AB.

3.º Las proyecciones AN y CM de los segmentos AH y CH de la base sobre los lados.

4.º ¿Por qué es inscriptible el cuadrilátero NBMH?

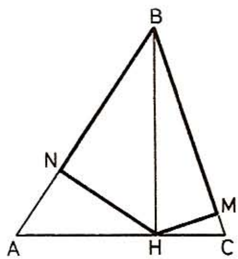


Fig. 290

• 1.º $\mathbf{AB} = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{\dfrac{9h^2 + 4h^2}{9}} = \dfrac{h\sqrt{13}}{3} = \dfrac{\mathbf{b}\sqrt{\mathbf{13}}}{\mathbf{3}}$

$$\mathbf{BC} = \sqrt{BH^2 + CH^2} = \sqrt{\frac{9h^2 + h^2}{9}} = \frac{h\sqrt{10}}{3} = \frac{\mathbf{b}\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{3}}$$

• 2.º *Los triángulos rectángulos semejantes* AHB *y* AHN *primero y los* BHC *y* HMC *después, nos darán:*

$$\frac{NH}{BH} = \frac{AH}{AB} \quad y \quad \frac{MH}{BH} = \frac{HC}{BC}$$

$$\mathbf{NH} = \frac{BH \times AH}{AB} = \frac{h \times \dfrac{2h}{3}}{\dfrac{h}{3}\sqrt{13}} = \frac{2h\sqrt{13}}{13} = \frac{\mathbf{2b}\sqrt{\mathbf{13}}}{\mathbf{13}}$$

$$\mathbf{MH} = \frac{BH \times HC}{BC} = \frac{h \times \dfrac{h}{3}}{\dfrac{h}{3}\sqrt{10}} = \frac{h\sqrt{10}}{10} = \frac{\mathbf{b}\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{10}}$$

• 3.º *Los mismos triángulos semejantes dan:*

$$\frac{AN}{NH} = \frac{AH}{BH} = \frac{\dfrac{2}{3}h}{h} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{CM}{MH} = \frac{HC}{BH} = \frac{\dfrac{h}{3}}{h} = \frac{1}{3}$$

de donde $\mathbf{AN} = \dfrac{2NH}{3} = \dfrac{4h\sqrt{13}}{39} = \dfrac{\mathbf{4b}\sqrt{\mathbf{13}}}{\mathbf{39}}$

$$\mathbf{CM} = \frac{MH}{3} = \frac{h\sqrt{10}}{30} = \frac{\mathbf{b}\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{30}}$$

• 4.º *El cuadrilátero* NBMH **es inscriptible** *porque sus ángulos opuestos* M *y* N, B *y* H *son suplementarios.*

En efecto, $\angle M = \angle N = 90^\circ$ *o bien* $\angle M + \angle N = 180^\circ$

por tanto, $\angle B + \angle H = 180^\circ$

360. Sea el triángulo DEH (fig. 291), formado al unir los pies de las alturas del triángulo ABC y sea M el ortocentro de dichas alturas. Demostrar:

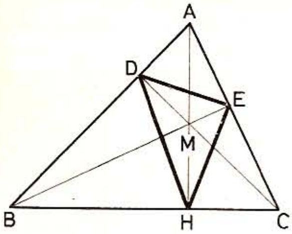


Fig. 291

1.º Que los tres cuadriláteros BDMH, HMEC, ADME son inscriptibles y que AH es bisectriz de $\angle$ DHE.

2.º Que los cuatro triángulos ABC, ADE, HCE, BDH son semejantes.

● 1.º *Los tres cuadriláteros son birrectángulos; por tanto, los otros dos ángulos serán suplementarios; dichos cuadriláteros serán, pues, inscriptibles.*

Trazando las circunferencias circunscritas a los cuadriláteros, se observa que la recta AH *es bisectriz del* $\angle$ DHE, *pues*

	$\angle DBM = \angle DHM$	*por inscritos en el mismo arco*
	$\angle ECM = \angle EHM$	*por igual motivo*
pero	$\angle DBM = \angle ECM$	*por tener los lados perpendiculares*
luego	$\angle DHM = \angle EHM$	*y* AH *es bisectriz*

● 2.º *Los cuatro triángulos son semejantes por ser equiángulos. En efecto, todos tienen con* ABC *un ángulo común:*

$$\angle EMC = \angle A = \angle EHC = \angle DMB = \angle DHB$$

y

$$\angle BMH = \angle C = \angle BDH = \angle AME = \angle ADE$$

361. Los lados de un triángulo ABC (fig. 292), tienen AB = 12 cm, BC = 11 cm y AC = 9 cm. Si trazamos MN = 10 cm paralela a la base AB:

1.º Calcular los segmentos AM, MC, NC, NB que dicha paralela determina sobre los otros dos lados.

2.º Determinar gráficamente la recta MN.

● 1.º $\triangle CMN \sim \triangle CAB$, *por tanto:*

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB}$$

de donde

$$\mathbf{CM} = \frac{CA \times MN}{AB} = \frac{9 \times 10}{12} = \mathbf{7{,}5 \ cm}$$

$$\mathbf{AM} = AC - CM = 9 - 7{,}5 = \mathbf{1{,}5 \ cm}$$

$$\mathbf{CN} = \frac{BC \times MN}{AB} = \frac{11 \times 10}{12} = \mathbf{9{,}167 \ cm}$$

$$\mathbf{BN} = BC - CN = 11 - 9{,}167 = \mathbf{1{,}833 \ cm}$$

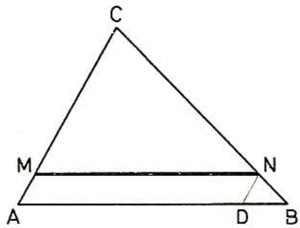


Fig. 292

● 2.º *Para determinar* MN, *se lleva sobre* AB *un segmento* AD = 10 cm, *en* D *se traza* DN *paralela a* AC *y, por fin,* MN *paralela a* AB.

362. Para medir la altura de un árbol AB (fig. 293) se fijan dos jalones CD = 2,45 m y EF = 1,65 m separados 0,64 m y distando CD 1,36 m del pie del árbol. Calcular la altura del árbol suponiendo que los puntos B, D, F están sobre el mismo plano.

$\triangle DC'F \sim \triangle BA'F$, *luego:* $$\frac{A'B}{C'D} = \frac{A'F}{C'F}$$

de donde $$A'B = \frac{C'D \times A'F}{C'F} = \frac{0{,}8 \times 2}{0{,}64} = 2{,}5 \text{ m}$$

$$\mathbf{AB} = A'B + EF = 2{,}5 + 1{,}65 = \mathbf{4{,}15\ m}$$

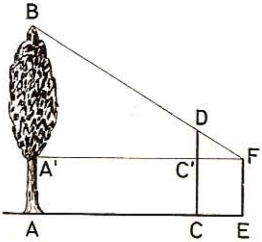


Fig. 293

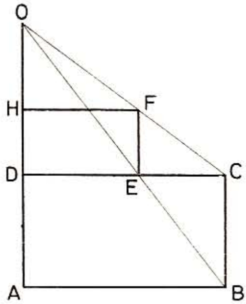


Fig. 294

363. Los lados de un rectángulo (fig. 294) ABCD tienen AB = 9 cm y AD = 5 cm. Se prolonga AD y se toma DO = 7 cm. Se trazan OEB y OFC y se forma el rectángulo DEFH semejante al dado. Calcular DE, EF, OB, OE, OC, OF y FC.

Los triángulos ODE *y* OAB, OEF *y* OBC *son semejantes (ángulos respectivamente iguales). Luego*

$$\frac{OD}{OA} = \frac{DE}{AB} = \frac{OE}{OB} = \frac{EF}{BC} = \frac{OF}{OC}$$

de lo cual se deduce:

$$\mathbf{DE} = \frac{AB \times OD}{OA} = \frac{9 \times 7}{12} = \mathbf{5{,}25\ cm}$$

$$\mathbf{EF} = \frac{BC \times OD}{OA} = \frac{5 \times 7}{12} = \mathbf{2{,}92\ cm}$$

$$\mathbf{OB} = \sqrt{AB^2 + OA^2} = \sqrt{81 + 144} = \mathbf{15\ \ cm}$$

$$\mathbf{OE} = \frac{OB \times OD}{OA} = \frac{7 \times 15}{12} = \mathbf{8{,}75\ cm}$$

$$\mathbf{OC} = \sqrt{DC^2 + OD^2} = \sqrt{81 + 49} = \mathbf{11{,}40\ cm}$$

$$\mathbf{OF} = \frac{OC \times OD}{OA} = \frac{11{,}40 \times 7}{12} = \mathbf{6{,}65\ cm}$$

$$\mathbf{FC} = OC - OF = 11{,}40 - 6{,}65 = \mathbf{4{,}75\ cm}$$

364. Sea un rectángulo ABCD (fig. 295), en el cual la base AB = 60 cm y la altura AD = 32 cm. Desde D se traza una perpendicular DEF a la diagonal AC. Calcular los segmentos DE, AE, DF, BF, EC.

$\triangle DEA \sim \triangle CDA$ *y* $\triangle DAF \sim \triangle CDA$ *(rectángulos con ángulos iguales). Luego*

$$\frac{DE}{DC} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC}; \quad \frac{DF}{AC} = \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 68 \text{ cm}$$

$$\mathbf{DE} = \frac{DC \times AD}{AC} = \frac{60 \times 32}{68} = \mathbf{28{,}235\ cm}$$

$$\mathbf{AE} = \frac{AD^2}{AC} = \frac{32^2}{68} = \mathbf{15{,}06\ cm}$$

$$\mathbf{DF} = \frac{AC \times AD}{DC} = \frac{68 \times 32}{60} = \mathbf{36{,}267\ cm}$$

$$AF = \frac{AD^2}{DC} = \frac{32^2}{60} = 17{,}067 \text{ cm}$$

$$\mathbf{BF} = AB - AF = 60 - 17{,}067 = \mathbf{42{,}933\ cm}$$

$$\mathbf{EC} = AC - AE = 68 - 15{,}06 = \mathbf{52{,}94\ cm}$$

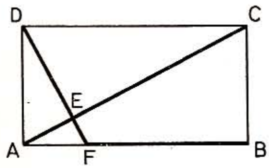


Fig. 295

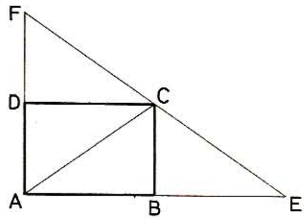


Fig. 296

365. Se construye un rectángulo ABCD (fig. 296) de base AB = a y altura AD = b. Se prolonga AB una porción BE = AB y AD una parte DF = AD. Demostrar:

1.º Que los puntos F, C, E están en línea recta.

2.º Calcular FE en función de a y b.

3.º Cómo tendrá que ser el rectángulo para que AC sea perpendicular a EF.

• 1.º *Los triángulos* FDC *y* BCE *son iguales (2.º criterio); por tanto,*

$$\angle BCE = \angle DFC \quad y \quad \angle DCF = \angle BEC$$

pero $$\angle DFC + \angle BEC = 90^\circ \quad y \quad \angle BCD = 90^\circ$$

Por tanto: $$\angle BCE + \angle BCD + \angle DCF = 180^\circ$$

y los segmentos **FC** *y* **CE están en línea recta.**

• 2.º **FE** $= \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = \mathbf{2\sqrt{a^2 + b^2}}$

• 3.º *Tenemos* FC = CE; AC, *mediana del triángulo* FAE, *será altura cuando el triángulo sea isósceles, esto es, cuando* 2a = 2b, *o sea* a = b, *siendo en este caso el rectángulo* **un cuadrado.**

366. Dado un cuadrado ABCD (fig. 297) de lado a, sobre el lado AD tomamos AL $= a/3$, y sobre el lado DC tomamos DE $= a/3$ y trazamos BL y AE, las cuales se cortan en F.

1.º Pruébese que AE y BL son perpendiculares entre sí e iguales hallando el valor común a ellas.

2.º Calcúlense los segmentos AF y FE y los FL y FB.

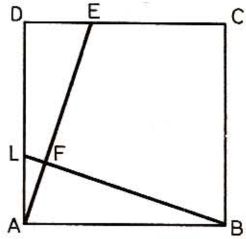


Fig. 297

• 1.º $\triangle$BAL = $\triangle$ADE *(catetos iguales); de aquí que*

$$\angle ABL = \angle DAE \quad y \quad BL = AE$$

Estos ángulos, además de ser iguales, están orientados en igual sentido, y si el lado AB *es perpendicular al* AD, *el lado* **BL** *también* **será perpendicular al AE.**

$$\mathbf{BL} = \mathbf{AE} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9a^2 + a^2}{9}} = \mathbf{\frac{a\sqrt{10}}{3}}$$

Nota.—Las cuerdas antedichas no pueden hallarse a distinto lado del centro, pues sus distancias a éste serían x y $4 - x$ y tendríamos $x^2 + 16^2 = (4 - x)^2 + 12^2 = R^2$, lo que da $x = -12$ y las distancias serían -12 y 16, es decir, que las cuerdas se hallan del mismo lado del centro.

• 2.º *Los triángulos rectángulos* AFL, BAL *y* ADE *son semejantes por tener un ángulo agudo igual.*

Luego: $$\frac{FL}{AL} = \frac{AL}{BL} \quad (1) \qquad \frac{AF}{AL} = \frac{AB}{BL} \quad (2)$$

De la (1) *viene:*

$$\mathbf{FL} = \frac{AL^2}{BL} = \frac{(a/3)^2}{\frac{a}{3}\sqrt{10}} = \frac{a}{3\sqrt{10}} = \mathbf{\frac{a\sqrt{10}}{30}}$$

$$\mathbf{BF} = BL - FL = \frac{a\sqrt{10}}{3} - \frac{a\sqrt{10}}{30} = \mathbf{\frac{3a\sqrt{10}}{10}}$$

De la (2) *resulta:*

$$\mathbf{AF} = \frac{AL \times AB}{BL} = \frac{\frac{a}{3} \times a}{\frac{a}{3}\sqrt{10}} = \frac{a}{\sqrt{10}} = \mathbf{\frac{a\sqrt{10}}{10}}$$

$$\mathbf{FE} = AE - AF = \frac{a\sqrt{10}}{3} - \frac{a\sqrt{10}}{10} = \mathbf{\frac{7a\sqrt{10}}{30}}$$

367. Dado un trapecio ABCD (fig. 298), demostrar:

1.º Que el punto de concurso de las diagonales divide a éstas en partes proporcionales a las bases.

2.º Que la recta FOE paralela a las bases trazada por el punto O donde concurren las diagonales queda dividida por este punto en dos partes iguales FO = OE. Calcular OE en función de las bases a y b.

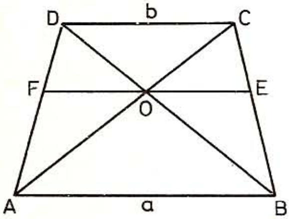


Fig. 298

● 1.º $\triangle ABO \sim \triangle DCO$, *luego:*

$$\frac{\mathbf{OC}}{\mathbf{OA}} = \frac{OD}{OB} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} \tag{1}$$

● 2.º *Por ser paralelas* CD *y* FOE:

$$\frac{DC}{OF} = \frac{AC}{OA} \quad y \quad \frac{DC}{OE} = \frac{BD}{OB} \tag{2}$$

pero de la (1) *se deduce:*

$$\frac{OC + OA}{OA}\left(= \frac{AC}{OA}\right) = \frac{OD + OB}{OB}\left(= \frac{BD}{OB}\right) = \frac{a+b}{a} \tag{3}$$

por tanto $$\frac{DC}{OF} = \frac{DC}{OE} \quad y \quad \mathbf{OF = OE}$$

● 3.º *De la* (2) *y* (3) *vendrá:*

$$\frac{DC = b}{OE} = \frac{a+b}{a}$$

de donde $$\mathbf{OE = OF = \frac{ab}{a+b}}$$

368. En una circunferencia de diámetro AB (fig. 299) se traza una cuerda AC que forme con AB un ángulo dado a; se alarga AC una parte CD = AC y se unen DB.

1.º ¿Qué valor tiene $\angle$ACB?

2.º Demostrar que $\angle ADB = \angle a$ y que BD = BA

3.º Se traza AE perpendicular a AC y se prolonga AE una porción EF = AE. Demostrar que los puntos D, B, F están sobre la misma línea recta.

4.º ¿Para qué valor de $\angle a$ será DBF tangente a la circunferencia dada en el punto B?

5.º Demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo AFD es tangente en A a la circunferencia dada.

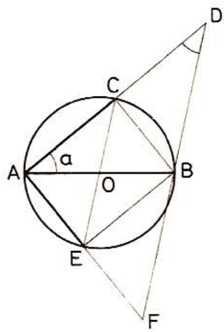


Fig. 299

● 1.º $\angle$ **ACB = 90º**, *pues está inscrito en una semicircunferencia.*

● 2.º BC *es mediana y altura a la vez, por tanto, el* $\triangle$ABD *es isósceles.*

Luego $\angle \mathbf{ADB} = \angle \mathbf{a}$ *y* **BD = AB**

● 3.º *Por lo mismo que en el* 1.^{er} *caso será* $\angle$ AEB = 90º. *El triángulo* AFB *es isósceles,* BF = AB, *y* BE *es bisectriz; pero* $\angle$ CBE = 90º, *al ser* BC *y* BE *bisectrices,* $\angle$ ABF + $\angle$ ABD = 180º; *por consiguiente,* **D, B, F están en línea recta.**

● 4.º *Para que* DBF *sea tangente, es menester que sea perpendicular a* AB *y que* $\angle$ a + $\angle$ D = 90º, *pero* $\angle$ a = $\angle$ D; *por tanto,* $\angle$ **a = 45º.**

● 5.º *Acabamos de ver que* DB = AB = BF; *la circunferencia de centro* B *y radio* AB *pasará por* D *y* F; *al ser* AB *la línea de los centros de las circunferencias* O *y* B, *el único punto común a las dos circunferencias será el punto* A; *éste será, pues, el punto de tangencia.*

369. En una circunferencia de 6 cm de radio (fig. 300) se inscribe un rectángulo cuyo lado mayor tiene 8 cm.

1.º Probar que las tangentes a esta circunferencia trazadas por los cuatro vértices forman un rombo.

2.º Calcular el lado y las diagonales de este rombo.

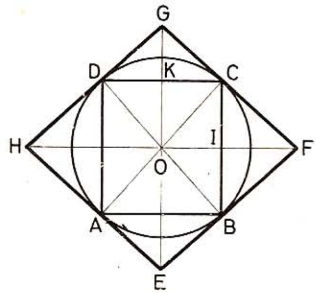


Fig. 300

● 1.º *Las tangentes opuestas son paralelas como perpendiculares a un mismo diámetro, las rectas que unen el centro* O *con los puntos de concurrencia de las tangentes son perpendiculares a las cuerdas de los contactos, pero* DC *y* AB *son paralelos, luego los puntos* G, O, E *estarán en línea recta; lo propio se pudiera decir de los puntos* H, O, F. *Además* AB *es perpendicular a* AD; *por tanto,* HF *será perpendicular a* GE, *y de esta suerte el cuadrilátero* EFGH *será un rombo.*

● 2.º *En* $\triangle$OCF: $\mathrm{OF} = \dfrac{\mathrm{OC}^2}{\mathrm{OI}} = \dfrac{36}{4} = 9$ cm, *de donde* **HF = 18 cm**

En $\triangle$OCF: $\mathrm{CI}^2 = \mathrm{OI} \times \mathrm{IF} = 4 \times 5; \quad \mathrm{CI} = 2\sqrt{5}$

En $\triangle$OCG: $\mathrm{OG} = \dfrac{\mathrm{OC}^2}{\mathrm{OK}} = \dfrac{\mathrm{OC}^2}{\mathrm{CI}} = \dfrac{36}{2\sqrt{5}} = \dfrac{18\sqrt{5}}{5}$

$$\mathbf{GE} = 2 \times \mathrm{OG} = \frac{36\sqrt{5}}{5} = \mathbf{61{,}1\ cm}$$

En $\triangle$OGF: $\mathbf{GF} = \dfrac{\mathrm{OG} \times \mathrm{OF}}{\mathrm{OC}} = \dfrac{18\sqrt{5} \times 9}{5 \times 6} = \dfrac{27\sqrt{5}}{5} = \mathbf{12{,}075\ cm}$

370. En una circunferencia O (fig. 301), trazamos OI perpendicular al diámetro AB y unimos el punto I con los extremos C y D de una cuerda CD situada en la semicircunferencia opuesta al punto I. Las rectas IC e ID encuentran a AB en H y E.

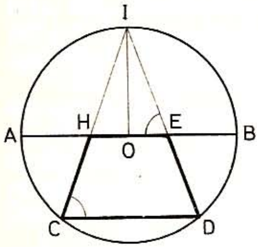


Fig. 301

Probar:

1.º Que $\angle OEI = \angle DCI$

2.º Que $\triangle IHE \sim \triangle ICD$ y, por tanto:

$$IE \times ID = IH \times IC$$

3.º Que el cuadrilátero HEDC es inscriptible.

- 1.º *Se tiene:* $\widehat{AI} = \widehat{IB}$

$$\angle OEI = \frac{\widehat{AI} + \widehat{BD}}{2}$$

$$\angle ICD = \frac{\widehat{IB} + \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AI} + \widehat{BD}}{2}$$

Luego: $\angle$ **OEI** $= \angle$ **ICD**

- 2.º $\triangle IHE \sim \triangle ICD$, *por ser equiángulos:* $\angle I$ *común,* $\angle E = \angle C$ *y* $\angle D = \angle H$, *tendremos, pues,*

$$\frac{IE}{IC} = \frac{IH}{ID} \quad \textit{de donde} \quad \mathbf{IE \times ID = IH \times IC}$$

- 3.º *El cuadrilátero* HEDC *es inscriptible porque sus ángulos opuestos son suplementarios. En efecto, hemos demostrado que*

$\angle C = \angle E$; *pero* $\angle E + \angle HED = 180^\circ$;

por tanto, $\angle C + \angle HED = 180^\circ$.

Análogamente se tendría que

$\angle D + \angle CHE = 180^\circ$, *luego...*

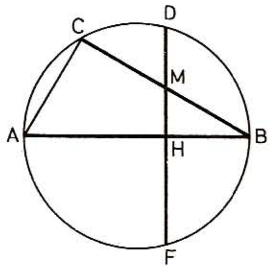


Fig. 302

371. En una circunferencia de diámetro AB = = 12 cm (fig. 302) se traza la cuerda AC = 6 cm.

1.º Calcular la cuerda CB.

2.º Por el punto medio M de CB se traza DMF perpendicular a AB. Calcular la distancia MH de M a AB, los dos segmentos DM y MF y los que la cuerda DF determina sobre el diámetro AB.

- 1.º $\mathbf{CB} = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3} = \mathbf{10{,}4\ cm}$
- 2.º *Los triángulos semejantes* ACB *y* BHM *darán:*

$$\frac{AC}{AB} = \frac{MH}{MB} = \frac{1}{2} \quad \textit{de donde} \quad \mathbf{MH} = \frac{MB}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2{,}6\ cm}$$

Sea x = HD = HF, *las dos cuerdas* CB *y* DF *darán la relación*

$$\left(x + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = MB^2 = 27$$

de donde

$$x^2 = 27 + 6{,}75 = 33{,}75 \quad \text{y} \quad x = 5{,}81 \text{ cm}$$

por tanto, $\mathbf{MD} = x - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 5{,}81 - 2{,}6 = \mathbf{3{,}21\ cm}$

$$\mathbf{MF} = x + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 5{,}81 + 2{,}6 = \mathbf{8{,}41\ cm}$$

$$\mathbf{HB} = \frac{\mathrm{MB}\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = \mathbf{4{,}5\ \ cm}$$

$$\mathbf{AH} = 12 - 4{,}5 = \mathbf{7{,}5\ cm}$$

372. Dada una circunferencia O (fig. 303), se trazan dos diámetros perpendiculares AB y CD; se une el punto B con D y se traza la recta AE, siendo E el punto medio de BD. Calcular AE en función del radio.

Tracemos EF *perpendicular a* OB.

Los triángulos rectángulos BFE *y* BOD *son semejantes:*

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{OD}} = \frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{OB}} = \frac{1}{2}$$

y como OB = OD = r, *resulta*

$$\mathrm{OF} = \mathrm{EF} = \frac{r}{2}$$

y $\mathrm{AE}^2 = \mathrm{AF}^2 + \mathrm{EF}^2 = \left(\dfrac{3r}{2}\right)^2 + \dfrac{r^2}{4} = \dfrac{10r^2}{4}$

de donde $\mathbf{AE} = \dfrac{\mathbf{r}\sqrt{\mathbf{10}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1{,}58\ r}$

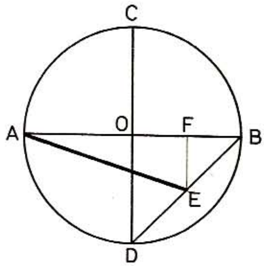


Fig. 303

373. Dada una circunferencia O (fig. 304) de 10 cm de radio, se le inscribe un triángulo rectángulo cuyo cateto CB tiene 8 cm. En B se traza la tangente BP que encuentra en P a la perpendicular OH a la cuerda BC. Hallar:

1.º La longitud de AC.
2.º La distancia OH de la cuerda BC al centro.
3.º La longitud de OP.
4.º La longitud de la tangente BP.

• 1.º $\mathbf{AC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2} = \sqrt{400 - 64} = 4\sqrt{21} = \mathbf{18{,}33\ cm}$

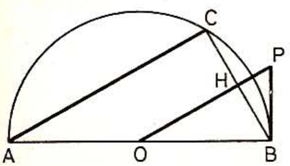


Fig. 304

• 2.º *Se tiene*

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}$$

de donde

$$\mathbf{OH = 9{,}165\ cm}$$

• 3.º *Los triángulos rectángulos* ACB *y* OBP *son semejantes (ángulo agudo igual por correspondientes):*

Luego
$$\frac{OP}{AB} = \frac{OB}{AC} = \frac{PB}{CB}$$

y
$$\mathbf{OP} = \frac{AB \times OB}{AC} = \frac{20 \times 10}{4\sqrt{21}} = \frac{50\sqrt{21}}{21} = \mathbf{10{,}91\ cm}$$

$$\mathbf{PB} = \frac{OB \times CB}{AC} = \frac{10 \times 8}{4\sqrt{21}} = \frac{20\sqrt{21}}{21} = \mathbf{4{,}364\ cm}$$

374. En una circunferencia de 8 cm de radio (fig. 305) se trazan dos diámetros perpendiculares, AB y HI. Sobre este último se toma OC = 6 cm y se traza la secante BCD, que encuentra a la circunferencia en M y a la tangente AD en el punto D. Calcular

1.º CB. 3.º AD.
2.º CM. 4.º AM.

y su proyección sobre AB.

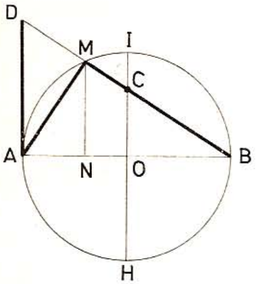


Fig. 305

- 1.º $\mathbf{CB} = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{64 + 36} = \mathbf{10\ cm}$
- 2.º *De la relación* CM × CB = IC × CH, *resulta*

$$\mathbf{CM} = \frac{IC \times CH}{CB} = \frac{2 \times 14}{10} = \mathbf{2{,}8\ cm}$$

- 3.º *De los triángulos semejantes* OBC *y* ABD *se deduce*

$$\frac{AD}{OC} = \frac{AB}{OB} = 2 \quad \textit{de donde} \quad \mathbf{AD} = 2\ OC = \mathbf{12\ cm}$$

- 4.º *Los triángulos rectángulos* AMD *y* BOC *son semejantes ya que tienen un ángulo agudo igual (lados respectivamente perpendiculares).*

Luego
$$\frac{AM}{OB} = \frac{AD}{BC} \quad y \quad \mathbf{AM} = \frac{8 \times 12}{10} = \mathbf{9{,}6\ cm}$$

Asimismo los triángulos rectángulos ANM *y* BOC *son semejantes y dan*

$$\frac{AN}{OC} = \frac{AM}{BC} \qquad \mathbf{AN} = \frac{AM \times OC}{BC} = \frac{9{,}6 \times 6}{10} = \mathbf{5{,}76\ cm}$$

375. Dada la circunferencia O (fig. 306) cuyo diámetro AB tiene 8 cm, en los puntos extremos de éste se trazan las tangentes a la circunferencia, tomando BD = 3 cm, luego se traza la tangente DMC, la cual tiene por contacto con la circunferencia el punto M y con la otra tangente AC el punto C. Probar:

1.º Que BD + AC = DC.

2.º Que el triángulo DOC tiene un ángulo recto en O.

3.º Que DM × MC = R^2. Hecho esto, se calcularán los valores AC, OC, BM, AM y su prolongación MN hasta la tangente BD.

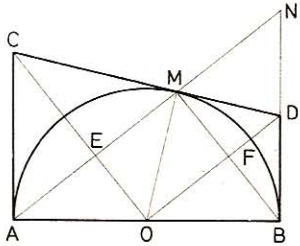


Fig. 306

• 1.º *Las tangentes trazadas desde un mismo punto son iguales, luego*

$$BD = DM, \quad AC = MC$$

y $$\mathbf{BD} + \mathbf{AC} = DM + MC = \mathbf{DC}$$

• 2.º *Los triángulos* AOM *y* MOB *son isósceles; por tanto, las mediatrices* OC *y* OD *de las bases* AM *y* MB *serán bisectrices de* $\angle$AOM *y* $\angle$MOB; *pero estos ángulos suman* 180º; *luego* $\angle$**COD** = **90º.**

• 3.º *Al ser rectángulo el triángulo* COD, *será*

$$OM^2 = \mathbf{DM} \times \mathbf{MC} = \mathbf{R^2}$$

de donde $$MC = \mathbf{AC} = \frac{R^2}{DM} = \frac{R^2}{BD} = \frac{16}{3} = \mathbf{5{,}33\ cm}$$

Los triángulos OAC *y* OBD *son semejantes por serlo sus iguales* OMC *y* OMD.

Luego $$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{BD} \quad \textit{pero} \quad OD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

de donde $$\mathbf{OC} = \frac{OA \times OD}{BD} = \frac{4 \times 5}{3} = \mathbf{6{,}67\ cm}$$

La razón de semejanza entre los lados de los triángulos ABN *y* OBD *es* $\dfrac{AB}{OB} = 2$ *por tanto,* BN = 2 BD = 6 cm; AN = 2 OD = 10 cm.

La de los lados de los triángulos BMN *y* OBD *es* $\dfrac{BN}{OD} = \dfrac{6}{5}$ *de donde*

$$\mathbf{BM} = \frac{6}{5} \times OB = \mathbf{4{,}8\ cm} \qquad \mathbf{MN} = \frac{6}{5} \times BD = \mathbf{3{,}6\ cm}$$

y $$\mathbf{AM} = AN - MN = 10 - 3{,}6 = \mathbf{6{,}4\ cm.}$$

376. Dada la circunferencia O de radio R (fig. 307), se trazan los diámetros perpendiculares AC y EF. Desde D, punto medio de OE, como centro y con un radio DA, se describe el arco AGM, el cual cortará al diámetro EF en M; luego se traza AM. Se pide:

1.º Calcular DA, OM, AM.

2.º Hallar MN perpendicular, trazada a OF en el punto M.

3.º Llamando *b* a $\angle$AMN y *a* a $\angle$ADO, probar que $b = \angle a/2$.

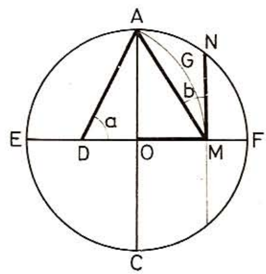


Fig. 307

• 1.º $$DA = \sqrt{OA^2 + OD^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{5R^2}{4}} = \frac{\mathbf{R\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$$

$$\mathbf{OM} = DM - DO = DA - DO = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2}}(\sqrt{\mathbf{5}} - \mathbf{1})$$

$$AM^2 = OA^2 + OM^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})$$

De donde $$\mathbf{AM = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

• 2.º $MN^2 = R^2 - OM^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{2}(\sqrt{5} - 1)$

De donde $$\mathbf{MN = \frac{R}{2}\sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}}$$

• 3.º *El ángulo* a *es un ángulo central y el* b *es semiinscrito, que abarcan el mismo arco* AGM.

Por consiguiente: $$\angle \mathbf{b} = \frac{\angle \mathbf{a}}{\mathbf{2}}$$

377. Tomemos una circunferencia A de radio AB = R y otra B de radio BC = R/2 (fig. 308) y tracemos la tangente común HF, la cual corta en E a la línea de los centros AB; la secante común PMN encuentra en I a la tangente dicha. Se desea:

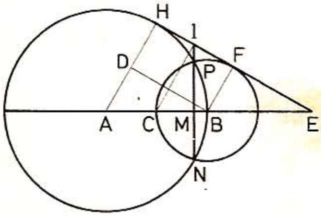


Fig. 308

1.º Hallar, en función de R, el valor de los segmentos BE, HF.

2.º Probar que $IF^2 = IH^2 = IP \times IN$, dando el producto en función de R.

3.º Se une el punto I con C, punto en que corta la circunferencia al radio AB, calcúlese en función de R los segmentos IC, IM y CM proyección de IC sobre AB.

• 1.º $\triangle ABD \sim \triangle BEF$ *(sus ángulos tienen los lados respectivamente paralelos). Luego:*

$$\frac{BE}{AB} = \frac{BF}{AD} \quad \textit{pero} \quad AD = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}; \quad \textit{luego} \quad \mathbf{BE} = AB = \mathbf{R}$$

Se tiene HF = BD *pero* $BD^2 = AB^2 - AD^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$

de donde $$\mathbf{HF = \frac{R}{2}\sqrt{3}}$$

• 2.º *La secante* IPN *y las tangentes* IH *y* FI *nos dan:*

$$\mathbf{IF^2 = IH^2 = IP \times IN}$$

Pero $$IH = \frac{HF}{2} = \frac{BD}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{4}$$

de donde $$\mathbf{IP \times IN} = \left(\frac{R}{4}\sqrt{3}\right)^2 = \mathbf{\frac{3R^2}{16}}$$

● 3.º *En el trapecio* ABFH *el segmento* IC *une los puntos medios de* AB *y* HF

así que $$\mathbf{IC} = \frac{AH + BF}{2} = \frac{\mathbf{3R}}{\mathbf{4}}$$

Los triángulos rectángulos AHE *y* CMI *son semejantes ya que* $\angle E = \angle I$ *(lados perpendiculares). Luego*

$$\frac{AH}{CM} = \frac{AE}{CI} \quad \textit{o bien} \quad \frac{CM}{CI} = \frac{AH}{AE} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$$

de donde $$\mathbf{CM} = \frac{CI}{2} = \frac{\mathbf{3R}}{\mathbf{8}}$$

Análogamente los triángulos CMI *y* ABD *dan* $\frac{IM}{BD} = \frac{CI}{AB} = \frac{3}{4}$

de donde $$\mathbf{IM} = \frac{3}{4} \times DB = \frac{3}{4} \times \frac{R}{2}\sqrt{3} = \frac{\mathbf{3R}}{\mathbf{8}}\sqrt{\mathbf{3}}$$

378. Dada una circunferencia O (fig. 309) se traza el diámetro AB y una cuerda AC.

1.º Demostrar que $\angle COB = 2\angle CAB$.

2.º Demostrar que para $\angle CAB = 30^\circ$, la cuerda $BC = R$. Calcular AC.

3.º En este caso construir una circunferencia que pase por los tres puntos A, O y C indicando dónde tendrá el centro y hallar el valor del radio en función de R.

● 1.º $\angle$ COB *es externo del triángulo isósceles* AOC, *por tanto:*

$$\angle \mathbf{COB} = \angle CAB + \angle ACO = \mathbf{2\angle CAB}$$

También puede decirse:

$$\left.\begin{array}{l} \angle COB \text{ (ángulo central)} = \overset{\frown}{CB} \\ \angle CAB \text{ (ángulo inscrito)} = \dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2} \end{array}\right\} \quad \textit{Luego } \angle COB = 2\angle CAB$$

● 2.º *Para* $\angle CAB = 30^\circ$ $\angle COB = 60^\circ$, *pero el triángulo* COB *es isósceles.*

Luego $$\angle BCO = \angle CBO = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

y el triángulo COB *es equiángulo y, por tanto, equilátero.*

Por tanto: $\mathbf{BC} = OB = OC = \mathbf{R}$

En $\triangle$ABC *(rectángulo en* C*):*

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

o bien $$\mathbf{AC} = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3R^2} = \mathbf{R}\sqrt{\mathbf{3}}$$

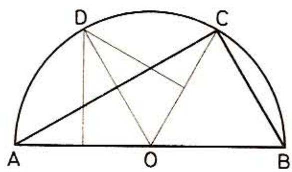


Fig. 309

• 3.º *El centro de la circunferencia es el punto* D, *intersección de las mediatrices de* AO *y* OC.

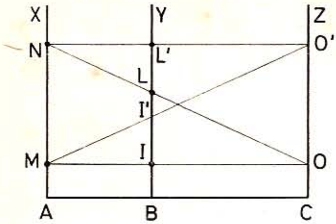


Fig. 310

$\triangle AOD = \triangle OCD$ *por tener los tres lados iguales; pero* $\angle AOC = 120°$; *así, pues,*

$\angle AOD = \angle DOC = 60° = \angle DAO,$

y los triángulos serán equiláteros.

Luego el radio hallado AD *es el mismo que el de la circunferencia dada y el punto* D *estará sobre la misma circunferencia.*

379. Sobre una recta (fig. 310) tomamos tres puntos, A, B, C, tales que AB = 2, BC = 3, y trazamos las perpendiculares AX, BY, CZ a la recta AC. Sobre AX tomamos una longitud fija MN y unimos estos puntos a otro O tomado en CZ. A cada posición de O corresponde un segmento rectilíneo IL en BY. ¿Varía la longitud de IL cuando el punto O se desplaza sobre CZ?

Las rectas AX, BY, CZ, *al ser perpendiculares a una tercera* AC, *serán paralelas entre sí; tendremos, por tanto,*

$$\frac{OI}{OM} = \frac{OL}{ON} = \frac{O'I'}{O'M} = \frac{O'L'}{O'N} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{IL}{MN} = \frac{I'L'}{MN}$$

Mas el denominador de las dos últimas razones es igual; luego los numeradores también lo serán y se tendrá: **IL = I′L′**.

380. En los extremos A y B (fig. 311) de una viga horizontal de 3 m de larga se levantan dos montantes verticales AC = 4 m y BD = 3 m. Estos montantes están sujetos por un tirante CD y un crucero formado por los dos brazos AD y BC. Calcular, con una aproximación de 1/100, la longitud de los brazos AD y BC, el tirante CD y las distancias, a los montantes, del punto I, cruce de los dos brazos AD y CB

$$\mathbf{AD} = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} = \mathbf{4{,}24\ m}$$
$$\mathbf{BC} = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = \mathbf{5\ \ m}$$
$$\mathbf{CD} = \sqrt{AB^2 + (AC - BD)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} = \mathbf{3{,}16\ m}$$

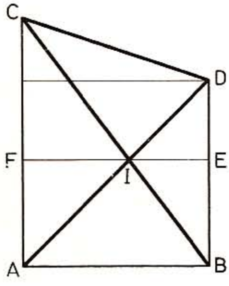


Fig. 311

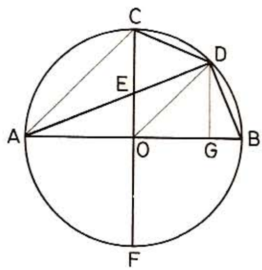


Fig. 312

Haciendo FI = x, *será* IE = 3 − x.

Pero, $\triangle AIC \sim \triangle DIB$ *ya que* $\angle IAC = \angle IDB$ *y* $\angle ACI = \angle DBI$ *(alternos internos) y* $\angle CIA = \angle BID$ *opuestos por el vértice.*

Luego: $\dfrac{FI}{IE} = \dfrac{AC}{BD}$ *es decir* $\dfrac{x}{3-x} = \dfrac{4}{3}$

de donde $x = \mathbf{FI} = \dfrac{12}{7} = \mathbf{1{,}71\ m}$ $\quad 3 - x = \mathbf{IE} = \dfrac{9}{7} = \mathbf{1{,}29\ m}$

381. En una circunferencia O de radio R (fig. 312) se trazan dos diámetros perpendiculares AB y CF y se une el punto A con D, punto medio del arco BC. Probar que se tiene:

1.º $CE \times ED = AE \times EO$
2.º $AE \times AD = 2R^2$
3.º Calcular en función de R, CE, AD, AE.

• 1.º *Tracemos* OD. $\triangle AEC \sim \triangle DEO$ *ya que* $ACE = \widehat{AF}/2 = 45^\circ$; $\angle EOD = \widehat{CD} = 45^\circ$ *y* $\angle AEC = \angle DEO$ *(op. por el vértice).*

Luego $\dfrac{AE}{DE} = \dfrac{CE}{EO}$ *y por tanto* $\mathbf{CE \times DE = AE \times EO}$

• 2.º *Los triángulos rectángulos* AOE *y* ADB *son semejantes (ángulo agudo común). Luego*

$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AO}{AD}$ *por tanto* $\mathbf{AE \times AD} = AB \times AO = 2R \times R = \mathbf{2R^2}.$

• 3.º *Los triángulos semejantes* AEC *y* DEO *del* 1.º *dan también*

$$\frac{CE}{EO} = \frac{AC}{DO} = \frac{R\sqrt{2}}{R} = \sqrt{2} \quad \textit{Luego} \quad \left(\frac{CE}{CE + EO}\right) = \frac{CE}{R} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$

de donde $$\mathbf{CE} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{R\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \mathbf{R}\,(2 - \sqrt{2})$$

En $\triangle ADB$ *(rectángulo):* $AD^2 = AB \times AG.$

Como $AB = 2R$ *y* $AG = AO + OG = R + \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R\,(2+\sqrt{2})}{2}$

Resulta $AD^2 = 2R \times \dfrac{R\,(2+\sqrt{2})}{2} = R^2\,(2+\sqrt{2})$

y $$\mathbf{AD = R\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

En $\triangle AOE$ *(rectángulo):* $AE^2 = AO^2 + OE^2$

Como $AO = R$

y $OE = OC - EC = R - R\,(2-\sqrt{2}) = R\,(1 - 2 + \sqrt{2}) = R\,(\sqrt{2}-1)$

resulta $AE^2 = R^2 + R^2\,(\sqrt{2}-1)^2 = R^2\,(4 - 2\sqrt{2})$

y $$\mathbf{AE = R\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

382. Por un punto P (fig. 313) tomado en el diámetro de una circunferencia se traza una cuerda L perpendicular a dicho diámetro y otra cuerda cualquiera AC que corta a la anterior en D. Demostrar que cualquiera que sea la posición de AC, se tiene:

$$AC \times AD = AB \times AP$$

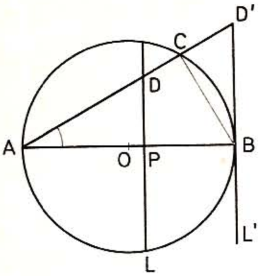


Fig. 313

En el caso en que L sea tangente en B a la circunferencia y $\angle$ BAC = 30º, calcular AC y AD'.

● 1.º *Tracemos la cuerda* CB. *Los triángulos rectángulos* APD *y* ACB *son semejantes ya que tienen un ángulo agudo común. Luego:*

$$\frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AD} \quad \textit{es decir} \quad \mathbf{AC \times AD = AB \times AP.}$$

● 2.º *Para* $\angle$A = 30º *y* L *tangente en* B *se tiene:*

$$\mathbf{AC} = \frac{\mathbf{AB\sqrt{3}}}{\mathbf{2}} \quad y \quad \mathbf{AD'} = \frac{2 \cdot \mathbf{AB\sqrt{3}}}{\mathbf{3}} \quad (\text{GEOM. } \mathbf{447} \text{ y } \mathbf{448})$$

383. Dada una circunferencia O (fig. 314), de diámetro AB, sobre éste y a una distancia d del centro, tal que $d <$ R, radio de la circunferencia, tomamos un punto I. En este punto trazamos IM, perpendicular a AB y en M la tangente a la circunferencia que corta a AB en T. Calcular, en función de d y R:

1.º IM.

2.º IT, deduciendo OT. ¿Se puede hallar OT directamente conociendo OM y OI?

3.º Hallar MT.

Aplicación: $d = 4$ cm y R = 6 cm

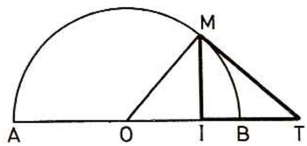


Fig. 314

● 1.º *En el triángulo rectángulo* OIM *tendremos:*

$$\mathbf{IM} = \sqrt{OM^2 - OI^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}\ cm}$$

● 2.º *En* $\triangle$OMT *(rectángulo):* $IM^2 = OI \times IT$

de donde $$\mathbf{IT} = \frac{IM^2}{OI} = \frac{20}{4} = \mathbf{5\ cm}$$

por tanto, $$\mathbf{OT} = OI + IT = 4 + 5 = \mathbf{9\ cm}$$

Se hallaría directamente OT *por la relación*

$$OT \times OI = OM^2$$

de donde $$\mathbf{OT} = \frac{OM^2}{OI} = \frac{36}{4} = \mathbf{9\ cm}$$

● 3.º $\mathbf{MT} = \sqrt{OT^2 - OM^2} = \sqrt{81 - 36} = \mathbf{3\sqrt{5}\ cm}$

384. Dado un triángulo equilátero ABC (fig. 315); sobre BC, como diámetro, se traza una semicircunferencia externa y en ella se inscribe el semiexágono BDEC. Demostrar que si se une el vértice A del triángulo con D y E, los segmentos AD y AE que cortan al lado BC en F y G, darán:

$$BF = FG = GC.$$

Prolonguemos el lado DE *del exágono en ambos sentidos hasta que se encuentre con las prolongaciones de* AB *y* AC.

Por construcción:

$\angle ABF = \angle ACG = 60^\circ$; $\angle FBD = \angle ECG = 120^\circ : 2 = 60^\circ$;

$\angle BDE = \angle CED = 120^\circ$

$\angle B'BD = 180^\circ - (\angle ABF + \angle FBD) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$

$\angle B'DB = 180^\circ - \angle BDE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\angle BB'D = 180^\circ - (\angle B'BD + \angle B'DB) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$

El triángulo BB'D *es pues equiángulo y, por tanto, equilátero y*

$$B'D = BD = DE$$

Análogamente se demuestra que el triángulo CC'E *es equilátero y*

$$EC' = CE = DE.$$

Luego $$B'D = DE = EC' \qquad (1)$$

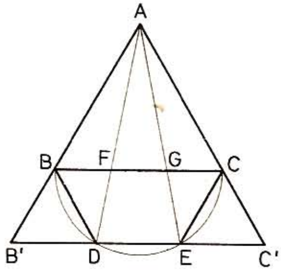


Fig. 315

Por otra parte $\angle BB'D = \angle ABF = 60^\circ$ *y como son correspondientes,* B'C', *y* BC *son paralelos y determinan en las transversales* ABB', AFD, AGE *y* ACC' *segmentos proporcionales y recíprocamente estas transversales determinan en los segmentos paralelos* B'C' *y* BC *otros segmentos proporcionales* (GEOM. **327**).

De suerte que $$\frac{BF}{B'D} = \frac{FG}{DE} = \frac{GC}{EC'}$$

y como (1): $B'D = DE = EC'$ *resulta* **BF = FG = GC**

385. Dada una circunferencia O y un triángulo ABC (fig. 316) con un vértice A en la circunferencia y el lado opuesto BC tangente a la misma en el punto D y paralelo a la cuerda EF que une los lados AB y AC:

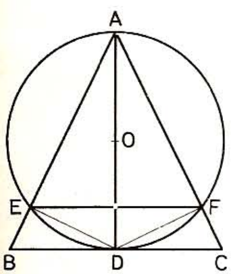


Fig. 316

1.º Demostrar que AD es bisectriz de $\angle BAC$.

2.º Probar que el segmento AD es media proporcional entre AC y AE, y entre AB y AF.

• 1.º *Los arcos* ED *y* DF *son iguales por estar comprendidos entre paralelas; por tanto, los ángulos en* A *también son iguales y* **AD es bisectriz de $\angle$BAC.**

• 2.º *Uniendo* D *y* E *se tienen los dos triángulos rectángulos* AED *y* ADC *que son semejantes por tener un ángulo agudo igual en* A. *Luego*

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AC} \quad y \quad \mathbf{AD^2 = AC \times AE}$$

Trazando DF, *tendremos análogamente* $\triangle AFD \sim \triangle ADB$ *y, por tanto,*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AF} \quad y \quad \mathbf{AD^2 = AB \times AF}$$

IX. Cuadriláteros

386. Dado un trapecio isósceles ABCD (fig. 317) circunscrito a una circunferencia O de radio R, se unen los puntos A y D con el centro O de la circunferencia.

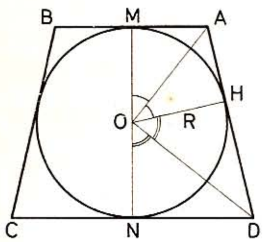


Fig. 317

1.º Demuéstrese que el $\angle AOD$ es recto.

2.º Hállese el valor de los lados oblicuos y la base mayor del trapecio, teniendo en cuenta que R = 30 mm y la base menor AB = 24.

● 1.º **$\angle$AOD es recto.**—*Tracemos el diámetro perpendicular a las bases, y el radio* OH *perpendicular al lado oblicuo* AD.

Los triángulos rectángulos AMO *y* AHO *son iguales, por tener los tres lados respectivamente iguales: la hipotenusa* AO *común;* OM = OH *por radios del mismo círculo;* AM = AH *por tangentes trazadas a un mismo círculo desde el punto exterior* A.

Análogamente se demostraría la igualdad de los triángulos rectángulos DHO *y* DNO.

Las hipotenusas OA *y* OD *son bisectrices de los ángulos suplementarios* $\angle$MOH *y* $\angle$HON. *Luego*

$$\angle \mathbf{AOD} = \frac{\angle MON}{2} = \frac{180^\circ}{2} = \mathbf{90^\circ}$$

● 2.º **Cálculo de AD.**—*Tenemos que*

$$AH = AM = AB : 2 = 12 \text{ mm}$$

En $\triangle$AOD *(rectángulo):* $OH^2 = AH \times HD$

$$HD = \frac{OH^2}{AH} = \frac{R^2}{AH} = \frac{30^2}{12} = 75 \text{ mm}$$

Lado oblicuo: $\mathbf{AD} = AH + HD = 12 + 75 = \mathbf{87\ mm}$

Base mayor: $\mathbf{CD} = 2DN = 2DH = 2 \times 75 = \mathbf{150\ mm}$

387. En un trapecio ABCD (fig. 318) la base menor AB es igual a la altura AH; $\angle A = 135^\circ$ y $\angle B = 150^\circ$. Hállese el perímetro de este trapecio, teniendo presente que AB = a = 20 cm.

Trazando las perpendiculares AH *y* BP *a la base mayor,* el $\angle DAH = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$, *y el triángulo* AHD *será rectángulo isósceles y, por tanto,*

$$AH = DH = a$$
$$AD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$
$$\angle CBP = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$$
y $$\angle C = 30^\circ$$
de donde $$BC = 2BP = 2a$$
y $$PC = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

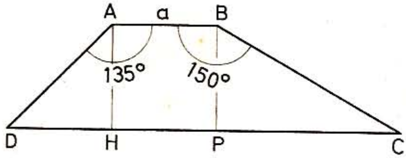


Fig. 318

La base mayor será:

$$DC = DH + HP + PC = a + a + a\sqrt{3} = a(2 + \sqrt{3})$$

Perímetro del trapecio:

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{CD} + \mathbf{DA} = a + 2a + a(2 + \sqrt{3}) + a\sqrt{2}$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = a(1 + 2 + 2 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = a(5 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$$
$$\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = 20 \times 8{,}146 = \mathbf{162{,}92\ cm}$$

388. Inscribir en una semicircunferencia un rectángulo semejante a otro dado cuyas dimensiones sean m y n (fig. 319).

Supongamos el problema resuelto. Sea la semicircunferencia O *de diámetro* MN *y el rectángulo* ABCD *semejante al dado y tal que*

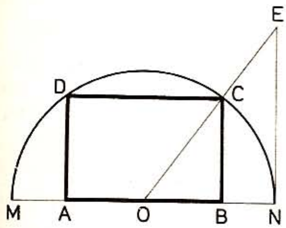


Fig. 319

$$\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$$

tendremos $$\frac{OB}{BC} = \frac{AB:2}{BC} = \frac{m}{2n} \qquad (1)$$

Trazamos la perpendicular NE *hasta que se encuentre con la prolongación del radio* OC, *por ser* $\triangle OBC \sim \triangle ONE$:

$$\frac{OB}{BC} = \frac{ON}{NE} \qquad (2)$$

Comparando (1) *y* (2) $$\frac{OB}{BC} = \frac{ON}{NE} = \frac{m}{2n}$$

y multiplicando por 2 $$\frac{2OB}{BC} = \frac{2ON}{NE} = \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NE} = \frac{m}{n}$$

De donde se infiere que bastará trazar una semicircunferencia de MN = m *por diámetro, trazar en* N *el segmento perpendicular* NE = n *y unir el punto* E *con el centro* O *para hallar el vértice* C *del rectángulo deseado. Se termina trazando.* CD, *paralelo a* MN, *y* CB *y* DA, *perpendiculares a* MN.

389. Dado un trapecio ABCD (fig. 320), rectángulo en A y en D, y en el cual se tiene AB < DC y $AB = a$; $CB = b$ y $AD = 2h$, únase el punto M, medio de AD, con B y con C, y hállese el valor de h en función de a y de b, teniendo en cuenta que el triángulo BMC es rectángulo en M.

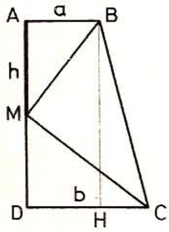


Fig. 320

El triángulo rectángulo BMC *da:*

$$BC^2 = BM^2 + CM^2 \tag{1}$$

Pero en el triángulo rectángulo BHC *tenemos:*

$$BC^2 = BH^2 + CH^2$$
$$BC^2 = (2h)^2 + (b-a)^2$$
$$BC^2 = 4h^2 + b^2 + a^2 - 2ab$$

En el triángulo rectángulo BAM *tendremos también:*

$$BM^2 = AB^2 + AM^2$$
$$BM^2 = a^2 + h^2$$

Y en el triángulo rectángulo MDC:

$$CM^2 = b^2 + h^2$$

Llevando estos valores a la igualdad (1), *resulta:*

$$4h^2 + b^2 + a^2 - 2ab = a^2 + h^2 + b^2 + h^2$$

de donde
$$2h^2 = 2ab$$
y
$$h^2 = ab$$

Por tanto, AM = h *debe ser una media proporcional entre las dos bases.*

390. Demostrar: 1.º Que las diagonales de un trapecio determinan, con las bases del mismo, triángulos semejantes, y las alturas de éstos son entre sí como las bases. 2.º Que si por el punto de concurso I de las diagonales trazamos la paralela MN a las bases se tiene MI = NI (fig. 321).

● 1.º *Sea el trapecio* ABCD *en el cual* AB < CD *y sus diagonales* AC *y* BD *se cortan en el punto* I. $\triangle AIB \sim \triangle DIC$ *por tener el ángulo en* I *igual (opuesto por el vértice),* $\angle A = \angle C$ *y* $\angle B = \angle D$ *(alternos internos); por consiguiente, si trazamos las alturas* IF e IE, *tendremos:*

$$\frac{IF}{IE} = \frac{AB}{CD}$$

● 2.º $\triangle ADC \sim \triangle AMI$, *luego* $\dfrac{MI}{DC} = \dfrac{AM}{AD}$ (1)

$\triangle BDC \sim \triangle BIN$, *luego* $\dfrac{NI}{DC} = \dfrac{BN}{BC}$ (2)

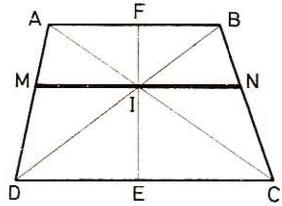


Fig. 321

Pero las paralelas AB, MN *y* DC, *determinan segmentos proporcionales en las transversales* AD *y* BC.

Luego
$$\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} \tag{3}$$

Comparando (1), (3) y (2) *se deduce*

$$\frac{MI}{DC} = \frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC} = \frac{NI}{DC} \quad \textit{es decir,} \quad \frac{MI}{DC} = \frac{NI}{DC}$$

Luego **MI = NI**

4

PROBLEMAS SOBRE LAS AREAS

I. Rectángulo y paralelogramo

391. *Calcular el área de los rectángulos que tienen por base y altura:*

1.º	27 m	y	14 m	3.º	163,24 m	y	76,20 m
2.º	52,7 m	y	16,25 m	4.º	243,25 m	y	137,68 m

- 1.º $\mathbf{A} = 27 \times 14 = \mathbf{378\ m^2}$
- 2.º $\mathbf{A} = 52{,}70 \times 16{,}25 = \mathbf{856{,}375\ m^2}$
- 3.º $\mathbf{A} = 163{,}24 \times 76{,}20 = \mathbf{12\,438{,}888\ m^2}$
- 4.º $\mathbf{A} = 243{,}25 \times 137{,}68 = \mathbf{33\,490{,}6600\ m^2}$

392. *Calcular el área de los paralelogramos que tienen por base y altura:*

1.º	30,22 m	y	25,34 m	3.º	135,20 m	y	137,54 m
2.º	103,75 m	y	96,85 m	4.º	245,15 m	y	190,35 m

- 1.º $\mathbf{A} = 30{,}22 \times 25{,}34 = \mathbf{765{,}7748\ m^2}$
- 2.º $\mathbf{A} = 103{,}75 \times 96{,}85 = \mathbf{10\,048{,}1875\ m^2}$
- 3.º $\mathbf{A} = 135{,}20 \times 137{,}54 = \mathbf{18\,595{,}4080\ m^2}$
- 4.º $\mathbf{A} = 245{,}15 \times 190{,}35 = \mathbf{46\,664{,}3025\ m^2}$

393. *Calcular la base de los rectángulos que tienen de área y de altura:*

1.º	16 423 m²	y	100 m	3.º	16 423 m²	y	342,80 m
2.º	16 423 m²	y	214 m	4.º	16 423 m²	y	685,60 m

- 1.º $\mathbf{b} = \dfrac{16\,423}{100} = \mathbf{164{,}23\ m}$
- 2.º $\mathbf{b} = \dfrac{16\,423}{214} = \mathbf{76{,}74\ m}$
- 3.º $\mathbf{b} = \dfrac{16\,423}{342{,}80} = \mathbf{47{,}90\ m}$
- 4.º $\mathbf{b} = \dfrac{16\,423}{685{,}6} = \mathbf{23{,}95\ m}$

394. *¿Cuál es el área de los rectángulos cuyo perímetro es igual a* 396 m *y cuya base y altura son entre sí:*

1.º	Como 1 a 5	3.º	Como 4 a 5
2.º	» 2 a 3	4.º	» 5 a 6?

La suma de las dos dimensiones es 198, *que se ha de dividir proporcionalmente a los números dados.*

• 1.º	*Base y altura*	33 *y* 165 m;	**área**	33×165	$=$ **5445 m²**
• 2.º	» »	79,2 *y* 118,8 m	»	$79{,}2 \times 118{,}2$	$=$ **9408,96 m²**
• 3.º	» »	88 *y* 110 m	»	88×110	$=$ **9680 m²**
• 4.º	» »	90 *y* 108 m	»	90×108	$=$ **9720 m²**

395. *¿Cuál es el lado de los cuadrados que tienen de área:*

1.º 81 m²; 2.º 264,0625 m²; 3.º 553,1904 m²?

- 1.º $\mathbf{l} = \sqrt{81} = \mathbf{9\ m}$
- 2.º $\mathbf{l} = \sqrt{264{,}0625} = \mathbf{16{,}25\ m}$
- 3.º $\mathbf{l} = \sqrt{553{,}1904} = \mathbf{23{,}52\ m}$

396. *¿Cuál es el área de los cuadrados que tienen de lado:*

1.º	35 m	3.º	65 m
2.º	46 m	4.º	128,15 m?

- 1.º $\mathbf{A} = 35^2 = \mathbf{1\,225\ m^2}$
- 2.º $\mathbf{A} = 46^2 = \mathbf{2\,116\ m^2}$
- 3.º $\mathbf{A} = 65^2 = \mathbf{4\,225\ m^2}$
- 4.º $\mathbf{A} = 128{,}15^2 = \mathbf{16\,422{,}4225\ m^2}$

397. ¿Qué lado ha de tener una mesa cuadrada para que su área sea igual a la de otra mesa rectangular que tiene 1,95 m de largo por 0,94 m de ancho?

$$\mathbf{l} = \sqrt{1{,}95 \times 0{,}94} = \mathbf{1{,}35\ m}$$

398. El palacio nacional de Madrid tiene la forma de un cuadrado de 150 m de lado. ¿Cuál es su área total?

$$\mathbf{A} = 150^2 = \mathbf{22\,500\ m^2}$$

399. ¿Cuántas tablas de 3,90 m de largo por 32 cm de ancho se necesitan para entarimar una sala de 16 m de largo por 7 m de ancho?

Número de tablas: $\dfrac{16 \times 7}{3{,}9 \times 0{,}32} = 89$ *más una para entarimar una superficie de* 0,928 m² *que queda después de empleadas* 89 *tablas, es decir*

90 tablas

400. ¿Cuánto costará un zócalo de 20,75 m por 75 cm si se paga a razón de 66 pts el metro lineal, y la pintura a 25 pts el m²?

El zócalo costará:	$66 \times 20{,}75 =$	1369,50 pts
La pintura »	$25 \times 20{,}75 \times 0{,}75 =$	389,06 pts
Gasto total . .		**1758,56 pts**

401. La extensión superficial de un cuarto que se quiere empapelar mide 140 m^2; los rollos tienen 14 m por 0,50 m y cuestan 45 pts. Calcular el número de rollos y el importe del gasto.

Número de rollos: 140 : 7 = 20
Gasto: 45 × 20 = **900 pts.**

402. Se han pagado 2065,5 pts por el entarimado de un cuarto que tiene 5,40 m por 4,25 m; ¿cuál es el precio del metro cuadrado?

Importe *del metro cuadrado:* $\frac{2065,5}{5,40 \times 4,25} = \mathbf{90\ ptas.}$

403. Siendo de 8,4 hm la anchura de un terreno rectangular de 81,9 ha, dígase cuál será su longitud.

Longitud: 819 000 : 840 = **975 m**

404. ¿Cuál es, en áreas, la extensión superficial de un prado rectangular de 350 m de largo por 85 m de ancho?

$\mathbf{A} = 350 \times 85 = 29\,750\ m^2 = \mathbf{297{,}50\ áreas}$

405. ¿Cuál es, en hectáreas, la superficie de un terreno rectangular de 750 m de largo por 600 m de ancho?

$\mathbf{A} = 750 \times 600 = 450\,000\ m^2 = \mathbf{45\ ha}$

406. Cuando se alarga 20 m una cuerda que da la vuelta a un cuadrado, el cuadrado que se puede rodear tiene 445 m^2 más que el primero. ¿Cuál es la longitud primera de la cuerda?

Sea $4l$ *el perímetro del primer cuadrado; el perímetro del cuadrado que tiene* 445 m^2 *más será:* $4l + 20$, *y su lado:*

$$\frac{4l + 20}{4} = l + 5$$

de donde $(l + 5)^2 = l^2 + 445$
o sea $l^2 + 10l + 25 = l^2 + 445$
$l = 42$ m

Longitud *primera de la cuerda:* 42 × 4 = **168 m**

407. Si se disminuyen 4 m al lado de un cuadrado, se obtiene otro de 256 m^2 menos que el primero. ¿Cuál era su lado?

Llamemos 1 *al lado del primer cuadrado; el lado del otro será* 1 − 4.

Luego $l^2 - (l - 4)^2 = 256$
$\mathbf{1 = 34\ m}$

408. La suma de dos cuadrados es de 3250 m^2, su diferencia de 800 m^2. ¿Cuál es el lado de cada uno?

Llamemos a *y* b *a los lados de los cuadrados y tendremos:*

$$a^2 + b^2 = 3250 \quad (1)$$
$$a^2 - b^2 = 800 \quad (2)$$

Sumando (1) *y* (2): $2a^2 = 4050$

de donde $\mathbf{a} = \sqrt{2025} = \mathbf{45\ m}$

Restando (2) *de* (1): $2b^2 = 2450$

de donde $\mathbf{b} = \sqrt{1225} = \mathbf{35\ m}$

409. Cuando la base de un rectángulo se prolonga un tercio y la altura la mitad, la relación de estas dos dimensiones es de 4 a 3; el mismo resultado se obtiene prolongando de 5 m estas dos dimensiones; ¿cuál será la longitud, la altura y el área de este rectángulo?

Tenemos
$$\frac{b + \frac{b}{3}}{a + \frac{a}{2}} = \frac{4}{3}; \qquad \frac{b+5}{a+5} = \frac{4}{3}$$

Resolviendo el sistema: **b = 15 m, a = 10 m, Area = 150 m²**.

410. ¿Cuál es el lado y cuál el área de un cuadrado, si la diagonal y el lado suman 5,8 m?

Llamando l *al lado, la diagonal será* $l\sqrt{2}$ (GEOM. **443**).

Luego $l + l\sqrt{2} = 5{,}8 \qquad l(1 + \sqrt{2}) = 5{,}8.$

$$\mathbf{l} = \frac{5{,}8}{\sqrt{2}+1} = \frac{5{,}8\,(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{5{,}8 \times 0{,}4142}{2-1} = \mathbf{2{,}402\ m}$$

Area: $5{,}8^2\,(\sqrt{2} - 1)^2 = \mathbf{5{,}772624\ m^2}$.

411. ¿Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular cuya diagonal es de 140 m, sabiendo que vendido a 8000 pts la hectárea, ha producido 7526,4 pts?

Area del campo: $\dfrac{7526{,}4}{8000} = 0{,}9408$ ha.

Llamemos a *y* b *a las dimensiones y tendremos:*

$$a^2 + b^2 = 140^2 = 19\,600 \qquad (1)$$
$$ab = 9408 \qquad (2)$$

Añadimos y quitamos sucesivamente a la igualdad (1) *el duplo de* (2):

$$a^2 + b^2 + 2ab \quad \text{ó} \quad (a+b)^2 = 38\,416$$
$$a^2 + b^2 - 2ab \quad \text{ó} \quad (a-b)^2 = 784$$

De donde $(a + b) = 196 \quad y \quad (a - b) = 28$

Con la suma y la diferencia de las dos cantidades tendremos:

$$\mathbf{a} = \frac{196 + 28}{2} = \mathbf{112\ m}$$

$$\mathbf{b} = \frac{196 - 28}{2} = \mathbf{84\ m}$$

412. Se quiere construir un cuadrado de extensión superficial 3 1/2 veces mayor que otro que tiene 7 m de lado. ¿Qué longitud ha de tener el lado?

Area del cuadrado dado: $49\ m^2$

» » *pedido:* $49 \times 3,5 = 171,5\ m^2$

Lado » » $\sqrt{171,5} = \mathbf{13,09\ m}$

413. La diagonal de un cuadrado es de 20 m. ¿Cuál es su lado?

Sea l *el lado del cuadrado, su diagonal será:* $l\sqrt{2}$ (GEOM. **443**).

Luego $l\sqrt{2} = 20$

de donde
$$l = \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = \mathbf{14,1421\ m}$$

414. Dado un cuadrado de lado c y diagonal d (fig. 322), determinar la anchura x del rectángulo equivalente que tenga de longitud la diagonal del cuadrado.

Debiendo ser $dx = c^2$ *se desprende que* x *es una tercera proporcional entre* c *y* d. *Sea* ABCD *el cuadrado dado; tendremos que*

$$AB = c \quad \text{y} \quad AC = d$$

Sobre AC *tomaremos una longitud* AE = c, *y trazando* EF, *paralela a* BC, *la porción* AF *será la tercera proporcional pedida.*

En efecto
$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AF}$$

esto es,
$$\frac{d}{c} = \frac{c}{x}$$

de donde:
$$dx = c^2$$

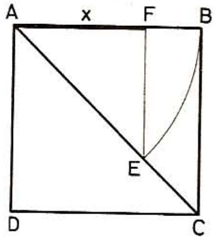


Fig. 322

415. Para cubrir un tejado rectangular de 29,7 m de largo, se gastaron 24 552 pizarras de 25 × 19 cm, las cuales pierden al colocarse la 1/5 parte de su extensión eficaz. ¿Qué anchura tenía el tejado?

Una pizarra cubre:
$$\frac{25 \times 19 \times 4}{5} = 380\ cm^2$$

Area del tejado: $0,038 \times 24\,552 = 932,976\ m^2$

Anchura del tejado:
$$\frac{932,976}{29,7} = \mathbf{31,41\ m}$$

416. Se cambia un predio cuadrado de 216 m de perímetro por otro rectangular cuya anchura no es más que los 5/9 del lado de la finca cuadrada. Cuál será la longitud del terreno rectangular:

a) En el caso en que los dos terrenos tengan igual precio.

b) Cuando el precio del terreno rectangular sea los 4/5 del precio del otro.

1.º *Lado del predio cuadrado:* $216 : 4 = 54\ m$

Area del mismo: $54 \times 54 = 2916\ m^2$

Anchura del terreno rectangular: $\frac{54 \times 5}{9} = 30$ m

Longitud del mismo: $2916 : 30 =$ **97,2 m**

- 2.º *Para que los dos terrenos valgan igual, el rectangular debe medir:*

$$\frac{2916 \times 5}{4} = 3645 \text{ m}^2$$

y su **longitud:** $3645 : 30 =$ **121,5 m**

417. Un terreno 3 veces más largo que ancho está cercado con una valla de madera de 1,6 m de alta y está dividido en tres partes iguales separadas por un vallado idéntico al anterior y dispuesto en sentido de la anchura. El área total de la valla es 240 m². ¿Qué dimensiones tiene ese terreno?

Longitud total del vallado: $240 : 1{,}6 = 150$ m.

Sea x *la anchura, la longitud será* 3x *y todo el cerco* 8x.

Agregando las dos vallas internas, hacen un total de 10x

$$10x = 150 \text{ m} \qquad x = 15 \text{ m}$$

Las **dimensiones** *son:* **15 m** *y* **45 m.**

418. Un terreno rectangular, cuya anchura es los 3/5 de su longitud, está rodeado de un sendero rectangular, perteneciente al terreno, de 1 m de ancho. ¿Cuál será el área de este sendero, si el perímetro interior del mismo es 136 m y cuál será el área del terreno?

Sea l *la longitud del rectángulo y* a *su altura:*

$$2\,(l - 2) + 2\,(a - 2) = 136$$

$$\frac{a}{l} = \frac{3}{5}$$

De donde se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} l + a = 72 \\ a = \dfrac{3l}{5} \end{array}\right\} \textit{lo que da} \left\{\begin{array}{l} l = 45 \text{ m} \\ a = 27 \text{ m} \end{array}\right.$$

Area del terreno: $45 \times 27 =$ **1215 m².**

El área del sendero será igual a la diferencia entre la del rectángulo exterior y la del interior:

Area del sendero: $1215 - (45 - 2)\,(27 - 2) =$ **140 m².**

419. Un paralelogramo ABCD tiene 64 cm de perímetro, el lado menor es los 3/5 del mayor y los ángulos agudos tienen 45º. Calcular la altura y el área de dicho paralelogramo (fig. 323).

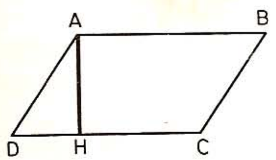


Fig. 323

$$AB + \frac{3 \times AB}{5} = 32 \text{ cm}$$

$$AB = \frac{32 \times 5}{8} = 20 \text{ cm}$$

$$AD = 32 - 20 = 12 \text{ cm}$$

Altura AH.—*Sea* AH *la altura del paralelogramo y* $\angle D = 45^o$.
El triángulo rectángulo isósceles AHD *dará:*

$$AH^2 + DH^2 = AD^2 = 12^2 = 144$$
$$2AH^2 = 144$$
$$\mathbf{AH} = \sqrt{\frac{144}{2}} = \mathbf{8{,}484\ cm}$$

Area paralelogramo: **A** : $20 \times 8{,}484 =$ **169,68 cm²**.

420. Una finca de forma rectangular ABCD (fig. 324) tiene una longitud AB = CD = 115 m y al construir una carretera que pasa por ella pierde una extensión de 270 m². Si la parte cedida al Estado forma un triángulo AED cuyo vértice E está a 103 m del punto B sobre el lado AB, ¿cuál será la anchura de la finca, su área primitiva y la que tiene después de pasar la carretera?

Base del $\triangle$AED: $115 - 103 = 12$ m

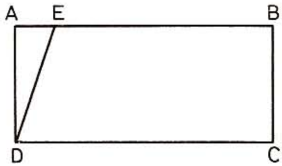


Fig. 324

- *Altura del mismo:*

$$\mathbf{AD} = \frac{270 \times 2}{12} = \mathbf{45\ m}$$

- *Area primitiva de la finca:*

$$115 \times 45 = \mathbf{5175\ m^2}$$

- *Area actual:* $5175 - 270 =$ **4905 m²**.

Comprobación.—*La forma actual de la finca es la de un trapecio que tiene por bases:*

CD = 115 m   EB = 103 m   *Altura:* BC = 45 m

Area actual:
$$\frac{(115 + 103) \times 45}{2} = 4905\ m^2$$

421. Un paseo de un jardín tiene 3 m de ancho; a lo largo tiene 12 acacias a cada lado, distantes 4 m una de otra y las de los extremos distan de éstos 2,5 m. Hállese el área que ocupa el paseo, y dígase, dado caso que no hubiese nada más que 10 acacias en cada lado quedando las de los extremos en el mismo sitio, qué distancia habría entre una y otra.

Distancia entre la primera y última acacia: $11 \times 4 =$ 44 m
Longitud del paseo: $44 + (2{,}5 \times 2) =$ 49 m

- 1.º **Area del paseo** $49 \times 3 =$ **147 m²**
- 2.ª *Si no hubiera nada más que* 10 *acacias entre los dos extremos,* **distaría** *una de otra* $44 : 9 =$ **4,9 m** *por exceso.*

422. Se reparte un huerto en cierto número de lotes iguales de 640 m² cada uno; y si se hubiera hecho un lote menos cada uno sería de 768 m². Hallar el área de ese huerto.

Sea x *el área; número de lotes en el* 1.^{er} *caso:* $\frac{x}{640}$ *y en el* 2.º: $\frac{x}{768}$; *como difieren en* 1, *se tendrá:*

$$\frac{x}{640} = \frac{x}{768} = 1$$

$$768x - 640x = 1 \times 640 \times 768$$
$$128x = 640 \times 768$$
$$\textbf{Area} = x = \mathbf{3840\ m^2}$$

423. Un terreno rectangular, cuya anchura es los 2/5 de la longitud, tiene un área de 75,625 áreas. Hallar las dimensiones.

Sea x *la longitud, la anchura será* 2x/5 *y el área:*

$$x \times \frac{2x}{5} = 7562{,}5\ \text{m}^2$$

$$x^2 = \frac{7562{,}5 \times 5}{2} = 18\,906{,}25$$

- 1.º **Longitud:** $x = \sqrt{18\,906{,}25} = \mathbf{137{,}50\ m}$
- 2.º **Anchura:** $\frac{137{,}50 \times 2}{5} = \mathbf{55\ m}$

424. Trazado un cuadrado ABCD (fig. 325) de 3 cm de lado, se prolonga el lado AB una longitud BA′ = 6 cm, el lado BC, CB′ = 6 cm, el lado CD, DC′ = 6 cm y el lado DA, AD′ = 6 cm. Uniendo los puntos obtenidos se tiene un cuadrilátero A′B′C′D′. Averiguar si es un cuadrado y calcular su área, en función de los datos dados.

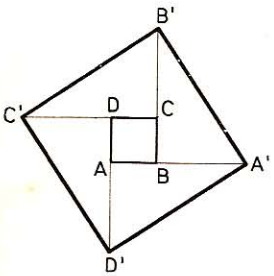


Fig. 325

El cuadrilátero A′B′C′D′ *se compone del cuadrado* ABCD *y de cuatro triángulos rectángulos cuyos catetos miden* 9 *cm y* 6 *cm. Las hipotenusas son, pues, iguales y*

$$A'B' = B'C' = C'D' = D'A'$$

La suma de los ángulos agudos en A′, B′, C′ *y* D′ *es* 90º *ya que los ángulos agudos del triángulo rectángulo son complementarios.*

A′B′C′D′ es, pues, un cuadrado *cuyo lado mide* $\sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117}$ cm.

Area de A′B′C′D′: $\mathbf{A} = (\sqrt{117})^2 = \mathbf{117\ cm^2}$.

425. Aumentando 1 m la longitud *a* y la anchura *b* de un jardín rectangular:

1.º ¿Cuánto aumenta el área del mismo?

2.º Si el área primera era de 600 m² y la segunda 659 m², ¿qué perímetro tenía el primitivo jardín?

- 1.º *Area primera:* ab
  Area segunda: $(a + 1)(b + 1) = ab + b + a + 1$
  Aumento: $\mathbf{a + b + 1}$

- 2.º *Según el enunciado, tenemos:*

$$\begin{array}{rl} ab + b + a + 1 & = 659 \\ ab & = 600 \\ \hline a + b + 1 & = 59 \\ a + b & = 58 \\ 2(a + b) & = \mathbf{116\ m} \end{array}$$

Restando se tendrá: $a + b + 1 = 59$; $a + b = 58$

El perímetro: $2(a + b) = \mathbf{116\ m}$

426. Hemos comprado, a 25 pts m^2, un terreno rectangular cuya anchura es los 2/3 de la longitud. Entregamos el valor al contado, que asciende a 52 245 pts, comprendidos los gastos del registro de la propiedad que suben al 7,50 % del precio de compra. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

Precio del terreno: $\dfrac{52\,245 \times 100}{107{,}5} = 48\,600$ ptas.

Area del mismo: $48\,600 : 25 = 1944\ m^2$

Anchura: $\sqrt{\dfrac{1944 \times 2}{3}} = \mathbf{36\ m}$

Longitud: $\dfrac{36 \times 3}{2} = \mathbf{54\ m}$

427. En un tapiz rectangular, cuya longitud es 1 m más que la anchura, se pone una tira alrededor que mide 0,10 m de ancha, con lo cual el área del tapiz aumenta 1,44 m^2. ¿Qué dimensiones tenía el tapiz y cuáles tiene ahora? Hállese el área que tiene actualmente (fig. 326).

Sea xm *la anchura; la longitud será* (x + 1) m.

La nueva anchura será (x + 0,2) *y la nueva longitud* (x + 1,2).

Aumento del área:

$$(x + 0{,}2)(x + 1{,}2) - x(x + 1) = 1{,}44$$
$$x^2 + 1{,}4\,x + 0{,}24 - x^2 - x = 1{,}44$$
$$x = 3$$

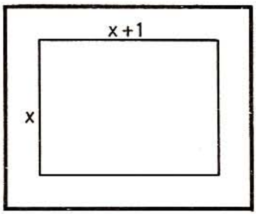


Fig. 326

Anchura primitiva: 3 m *y la* **actual 3,20 m**
Longitud primitiva: 4 m *y la* **actual 4,20 m**
Area primitiva: 12 m² ** *y la* **actual 13,44 m²

428. La anchura de una finca es 1/4 de la longitud. Si se prolongase ésta 5 m y aquélla 3 m, la finca tendría un aumento de 1 a 85 ca. ¿Qué dimensiones tiene dicha finca?

Sea x *la anchura, la longitud será* 4x *y el área* $4x \times x = 4x^2$.

Después del aumento la anchura será x + 3, *la longitud* 4x + 5 *y el área* $(4x + 5)(x + 3) = 4x^2 + 17x + 15$.

Aumento: $4x^2 + 17x + 15 - 4x^2 = 185$
Anchura: $x =$ **10 m**
Longitud: $4x =$ **40 m**

429. Un labrador divide un predio de 37 áreas en dos lotes. El primero estimado en 30 pts m², vale 12 000 pts más que el segundo, el cual está tasado en 25 pts m². Hallar el valor y la extensión de cada lote.

Sea x *áreas la extensión del* 1.^{er} *lote; la del* 2.º *será* (37 — x) *áreas.*
El precio del 1.º *es* 3000x *y el del* 2.º, 2500 (37 — x).

Luego:
$$3000x - 2500\,(37 - x) = 12\,000$$
$$3000x + 2500x = 12\,000 + 92\,500$$
$$5500x = 104\,500$$
$$x = 19$$

El **primer lote** *mide* **19 a** *y el* **segundo** 37 — 19 = **18 a.**

430. Un pabellón cuadrado de 12 m de lado está rodeado de una galería cubierta de igual anchura por todas partes, y cuya área es de 145 m². Calcular la anchura que tiene.

El pabellón y la galería forman un cuadrado cuya área es

$$144 \text{ m}^2 + 145 \text{ m}^2 = 289 \text{ m}^2$$

El lado será: $\sqrt{289} = 17$ m

Anchura de la galería: $\dfrac{17 - 12}{2} = \mathbf{2{,}50\ m}$

431. Dos parcelas de terreno tenían igual área hasta que su amo vendió 140 áreas de la primera y 45 áreas de la segunda, y entonces el área de la primera quedó reducida a la mitad de la segunda. ¿Qué área tenían antes de la venta esas parcelas?

Sea x *el área primitiva; después de la venta queda reducida la primera a* x — 140 *y la segunda a* x — 45; *por tanto,*

$$x - 45 = (x - 140) \times 2$$
$$x - 45 = 2x - 280$$
$$x - 2x = 45 - 280$$
$$\mathbf{x = 235\ áreas}$$

432. ¿Cómo habrá que disponer 36 cuadrados de 15 cm de lado para formar primero un tapiz cuadrado y después otro rectangular? En ambos casos, ¿cuál será el área cubierta, el perímetro del tapiz y la longitud del cosido para unir los cuadrados?

De cualquier modo que se los disponga para formar el tapiz, el área será siempre la misma, esto es:

$$\mathbf{A} = 15^2 \times 36 = 8100 \text{ cm}^2 = \mathbf{0{,}81\ m^2}$$

Dibújese el esquema en cada caso.

• 1.º *Tapiz* cuadrado *formado por* 6 *hileras de* 6 *cuadrados:*

Perímetro: $15 \times 6 \times 4 = 360$ cm = **3,6 m**
Longitud cosida: $(15 \times 6 \times 5) \times 2 = 900$ cm = **9 m**

- 2.º *Rectángulo formado por los 36 cuadrados en fila:*

Perímetro:	$[15 + (15 \times 36)] \times 2 = 1110$ cm $=$ **11,1 m**
Longitud cosida:	$0{,}15 \times 35 =$ **5,25 m**

- 3.º *Rectángulo formado por 2 hileras de 18 cuadrados:*

Perímetro:	$[(15 \times 2) + (15 \times 18)] \times 2 =$ **6 m**
Longitud cosida:	$(15 \times 18) + (15 \times 2 \times 17) =$ **7,8 m**

- 4.º *Rectángulo formado por 3 hileras de 12 cuadrados:*

Perímetro:	$[(15 \times 3) + (15 \times 12)] \times 2 =$ **4,5 m**
Longitud cosida:	$(15 \times 12 \times 2) + (15 \times 3 \times 11) =$ **8,55 m**

- 5.º *Rectángulo formado por 4 hileras de 9 cuadrados:*

Perímetro:	$[(4 \times 15) + (15 \times 9)] \times 2 =$ **3,9 m**
Longitud cosida:	$(15 \times 9 \times 3) + (15 \times 4 \times 8) =$ **8,85 m**

433. Para embaldosar una cocina de 3,2 m de largo por 2,8 m de ancho empleamos baldosas exagonales de 8,1 cm de lado. ¿Cuánto costarán las baldosas empleadas a razón de 550 pts el ciento, suponiendo que se desechan 1/32 de las baldosas compradas?

Area de la cocina: $3{,}2 \times 2{,}8 = 8{,}96$ m

Area de una baldosa: $\dfrac{3 \times 8{,}1^2 \sqrt{3}}{2} = 170{,}45 \text{ cm}^2$

Número de baldosas: $89\,600 : 170{,}45 = 526$ *por exceso*

Habrá que comprar: $\dfrac{526 \times 32}{31} = 543$ » »

Que costarán: $5{,}5 \times 543 =$ **2986,5 ptas.**

434. Dado un cuadrado ABCD (fig. 327), sobre cada lado y fuera del cuadrado se construye un triángulo isósceles cuya altura sea la mitad del lado.

1.º Demostrar que se obtiene un cuadrado cuya área es el doble de la del cuadrado primitivo.

2.º Suponiendo que el área del nuevo cuadrado es 369,92 cm² hallar el lado del cuadrado primitivo.

Sea x *el lado del cuadrado, su área será* x^2.
El área de los 4 triángulos será:

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{2} \times 4 = x^2$$

Tenemos: $2x^2 = 369{,}92 \text{ cm}^2$

de donde $x^2 = 184{,}96 \text{ cm}^2$

y $\mathbf{x} = \sqrt{184{,}96} =$ **13,6 cm**

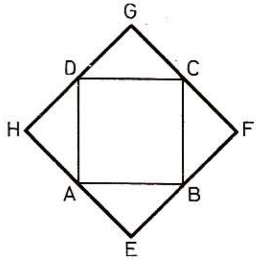


Fig. 327

435. Dadas la diagonal AC = 82 cm y la anchura BC = 18 cm de un rectángulo ABCD, calcular el perímetro y el área del mismo.

AC *forma con los lados del rectángulo el triángulo rectángulo* ABC, *en él:*

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{82^2 - 18^2} = 80 \text{ cm}$$

Perímetro *del rectángulo:* $(80 + 18) \times 2 =$ **1,96 m**

Area *del mismo:* $80 \times 18 =$ **1440 cm²**

436. Un cuadrado ABCD tiene 72,25 cm² de área. 1.º Demostrar que el cuadrilátero (fig. 330) EFGH obtenido uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado es otro cuadrado. 2.º Calcular su área y su perímetro.

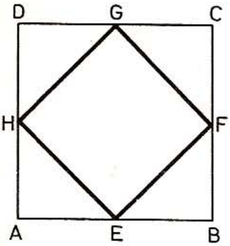


Fig. 328

Los triángulos rectángulos HAE, FCG, EBF, GDH *son isósceles e iguales. Luego*

$$EF = FG = GH = HE$$

$$HEF = EFG = FGH = GHE = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$$

Por tanto, el cuadrilátero **EFGH es un cuadrado.**

$$EF = \sqrt{EB^2 + FB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Area del cuad. $\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{72,25}{2} = \mathbf{36,125\ cm^2}$

Perímetro $\frac{a}{2}\sqrt{2} \times 4 = 2a\sqrt{2} = 2\sqrt{72,25} \times \sqrt{2} = \mathbf{24,04\ cm}$

437. Se cerca un terreno rectangular de 2187 m² de área y cuya anchura es la 1/3 de la longitud con un vallado que cuesta 36 pts metro. ¿A cuánto asciende el gasto?

Si x *es la anchura,* 3x *será la longitud.*

El área será: $3x \times x = 3x^2 = 2187$

de donde $x = \sqrt{\frac{2187}{3}} = 27 \text{ m}$

La longitud: $3x = 27 \times 3 = 81 \text{ m}$

Perímetro: $(81 + 27) \times 2 = 216 \text{ m}$

Valor *de la cerca:* $36 \times 216 =$ **7776 pts.**

438. Aumentando el lado de un cuadrado 5 m, el área crece 225 m². Hallar el lado de ese cuadrado.

Sea x *el lado. El aumento de área es:*

$$(x + 5)^2 - x^2 = 225$$

o sea $x^2 + 10x + 25 - x^2 = 225$

de donde $\mathbf{x = 20\ m}$

439. Calcular el área de un cuadrado, siendo 4,8 m la suma o la diferencia de la diagonal y el lado del mismo.

Sea x *el lado; la diagonal será* $x\sqrt{2}$

- 1.º $x + x\sqrt{2} = 4{,}8$

$$x(\sqrt{2} + 1) = 4{,}8$$

$$x = \frac{4{,}8}{\sqrt{2} + 1} = 1{,}988 \text{ m}$$

Area: $x^2 = 1{,}988^2 = \mathbf{3{,}954\ m^2}$

- 2.º $x\sqrt{2} - x = 4{,}8$

$$x(\sqrt{2} - 1) = 4{,}8$$

$$x = \frac{4{,}8}{\sqrt{2} - 1} = 11{,}588 \text{ m}$$

Area: $x^2 = 11{,}588^2 = \mathbf{134{,}29\ m^2}$

440. Se planta de viña un campo cuadrado de 50 m de lado, disponiendo las cepas a 1 m de la linde y a 0,80 m de distancia unas de otras. ¿Cuánto costará la plantación a razón de 600 pts el ciento de cepas?

La hilera del borde tiene 50 m − 2 m = 48 m.

Se podrán plantar en ella: $\frac{48}{0{,}8} + 1 = 61$ *cepas*

Siendo el terreno cuadrado habrá: $61 \times 61 = 3\,721$ *cepas*
La plantación costará: $6 \times 3721 =$ **22 326 pts.**

441. Calcular los lados y el área de un rectángulo cuya diagonal tiene 48 m si la relación entre la anchura y la longitud es de 1 a 3.

Sea d *la diagonal y* x *la anchura, la longitud será* 3x; *por tanto,*

$$x^2 + 9x^2 = d^2 = 48^2 = 2304$$

Anchura: $x = \sqrt{\frac{2304}{10}} = \mathbf{15{,}1789\ \ m}$

Longitud: $3x = \mathbf{45{,}5367\ m}$
Area: $x \times 3x = 3x^2 = 230{,}4 \times 3 = \mathbf{691{,}20\ \ m^2}$

442. En un paralelogramo ABCD (fig. 329), la base AB = 18 m y la altura $h = 12$ m. Uniendo un vértice con el punto medio de los lados opuestos queda dividido en tres partes. Calcular el área de cada una.

La diagonal DB *divide al paralelogramo en dos triángulos equivalentes, y las medianas* DE *y* DF *dividen a éstos a su vez en otros dos equivalentes; tendremos, por tanto:*

Area del ABCD : $18 \times 12 = 216$ m²

Area de DFC = *área* ADE: $\frac{216}{2 \times 2} = \mathbf{54\ m^2}$

Area de DEBF: $\frac{216}{2} = \mathbf{108\ m^2}$

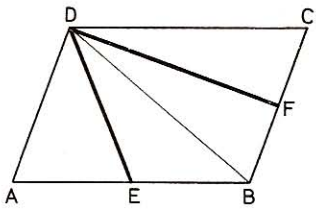


Fig. 329

443. Hallar las dimensiones de un rectángulo cuya área es de 28 m², sabiendo que se diferencian en 3 m.

Sea x *la anchura, la longitud será* x + 3, *y el área* x × (x + 3) = 28

de donde $x^2 + 3x - 28 = 0$

y $$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 28}}{2} = \frac{-3 \pm 11}{2} = 4$$

tomando sólo la raíz positiva ya que se trata de una longitud.

Los **lados** *serán:* **4 m** *y* **7 m.**

444. La base de un rectángulo tiene 52 m más que la altura. Calcular ambas dimensiones, sabiendo que el área es de 16 485 m².

Sea x *la altura, la base será* x + 52 *y el área* x(x + 52) = 16 485 *de donde*

$$x^2 + 52x - 16\,485 = 0$$
$$x = -26 \pm \sqrt{26^2 + 16\,485} = -26 + 131 = 105$$

Altura, **105 m;** *base,* **157 m.**

445. Cambiamos una finca de forma cuadrada de 160 m de perímetro por otra de forma rectangular y de igual perímetro, pero cuya área no es más que los 15/16 de la otra. Hállense las dimensiones de esta última finca.

El lado del cuadrado será: 160 : 4 = 40 m

El área del mismo: 40 × 40 = 1600 m²

y la del rectángulo: $$\frac{1600 \times 15}{16} = 1500 \text{ m}^2$$

Las dimensiones a *y* b *deben satisfacer a las condiciones:*

$$a + b = 80 \quad \text{y} \quad ab = 1500$$
$$x^2 - 80x + 1500 = 0$$
$$x = 40 \pm \sqrt{40^2 - 1500} = 40 \pm 10$$

Dimensiones: **a = 50 m; b = 30 m.**

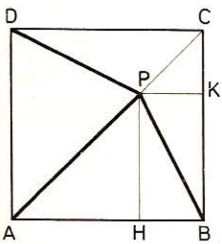


Fig. 330

446. Hallar en la diagonal AC del cuadrado ABCD (figura 330) de lado *a* un punto P tal que, uniéndole con los vértices A, B, D quede dividido el cuadrado en 3 partes equivalentes.

El △APB es doble del △BPC. — *Considerando el vértice* B, *ambos tienen la misma altura, luego la base* AP *del primero es doble de la* PC *del segundo. Por tanto:*

$$\mathbf{AP} = \frac{2 \cdot AC}{3} = \frac{\mathbf{2a\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$$

447. En un rectángulo ABCD (fig. 331) la base AB = 25 cm y BC = 15 cm. Se lleva sobre AB, AM = 10 cm y por el punto M se trazan las paralelas MN, MP a las diagonales, y asimismo desde N y P las NR y PR. Calcular el perímetro y el área del paralelogramo inscrito MNRP.

● 1.º $DB = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{25^2 + 15^2} = \sqrt{850} = 29{,}155$ cm

Por ser △AMP ∼ △ABD: $$\frac{PM}{DB} = \frac{AM}{AB} = \frac{10}{25}$$

Por ser △BMN ∼ △BAC: $$\frac{MN}{AC} = \frac{MB}{AB} = \frac{15}{25}$$

Sumando y teniendo en cuenta que AC = DB:

$$\frac{PM}{DB} + \frac{MN}{AC} = \frac{10}{25} + \frac{15}{25}$$

$$\frac{PM + MN}{DB} = \frac{25}{25} = 1$$

Luego: $PM + MN = DB = 29{,}155$ cm

Perímetro: $2(PM + MN) = 29{,}155 \times 2 =$
$= \mathbf{58{,}31\ cm}$

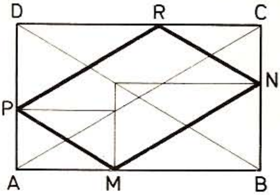


Fig. 331

• 2.º *Area* (MNRP) = *área rectáng.* ABCD — *área triáng.* AMP, MBN, NCR, RDP.

Los triángulos semejantes AMP *y* ABD *dan:*

$$\frac{AP}{AD} = \frac{AM}{AB} \qquad AP = NC = \frac{AD \times AM}{AB} = \frac{15 \times 10}{25} = 6 \text{ cm}$$

Además: $DR = MB = AB - AM = 25 - 10 = 15$ cm

$DP = BN = BC - NC = 15 - 6 = 9$ cm

$$\textit{área}\ MAP = \textit{área}\ NCR = \frac{AM \times AP}{2} = \frac{10 \times 6}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

$$\textit{área}\ MBN = \textit{área}\ RDP = \frac{DR \times DP}{2} = \frac{15 \times 9}{2} = 67{,}5 \text{ cm}^2$$

Area (MNRP) $= 25 \times 15 - (30 \times 2) - (67{,}5 \times 2) = \mathbf{180\ cm^2}$.

448. Calcular el área de un rectángulo cuya base es triple de la altura, sabiendo que si aumentamos cada dimensión en a metros, el área aumenta en p metros cuadrados.

Aplicación: para $a = 5$, y $p = 385$.

Sea x *la altura, la base será* 3x; *por tanto, tendremos:*

$$(3x + a)(x + a) = 3x^2 + p$$

de donde $$x = \frac{p - a^2}{4a}$$

y la base $$3x = \frac{3(p - a^2)}{4a}$$

Area: $$\mathbf{A} = 3x^2 = \frac{p - a^2}{4a} \times \frac{3(p - a^2)}{4a} = \frac{3(p - a^2)^2}{16a^2}$$

Aplicación: $$\mathbf{A} = \frac{3(385 - 25)^2}{16 \times 25} = \mathbf{972\ m^2}$$

II. Triángulo

449. Calcular el área de los triángulos que tienen respectivamente de base y altura:

1.º 24 m y 12 m
2.º 85,50 m y 64,34 m

- 1.º $\mathbf{A} = \dfrac{12 \times 24}{2} = \mathbf{144\ m^2}$

- 2.º $\mathbf{A} = \dfrac{85{,}50 \times 64{,}34}{2} = \mathbf{2750{,}535\ m^2}$

450. Hallar el área de un triángulo de 24 m de base y cuya altura es los 5/4 de la misma.

$$\mathbf{A} = \frac{24 \times \dfrac{24 \times 5}{4}}{2} = \mathbf{360\ m^2}$$

451. Calcular la base de los triángulos que tienen respectivamente de área y altura:

1.º 8704 m^2 y 64 m
2.º 8704 m^2 y 68 m
3.º 8704 m^2 y 100 m
4.º 8704 m^2 y 136 m
5.º 8704 m^2 y 544 m

El área de un triángulo se expresa por la fórmula:

$$\mathrm{A} = \frac{ba}{2} \quad \textit{de donde} \quad b = \frac{2\mathrm{A}}{a} = \frac{\mathrm{A}}{a/2}. \quad \textit{Luego}$$

- 1.º $b = \mathbf{272\ m}$
- 2.º $b = \mathbf{256\ m}$
- 3.º $b = \mathbf{174{,}08\ m}$
- 4.º $b = \mathbf{128\ m}$
- 5.º $b = \mathbf{32\ m}$

452. ¿Cuál es la base y cuál la altura de un triángulo de 162 m^2 de área, si las dimensiones pedidas son iguales?

Area de este triángulo: $b \times \dfrac{b}{2} = \dfrac{b^2}{2} = 162$

de donde $\mathbf{b} = \sqrt{162 \times 2} = \mathbf{18\ m}$

453. Un triángulo tiene 2880 m^2 de área. ¿Cuáles son sus dimensiones, si están en la relación de 2/5?

Designando las dimensiones por 2x *y* 5x, *tendremos:*

Area: $\dfrac{5x \times 2x}{2} = 2880$

de donde $x = \sqrt{\dfrac{2880}{5}} = 24$

Las dimensiones serán $24 \times 2 = \mathbf{48\ m}$

y $24 \times 5 = \mathbf{120\ m}$

454. Hallar la base y la altura de un triángulo de 975,375 m^2 de área, siendo la altura el tercio de la base.

Designando la base por x, *la altura será* x/3.

Area: $$\frac{x \times x}{6} = 975{,}375$$

$$x = \sqrt{5852{,}25} = 76{,}5$$

La **base** *tiene* **76,50 m** *y la* **altura 25,5 m**

455. Hallar la base y la altura de un triángulo que tiene 864 m^2 de área, si la base es los 3/4 de la altura.

Llamando x *a la altura, la base será:* 3x/4.

Area: $$\frac{x \times 3x}{8} = 864$$

de donde $$x = \sqrt{2304} = 48$$

La **altura** *tiene* **48 m** *y la* **base 36 m.**

456. Un quiosco cuadrado de 3 m de lado tiene un tejado piramidal con aleros de 60 cm. Calcular el área de ese tejado, teniendo en cuenta que cada triángulo tiene 2,50 m de altura.

Base de los triángulos iguales que forman el tejado:

$$3 + (0{,}60 \times 2) = 4{,}20 \text{ m}$$

Area del tejado: $$\mathbf{A} = \frac{4{,}20 \times 2{,}50 \times 4}{2} = \mathbf{21\ m^2}$$

457. Calcular el área de los triángulos cuyos lados tienen respectivamente:

1.° 135 m, 85 m y 75 m
2.° 330 m, 210,50 m y 410,5 m
3.° 23,5 m, 31,50 m y 17,4 m

Aplicamos la fórmula $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (GEOM. **572**):

- 1.° $T = \sqrt{147{,}5 \times 12{,}5 \times 62{,}5 \times 72{,}5} = \mathbf{2\,890{,}40\ m^2}$
- 2.° $T = \sqrt{475{,}5 \times 145{,}5 \times 265 \times 65{,}5} = \mathbf{34\,653{,}76\ m^2}$
- 3.° $T = \sqrt{36{,}2 \times 12{,}7 \times 4{,}7 \times 18{,}8} = \mathbf{201{,}55\ m^2}$

458. Dado un triángulo isósceles ABC, cuyos lados iguales AB = AC tienen cada uno 13 cm y el otro lado BC = 10 cm, hallar el área y altura de dicho triángulo.

Sea el triángulo isósceles ABC. *Trazando la altura* AH, *tendremos en el triángulo rectángulo* AHB:

- 1.° *Altura:* $\mathbf{AH} = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \mathbf{12\ cm}$
- 2.° *Area del triángulo:* $\mathbf{A} = \dfrac{10 \times 12}{2} = \mathbf{60\ cm^2}$

459. Un triángulo equilátero tiene igual perímetro que un cuadrado de 2304 cm² de área. ¿Qué diferencia hay entre el área de los dos?

Lado del cuadrado: $l_4 = \sqrt{2304} = 48$ cm

Perímetro del cuadrado o del triángulo: $48 \times 4 = 192$ cm

Lado del triángulo equilátero: $l_3 = \dfrac{48 \times 4}{3} = 64$ cm

Area del triángulo: $A_3 = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{64^2 \times 1{,}732}{4} = 1773{,}568 \text{ cm}^2$

El área del cuadrado excede a la del triángulo en

$$2304 - 1773{,}568 = \mathbf{530{,}432\ cm^2}$$

460. Hallar el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa tiene 15 m.

Dicho triángulo es la mitad del área de un cuadrado que tiene una diagonal de 15 *m*.

Area del cuadrado: $A_1 = \left(\dfrac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{15^2}{2} \text{ m}^2$

Area del triángulo: $\mathbf{A_2} = \dfrac{15^2}{2 \times 2} = \mathbf{56{,}25\ m^2}$

461. Los lados de un triángulo tienen, respectivamente, 5, 7 y 10 cm. Hallar el área de ese triángulo y sus tres alturas.

Para hallar el área se aplica la fórmula (GEOM. **572**):

$$T = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

$$\mathbf{T} = \sqrt{11\,(11-10)\,(11-5)\,(11-7)} = 2\sqrt{66} = \mathbf{16{,}248\ cm^2}$$

Cálculo de las alturas:

$$\mathbf{AH} = \frac{16{,}245 \times 2}{10} = \mathbf{3{,}2496\ cm}$$

$$\mathbf{AH''} = \frac{16{,}248 \times 2}{5} = \mathbf{6{,}4992\ cm}$$

$$\mathbf{AH'} = \frac{16{,}248 \times 2}{7} = \mathbf{4{,}642\ cm}$$

Se advierte que las alturas están en relación inversa con los lados. Al lado a = 10 *cm le corresponde una altura que es la mitad que la del lado* b.

462. Dado el lado 0,25 m de un cuadrado, hallar el lado de un triángulo equilátero de igual área.

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Area del cuadrado:} & 0{,}25^2 \\ \textit{Area del triáng. equil:} & \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \end{array}\right\} \quad \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 0{,}25^2$$

$$\mathbf{l} = \sqrt{\frac{0{,}25^2 \times 4}{\sqrt{3}}} = 0{,}25 \times 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 0{,}5\sqrt{\frac{1{,}732}{3}} = \mathbf{0{,}38\ m}$$

463. Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado tiene 10 m.

$$\mathbf{A} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{100}{4}\sqrt{3} = \mathbf{43{,}30\ m^2} \qquad [\text{G}\textsc{eom}.\ \mathbf{568}]$$

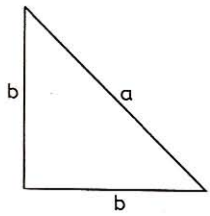


Fig. 332

464. Un triángulo rectángulo isósceles tiene 120 m de perímetro. Calcular su área.

Tenemos:

$$\begin{cases} 2b + a = 120 \\ 2b^2 = a^2 \longrightarrow a = b\sqrt{2} \end{cases}$$

$$2b + b\sqrt{2} = 120$$

es decir

$$b\,(2 + \sqrt{2}) = 120$$

$$b = \frac{120}{2 + \sqrt{2}} = \frac{120\,(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})\,(2 - \sqrt{2})} = \frac{120\,(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 60\,(2 - \sqrt{2})$$

Area del triángulo: $\mathbf{A} = \frac{b^2}{2} = \frac{60^2(2 - \sqrt{2})^2}{2} = \mathbf{617{,}76\ m^2}$

465. El cateto menor de un triángulo rectángulo tiene 11 m y la hipotenusa tiene 1 m más que el otro cateto. Calcular estos dos últimos lados y el área del triángulo.

Sean los catetos 11 *y* b, *la hipotenusa será* b + 1.

Tendremos:

$$(b + 1)^2 = b^2 + 11^2$$
$$b^2 + 2b + 1 = b^2 + 121$$

$$\mathbf{b} = \frac{120}{2} = \mathbf{60\ m} \quad y \quad \mathbf{b + 1 = 61\ m}$$

Area:

$$\mathbf{A} = \frac{60 \times 11}{2} = \mathbf{330\ m^2}$$

466. El área de un triángulo rectángulo es 294 m² y la altura correspondiente a la hipotenusa 8,4 m. Calcular los tres lados.

La hipotenusa tendrá: 294 : 4,2 = 70 m.

Para hallar los catetos, sabemos que:

$$b^2 + c^2 = a^2 = 4900 \qquad (1)$$
$$2bc = 4\,\text{A} = 294 \times 4 = 1176 \qquad (2)$$

Sumando (1) *y* (2) *y restando* (2) *de* (1) *tenemos:*

$$b^2 + c^2 + 2bc = 6076 \qquad b^2 + c^2 - 2bc = 3724$$
$$(b + c)^2 = 6076 \qquad (b - c)^2 = 3724$$
$$b + c = 77{,}95 \quad (3) \qquad b - c = 61{,}02 \quad (4)$$

Sumando y restando (3) *y* (4) *da:*

$$\mathbf{b} = \frac{77{,}95 + 61{,}02}{2} = \mathbf{69\,485\ m;} \quad \mathbf{c} = \frac{77{,}95 - 61{,}02}{2} = \mathbf{8{,}465\ m}$$

467. Un triángulo tiene un área de 42 m², un ángulo de 60° y uno de los lados de este ángulo 14 m. Calcular los otros dos lados (fig. 333).

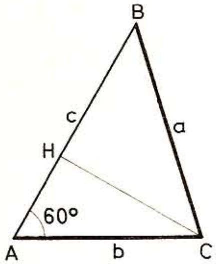


Fig. 333

Sea c = 14 m; $\quad CH = \dfrac{42 \times 2}{14} = 6$ m.

Para $\angle A = 60°$; $CH = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$ (CH = *altura triángulo equilátero de lado* b).

Luego: $\dfrac{b\sqrt{3}}{2} = 6$

$$\mathbf{b} = \frac{6 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} = \mathbf{6{,}928\ m}$$

$$AH = \frac{b}{2} = 2\sqrt{3} = 3{,}464 \text{ m}$$

$$HB = 14 - 3{,}464 = 10{,}536 \text{ m}$$

$$\mathbf{a} = \sqrt{CH^2 + BH^2} = \sqrt{36 + 10{,}536^2} = \sqrt{147{,}007296} = \mathbf{12{,}12\ m}$$

468. Dado el triángulo ABC, se toma sobre BC un segmento BD = BC/4 y se traza AD, luego sobre AD se toma DO = AD/4 y se trazan OB y OC. Calcular el área de los tres triángulos parciales AOB, BOC, COA, sabiendo que el total ABC mide 60 m² (fig. 334).

Tracemos las alturas AH, OK *y* BL.

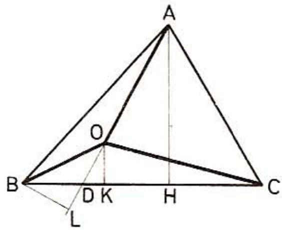


Fig. 334

$\triangle DKO \sim \triangle DHA$, *por tanto* $\dfrac{OK}{AH} = \dfrac{DO}{DA} = \dfrac{1}{4}$

Los triángulos BOC *y* BAC *tienen igual base,* BC. *Luego*

$$\frac{\textit{área}\ BOC}{\textit{área}\ BAC} = \frac{OK}{AH} = \frac{1}{4}$$

$$\textbf{Area BOC} = \frac{1}{4}\ \textit{área}\ BAC = \frac{1}{4} \times 60 = \mathbf{15\ m^2}$$

Los triángulos ODB *y* OBC *tienen igual altura,* OK. *Luego*

$$\frac{\textit{área}\ ODB}{\textit{área}\ OBC} = \frac{DB}{BC} = \frac{1}{4}$$

Area ODB = 1/4 *área* OBC = 1/4 × 15 m² = 3,75 m².

Los triángulos AOB *y* ODB *tienen igual altura,* BL. *Luego*

$$\frac{\textit{área}\ AOB}{\textit{área}\ ODB} = \frac{OA}{OD} = \frac{DA - DO}{DO} = \frac{(1 - 1/4)\ DA}{1/4\ DA} = 3$$

Area AOB = 3 *Area* ODB = 3,75 × 3 = **11,25 m²**

Area COA = *área* BAC − *área* AOB − *área* BOC = 60 − 11,25 − 15 = = **33,75 m²**

469. Hallar en el plano de un triángulo un punto tal, que uniéndolo con los tres vértices, quede dividido el triángulo en otros tres equivalentes.

Tracemos las medianas AD, BE *y* CF. *Sabemos que concurren en un punto* G *(baricentro) situado a los* 2/3 *de cada una de ellas a partir del vértice.*

Tracemos (fig. 335) *el segmento* BH *perpendicular a la prolongación de* AD *y la altura* AK.

Los triángulos AGB *y* ADB *tienen la misma altura*, BH. *Luego*

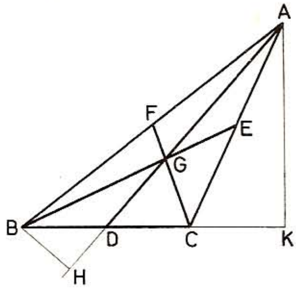


Fig. 335

$$\frac{\textit{área}\ \mathrm{AGB}}{\textit{área}\ \mathrm{ADB}} = \frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AD}} = \frac{2}{3}$$

$$\textit{Area}\ \mathrm{AGB} = \frac{2}{3}\ \textit{área}\ \mathrm{ADB} \qquad (1)$$

Los triángulos ADB *y* ACB *tienen igual altura*, AK. *Luego*

$$\frac{\textit{área}\ \mathrm{ADB}}{\textit{área}\ \mathrm{ACB}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2} \qquad \textit{Area}\ \mathrm{ADB} = \frac{1}{2}\ \textit{área}\ \mathrm{ACB}$$

$$\textit{Según (1): área}\ \mathrm{AGB} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\ \textit{área}\ \mathrm{ACB} = \frac{1}{3}\ \textit{área}\ \mathrm{ACB}$$

Análogamente demostraríamos que

$$\textit{Area}\ \mathrm{AGC} = \frac{1}{3}\ \textit{área}\ \mathrm{ACB} \qquad y \qquad \textit{área}\ \mathrm{BGC} = \frac{1}{3}\ \textit{área}\ \mathrm{ACB}$$

Por consiguiente, el punto buscado es el punto G, **baricentro del triángulo.**

470. Sea el triángulo ABC y O el punto de intersección de las medianas; prolongando la mediana AD una parte DE = AD/3 calcular el área del triángulo OBE (fig. 336).

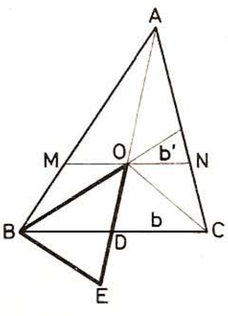


Fig. 336

$\triangle$BDE = $\triangle$ODC *(ángulo igual entre lados iguales)*
Luego $\triangle$BOE *es equivalente a* $\triangle$BOC
pero *área* $\triangle$BOC = 1/3 *área* $\triangle$ABC (n.º **469**)
luego **área $\triangle$BOE = 1/3 área $\triangle$ABC**

471. Un triángulo tiene por base b = 20 m, y por altura h = 15 m. Calcular la longitud de la paralela a la base que divide dicho triángulo en dos partes equivalentes.

El área del triángulo parcial AMN (fig. 336) *debe ser la mitad de la del triángulo dado* ABC; *pero las áreas de dos figuras semejantes son proporcionales al cuadrado de los lados homólogos* (GEOM. **550**).

$$\textit{Luego} \quad \frac{b'^2}{b^2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{b'}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

de donde $$b' = \frac{b\sqrt{2}}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = \mathbf{14{,}142\ m}$$

472. Dado un cuadrado ABCD (fig. 337) de 24 cm de lado, se prolonga AB una longitud BE = 6 cm, y desde E se traza el segmento EF, el cual divide al cuadrado en dos cuadriláteros iguales. Calcular el área de cada uno y el área total de la figura obtenida.

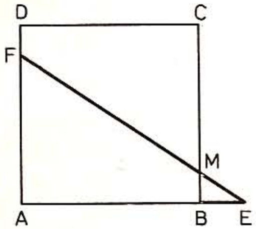


Fig. 337

Sea M *el punto en que el segmento* EF *corta al lado* BC; *el segmento* MF *divide al cuadrado en dos trapecios iguales que tienen igual altura,* AB *o* CD; *también deben ser de iguales bases. Por tanto,*

$$DF = BM \quad y \quad AF = CM$$

Sea BM = x, *será* CM = 24 − x
Por ser △EMB ∼ △EAF *tendremos*

$$\frac{EB}{EA} = \frac{BM}{AF}, \quad o\ bien \quad \frac{6}{24+6} = \frac{x}{24-x}$$

de donde
$$30x = 144 - 6x$$
$$36x = 144$$
$$x = 4$$

Area de cada trapecio: $\frac{4+20}{2} \times 24 = \mathbf{288\ cm^2}$

Area del triángulo EBM: $\frac{6 \times 4}{2} = 12\ cm^2$

Area de la figura total $(288 \times 2) + 12 = \mathbf{588\ cm^2}$

473. Dos triángulos isósceles ABC, CDE (fig. 338) tienen las bases AC = 6 m, CE = 8 m sobre una misma línea recta y el punto C de estas dos bases es común. Los lados AB = BC = 10 m; CD = DE = 15 m. Calcular el perímetro y el área del cuadrilátero ABDE.

El cuadrilátero ABDE *queda descompuesto por las alturas de los triángulos dados en el trapecio rectángulo* BHLD *y los triángulos rectángulos* ABH *y* DLE.

En △AHB:

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 3^2} = 9{,}54\ m$$

En △ELD:

$$DL = \sqrt{DE^2 - EL^2} = \sqrt{15^2 - 4^2} = 14{,}45\ m$$

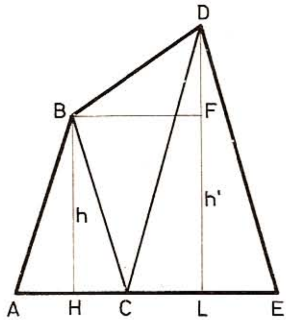


Fig. 338

El segmento BF *paralelo a* AE, *determina el triángulo rectángulo* BFD, *que da*

$$BD = \sqrt{BF^2 + FD^2} = \sqrt{HL^2 + (DL - BH)^2} = \sqrt{7^2 + 4{,}91^2} = 8{,}55\ m$$

Perímetro ABDE: $2p = 10 + 8{,}55 + 15 + 14 = \mathbf{47{,}55\ m.}$

Area ABDE: $A = \dfrac{BH + DL}{2} \times LH + \dfrac{AH \cdot BH}{2} + \dfrac{LE \cdot DL}{2}$

$$A = \frac{9{,}54 + 14{,}45}{2} \times 7 + \frac{3 \times 9{,}54}{2} + \frac{4 \times 14{,}45}{2} = \mathbf{127{,}175\ m^2}$$

474. Los dos triángulos equiláteros ABC y CDE (fig. 339) tienen las bases a y b sobre una misma recta ACEO y un vértice común C. Se traza BD y se prolonga hasta que encuentre a AE en O. Calcular, en función de a y b:

1.º El área del triángulo BCD.
2.º El área de DEO.
3.º El área de ABO.
4.º El área de BCO.

● 1.º *En el triángulo* BCD *tracemos la altura* DH

$$\angle BCD = 180^\circ - (\angle ACB + \angle ECD) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$$

El triángulo rectángulo CHD *es la mitad de un triángulo equilátero de lado* CD. *Luego*

$$DH = \frac{CD\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

$$\textbf{Area BCD} = \frac{BC \times DH}{2} = \frac{\mathbf{ab\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}$$

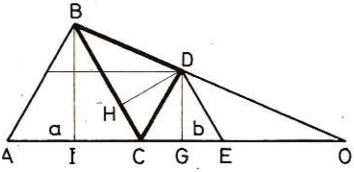


Fig. 339

● 2.º *Area del triángulo* DEO $= \dfrac{EO \times DG}{2}$

Como $\angle OED = 120^\circ$ *y* $\angle OCB = 120^\circ$, ED *y* CB *son paralelos. Luego*

$$\frac{EO}{CO} = \frac{DE}{BC} \quad \textit{o bien} \quad \frac{EO}{b + EO} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{EO}{(b + EO) - EO} = \frac{b}{(a - b)} \quad \textit{es decir} \quad \frac{EO}{b} = \frac{b}{(a - b)}$$

Luego $EO = \dfrac{b^2}{(a - b)}$ *y como* $DG = \dfrac{ED\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$

$$\textbf{Area DEO} = \frac{1}{2} \times \frac{b^2}{(a - b)} \times \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathbf{b^3\sqrt{3}}}{\mathbf{4\,(a - b)}}$$

● 3.º *Area del triángulo* ABO $= \dfrac{AO \times BI}{2}$

$$AO = AC + CE + EO = a + b + \frac{b^2}{(a - b)} = \frac{(a + b)(a - b) + b^2}{a - b} = \frac{a^2}{a - b}$$

y como $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\textbf{Area ABO} = \frac{1}{2} \times \frac{a^2}{(a - b)} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathbf{a^3\sqrt{3}}}{\mathbf{4\,(a - b)}}$$

● 4.º *Area del triángulo* BCO $= \dfrac{CO \times BI}{2}$

$$CO = CE + EO = b + \frac{b^2}{(a-b)} = \frac{b(a-b)+b^2}{(a-b)} = \frac{ab}{a-b}$$

$$\textbf{Area BCO} = \frac{1}{2} \times \frac{ab}{(a-b)} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathbf{a^2b\sqrt{3}}}{\mathbf{4(a-b)}}$$

475. Un triángulo ABC (fig. 340) cuya base AC queda dividida por la altura BI = 4 m en dos segmentos de 6 m y 8 m está inscrito en una circunferencia. Se prolonga BI hasta que corte a la circunferencia en D. Calcular el radio OC de la misma, la prolongación ID, las distancias de las cuerdas AC y BD al centro O, los lados y el área del cuadrilátero inscrito ABCD.

- 1.º $ID \times IB = IA \times IC$; $\mathbf{ID} = \dfrac{IA \times IC}{IB} = \dfrac{6 \times 8}{4} = \mathbf{12\ m}$

- 2.º *Cuando dos cuerdas secantes son rectangulares, la suma de los cuadrados de los cuatro segmentos es constante* (GEOM. **376,** 2.º):

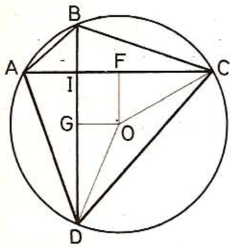


Fig. 340

$$4^2 + 12^2 + 6^2 + 8^2 = 4R^2$$

$$\mathbf{R} = \sqrt{65} = \mathbf{8{,}06\ m}$$

- 3.º $\mathbf{OF} = \sqrt{OC^2 - FC^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{65 - 49} = \mathbf{4\ m}$

- 4.º $\mathbf{OG} = \sqrt{OD^2 - GD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{65 - 64} = \mathbf{1\ m}$

- 5.º **Area de ABCD** $= \dfrac{AC \times BD}{2} = 16 \times 7 = \mathbf{112\ m^2}$

- 6.º $\mathbf{AB} = \sqrt{AI^2 + IB^2} = \sqrt{36 + 16} = \mathbf{7{,}21\ m}$

$$\mathbf{BC} = \sqrt{IB^2 + IC^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} = \mathbf{8{,}944\ m}$$
$$\mathbf{CD} = \sqrt{IC^2 + ID^2} = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{208} = \mathbf{14{,}42\ m}$$
$$\mathbf{AD} = \sqrt{AI^2 + ID^2} = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} = \mathbf{13{,}416\ m}$$

476. Una finca de forma triangular ABC (fig. 341) tiene por lados:

$$AB = 30\ m, \quad BC = 37\ m \quad y \quad AC = 55\ m$$

1.º Si se traza la altura BH queda dividida en dos parcelas. Calcular el área de cada una.

2.º ¿A qué distancia de A habrá que tomar un punto K para que el segmento BK divida a la finca en otros dos triángulos cuya diferencia sea 120 m²?

1.º **Area de los triángulos ABH y CBH.**— *Como* AB *es el lado menor del triángulo, el ángulo opuesto* C *es agudo y tenemos:*

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \times CH$$

de donde $$CH = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2AC}$$

$$CH = \frac{37^2 + 55^2 - 30^2}{2 \times 55} = 31{,}76 \text{ m}$$

$$AH = 55 - 31{,}76 = 23{,}24 \text{ m}$$

La altura común: $BH = \sqrt{30^2 - 23{,}24^2} = 18{,}70$ m

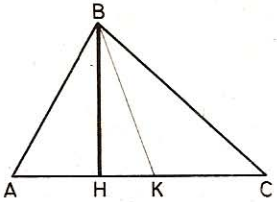


Fig. 341

$$\textbf{Area ABH} = \frac{18{,}70 \times 23{,}24}{2} = \mathbf{217{,}294\ m^2}$$

$$\textbf{Area BCH} = \frac{18{,}70 \times 31{,}76}{2} = \mathbf{296{,}956\ m^2}$$

2.º **Posición del punto K.**—*El área total de la finca será:*

$$217{,}294 + 296{,}956 = 514{,}25 \text{ m}^2$$

Un triángulo (ABK) *tendrá:* $$\frac{514{,}25 + 120}{2} = 317{,}125 \text{ m}^2$$

el otro (BCK) *tendrá:* $$\frac{514{,}25 - 120}{2} = 197{,}125 \text{ m}^2$$

Como los dos triángulos tienen igual altura, sus áreas son proporcionales a las bases; luego

$$\frac{317{,}125}{197{,}125} = \frac{AK}{CK} \quad \textit{es decir} \quad \frac{2537}{1577} = \frac{AK}{55 - AK}$$

de donde $$AK = \frac{2537 \times 55}{4114} = \mathbf{39{,}92\ m}$$

477. Dado un triángulo ABC (fig. 342), tal que $AB = 12\sqrt{3}$ cm y $BC = 20$ cm; el ángulo $B = 60^\circ$, calcular el área del mismo. ¿A qué distancia del vértice A habrá que trazar la recta MN paralela al lado BC para que el triángulo AMN sea 1/3 del trapecio MNBC? Hállese también el valor de MN.

● 1.º *Trazando la altura* AH *el triángulo rectángulo* AHB, *en el que* $\angle B = 60^\circ$, *da:*

$$AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = 18 \text{ cm}$$

Area ABC: $$\mathbf{A} = \frac{20 \times 18}{2} = \mathbf{180\ cm^2}$$

● 2.º *Sea* I *el punto donde la paralela* MN *corta a la altura* AH; *la distancia del vértice* A *a la paralela* MN *será* AI.

Siendo el triángulo AMN, 1/3 *del trapecio, será* 1/4 *del triángulo total* ABC, *y como los dos son semejantes, la razón de sus áreas será* 1/4 *y la de sus lados homólogos:*

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

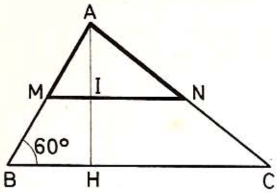


Fig. 342

por tanto $$\mathbf{AI} = \frac{AH}{2} = \frac{18}{2} = \mathbf{9\ cm}$$

• 3.º $$\mathbf{MN} = \frac{BC}{2} = \frac{20}{2} = \mathbf{10\ cm}$$

478. Calcular el área de un triángulo cuya mediana A'M' tiene 12 cm, teniendo en cuenta que es semejante a otro triángulo rectángulo cuyos catetos tienen respectivamente AB = 20 cm, AC = = 8 cm.

La mediana de un triángulo rectángulo correspondiente a la hipotenusa es igual a la mitad de ésta; en el triángulo semejante tendremos:

Hipotenusa: $$BC = \sqrt{20^2 + 8^2} = \sqrt{464}$$

Mediana: $$\sqrt{464} : 2 = \sqrt{116}$$

Area: $$\frac{20 \times 8}{2} = 80\ cm^2$$

Las áreas de las figuras semejantes son proporcionales a los cuadrados de sus líneas homólogas; por tanto:

$$\frac{A}{80} = \left(\frac{12}{\sqrt{116}}\right)^2 = \frac{144}{116} \quad \textit{de donde} \quad \mathbf{A} = \frac{80 \times 144}{116} = \mathbf{99{,}31\ cm^2}$$

479. Dada una semicircunferencia O (fig. 343), de diámetro BC = 2R, en el centro trazamos el radio OA perpendicular y trazamos la cuerda AB = c. Sobre OC tomamos un segmento OM = a y trazamos la perpendicular MP hasta encontrar en P a la semicircunferencia y, por fin, se une P con C y B. Calcular, en función de a y c, el área del triángulo BPC.

Aplicación numérica:

$$R = 6\ cm, \quad a = 4\ cm \quad y \quad c = 6\sqrt{2}$$

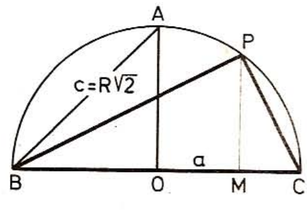


Fig. 343

La cuerda AB *es el lado del cuadrado inscrito; por tanto*

$$AB = c = R\sqrt{2} \quad y \quad R = BO = CO = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$

Los dos segmentos que la altura PM *del triángulo rectángulo* BPC *determina sobre la hipotenusa* BC *son:*

$$BM = R + a = \frac{c\sqrt{2}}{2} + a \quad y \quad MC = R - a = \frac{c\sqrt{2}}{2} - a$$

Esta altura PM *es media proporcional entre* BM *y* MC, *luego:*

$$PM = \sqrt{\left(\frac{c\sqrt{2}}{2} + a\right)\left(\frac{c\sqrt{2}}{2} - a\right)} = \sqrt{\frac{2c^2}{4} - a^2}$$

$$\textbf{Area BPC} = \frac{1}{2} \times BC \times PM = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{c\sqrt{2}}{2} \times PM =$$

$$= \frac{c\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{\frac{2c^2}{4} - a^2} = \sqrt{\frac{2c^2 - 4a^2}{4} \times \frac{2c^2}{4}} = \sqrt{\frac{4c^4 - 8a^2c^2}{4 \times 4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^4 - 2a^2c^2}{4}} = \sqrt{\frac{c^2(c^2 - 2a^2)}{4}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{c}^2 - 2\mathbf{a}^2}$$

Aplicación numérica:

$$\textbf{Area BPC} = \frac{6\sqrt{2}}{2}\sqrt{(6\sqrt{2})^2 - 32} = \mathbf{26{,}832\ cm^2}$$

480. En un triángulo ABC (fig. 344) cuyos lados AB = 13 cm, AC = 15 cm y BC = 14 cm, tomamos un punto O en la región interior y lo unimos con cada vértice. Calcular la distancia que hay desde dicho punto a los vértices, sabiendo que las tres distancias son iguales.

Al ser OA = OB = OC, *el punto* O *será el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo; por tanto,* OA = OB = OC = R.

Según GEOM. **569**

$$A_r = \frac{abc}{4R} \quad \textit{de donde} \quad R = \frac{abc}{4A_r}$$

$$A_r = \sqrt{21\,(21 - 13)\,(21 - 14)\,(21 - 15)}$$

$$A_r = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84\ \text{cm}^2$$

$$R = \mathbf{OA} = \mathbf{OB} = \mathbf{OC} = \frac{13 \times 15 \times 14}{4 \times 84} = \mathbf{8{,}125\ cm}$$

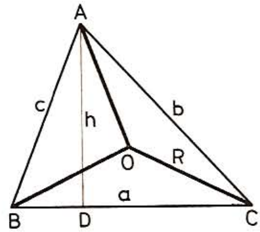


Fig. 344

481. Calcular el valor de los catetos de un triángulo rectángulo cuando la hipotenusa tiene 30 cm y el radio de la circunferencia inscrita $r = 6$ cm.

Sean b *y* c *los dos catetos que se buscan. En todo triángulo rectángulo* (n.º **157**), *la suma de los catetos es igual a la hipotenusa más el diámetro de la circunferencia inscrita,*

$$b + c = a + 2r$$

$$b + c = 30 + 12 = 42 \qquad (1)$$

Por otro lado se tiene: $b^2 + c^2 = a^2 = 900$ (2)

Elevando al cuadrado la (1) *tenemos:* $b^2 + c^2 + 2bc = 1764$ (3)

Restando la (2) *de la* (3) *resulta:* $2bc = 864$

$$bc = 432$$

Conociendo la suma de dos números, b + c = 42, *y su producto,* bc = 432, *tendremos utilizando las propiedades de las raíces:*

$$x^2 - 42x + 432 = 0$$

de donde
$$x = 21 \pm \sqrt{21^2 - 432} = 21 \pm 3$$
$$\mathbf{x' = b = 24\ cm}$$
$$\mathbf{x'' = c = 18\ cm}$$

482. En los extremos de un rectángulo ABCD (fig. 345) se añaden dos triángulos isósceles cuyas bases son AD y BC, iguales a la anchura del rectángulo y las alturas MH y NP iguales a la mitad de dicha anchura. Si la figura completa tiene 128 cm² y la diagonal mayor MN = 20 centímetros, ¿cuáles serán las dimensiones de dicho rectángulo?

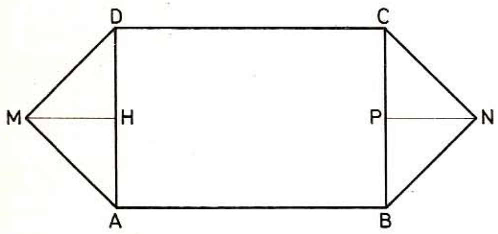


Fig. 345

Sea x *la anchura del rectángulo, la longitud será* 20 — x, *y el área* (20—x) x=20x—x².

Area de los triángulos: $2\left(\frac{x}{2} \times \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{2}$

Tendremos, pues $20x - x^2 + \frac{x^2}{2} = 128$

o bien $x^2 - 40x + 256 = 0$

$$x = 20 \pm \sqrt{20^2 - 256} = 20 \pm 12$$

Como debe ser x < 20, *sólo es aceptable el valor* x = 8.

Dimensiones: **8 cm** *y* 20 — 8 = **12 cm.**

III. Rombo y trapecio

483. Calcular el área de los rombos cuyas diagonales tienen:

1.º	36 m	y	24 m	3.º	65,15 m	y	32,2 m
2.º	49,25 m	y	27,5 m	4.º	92,85 m	y	76,9 m

El área del rombo es igual al semiproducto de las diagonales:

- 1.º $\mathbf{A} = \frac{36 \times 24}{2} = \mathbf{432\ m^2}$
- 2.º $\mathbf{A} = \frac{49,25 \times 27,5}{2} = \mathbf{677,1875\ m^2}$
- 3.º $\mathbf{A} = \frac{65,15 \times 32,2}{2} = \mathbf{1048,915\ m^2}$

• 4.º $\mathbf{A} = \dfrac{92{,}85 \times 76{,}9}{2} = \mathbf{3750{,}0825\ m^2}$

484. ¿Cuál es el área de los rombos en los cuales la suma de las diagonales es igual a 535,5 m, si estas diagonales son entre sí:

1.º Como 4/5
2.º Como 2/7
3.º Como 6/11
4.º Como 10/11?

Para hallar las diagonales hay que dividir sucesivamente 535,5 m *en proporción a los números* 4 *y* 5, 2 *y* 7, 6 *y* 11, 10 *y* 11. *Lo cual da:*

1.º 238 y 297,5
2.º 119 y 416,5
3.º 189 y 346,5
4.º 255 y 280,5

Areas:

• 1.º $\dfrac{238 \times 297{,}5}{2} = \mathbf{35\,402{,}50\ m^2}$

• 2.º $\dfrac{119 \times 416{,}5}{2} = \mathbf{24\,781{,}75\ m^2}$

• 3.º $\dfrac{189 \times 346{,}5}{2} = \mathbf{32\,744{,}25\ m^2}$

• 4.º $\dfrac{255 \times 280{,}5}{2} = \mathbf{35\,763{,}75\ m^2}$

485. Calcular el área de los rombos que tienen de lado y altura, respectivamente:

1.º 12 m y 7 m
2.º 20 m y 15 m
3.º 49,24 m y 32,15 m
4.º 59,70 m y 41,15 m

(GEOM. **496**)
• 1.º $\mathbf{A} = 12 \times 7 = \mathbf{84\ m^2}$
• 2.º $\mathbf{A} = 20 \times 15 = \mathbf{300\ m^2}$
• 3.º $\mathbf{A} = 49{,}24 \times 32{,}15 = \mathbf{1543{,}066\ m^2}$
• 4.º $\mathbf{A} = 59{,}7 \times 41{,}15 = \mathbf{2456{,}655\ m^2}$

486. Calcular el área de los trapecios cuya altura y bases respectivas tienen:

1.º Altura 16 m bases 24 m y 36 m
2.º » 20,15 m » 34,25 m y 62,4 m
3.º » 36,2 m » 75,7 m y 85,8 m
4.º » 35,5 m » 106,5 m y 134,45 m

(GEOM. **501**)
• 1.º $\mathbf{A} = \left(\dfrac{24 + 36}{2}\right) \times 16 = \mathbf{480\ m^2}$

• 2.º $\mathbf{A} = \left(\dfrac{34{,}25 + 62{,}4}{2}\right) \times 20{,}15 = \mathbf{974{,}65\ m^2}$

• 3.º $\mathbf{A} = \left(\dfrac{75{,}7 + 85{,}8}{2}\right) \times 36{,}2 = \mathbf{2923{,}15\ m^2}$

• 4.º $\mathbf{A} = \left(\dfrac{106{,}5 + 134{,}45}{2}\right) \times 35{,}5 = \mathbf{4276{,}86\ m^2}$

487. Calcular las bases y la altura de un trapecio de 100 m^2, sabiendo que la altura es igual a 1/5 de la suma de las bases y que la base menor es la mitad de la mayor.

Llamando x *a la base menor, la mayor será* 2x, *y la altura* 3x/5.

Luego $$\frac{3x}{2} \times \frac{3x}{5} = 100$$

$$9x^2 = 1000$$

$$x = \frac{\sqrt{1000}}{3} = 10{,}54 \text{ m}$$

Las **bases** *tienen* **10,54 m** *y* **21,08 m**
La **altura** *tiene* **6,324 m**

488. El área de un trapecio es de 700 m^2; los lados paralelos tienen 30 y 40 m. ¿Qué distancia hay entre ellos?

Tenemos $$a \times \frac{30 + 40}{2} = 700 \text{ m}^2$$

de donde $$\mathbf{a} = \frac{700}{35} = \mathbf{20 \text{ m}}$$

489. ¿Cuál es la longitud de la base menor de un trapecio de 200 m^2 si la base mayor tiene 18 m y la altura 12?

Designando por x *la base menor, tendremos:*

$$\left(\frac{x + 18}{2}\right) 12 = 200$$

de donde: $$\mathbf{x = 15{,}33 \text{ m}}$$

490. El área de un trapecio es de 900 m^2; las dos bases y la altura son entre sí como 2, 3, 4. Calcular las bases.

Sean 2x *y* 3x *las bases y* 4x *la altura.*

Area $$\left(\frac{2x + 3x}{2}\right) 4x = 900$$

o sea $$10x^2 = 900$$

$$x = \sqrt{90} = 9{,}487 \text{ m}$$

Las **bases** *tienen* **18,974 m** *y* **28,461 m.**

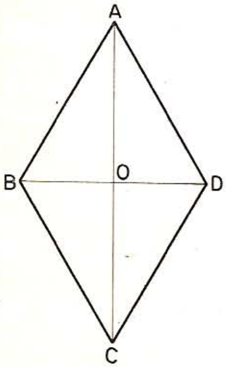


Fig. 346

491. El área de un rombo es igual a 60 m^2. ¿Cuál es su perímetro si la diagonal menor es igual al lado?

El rombo dado (fig. 346) *consta de dos triángulos equiláteros iguales. Luego* (GEOM. **542**):

$$\text{A} = 2 \times \frac{\text{DB}^2}{4}\sqrt{3} = 60$$

de donde $$\text{BD}^2 = \frac{120\sqrt{3}}{3} = 40\sqrt{3}$$

$$y \qquad BD = \sqrt{40\sqrt{3}} \doteq 8{,}323 \text{ m}$$

El **perímetro** *tendrá:* 8,323 × 4 = **33,292 m.**

492. Calcular el área de cada una de las figuras siguientes:

Fig. 347: $$A = \frac{64 \times 38{,}5}{2} + \frac{64 \times 28}{2} \qquad (\text{GEOM. } \mathbf{504})$$

$$\mathbf{A} = \frac{38{,}5 + 28}{2} \times 64 = \mathbf{2128\ m^2}$$

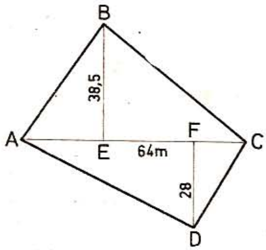


Fig. 347

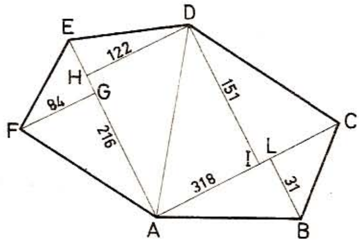


Fig. 348

Fig. 348: $$\textit{Triángulo}\ AEF = \frac{216 \times 84}{2} = 9\,072 \text{ m}^2$$

$$» \quad ADE = \frac{216 \times 122}{2} = 13\,176 \text{ m}^2$$

$$» \quad ADC = \frac{318 \times 151}{2} = 24\,009 \text{ m}^2$$

$$» \quad AGB = \frac{318 \times 31}{2} = 4\,929 \text{ m}^2$$

Area total: **51 186 m²**

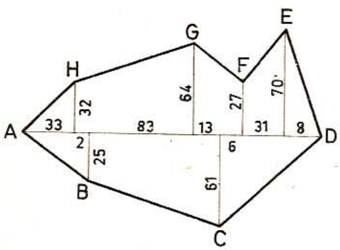


Fig. 349

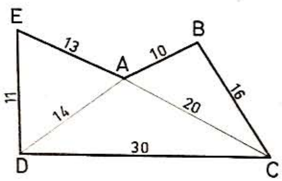


Fig. 350

Fig. 349

$$\textit{Triángulo } AH = \frac{33 \times 32}{2} = 528 \text{ m}^2$$

$$\text{» } DE = \frac{70 \times 8}{2} = 280 \text{ m}^2$$

$$\text{» } CD = \frac{45 \times 61}{2} = 1\,372{,}50 \text{ m}^2$$

$$\text{» } AB = \frac{35 \times 25}{2} = 437{,}50 \text{ m}^2$$

$$\textit{Trapecio } HG = \frac{32 + 64}{2} \times (83 + 2) = 4\,080 \text{ m}^2$$

$$\text{» } GF = \frac{64 + 27}{2} \times (13 + 6) = 864{,}50 \text{ m}^2$$

$$\text{» } FE = \frac{27 + 70}{2} \times 31 = 1\,503{,}50 \text{ m}^2$$

$$\text{» } BC = \frac{25 + 61}{2} \times (83 + 13) = 4\,128 \text{ m}^2$$

Area total $= \mathbf{13\,194 \text{ m}^2}$

Fig. 350

$$\textit{Triángulo } ADE = \sqrt{19 \times 8 \times 5 \times 6} = 67{,}52 \text{ m}^2$$

$$\text{» } ABC = \sqrt{23 \times 3 \times 13 \times 7} = 79{,}24 \text{ m}^2$$

$$\text{» } DAC = \sqrt{32 \times 2 \times 12 \times 18} = 117{,}58 \text{ m}^2$$

Area total $\mathbf{264{,}34 \text{ m}^2}$

493. En un trapecio isósceles ABCD (fig. 351) la base menor AB es igual a los lados oblicuos BC y AD; la base mayor excede a la menor en 30 m y el perímetro tiene 130 m. Si trazamos la diagonal AC, el trapecio queda dividido en dos triángulos. Hállese el área de cada uno.

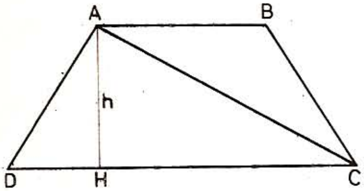


Fig. 351

Sea x *m la medida de la base menor y de los lados oblicuos. La base mayor mide* x + 30, *y el perímetro del trapecio es:*

$$x + x + x + x + 30 = 130$$
$$x = 25$$

La base mayor CD *será:*

$$25 + 30 = 55 \text{ m}$$

Cálculo de la altura AH.—*El triángulo rectángulo* AHD *nos dará:*

$$AH = \sqrt{AD^2 - HD^2}$$

pero $HD = \frac{55 - 25}{2} = 15$ *luego* $AH = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ m

$$\textbf{Area ABC} = \frac{25 \times 20}{2} = \mathbf{250\ m^2}$$

$$\textbf{Area ADC} = \frac{55 \times 20}{2} = \mathbf{550\ m^2}$$

494. En un cuadro (fig. 352) rectangular de 9,60 m de largo por 2,80 m de ancho se reserva para plantación un rombo cuyos vértices coinciden con los puntos medios de los lados del rectángulo. En los lados del rombo se plantan azucenas a 0,50 m unas de otras.

1.º ¿Cuántos pies harán falta?

2.º ¿Cuántos se necesitarían si únicamente se pusiesen en las diagonales del rombo y separadas 0,40 m unas de otras?

● 1.º *Sean* ABCD *el cuadro, y* EFGH *el rombo. El lado* HE *del mismo forma con las mitades de los lados del rectángulo un triángulo rectángulo* HAE, *en el cual:*

$$HE = \sqrt{AE^2 + AH^2} = \sqrt{4{,}8^2 + 1{,}4^2} = 5 \text{ m}$$

Perímetro del rombo: $5 \times 4 = 20$ m

Número de azucenas: $20 : 0{,}5 =$ **40 pies**

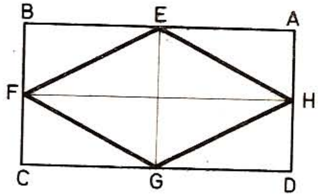


Fig. 352

● 2.º *Número de plantas en la diagonal mayor:*

$$\frac{9{,}6}{0{,}4} + 1 = 25 \textit{ pies}$$

cayendo el 13 *en el cruce de las diagonales.*

Número de plantas en la diagonal menor:

$$\frac{2{,}8}{0{,}4} + 1 = 8 \textit{ pies}$$

Total de azucenas: $25 + 8 =$ **33 pies**

495. Dado un trapecio isósceles (fig. 353) en el cual la base mayor AB = 20 cm, la menor DC igual a uno de los lados oblicuos y las diagonales igual a la base mayor, calcúlese el perímetro y el área de ese trapecio.

● 1.º *Como el trapecio es isósceles, será inscriptible en una circunferencia, por lo que el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos* (GEOM. **385**); *luego:*

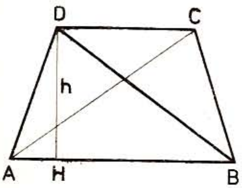


Fig. 353

$$AC \times BD = (AB \times CD) + (AD \times BC)$$

Se sabe: $AB = AC = BD = 20$

Sea $AD = CD = BC = x$

tendremos $20 \times 20 = 20x + x^2$

de donde $x^2 + 20x - 400 = 0 \qquad (1)$

$$x = -10 \pm \sqrt{10^2 + 400} = -10 \pm 22{,}36$$

Otro modo.—*La ecuación* (1) *puede obtenerse así:* AD = x *se opone a un ángulo agudo, por tanto:*

$$AD^2 = DB^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \times AH$$

$$x^2 = 20^2 + 20^2 - 2 \times 20 \times \frac{20 - x}{2}$$

$$x^2 + 20x - 400 = 0$$

$$DH = \sqrt{12{,}36^2 - 3{,}82^2} = \sqrt{138{,}1772} = 11{,}75 \text{ cm}$$

Area del trapecio: $\frac{20 + 12{,}36}{2} \times 11{,}75 =$ **190,115 cm²**

496. Sobre los catetos a y b de un triángulo rectángulo ABC (fig. 354) construimos dos triángulos rectángulos isósceles ADB y BEC tomando AB y BC por hipotenusas. ¿De qué naturaleza será el polígono que resulte, y cuál será su área en función de los catetos a y b?

En el punto B *tenemos formados dos ángulos de* 45º *y otro de* 90º; *por tanto, los lados* DB *y* BE *estarán en línea recta. Las rectas* CE *y* AD, *por ser ambas perpendiculares a* DE, *serán paralelas entre sí y el cuadrilátero* ADEC *será* **un trapecio.**

El área de éste se compone del área del triángulo ABC *y del área de los triángulos rectángulos isósceles* ADB *y* BEC.

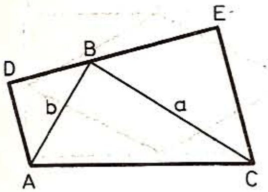


Fig. 354

$$Area\ ABC = \frac{ab}{2}$$

Como en un triángulo rectángulo isósceles, la altura relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de ésta, tendremos:

$$Area\ ADB = \frac{b}{2} \times \frac{b}{2} = \frac{b^2}{4}$$

$$Area\ BEC = \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

$$\textbf{Area ADEC} = \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{2ab + b^2 + a^2}{4}$$

$$\text{» »} = \mathbf{\frac{1}{4}(a + b)^2}$$

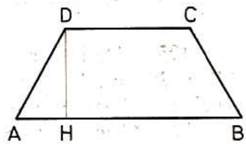


Fig. 355

497. Un trapecio isósceles (fig. 355) tiene 12 m de altura y 84,84 m de perímetro. Si la diferencia de las bases es de 16 m, ¿cuál será el área de dicho trapecio?

La altura DH *forma con la base mayor* AB *y el lado no paralelo* AD *un triángulo rectángulo, cuyos catetos son* 12 m *y* 8 m.

$$AD = \sqrt{AH^2 + DH^2}$$

$$AD + BC = \sqrt{12^2 + 8^2} \times 2 = 28{,}84 \text{ m}$$

Suma de las bases: $84{,}84 - 28{,}84 = 56$ m

Base mayor: $\frac{56 + 16}{2} = 36$ m

Base menor: $\dfrac{56 - 16}{2} = 20 \text{ m}$

$$\textbf{Area } \textit{del trapecio } \textbf{ABCD} = \frac{36 + 20}{2} \times 12 = \mathbf{336\ m^2}$$

498. Un triángulo ABC tiene 52,7 m de base y 28,4 m de altura. A 17 m del vértice B se traza una paralela DE a la base. Calcular el área del trapecio que resulta.

Altura del trapecio: 28,4 − 17 = 11,4 m.
La paralela DE *a la base* AC *da:*

$$\frac{DE}{AC} = \frac{h}{H} \qquad \frac{DE}{52{,}7} = \frac{17}{28{,}4}$$

de donde $$DE = \frac{52{,}7 \times 17}{28{,}4} = 31{,}55 \text{ m}$$

$$\textbf{Area } \textit{del trapecio } \textbf{ADEC} = \frac{52{,}7 + 31{,}55}{2} \times 11{,}4 = \mathbf{480{,}225\ m^2}$$

499. Los catetos de un triángulo rectángulo tienen 144 m y 108 m respectivamente. ¿A qué distancia del vértice A habrá que trazar una paralela a la hipotenusa para que el trapecio que forma tenga 972 m² de área?

La hipotenusa tendrá: $\sqrt{144^2 + 108^2} = 180 \text{ m}$

Area de ABC: $\dfrac{144 \times 108}{2} = 7776 \text{ m}^2$

Altura de ABC: $7776 : 90 = 86{,}4 \text{ m}$

Area del triángulo parcial: $7776 - 972 = 6804 \text{ m}^2$

Las áreas son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos, así pues.

$$\frac{6804}{7776} = \frac{h^2}{86{,}4^2}$$

de donde $$h = \sqrt{\frac{6804 \times 86{,}4^2}{7776}} = \sqrt{6531{,}84} = \mathbf{80{,}22\ m}$$

500. En un triángulo ACB (fig. 356), el $\angle A = 45°$, AB = 54 cm, AC = 36 cm. Sobre AB se toma AD = 30 cm y se traza la paralela DE a AC. Calcular el área del trapecio DECA.

$\triangle ABC \sim \triangle DBE$, *por tanto:*

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB}; \quad \frac{DE}{36} = \frac{24}{54}$$

de donde $$DE = \frac{36 \times 24}{54} = 16 \text{ cm}$$

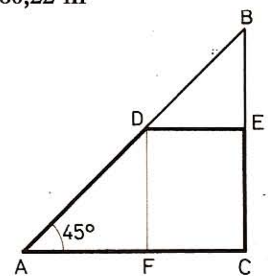


Fig. 356

Siendo: $\angle A = 45^{\circ}$,

la altura $$DF = AF = \frac{AD\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$$

$$\textbf{Area DECA} = \frac{36 + 16}{2} \times 15\sqrt{2} = \mathbf{551{,}538\ cm^2}$$

501. Dado un trapecio ABCD (fig. 357) en el cual la base menor AB = 12 cm, la base mayor DC = 18 cm y la altura AH = 10 cm, calcular la longitud del segmento MN paralelo a las bases de modo que lo divida en dos partes iguales, y hallar a qué distancia se halla de la base AB.

Sea $MN = x, \quad AI = y, \quad HI = 10 - y$

$$\textit{Area}\ ABCD = \frac{12 + 18}{2} \times 10 = 150\ cm^2$$

La paralela MN *divide al trapecio en otros dos* A_1 *y* A_2 *equivalentes; hallemos el área de cada uno:*

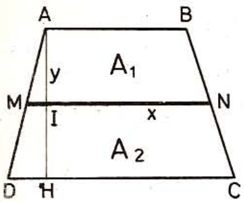


Fig. 357

$$A_1 = \frac{12 + x}{2} \times y = 75$$

o sea $$12y + xy = 150 \quad (1)$$

$$A_2 = \frac{18 + x}{2} \times (10 - y) = 75$$

o sea $$180 + 10x - 18y - xy = 150 \quad (2)$$

sumando (1) *y* (2) *da:*

$$10x - 6y = 120$$

o sea $$5x - 3y = 60 \quad (3)$$

de donde $$y = \frac{5x - 60}{3} \quad (4)$$

Sustituyendo valores en (1) *viene:*

$$\frac{12\,(5x - 60)}{3} + \frac{(5x - 60)\,x}{3} = 150$$

$$60x - 720 + 5x^2 - 60x = 450$$

$$x^2 = 234$$

$$\mathbf{MN} = x = \sqrt{234} = \mathbf{15{,}297\ cm}$$

Sustituyendo en (4):

$$\mathbf{AI} = y = \frac{5 \times 15{,}297 - 60}{3} = \mathbf{5{,}495\ cm}$$

502. El área de un trapecio equivale a la de un rombo cuyas diagonales miden 15 cm y 24 cm; si la altura es igual a la diagonal menor, ¿cuáles serán sus bases, sabiendo que difieren de 12 cm?

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Area del rombo:} & \dfrac{D \times d}{2} \\ \textit{Area del trapecio:} & \dfrac{B + b}{2} \times d \end{array}\right\} (B + b) \times \frac{d}{2} = D \times \frac{d}{2}$$

de donde: $B + b = D = 24$
y como $B - b = 12$

$$\mathbf{B} = \frac{24 + 12}{2} = \mathbf{18\ cm}; \qquad \mathbf{b} = \frac{24 - 12}{2} = \mathbf{6\ cm}$$

503. Hallar el área de un trapecio rectángulo cuyas bases tienen 348 m y 186 m respectivamente y uno de sus ángulos tiene 30°.

Sea d = 162 m *la diferencia de las bases y* h *la altura del trapecio, el ángulo de* 30° *nos dará:*

$$d = h\sqrt{3} \quad \textit{de donde} \quad h = \frac{d\sqrt{3}}{3} = \frac{162\sqrt{3}}{3} = 54\sqrt{3}$$

Area *trapecio:* $\dfrac{348 + 186}{2} \times 54\sqrt{3} = \mathbf{24\,971{,}976\ m^2}$

504. Un trapecio isósceles tiene un ángulo de 45°, la base menor de 85 m y una área de 2750 m². Calcular su perímetro.

Sean b *y* b′ *las bases y* h *la altura del trapecio. Siendo los ángulos en la base* b *de* 45°, *será* b = b′ + 2h, *y la fórmula*

$$A = \frac{b + b'}{2} \times h \quad \textit{dará} \quad (b' + h) \times h = 2750$$

de donde $h^2 + 85h - 2750 = 0$

y $$h = \frac{-85 \pm \sqrt{85^2 + 4 \times 2750}}{2} = \frac{-85 + 135}{2} = 25\ \text{m}$$

Así pues, $b = 85 + 50 = 135$ m

Perímetro: $85 + 135 + 70{,}71 = \mathbf{290{,}71\ m}$

505. Las bases de un trapecio tienen, respectivamente, 80 m y 29 m y los otros dos lados 37 m y 20 m. Calcular el área de dicho trapecio (fig. 358).

Tracemos el segmento CI *paralelo a* DB.

El problema se reduce a calcular la altura de un triángulo conocidos los tres lados. (Probl. **294** y **461**.)

Base: $AI = b - b' = 80 - 29 = 51$ m; $\quad p = \dfrac{51 + 37 + 20}{2} = 54$ m

Area $\triangle$ACI: $A' = \sqrt{54\,(54 - 51)\,(54 - 37)\,(54 - 20)} = 306\ \text{m}^2$

Altura: $h = \dfrac{2 \times A'}{AI} = \dfrac{2 \times 306}{51} = 12$ m

Area trapecio: $\mathbf{A} = \dfrac{80 + 29}{2} \times 12 = \mathbf{654\ m^2}$

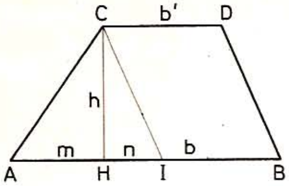


Fig. 358

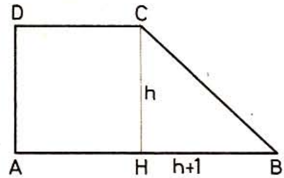


Fig. 359

506. Hallar las dimensiones de un trapecio rectángulo (fig. 359) que tiene 610 m² de área, teniendo en cuenta que consta de un cuadrado y un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 29 m y la base mide 1 m más que la altura.

Se tiene $h^2 + (h + 1)^2 = 29^2$

de donde $h^2 + h - 420 = 0$

$$\textit{Base menor} = h = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 420}}{2} = 20 \text{ m}$$

$$\textit{Base mayor} = h + 1 + h = 2h + 1 \qquad = 41 \text{ m}$$

Así pues: **b = 41 m b′ = 20 m h = 20 m**

507. Hallar las dimensiones de un trapecio isósceles cuya área es de 66 m² teniendo presente que la base mayor tiene 8 m más que la base menor y que los lados oblicuos tienen cada uno 10 m.

De los datos se deduce: $h = \sqrt{10^2 - 4^2} = 9{,}165 \text{ m}$

y el área $$\frac{b' + b' + 8}{2} \times 9{,}165 = 66$$

de donde $b' = 3{,}21$ m *por consiguiente*

b = 11,21 m, b′ = 3,21 m *y* **h = 9,165 m**

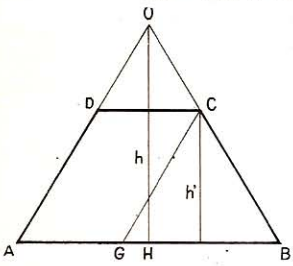


Fig. 360

508. Un terreno tiene la forma de trapecio isósceles (fig. 360) cuyas bases tienen, respectivamente, 100 m y 40 m, los otros lados iguales tienen cada uno 50 m. Calcular:

1.º El área del terreno, dando el resultado en áreas.

2.º El área del terreno triangular que se formaría al aumentar al trapecio el triángulo parcial formado por la prolongación de los lados no paralelos.

● 1.º *Trazamos el segmento* CG *paralelo a* DA:

$$h' = \sqrt{BC^2 - \left(\frac{b - b'}{2}\right)^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{1600} = 40 \text{ m}$$

$$\textbf{Área ABCD} = \frac{100 + 40}{2} \times 40 = 2800 \text{ m}^2 = \textbf{28 áreas}$$

• 2.º $\triangle AOB \sim \triangle GCB$, *luego* $\dfrac{h}{h'} = \dfrac{AB}{GB} \quad \dfrac{h}{40} = \dfrac{100}{60}$

de donde $$h = \frac{100 \times 40}{60} = \frac{200}{3}$$

$$\textbf{Area ABO} = \frac{100 \times 200}{3 \times 2} = 3333{,}33\ldots\ m^2 = \textbf{33,33... áreas}$$

509. Las bases de un trapecio isósceles (fig. 361) tienen respectivamente 20 m y 12 m y el lado del mismo tiene 8 m. Calcular: 1.º El área. 2.º El radio de la circunferencia circunscrita.

• 1.º *Semidiferencia de las bases:* $(20 - 12) : 2 = 4$ m

$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\textbf{Area ABCD} = \frac{20 + 12}{2} \times 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3} = \textbf{110,848 m}^2$$

• 2.º *En* $\triangle OCM$:

$$OC^2 = MC^2 + OM^2 = b'^2 + x^2$$

En $\triangle ONB$:

$$OB^2 = ON^2 + NB^2 = (x - h)^2 + b^2$$

pero $$OC^2 = OB^2$$

luego $$b'^2 + x^2 = (x - h)^2 + b^2$$

Remplazando b, b′ *y* h *por sus valores y efectuando, da:*

$$x = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

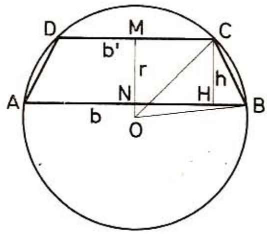


Fig. 361

Por tanto: $$\mathbf{R} = OC = \sqrt{6^2 + \left(\frac{14}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{304}{3}} = \mathbf{1{,}006\ m}$$

510. Una finca tiene la forma de trapecio isósceles cuya altura, que tiene 20,90 m, es igual a la semidiferencia de las bases y el área es de 3762 m². Calcular las bases de dicho trapecio.

Se tiene: $$\frac{b + b'}{2} = \frac{S}{h} = \frac{3762}{20{,}9} = 180$$

y según el enunciado $$\frac{b - b'}{2} = h = 20{,}9 \quad \textit{de donde}$$

$$\mathbf{b} = 180 + 20{,}90 = \mathbf{200{,}9\ m}$$
$$\mathbf{b'} = 180 - 20{,}90 = \mathbf{159{,}1\ m}$$

511. Un trapecio isósceles (fig. 362) tiene por base menor R y por lado $R\sqrt{2}$.

1.º Probar que las diagonales del mismo serán rectangulares.

2.º Calcular el área que ocupa.

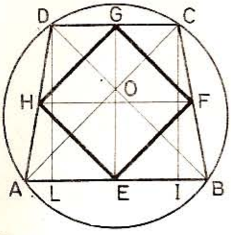


Fig. 362

3.º Calcular el área del cuadrilátero que se obtiene uniendo los puntos medios de sus lados.

● 1.º *Al ser* AD = CB = $R\sqrt{2}$, *se tiene* $\widehat{AD} = \widehat{CB} = 90^\circ$; *por tanto,*

$$\angle \mathbf{AOD} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CB}}{2} = \frac{90^\circ + 90^\circ}{2} = \mathbf{90^\circ}$$

● 2.º *Como el trapecio es isósceles, las diagonales serán iguales; luego*

$$OD = OC \quad y \quad OA = OB$$

El triángulo rectángulo isósceles COD *da:* $2OC^2 = DC^2 = R^2$

de donde
$$OC = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

y
$$AO = \sqrt{AD^2 - OD^2} = \sqrt{2R^2 - \frac{2R^2}{4}} = \sqrt{\frac{6R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{6}}{2}$$

Area ABCD = *área triángulo* ABC + *área triángulo* ADC

$$\mathbf{A} = \frac{AC \times OB}{2} + \frac{AC \times OD}{2} = \frac{AC\,(OB + OD)}{2} =$$

$$= \frac{(AO + OC)\,(OB + OD)}{2} = \frac{(AO + OC)^2}{2} = \frac{\left(\frac{R\sqrt{6}}{2} + \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{R^2}{8}(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = \frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{2}}(\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}})$$

● 3.º $EF = HG = \frac{AC}{2}$; $\quad EH = FG = \frac{BD}{2}$ *y como* AC = BD:

$$EF = HG = EH = FG = \frac{AC}{2} = \left(\frac{AO + OC}{2}\right) = \frac{R}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

EF *y* HG *son paralelos a* AC, *y* EH *y* FG *lo son a* BD. *Como* AC *y* BD *son perpendiculares,* EF *y* HG *son perpendiculares a* EH *y* FG *y el cuadrilátero* EFGH *es un cuadrado.*

$$\textbf{Area EFGH} = \left[\frac{R}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})\right]^2 = \frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{4}}(\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}})$$

512. Un trapecio (fig. 363) tiene por bases AB = 42 cm. DC = 28 cm y por altura 22 cm.

1.º Calcular su área.

2.º Calcular la longitud de los lados del triángulo ABM formado por las prolongaciones de los lados no paralelos.

3.º Calcular la longitud de la paralela a las bases, trazada a 6 cm de la base mayor.

4.º Calcular a qué distancia de la base mayor se cortarán las diagonales del trapecio.

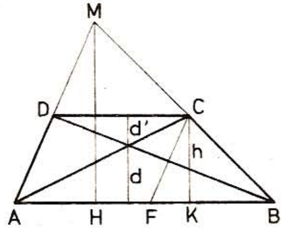


Fig. 363

● 1.º **Area ABCD** $= \frac{42 + 28}{2} \cdot 22 = \mathbf{770\ cm^2}$

● 2.º *Tracemos el segmento* CF *paralelo a* DA, *y las alturas de los triángulos* BCF *y* BMA. *Estos triángulos son semejantes ya que tienen los ángulos respectivamente iguales. Luego*

$$\frac{HM}{h} = \frac{AB}{FB} = \frac{42}{14} = \frac{MB}{CB}$$

por tanto, $\mathbf{HM} = 3h = \mathbf{66\ cm^2}$

Asimismo **AM = 3FC = 3AD** y **BM = 3CB**

● 3.º *La paralela* b″ *(no dibujada) se halla a* (66 − 6) *cm de* M *da:*

$$\frac{b''}{AB} = \frac{60}{66}; \quad \mathbf{b''} = \frac{42 \times 60}{66} = \mathbf{38{,}18\ cm}$$

● 4.º $\frac{d}{d'} = \frac{AB}{CD}$ *o sea* $\frac{d}{d + d'} = \frac{AB}{AB + CD} = \frac{42}{70}$

de donde $\mathbf{d} = \frac{22 \times 42}{70} = \mathbf{13{,}20\ cm}$

y $\mathbf{d'} = 22 - 13{,}20 = \mathbf{8{,}80\ cm}$

IV. Polígonos

513. Un polígono irregular tiene 160 cm de perímetro. ¿Cuál será el lado del cuadrado equivalente, teniendo presente que los lados del polígono son tangentes a una circunferencia que tiene 20 cm de radio?

Area del polígono: $\frac{160 \times 20}{2} = 1600\ cm^2$

Lado del cuadrado equivalente: $\sqrt{1600} = \mathbf{40\ cm.}$

514. Dado el triángulo rectángulo ABC (fig. 364) en el cual la hipotenusa BC $= 2a$, AB $= a$, se construye un cuadrado sobre cada uno de los tres lados y se unen luego los vértices libres de los cuadrados. Calcular, en función de a, el área del exágono que resulta.

El exágono consta de tres cuadrados y cuatro triángulos.

Según el teorema de Pitágoras:

Area de los tres cuadrados $= 2$ *área* BCGH $= 4a^2 \times 2 = 8a^2$.

$\triangle ABC = \triangle ADE$ *(catetos iguales). Luego:*

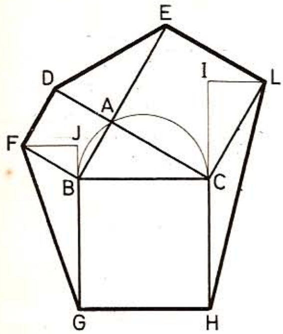


Fig. 364

$$Area\ ADE = Area\ ABC = \frac{1}{2} a \times a\sqrt{3} = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}$$

$\angle ABC = 60^\circ$ *ya que el cateto* AB $= 1/2$ *hipotenusa* BC.

$\angle FBJ = \angle ABC$ *(misma especie y lados perpendiculares).*

Por la misma razón $\angle LCI = \angle ACB = 30^\circ$.

Luego $$FJ = \frac{BF\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$IL = \frac{CL}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$Area\ GBF = \frac{1}{2} \times GB \times FJ = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$Area\ HCL = \frac{1}{2} \times HC \times IL = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{Area\ HLEDF} = 8a^2 + 4 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2a^2\,(4 + \sqrt{3})}$$

515. Sobre los lados de un cuadrado se construyen rectángulos iguales. Calcular la altura que han de tener estos rectángulos para que al juntar los vértices resulte un octógono regular (fig. 234).

Deberemos tener PE $=$ EG $=$ AD $= a$.

El triángulo PAE *es rectángulo e isósceles, luego*

$$PE^2 = a^2 = 2h^2$$

de donde $$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}}\sqrt{2}$$

516. En cada lado de un triángulo equilátero (fig. 365) se construye un cuadrado. Calcular el área del polígono que se obtiene al unir los vértices libres de los lados adyacentes.

La figura consta: 1.º *de tres cuadrados de área* a^2; 2.º *de cuatro triángulos de igual área; en efecto, todos tienen igual base* a; *la altura del triángulo equilátero es* $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, *y en los demás triángulos, el ángulo* i $= 60^\circ$.

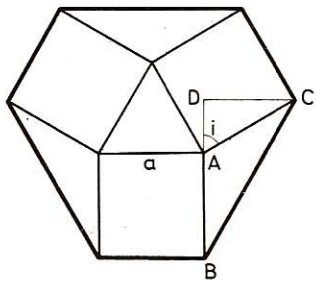


Fig. 365

Por tanto: $$CD = \frac{AC}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

y el área común será: $$\frac{a}{2} \times \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Area total: $$3a^2 + 4\left(\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right) = \mathbf{a^2\,(3 + \sqrt{3})}$$

517. El lado de un exágono regular tiene 3 cm. Construir otro concéntrico con el primero que sea: 1.º tres veces mayor, y 2.º la mitad.

Dos superficies semejantes son entre sí como los cuadrados de sus líneas homólogas; así que:

- 1.º $$\frac{E'}{E} = \frac{a'^2}{a^2} = \frac{3}{1} \quad \textit{de donde} \quad a'^2 = 3a^2 \quad y \quad \mathbf{a' = a\sqrt{3}}$$

- 2.º $$\frac{E'}{E} = \frac{a'^2}{a^2} = \frac{1}{2} \quad \textit{de donde} \quad a'^2 = \frac{a^2}{2} \quad y \quad \mathbf{a' = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

De donde se sigue la construcción siguiente (fig. 366):

Dado el exágono regular ABCDEF *de lado* a:

1.º *Se traza la apotema y se prolonga,* OX *(por ejemplo).*

2.º *Sobre* OX *se lleva* OG = a *y luego* GK = a *perpendicular a* OX. *La distancia* OK = a $\sqrt{2}$ *se lleva sobre* OX *y se obtiene* OH = a $\sqrt{2}$.

3.º *Se traza* HJ = a *perpendicular a* OH. *La distancia* OJ = a $\sqrt{3}$.

4.º *Se describe la circunferencia de centro* O *y de radio* a $\sqrt{3}$.

5.º *Se trazan los radios* OAA′, OBB′; OCC′, ODD′, OEE′, OFF′. *Luego se unen los puntos* A′, B′, C′, D′, E′, F′ *y se obtiene un exágono cuya área es tres veces la del exágono dado.*

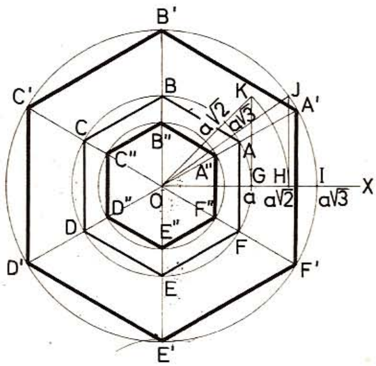


Fig. 366

6.º *Se describe la circunferencia de centro* O *y de radio* $\frac{OK}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ *la cual corta a los radios anteriormente citados en los puntos* A″, B″, C″, D″, E″, F″, *que basta unir para obtener el otro exágono pedido.*

518. Se prolongan en igual sentido y en una longitud igual al lado, los lados del exágono regular (fig. 367). ¿Cuál será en función del mismo lado *a*, el área del nuevo exágono obtenido uniendo los extremos de las prolongaciones?

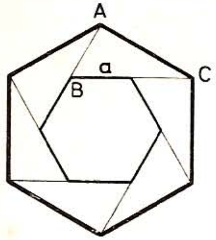


Fig. 367

Todos los triángulos, tales como ABC, *son iguales, pues*

$$\angle B = 180^o - 120^o = 60^o \quad y \quad AB = \frac{BC}{2}$$

por tanto $\quad AC = AB\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

Area del exágono de lado a: $\quad A = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

La del exágono de lado $AC = a\sqrt{3}$, *será:*

$$\mathbf{A}_1 = \frac{3\,(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times 3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathbf{9a^2\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

519. ¿En qué relación están: 1.º las áreas del triángulo equilátero y del exágono regular inscritos en una misma circunferencia; 2.º las áreas de esos mismos polígonos circunscritos, y 3.º las áreas de los exágonos regulares inscrito y circunscrito?

- 1.º *Area del triángulo equilátero inscrito:* $\quad T = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

  Area del exágono regular inscrito: $\quad E = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

  Relación entre ambas: $\quad \dfrac{\mathbf{T}}{\mathbf{E}} = \dfrac{\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

- 2.º *Area del triángulo equilátero circunscrito:* $T' = 3R^2\sqrt{3}$
  Area del exágono regular circunscrito: $E' = 2R^2\sqrt{3}$

  Relación entre ambas: $\quad \dfrac{\mathbf{T'}}{\mathbf{E'}} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2R^2\sqrt{3}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

- 3.º $\quad \dfrac{\mathbf{E}}{\mathbf{E'}} = \dfrac{\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}}{2R^2\sqrt{3}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

V. Relaciones

520. Si se unen los cuatro vértices de un paralelogramo con un punto cualquiera O (fig. 368) de una de sus diagonales, los cuatro triángulos que resultan son equivalentes dos a dos.

Los dos triángulos ABD *y* BCD *son iguales; por tanto, sus alturas trazadas* *desde los vértices* A *y* C *a la base* BD *son iguales. Así pues, los triángulos* AOD *y* DOC *serán equivalentes, pues tienen igual base e igual altura. Lo propio ocurrirá con los triángulos* AOB *y* BOC, *luego...*

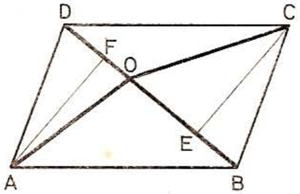


Fig. 368

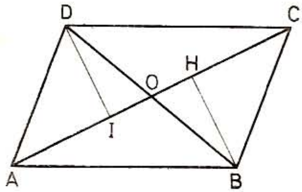


Fig. 369

520 bis. Las diagonales de un paralelogramo determinan cuatro triángulos equivalentes, iguales dos a dos.

Sea el paralelogramo ABCD (fig. 369).

Tracemos las diagonales AC *y* BD *y los segmentos* DI *y* BH *perpendiculares a la diagonal* AC.

Los triángulos ABC *y* ADC *son iguales (tres lados iguales).*

Los triángulos ADO *y* ODC *son equivalentes (igual altura* DI *y bases iguales como semidiagonales). Por la misma razón los triángulos* CBO *y* OBA *son equivalentes. Luego los cuatro triángulos son equivalentes.*

Los triángulos AOD *y* BCO *son iguales (tres lados respectivamente iguales). Lo propio sucede con los triángulos* AOB *y* DOC.

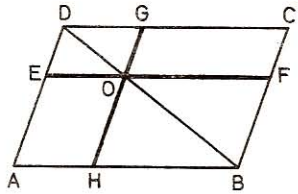


Fig. 370

521. Si por un punto cualquiera de la diagonal de un paralelogramo (fig. 370) trazamos una paralela a cada par de lados del mismo, quedan formados cuatro paralelogramos; los formados a ambos lados de la diagonal son equivalentes y los otros dos son proporcionales a los cuadrados de los segmentos de la diagonal.

● 1.º *La diagonal* DB *determina seis triángulos iguales dos a dos, como mitades de paralelogramos.*

$$\text{DAB} = \text{DBC}; \quad \text{DEO} = \text{DGO}; \quad \text{y} \quad \text{OHB} = \text{OBF}$$

Luego *Area* (DAB − DEO − OHB) = *área* (DBC − DGO − OBF)
es decir **área paralelogramo EOHA = área paralelogramo GOFC**

● 2.º *Los paralelogramos* DEOG *y* OHBF *son semejantes ya que están formados por triángulos semejantes y semejantemente dispuestos. Luego sus áreas son proporcionales a los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Luego
$$\frac{\textbf{Area DEOG}}{\textbf{Area OHBF}} = \frac{\textbf{DO}^2}{\textbf{OB}^2}$$

522. El triángulo que tiene por vértices los puntos medios de tres lados de un trapezoide es 1/4 de éste (fig. 371).

El cuadrilátero HFGE *que resulta al unir los puntos medios de los lados del trapezoide* ABCD *es un paralelogramo* (n.º **121**); *su área (producto de la base por la altura) es:*

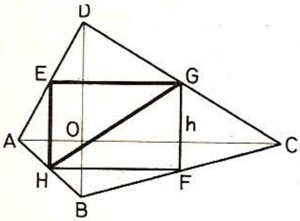


Fig. 371

$$\textit{Area}\ \mathrm{HFGE} = \mathrm{HF} \times h = \frac{\mathrm{AC}}{2} \times h$$

$$y\quad \textit{Area}\ \mathrm{ABCD} = \mathrm{AC}\left(\frac{\mathrm{DO} + \mathrm{OB}}{2}\right) = \mathrm{AC} \times h$$

luego *área* HFGE = 1/2 *área* ABCD

El △HEG *es mitad del paralelogramo* HFGE, *luego*

Area HEG = 1/4 área ABCD

523. El área de un triángulo rectángulo (fig. 372) es igual al producto de los segmentos que los puntos de contacto de la circunferencia inscrita determinan sobre la hipotenusa.

Sean n *y* m *los segmentos de la hipotenusa,* r *el radio de la circunferencia inscrita y* A *el área del triángulo, tendremos:*

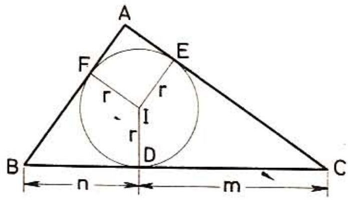


Fig. 372

$$\mathrm{BF} = n, \quad \mathrm{CE} = m \quad \text{y} \quad \mathrm{AE} = \mathrm{AF} = r$$

$$2\mathrm{A} = \mathrm{AC} \times \mathrm{AB} = (\mathrm{AE} + \mathrm{EC})\,(\mathrm{AF} + \mathrm{FB})$$

$$2\mathrm{A} = (r + m)\,(r + n) = r^2 + r\,(m + n) + mn$$

pero $r^2 + r\,(m + n) = \mathrm{A}$

por tanto $\mathbf{A = mn}$

524. El área de un trapezoide cuyas diagonales son perpendiculares es igual al semiproducto de estas diagonales (fig. 371).

Area trapezoide ABCD = *área* △ABC + *área* △ADC

$$\textit{área}\ \triangle\mathrm{ABC} = \mathrm{AC} \times \frac{\mathrm{OB}}{2}$$

$$\textit{área}\ \triangle\mathrm{ADC} = \mathrm{AC} \times \frac{\mathrm{OD}}{2}$$

$$\textbf{área ABCD} = \mathrm{AC}\left(\frac{\mathrm{OD} + \mathrm{OB}}{2}\right) = \frac{\mathbf{AC + BD}}{\mathbf{2}}$$

525. En todo polígono regular de n lados la suma de las distancias de un punto cualquiera, tomado en la región interna del polígono, a los lados, es igual a n veces la apotema.

Sea, por ejemplo, un pentágono regular, en el cual a *es el apotema,* c *el lado y* l, m, n, r, s *las perpendiculares.*

Doble del área del polígono: $2\mathrm{A} = 5ac$

y también: $$2A = cl + cm + cn + cr + cs$$

de donde $$5ac = c(l + m + n + r + s)$$

$$\mathbf{5a = l + m + n + r + s}$$

526. El área del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los círculos inscritos en los triángulos parciales que la altura determina sobre la hipotenusa.

Sean r, r′, r″ *los radios y* A, A′, A″ *las áreas de los círculos inscritos* (fig. 373). *Como* $\triangle ABC \sim \triangle ABD \sim \triangle ADC$ *tendremos:*

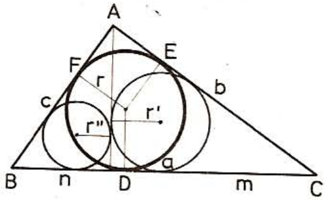


Fig. 373

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{r'^2}{r''^2} = \frac{A'}{A''} \qquad (1)$$

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{r^2}{r''^2} = \frac{A}{A''} \qquad (2)$$

la (1) *da:* $$\frac{b^2 + c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{r'^2 + r''^2}{r''^2} = \frac{A' + A''}{A''} \qquad (3)$$

(2) *y* (3) *tienen una razón común; por tanto, las otras también serán iguales.*

Luego $$\frac{A}{A''} = \frac{A' + A''}{A''}$$

de donde $$\mathbf{A = A' + A''}$$

527. El producto de los radios de la circunferencia inscrita y de las tres circunferencias exinscritas a un triángulo es igual al cuadrado del área de ese triángulo (fig. 374).

De la semejanza de los triángulos OBD *y* O′BE *se deduce:*

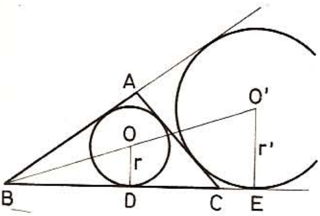


Fig. 374

$$\frac{r}{r'} = \frac{BD}{BE} = \frac{p - b}{p} \quad (\text{n.º } \mathbf{158})$$

de donde $$r' = \frac{rp}{p - b} \qquad (1)$$

Análogamente tendremos:

$$r'' = \frac{pr}{p - a} \qquad (2)$$

y $$r''' = \frac{pr}{p - c} \qquad (3)$$

Multiplicamos ordenadamente las (1), (2) *y* (3) *y su resultado por* r:

$$r\,r'\,r''\,r''' = \frac{p^3 r^4}{(p - a)(p - b)(p - c)} = \frac{p^4 r^4}{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Pero $p^4 r^4 = A^4$ y $p(p - a)(p - b)(p - c) = A^2$

por consiguiente, $$\mathbf{r\,r'\,r''\,r'''} = \frac{A^4}{A^2} = \mathbf{A^2}$$

528. Si sobre el diámetro $AB = 2R$ de un semicírculo (fig. 375) trazamos otros dos semicírculos iguales, tangentes interiores con el primero, el área del círculo tangente a los tres semicírculos es 1/9 del área del círculo de radio R.

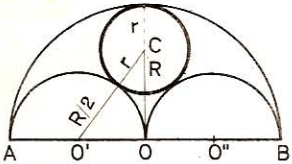


Fig. 375

Sea r *el radio del círculo* C.

El triángulo rectángulo O'OC *da:*

$$O'C^2 = OC^2 + O'O^2$$

$$\left(\frac{R}{2} + r\right)^2 = (R - r)^2 + \frac{R^2}{4}$$

de donde $R = 3r$

Y como las áreas de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de sus radios respectivos, tendremos:

$$\frac{\textbf{área C}}{\textbf{área O}} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{r^2}{9r^2} = \frac{1}{9}$$

VI. Círculo

529. *¿Cuál es el área de los círculos cuyos radios tienen*

1.º 9 m	3.º 6,45 m
2.º 7,50 m	4.º 0,25 m?

- 1.º $\mathbf{A} = \pi \times 9^2 = \mathbf{254{,}4696\ m^2}$ (GEOM. **537**)
- 2.º $\mathbf{A} = \pi \times 7{,}5^2 = \mathbf{176{,}715\ m^2}$
- 3.º $\mathbf{A} = \pi \times 6{,}45^2 = \mathbf{130{,}6984\ m^2}$
- 4.º $\mathbf{A} = \pi \times 0{,}25^2 = \mathbf{0{,}19635\ m^2}$

530. *¿Cuál es el área de los círculos cuyo diámetro es de:*

1.º 7 m	3.º 1,75 m
2.º 0,65 m	4.º 2,25 m?

Area del círculo: $A = \frac{\pi d^2}{4}$ (GEOM. **537**)

- 1.º $\mathbf{A} = \frac{\pi \times 49}{4} = \mathbf{38{,}4846\ m^2}$
- 2.º $\mathbf{A} = \frac{\pi \times 0{,}65^2}{4} = \mathbf{0{,}3318\ m^2}$
- 3.º $\mathbf{A} = \frac{\pi \times 1{,}75^2}{4} = \mathbf{2{,}4053\ m^2}$
- 4.º $\mathbf{A} = \frac{\pi \times 2{,}25^2}{4} = \mathbf{3{,}976\ m^2}$

531. *¿Cuál es el radio de los círculos cuya área es de:*

1.º 42,25 m^2 3.º 12,64 m^2
2.º 1,28 m^2 4.º 12,96 m^2?

Area del círculo: $A = \pi R^2$ *de donde* $R = \sqrt{A \times \frac{1}{\pi}}$

- 1.º $\mathbf{R} = \sqrt{42{,}25 \times 0{,}31831} = \mathbf{3{,}667\ m}$
- 2.º $\mathbf{R} = \sqrt{1{,}28 \times 0{,}318} = \mathbf{0{,}6398\ m}$
- 3.º $\mathbf{R} = \sqrt{12{,}64 \times 0{,}318} = \mathbf{2{,}05\ m}$
- 4.º $\mathbf{R} = \sqrt{12{,}96 \times 0{,}318} = \mathbf{2{,}03\ m}$

532. *¿Cuál es el área de los círculos que tienen de circunferencia:*

1.º 3,6 m 3.º 3,52 m
2.º 0,72 m 4.º 4,5 m?

Area del círculo: $A = \frac{1}{\pi}\left(\frac{C}{2}\right)^2$

- 1.º $\mathbf{A} = 0{,}31831 \times 1{,}8^2 = \mathbf{1{,}0313\ m^2}$
- 2.º $\mathbf{A} = 0{,}31831 \times 0{,}36^2 = \mathbf{0{,}0413\ m^2}$
- 3.º $\mathbf{A} = 0{,}31831 \times 1{,}76^2 = \mathbf{0{,}986\ m^2}$
- 4.º $\mathbf{A} = 0{,}31831 \times 2{,}25^2 = \mathbf{1{,}6114\ m^2}$

533. En una lámina de hojalata que tiene 80 cm de largo por 64 de ancho, ¿cuántos agujeros de 4 cm de radio se pueden abrir, si las circunferencias han de ser tangentes, y cuál será en dm^2 el área de los espacios que queden?

- 1.º *El número de agujeros igual al número de cuadrados de 8* cm *de lado contenidos en la lámina.*

Pero 8 está contenido 10 veces en la longitud y 8 veces en la anchura.

Número de agujeros $10 \times 8 = \mathbf{80}$

- 2.º *Area de la lámina:* $80 \times 64 = 5120$ cm^2

Area de los agujeros: $\pi \times 4^2 \times 80 = 4021{,}25$ cm^2

Espacio libre $5120 - 4021{,}25 = \mathbf{1098{,}75\ cm^2}$

534. Se hace una puerta cochera cimbrada: la parte rectangular tiene 6,2 m de altura y 4,5 de anchura; el arco forma un semicírculo que tiene por diámetro la anchura de la puerta. El trabajo del carpintero cuesta 90 pts por m^2; el del pintor 17 pts el m^2 de la parte exterior que ha de estar bronceada, y 12 pts el m^2 de la parte interior. ¿Cuánto costará la puerta si hay que pagar 375 pts por el herraje?

Area de la puerta: $4{,}5 \times 6{,}2 + \frac{\pi \times 4{,}5^2}{4 \times 2} = 35{,}8521$ m^2.

Importe $(90 + 17 + 12) \times 35{,}8521 + 375 = \mathbf{4266{,}38\ pts.}$

535. Hallar el área de un círculo cuya circunferencia es de 1 m.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\pi} \times \left(\frac{C}{2}\right)^2 = 0{,}3183 \times 0{,}5^2 = \mathbf{7{,}9575\ dm^2}$$

536. Midiendo el perímetro de un árbol se ve que tiene 92 cm. ¿Cuál es el área de la sección dada por ese punto?

Tenemos: $2\pi R = 92$ cm; $R = \dfrac{92}{2\pi} = \dfrac{46}{\pi}$ cm

$$\textbf{Area} = \pi R^2 = \pi \times \frac{46^2}{\pi^2} = \frac{46^2}{\pi} = 0{,}31831 \times 2116 = \mathbf{673{,}54396\ cm^2}$$

537. El anillo concéntrico o corona circular de 12 m de diámetro interior tiene 120 m^2 de área Calcular el diámetro mayor.

Designando el diámetro mayor por 2R, *tendremos* (GEOM. **544**)

$$\pi (R^2 - 36) = 120$$

de donde $$R^2 = \frac{120}{\pi} + 36$$

y $$R = \sqrt{\frac{120 + 36\pi}{\pi}} = 8{,}61$$

El **diámetro mayor** *mide* **17,22 m**

538. Alrededor de un círculo de 11 m de circunferencia se quiere formar una corona de 20 m^2. ¿Cuál será la circunferencia mayor?

Area corona: $A = \dfrac{C + c}{2} (R - r)$

$$20 = \frac{C + 11}{2}\left(\frac{C}{2\pi} - \frac{11}{2\pi}\right)$$

$$20 = \frac{(C + 11)(C - 11)}{4r} = \frac{C^2 - 121}{4r}$$

$$C^2 - 121 = 80\pi$$

$$\mathbf{C} = \sqrt{80\pi + 121} = \mathbf{19{,}29\ m}$$

539. Cuando se prolonga el diámetro de un círculo en 3,5 m, el área aumenta 31,25 m^2. Hallar el diámetro primitivo.

Sea x *el diámetro primitivo; el nuevo será* D = x + 3,5.

Area de la corona: $\pi (R^2 - r^2) = \dfrac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$

sustituímos $\dfrac{\pi}{4} [(x + 3{,}5)^2 - x^2] = 31{,}25$

$$x^2 + 7x + 12{,}25 - x^2 = \frac{125}{\pi}$$

$$7x = \frac{125}{\pi} - 12{,}25$$

$$\mathbf{x = 3{,}93\ m}$$

540. El paseo que rodea a un estanque circular tiene 1 m de ancho, su área 21,98 m² y la circunferencia exterior 25,12 m. Hállese el perímetro y área del estanque: $\pi = 3{,}14$.

Radio mayor: $R = \dfrac{25{,}12}{2 \times 3{,}14} = 4$ m

Radio menor: $r = 4 - 1 = 3$ m

Perímetro estanque: $\mathbf{C} = 2 \times 3{,}14 \times 3 = \mathbf{18{,}84\ m}$

Area estanque: $\mathbf{A} = 3{,}14 \times 3^2 = \mathbf{28{,}26\ m^2}$

541. Un estanque circular cuya área es de 13,86 m² tiene alrededor un paseo que ocupa 17,326 m². Calcular el circuito exterior del paseo y su anchura ($\pi = 22/7$).

- 1.º *Area total del estanque y paseo:* $13{,}86 + 17{,}326 \doteq 31{,}185$ m²
  Esta área equivale a la de un círculo de radio R, *luego*

$$\frac{22}{7} \times R^2 = 31{,}185$$

$$R = \sqrt{\frac{31{,}185 \times 7}{22}} = \sqrt{9{,}9225} = 3{,}15 \text{ m}$$

Circuito exterior: $2\pi R = \dfrac{3{,}15 \times 2 \times 22}{7} = \mathbf{19{,}80\ m}$

- 2.º *Sea* r *el radio del estanque, tendremos:*

$$r^2 \times \frac{22}{7} = 13{,}86 \text{ m}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{13{,}86 \times 7}{22}} = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1 \text{ m}$$

Anchura del paseo: $3{,}15 - 2{,}1 = \mathbf{1{,}05\ m}$

542. Para fabricar un disco de *Newton* se divide, por medio de radios, un círculo de 14 cm de radio en cinco partes iguales subdividiendo éstas después en siete sectores iguales, uno por cada color. Hállese la superficie que ocupa cada color y la longitud del arco que abarca cada uno de éstos. Tómese $\pi = 22/7$.

- 1.º *Area del disco:* $14^2 \times \dfrac{22}{7} = 616$ cm²

Todos los colores comprenden cinco sectores iguales cuya suma es la 1/7 *parte del círculo, esto es:* 616 : 7 = **88 cm²**

- 2.º *El círculo queda dividido en 35 sectores; su circunferencia sera:*

$$14 \times 2 \times \frac{22}{7} = \mathbf{88\ cm}$$

Longitud de cada arco: 88 : 35 = **2,514 cm**

543. Calcular la longitud de la circunferencia inscrita, circunscrita y exinscrita a un triángulo equilátero cuyo lado $a = 1$ m. Dígase también el área comprendida entre las circunferencias inscrita y circunscrita (fig. 376).

- 1.º *Sea* $\quad OH = r, \quad OB = R \quad$ y $\quad O'D = r'$

El triángulo rectángulo OHB *da:* $\dfrac{a^2}{4} = 4r^2 - r^2 = 3r^2$

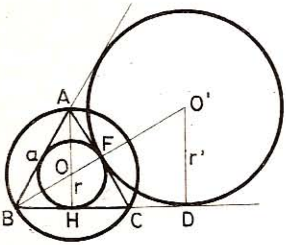


Fig. 376

de donde $\quad r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Circunf. (O, r): $\quad C_1 = \dfrac{\pi a\sqrt{3}}{3}$

para $\quad a = 1$: $\quad \mathbf{C_1 = 1{,}8136\ m}$

- 2.º $\quad R = OB = 2 \cdot OH = 2r$

Circunf. (O, R): $\quad C_2 = 2C_1 = \dfrac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$

para $\quad a = 1$: $\quad \mathbf{C_2 = 3{,}6272\ m.}$

- 3.º *De los triángulos semejantes* OHB *y* O'DB *se desprende:*

$$\frac{r}{r'} = \frac{BH}{BD}; \qquad \frac{r}{r'} = \frac{a/2}{a + CD}$$

como $\quad CD = CF = a/2$

$$\frac{r}{r'} = \frac{a/2}{a + a/2} = \frac{a/2}{3 \cdot a/2} = \frac{1}{3}$$

$$r' = 3r$$

Circunf. (O', r'): $\quad C_3 = 3C_1 = \pi a\sqrt{3}$

para $\quad a = 1 \quad$ $\mathbf{C_3 = 5{,}4408\ m}$

- 4.º *Area de la corona* (R − r): $\quad A = \pi \times \dfrac{a^2}{4}$ $\quad$ (GEOM. **544**)

para $a = 1$: $\quad \mathbf{A = 0{,}7854\ m^2}$

544. Comparar las áreas de los círculos inscritos y circunscritos de los polígonos regulares de 3, 4, 6 y 8 lados.

Dichas áreas están en la relación de los cuadrados de las apotemas y de los radios.

- 1.º *En el triángulo equilátero, la apotema* $a = \dfrac{R}{2}; \quad \dfrac{a}{R} = \dfrac{1}{2}$

Razón del círculo inscrito al circunscrito∴ $\dfrac{\mathbf{Ci}}{\mathbf{Cc}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

- 2.º *En el cuadrado, la apotema* $a = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}; \quad \dfrac{a}{R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Razón del círculo inscrito al circunscrito: $\dfrac{\mathbf{Ci}}{\mathbf{Cc}} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

- 3.º *En el exágono, la apotema* $a = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$; $\quad \dfrac{a}{R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Razón del círculo inscrito al circunscrito: $\dfrac{\mathbf{Ci}}{\mathbf{Cc}} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

- 4.º *En el octógono, el lado* $l = R\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$ (GEOM. **444**).

La apotema $a = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{4}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2} = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

la razón $\dfrac{a}{R} = \dfrac{\dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{R} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Razón del círculo inscrito al circunscrito: $\dfrac{\mathbf{Ci}}{\mathbf{Cc}} = \left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = \dfrac{\mathbf{2+\sqrt{2}}}{\mathbf{4}}$

545. Dado un rombo circunscrito a una circunferencia de 10 cm de radio (figura 377), calcular el área del espacio comprendido entre el rombo y el círculo, si uno de los ángulos del rombo vale 60º.

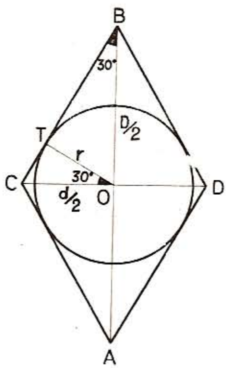


Fig. 377

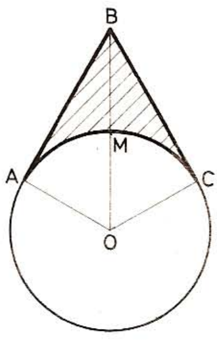


Fig. 378

En el triángulo rectángulo OBT, $\angle TBO = 30°$; *luego*

$$\frac{D}{2} = 2r \quad y \quad D = 4r = 40 \text{ cm}$$

En el triángulo rectángulo TOC, $\angle O = 30°$; *luego*

$$\frac{d}{2} = \frac{10}{\sqrt{3}/2} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \quad y \quad d = \frac{40\sqrt{3}}{3}$$

Area rombo: $A_1 = \dfrac{D \times d}{2} = \dfrac{40\sqrt{3} \times 40}{2 \times 3} = \dfrac{800\sqrt{3}}{3} = 461{,}88 \text{ cm}^2$

Area círculo: $A_2 = \pi r^2 = 3{,}1416 \times 10^2 = 314{,}16 \text{ cm}^2$

Area espacio: $\mathbf{A_1 - A_2} = 461{,}88 - 314{,}16 = \mathbf{147{,}72 \text{ cm}^2}$

546. En una circunferencia O de radio R = 15 cm (fig. 378) desde el punto B trazamos a ésta dos tangentes BA y BC de suerte que formen un ángulo de 60°. Calcular:

1.° Las dos tangentes.

2.° El área BAMC exterior al círculo.

● 1.° *El segmento* BO *es bisectriz de los ángulos* AOC *y* ABC. *En el triángulo rectángulo* OAB, $\angle ABO = 30°$; *luego*

$$OB = 2 \times OA = 2R$$

y
$$\mathbf{AB = BC} = R\sqrt{3} = 15\sqrt{3} = \mathbf{25{,}98 \text{ cm}}$$

● 2.° *Area cuadrilátero* OABC = 2 *área* OAB $= 2 \times \dfrac{AO \times OB}{2} =$

$$= R \times R\sqrt{3} = 389{,}70 \text{ cm}^2$$

Area sector circular OAMC $= \dfrac{\pi R^2 \times 120}{360} = \dfrac{3{,}1416 \times 15^2}{3} = 235{,}62 \text{ cm}^2$

Area BAMC $= 389{,}70 - 235{,}62 = \mathbf{154{,}08 \text{ cm}^2}$

547. Para cubrir una mesa rectangular con discos cuyo diámetro 2R = 37 mm, es menester colocar 117 filas de 84 discos cada una. Calcular el área de los vacíos que quedan al disponer los discos.

Longitud de la mesa:	37 mm × 117 =	4329 mm
Anchura:	37 mm × 84 =	3108 mm
Area:	4,329 × 3,108 =	$13{,}454532 \text{ m}^2$
Número de discos:	117 × 84 =	9828

Area que cubren: $\dfrac{\pi \times 0{,}037^2 \times 9828}{4} = 10{,}567189 \text{ m}^2$

Area de los vacíos: $13{,}454532 - 10{,}567189 = \mathbf{2{,}887343 \text{ m}^2}$

548. Calcular el radio de una circunferencia teniendo presente que si le aumentamos o disminuímos 1 m

1.° El área aumentará también o disminuirá 1 m².

2.° Que la circunferencia resultará tres veces mayor o tres veces más pequeña.

3.° Que el área del círculo será tres veces más grande o tres veces más pequeña.

● 1.° *a) Se tendrá:* $\pi[(R+1)^2 - R^2] = 1$

de donde
$$R = \frac{1-\pi}{2\pi}$$

el resultado es negativo; por tanto, inadmisible.

b) $$\pi\,[R^2 - (R-1)^2] = 1$$

de donde $$\mathbf{R} = \frac{\pi + 1}{2\pi} = \mathbf{0{,}659\ m}$$

• 2.º *a)* $$2\pi\,(R + 1) = 6\pi R$$

de donde $$\mathbf{R} = \frac{1}{2} = \mathbf{0{,}5\ m}$$

b) $$2\pi\,(R - 1) = \frac{2\pi R}{3}$$

de donde $$R - 1 = \frac{R}{3}; \quad \mathbf{R} = \frac{3}{2} = \mathbf{1{,}5\ m}$$

• 3.º *a)* $$\pi\,(R + 1)^2 = 3\pi R^2$$

de donde $$2R^2 - 2R - 1 = 0$$

$$\mathbf{R} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \mathbf{1{,}366\ m}$$

b) $$\pi\,(R - 1)^2 = \frac{\pi R^2}{3}$$

de donde $$2R^2 - 6R + 3 = 0$$

$$R = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}; \quad \mathbf{R} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} = \mathbf{2{,}366\ m}$$

La segunda raíz $R = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2}$ *es inadmisible, porque daría para* (R − 1) *un valor negativo.*

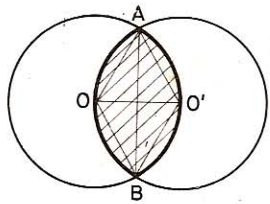


Fig. 379

549. Dos circunferencias iguales (fig. 379) tienen R por distancia de sus centros. Calcular el área común a los dos círculos.

Trazando los radios OO′, OA, OB, O′A *y* O′B *formamos dos triángulos equiláteros iguales. Trazando luego la cuerda común* AB *se ve que el área común a los dos círculos es la de dos segmentos circulares de* 120º, *esto es* (n.º **568**):

$$\mathbf{A} = \frac{2R^2}{12}\,(4\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{R^2}{6}\,(4\pi - 3\sqrt{3}) = \mathbf{R^2 \times 1{,}2284}$$

550. El área de una corona circular es de 120 m²; el diámetro menor tiene 12 m. Calcular el radio de la circunferencia mayor.

De la fórmula $A = \pi\,(R^2 - r^2)$ *se deduce* $120 = \pi\,(R^2 - 36)$

de donde $$R^2 = \frac{120 + 36\pi}{\pi}$$

$$\mathbf{R} = \sqrt{\frac{120 + 36\pi}{\pi}} = \mathbf{8{,}61\ m}$$

551. El área de una corona circular es de 1 m^2 y su anchura 0,5 m. Calcular el área del círculo menor.

De la fórmula $A = 2\pi r''l$ *se seduce* $1 = 2\pi \times (r + 0{,}25)\, 0{,}5$

de donde $$r = \frac{1}{\pi} - 0{,}25 = 0{,}0683 \text{ m}$$

Area del círculo menor: $\pi \times 0{,}0683^2 = \mathbf{1{,}465\ dm^2}$

552. El área de la corona circular que forman dos circunferencias concéntricas es de 25,328 m^2; la anchura de la misma 2 m. Hallar los radios de las circunferencias.

Sea r *el radio de la menor;* R *el de la mayor;* r'' *el de la circunferencia media.*
La fórmula $A = 2\pi r''l$ *da en este caso:* $25{,}328 = 2\pi\,(r + l)\, 2$

de donde $$\mathbf{r} = \frac{25{,}328}{4\pi} - 1 = \mathbf{1{,}0155\ m}$$

y $$\mathbf{R} = 1{,}0155 + 2 = \mathbf{3{,}0155\ m}$$

553. Sobre el diámetro AOB (fig. 380) y los dos radios OA, OB, describimos a un mismo lado de AB tres semicircunferencias. El área limitada por las tres semicircunferencias es de 2464 m^2. Calcular R.

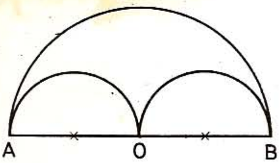


Fig. 380

Sea OA = R; *según el enunciado, tendremos:*

$$\frac{\pi R^2}{2} - 2\left(\frac{\pi R^2}{8}\right) = \frac{\pi R^2}{4} = 2464$$

$$\mathbf{R} = \sqrt{\frac{4 \times 2464}{\pi}} = \mathbf{56{,}01\ m}$$

554. Dadas dos circunferencias iguales tangentes exteriores (fig. 381) se traza una tangente exterior común a las dos y se inscribe una circunferencia tangente a la recta y a las dos circunferencias dadas. Calcular el área de este círculo en función del radio r de los otros dos.

Sea x *el radio del círculo que se desea, el triángulo rectángulo* OAC *da:*

$$OA^2 + AC^2 = OC^2$$
$$r^2 + (r - x)^2 = (r + x)^2$$

de donde $x = \frac{r}{4}$, *y el área del círculo*

$$\mathbf{c} = \frac{\pi \mathbf{r}^2}{\mathbf{16}}$$

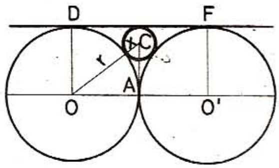


Fig. 381

555. El área de una corona circular es de 640,56 cm^2 y su anchura 6 cm. ¿Cuál será la longitud de las circunferencias que la limitan? Tómese $\pi = 3{,}14$.

Area corona: $\pi\,(R^2 - r^2) = 640{,}56$

de donde $$R^2 - r^2 = \frac{640{,}56}{3{,}14} = 204$$

pero $$R^2 - r^2 = (R + r)(R - r)$$

y como $$R - r = 6$$

será $$R + r = \frac{204}{6} = 34$$

y de aquí $$R = \frac{34 + 6}{2} = 20 \text{ cm}; \quad r = \frac{34 - 6}{2} = 14 \text{ cm}$$

Longitud circunferencias: $$\mathbf{c_1} = 2 \times 3{,}14 \times 20 = \mathbf{125{,}60\ cm}$$
$$\mathbf{c_2} = 2 \times 3{,}14 \times 14 = \mathbf{87{,}92\ cm}$$

556. Un triángulo rectángulo ABC (fig. 382) está inscrito en una circunferencia de diámetro BC = 2R. El segmento perpendicular AH sobre el lado BC lo divide en dos segmentos *m* y *n*, tales que $m = 4\,n$. Hallar, en función de R, el área de ese triángulo.

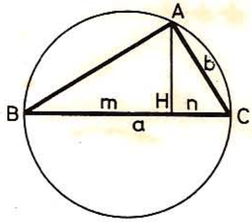


Fig. 382

Tenemos: $$m + n = 4n + n = 5n = 2R$$

luego $$n = \frac{2R}{5}$$

Como la altura h *es media proporcional entre* m *y* n

$$h^2 = m \cdot n = 4n^2$$

luego $$h = 2n = \frac{4R}{5}$$

Area del triángulo: $$A = \frac{1}{2} \times 2R \times \frac{4R}{5} = \mathbf{\frac{4R^2}{5}}$$

557. Se tiene un triángulo ABC (fig. 383), rectángulo en A, y cuyos ángulos B y C valen, respectivamente, 60º y 30º. Calcular, en función de la hipotenusa *a*, la diferencia que hay entre el área del círculo inscrito y el área del círculo circunscrito al triángulo dado.

Sean a, b, c *los lados del triángulo y* r *el radio del círculo inscrito.*

Sabemos (n.º **157**): $b + c - a = 2r$

Mas en un triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 60º, *tenemos:*

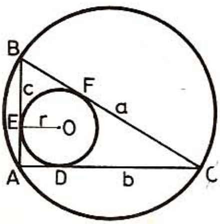


Fig. 383

$$b = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad c = \frac{a}{2}$$

de donde $$2r = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} - a$$

$$2r = \frac{a}{2}(\sqrt{3} + 1 - 2) = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

$$r = \frac{a}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

Area círculo inscrito: $$A_1 = \pi \times \frac{a^2}{16}(\sqrt{3} - 1)^2 = \frac{\pi a^2}{8}(2 - \sqrt{3})$$

El círculo circunscrito tiene por radio a/2, *y su área será:*

$$A_2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$$

Diferencia: $$A_2 - A_1 = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{8}(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi \mathbf{a}^2 \sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{8}}$$

VII. Sectores y segmentos

558. ¿Cuál es el área de un sector de 30º en un círculo de 6,4 m de radio?

$$\mathbf{A} = \pi \times 6{,}4^2 \times \frac{30}{360} = \mathbf{10{,}723\ m^2}$$

559. ¿Cuál es el área de un sector de 75º en un círculo de 11,3 m de radio?

$$\mathbf{A} = \pi \times 11{,}3^2 \times \frac{75}{360} = \mathbf{83{,}57\ m^2}$$

560. ¿Cuál es el área de un sector de 140º 36′ en un círculo de 7 m de radio?

$$\mathbf{A} = \pi \times 7^2 \times \frac{140\,\frac{3}{5}}{360} = \mathbf{60{,}12\ m^2}$$

561. En un círculo de 25 m de radio, ¿cuál es el ángulo del sector:

1.º de 3,60 m² — 3.º de 4,76 m²
2.º de 8,30 m² — 4.º de 16,57 m²?

Aplicando la fórmula del sector (GEOM. **540**),

$$A = \frac{\pi R^2 \times n}{360} \quad \textit{resulta} \quad n = \frac{A \times 360}{\pi R^2}$$

- 1.º $\mathbf{n} = \dfrac{3{,}60 \times 360}{\pi \times 625} = \mathbf{0^\circ\ 39'\ 35''}$
- 2.º $\mathbf{n} = \dfrac{8{,}30 \times 360}{\pi \times 625} = \mathbf{1^\circ\ 31'\ 18''}$
- 3.º $\mathbf{n} = \dfrac{4{,}76 \times 360}{\pi \times 625} = \mathbf{0^\circ\ 52'\ 21''}$
- 4.º $\mathbf{n} = \dfrac{16{,}57 \times 360}{\pi \times 625} = \mathbf{3^\circ\ 2'\ 16''}$

562. De un círculo de 14 m de diámetro se quita un sector de 44 m². ¿Cuál es la longitud y el número de grados del arco?

Area del círculo: $\pi \times 49 = 153{,}9384\ m^2$

Número de grados del arco: $\frac{360 \times 44}{153{,}9384} = \mathbf{102^\circ\ 53'\ 53''}$

Longitud arco: $l = \frac{2 \times A}{r} = \frac{2 \times 44}{7} = \mathbf{12{,}57\ m}$

563. Un sector tiene 200 m² y el ángulo central 60°. ¿Cuál es la longitud del diámetro?

Area del círculo: $\frac{200 \times 360}{60} = 1200\ \text{m}^2$

En función del diámetro tendremos: $\frac{\pi d^2}{4} = 1200$

de donde $\mathbf{d} = \sqrt{\frac{1200 \times 4}{\pi}} = 40\sqrt{\frac{3}{\pi}} = \mathbf{39{,}08\ m}$

564. El arco de un sector es de 72°. ¿Cuál es el diámetro del círculo, si este sector tiene 150 m² de área?

Tenemos: $\pi R^2 \times \frac{72}{360} = 150$

de donde $R = \sqrt{\frac{750}{\pi}} = \sqrt{750 \times 0{,}31831} = 15{,}45\ \text{m}$

El **diámetro** *tiene* **30,90 m**

565. El área de un sector ha de ser de 60 m². ¿Cuál es la longitud de su arco, si el ángulo central tiene 50°?

Longitud del arco: $l = \frac{\pi R \times 50}{180} = \frac{5\pi R}{18}$

Area sector: $A = \frac{\pi R^2 \times 50}{360} = \frac{5\pi R^2}{36} = 60\ \text{m}^2$

$$R = \sqrt{\frac{60 \times 36}{5\pi}} = 12\sqrt{\frac{3}{\pi}}\ \text{m}$$

Longitud del arco: $l = \frac{5\pi}{18} \times 12\sqrt{\frac{3}{\pi}} = \frac{10}{3}\sqrt{3\pi} = \mathbf{10{,}23\ m}$

566. El área de un sector es igual a 60 m². ¿Cuál es su ángulo central, si el arco mide 10 m?

Tenemos (GEOM. **513**): $R \times 5 = 60$

$$R = 12$$

El **ángulo** *es igual a:* $\frac{360 \times 10}{2\pi \times 12} = \mathbf{47^\circ\ 44'\ 46''}$

567. ¿Cuál es el área de un sector en el cual el arco es de 72° y mide 15 m?
72° *es* 1/5 *de* 360°; *luego la circunferencia tiene*

$$15 \times 5 = 75 = 2\pi R$$

$$R = \frac{75}{2\pi}$$

Area del sector (GEOM. **513**): $\frac{15}{2} \times \frac{75}{2\pi} = \mathbf{89{,}570\ m^2}$

568. Conocido el radio, ¿cuál es el área del segmento que corresponde a un ángulo central de 120°?
Aplicación.—Para R = 60 m.

Area sector correspondiente: $A_1 = \frac{\pi R^2 \times 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$

El triángulo correspondiente tiene por base el lado del triángulo equilátero inscrito, $R\sqrt{3}$; *su altura es* $R/2$ *por oponerse a un ángulo de* 30°. *Su área será:*

$$A_2 = \frac{1}{2} \times R\sqrt{3} \times \frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

Area segmento: $\mathbf{A} = A_1 - A_2 = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \mathbf{\frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}}$

Aplicación.—*Remplazando* R *por* 60, *tendremos:*

$$\mathbf{A} = 3600 \times \frac{12{,}566 - 5{,}196}{12} = \mathbf{2211\ m^2}$$

569. ¿Cuál es, conociendo el radio, el área del segmento cuyo arco fuera de 120°?
Aplicación.—Para R = 6 m.
Como el arco de 120° *corresponde a un ángulo central de* 120°, *la solución es la misma que en el número anterior.*
Para R = 6 m *área*: $\mathbf{A} = \mathbf{22{,}11\ m^2}$

570. Se inscribe un círculo en un segmento correspondiente a un sector de 120°. ¿Cuál es el área restante del segmento? (fig. 384).
Aplicación.—Para R = 2.
Area del segmento ABC *correspondiente a* 120° (número **568**):

$$A_1 = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

Como la flecha del arco de 120° *es* R/2 *el radio de la circunferencia trazada en el segmento de* 120° *es* R/4.

Area del círculo inscrito: $A_2 = \frac{\pi R^2}{16}$

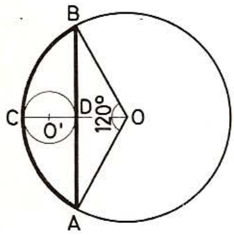


Fig. 384

Area restante:

$$A_1 - A_2 = \frac{R^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} - \frac{\pi R^2}{16} = \frac{\mathbf{R^2(13\pi - 12\sqrt{3})}}{\mathbf{48}}$$

Aplicación. — *Remplazando* R *por* 2, *tendremos:*

$$A = \frac{4(13\pi - 12\sqrt{3})}{48} = \mathbf{1{,}671\ m^2}$$

571. En el segmento correspondiente a un sector de 60° se inscribe un círculo. ¿Cuál es el área restante del segmento? (figura 385).

Aplicación. — Para R = 2.

A. segm. 60° = *A. sector* 60° − *A. triángulo equilát. lado* R

$$A_1 = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

Diámetro NM *del círculo inscrito en el segmento:*

$$NM = CM - CN = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3})$$

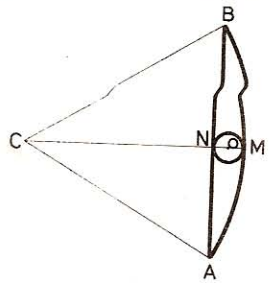


Fig. 385

Area del círculo inscrito:

$$A_2 = \frac{\pi \cdot NM^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times \frac{R^2}{4}(2 - \sqrt{3})^2 = \frac{\pi R^2}{16}(7 - 4\sqrt{3})$$

Area restante:

$$A = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) - \frac{\pi R^2}{16}(7 - 4\sqrt{3}) = \frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{48}}\mathbf{[12\sqrt{3}(\pi - 1) - 13\pi]}$$

Aplicación. — *Remplazando* R *por* 2, *tendremos:*

$$A = 4 \times 0{,}07646 = \mathbf{0{,}30584\ m^2}$$

572. En un círculo de 15 m de radio, ¿cuál es el ángulo del sector cuya área es de 600 m²?

Area del círculo: $\pi \times 15^2 = 706{,}86\ m^2$

Angulo *del sector:* $\frac{360° \times 600}{706{,}86} = \mathbf{305°\ 34'\ 36''}$

573. Calcular, en función de R, las áreas de los segmentos 60°, 90° y 120°.

1.° **Segmento 60°** (n.° **571**): $A = \frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{12}}\mathbf{(2\pi - 3\sqrt{3})}$

2.° **Segmento 90°**: $A = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{4}}\mathbf{(\pi - 2)}$

3.° **Segmento 120°** (n.° **568**): $A = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{12}}\mathbf{(4\pi - 3\sqrt{3})}$

574. Calcular el área del círculo inscrito en un sector de 60° y de radio R.

En figura 386: $$\angle AOC = \frac{\angle AOB}{2} = 30°$$

por tanto, en el triáng. rectángulo DEO:

$$OE = 2DE = 2r; \quad OC = R = 2r + r = 3r \quad y \quad r = \frac{R}{3}$$

Area del círculo inscrito: $\mathbf{A} = \frac{\pi \mathbf{R}^2}{\mathbf{9}}$

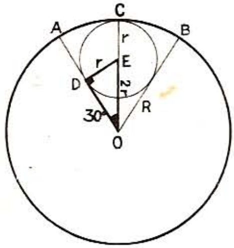


Fig. 386

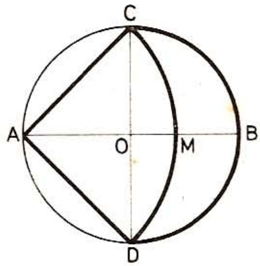


Fig. 387

575. Dada una circunferencia de centro O y radio R (fig. 387), trazamos los diámetros rectangulares AB y CD, y desde el punto A como centro y con AC por radio describimos el arco CMD. Calcular:

1.° El área del sector CADM.

2.° El área del creciente CMDBC.

● 1.° *En* △CAD *(rectángulo):* $AC^2 + AD^2 = CD^2 = 4R^2$

$$2AC^2 = 4R^2$$
$$AC^2 = 2R^2$$

Area sector CADM: $\mathbf{A} = \frac{\pi AC^2 \times 90}{360} = \frac{\pi R^2}{2} = \mathbf{1{,}5708\ R^2}$

● 2.° *Area creciente* CMDBC = *Area* CODB − *área* CODM

$$\textit{Area}\ CODB = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\textit{Area}\ CODM = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{AC^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{2R^2}{2} = \frac{R^2}{2}(\pi - 2)$$

$$\mathbf{Area\ CMDBC} = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{R^2}{2}(\pi - 2) = \mathbf{R^2}$$

576. En un triángulo rectángulo (fig. 388) cuya hipotenusa es igual a $2a$ y ∠B = 60°, desde los vértices B y C, con radio AB y AC, trazamos dos arcos limitados por la hipotenusa en los puntos D y E. Calcular, en función de a, el área EAD limitada por los arcos AD, AE y el segmento de la hipotenusa ED.

La figura EAD *es la suma de dos semisegmentos de* 120° *y* 60° *y cuyos radios son* AB $=$ a *y* AC $=$ a $\sqrt{3}$.

Area semisegmento 120°: $\dfrac{a^2}{24}(4\pi - 3\sqrt{3})$

Area semisegmento 60°: $\dfrac{3a^2}{24}(2\pi - 3\sqrt{3})$

Area total: $\mathbf{\dfrac{a^2}{12}(5\pi - 6\sqrt{3}) = 0{,}443\ a^2}$

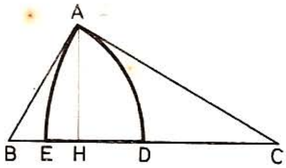


Fig. 388

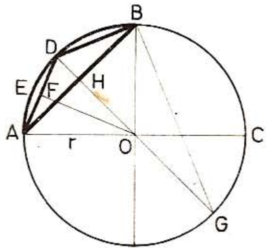


Fig. 389

577. Calcular, en función del radio (fig. 389), el área del segmento circular cuya cuerda es igual: 1.° al lado del cuadrado inscrito; 2.° al lado del octógono regular inscrito.

Aplicación: R $=$ 2 m.

- 1.° *Sea* AB *el lado del cuadrado inscrito.*

El área del segmento ADB *es la diferencia entre el área del sector* AOBD *y el triángulo* AOB; *por tanto:*

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Area sector } \mathrm{AOBD} = \dfrac{\pi r^2}{4} \\ \textit{Area triángulo } \mathrm{AOB} = \dfrac{r^2}{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \textit{área segmento } \mathrm{ADB}: \\ \mathbf{A} = \dfrac{\pi r^2}{4} - \dfrac{r^2}{2} = \dfrac{\mathbf{r^2}}{\mathbf{4}}(\pi - \mathbf{2}) \end{array}$$

Aplicación.—*Para* R $=$ 2 m

$$\mathbf{A} = \frac{4}{4}(3{,}14 - 2) = \mathbf{1{,}14\ m^2}$$

- 2.° *Sea* AD $=$ DB *(lados del octógono).*

Area sector AODE: $\quad A_1 = \dfrac{\pi r^2}{8}$

Area $\triangle$AOB: $\quad A_2 = \dfrac{DO \times AH}{2} = \dfrac{r}{2} \times \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = \dfrac{r^2\sqrt{2}}{4}$

Area segmento AED: $\mathbf{A} = A_1 - A_2 = \frac{\pi r^2}{8} - \frac{r^2\sqrt{2}}{4} = \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{8}}(\pi - \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}})$

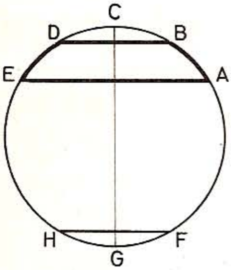


Fig. 390

Aplicación.—*Para* R = 2 m.

$$\mathbf{A} = \frac{4}{8}(3{,}1416 - 2 \times 1{,}4142) = \mathbf{0{,}1566\ m^2}$$

578. Calcular, en función del radio (fig. 390), el área de una faja circular limitada por el lado del exágono inscrito y el lado del triángulo equilátero inscrito.

Aplicación: R = 2 m.

● 1.º *Si la faja circular no contiene el centro de la circunferencia, se obtiene el área restando del segmento correspondiente a la cuerda mayor el segmento correspondiente a la cuerda menor; por tanto:*

Area segmento ABCD: $A_1 = \frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$ (n.º **573**)

Area segmento BCD: $A_2 = \frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$ (n.º **573**)

Area faja circular ABDE: $\mathbf{A} = A_1 - A_2 = \frac{r^2}{12} \times 2\pi = \frac{\pi \mathbf{r}^2}{\mathbf{6}}$

Aplicación.—*Para* R = 2 m

$$\mathbf{A} = \frac{4 \times 3{,}1416}{6} = \mathbf{2{,}0944\ m^2}$$

● 2.º *Si el centro de la circunferencia estuviese dentro de la faja, se obtendrá el área de la faja restando del área del círculo la suma de las áreas de los dos segmentos correspondientes a las cuerdas; luego*

Area AFHE: $A = \pi r^2 - \frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}) - \frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{2}}(\pi + \sqrt{\mathbf{3}})$$

Aplicación.—*Para* R = 2 m

$$\mathbf{A} = \frac{4}{2}(3{,}1416 + 1{,}732) = \mathbf{9{,}7472\ m^2}$$

579. Para construir un óvalo de tres vértices (fig. 391), se divide AA′ = $2a$ en tres partes iguales; C es el centro del arco EF, y D es el de FF′. ¿Cuál será el área del óvalo, en función de a?

El área del óvalo comprende:

a) *El área de dos sectores de 60º y* DF *como radio.*

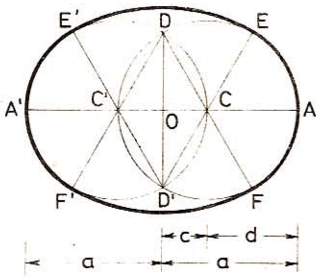


Fig. 391

b) *El área de dos sectores de 120° y CF como radio.*
c) *Menos el área de dos triángulos equiláteros cuyo lado es* CD = CF

$$A = \frac{1}{3}\pi DF^2 + \frac{2}{3}\pi CF^2 - \frac{1}{2}CF^2\sqrt{3}$$

pero
$$CF = \frac{2a}{3} \quad y \quad DF = 2CF = \frac{4a}{3}$$

$$A = \frac{\pi}{3} \times \frac{16a^2}{9} + \frac{2\pi}{3} \times \frac{4a^2}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4a^2}{9}$$

$$A = \frac{4a^2}{9}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\mathbf{A = \frac{2a^2}{9}(4\pi - \sqrt{3})}$$

Nota.—*El perímetro del óvalo vendrá dado por*

$$\mathbf{2p} = \frac{2}{3}\pi DF + \frac{4}{3}\pi CF = \mathbf{\frac{16}{9}\pi a}$$

580. ¿Cuál será el área del óvalo (fig. 392) que se obtiene dividiendo $AA' = 2a$ en cuatro partes iguales?

El área del óvalo consta de:
a) *Dos cuadrantes de radio* DF.
b) *Dos cuadrantes de radio* AC.
c) *Menos el cuadrado* CDC'D'.

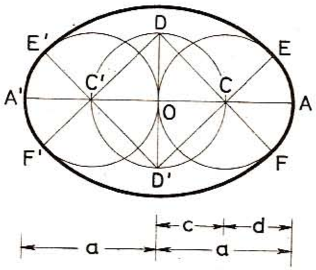


Fig. 392

$$AC = \frac{a}{2};\quad CD = \frac{a\sqrt{2}}{2};\quad DF = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{2}$$

Area:
$$A = \frac{\pi}{2} \times DF^2 + \frac{\pi}{2} \times AC^2 - CD^2$$

$$A = \frac{\pi}{2}\left[\frac{a^2(\sqrt{2}+1)^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right] - \frac{a^2}{2}$$

$$A = \frac{\pi a^2(2 + 1 + 2\sqrt{2} + 1)}{8} - \frac{a^2}{2}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\pi a^2(2+\sqrt{2}) - 2a^2}{4} = \mathbf{\frac{a^2}{4}[\pi(2+\sqrt{2}) - 2]}$$

Nota.—*El perímetro del óvalo vendrá dado por*

$$2p = \pi DF + \pi AC$$

$$\mathbf{2p} = \pi\left[\frac{a(\sqrt{2}+1)}{2} + \frac{a}{2}\right] = \mathbf{\frac{\pi a}{2}\ 2 + \sqrt{2})}$$

VIII. Area de las figuras curvilíneas

581. En un círculo O (fig. 393) se construye un sector de 60°, luego se describe la circunferencia O′ tangente en A y en B, extremos de los radios del sector. Calcular la superficie de la parte común a los dos círculos.

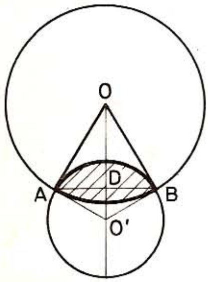


Fig. 393

Aplicación.—Para R = 2.

El segmento AB, *correspondiente al ángulo de* 60° *en el círculo* O, *tiene por área* (n.° **573**):

$$A = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3}) \qquad (1)$$

El segmento AB, *que corresponde a un ángulo de* 120° *en el círculo* O′ (*el ángulo* O′ *es suplemento del ángulo* O), *tiene por área* (n.° **573**):

$$A' = \frac{R'^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}) \qquad (2)$$

Expresémosla en función de R. *Ya sabemos* (n.° **326**) *que*

$$R' = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

Sustituyendo en la fórmula (2), *tendremos:*

$$A' = \left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} = R^2 \times \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{36} \qquad (3)$$

Demos a la fórmula (1) *el denominador* 36 *y sumemos con* (3):

$$A'' = R^2 \times \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{36} + R^2 \times \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{36}$$

$$\mathbf{A''} = \frac{R^2}{36} \times (10\pi - 12\sqrt{3}) = \mathbf{\frac{R^2}{18} \times (5\pi - 6\sqrt{3})}$$

Aplicación.—*Para* R = 2, *tenemos*

$$\mathbf{A} = \frac{4}{18}(5\pi - 6\sqrt{3}) = \mathbf{1{,}1813\ m^2}$$

582. Siendo *a* el lado de un cuadrado (fig. 394), calcular el área de la Cruz de Malta, que se obtiene trazando desde los vértices arcos tangentes, dos a dos, en el punto medio de las diagonales.

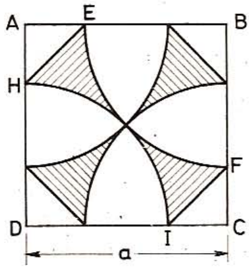


Fig. 394

El área de un brazo de la cruz es igual al área del cuadrado menos el área de los sectores BEF, DHI *y de los triángulos* AHE *y* CIF.

$$\textit{Radio de los arcos} = \frac{\text{diagonal}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Area de los dos sectores: $\frac{\pi}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

Area de los dos triángulos: $\left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

pues estos dos triángulos juntos forman un cuadrado de lado (a — BE)

$$\textit{Area} \quad A = 2\left[a^2 - \frac{\pi a^2}{4} - a^2 - \frac{a^2}{2} + a^2\sqrt{2}\right]$$

$$\textit{Area} \quad A = 2\left[a^2\sqrt{2} - \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right] = \frac{a^2}{2}(4\sqrt{2} - \pi - 2)$$

Area: $\mathbf{A = a^2 \times 0{,}2576}$

583. Dado un cuadrado ABCD (fig. 395), de lado m, desde dos vértices opuestos, con un radio igual a m, se describen dos arcos de círculo que por sus intersecciones determinan una figura llamada *naveta*. Calcúlese el área que tiene en función del lado m.

El área de la naveta es igual al área de los dos sectores de 90º menos el área del cuadrado.

Por tanto,

$$A = \frac{\pi m^2}{2} - m^2 = \frac{m^2}{2}(\pi - 2)$$

$$\mathbf{A = m^2 \times 0{,}5708}$$

Nota.—*También puede hallarse restando del área del cuadrado la de dos triángulos mixtilíneos.*

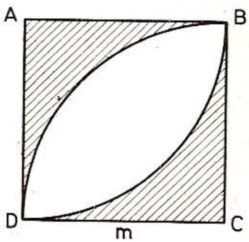


Fig. 395

584. En un cuadrado (fig. 396), cuyo lado es igual a $2a$, se inscribe una circunferencia; desde los vértices del cuadrado se describen, con el radio de la circunferencia, cuatro arcos, que con la circunferencia determinan la figura que aparece sombreada. Calcular el área de esta figura.

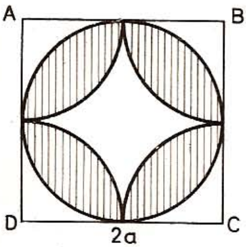


Fig. 396

Area pedida = Area círculo — Area cuadrilátero curvilíneo.

Area del círculo: $A_1 = \pi a^2$.

Area cuadrilátero curvilíneo = Area cuadrado — Area de los 4 sectores:

$$A_2 = 4a^2 - 4 \times \frac{\pi a^2 \times 90}{360} = 4a^2 - \pi a^2$$

Area pedida: $\quad A = \pi a^2 - (4a^2 - \pi a^2) = 2\pi a^2 - 4a^2 = 2a^2(\pi - 2)$

$$\mathbf{A = a^2 \times 2{,}2832}$$

585. Desde los cuatro vértices de un cuadrado (fig. 397), de lado m, con un radio m, se describen arcos en la región interior. Calcúlese el área de la figura que aparece no sombreada.

Area pedida = Area cuadrado — Area 4 *triángulos mixtilíneos.*

Area triáng. mixtilíneo ABE = *Area cuadrado* — 2 · *area sector* DAE — *Area triáng. equil.* DEC.

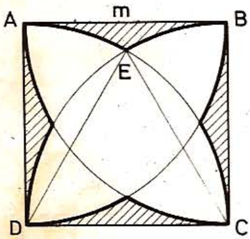


Fig. 397

Area del cuadrado: $\quad A_1 = m^2$

Area del sector DAE: $\quad A_2 = \dfrac{\pi m^2 \times 30}{360} = \dfrac{\pi m^2}{12}$

Area triángulo equilátero DEC: $\quad A_3 = \dfrac{m^2\sqrt{3}}{4}$

Area triángulo mixtilíneo ABE:

$$A_4 = m^2 - \frac{2\pi m^2}{12} - \frac{m^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m^2}{12}(12 - 2\pi - 3\sqrt{3})$$

Area pedida:

$$A = m^2 - 4 \times \frac{m^2}{12}(12 - 2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{m^2}{3}(2\pi + 3\sqrt{3} - 9)$$

$$\mathbf{A = m^2 \times 0{,}82644}$$

586. Dado un triángulo equilátero (fig. 398) cuyo lado es igual a $2a$, se hacen pasar por el centro y por los vértices arcos que al cruzarse figuran una hoja de trébol; calcular el área de ésta.

El área pedida es igual a la de 3 *segmentos iguales cuyas cuerdas son los lados, menos el área del triángulo equilátero. Cada segmento corresponde a un ángulo central de* 120º *cuya área* (n.º **573**) *es:*

$$A_1 = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$$

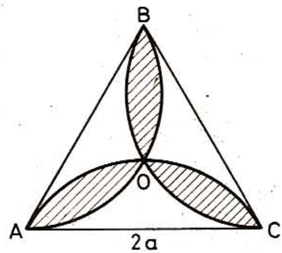


Fig. 398

Pero AC *es la cuerda que subtiende el arco de* 120º, *luego:*

$$AC = 2a = R\sqrt{3} \quad y \quad R = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

Sustituyendo en la fórmula tendremos:

$$A_1 = \frac{4a^2}{3} \times \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2 (4\pi - 3\sqrt{3})}{3 \times 3}$$

Area 3 segmentos: $$3A_1 = \frac{a^2 (4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$$

Area triáng. equilátero: $$A_2 = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$$

Area pedida: $$\mathbf{A} = 3A_1 - A_2 = \frac{\mathbf{2a^2}}{\mathbf{3}}(\mathbf{2\pi - 3\sqrt{3}})$$

587. Dado un triángulo rectángulo ABC (fig. 399), sobre la hipotenusa tomada como diámetro, describimos una semicircunferencia, y sobre los catetos tomados como diámetros, describimos otras dos semicircunferencias. Demostrar:

1.º Que el área del semicírculo construido sobre la hipotenusa, es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos.

2.º Que la suma de las áreas de las *lúnulas* de Hipócrates es igual al área del triángulo rectángulo ABC.

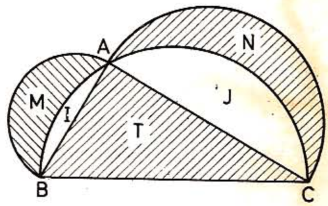


Fig. 399

● 1.º *Como los tres semicírculos son semejantes, sus áreas serán proporcionales a los cuadrados de los diámetros, esto es, a los cuadrados de los lados del triangulo* T.

Sean A_1, A_2 *y* A_3 *las áreas respectivas de los semicírculos, tendremos:*

$$\frac{A_1}{a^2} = \frac{A_2}{b^2} = \frac{A_3}{c^2} \quad \textit{o sea} \quad \frac{A_1}{a^2} = \frac{A_2 + A_3}{b^2 + c^2}$$

y como $a^2 = b^2 + c^2$, *también será* $\mathbf{A_1 = A_2 + A_3}$

● 2.º *Acabamos de ver que* $M + I + N + J = T + I + J$

de donde $\mathbf{M + N = T}$

Luego la suma de las áreas de las lúnulas es igual al área del triángulo rectángulo.

588. En un cuadrado *abcd* (fig. 400) de lado *m*, desde los vértices trazamos, con un radio *m*, arcos que se cortan de dos en dos en los puntos A, B, C, D. Calcular:

1.º El área de la figura ABCD en forma de cruz.

2.º La relación entre el área de la cruz mayor ABCD y el área de la cruz menor *abcd*.

1.º *El área de la cruz* ABCD *consta del área del cuadrado* abcd *y del área de los cuatro triángulos mixtilíneos* aBb, aAd, dDc, cCb.

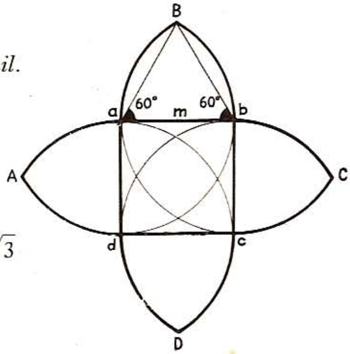


Fig. 400

Area del cuadrado abcd: $A_1 = m^2$.

Area aBb = *2 sectores de 60º — triáng. equil.*

$$\textit{Area } aBb = \frac{\pi m^2 \times 60 \times 2}{360} - \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$$

$$4 \textit{ área } aBb = \frac{4\pi m^2}{3} - m^2\sqrt{3}$$

$$\textit{Area cruz } ABCD = m^2 + \frac{4\pi m^2}{3} - m^2\sqrt{3}$$

$$= \frac{m^2}{3}(3 + 4\pi - 3\sqrt{3})$$

$$= m^2 \times 3{,}4568$$

$$\textit{Area cruz } abcd: \quad \frac{m^2}{3}(2\pi + 3\sqrt{3} - 9) = m^2 + 0{,}8264 \qquad \text{(n.º 585)}$$

Razón de las áreas *de las cruces:* $\dfrac{3 + 4\pi - 3\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3} - 9} = \mathbf{4{,}18}$

IX. Area de algunos polígonos

589. Hallar el área de un triángulo equilátero de 1,2 m de lado.

$$\mathbf{A} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \mathbf{0{,}6235\ m} \qquad \text{(GEOM. 568)}$$

590. Hallar el área de un triángulo equilátero inscrito en un círculo de 60 cm de radio.

$$\mathbf{A} = \frac{3R^2}{4}\sqrt{3} = \mathbf{0{,}4676\ m^2} \qquad \text{(GEOM. 550)}$$

591. Un triángulo isósceles tiene 87 cm de altura; el ángulo de la base vale 30º. ¿Cuál es el área de este triángulo?

La altura del triángulo isósceles determina dos triángulos rectángulos, cada uno de los cuales tiene un ángulo de 30º, opuesto al lado de 87· por consiguiente, cada uno de estos triángulos rectángulos es la mitad de un triángulo equilátero cuyo lado es el duplo de 87.

Por tanto, el triángulo isósceles es equivalente a un triángulo equilátero cuyo medio lado tiene de longitud 87 (GEOM. **568**). *Luego*

$$\mathbf{A} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = \frac{(87 \times 2)^2\sqrt{3}}{4} = \mathbf{13\,109{,}508\ cm^2}$$

592. ¿Cuál es el área de un cuadrado inscrito en un círculo de 20 cm de radio?

Lado del cuadrado inscrito: $l = R\sqrt{2}$ (GEOM. **577**). *Luego*

$$\mathbf{A} = (R\sqrt{2})^2 = \mathbf{0{,}08\ m^2}$$

593. ¿Cuánto ha de tener el lado de un triángulo equilátero para que el área sea de 12 m²?

$$A = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} = 12 \qquad \text{(GEOM. } \mathbf{568}\text{)}$$

de donde

$$l^2 = \frac{48}{\sqrt{3}} = \frac{48\sqrt{3}}{3} = 16\sqrt{3}$$

y

$$\mathbf{l} = \sqrt{16\sqrt{3}} = \mathbf{5{,}264\ m}$$

594. ¿Cuál es el área del octógono regular inscrito:

- 1.º En un círculo de 80 cm de radio.
- 2.º En un círculo de 1,2 m de radio.
- 3.º En un círculo de 4 m de radio?

$$A = 2R^2\sqrt{2} \qquad \text{(GEOM. } \mathbf{578}\text{)}$$

- 1.º $\mathbf{A} = 2 \times 0{,}8^2\sqrt{2} = \mathbf{1{,}81\ m^2}$
- 2.º $\mathbf{A} = 2 \times 1{,}2^2\sqrt{2} = \mathbf{4{,}0729\ m^2}$
- 3.º $\mathbf{A} = 2 \times 4^2\sqrt{2} = \mathbf{45{,}2547\ m^2}$

595. ¿Cuál es el área de los exágonos regulares que tienen de lado:
1.º 3 m   2.º 1,5 m   3.º 20 cm?

$$A = \frac{3l^2}{2}\sqrt{3} \qquad \text{(GEOM. } \mathbf{580}\text{)}$$

- 1.º $\mathbf{A} = \dfrac{3 \times 9\sqrt{3}}{2} = \mathbf{23{,}382\ m^2}$
- 2.º $\mathbf{A} = \dfrac{3 \times 1{,}5^2\sqrt{3}}{2} = \mathbf{5{,}8455\ m^2}$
- 3.º $\mathbf{A} = \dfrac{3 \times 20^2\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1039{,}2\ cm^2}$

596. ¿Cuánto ha de medir el lado de un exágono regular para que su área sea de 30 m²?

$$A = \frac{3l^2}{2}\sqrt{3} = 30 \qquad \text{(GEOM. } \mathbf{580}\text{)}$$

$$l^2 = \frac{20\sqrt{3}}{3} = 11{,}5467$$

$$\mathbf{l} = \sqrt{11{,}5467} = \mathbf{3{,}398\ m}$$

597. ¿Cuál es el área del dodecágono inscrito en un círculo de 2,10 m de radio?

$$\mathbf{A} = 3R^2 = 3 \times 2{,}1^2 = \mathbf{13{,}23\ m^2} \qquad \text{(GEOM. \textbf{579})}$$

598. ¿Cuál debe ser la longitud de un octógono regular para que su área sea de 12 m²?

$$\text{(GEOM. \textbf{581})}: \qquad A = 2l^2\,(1 + \sqrt{2}); \qquad 12 = 2l^2\,(1 + \sqrt{2})$$

$$\mathbf{1} = \sqrt{\frac{6}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{6\,(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2{,}4852} = \mathbf{1{,}576\ m}$$

599. ¿Cuántas baldosas en forma de exágono regular de 80 cm de lado se necesitan para embaldosar una habitación de 6,50 m de longitud por 4,72 m de anchura?

Area de la habitación: $4{,}72 \times 6{,}5\ \text{m}^2$

Area de un exágono: $\dfrac{3 \times 0{,}8^2\sqrt{3}}{2}\ \text{m}^2$

Número de baldosas: $\dfrac{4{,}72 \times 6{,}5 \times 2}{3 \times 0{,}8^2\sqrt{3}} = 18$ *baldosas, más una para una superficie menor que la de un exágono, es decir:* **19 baldosas.**

600. ¿Cuántas baldosas en forma de triángulo equilátero de 15 cm de lado se necesitan para embaldosar una habitación de 4,38 m de longitud por 2,75 m de anchura?

Area de la habitación: $4{,}38 \times 2{,}75\ \text{m}^2$

Area de una baldosa: $\dfrac{0{,}15^2 \times \sqrt{3}}{4}\ \text{m}^2$

Número de baldosas: $\dfrac{4{,}38 \times 2{,}75 \times 4}{0{,}15^2\sqrt{3}} = 1236$, *más una para una superficie menor que la de un triángulo, es decir:* **1237 baldosas.**

X. Problemas

601. Añadiendo alrededor de una finca rectangular una faja de terreno de 10 m el área aumenta 57 áreas. Si únicamente se añadiese a un lado menor y a los dos mayores, el aumento sería de 40 áreas 50 centiáreas. ¿Qué dimensiones tiene la finca?

Sean a *y* b *las dimensiones, siendo* a > b.

El enunciado da: $(a + 20)\,(b + 20) = ab + 5700$

y $(a + 20)\,(b + 10) = ab + 4050$

de donde $20a + 20b = 5300 \qquad (1)$

$10a + 20b = 3850 \qquad (2)$

restando tendremos: $10a = 1450$

$$\mathbf{a = 145\ m} \qquad \mathbf{b = 120\ m}$$

602. Dado un cuadrado de lado a (fig. 401) si sobre sus lados o sobre sus prolongaciones tomamos, en igual sentido y a partir de los vértices una misma longitud m y unimos luego los puntos obtenidos:

1.º Probar que el cuadrilátero hallado es un cuadrado.

2.º Demostrar que ambos cuadrados tienen un mismo centro.

3.º Calcular el área si $m = 5a/7$.

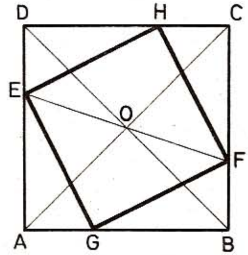


Fig. 401

• 1.º *Los triángulos rectángulos* EAG, GBF, FCH *y* HDE *son iguales por tener los catetos respectivamente iguales, luego:*

$$EG = GF = FH = HE$$

Tenemos también:

$$\angle AGE + \angle BGF = 90^\circ$$

Luego: $\angle EGF = 180^\circ - (\angle AGE + \angle BGF) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

De igual modo: $\angle GFH = \angle FHE = \angle HEG = 90^\circ$

por lo que el cuadrilátero **EGFH es un cuadrado.**

• 2.º *Sea* O *el centro del cuadrado* ABCD. *Tratemos* OE *y* OF.

Como OA=OC *(semidiagonales),* EA=FC *(construcción) y* $\angle EAO = \angle FCO$ *(alternos internos), los triángulos* EOA *y* FOC *son iguales.*

Luego $OE = OF$ *y* $\angle AOE = \angle COF$

por tanto los puntos E, O *y* F *están alineados y* EF *es diagonal del cuadrado* EGFH *y el punto* O *(punto medio de la diagonal), es también centro de dicho cuadrado.*

• 3.º *En el triángulo rectángulo* EAG *tenemos:*

$$EA = m = \frac{5a}{7} \quad y \quad AG = AB - GB = a - \frac{5a}{7} = \frac{2a}{7}$$

Area del cuadrado EGFH:

$$\mathbf{A} = EG^2 = EA^2 + AG^2 = \left(\frac{5a}{7}\right)^2 + \left(\frac{2a}{7}\right)^2 = \frac{\mathbf{29a^2}}{\mathbf{49}}$$

Nota.—*En el caso en que los puntos* EGFH *estuvieran en la prolongación de los lados, un raciocinio análogo conduce a los mismos resultados en los dos primeros apartados.*

En cuanto al 3.º *tendremos:* $EA = \left(a + \frac{5a}{7}\right) = \frac{12a}{7}$ *y* $AG = \frac{5a}{7}$

$$\mathbf{A} = EG^2 = EA^2 + AG^2 = \left(\frac{12a}{7}\right)^2 + \left(\frac{5a}{7}\right)^2 = \frac{\mathbf{169a^2}}{\mathbf{49}}$$

603. Sobre los lados de un exágono regular (fig. 402) de 3 m de lado, se construyen rectángulos de 1,5 m de altura, y luego se unen los vértices próximos del rectángulo con arcos trazados desde los vértices del exágono como centros. Calcular el área total de la figura obtenida.

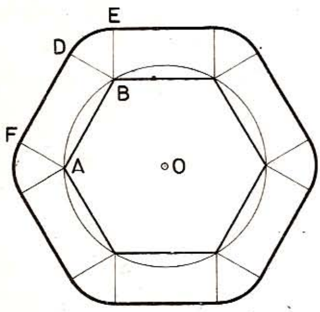


Fig. 402

La figura consta del exágono regular, más 6 rectángulos, y 6 sectores de 60º.

Area del exágono:

$$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{2}\sqrt{3} = 23{,}382 \text{ m}^2$$

Area de los 6 rectángulos:

$$\frac{6 \times a^2}{2} = 3 \times 9 = 27 \text{ m}^2$$

Area de los 6 sectores de 60º o círculo entero:

$$\frac{\pi a^2}{4} = \frac{3{,}1416 \times 9}{4} = 7{,}0686 \text{ m}^2$$

Area total: $\mathbf{A = 57{,}4506\ m^2}$

604. Los lados de un paralelogramo (fig. 403) tienen 100 m y 80 m y los ángulos valen 120º y 60º.

1.º Dígase la naturaleza de la figura formada por los puntos de concurrencia de las cuatro bisectrices.

2.º Calcular el área de los dos cuadriláteros.

3.º Demostrar que las diagonales de la segunda figura son paralelas a los lados de la primera.

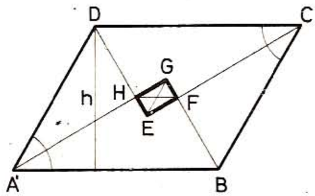


Fig. 403

● 1.º *Como los ángulos* A *y* D, B *y* C *son suplementarios, sus bisectrices serán perpendiculares y, por tanto, el cuadrilátero* **EFGH** *será un* **rectángulo.**

● 2.º *a)* $\angle A = 60°$, *la altura* $h = \dfrac{AD\sqrt{3}}{2}$

Area ABCD: $\mathbf{A} = AB \times \dfrac{AD\sqrt{3}}{2} = 100 \times 40\sqrt{3} = \mathbf{6928\ m^2}$

b) *En los triángulos rectángulos* GAB *y* FBC, *como los ángulos en* B *tienen* 60º, *resultará:*

$$BG = \frac{AB}{2}; \quad BF = \frac{BC}{2}$$

$$AG = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \quad y \quad FC = AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$$

pero $$GB = BG - BF = \frac{AB - BC}{2} = 10 \text{ m}$$

$$HG = AG - AH = (AB - AD)\frac{\sqrt{3}}{2} = 17{,}32 \text{ m}$$

luego área EFGH: $\mathbf{A} = 10 \times 17{,}32 = \mathbf{173{,}20\ m^2}$

● 3.º *La diagonal* HF *es paralela a* AB, *pues los lados* AG *y* BG *quedan divididos en la misma relación; en efecto:*

$$\frac{AH}{AG} = \frac{1/2\ BC\sqrt{3}}{1/2\ AB\sqrt{3}} = \frac{BC}{AB} \quad y \quad \frac{BF}{BG} = \frac{1/2\ BC}{1/2\ AB} = \frac{BC}{AB}$$

por consiguiente, $$\frac{AH}{AG} = \frac{BF}{GB}$$

De un modo análogo demostraríamos que EG *es paralela a* BC.

605. En un rectángulo ABCD (fig. 404) cuya base AB = 120 m y cuya altura AD = 50 m trazamos por el centro O el segmento FG = 2AB paralelo a las bases y tal que los puntos F y G queden fuera del rectángulo; si unimos luego FA, FD, GB, GC con segmentos que se corten en I y H:

1.º Demostrar que los vértices del rectángulo son los puntos medios del cuadrilátero obtenido.

2.º Que IH es perpendicular a FG.

3.º Hallar la razón entre las áreas de los triángulos AHB, HFG.

4.º Calcular el área del cuadrilátero FHGI.

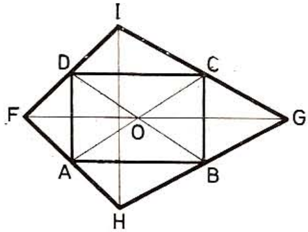


Fig. 404

● 1.º *Los segmentos* DC *y* AB *son paralelos a* FG *e iguales a su mitad, luego:*

$$\frac{CI}{GI} = \frac{DI}{FI} = \frac{DC}{FG} = \frac{AB}{FG} = \frac{AH}{FH} = \frac{BH}{GH} = \frac{1}{2}$$

Por tanto $\mathbf{CI = \frac{GI}{2};\quad DI = \frac{FI}{2};\quad BH = \frac{GH}{2}\quad AH = \frac{FH}{2}}$

● 2.º FI = FH *y* GI = GH, *luego* FG *es mediatriz de* HI; *y* HI *es perpendicular a* FG.

● 3.º $\triangle HAB \sim \triangle HFG$. *La razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón de semejanza, por tanto:*

$$\frac{Area\ \triangle HAB}{Area\ \triangle HFG} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

● 4.º *Como el cuadrilátero* FIHG *es simétrico con relación a la diagonal* FG,

$$\textbf{Area FIGH} = \frac{FG \times HI}{2} = \frac{2AB \times 2AD}{2} = \frac{240 \times 100}{2} = \mathbf{12\,000\ m^2}$$

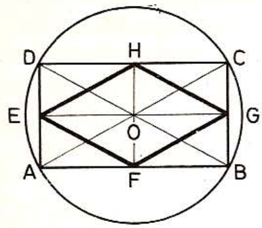


Fig. 405

606. En una circunferencia (fig. 405) de 50 mm de radio se inscribe un rectángulo de 40 mm de ancho.

1.º Calcular el área total de los cuatro segmentos comprendidos entre la circunferencia y el contorno del rectángulo.

2.º ¿Qué figura se obtiene al unir los puntos medios de los lados del rectángulo?

3.º Calcular el perímetro y el área de esa figura geométrica.

● 1.º *El área total de los cuatro segmentos es igual al área del círculo menos el área del rectángulo inscrito.*

Area del círculo:	$\pi r^2 = 3{,}1416 \times 5^2 = 78{,}54$ cm²
Lado	$AB = 2\sqrt{5^2 - 2^2} = 2\sqrt{21} = 9{,}16$ cm
Area	$ABCD = 9{,}16 \times 4 = 36{,}64$ cm²
Area de los segmentos:	$78{,}54 - 36{,}64 =$ **41,90 cm²**

● 2.º *El cuadrilátero* EFGH *tiene los lados iguales, pues los triángulos, tales como* AEF, EDH, *son iguales y las diagonales* EG *y* HF *son perpendiculares; luego* **EFGH es un rombo.**

● 3.º *Se tendrá, pues:* $EF = OA = 5$ cm

Perímetro EFGH: $5 \times 4 =$ **20 cm**

$$\textbf{Area EFGH} = \frac{1}{2}\ \textit{área}\ ABCD = \mathbf{18{,}32\ cm^2}$$

607. Se extiende una cuerda bien tensa entre los puntos A y B (fig. 406) distantes entre sí 5 m; luego se fijan los extremos de otra cuerda que mide 25 m en los mismos puntos; se tira de ella de modo que forme con la primera:

1.º Un triángulo BAC_1 rectángulo en A.

2.º Un triángulo isósceles tal que $AC_2 = C_2B$. Calcular el área limitada por ambas cuerdas en cada caso.

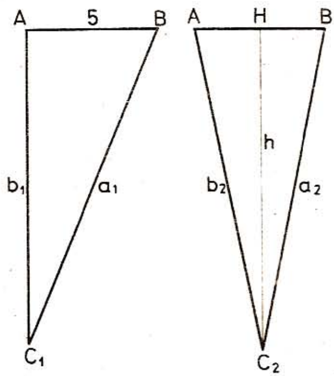


Fig. 406

● 1.º *El triángulo rectángulo* BAC_1 *da:*

$$a_1 + b_1 = 25 \qquad (1)$$

y

$$a_1^2 - b_1^2 = AB^2 = 25$$

$$(a_1 + b_1)(a_1 - b_1) = 25$$

$$a_1 - b_1 = \frac{25}{a_1 + b_1} = \frac{25}{25} = 1 \qquad (2)$$

Sumando y restando (1) *y* (2):

$$a_1 = \frac{25 + 1}{2} = 13 \text{ m} \qquad b_1 = \frac{25 - 1}{2} = 12 \text{ m}$$

Area rectángulo BAC_1: $\mathbf{A} = \dfrac{5 \times 12}{2} = \mathbf{30\ m^2}$

● 2.º *El triángulo isósceles* BAC_2 *da:* $a_2 = b_2 = \dfrac{25}{2}$

Altura: $C_2H = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{25}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2} = 5\sqrt{6}$ m

Area triángulo BAC_2: $\mathbf{A} = \dfrac{5 \times 5\sqrt{6}}{2} = \dfrac{25 \times 2{,}45}{2} = \mathbf{30{,}625\ m^2}$

608. En un triángulo ABC (fig. 407), la base BC tiene 72 m, la altura y la mediana correspondientes tienen respectivamente 45 m y 60 m.

1.º Calcular la longitud de los lados AB y AC.

2.º ¿Qué radio tendría un círculo que tuviese igual área que el triángulo dado?

● 1.º *Sean* AH *la altura y* AD *la mediana:*

$$HD = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{60^2 - 45^2} = \sqrt{1575} = 39{,}686 \text{ m}$$

$$HB = 39{,}686 - 36 = 3{,}686 \text{ m}$$

$$HC = 39{,}686 + 36 = 75{,}686 \text{ m}$$

$$\mathbf{AB} = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{45^2 + 3{,}686^2} = \mathbf{45{,}15\ m}$$

$$\mathbf{AC} = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{45^2 + 75{,}686^2} = \mathbf{85{,}05\ m}$$

● 2.º *Area* ABC: $A = \dfrac{72 \times 45}{2} = 1620$ m²

El radio del círculo de igual área será:

$$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{1620}{\pi}} = \mathbf{22{,}70\ m}$$

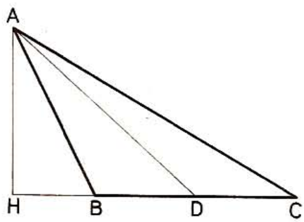


Fig. 407

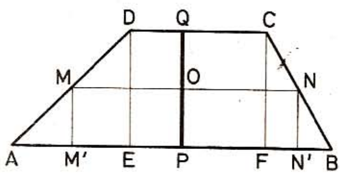


Fig. 408

609. En un trapecio ABCD (fig. 408) la base mayor AB tiene 264 m, la altura 75 m; $\angle A = 45^\circ$ y $\angle B = 60^\circ$.

1.º Calcular el área del trapecio.

2.º ¿En qué punto de AB, a partir de A, habrá que trazar la altura que divida el trapecio en dos partes equivalentes?

● 1.º $\angle A = 45^\circ$; *por tanto,* $AE = DE = 75$ m

$$\angle B = 60^\circ, \quad FB = \frac{FC\sqrt{3}}{3} = 25\sqrt{3} = 43{,}30 \text{ m}$$

$$DC = 264 - (75 + 43{,}30) = 145{,}70 \text{ m}$$

$$\textbf{Area ABCD} = \frac{264 + 145{,}70}{2} \times 75 = \mathbf{15\,363{,}75\ m^2}$$

● 2.º *El área del trapecio es igual al producto de la base media por la altura; la altura que divide al trapecio en dos partes equivalentes deberá pasar por el punto* O *medio de la base media y la distancia que separa a dicha altura de* A *será:*

$$AP = AM' + M'P$$

$$AM' = \frac{AE}{2} = \frac{75}{2} = 37{,}5 \text{ m}$$

$$M'P = \frac{M'N'}{2} = \frac{MN}{2} = \frac{AB + DC}{4} = \frac{264 + 145{,}70}{4} = 102{,}425 \text{ m}$$

Luego $\mathbf{AP} = 37{,}5 + 102{,}425 = \mathbf{139{,}925\ m}$

610. Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 409) circunscrito a una circunferencia O de radio R, y tal que la diagonal AC pase por el centro, que $\angle A$ y $\angle C$ sean suplementarios y que $AO = 2R$. Si E y F son los puntos de contacto de AD y DC, calcular:

1.º Los ángulos B, D y FOC.
2.º El área de OEA. *Aplicación:* $R = 1{,}2$ m.
3.º La longitud de OC.
4.º El radio de la circunferencia circunscrita al trapezoide ABCD.

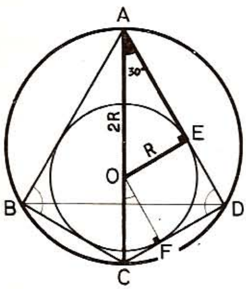


Fig. 409

● 1.º $\angle A + \angle C = 180^\circ$

por tanto $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$\triangle ABC = \triangle ACD$ *por tener los 3 lados iguales, luego*

$$\angle \mathbf{B} = \angle \mathbf{D} = \frac{180}{2} = \mathbf{90^\circ}$$

En el triángulo rectángulo AEO

$$OE = R = \frac{OA}{2} \quad \textit{luego } \angle OAE = 30^\circ \quad \textit{y} \quad AE = R\sqrt{3}$$

Por correspondientes $\angle \mathbf{FOC} = \angle OAE = \mathbf{30^\circ}$

● 2.º *Area* $\triangle OEA$: $$\mathbf{A} = \frac{OE \times AE}{2} = \frac{R \times R\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathbf{R^2\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

para $R = 1{,}2$ m $$\mathbf{A} = \frac{1{,}2^2\sqrt{3}}{2} = \mathbf{1{,}24704\ m^2}$$

● 3.º OF *es la altura del triáng. equilátero de lado* OC:

$$OF = R = \frac{OC\sqrt{3}}{2} \quad \textit{de donde} \quad \mathbf{OC} = \frac{\mathbf{2R\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$$

para R = 1,2 m $\quad \mathbf{OC} = \frac{2 \times 1{,}2 \times 1{,}732}{3} = \mathbf{1{,}3856\ m}$

● 4.º *Radio de la circunferencia circunscrita:*

$$\mathbf{r} = \frac{AC}{2} = \frac{AO + OC}{2} = \frac{1}{2}\left(2R + \frac{2R\sqrt{3}}{3}\right) = R + \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{\mathbf{R\,(3 + \sqrt{3})}}{\mathbf{3}}$$

para R = 1,2 m $\quad \mathbf{r} = \frac{1{,}2\,(3 + 1{,}732)}{3} = \mathbf{1{,}8928\ m}$

611. Dada una circunferencia O (fig. 410) se trazan en ella, a distinto lado del centro, dos cuerdas paralelas AB y CD, la primera igual al lado del triángulo equilátero inscrito y la segunda igual al radio; si unimos luego sus extremos, queda formado el trapecio ABCD que tiene 10 cm² de área. Calcular:

1.º El área del círculo.
2.º El perímetro del trapecio.
3.º La longitud de sus diagonales.

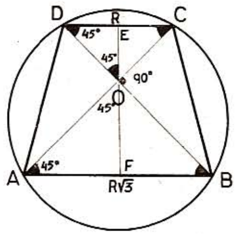


Fig. 410

$$\angle AOD = \angle COB = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CB}}{2} =$$

$$= \widehat{AD} = \frac{360 - \widehat{CD} - \widehat{AB}}{2} = \frac{360 - 60 - 120}{2} = 90^{\circ}$$

$$\angle ABD = \angle BDC = \angle BAC = \angle ACB = \frac{\widehat{AD}}{2} = 45^{\circ}$$

Por tanto, $\triangle DOC$ *y* $\triangle AOB$ *son rectángulos e isósceles así como los* $\triangle AOF$ *y* $\triangle DOE$.

De ello se sigue: $\quad AB = R\sqrt{3}; \quad CD = R; \quad AD = BC = R\sqrt{2}$

● 1.º *Altura trapecio:* $\quad EF = EO + OF = \frac{CD}{2} = \frac{AB}{2}$

$$EF = \frac{R}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R\,(1 + \sqrt{3})}{2}$$

Area trapecio: $A_1 = \frac{R + R\sqrt{3}}{2} \times \frac{R\,(1 + \sqrt{3})}{2} = 10$

de donde: $\quad R^2 = \frac{40}{(1 + \sqrt{3})^2} = \frac{20}{2 + \sqrt{3}} = 20\,(2 - \sqrt{3})$

Area círculo: $\mathbf{A} = \pi R^2 = 20\pi\,(2 - \sqrt{3}) = \mathbf{16,84\ cm^2}$

- 2.º *Perímetro* ABCD: $\mathbf{2p} = R + R\sqrt{3} + 2R\sqrt{2}$

$$\mathbf{2p} = R\,(1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}) = \mathbf{R \times 5,56}$$

- 3.º *En* $\triangle$AOB: $2AO^2 = AB^2 = 3R^2 \qquad AO = \sqrt{\dfrac{3R^2}{2}} = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$

En $\triangle$COD: $2OC^2 = CD^2 = R^2 \qquad OC = \sqrt{\dfrac{R^2}{2}} = \dfrac{R\sqrt{6}}{2}$

$$\mathbf{AC} = \mathbf{BD} = AO + OC = \frac{R\sqrt{6}}{2} + \frac{R\sqrt{2}}{2} = \mathbf{\frac{R\,(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}}$$

612. Dada una circunferencia de 17 m de radio (fig. 411) trazamos la cuerda AB a 8 m del centro y el diámetro COD perpendicular a dicha cuerda. Calcular la longitud de la misma y además la de las cuerdas CA y AD y el área del trapezoide inscrito ADBC.

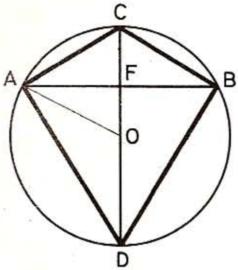


Fig. 411

$$AF = \sqrt{OA^2 - OF^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225} = 15 \quad m$$

y $\qquad \mathbf{AB = 30 \quad m}$

El triángulo rectángulo CAD *da:*

$$\mathbf{CA} = \sqrt{CD \times CF} = \mathbf{17,49\ \ m}$$

y $\qquad \mathbf{AD} = \sqrt{CD \times DF} = \mathbf{29,154\ m}$

El trapezoide ADBC *es simétrico con relación a* CD.

Area: $\mathbf{A} = \dfrac{AB \times CD}{2} = \dfrac{30 \times 34}{2} = \mathbf{510\ m^2}$

613. Dada la circunferencia O (fig. 412) trazamos los diámetros AB y CD perpendiculares entre sí.

1.º Demostrar que el cuadrilátero ADBC es polígono regular.

2.º Calcular el lado y la apotema del mismo, en función de R = 1,6 m.

3.º Si prolongamos el lado BC hasta que encuentre en E a la tangente trazada en A, hallar el área de la figura mixtilínea limitada por AE, EC y arco CA.

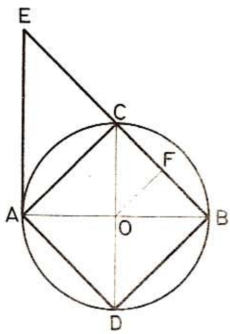


Fig. 412

- 1.º *Los lados* AC = CB = BD = DA, *porque subtienden arcos iguales.*

Los ángulos A, B, C, D *también son iguales por inscritos en una semicircunferencia; por tanto, el cuadrilátero* **ACDB es un polígono regular**, *un cuadrado. Por consiguiente* (GEOM. **442**).

- 2.º $\mathbf{AC} = R\sqrt{2} = 1,6\sqrt{2} = \mathbf{2,2627\ m}$

Apotema: $\mathbf{OF} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{1,6\sqrt{2}}{2} = \mathbf{1,1323\ m}$

- 3.º *El área que se busca se compone del área del trapecio* AOCE *menos la del sector de* 90º, AOC.

Area trapecio: $A_1 = \frac{AE + OC}{2} \times AO$

Los triángulos rectángulos semejantes BAE *y* BOC *dan:*

$$\frac{AE}{OC} = \frac{AB}{OB} \quad \textit{de donde} \quad AE = \frac{2R \times R}{R} = 2R$$

Area AOCE: $A_1 = \frac{3R}{2} \times R = \frac{3R^2}{2}$

Area del sector AOC: $A_2 = \frac{\pi R^2}{4}$

Area EAC: $\mathbf{A} = \frac{3R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{4}}\mathbf{(6 - \pi)}$

para $R = 1,60$ m $\quad \mathbf{A = 1,8294\ m^2}$

614. Un jardín circular tiene alrededor un paseo uniforme; la circunferencia exterior excede a la interior en 6,6 m, y el área del paseo es de 47,355 m². Calcular el área del jardín: $\pi = 22/7$.

Se tiene $2\pi R - 2\pi r = 6,6$ m

de donde $R - r = \frac{3,3}{\pi} = 1,05$ m (1)

y $47,355 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r)$

de donde $R + r = \frac{47,355}{\pi(R - r)} = \frac{47,355}{3,3} = 14,35$ m (2)

Restando la (1) *de la* (2) *da:* $r = 6,65$ m.

Area del jardín: $\mathbf{A} = \pi r^2 = \frac{22 \times 6,65^2}{7} = \mathbf{138,985\ m^2}$

615. Dada una circunferencia de radio R = 0,60 m, y un punto C fuera de ella, pero tal que OC = 2R, si trazamos la tangente CD, se desea conocer:
1.º La longitud de esa tangente CD.
2.º El área del triángulo COD (fig. 413).

- 1.º $\mathbf{CD} = \sqrt{OC^2 - OD^2} = R\sqrt{3} = \mathbf{1,04\ m}$
- 2.º $\mathbf{Area\ COD} = \frac{CD \times OD}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = \mathbf{0,31176\ m^2}$

616. Dada una circunferencia de radio $OA = R$ (fig. 413).

1.º Determinar sobre la prolongación de este radio un punto B. tal que las tangentes BD y BC′ con la cuerda que une los contactos C′HD formen un triángulo equilátero.

2.º Calcular la longitud de C′D, BH y el área del triángulo C′OD.

3.º Construir la figura cuando $R = 30$ mm.

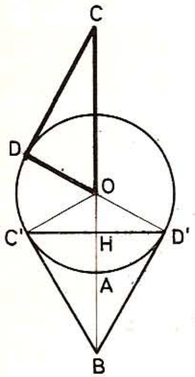


Fig. 413

● 1.º *Si* $\triangle BC'D$ *es equilátero, será* $\angle BC'D = 60^\circ$ *y* $\angle OBD = 30^\circ$.

En $\triangle BDO$ *(rectángulo):* $\mathbf{OB} = 2OD = \mathbf{2R.}$

● 2.º *El arco* $C'AD = 120^\circ$; *luego* $C'D = R\sqrt{3}$

para $R = 3$ cm: $\mathbf{C'D = 5{,}196\ cm}$

$$BH = OB - OH = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

para $R = 3$ cm: $\mathbf{BH = 4{,}5\ cm}$

Area C′OD: $\mathbf{A} = \dfrac{C'D \times OH}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = \mathbf{3{,}897\ cm^2}$

● 3.º *Se traza una circunferencia de radio* $R = 3$ cm *y sobre* $OB = 2R = 6$ cm *como diámetro se describe una circunferencia, la cual determinará sobre la circunferencia dada* O *los puntos de contacto* C′ *y* D.

617. Se nos da una circunferencia O (fig. 414) de diámetro $AB = 2R$. En el extremo A trazamos una tangente y en el otro extremo B una secante, la cual corta a la circunferencia en C y a la tangente en D y forma con AB un ángulo de 30º.

1.º Calcular BC, CD, AC y AD.

2.º Demostrar que existe otra circunferencia que pasa por B y C, y además es tangente a AD, dando una idea de ella.

3.º Calcular el área del triángulo ACD externo a la circunferencia.

● 1.º $\angle B = 30^\circ$ *luego* $\widehat{AC} = 60^\circ$ *y* $\mathbf{AC = R}$

$$\mathbf{CB} = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = \mathbf{R\sqrt{3}}$$

$\triangle ABC \sim \triangle ADC$: $\qquad \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AC}{CB}$

de donde $\qquad \mathbf{DC} = \dfrac{AC^2}{CB} = \dfrac{R^2}{R\sqrt{3}} = \dfrac{\mathbf{R\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$

$$\mathbf{AD} = \frac{AB \times AC}{CB} = \frac{2R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{2R\sqrt{3}}}{\mathbf{3}} = \mathbf{2DC}$$

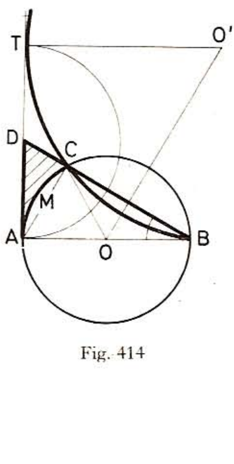


Fig. 414

● 2.º *Si* TCB *es la circunferencia pedida, tenemos:*

$$DT^2 = DB \times DC = AD^2$$

Para hallar el punto T *de contacto, bastará llevar* DT = DA. *El centro* O′ *se determina con la mediatriz de* CB *y la perpendicular* TO′ *a la tangente trazada en* A.

● 3.º *El área del triángulo mixtilíneo* ACD *se compone del área del triángulo* ACD *menos el área del segmento de* 60º (n.º **573**):

$$A = \frac{R^2 \sqrt{3}}{6} - \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

$$\mathbf{A = \frac{R^2}{12}(5\sqrt{3} - 2\pi)}$$

618. En una circunferencia (fig. 415) O de radio R se trazan dos diámetros perpendiculares AB y CD, y por el punto D, medio de OC, se traza EF paralela a AB. Si después se trazan las cuerdas AE, BF prolongándolas hasta que se corten en M, calcular:

1.º El área del trapecio AEFB.
2.º El área del triángulo EMF.
3.º El segmento circular ECF.

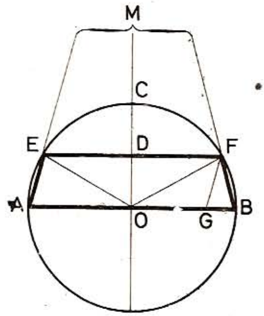


Fig. 415

● 1.º *Area* AEFB: $A = \frac{AB + EF}{2} \times OD$

EF *es la cuerda de* 120º *ya que su distancia al centro es* OD = R/2 (Geom. **449**), *por tanto* EF = $R\sqrt{3}$.
Luego

$$\mathbf{A} = \frac{2R + R\sqrt{3}}{2} \times \frac{R}{2} = \mathbf{\frac{R^2(2 + \sqrt{3})}{4}}$$

● 2.º *Tracemos* FG *paralela a* AE, *por lo que* $\triangle EMF \sim \triangle GFB$ *y notando que la altura de* $\triangle GFB$ *es igual a* OD, *tenemos:*

$$\frac{MD}{OD} = \frac{EF}{GB}; \quad \frac{MD}{R/2} = \frac{R\sqrt{3}}{2R - R\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$MD = \frac{R\sqrt{3}}{2(2 - \sqrt{3})} = \frac{R\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{2}$$

$$\mathbf{A} = \frac{EF \times MD}{2} = \frac{R\sqrt{3} \times R\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{4} = \mathbf{\frac{3R^2(2 + \sqrt{3})}{4}}$$

● 3.º $\angle EOF = 120º$; *el segmento* ECF *es igual al sector* EOFC *menos el triángulo* EOF, *esto es* **(568):**

Area EDFG: $\mathbf{A = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})}$

619. Sea el rombo ABCD (fig. 416) en el cual $\angle A = 60^\circ$. Si unimos A y B con los puntos C′ y D′ simétricos de C y D respecto de AB, probar que:

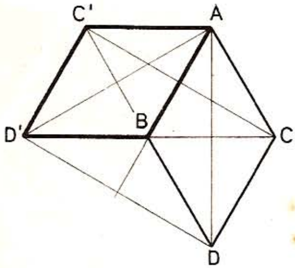


Fig. 416

1.º ABD′C′ es un rombo igual que el primero.

2.º ADD′ es un triángulo equilátero.

3.º CDD′C′ es un rectángulo.

4.º ACD′C′ es un trapecio isósceles.

5.º Calcular el área del triángulo equilátero, del rectángulo y del trapecio isósceles mencionados, en función de $AB = a$.

● 1.º *El cuadrilátero* **ABD′C′ es** *igual que el* **rombo** ABDC *por ser simétrico de éste con relación a la recta* AB.

● 2.º *El triángulo* **ADD′ es equilátero,** *pues* AD′ = AD *como simétricas con relación a* AB *y* $\angle DAD' = 2 \angle DAB = 60^\circ$.

● 3.º *El* **cuadrilátero CDC′D′** *es* **un rectángulo**; *en efecto,* D′C′ *es paralela a* DC *como simétrica de una paralela al eje* AB *y* CC′ *y* DD′ *son perpendiculares a* DC *y* D′C′, *pues lo son a su paralela* AB.

● 4.º *El* **cuadrilátero ACC′D′ es un trapecio** *isósceles, pues* $\angle ACB + \angle C'AC = 180^\circ$; *por tanto,* D′C *y* C′A *son paralelas; por fin, como se ha visto ya* (1.º), D′C′ = AC.

El cuadrilátero CAC′D *es también un trapecio isósceles e igual al trapecio* D′C′AC.

● 5.º *Como* BA = BD = BD′, DAD′ *es el triángulo equilátero inscrito en la circunferencia, cuyo centro es* B *y el radio,* a; *por tanto:*

Area ADD′: $\mathbf{A} = \dfrac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\mathbf{3a^2\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}$

Dimensiones del rectángulo CDD′C′:

$DC = a$ y $DD' = a\sqrt{3}$ *(lado del triángulo equilátero inscrito)*

Area CDD′C′: $\mathbf{A} = a \times a\sqrt{3} = \mathbf{a^2\sqrt{3}}$

Bases del trapecio **ACD′C′**: $AC' = a$ y $CD' = 2a$; *altura:* $1/2\, a\sqrt{3}$

Area ACD′C′: $\mathbf{A} = \dfrac{3a}{2} \times \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\mathbf{3a^2\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}$

620. Dada una circunferencia O (fig. 417) de radio R señalamos en ella cuatro puntos, A, B, C, D, tales que el arco AMB = 120º, arco BC = arco CD = 60º. Los segmentos AB y CD prolongados se cortan en S y las cuerdas AC y BD en E.

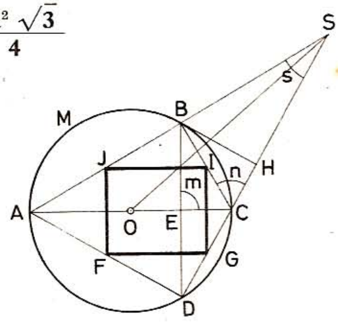


Fig. 417

1.º Calcular $\angle ASD = \angle s$, $\angle BEC = \angle m$ y $\angle BCS = \angle n$.

2.º Hallar, en función de R, las longitudes AB, BC, SD, SA, EA, EB, SO, así como también la distancia desde B al segmento SC.

3.º Calcular las áreas SBC, SAD y ABCD así como la del seg. circular AMB.

4.º Si unimos los puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD, probar que la figura que se obtiene es un rectángulo y hallar el área del mismo.

• 1.º

$$\angle \hat{\mathbf{s}} = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{120^o - 60^o}{2} = \mathbf{30^o}$$

$$\angle \widehat{\mathbf{m}} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{120^o + 60^o}{2} = \mathbf{90^o}$$

$$\angle \hat{\mathbf{n}} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{60^o + 60^o}{2} = \mathbf{60^o}$$

• 2.º AB *es el lado del triángulo equilátero y* BC *del exágono inscrito:*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{R}\sqrt{\mathbf{3}} \qquad y \qquad \mathbf{BC} = \mathrm{CD} = \mathbf{R}$$

El triángulo ACS *es isósceles, pues* $\angle A = \angle s = 30^o$; *la altura* CB *divide a* AS *en dos partes iguales; por tanto,*

$$\mathbf{SA} = 2\mathrm{AB} = \mathbf{2R}\sqrt{\mathbf{3}}$$
$$\mathbf{SD} = \mathrm{SC} + \mathrm{CD} = \mathrm{AC} + \mathrm{CD} = 2\mathrm{R} + \mathrm{R} = \mathbf{3R}$$

EA *es la altura del triángulo equilátero inscrito; por tanto, será:*

$$\mathbf{EA} = \frac{\mathbf{3R}}{\mathbf{2}}; \qquad \mathbf{EB} = \frac{\mathrm{BD}}{2} = \frac{\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

SO *es la mediana del triángulo* ASC; *la fórmula* (GEOM. **363**):

$$a^2 + b^2 = 2d^2 + 2m^2 \quad \textit{dará} \quad d^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - m^2$$

es decir:

$$SO^2 = \frac{SA^2 + SC^2}{2} - R^2 = \frac{12R^2 + 4R^2}{2} - R^2 = 7R^2$$

$$\mathbf{SO} = \mathbf{R}\sqrt{\mathbf{7}}$$

• 3.º *Area* SBC: $\mathbf{A} = \dfrac{BS \times BC}{2} = \dfrac{R\sqrt{3} \times R}{2} = \dfrac{\mathbf{R^2}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

Area SAD: $\mathbf{A} = \dfrac{AD \times SD}{2} = \dfrac{3R \times R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\mathbf{3R^2}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

Area ABCD: $\mathbf{A} = \dfrac{AC \times BD}{2} = \dfrac{2R \times R\sqrt{3}}{2} = \mathbf{R^2}\sqrt{\mathbf{3}}$

Area segmento 120º AMB: $\mathbf{A} = \dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{12}}(\mathbf{4\pi - 3\sqrt{3}})$ (n.º **573**)

• 4.º *El cuadrilátero* **FGIJ es un rectángulo** *porque sus lados son respectivamente paralelos a las diagonales* AC *y* BD, *las cuales son perpendiculares entre sí:*

$$FG = JI = \frac{AC}{2} = \frac{2R}{2} = R \qquad IG = JF = \frac{BD}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Area FGIJ: $\mathbf{A} = FG \times IG = R \times \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\mathbf{R^2}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

621. En una circunferencia de radio $r = 2$ cm (fig. 418) se traza el radio OB perpendicular al diámetro AD y luego por el punto E, medio de OD, trazamos la recta HE paralela a OB, la recta AB que corta a HE en el punto C y luego la tangente CF. Se desea conocer:

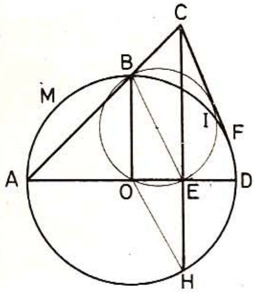


Fig. 418

1.º AB, CB, CE, BE, HE.
2.º El área del segmento AMB.
3.º El área del trapecio OBCE.
4.º La longitud de la tangente CF.
5.º Determinar gráficamente el punto del arco BD desde el cual se vea BE bajo un ángulo recto.

● 1.º **AB** = *cuerda de* 90º = *lado del cuadrado inscrito* = $R\sqrt{2}$ = **2,8284 cm.**

Los segmentos paralelos OB *y* EC *permiten escribir:*

$$\frac{BC}{OE} = \frac{AB}{AO} \qquad \mathbf{BC} = \frac{OE \cdot AB}{AO} = \frac{\frac{R}{2} \times R\sqrt{2}}{R} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \mathbf{1{,}4142\ cm}$$

Como $\angle A = 45^\circ$ *el triángulo rectángulo* AEC *es isósceles; luego*

$$\mathbf{CE} = AE = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2} = \mathbf{3\ cm}$$

$$\mathbf{BE} = \sqrt{OB^2 + OE^2} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{5R^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{5} = \mathbf{4{,}4762\ cm}$$

$$\mathbf{HE} = \sqrt{OH^2 - OE^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{3} = \mathbf{1{,}732\ cm}$$

● 2.º **Segmento AMB** = *sector* 90º − *triángulo* AOB

$$\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = \frac{R^2}{4}(\pi - 2) = \mathbf{3{,}1416\ cm^2}$$

● 3.º **Area OBCE** $= \dfrac{CE + OB}{2} \cdot OE = \dfrac{\frac{3R}{2} + R}{2} \cdot \dfrac{R}{2} = \dfrac{5R^2}{8} = \mathbf{2{,}5\ cm^2}$

● 4.º *El teorema de la tangente* (GEOM. **378**) *da*

$$\mathbf{CF} = \sqrt{AC \times BC} = \sqrt{(AB + BC) \times BC} =$$

$$= \sqrt{\frac{3R\sqrt{2}}{2} \times \frac{R\sqrt{2}}{2}} = \frac{R}{2}\sqrt{6} = \mathbf{2{,}45\ cm}$$

● 5.º *Sobre* BE *como diámetro se describe una circunferencia; el punto* I *en que corta al arco* BD *será el que resuelve el problema, porque, en efecto,* $\angle$BIE = 90º *como inscrito en una semicircunferencia.*

622. Dos semicircunferencias O y O′ (fig. 419) son tangentes exteriores, y sus diámetros son

$$AB \quad y \quad BC = AB/4$$

Si se trazan las tangentes en A y en C y las tangentes comunes DE y BI:

1.º Demostrar que los triángulos OO′I, DOI y EO′I son rectángulos.

2.º Demostrar que I es el punto medio de FG, distancia de los puntos de contacto.

3.º Calcular: *a*) BI, EG, AD en función de $r = O'C$. *b*) El área del trapecio ACED y la de éste no comprendida en los dos semicírculos dados.

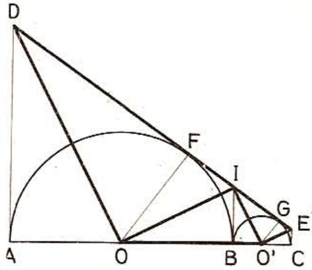


Fig. 419

Aplicación numérica: $\pi = 3{,}14$ y $r = 1$ cm.

● 1.º $\triangle DAO = \triangle DFO$, $\triangle IFO = \triangle IBO$, $\triangle IO'B = \triangle IGO'$, $\triangle EGO' = \triangle ECO'$ *(triángulos rectángulos con hipotenusa común y cateto igual).*

Por ser bisectrices de ángulos adyacentes, DO *es perpendicular a* OI; IO′ *a* O′E; OI *a* IO′. *Luego* **los triángulos DOI, EO′I y OO′I son rectángulos.**

● 2.º *Las tangentes trazadas desde un mismo punto a una circunferencia son iguales; por tanto*

$$\mathbf{FI = IB = IG}$$

● 3.º a) *En* $\triangle OO'I$: $\mathbf{BI} = \sqrt{OB \times O'B} = \sqrt{4r^2} = 2r = \mathbf{2\ cm.}$

En $\triangle EO'I$: $O'G^2 = IG \times EG$

de donde

$$\mathbf{EG} = \frac{\overline{O'G}^2}{IG} = \frac{r^2}{2r} = \frac{r}{2} = \mathbf{0{,}5\ cm}$$

$\triangle DAO \sim \triangle IBO'$ *(rectángulos con* $\angle ADO = \angle BIO$ *, por tanto:*

$$\frac{AD}{BI} = \frac{OA}{BO'} = 4. \qquad \textit{Luego} \qquad \mathbf{AD} = 4BI = 8r = \mathbf{8\ cm}$$

b) *Area del trapecio* ACED: $A_1 = \dfrac{AD + CE}{2} \times AC$

$$CE = EG = \frac{r}{2}$$

$$AC = AB + BC = 8r + 2r - 10r$$

Luego $$\mathbf{A_1} = \frac{8r + r/2}{2} \times 10r = \frac{170r^2}{4} = \mathbf{42{,}50\ cm^2}$$

Area de ACED, *no comprendida en los semicírculos:*

$$\mathbf{A_2} = \frac{170r^2}{4} - \left(\frac{16\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2}\right) = \frac{17r^2}{2}(5 - \pi) = \mathbf{15{,}81\ cm^2}$$

623. Dado el triángulo ABC (fig. 420), en el cual $AB = c = 11$ m, $AC = b = 15$ m, $BC = a = 21$ m, se desea saber:

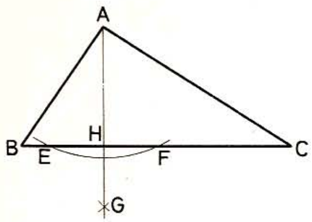


Fig. 420

1.º El modo de trazar la altura AH sirviéndose únicamente de la regla y el compás.

2.º Demostrar que $HC > HB$.

3.º Demostrar que $HC^2 - HB^2 = AC^2 - AB^2$, deduciendo por tanto los valores de HC y HB y el área del triángulo dado.

● 1.º *Véase el modo de trazar una perpendicular a una recta dada desde un punto tomado fuera de ella* (GEOM. **243**).

● 2.º *Como* AB *y* AC *son oblicuas desiguales, sus pies no equidistarán del pie de la perpendicular, y como* $AC > AB$, *es* **HC > HB.**

● 3.º *Sabemos que*

$$AC^2 = HC^2 + AH^2 \qquad (1)$$
$$AB^2 = HB^2 + AH^2 \qquad (2)$$

Restando (2) *de* (1): $AC^2 - AB^2 = HC^2 - HB^2$

de donde se deduce: $HC^2 - HB^2 = 225 - 121 = 104$

o bien $(HC + HB)(HC - HB) = 104$

de donde $$HC - HB = \frac{104}{HC + HB} = \frac{104}{21} = 4{,}95 \text{ m}$$

luego $$\mathbf{HC} = \frac{21 + 4{,}95}{2} = \mathbf{12{,}975\ m}$$

y $$\mathbf{HB} = \frac{21 - 4{,}95}{2} = \mathbf{8{,}025\ m}$$

y finalmente, $$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{121 - 64{,}4} = 7{,}52 \text{ m}$$

$$\textit{Area}\ \mathbf{ABC} = \frac{21 \times 7{,}52}{2} = \mathbf{78{,}96\ m^2}$$

624. En un triángulo equilátero ABC (fig. 421) de 60 m de lado se toma sobre el lado BC un segmento $BD = 40$ m y sobre el lado BA otro $BE = 25$ m.

1.º Calcular la recta ED.

2.º Qué longitud debiera tener BE para que el segmento ED dividiese al triángulo dado ABC en dos partes equivalentes.

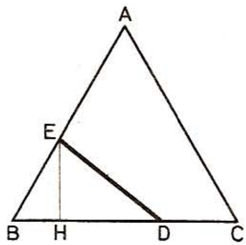


Fig. 421

● 1.º $$EH = \frac{BE\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2} = 21{,}65 \text{ m}$$

$$BH = \frac{1}{2} BE = 12{,}5 \text{ m}$$

$$DE = \sqrt{EH^2 + HD^2}$$

y $$HD = BD - BH = 40 - 12{,}5 = 27{,}5 \text{ m}$$

de donde $$\mathbf{DE} = \sqrt{\left(\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 27{,}5^2} = \mathbf{35\ m}$$

● 2.º *Area* $\frac{1}{2}$ ABC: $$A = \frac{1}{2} \times \frac{60^2\sqrt{3}}{4} = 450\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

$$EH = \frac{2A}{40} = \frac{450\sqrt{3}}{20} = \frac{45\sqrt{3}}{2}$$

y $$\mathbf{BE} = \frac{2}{3}\,EH\sqrt{3} = \frac{45\sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \mathbf{45\ m}$$

625. Los dos catetos de un triángulo rectángulo tienen $b = 9$ m y $c = 5$ m. Calcular el área del círculo circunscrito a dicho triángulo.

Cuadrado de la hipotenusa: $a^2 = b^2 + c^2 = 81 + 25 = 106$, *pero la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el diámetro de la circunferencia circunscrita; el área de este círculo será, pues:*

$$\mathbf{A} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}1416 \times 106}{4} = \mathbf{83{,}2524\ m}$$

626. Sobre la hipotenusa BC $= a$ de un triángulo rectángulo en el cual $\angle B = 60°$ (fig. 422), se construye un cuadrado; y sobre los catetos AB y AC se construyen triángulos equiláteros. Calcular el área total obtenida al unir los vértices próximos.

En el triángulo ABC:

$$\angle B = 60°, \quad AB = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \quad y \quad AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Los vértices F, C *y* E *están en línea recta, porque los ángulos en* C *valen* 180°; GA *es paralela a* BC, *porque los ángulos alternos en* B *y* BAG *son iguales.*

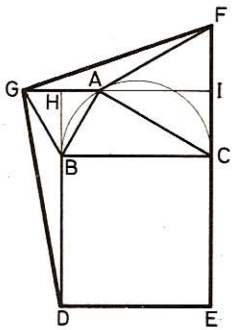


Fig. 422

$$\textit{Area}\ \text{GDEFG} \begin{cases} \textit{área}\ \text{ABC} = \dfrac{a^2}{8}\sqrt{3} \\ \textit{área}\ \text{BDEC} = a^2 \\ \textit{área}\ \text{AGB} = \dfrac{a^2}{16}\sqrt{3} \\ \textit{área}\ \text{ACF} = \dfrac{3a^2}{16}\sqrt{3} \\ \textit{área}\ \text{BGD} = \dfrac{a^2}{8} \\ \textit{área}\ \text{GAF} = \dfrac{a^2}{16}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\textbf{Area GDEFG} = \frac{9a^2}{8} + \frac{7a^2}{16}\sqrt{3} = \frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{16}}\,\mathbf{(18 + 7\sqrt{3})}$$

627. En cada vértice de un cuadrado ABCD (fig. 423) se trazan, en la región interior, rectas tales que, como AR, formen un ángulo de 30° con los lados.

1.° Demostrar que la figura obtenida LMNR es un cuadrado.

2.° Determinar el área de la misma en función del lado a del cuadrado dado.

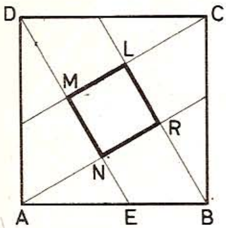


Fig. 423

● 1.° a) *Los ángulos son rectos, porque si tomamos, por ej.,* $\triangle ANE$, $\angle A = 30°$, $\angle E = 60°$, *y* $\angle N = 90°$. *Lo mismo pudiera decirse de los* $\angle R$, $\angle L$, $\angle M$.

b) *Los lados también son iguales, siendo la medida común de todos:*

$$NR = AR - AN$$

como estos triángulos rectángulos tienen un ángulo de 30°

$$AR = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad y \quad AN = \frac{a}{2}$$

de donde
$$NR = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

● 2.° *Area* MNRL: $\mathbf{A} = NR^2 = \left[\frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)\right]^2 = \mathbf{\frac{a^2}{2}(2 - \sqrt{3})}$

628. En un trapecio rectángulo ABCD (fig. 424), la base mayor AB = 100 m, la oblicua BC = 30 m y $\angle B = 45°$.

1.° Calcular el área del triángulo ODC que se forma al prolongar los lados no paralelos.

2.° ¿Qué longitud debería tener BC para que el área del triángulo ODC fuese la mitad que la del OAB?

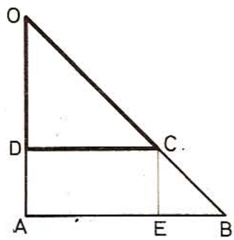


Fig. 424

● 1.° *El triángulo rectángulo* BEC *es isósceles* ($\angle B = 45°$) *y, por tanto,*

$$EC = \sqrt{\frac{30^2}{2}} = 15\sqrt{2}$$

y
$$DC = AE = AB - EB = 100 - 15\sqrt{2}$$

Como $\angle OCD = 45°$, $OD = DC$, *luego*

$$\textit{Area ODC: } \mathbf{A} = \frac{DC^2}{2} = \frac{(100 - 15\sqrt{2})^2}{2} = \mathbf{3103{,}7\ m^2}$$

● 2.° *Como las áreas de las figuras semejantes son proporcionales a los cuadrados de los lados homólogos, deberíamos tener:*

$$\frac{OB^2}{OC^2} = \frac{2}{1}$$

de donde
$$2OC^2 = OB^2 = (100\sqrt{2})^2 = 20\,000$$

y
$$OC = 100$$

Así pues,
$$\mathbf{BC} = OB - OC = 100\sqrt{2} - 100 = \mathbf{41{,}42\ m}$$

629. Un terreno tiene forma de trapecio (fig. 425); las bases tienen AB = 80 m, DC = 40 m y los lados no paralelos miden AD = 30 m y BC = 50 m.

1.º Probar que dicho trapecio es rectángulo.

2.º Hallar el área del terreno y el área de los triángulos que forman las diagonales al cruzarse.

• 1.º $\angle$ **DAB = 90º** *ya que* AD *y la altura* CH *del trapecio tienen igual valor. En efecto:*

$$CH = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30 = AD$$

• 2.º *Area* ABCD: $\mathbf{A} = \frac{80 + 40}{2} \times 30 = \mathbf{1800\ m^2}$

De la semejanza de los triángulos AOB *y* DOC *se deduce:*

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{b'}, \quad o\ bien \quad \frac{m}{30 - m} = \frac{80}{40}$$

de donde $m = \frac{2400}{120} = 20\text{ m} \quad y \quad n = 10\text{ m}$

Area de AOB: $\mathbf{A} = \frac{80 \times 20}{2} = \mathbf{800\ m^2}$

Area de DOC: $\mathbf{A} = \frac{40 \times 10}{2} = \mathbf{200\ m^2}$

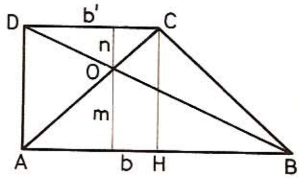


Fig. 425

Los triángulos ADC *y* BDC *son equivalentes por tener igual base,* DC, *e igual altura (la del trapecio). Por tanto:*

Area ADC − *área* DOC = *área* BDC − *área* DOC

es decir *área* ADO = *área* BCO

Areas de ADO *y* BCO: $\mathbf{A} = \frac{1800 - (800 + 200)}{2} = \mathbf{400\ m^2}$

630. Al levantar el plano de una finca se observa que tiene la forma poligonal ABCDEF (fig. 426), y que si se traza la diagonal CF queda dividida en dos trapecios isósceles ABCF y CDEF, cuyos lados AB y DE son iguales a la tercera parte de CF, la cual tiene 90 m.

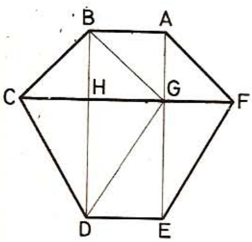


Fig. 426

Con estos datos, y sabiendo además que $\angle$BCF = = $\angle$AFC = 45º y $\angle$FCD = $\angle$CFE = 60º, construir la figura y calcular el área que tiene.

• 1.º *Para determinar el trapecio* ABCF, *bastará que sobre* CG, *diferencia de las dos bases, construyamos el triángulo rectángulo isósceles* CBG, *trazando luego* BA *paralela a* CF *y después* AF *paralela a* BG.

Construyendo, con CG *por lado, el triángulo equilátero* CDG *y trazando* DE *paralela a* CF *y* EF *paralela a* DG, *obtendremos el trapecio* CDEF.

● 2.º *Al ser* $\angle BCF = \angle AFC = 45^\circ$ *es* $BH = \dfrac{\overline{CF} - AB}{2} = 30$ m

Area ABCF $\quad A_1 = \dfrac{90 + 30}{2} \times 30 = 1800\ m^2$

Al ser $\angle FCD = \angle CFE = 60^\circ$

es
$$DH = \frac{CG\sqrt{3}}{2} = \frac{(CF - DE)\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}$$

Area CDEF $\quad A_2 = \dfrac{90 + 30}{2} \times 30\sqrt{3} = 3117{,}6\ m^2$

Area ABCDEF $\quad \mathbf{A} = A_1 + A_2 = 1800 + 3117{,}6 = \mathbf{4917{,}6\ m^2}$

631. El área de un exágono regular es de 935 280 cm^2. Calcular:
1.º El radio de las circunferencias inscrita y circunscrita.
2.º El área de la corona comprendida entre ellas, demostrando que es equivalente a la del círculo que tuviese por diámetro el lado del exágono.

● 1.º *Sea* a *el lado del exágono regular.*
El radio de la circunf. circunscrita, será: R = a

y el de la c. inscrita: $\quad r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Area del exágono: $\quad A = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} \quad$ *de donde* $\quad a^2 = \dfrac{2A}{3\sqrt{3}}$

Por tanto: $\quad \mathbf{R} = a = \sqrt{\dfrac{935\,280 \times 2}{3 \times 1{,}732}} = \sqrt{360\,000} = \mathbf{600\ cm}$

$$\mathbf{r} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{600\sqrt{3}}{2} = 300\sqrt{3} = \mathbf{519{,}6\ cm}$$

● 2.º *Area de la corona:*

$$A = \pi (R^2 - r^2) = \pi\left(a^2 - \frac{3a^2}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{4}$$

que es el área del círculo de diámetro a.

Para a = 6 m: $\quad \mathbf{A} = \dfrac{\pi \times 6^2}{4} = 9\pi = \mathbf{28{,}2744\ m^2}$

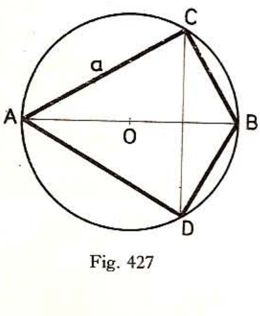


Fig. 427

632. En una circunferencia O (fig. 427) de diámetro AB, se traza la cuerda AC = *a* que forma con AB un ángulo de 30º, y además se trazan las cuerdas AD = AC y las CB, BD.

Calcular en función de *a:*
1.º El radio R de la circunferencia.
2.º El área del trapezoide ACBD.
Aplicación.—Para *a* = 2 m.

• 1.º *Para* $\angle CAB = 30°$, *será* CB $= \mathbf{R} = \dfrac{\mathbf{a}\sqrt{3}}{\mathbf{3}}$

• 2.º *El trapezoide* ACBD *está formado por dos triángulos rectángulos iguales* ACB *y* ADB *cuyos catetos miden* R *y* a. *Luego*

Area ACBD: $\mathbf{A} = 2 \times \dfrac{R \times a}{2} = R \times a = \dfrac{\mathbf{a^2}\sqrt{3}}{\mathbf{3}}$

Aplicación.—*Para* a = 2m $\mathbf{R} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \mathbf{1{,}155\ m}$

Area ACBD: $\mathbf{A} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \mathbf{2{,}31\ m^2}$

633. Dada una circunferencia O (fig. 428), trazamos las cuerdas AB y AD iguales al lado del cuadrado inscrito; BC, igual al lado del exágono regular inscrito, y por fin, la CD. Calcular:

1.º El valor de $\angle B$ y $\angle D$.

2.º El área del trapezoide ABCD, en función del radio R.

• 1.º $\angle \mathbf{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}}{2} = \dfrac{90° + 120°}{2} = \mathbf{105°}$

$\angle \mathbf{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{90° + 60°}{2} = \mathbf{75°}$

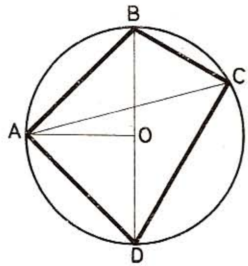


Fig. 428

• 2.º *Area* ABCD = *área* ABD + *área* BCD

Area ABD $= \dfrac{BD \times OA}{2} = \dfrac{2R \times R}{2} = R^2$

Area BCD $= \dfrac{BC \times CD}{2} = \dfrac{R \times R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

$$\textbf{Area ABCD} = \frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{2}}(\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}})$$

634. Dada la circunferencia O (fig. 429), en la prolongación del diámetro AB tomamos un punto M tal, que MO = 2R y trazamos las tangentes MC y MD.

1.º Probar que el triángulo MCD es equilátero.

2.º Calcular, en función de R, el área que tiene.

3.º ¿Qué clase de cuadrilátero es ACMD y cuál es su área?

• 1.º *En* $\triangle OCM$ *tenemos que* OM = 2OC, *luego* $\angle OMC = 30°$ *y* $\angle CMD = 60°$ *y como* CM = DM *será* $\angle C = \angle D = 60°$ *y* **el triángulo MCD es equilátero.**

• 2.º $OC^2 = OM \times OI$, *de donde*

$$OI = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} \quad y \quad CD = R\sqrt{3} \qquad (1)$$

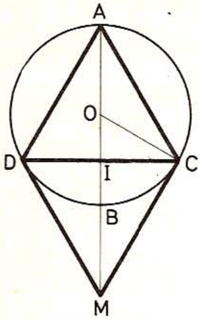


Fig. 429

Area $\triangle$MCD:

$$\mathbf{A} = \frac{CD \times IM}{2} = \frac{R\sqrt{3} \times 3R}{2 \times 2} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\mathbf{R^2\sqrt{3}}$$

● 3.º *En el triángulo* ICA *tendremos:*

$$AC = \sqrt{AI^2 + IC^2} = \sqrt{\left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = R\sqrt{3} \quad (2)$$

Comparando (1) *y* (2):

$$CD = (CM = DM) = AC = (AD = CM)$$

por tanto, **ADMC** *es* **un rombo,** *y su área:*

$$\mathbf{A} = 2 \times \triangle MCD = \frac{\mathbf{3R^2\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

635. Dos circunferencias O, O′ (fig. 430) de radios R y r son tangentes exteriores en I. Si se traza la tangente común exterior AB y la tangente común interior ID:

1.º Demostrar que D es el punto medio de AB.

2.º Calcular AB.

3.º Demostrar que el cuadrilátero OO′AB es un trapecio y calcular el área que tiene.

Aplicación: R = 4 m, r = 3 m.

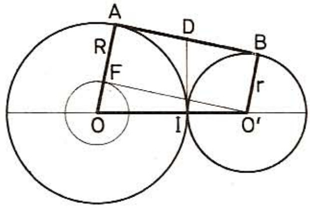


Fig. 430

● 1.º *Como las tangentes trazadas desde un punto a una misma circunferencia son iguales, tendremos:* ID = AD = BD *y* **D será el punto medio de AB.**

● 2.º *Trazando por el punto* O, *la* O′F *paralela a* AB, *se forma el triángulo rectángulo* O′FO, *en el cual:*

$$OO' = R + r, \quad O'F = AB, \quad OF = R - r$$

$$AB = O'F = \sqrt{OO'^2 - OF^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{4Rr} = 2\sqrt{Rr}$$

Aplicación: para R = 4 m y r = 3 m

$$\mathbf{AB} = 2\sqrt{4 \times 3} = 4\sqrt{3} = \mathbf{6{,}928\ m}$$

● 3.º *Los radios* OA *y* O′B *de los puntos de contacto son perpendiculares a la tangente* AB *y, por tanto, paralelos; luego el cuadrilátero* **OO′AB es un trapecio.**

$$\textit{Area}\ \mathbf{OO'AB} = \left(\frac{R+r}{2}\right) \times 2\sqrt{Rr} = 14\sqrt{3} = \mathbf{24{,}248\ m^2}$$

636. Dadas dos circunferencias O y O′ (fig. 431) secantes en los puntos A y B; por este último punto trazamos una secante cualquiera CBD.

1.º Demostrar que el triángulo ACD es semejante al triángulo AOO′ y que la razón de semejanza entre sus líneas homólogas es igual o menor que dos.

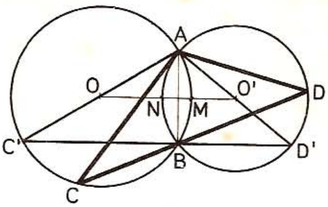


Fig. 431

2.º Calcular el área C′OO′D′ cuando C′BD′ sea paralela a OO′; AB = 3 cm, OO′ = 4 cm.

● 1.º *Los triángulos* ACD *y* AOO′ *son semejantes, pues*

$$\angle C = \angle O = \frac{\widehat{AMB}}{2}$$

lo mismo que

$$\angle D = \angle O' = \frac{\widehat{ANB}}{2}$$

Consideremos ahora las líneas homólogas AC′, AO, AC:

Si C′D′ *es paralela a* OO′, *la razón* $\frac{AC'}{AO} = 2$.

Para cualquiera otra posición de la secante, la cuerda AC *será menor que el diámetro* AC′, *por tanto:* $\frac{AC'}{AO} < 2$.

● 2.º *Cuando* C′D′ *es paralela a* OO′, C′D′ = 2OO′ = 8 cm

Area C′OO′D′ $\quad \mathbf{A} = \frac{C'D' + OO'}{2} \times \frac{AB}{2} = \frac{12 \times 3}{2} = \mathbf{9\ cm^2}$

637. Sobre los segmentos rectilíneos AC, CB y AB de una recta ACB (figura 432), se describen, a un mismo lado, semicircunferencias y se traza en el punto C la perpendicular CD y se trazan AED y BFD. Demostrar:

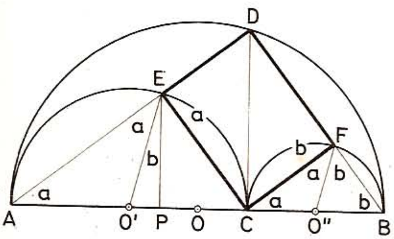


Fig. 432

1.º Que ECFD es un rectángulo.

2.º Que EF es tangente a las circunferencias O′ y O″.

3.º Que el cuadrilátero ABFE es inscriptible.

4.º Que el círculo de diámetro CD equivale al área comprendida entre las tres semicircunferencias.

5.º Calcular CD, AD, CE y CF para AC = 3R/2.

● 1.º EC *y* CF *son perpendiculares entre sí por ser respectivamente perpendiculares a los catetos* AD *y* BD *del ángulo recto* D; *por tanto,* **el cuadrilátero ECFD es un rectángulo.**

● 2.º EF *será tangente a las circunferencias* O′ *y* O″ *si es perpendicular a los radios* O′E *y* O″F; *mas todos los ángulos* a *son iguales, lo mismo que los ángulos* b *y como* a + b = 90º, ∠O′EF = ∠O″FE = 90º *y, por consiguiente,* **EF es** *perpendicular a* O′E *y a* O″F *y* **tangente** *a las circunferencias* O′ *y* O″.

● 3.º *Si el cuadrilátero* ABFE *es inscriptible, se deberá tener* (GEOM. **367**):

$$DA \times DE = DB \times DF$$

y es así, ya que: $\quad DC^2 = DA \times DE = DB \times DF \quad$ *luego...*

4.º *En* $\triangle ABD$ *(rectángulo):* $CD^2 = AC \cdot CB.$ (1)

Area del círculo de diámetro CD: $\frac{\pi \cdot CD^2}{4} = \frac{\pi \cdot AC \cdot CB}{4}$ (2)

Area semicírculo de diámetro AB: $\frac{\pi \cdot AB^2}{8}$

Area semicírculo de diámetro AC: $\frac{\pi \cdot AC^2}{8}$

Area semicírculo de diámetro CB: $\frac{\pi \cdot CB^2}{8}$

Area comprendida entre las 3 semicircunferencias:

$$\frac{\pi}{8}[AB^2 - AC^2 - CB^2] = \frac{\pi}{8}[(AC + CB)^2 - AC^2 - CB^2] =$$

$$= \frac{\pi}{8} \times 2 \cdot AC \cdot CB = \frac{\pi}{4} \cdot AC \cdot CB \qquad (3)$$

Vemos que (2) = (3) *que es lo que queríamos demostrar.*

5.º *Para* $AC = 3R/2$, $CB = R/2$ y (1) *da:*

$$\mathbf{CD} = \sqrt{\frac{3R}{2} \times \frac{R}{2}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2}}\sqrt{\mathbf{3}}$$

$$\mathbf{AD} = \sqrt{2R \times \frac{3R}{2}} = \sqrt{3R^2} = \mathbf{R}\sqrt{\mathbf{3}}$$

$$\triangle ABD \sim \triangle CBF, \quad \textit{luego:} \quad \frac{CF}{AD} = \frac{CB}{AB} = \frac{R/2}{2R} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{CF} = \frac{AD}{4} = \frac{\mathbf{R}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}; \qquad \mathbf{CE} = \frac{AC}{2} = \frac{\mathbf{3R}}{\mathbf{4}}$$

5

GEOMETRIA PLANA

Recapitulación

638. ¿Cuál será el área del círculo inscrito en un sector circular cuyo ángulo central tiene 60º? (fig. 433).

Ver n.º **574,** *o también: Tracemos el radio* OB *bisectriz del ángulo* EOD = 60º *y la tangente al arco en el punto* B. *El triángulo* OED *será equilátero y sus bisectrices serán al mismo tiempo alturas y medianas. Como el punto* M *es el incentro, resulta:*

$$\mathrm{BM} = \frac{\mathrm{BO}}{3} = \frac{r}{3} \quad \textit{de donde} \quad \textbf{Area del círculo inscrito} = \frac{\pi r^2}{9}$$

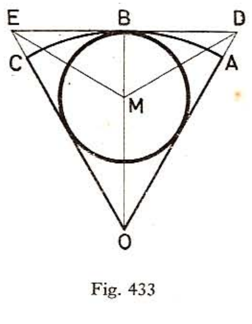


Fig. 433

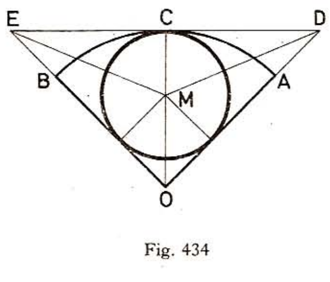


Fig. 434

639. ¿Cuál será el área del círculo inscrito en un sector circular de 90º? (figura 434).

Tracemos el radio OC *bisectriz del ángulo* EOD *y la tangente al arco en el punto* C. *Los triángulos rectángulos* EOD, ECO *y* DCO *son isósceles. Luego*

$$\mathrm{DE} = 2\mathrm{OC} = 2\mathrm{R}, \quad \mathrm{OD} = \mathrm{OE} = \mathrm{R}\sqrt{2}$$

Pero (n.º **157**): $2MC = OE + OD - ED = 2R\sqrt{2} - 2R = 2R(\sqrt{2} - 1)$

$$MC = R(\sqrt{2} - 1)$$

Area círculo circunscrito: $\mathbf{A} = \pi R^2 (\sqrt{2} - 1)^2 = \boldsymbol{\pi R^2 (3 - 2\sqrt{2})}$

640. Dado el ángulo recto ASB (fig. 435) y la circunferencia de centro O y radio R inscrita en él, se une el vértice S con el centro O y se prolonga el segmento hasta la circunferencia. Por los extremos del diámetro se trazan dos perpendiculares a éste, prolongándolas hasta que corten a los catetos del ángulo recto. Calcular en función del radio R, el área del trapecio ABCD, comparándola con el área del octógono regular inscrito en dicha circunferencia.

● 1.º *Trazando los radios por los puntos de contacto, el cuadrilátero que se forma es un cuadrado, pues* $\angle G = \angle S = \angle I = 90°$ *y los lados contiguos* $OG = OI$.

La diagonal de este cuadrado es bisectriz del ángulo ASB, *y por ser perpendicular a* DC *y* AB *será también altura de los triángulos rectángulos* DSC *y* ASB; *luego éstos serán isósceles, lo mismo que sus mitades* SHC *y* SEB.

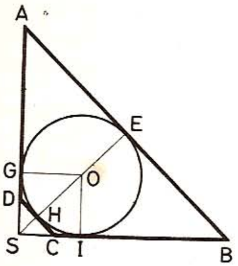


Fig. 435

Por tanto, $SH = HC$ *y* $SE = EB$

Area trapecio ABCD: $A = \dfrac{(CD + AB)}{2} \times HE$

$$SH = SO - OH = R\sqrt{2} - R = R(\sqrt{2} - 1)$$
$$CD = 2 \cdot HC = 2SH = 2R(\sqrt{2} - 1)$$
$$SE = SH + HE = R(\sqrt{2} - 1) + 2R = R(\sqrt{2} + 1)$$
$$AB = 2 \cdot SE = 2R(\sqrt{2} + 1)$$

Area: $A = \left[\dfrac{2R(\sqrt{2} - 1) + 2R(\sqrt{2} + 1)}{2}\right] 2R$

$$\mathbf{A} = R \times 2\sqrt{2} \times 2R = \mathbf{4R^2\sqrt{2}}$$

● 2.º *Area del octógono regular inscrito en función de* R: $2R^2\sqrt{2}$ (GEOM. **578**).

El área del trapecio **ABCD es doble que el** *área del* **octógono** *regular inscrito en la circunferencia dada.*

641. Sean dos rectángulos. El primero tiene 240 m de perímetro, y las dimensiones del segundo exceden en 15 m a las del primero. Si la relación de las áreas de los dos es de 5/8 hállense las dimensiones correspondientes de esos rectángulos.

Sea x *la longitud del* 1.º, *su anchura será:* 120 — x; *las dimensiones del* 2.º *serán:*

$$x + 15 \quad \text{y} \quad 120 - x + 15 \quad \textit{o sea} \quad 135 - x$$

Ecuación: $\dfrac{x(120 - x)}{(x + 15)(135 - x)} = \dfrac{5}{8}$

Resolviendo: $x^2 - 120x + 3375 = 0$

$$x = 60 \pm \sqrt{3600 - 3375} = 60 \pm \sqrt{225} = 60 \pm 15$$

1.^{er} *rectángulo* $\begin{cases} x' = \mathbf{75\ m} \\ x'' = \mathbf{45\ m} \end{cases}$

2.º *rectángulo* $\begin{cases} 75 + 15 = \mathbf{90\ m} \\ 45 + 15 = \mathbf{60\ m} \end{cases}$

642. Un predio en forma de trapecio tiene por bases 152 m y 78 m, y ha sido comprado en 79 350 pts por tres labradores, que se reparten la finca según lo indica la figura 436.

DB es una diagonal.

AE prolongado pasaría por C.

¿Qué cantidad deben entregarse mutuamente si al hacer la compra han pagado por igual?

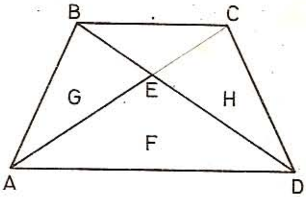


Fig. 436

Sea h *la altura del trapecio.*

$$Area\ \triangle ABD = \frac{AD + h}{2} = \frac{152 \times h}{2} = 76\ h$$

$$Area\ \triangle BCD = \frac{BC \times h}{2} = \frac{78 \times h}{2} = 39\ h$$

$\triangle AED \sim \triangle BEC$, *luego sus alturas se obtienen repartiendo* h *proporcionalmente a las bases* AD *y* BC, *o sea a* 152 *y* 78.

La altura del triángulo AED *será:* $\dfrac{152 \times h}{230} = \dfrac{76h}{115}$

$$Area\ \triangle AED = \frac{AD \times 76h}{2 \times 115} = \frac{76 \times 76h}{115}$$

$$Area\ \triangle ABE = 76h - \frac{76 \times 76h}{115} = \frac{76h \times 39}{115}$$

El área de las tres parcelas es proporcional a

$$39h, \quad \frac{76 \times 76h}{115}, \quad \frac{76h \times 39}{115}$$

o sea $39 \times 115 = 4485; \quad 76^2 = 5776; \quad 76 \times 39 = 2964$

$$H \text{ - } Precio\ del\ \triangle BCD = \frac{79\,350 \times 4485}{13\,225} = 26\,910 \text{ pts}$$

$$F \text{ - } Precio\ del\ \triangle AED = \frac{79\,350 \times 5776}{13\,225} = 34\,656 \text{ pts}$$

$$G \text{ - } Precio\ del\ \triangle ABE = \frac{79\,350 \times 2964}{13\,225} = 17\,784 \text{ pts}$$

Cada labrador anticipó 79 350 : 3 = 26 450 pts.
El aldeano H *debe devolver al labrador* G: **460 pts.**
El aldeano F *debe devolver al labrador* G: **8206 pts.**

643. Dado un triángulo equilátero ABC (fig. 437), desde cada vértice se describe un arco con el lado del triángulo por radio.

Calcular el área total de la figura que forman el triángulo y los tres segmentos circulares. Tómese AB = 0,45 m.

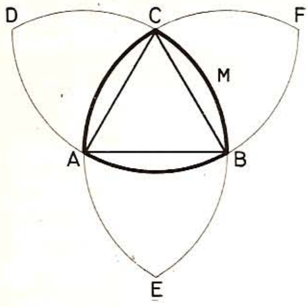


Fig. 437

El área pedida se compone del área de 3 sectores de 60º menos 2 triáng. equiláteros ABC

Area sector ABMC: $A_1 = \frac{\pi R^2 \times 60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$

Area $\triangle$ABC: $A_2 = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Area pedida:

$$\mathbf{A} = 3 \times \frac{\pi R^2}{6} - 2 \times \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{2}}(\pi - \sqrt{\mathbf{3}})$$

Para R = 0,45:

$$\mathbf{A} = \frac{0{,}45^2}{2} \times 1{,}4096 = \mathbf{0{,}142722\ m^2}$$

644. Dada una circunferencia de centro O (fig. 438) y radio R = 50 cm se divide en seis partes iguales en los puntos A, B, C, D, E, F.

Desde estos puntos como centro y con un radio igual a R, se describen arcos de circunferencia que quedarán limitados en la circunferencia dada, formando de tres en tres un rosetón de seis puntas. Calcular el área que tiene dicho rosetón.

Trazando los radios OA, OB *y la cuerda* AB *queda formado el triángulo equilátero* ABO, *de donde* $\angle$OAB = 60º.

El rosetón se compone de seis hojas iguales y cada hoja consta de dos segmentos circulares de 60º *y de radio* R.

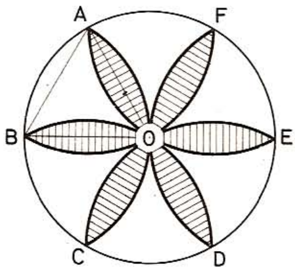


Fig. 438

Area segmento: $$A = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$ (n.º **573**)

Area rosetón: $$\mathbf{A} = 12\left[\frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}\right] = \mathbf{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}$$

Para R = 5 dm:

$$\mathbf{A} = 25\,(2 \times 3{,}1416 - 3 \times 1{,}732) = \mathbf{27{,}18\ dm^2}$$

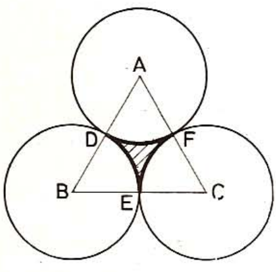


Fig. 439

645. Dadas tres circunferencias iguales (figura 439) tangentes entre sí dos a dos, calcular, en función del radio r, el área del triángulo curvilíneo comprendido entre dichas circunferencias.

Aplicación.—Para r = 5 cm.

El área del triángulo curvilíneo sombreado es igual al área del triángulo equilátero ABC *disminuida del área de tres sectores de* 60º *cada uno.*

Area $\triangle$ABC *en función del lado:*

$$A_1 = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$$

y por ser $l = 2r$, *será:*

Area $\triangle$ABC: $$A_1 = \frac{4r^2}{4}\sqrt{3} = r^2\sqrt{3}$$

Area 3 sectores de 60°: $$A_2 = 3 \times \frac{\pi r^2}{6} = \frac{\pi r^2}{2}$$

Area triáng. curvilíneo: $$\mathbf{A} = r^2\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\mathbf{r^2}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{(2\sqrt{3} - \pi)}$$

Aplicación.—*Para* $r = 5$ cm

Area: $$\mathbf{A} = \frac{25}{2}(2 \times 1{,}732 - 3{,}1416) = \mathbf{4{,}03\ cm^2}$$

646. Dado un cuadrado ABCD (fig. 440) de lado $a = 20$ cm, desde cada vértice como centro y con un radio $r = a/2$ se describe un arco de circunferencia limitado por los lados del cuadrado. Calcular, en función del radio r, el área del cuadrado curvilíneo que resulta.

Sea r *el radio. El área del cuadrado* ABCD *será* $4r^2$.

De este área habrá que restar el área de cuatro sectores de 90°, o sea de un círculo de radio r *para obtener el área pedida:*

Area: $$\mathbf{A} = 4r^2 - \pi r^2 = \mathbf{r^2(4 - \pi)}$$

Aplicación.—*Para* $a = 20$ cm, *o sea* $r = 10$ cm

$$\mathbf{A} = 100(4 - 3{,}1416) = \mathbf{85{,}84\ cm^2}$$

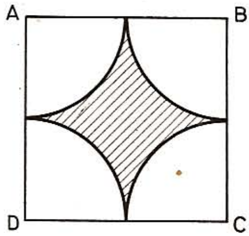


Fig. 440

647. Siendo los vértices de un rombo (fig. 441) de lado igual a una diagonal, los centros de cuatro circunferencias iguales, tangentes dos a dos, calcular el área de la superficie curvilínea comprendida entre esos cuatro arcos, en función del radio R.

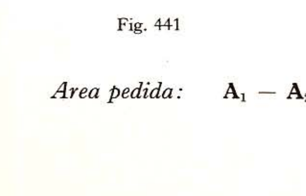


Fig. 441

- 1.° *El rombo se compone de dos triángulos equiláteros unidos por la base* CA = 2R = AB.

Area rombo: $$A_1 = 2 \times \frac{(2R)^2\sqrt{3}}{4} = 2R^2\sqrt{3}$$

- 2.° *De este resultado hay que restar:*

a) *Dos sectores de* 60°.
b) *Dos sectores de* 120°.
} Total: un círculo $A_2 = \pi R^2$

Area pedida: $$\mathbf{A_1 - A_2} = 2R^2\sqrt{3} - \pi R^2 = \mathbf{R^2(2\sqrt{3} - \pi)}$$

648. Desde los puntos medios de los lados de un cuadrado (fig. 442), con la mitad del lado por radio, se describen cuatro semicircunferencias en la región interior del cuadrado. Calcular el área del cuadrifolio obtenido.

Sea a *el lado del cuadrado; será* R = a/2.

Sumando los cuatro semicírculos se tiene el área del cuadrado más el área de la figura plumeada.

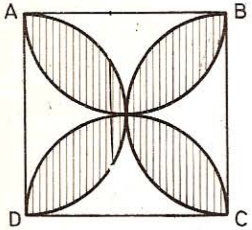


Fig. 442

Por tanto, el área **del cuadrifolio será**

$$\mathbf{A} = 2\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 - a^2 = \frac{\pi a^2}{2} - a^2 = \frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{2}}\,(\pi - 2)$$

Aplicación.—*Para* a = 4 m

$$\mathbf{A} = 8\,(3{,}1416 - 2) = \mathbf{9{,}1328\ m^2}$$

Nota.—*El espacio curvilíneo en blanco que forma la* cruz de Malta *es igual al cuadrado menos el cuadrifolio, esto es:*

$$\mathbf{A} = a^2 - \frac{a^2}{2}(\pi - 2) = \frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{2}}\,(\mathbf{4} - \pi)$$

649. En una semicircunferencia de centro O (fig. 443) y diámetro AB = $2r$, desde C, punto medio de esta semicircunferencia como centro, y con un radio AC, se describe una circunferencia, la cual cortará en D a la prolongación del radio OC; y además se trazan las cuerdas AD y BD. Se desea saber:

1.º El área del triángulo ADB.
2.º El área del segmento circular AOBE.
3.º El área comprendida entre el arco ADB y la semicircunferencia ACB.

● 1.º **Area del triángulo ADB.**—*Sea* R *el radio de la circunferencia mayor y* r *el de la más pequeña, tendremos:*

$$R = AC = OA\sqrt{2} = r\sqrt{2}$$

Altura $\triangle$ADB: $OD = OC + CD = r + r\sqrt{2} = r\,(1 + \sqrt{2})$

La base AB = 2r; *por tanto, el área será:*

$$\mathbf{A} = \frac{2r \times r\,(1 + \sqrt{2})}{2} = \mathbf{r^2\,(1 + \sqrt{2})}$$

● 2.º **Area del segmento AOBE.**—*Siendo* $\angle$C = = 90º, *el sector* AOBE *será la cuarta parte del círculo de centro* C *y radio* = r $\sqrt{2}$.

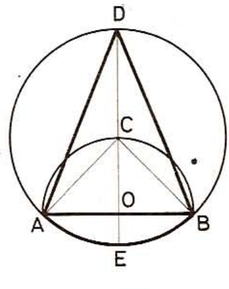


Fig. 443

Area sector: $A_1 = \frac{\pi\,(r\sqrt{2})^2}{4} = \frac{2\pi r^2}{4} = \frac{\pi r^2}{2}$

Area $\triangle$ACB: $A_2 = \frac{2r \times r}{2} = r^2$

Area segmento: $\mathbf{A_1} - \mathbf{A_2} = \frac{\pi r^2}{2} - r^2 = \frac{\mathbf{r^2}}{\mathbf{2}}\,(\pi - \mathbf{2})$

● 3.º **Area comprendida entre la semicircunferencia y el arco ADB.** *Este área será la diferencia entre el círculo mayor y la suma del semicírculo menor más la del segmento* AOBE.

Area círculo mayor: $A_1 = \pi R^2 = \pi (r\sqrt{2})^2 = 2\pi r^2.$

Area semicírculo menor: $A_2 = \dfrac{\pi r^2}{2}.$

Area deseada: $A = 2\pi r^2 - \left[\dfrac{\pi r^2}{2} + \dfrac{r^2}{2}(\pi - 2)\right]$

$$\mathbf{A} = 2\pi r^2 - \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} + r^2 = \pi r^2 + r^2 = \mathbf{r^2\ (\pi + 1)}$$

650. Dado un paralelogramo ABCD (fig. 444), unimos los puntos medios de cada lado con los puntos extremos del lado opuesto. Calcular el área del octógono interior que se forma, en función del área del paralelogramo.

Sea ABCD *el paralelogramo y* M, N, P, Q *los puntos medios de sus lados. Al unir estos puntos con los extremos de los lados* AB, BC, CD, DA *queda formado el octógono interior convexo* A'M'B'N'C'P'D'Q', *cuyos vértices están situados sobre las cuatro rectas* AC, MP, BD, NQ *que se cortan en el centro* O *del paralelogramo.*

Conviene observar, además, que los vértices A', B', C', D' *son cada uno la intersección de las tres medianas de un mismo triángulo.*

Los triángulos OA'M' *y* OAM *tienen el ángulo en* O *común; sus áreas serán, por tanto, proporcionales a los productos de los lados que le comprenden* (GEOM. **551**); *así pues:*

$$\frac{\triangle OA'M'}{\triangle OAM} = \frac{OA' \times OM'}{OA \times OM}$$

Por ser A' *el punto de concurso de las tres medianas del* $\triangle$ABD:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{3}$$

y además, por ser M' *el centro del paralelogramo* ABNQ, *divide a* OM *en dos partes iguales*

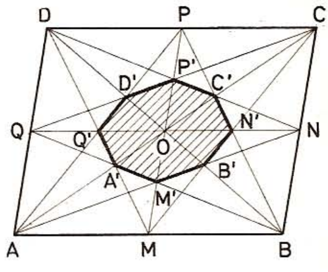


Fig. 444

De donde: $\dfrac{\triangle OA'M'}{\triangle OAM} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

Como el mismo razonamiento se pudiera aplicar a las demás partes componentes del octógono, podemos sacar la conclusión: el **área del octógono es la sexta parte del área del paralelogramo.**

651. Se unen los puntos medios de los lados de un cuadrado ABCD (figura 445) con los vértices no adyacentes del mismo cuadrado, y se desea saber:

1.º De qué naturaleza es el polígono determinado por los ocho segmentos que se trazan.

2.º Cuál es el perímetro de dicho polígono.

3.º Cuál es la razón entre el área de ese mismo polígono y el área del cuadrado dado.

• 1.º *Sea* ABCD *el cuadrado dado; unamos los puntos medios* M, N, P, Q *de los lados con los vértices no adyacentes de ese cuadrado y obtendremos el* **octógono** A′M′B′N′C′P′D′Q′.

• 2.º *En el cuadrilátero* MQ′PN′, *los segmentos* OQ′ *y* ON′ *son la cuarta parte del lado del cuadrado; por tanto, dicho cuadrilátero es un rombo y los ángulos* Q′ *y* N′ *del octógono serán iguales.*

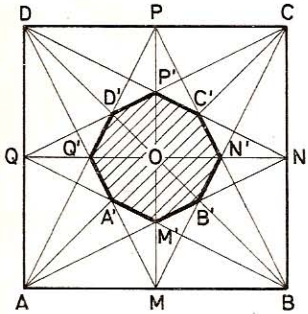


Fig. 445

Análogamente se demostraría que NP′QM′ *es también un rombo e igual al anterior; luego*

$$\angle Q' = \angle N' = \angle P' = \angle M' \qquad (1)$$

Asimismo CD′AB′ *y* DC′BA *son dos rombos iguales, y por tanto*

$$\angle D' = \angle B' = \angle C' = \angle A' \qquad (2)$$

Además, los ángulos del grupo (1) *no son iguales a los del grupo* (2) *pues la relación de las diagonales en el rombo* MQ′PN′ *es* 2 *mientras que en el rombo* CD′AB′ *es* 3 *según se podría comprobar si trazásemos* PQ.

Por tanto, el octógono tiene sus ángulos iguales dos a dos.

En cambio sus lados son iguales. En efecto, de la igualdad de los triángulos PON′ *y* P′ON *se desprende que los triángulos* PP′C′ *y* NN′C′ *serán también iguales, de donde:* P′C′ = C′N′.

Por consiguiente, el octógono A′M′B′..., *que tiene sus ángulos iguales dos a dos y los lados iguales, es* circunscriptible a una circunferencia.

En el triángulo QOP, *el punto* D′ *es el punto de concurso de las medianas; luego* D′P′ = QP′/3, *y como* P′O *es la cuarta parte del lado del cuadrado dado, si representamos* AB *por* a, *tendremos:*

$$QP' = \sqrt{QO^2 + OP'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

de donde
$$D'P' = \frac{a}{12}\sqrt{5}$$

y el perímetro de A′M′B′...:
$$\frac{a}{12}\sqrt{5} \times 8 = \frac{\mathbf{2a\sqrt{5}}}{\mathbf{3}}$$

• 3.º *En virtud del* n.º **650, el área de este octógono vale la 1/6 parte del área del cuadrado ABCD.**

652. Dado un octógono regular ABCDEFGH (fig. 446), se trazan las diagonales AG, GE, EC, CA y HF, FD, DB, BH.

1.º Demostrar que los puntos A′, B′, C′, D′, E′, F′, G′, H′ donde se cortan esas diagonales, son los vértices de otro octógono regular.

2.º Calcular, en función del radio R, de la circunferencia circunscrita al polígono dado, la razón entre las áreas de ambos octógonos.

3.º Demostrar que el segmento KL que une el punto medio K del arco FE con el punto medio L del arco ED, es el lado de otro octógono regular.

● 1.º *Cada uno de los ángulos del octógono regular* ABCD... *vale* 135º *y sus lados todos son iguales; por tanto, los triángulos* ABC, BCD, CDE... *son isósceles e iguales entre sí. Por consiguiente, los triángulos* ABB′, BCC′, CDD′... *son también isósceles e iguales entre sí.*

De lo expuesto se infiere que los ángulos y lados del octógono A′B′C′D′... *son iguales entre sí, y por tanto* **dicho octógono será regular.**

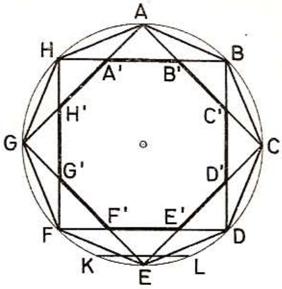


Fig. 446

● 2.º *Area octógono* ABCD...: $A_1 = 2R^2\sqrt{2}$ (GEOM. **578**).

Area △AHB: $$A = \frac{1}{4}[2R^2\sqrt{2} - (R\sqrt{2})^2] = \frac{R^2}{2}(\sqrt{2}-1)$$

Por ser △ABB′ ∼ △AHB *(ángulos iguales):*

$$\frac{\triangle ABB'}{\triangle AHB} = \frac{AB^2}{HB^2}; \qquad \frac{\triangle ABB'}{R^2/2\,(\sqrt{2}-1)} = \frac{R^2\,(2-\sqrt{2})}{2R^2}$$

$$\triangle ABB' = \frac{R^2(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})}{2\times 2} = \frac{R^2(3\sqrt{2}-4)}{4}$$

pero $$\triangle AA'B' = \triangle AHB - 2\triangle ABB'$$

$$\triangle AA'B' = \frac{R^2}{2}(\sqrt{2}-1) - \frac{R^2}{2}(3\sqrt{2}-4) = \frac{R^2}{2}(3-2\sqrt{2})$$

Area octógono A′B′C′D′... $A_2 = ACEG - 4\triangle AA'B'$

$$A_2 = 2R^2 - 2R^2(3-2\sqrt{2}) = 4R^2(\sqrt{2}-1)$$

Razón de las áreas: $$\frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{A_2}} = \frac{2R^2\sqrt{2}}{4R^2(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{\mathbf{2+\sqrt{2}}}{\mathbf{2}}$$

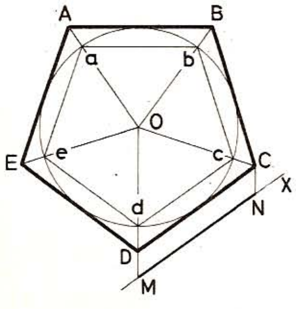


Fig. 447

● 3.º *El segmento* KL *subtiende un arco igual a la octava parte de la circunferencia dada, pues* $\widehat{FED}$ *es la cuarta parte de la misma.*

Luego **KL es el lado del octógono regular convexo inscrito en la circunferencia.**

653. Construir un pentágono regular conociendo el lado (fig. 447).

Procedimiento de las figuras semejantes.—*En una circunferencia cualquiera inscribimos el pentágono regular* abcde *y unimos los vértices con el centro* O.

Sobre la prolongación de Od *tomamos el pun-*

to M *y trazamos* MN *paralela a* dc, *y a partir de* M, *señalamos* MN *igual al lado dado.*

Por N *trazamos una paralela a* Od, *la cual cortará en* C *a la prolongación de* Oc.

Hecho esto, se trazarán DC *paralela a* dc, BC *paralela a* bc, *etc.*

El pentágono ABCDE *es semejante al* abcde; *por tanto, regular y su lado es igual al lado dado* MN.

654. Construir un triángulo conociendo dos ángulos y una mediana (figura 448).

Como se conocen los tres ángulos del triángulo desconocido se podrá construir su semejante A'B'C' *y, suponiendo que la mediana dada es la correspondiente al vértice* A, *en el triángulo* A'B'C' *tracemos la mediana* A'M' *y sobre ella tomemos* A'M *igual a la mediana dada. La paralela a* B'C' *trazada por* M, *resolverá el problema deseado.*

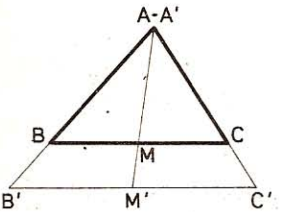


Fig. 448

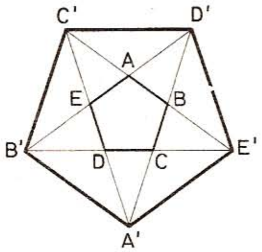


Fig. 449

655. Dado un pentágono regular convexo ABCD (fig. 449), si prolongamos sus lados dos a dos, los puntos de concurso obtenidos son los vértices de otro pentágono regular convexo A'B'C'D'E'.

En efecto, los triángulos ABD', BCE', CDA', DEB' *y* EAC' *son isósceles e iguales entre sí, por tener por base el lado del pentágono dado y los ángulos básicos adyacentes iguales; por consiguiente, los triángulos* AC'D', BD'E'..., *serán iguales por ser isósceles, con un ángulo igual, el del pentágono, comprendido entre lados respectivamente iguales; por tanto, el pentágono* A'B'C'D'E' *es equilátero. Además, en virtud de la igualdad de los triángulos mencionados, sus ángulos también son iguales; luego el pentágono es regular.*

656. Dado un exágono regular se le inscribe una circunferencia tangente a los lados. Calcular, en función del lado del exágono, el área comprendida entre el exágono regular y la circunferencia.

Sea l *el lado del exágono y* Ar *el área que se desea calcular.*

Area del exágono: $$A_1 = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

El radio de la circunferencia inscrita es $r = 1/2 \cdot l\sqrt{3}$; *por tanto,*

Area del círculo: $$A_2 = \pi \times \frac{3l^2}{4}$$

Area pedida: $$\mathbf{Ar} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} - \frac{3\pi l^2}{4} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\,\mathbf{l^2\,(2\sqrt{3} - \pi)}$$

657. Tomando por base cada lado de un cuadrado (fig. 450) se construyeron en lo interior del cuadrado cuatro triángulos equiláteros; estos triángulos determinan, de este modo, una estrella de ocho puntas.

Si A_e, A_4, A_3 designan sucesivamente las áreas de la estrella, del cuadrado y del triángulo equilátero, demostrar que $A_e = 8A_3 - 3A_4$.

Los cuatro pentágonos cóncavos que rodean a la estrella hasta completar el cuadrado son evidentemente iguales (lados y ángulos respectivamente iguales).

Area AIA'I'A = *Area* AIHDA − (*área* A'HDA' + *área* DI'AD)

$$= \frac{A_4}{2} - \left(\frac{A_3}{2} + \frac{A_3}{2}\right) = \frac{A_4}{2} - A_3$$

Los 4 *pentágonos* = 8 *área* AIA'I'A $= 8\left(\frac{A_4}{2} - A_3\right) = 4A_4 - 8A_3$

Area estrella $A_e = A_4$ − *Area de los* 4 *pentágonos*

$$A_e = A_4 - (4A_4 - 8A_3) = \mathbf{8A_3 - 3A_4}$$

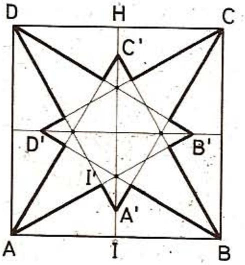


Fig. 450

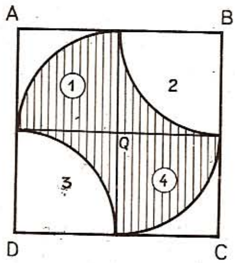


Fig. 451

658. Por dos vértices opuestos de un cuadrado de lado a se trazan dos cuadrantes de radio $a/2$, limitados respectivamente por los lados del cuadrado; tomando, como nuevo centro, el centro del cuadrado, describimos, con igual radio que antes, otros dos cuadrantes que terminan el trazado del cuadrilátero curvilíneo inscrito en el cuadrado dado (fig. 451).

Demostrar que el área de este cuadrilátero es la mitad del área del cuadrado.

Area buscada = 2 *sectores de* 90° *y radio* $\frac{a}{2}$ + 2 × $\left(\frac{1}{4}\right.$ *del cuadrado* − *sector* 90° *y radio* $\left.\frac{a}{2}\right)$.

Area del cuadrado: a^2.

Area del cuadrante de $\frac{a}{2}$ *de radio:* $\frac{\pi a^2}{16}$

Area del cuadrilát. curvilíneo: $\mathbf{A} = 2 \times \frac{\pi a^2}{16} + 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{16}\right) = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{2}}$

Otro modo.—*El cuadrante* 1 *es igual al* 2 *y el* 3 *al* 4. *Por tanto, la parte rayada equivale al doble de uno de los cuadrados* AO, *su área será por consiguiente:*

$$\mathbf{A} = 2 \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{2}}$$

659. Desde un vértice del exágono regular (fig. 452) como centro y con el lado por radio, se describe un arco de circunferencia, limitado por dos vértices del exágono. Calcular la diferencia entre el área del polígono dado y el área del sector que hemos formado.

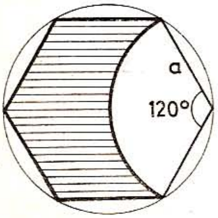


Fig. 452

Sea a *el lado del exágono, y* A *el área que se desea conocer. Esta diferencia será:*

$$\mathbf{Ar} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{6}}(\mathbf{9}\sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{2}\pi)$$

660. En un exágono regular, ABCDEF (fig. 453), inscrito en la circunferencia O de radio R, sobre AB, BD, DE, EA, se construyen hacia afuera cuatro semicircunferencias. Demostrar que la suma de las cuatro lúnulas comprendidas entre la circunferencia O y las semicircunferencias referidas es al área del exágono como 2 es a 3.

El área de las 4 *lúnulas = área círculo (semicírculo* AE + *semicírculo* BD) + + *área círculo (semicír.* AB + *semicirc.* ED) — *área cuatro segmentos* (EFA, BCD, AB, ED).

Area 4 *segmentos = área círculo* OD — *área rectáng.* ABDE.

$$A_1 = \pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 - [\pi R^2 - R\sqrt{3} \times R]$$

$$A_1 = \frac{3\pi R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{4} - \pi R^2 + R^2\sqrt{3} = R^2\sqrt{3}$$

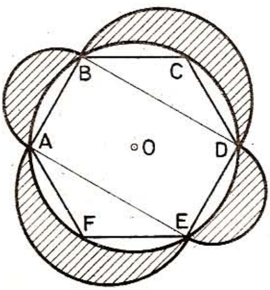


Fig. 453

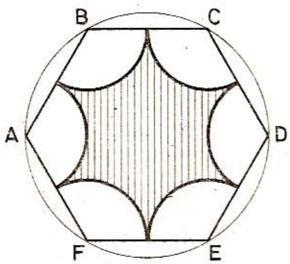


Fig. 454

Area exágono ABCDEF: $A_2 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Razón de las áreas: $\dfrac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{A_2}} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

661. Desde los vértices de un exágono regular (fig. 454) como centro se describen, hacia adentro, arcos de circunferencia que mueren en el punto medio de los lados adyacentes. Calcular el área comprendida entre los seis arcos mencionados.

Cada arco de circunferencia determina en el exágono un sector de 120°, *cuyo radio es la mitad del lado del exágono.*

Sea a *el lado del exágono; el área del polígono curvilíneo será:*

$$A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} - 6\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi a^2}{4}\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi a^2}{2}$$

$$\mathbf{A = \frac{a^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)}$$

662. Dado un triángulo rectángulo isósceles ABC (fig. 455), cuyo cateto es a, desde el ángulo recto A como centro se describe un cuadrante de circunferencia con a por radio; una vez limitado el cuadrante en los puntos B y C, se describe una semicircunferencia, hacia afuera del triángulo ABC, con BC por diámetro y las dos semicircunferencias, cuyos diámetros son AB y AC, que pasan por D, pie de la altura correspondiente a la hipotenusa. Demostrar:

1.° Que el área de la lúnula M es equivalente al área del $\triangle$ABC.

2.° Que las áreas N y P son equivalentes.

• 1.° *Area* ABC $= \dfrac{a^2}{2}$

$$\textit{Area}\ M = \frac{\pi}{2}\left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$\textit{Area}\ M = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{2}$$

$$\textit{Area}\ M = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\textbf{Area M} = \frac{a^2}{2} = \textbf{Area ABC}$$

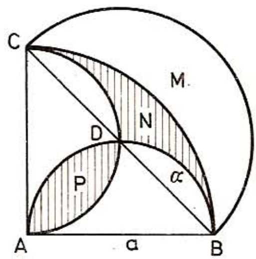


Fig. 455

Otra solución

M = *Area semicírculo mayor* $\dfrac{\pi a^2}{4}$ — *segmento.*

ABC = *Area del sector* ABC $\dfrac{\pi a^2}{4}$ — *segmento.*

Luego la lúnula **M** *y el triángulo* **ABC son equivalentes.**

• 2.° *Area segmento* $\alpha = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{a^2}{16}(\pi - 2)$

$$\textit{Area } \mathrm{P} = 2 \times \frac{a^2}{16}(\pi - 2) = \frac{a^2}{8}(\pi - 2)$$

$$\textit{Area } \mathrm{N} = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2 \cdot \frac{a^2}{16}(\pi - 2) = \frac{a^2}{8}(\pi - 2)$$

Luego las dos figuras **P** *y* **N son equivalentes**

663. Habiendo dividido el diámetro de un círculo (fig. 456) en media y extrema razón, se describen, con cada segmento como diámetro, dos semicircunferencias, situadas a distinto lado del diámetro. Probar que la línea curva que se forma divide al círculo dado en media y extrema razón.

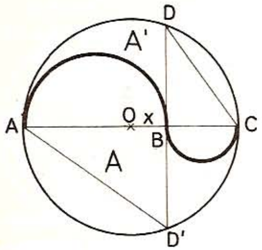


Fig. 456

Sea B *el punto que divide a* AC *en media y extrema razón.*

Designemos por R *el radio del círculo dado; por* x *la distancia del centro al punto* B; *por* A *y* A' *las áreas de las porciones en que las semicircunferencias de diámetro* AB *y* BC *dividen al círculo dado* C.

Por hipótesis: $(\mathrm{R} + x)^2 = 2\mathrm{R}(\mathrm{R} - x)$ (1)

Habrá que demostrar: $\mathrm{A}^2 = \mathrm{C} \times \mathrm{A}'$ (2)

Sustituimos en (2) C, A *y* A' *por sus valores en función de* R *y* x:

$$\left[\frac{\pi \mathrm{R}^2}{2} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\mathrm{R} + x}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\mathrm{R} - x}{2}\right)^2\right]^2 = \pi \mathrm{R}^2\left[\frac{\pi \mathrm{R}^2}{2} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\mathrm{R} + x}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{\mathrm{R} - x}{2}\right)^2\right]$$

$$\frac{\pi^2}{4}\left[\mathrm{R}^2 + \left(\frac{\mathrm{R} + x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{R} - x}{2}\right)^2\right]^2 = \frac{\pi^2 \mathrm{R}^2}{2}\left[\mathrm{R}^2 + \left(\frac{\mathrm{R} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{R} + x}{2}\right)^2\right]$$

$$(\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}x)^2 = 2\mathrm{R}^2(\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}x)$$
$$\mathrm{R}^2(\mathrm{R} + x)^2 = 2\mathrm{R}^2(\mathrm{R}^2 - \mathrm{R}x)$$
$$(\mathrm{R} + x)^2 = 2\mathrm{R}(\mathrm{R} - x)$$

Lo cual es evidente por la hipótesis (1) *por lo que queda demostrado* (2).

664. Se describen dos semicircunferencias concéntricas, AB y CD (fig. 457), y dos semicircunferencias iguales, AC, BD. Demostrar que el área comprendida entre estas cuatro semicircunferencias es igual al área del círculo EF.

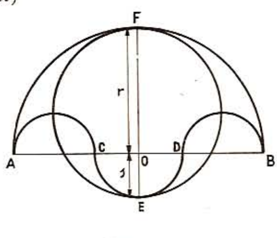


Fig. 457

$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD} = r - s \qquad \mathrm{FE} = r + s$$

Por hipótesis ha de ser:

$$\frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi s^2}{2} - \frac{\pi (r-s)^2}{4} = \frac{\pi (r+s)^2}{4}$$

Mas esta igualdad hipotética se reduce a la identidad

$$(r+s)^2 = (r+s)^2 \qquad \textit{Luego...}$$

Nota.—*El espacio comprendido entre las cuatro semicircunferencias se llama* salinón *o escudo.*

665. Dado un cuadrado ABCD (fig. 458), se trazan las diagonales, y desde los vértices como centro se describen arcos de circunferencia que pasen por el punto de intersección de las diagonales, y limitados por los lados del cuadrado. Demostrar que:

1.º El polígono EFGHIJKL es un octógono regular.

2.º Calcular el área de la figura plumeada.

3.º Siendo AB = 5 m, hallar el área, con una aproximación de 0,01.

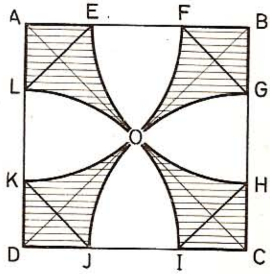


Fig. 458

● 1.º *Sea* AB $= a$: BO $= \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\text{AE} = \text{BF} = a - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$$

$$\text{EF} = a - a(2-\sqrt{2}) = a(\sqrt{2}-1)$$

Por otra parte:

$$\text{LE} = \text{AE}\sqrt{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})\sqrt{2}}{2} = a(\sqrt{2}-1)$$

Por tanto, los lados del polígono EFGHIJKL son iguales.

Además, los ángulos valen 135º *como suplementos de ángulos iguales de* 45º *en los triángulos* ALE... *Luego* **es un octógono regular.**

● 2.º *El área de la superficie plumeada es igual al doble de la diferencia entre el cuadrado y el semicírculo de radio* OA. *Por tanto:*

$$\mathbf{A} = 2\left[a^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{2}}(\mathbf{4} - \pi)$$

● 3.º *Para* a = 5 m, *tendremos:*

$$\mathbf{A} = \frac{25\,(4 - 3{,}1416)}{2} = \mathbf{10{,}73\ m^2}$$

666. Dado un cuadrado ABCD (fig. 459) de centro O, demostrar que los centros de las circunferencias inscritas en los ocho triángulos AOB, BOC, COD, DOA, ABC, BCD, CDA, DAB son los vértices de un octógono regular.

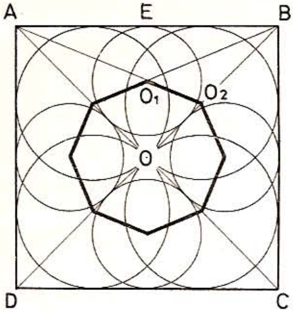


Fig. 459

¿Cuál es la razón de las áreas de este octógono y el cuadrado?

● 1.º *Sea* O_1 *el punto de concurso de las bisectrices del triángulo* AOB. *Como* BO *es una de las bisectrices del triángulo* ABC, *la recta* AO_1 *se encontrará con* BO *en* O_2, *que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo* ABC.

Cada uno de los ángulos tales como O_1OO_2 *valdrá evidentemente la octava parte de* 360°, *esto es,* 45°; *bastará, pues, demostrar que dicho triángulo es isósceles.*

Lo cual es así, en efecto, pues se tiene:

$$\angle OO_1O_2 = \frac{135^\circ}{2} = \angle OO_2O_1$$

Luego **los ocho centros de las circunferencias inscritas son los vértices de un octógono regular.**

● 2.º *Como el octógono consta de ocho triángulos iguales a* OO_1O_2 *y el cuadrado se compone de ocho triángulos iguales a* OEB, *tendremos:*

$$\frac{\text{Octógono } O_1O_2O_3}{\text{Cuadrado ABCD}} = \frac{\triangle OO_1O_2}{\triangle OEB} = \frac{OO_2^2}{OE \cdot OB} \tag{1}$$

Pero en el triángulo AOB, *el teorema de las bisectrices da:*

$$\frac{OO_2}{O_2B} = \frac{AO}{AB}, \quad \text{o bien} \quad \frac{OO_2}{OB} = \frac{AO}{AO + AB}$$

de donde
$$OO_2 = \frac{OA \cdot OB}{OA + AB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} + a} = \frac{a}{\sqrt{2} + 2}$$

Sustituyendo valores en (1) *y reduciendo, tendremos:*

$$\frac{\text{Octógono } O_1O_2\ldots}{\text{Cuadrado ABCD}} = \frac{\left(\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{2} + 2}\right)^2}{\frac{\mathbf{a}^2\sqrt{2}}{4}} = \mathbf{3\sqrt{2} - 4}$$

667. Dadas dos circunferencias:

1.º Construir otra circunferencia igual a la suma o a la diferencia de aquéllas.

2.º Construir un círculo igual a la suma o a la diferencia de dos círculos dados.

● 1.º *Sean* R_1 *y* R_2 *los radios de las circunferencias dadas y* X *el radio de la desconocida, se tiene:*

$$2\pi X = 2\pi (R_1 \pm R_2)$$

de donde
$$X = R_1 \pm R_2$$

La circunferencia pedida tiene por radio la suma (diferencia) de los radios de las dadas.

• 2.º *Para este caso se verifica:*

$$\pi X^2 = \pi (R_1^2 \pm R_2^2)$$

de donde

$$X^2 = R_1^2 \pm R_2^2$$

Si $X^2 = R_1^2 + R_2^2$, *el radio* X *de la desconocida es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son* R_1 *y* R_2.

Si $X^2 = R_1^2 - R_2^2$, *el radio* X *de la desconocida es un cateto de un triángulo rectángulo que tiene* R_1 *por hipotenusa y* R_2 *por el otro cateto.*

668. En una circunferencia de radio R (fig. 460) se trazan dos diámetros perpendiculares, AB y CD, que se cortan en el punto O. Sobre los cuatro radios como diámetros se describen circunferencias, cuya parte común forma una estrella de cuatro puntas. Calcular el área de dicha estrella en función del radio de la circunferencia dada.

Aplicación.—Para R = 2 m.

Tracemos OEF, AE *y* O'E. $\angle$OEA = 90° *y* $\angle$EAO = 45°; *por tanto,* $\angle$OO'E = 90° *y el área de la estrella será igual a ocho veces el área del segmento* OGE = (s_4) *correspondiente a un círculo de radio* R/2.

Area segmento OGE = *sector* OGE − *triángulo* OGE

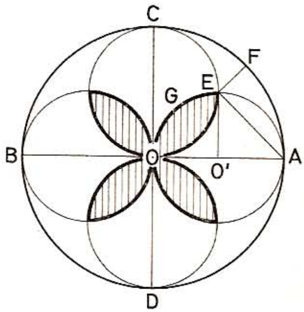


Fig. 460

$$A_s = \frac{\pi R^2}{16} - \frac{R^2}{8} = \frac{R^2}{16}(\pi - 2)$$

Area de la estrella: $\mathbf{A}_e = 8 \times \frac{R^2}{16}(\pi - 2) = \mathbf{\frac{R^2}{2}(\pi - 2)}$

Esto es, la semidiferencia entre las áreas del círculo dado y el cuadrado inscrito en dicha circunferencia.

Aplicación.—*Para* R = 2 m: $\mathbf{A}_e = \frac{4}{2}(3{,}1416 - 2) = \mathbf{2{,}2832\ m^2}$.

669. Sea un triángulo equilátero ABC (fig. 461) de lado *a*, y G el punto de concurso de las medianas. Desde los vértices A, B, C como centros, se describen arcos de circunferencia que, pasando por G, quedan limitados en los lados del triángulo; luego se unen con semicircunferencias exteriores al triángulo. Calcular, en función de *a*, el área del rosetón que se ha formado.

El rosetón sin los 3 semicírculos exteriores es igual a 3 sectores de 60° menos el área del triáng. equilátero:

Radio: $$AG = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Radio: $$PM = AG - AP = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a}{2} = \frac{a(2\sqrt{3} - 3)}{6}$$

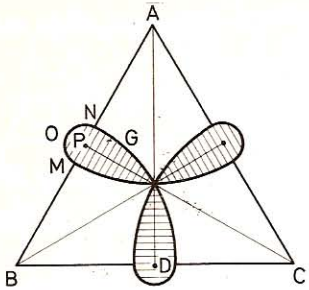


Fig. 461

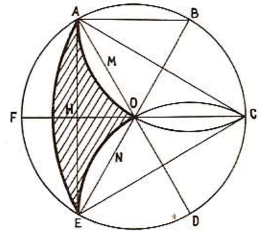


Fig. 462

Area 3 sectores: $A_1 = 3 \times \frac{\pi \times 60}{360} \times \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{6}$.

Area $\triangle$BCD: $A_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Area 3 semicírc.: $A_3 = 3 \times \frac{\pi}{2}\left[\frac{a(2\sqrt{3}-3)}{6}\right]^2 = \frac{\pi a^2 (7-4\sqrt{3})}{8}$

$$A = A_1 - A_2 - A_3$$

$$A = \frac{\pi a^2}{6} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi a^2 (7-4\sqrt{3})}{8}$$

$$A = \frac{4\pi a^2 - 6a^2\sqrt{3} + 21\pi a^2 - 12\pi a\sqrt{3}}{24}$$

$$\mathbf{A = \frac{a^2}{24}\,[\pi(25 - 12\sqrt{3}) - 6\sqrt{3}]}$$

670. Se divide una circunferencia de centro O y radio R (fig. 462), en seis partes iguales. Desde los puntos B y D como centros y con un radio igual a R, se describen dos arcos de circunferencias AOC y COE; desde el punto C, con CA como radio, se describe el arco AE. Calcular el área de la parte plumeada AOEG.

Area AOEG = *segmento* AGE + 2 (*trapecio* ABOH − *sector* ABO)

Segmento AGE = *sector* ACEG − *triáng.* ACE

Segm. AGE: $A_1 = \frac{\pi(R\sqrt{3})^2 \times 60}{360} - \frac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

Trap. ABOH: $A_2 = \frac{AB + HO}{2} \times AH = \frac{R + R/2}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{8}$

Sector ABO: $A_3 = \frac{\pi R^2 \times 60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$

$$A = A_1 + 2(A_2 - A_3)$$

Area buscada: $\mathbf{A} = \dfrac{\pi R^2}{2} - \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} + 2\left(\dfrac{3R^2\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi R^2}{6}\right) = \dfrac{\pi \mathbf{R}^2}{\mathbf{6}}$

671. Dada una circunferencia O de radio R (fig. 463), se divide en tres partes iguales en los puntos A, B, C. Sobre OA, OB, OC como diámetros, se describen tres circunferencias que, en su conjunto, forman un rosetón de tres lóbulos. Calcular, en función de R, el área de dicho rosetón.

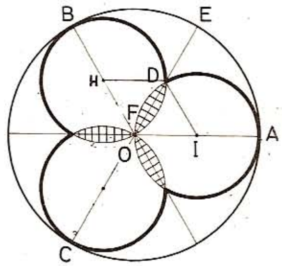


Fig. 463

Trazamos los radios ID, HD.

OIDH *es un paralelogramo, por lo que su diagonal* OD *es directriz de* $\angle$BOA, *así que:*

$$\angle DOI = \frac{\angle BOA}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$$

Por lo que $\triangle$DOI *es equilátero.*

El área del rosetón se compone del área de tres círculos, cuyos diámetros son el radio de la anterior, menos seis veces el área del segmento OFD.

En el triángulo equilátero OID, *se tendrá:*

Segmento OFD = *sector* IOFD — *triángulo* ODI

$$\textit{Segmento } OFD = \frac{\pi}{6}\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2\sqrt{3}$$

$$\textit{Segmento } OFD = \frac{\pi R^2}{24} - \frac{R^2\sqrt{3}}{16}$$

$$\textit{Area del rosetón:}\quad A = 3\left[\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right] - 6\left(\frac{\pi R^2}{24} - \frac{R^2\sqrt{3}}{16}\right)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{R}^2}{\mathbf{8}}(\mathbf{4}\pi + \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}})$$

672. Desde cada vértice de un cuadrado (fig. 464) como centro, con el lado *a* como radio, se describe un cuadrante de circunferencia. ¿Cuál será el área del espacio curvilíneo comprendido entre los cuatro arcos al cortarse dos a dos?

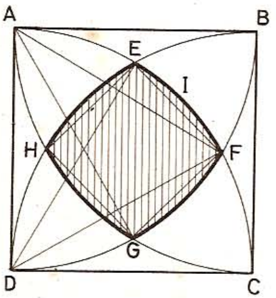


Fig. 464

Sean E, F, G y H los vértices del cuadrilátero curvilíneo que determinan los cuadrantes al cortarse.

Trazamos los segmentos DE, DF, AG, AF; *el triángulo* ADF *por construcción es equilátero, por consiguiente:*

$$\widehat{AF} = 60^o; \quad \widehat{FC} = 90^o - 60^o = 30^o$$

De igual modo

$$\widehat{AE} = \widehat{AH} = \widehat{DH} = \widehat{DG} = \ldots = 30^o$$

por lo que $\widehat{EF} = \widehat{FG} = \widehat{GH} = \widehat{HE} = 30^o$.

El cuadrilátero rectilíneo EFGH *tiene sus lados iguales, como cuerdas que subtienden arcos iguales.*

En $\triangle$EDF *(isósceles):* $\angle EDF = \widehat{EF} = 30°$

y $\angle DEF = \angle DFE = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$

Pero: $\angle HED = \dfrac{HD}{2} = 15°$

Luego $\angle HEF = \angle HED + \angle DEF = 15° + 75° = 90°$

De igual modo: $\angle EFG = \angle FGH = \angle GHE = 90°$
por lo que el cuadrilátero rectilíneo EFGH *es un cuadrado cuyo lado es igual al del dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio* a.

Luego $EF = a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (GEOM. **469**).

Area cuadrilátero curvilíneo EFGH = *área cuadrado* EFGH + 4 *segmentos de* 30°.

Area del cuadrado EFGH: $A_1 = \left(a\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = a^2(2 - \sqrt{3})$.

Area del segmento EIF *de* 30° = *sector* 30° — *triángulo* EDF

$$A_2 = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{1}{2}\cdot DE \cdot \frac{AF}{2} = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}(\pi - 3)$$

Cuad. curv. EFGH: $\mathbf{A} = a^2(2 - \sqrt{3}) + \dfrac{a^2}{3}(\pi - 3) = \dfrac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{3}}\,[\pi + \mathbf{3}\,(\mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{3}})]$

673. Calcular el área de los cuatro triángulos curvilíneos que quedan sin plumear y forman las esquinas de la figura anterior, y que, tomados dos a dos, con el cuadrilátero curvilíneo EFGH darían lugar a una *naveta*.

El área de las cuatro esquinas se compone del área de cuatro segmentos de 90°, *y* a *como radio, menos el duplo del cuadrado curvilíneo* EFGH.

Area 4 segmentos: $A_1 = 4\left(\dfrac{\pi a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2}\right) = a^2(\pi - 2)$

Doble cuad. curv. EFGH: $A_2 = \dfrac{2a^2}{3}\,[\pi + 3(1 - \sqrt{3})]$

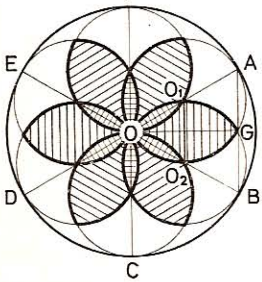


Fig. 465

Area pedida:

$$\mathbf{A} = a^2(\pi - 2) - \frac{2a^2}{3}[\pi + 3(1 - \sqrt{3}] =$$

$$= \mathbf{a^2}\left(\frac{\pi}{\mathbf{3}} - \mathbf{4} + \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\right)$$

674. Dividida una circunferencia de centro O y radio R (fig. 465) en seis partes iguales en los puntos A, B, C, D, E, F, sobre cada uno de los radios OA, OB, OC, OD, OF, tomados como diámetros, se describen circunferencias, en las cuales, tomando consecutivamente, de tres en tres, las partes comunes de dichas circunferencias, se forma un rosetón de seis puntas, plumeado en la figura; y tomadas consecutivamente, de dos en dos, forman otro rosetón, externo al anterior, y también de seis puntas. Calcular el área de esos dos rosetones, en función del radio de la circunferencia R.

- 1.º Area del primer rosetón.—$\angle AOB = 60^\circ$ *y el triángulo* OO_1O_2, *siendo isósceles, es equilátero; por tanto, la roseta interior equivale a* 12 *segmentos de* 60º *y un radio* R/2. *Tendremos* **(573):**

$$\mathbf{A_1} = 12\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right] = \frac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{4}}(\mathbf{2}\pi - \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}})$$

- 2.º Area del segundo rosetón.—*Los ángulos* AGO *y* BGO *son rectos; por consiguiente los puntos* A, G, B *están en línea recta y* OG *es mediatriz de* AB; *por tanto:*

$$\angle AOG = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{\angle O_1OO_2}{2} = 30^\circ;$$

$$\angle OAG = 6^\circ; \quad \angle OO_2G = 120^\circ$$

Por donde se infiere que esta segunda roseta es equivalente a 12 *segmentos de* 120º *y de radio* R/2 *disminuidos en el rosetón interior.*

Aplicando la fórmula del n.º **573** *tenemos:*

$$A_2 = 12\left[\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}\right] - \frac{R^2}{4}.(2\pi - 3\sqrt{3})$$

$$\mathbf{A_2} = R^2\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}\right) - R^2\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2\pi R^2}{4} = \frac{\pi \mathbf{R^2}}{\mathbf{2}}$$

es decir, la mitad del área del círculo dado.

Geometría del espacio

6

GEOMETRIA DEL ESPACIO

La recta y el plano

675. Por los extremos no comunes de tres segmentos iguales que parten de un mismo punto A, se hace pasar una circunferencia; hállese el centro y el radio de la misma.

Trácese una perpendicular desde el punto dado A (fig. 466) *al plano* P *determinado por los extremos no comunes de los tres segmentos iguales; el pie de esta perpendicular será el centro de la circunferencia pedida y la distancia entre este centro y uno de los extremos no comunes será el radio de la circunferencia que se busca.*

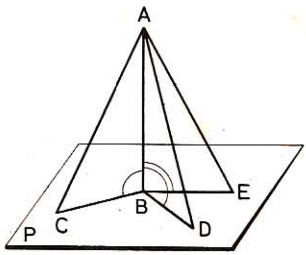


Fig. 466

676. Demuéstrese que toda recta que forma ángulos iguales con otras tres que pasan por su pie en un plano, es perpendicular a dicho plano.

Sea la recta AB, *la cual forma ángulos iguales con las* BC, BD *y* BE (fig. 466), *que pasan por su pie* B *en el plano* P; *digo que* AB *es perpendicular al plano* P.

En efecto, tomemos a partir del punto B *distancias iguales* BC, BD *y* BE *y tracemos las oblicuas* AC, AD *y* AE.

Por tener un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales, serán: $\triangle ABC = \triangle ABD = \triangle ABE$ *y de la igualdad de éstos se deduce que las oblicuas* $AC = AD = AE$ *y que el punto* B *equidista del pie de ellas.*

Pero el pie de la perpendicular trazada desde el punto A *al plano* P *equidista también de los tres puntos* C, D, E; *y como quiera que ese punto es único, coincidirá con el* B, *y la recta* AB *será la perpendicular al plano* P.

677. Por un punto dado, hacer pasar un plano que forme con otro plano fijo P, un ángulo dado.

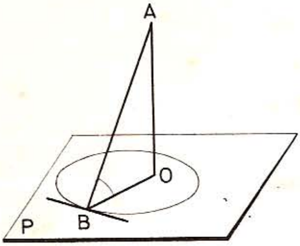


Fig. 467

Por el punto dado A (fig. 467) *trácese la perpendicular* AO *al plano* P *y una oblicua* AB, *que forme con* AO *el ángulo complementario del dado.*

Sea B *el punto de intersección de esta oblicua y el plano* P, *trácese una circunferencia desde el centro* O *y de radio* OB *situado en este mismo plano.*

El plano determinado por la oblicua AB *y la tangente en* B *a la circunferencia descrita resuelve el problema. Admite infinitas soluciones.*

678. Si una recta y un plano son paralelos, todo plano perpendicular a la recta es también perpendicular al plano propuesto, y recíprocamente.

Sea AB *la recta paralela al plano* M; *demostremos que el plano* N, *perpendicular a la recta, lo es también al plano dado* (figura 468).

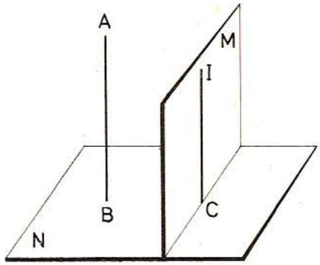


Fig. 468

● 1.º *Si por un punto cualquiera* I *del plano* M *trazamos* IC, *paralela a* AB, *esta recta estará en el plano* M, *y será perpendicular al plano* N; *luego el plano* M, *que contiene a la recta* IC, *es también perpendicular al plano* N (GEOM. **652**).

● 2.º **Recíprocamente.** — *Una recta* AB *y un plano* M, *perpendiculares a un mismo plano* N, *son paralelos* (fig. 469).

En efecto, si la recta AB *y el plano* M *se encontraran en un punto cualquiera* O, *por ejemplo, desde este punto se podría trazar una perpendicular a la intersección* EF; *esta recta sería perpendicular al plano* N (GEOM. **648**) *y tendríamos desde un mismo punto dos perpendiculares a un mismo plano, lo que es imposible.*

Luego la recta AB *y el plano* M *son paralelos.*

679. Una recta y un plano perpendiculares a una misma recta son paralelos.

Sea AB (fig. 470) *una recta y* M *un plano perpendiculares a una misma recta* CD; *demostremos que son paralelos. En efecto, si la recta* AB *y el plano* M *se*

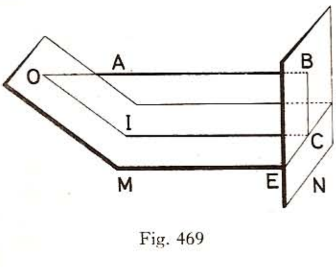


Fig. 469

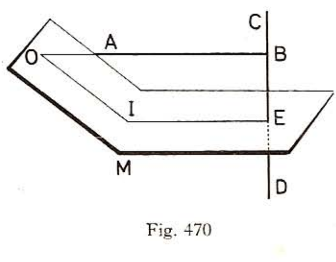


Fig. 470

encontraran en un punto cualquiera, O, *por ejemplo, podría unirse este punto con el punto* E *que indica la intersección de la recta* CD *con el plano* M.

La recta CD, *perpendicular al plano* M *por hipótesis, lo sería también a* OIE; *entonces tendríamos, desde un solo punto* O, *dos perpendiculares* OAB *y* OIE, *a una misma recta, lo que es imposible.*

Luego la recta AB *y el plano* M *son paralelos.*

680. Si dos planos son respectivamente paralelos a otros dos que se cortan, las intersecciones son paralelas.

Sean los planos M *y* N (fig. 471) *respectivamente paralelos a los planos* P *y* Q, *que se cortan según* CD. *Demostremos que la intersección* AB *es paralela a* CD.

Siendo paralelos los planos M *y* P, *la recta* AB *que pertenece al primero de estos planos, es paralela al segundo* (GEOM. **605,** Cor.); *siendo paralelos los planos* N *y* Q, *la recta* AB *que pertenece al primero será también paralela al segundo.*

Luego la recta AB, *paralela a los planos* P *y* Q *que se cortan, será paralela a su intersección* CD.

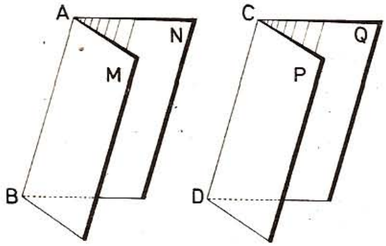


Fig. 471

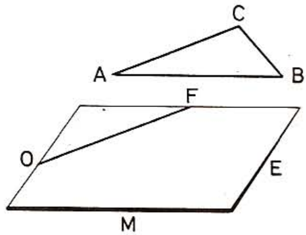


Fig. 472

681. Por un punto dado, trazar un plano que pase a igual distancia de otros tres puntos dados.

Sean O *y* A, B, C *los puntos dados* (fig. 472).

Los puntos A, B *y* C *determinan el plano* ABC. *Por el punto* O *se traza un plano* M *paralelo al plano* ABC, *y por lo tanto equidistante de los tres puntos dados.*

682. Si una recta se mueve sobre una de las caras de un diedro, el ángulo que forma con su proyección sobre la otra cara será *máximo* cuando dicha recta sea perpendicular a la intersección de los dos planos.

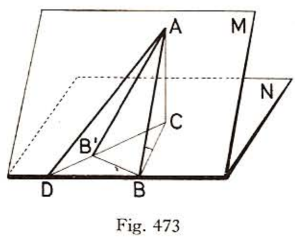


Fig. 473

Sea el diedro formado por los planos M *y* N (figura 473); AD *una recta cualquiera del plano* M, A *un punto fijo y* D *el extremo móvil sobre la intersección de los dos planos.*

Tracemos AC, *perpendicular al plano* N, *y* AB, *perpendicular a la intersección de los planos* M *y* N. *El plano que determinan estas dos perpendicu-*

lares cortará al N *según la recta* CB. *Demostremos que se verificará la desigualdad* $\angle ABC > \angle ADC$.

Siendo AC *perpendicular al plano* N, *lo será también a* CB *y* CD; *por tanto, los dos triángulos* ABC *y* ADC *son rectángulos en* C.

Además, CB *es una perpendicular trazada desde el punto* C *a la intersección* BD *de los dos planos y* CD *es una oblicua; por consiguiente será* $CB < CD$.

Hagamos girar el triángulo ACB *sobre* AC *como eje hasta llevarle al plano del triángulo* ADC; *entonces el punto* B *caerá en* B′, *puesto que los dos triángulos* ABC *y* ADC *son rectángulos y* $CB < CD$.

Pero $\angle AB'C > \angle ADC$ *por ser ángulo externo del triángulo* ADB′ *correspondiente a* $\angle AB'D$.

Luego $$\angle ABC > \angle ADC$$

683. Si desde un punto exterior a un plano se trazan a éste dos segmentos oblicuos desiguales, al mayor corresponde una proyección mayor e inclinación menor sobre el plano que al menor.

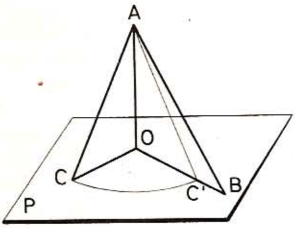


Fig. 474

Sean los dos segmentos AB *y* AC *oblicuos al plano* P (fig. 474), *trazados desde el punto exterior al mismo* A.

Si $AB > AC$, *digo que también será* $OB > OC$. *En efecto, si fuese la proyección* $OC = OB$, *también sería el segmento* $AC = AB$, *contra lo supuesto. Lo propio ocurriría si* $OC > OB$, *pues sería* $AC > AB$, *contra la hipótesis. De aquí que sea* $OB > OC$.

Si hacemos girar al triángulo AOC *alrededor de* AO *como eje, la proyección* OC *caerá sobre* OC′ *y la oblicua* AC *tomará la posición* AC′:

Por tanto, $\angle AC'O > \angle ABO$

o bien $\angle ACO > \angle ABO$

684. Si una recta y un plano son perpendiculares, todo plano que pase por la recta o le sea paralelo es perpendicular al plano dado (fig. 475).

Si el plano pasa por la perpendicular es evidente. Si el plano P_2 *es paralelo a la recta dada* r, *el plano* P_2 *es perpendicular al* P_1.

En efecto, puesto que P_2 *es paralelo a la recta* r, *podremos trazar en este plano*

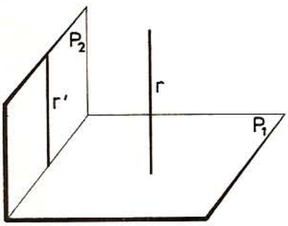


Fig. 475

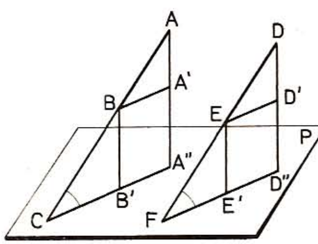


Fig. 476

una recta r′ *paralela a la* r; *y como la* r *es perpendicular al plano* P_1, *su paralela también lo será. Entonces el plano* P_2 *será perpendicular al* P_1, *pues contiene a la recta* r, *que es perpendicular al plano* P_1.

685. Dos segmentos paralelos e iguales, cortan a un plano P según dos ángulos iguales, y sus proyecciones también serán iguales.

Sean los dos segmentos AB *y* DE (fig. 476) *iguales y paralelos; sus proyecciones respectivas sobre el plano* P *son* A″B′ *y* D″E′ *y los ángulos que forman con el plano* P *están señalados en* C *y* F.

- 1.º $\triangle ACA'' \sim \triangle DFD''$ *(rectángulos, con lados paralelos).*

Luego $\angle \mathbf{C} = \angle \mathbf{F}$

- 2.º *Por* B *y* E *trazamos paralelas a* CA″ *y* FD″ *respectivamente; resulta:*

$\triangle ABA' = \triangle DED'$ (*hipotenusas iguales y* $\angle A = \angle D$)

Por tanto: $BA' = ED'$

y como $BA' = B'A''$ *y* $ED' = E'D''$

será $\mathbf{B'A'' = E'D''}$

686. Dos triedros que tienen dos caras respectivamente iguales y el diedro comprendido desigual, tienen también la tercera cara desigual, y recíprocamente.

Sean los triedros S *y* S′ (fig. 477) *que tienen las caras* b *y* c *respectivamente iguales, y desigual el diedro comprendido. En la arista común a las caras iguales, tomemos* SA = S′A′; *tracemos los planos* ABC *y* A′B′C′ *perpendicularmente a las mismas aristas. La semirrecta* SA *será perpendicular a* AB *y* AC, *lo mismo que* S′A′ *a las semirrectas* A′B′ *y* A′C′.

$\triangle SAC = \triangle S'A'C'$ *por tener un lado igual* (SA = S′A′) *adyacente a ángulos respectivamente iguales, luego:*

$AC = A'C'$ *y* $SC = S'C'$

También $\triangle SAB = \triangle S'A'B'$; *por tanto,*

$AB = A'B'$ *y* $SB = S'B'$

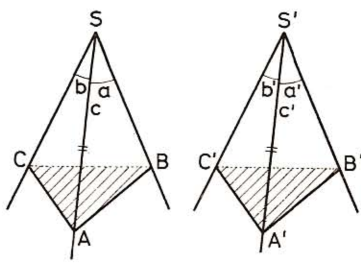


Fig. 477

La medida de los diedros SA, S′A′ *es la de sus ángulos planos* CAB *y* C′A′B′; *de modo que al ser diedro* SA < *diedro* S′A′, *será también* $\angle CAB < \angle C'A'B'$.

Luego los triángulos ABC *y* A′B′C′ *tienen dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido* $\angle A < \angle A'$ *por tanto*

$$CB < C'B' \qquad (\text{Geom. } \mathbf{86})$$

Los triángulos CBS *y* C′B′S′ *tienen así dos lados respectivamente iguales, y el tercer lado* CB < C′B′; *luego* $\angle \mathbf{a} < \angle \mathbf{a'}$.

Recíprocamente. — *Si por hipótesis tenemos la cara* a *menor que* a′, *los triángulos* CBS *y* C′B′S′ *tendrán dos lados respectivamente iguales y* $\angle a < \angle a'$; *luego* CB < C′B′.

Los triángulos ABC *y* A'B'C' *tienen así dos lados respectivamente iguales, y el tercer lado* CB < C'B'; *luego* ∠CAB < ∠C'A'B' *y el diedro* SA *es menor que el diedro* S'A'.

687. En todo triedro, a mayor diedro se opone mayor cara, y recíprocamente.

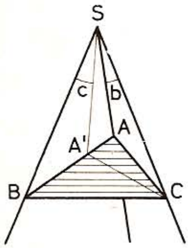


Fig. 478

Sea el diedro SB *menor que* SC (fig. 478). *Tracemos un plano* SCA' *que determine en* SC, *con la cara* SCB, *un diedro igual a* SB. *El triedro* SA'BC *será isósceles, y la cara* A'SB *igual a* A'SC.

La relación entre las caras del triedro SACA' *es*

(GEOM. **681**): ASC < ASA' + A'SC

Sustituyendo la cara A'SC *por su igual* A'SB, *resultará:*

ASC < ASB

Recíprocamente. — *Sea, en el triedro* SABC, *la cara* c *mayor qua la* b; *demostremos que el diedro* SC *es mayor que* SB. *De suponer iguales estos dos diedros resultarían iguales las caras opuestas, lo que es contrario al supuesto.*

Suponiendo el diedro SC *menor que* SB, *tendríamos en virtud del teorema directo* ∠c < ∠b; *lo que también es contrario al supuesto.*

Luego **el diedro SC es mayor que SB.**

688. En todo *tetraedro* se verifica: 1.º La suma de las caras es igual a ocho rectos. 2.ª La suma de los diedros está comprendida entre cuatro y doce rectos.

● 1.º *La suma de las caras de los cuatro triedros, vértices del* tetraedro, *es igual a la suma de los ángulos interiores de cuatro triángulos, o sea ocho rectos.*

● 2.º *Sean* $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\beta_1\beta_2\beta_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, $\delta_1\delta_2\delta_3$ *los diedros correspondientes a los triedros respectivos de los vértices* A, B, C, D *del tetraedro. Se tendrá:*

$$2 \text{ rectos} < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 6 \text{ rectos}$$
$$2 \text{ rectos} < \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 < 6 \text{ rectos}$$
$$2 \text{ rectos} < \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 < 6 \text{ rectos}$$
$$2 \text{ rectos} < \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 < 6 \text{ rectos}$$

Pero $\beta_1 = \alpha_1$; $\gamma_1 = \alpha_2$; $\delta_1 = \alpha_3$; $\gamma_2 = \beta_2$; $\delta_2 = \beta_2$; $\delta_3 = \gamma_3$.

Sumando ordenadamente:

$$8 \text{ rectos} < 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_3) < 24 \text{ rectos}$$

o bien: $$\mathbf{4\ rectos} < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma_3 < \mathbf{12\ rectos}$$

689. En todo triedro *isósceles*, a caras iguales se oponen diedros iguales, y recíprocamente.

Sea el triedro isósceles VABC (fig. 479), *esto es, un triedro cuyas dos caras* AVB *y* AVC *son iguales. Digo que los diedros correspondientes a las aristas* VB *y* VC *son iguales.*

En efecto, desde un punto cualquiera A *de la arista* VA, *tracemos la semirrecta* AD *perpendicular al plano* BVC *y desde el pie* D *de esta perpendicular, tracemos las semirrectas* DB *y* DC, *perpendiculares respectivamente a las aristas* VB *y* VC.

Los planos ADB *y* ADC *definen en el triedro los ángulos* DBA *y* DCA *que son las secciones normales o rectilíneos correspondientes a los diedros cuyas aristas son* VB *y* VC.

Pero $\triangle AVB = \triangle AVC$ (*hipotenusa común* VA *y* $\angle AVB = \angle AVC$) *luego* $AB = AC$, *cuya igualdad entraña esta otra de los triángulos rectángulos*

$$\triangle DAB = \triangle DAC$$

y, como consecuencia,

$$\angle \mathbf{ABD} = \angle \mathbf{ACD}$$

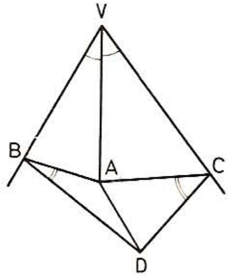


Fig. 479

Recíprocamente. — *Considerando la misma figura, si los diedros* ABD *y* ACD *son iguales, se tendrá también la igualdad de los triángulos rectángulos* $\triangle DAB = \triangle DAC$, *de donde* $AB = AC$, *y por tanto,* $\triangle AVB = \triangle AVC$ *por ser rectángulos que tienen la hipotenusa común y un ángulo agudo igual.*

Luego $\angle \mathbf{AVB} = \angle \mathbf{AVC}$

690. En todo triedro *isósceles*, el plano bisector del diedro comprendido entre las caras iguales, es perpendicular a la tercera cara y determina dos ángulos iguales.

En el triedro VABC (fig. 479), *supongamos que sean iguales las caras* AVB *y* AVC, *y supongamos además que el plano* VAD *sea bisector del diedro correspondiente* VA. *Entonces, los dos triedros* VADC *y* VADB *tienen un diedro igual comprendido entre caras iguales entre sí e inversamente dispuestas, siendo, por tanto, simétricos dichos diedros.*

Por consiguiente, los diedros AVDC *y* AVDB *son iguales y por tanto rectos. Siendo, por la misma razón, iguales las caras* BVD *y* CVD.

Nota. — *De la misma manera se demostraría que si un plano pasa por la arista y la bisectriz de la cara opuesta, es perpendicular a dicha cara.*

691. Si un diedro tiene dos ángulos diedros desiguales, a mayor ángulo diedro se opone mayor cara y recíprocamente.

Sea el triedro VABC (fig. 480) *en el cual el ángulo diedro correspondiente a la arista* VA *es mayor que el ángulo diedro correspondiente a la arista* VC.

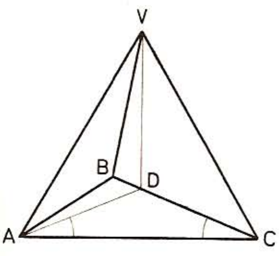


Fig. 480

En el ángulo diedro BVAC, *construyamos el ángulo diedro* DVAC = BVCA; *entonces el triedro* VADC *será* isósceles, *y por tanto* AVD = CVD.

Pero en el triedro VABD, *se tiene que*

$$AVB < AVD + BVD$$

o sea $$AVB < CVD + BVD$$

o bien $$\mathbf{AVB < CVB}$$

Recíprocamente. — Si las caras de un triedro son desiguales, a mayor cara se opone mayor diedro.

En efecto, supongamos que los diedros opuestos a dichas caras sean iguales; entonces el triedro será isósceles *y las caras opuestas a esos diedros serán iguales; lo que es contra la hipótesis.*

692. En todo triedro convexo, un diedro exterior es menor que la suma de los otros dos no adyacentes y mayor que su diferencia.

En efecto, si designamos por A, B, C, *los ángulos diedros de un triedro convexo, tendremos:*

- 1.º $A + B + C > 2$ *rectos*

de donde *Diedro exterior a* $C = 2$ *rectos* $- C < A + B$

- 2.º *Como el triedro es convexo, tenemos:* $A + C < 2$ *rectos*

y con mayor razón: $A + C - B < 2$ *rectos*

de donde 2 *rectos* $- C > A - B$

693. La suma de las ocho caras del ángulo poliedro del capitel de una torre, al variar entre 0 y 360º, ¿entre qué límites puede variar la suma de los ángulos básicos de las caras laterales de dicho capitel?

Suma total de los ángulos de las ocho caras:	$8 \times 2 = 16$ *rectos*
Suma de los ocho ángulos del vértice del capitel:	*de* 0 *a* 4 *rectos*
Suma de los 16 ángulos básicos	**de 16 a 12 rectos**

694. ¿Qué límite resultará en el caso general de un ángulo poliedro de *n* caras?

Suma total de los ángulos:	$2n$ *rectos*
Angulos en el vértice:	*de* 0 *a* 4 *rectos*
Angulos básicos	*de* **2n** *a* **(2n − 4) rectos**

695. Hallar la distancia que media entre un punto y un plano dados.

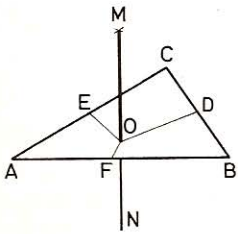


Fig. 481

Sea M *el punto dado y* ABC *el plano dado* (fig. 481) *Desde el punto* M, *por medio de un cordelillo de suficiente longitud, se señalan en el plano tres puntos cualesquiera* A, B, C, *equidistantes de* M; *se construye el triángulo* ABC, *y en los puntos medios de sus lados se trazan perpendiculares que determinan el punto* O *equidistante de los vértices.*

La recta MO *es la distancia pedida, pues siendo iguales las oblicuas* MA, MB *y* MC, *sus pies equidistan del pie de la perpendicular. Además, el punto* O *es el único punto del plano que dé* $OA = OB = OC$. *Luego* MO *es perpendicular al plano* ABC *y determina la distancia que media entre el punto* M *y el plano dado.*

696. La aguja de un campanario forma un ángulo sólido de ocho caras cuya suma es de 90º. Hallar el valor de cada uno de los ángulos en la base de las caras laterales.

Suma de los ángulos de los ocho triángulos:	$8 \times 2 = 16$ *rectos*
Suma de los ocho ángulos en el vértice:	1 *recto*
Diferencia, o sea valor de los 16 ángulos en la base:	15 *rectos*

Valor de cada uno de estos ángulos: $\frac{15 \times 90^\circ}{16} = \mathbf{84^\circ\,22'\,30''}$

697. Dadas dos rectas, trazar un plano paralelo a ambas rectas y a igual distancia de cada una de ellas.

Sean AB *y* CD (fig. 482) *las rectas dadas. Por la recta* AB *se puede trazar un plano* M *paralelo a la recta* CD, *y por* CD *otro plano paralelo a la recta* AB (GEOM. **605**); *por tanto, los planos* M *y* N *son paralelos.*

Luego el plano R, *trazado a igual distancia de los planos* M *y* N, *será paralelo a cada una de las rectas* AB *y* CD, *y equidistará de cada una de ellas.*

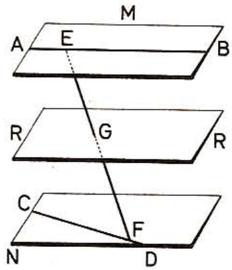


Fig. 482

698. Por una recta dada, trazar un plano que pase a igual distancia de dos puntos dados.

Sea AB *la recta,* C *y* D *los puntos dados, y sea* M *el plano* (fig. 483). *Las perpendiculares* CE *y* DF *han de ser iguales; estas rectas son paralelas por ser perpendiculares a un mismo plano; luego* $\triangle CEG = \triangle DFG$ *por tener un lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales, y por tanto* CG = GD.

Por consiguiente, el plano M *queda determinado por la recta* AB *y el punto* G, *punto medio de la recta* CD *que une los puntos dados.*

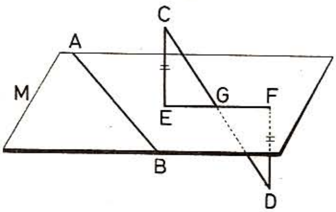


Fig. 483

699. Una habitación tiene de altura $a = 4$ m y en un punto del techo se sujeta una cuerda de 10 m de larga y con el extremo libre se traza una circunferencia en el suelo procurando tener bien tensa la cuerda. Hállese el área del círculo que resulta.

La cuerda bien tensa representa la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por catetos la altura a = 4 m *y el radio* r *de la circunferencia.*

Por tanto, $r^2 = l^2 - a^2$

Area del círculo: $A = \pi r^2 = \pi (l^2 - a^2)$

$$\mathbf{A} = 3{,}1416\,(10^2 - 4^2) = 3{,}1416 \times 84 = \mathbf{263{,}8944\ m^2}$$

700. En un punto P de un plano M (fig. 484) se coloca verticalmente un listón que tiene $a = 5$ m y haciendo centro en el pie del mismo, se traza una circunferencia en el plano M, de radio $r = 2$ m. En un punto B de esta circunferencia se traza una tangente BC de $t = 8$ m de longitud. ¿Qué distancia hay entre los extremos del listón y de la tangente?

$$d^2 = r^2 + t^2$$

$$AC^2 = a^2 + d^2 = a^2 + r^2 + t^2$$

$$\mathbf{AC} = \sqrt{5^2 + 2^2 + 8^2} = \mathbf{9{,}64\ cm}$$

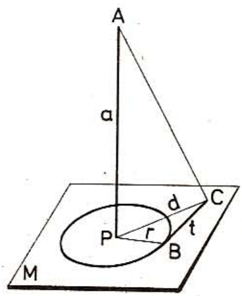


Fig. 484

7

PROBLEMAS SOBRE LOS POLIEDROS

I. Area del prisma

701. ¿Cuál será el área de un cubo que tiene:
1.º 5 m de lado; 2.º 12,45 m de lado?

- 1.º *Area total del cubo:* $A = 6a^2 = 6 \times 5^2 =$ **150 m²**
- 2.º *Area total del cubo:* $6 \times 12{,}45^2 =$ **930,015 m²**

702. Si a representa la longitud de la arista de un cubo, ¿cuál será la fórmula?
1.º De la suma de las aristas; 2.º Del área total de las caras?

- 1.º *El cubo tiene* 12 *aristas; por tanto, la suma será* **12a.**
- 2.º *Area de las* 6 *caras:* $6\,(a \times a) = \mathbf{6a.^2}$

703. Las tres dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son a, b, c. ¿Cuál es
1.º La fórmula de la suma de las aristas; 2.º La del área total?

- 1.º *Suma de las aristas:* $4a + 4b + 4c = \mathbf{4\,(a + b + c)}$
- 2.º *Area total:* $2ab + 2ac + 2bc = \mathbf{2\,(ab + ac + bc)}$

704. ¿Cuál es el área lateral de un paralelepípedo rectángulo que tiene 5,25 m de largo, 4,5 m de ancho y 3,75 m de alto? Calcular también el área total.

- 1.º *Perímetro de la base:* $2(5{,}25 + 4{,}5) = 19{,}5$ m
  Area lateral: $19{,}5 \times 3{,}75 =$ **73,125 m²**
- 2.º *Area de las dos bases:* $2(5{,}25 \times 4{,}5) = 47{,}25$ m²
  Area total: $73{,}125 + 47{,}25 =$ **120,375 m²**

705. ¿Cuál es el área lateral de un prisma recto de 9 m de altura, si la base es un triángulo equilátero de 1,8 m de lado?

Perímetro de la base: $1{,}8 \times 3 = 5{,}4$ m
Area lateral: $5{,}4 \times 9 =$ **48.6 m²**

706. ¿Cuál es la superficie total de una pilastra de 8 m de alto, cuya base es un cuadrado de 5,225 m^2 de área y cuyas caras laterales son rectángulos?

La pilastra propuesta es un prisma cuya base es un cuadrado.

Lado del cuadrado:	$\sqrt{5,2250}$	$= 2,286$ m
Perímetro de la base:	$2,286 \times 4$	$= 9,144$ m
Area lateral:	$9,144 \times 8$	$= 73,152$ m^2
Area de las bases:	$5,225 \times 2$	$= 10,45$ m^2
Area total:	$73,152 + 10,45$	$=$ **83,602 m^2**

707. Se quiere empapelar un cuarto cuya longitud es de 9,25 m, la anchura 4,75 m y la altura 4,8 m; las aberturas no empapeladas representan una superficie total de 12,25 m^2. ¿Cuántos rollos de 12 m por 50 cm se necesitarán, y cuál será el gasto si el rollo cuesta 37,5 pts?

Perímetro del cuarto:	$2(9,25 + 4,75)$	$= 28$ m
Superficie de las paredes:	$28 \times 4,8$	$= 134,40$ m^2
Superficie empapelada:	$134,4 - 12,25$	$= 122,15$ m^2
Superficie de un rollo:	$12 \times 0,5$	$= 6$ m^2

Número de rollos: $\dfrac{122,15}{6} =$ **20,35 $\simeq$ 21**

Gasto: $37,5 \times 21 =$ **787,5 pts**

708. Un paralelepípedo rectángulo tiene 3 m de largo, 5 m de ancho y 8 m de alto. Calcular:

1.º El área lateral del sólido;
2.º El lado de un cubo que tenga igual superficie total que el paralelepípedo.

- 1.º *Perímetro de la base:* $2(3 + 5) = 16$ m
  Area lateral: $16 \times 8 =$ **128 m^2**
- 2.º *Area de las bases:* $2(3 \times 5) = 30$ m^2
  Area total: $128 + 30 = 158$ m^2

Lado del cubo: $\sqrt{\dfrac{158}{6}} =$ **5,13 m**

709. Las caras de un cubo tienen juntas 54 m^2. ¿Cuál es:

1.º La longitud de una arista;
2.º El volumen del cubo?

- 1.º *Longitud de la arista:* $\sqrt{54 : 6} =$ **3 m**
- 2.º *Volumen del cubo:* $3 \times 3 \times 3 =$ **27 m^3**

710. La altura, anchura y longitud de un paralelepípedo rectángulo tienen respectivamente 2, 3 y 4 m. ¿Cuál es:

1.º El volumen;
2.º El área total;
3.º La diagonal;
4.º La suma de las aristas;
5.º La arista de un cubo equivalente;
6.º La diferencia de área entre los dos sólidos;
7.º La diferencia de las sumas de sus aristas respectivas.

- 1.º *Volumen del paralelepípedo:* $4 \times 3 \times 2 = \mathbf{24}$ $\mathbf{m^3}$
- 2.º *Area lateral:* $AL = 2p \times h = 2(4 + 3) \times 2 = 28$ m^2
  Area de las bases: $2(4 \times 3) = 24$ m^2
  Area total: $28 + 24 = \mathbf{52}$ $\mathbf{m^2}$
- 3.º *Diagonal* (GEOM. **726**): $\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \mathbf{5{,}385}$ **m**
- 4.º *Suma de las aristas:* $(4 \times 4) + (3 \times 4) + (2 \times 4) = \mathbf{36}$ **m**
- 5.º *Arista de un cubo equivalente:* $\sqrt[3]{24} = \mathbf{2{,}885}$ **m**
- 6.º *Area de este cubo:* $6 \times 2{,}885^2 = 49{,}9394$ m^2
  Diferencia de área: $52 - 49{,}9394 = \mathbf{2{,}0606}$ $\mathbf{m^2}$
- 7.º *Suma de las aristas del cubo:* $2{,}885 \times 12 = 34{,}62$ m
  Diferencia de sumas de las aristas: $36 - 34{,}62 = \mathbf{1{,}38}$ **m**

711. ¿Cuál es el área de la base de un prisma cuadrangular que tiene 15 m de alto, y cuyo volumen es de 4,25 m³?

Llamando x *a la superficie de la base, tendremos:*

$$4{,}25 = 15 \times x$$

de donde: $\mathbf{x} = 4{,}25 : 15 = \mathbf{0{,}2833\ m^2}$

712. ¿Cuál es la altura de un prisma cuya base tiene 3,5 m² de área, y cuyo volumen es de 5,75 m³?

Volumen: $5{,}75 = 3{,}5 \times a$

$$\mathbf{a} = 5{,}75 : 3{,}5 = \mathbf{1{,}64\ m}$$

713. El área lateral de un paralelepípedo rectángulo de 7 m de altura es 63 m²; ¿cuál es el perímetro de la base?

Area lateral: $2p \times 7 = 63$

$$\mathbf{2p} = 63 : 7 = \mathbf{9\ m}$$

714. ¿Cuál es la altura de un prisma recto cuya área lateral es de 104 m² si la base es un pentágono regular de 2,6 m de lado?

Area lateral: $2{,}6 \times 5 \times h = 104\ m^2$

$$\mathbf{h} = \frac{104}{2{,}6 \times 5} = \mathbf{8\ m}$$

715. ¿Cuál es la anchura de un paralelepípedo rectángulo cuya área lateral es de 196 m², la longitud de 9 m y la altura de 7 m?

Perímetro de la base: $196 : 7 = 28$ m
Semiperímetro: $28 : 2 = 14$ m
Anchura: $14 - 9 = \mathbf{5\ m}$

716. ¿Cuál es el lado de un cubo cuya área total es de 486 m²?

Longitud del lado: $\sqrt{486 : 6} = \mathbf{9\ m}$

II. Volumen del prisma

717. ¿Cuál es el volumen de un cubo de 7,5 m de lado?

$$\mathbf{V} = a^3 = 7{,}5^3 = \mathbf{421{,}875\ m^3}$$

718. ¿Cuál es el volumen de un prisma que tiene 7 m² de base y cuya altura es de 3,4 m?

$$\mathbf{V} = 7 \times 3{,}4 = \mathbf{23{,}8\ m^3}$$

719. ¿Cuál es el volumen de un prisma triangular si la base del triángulo tiene 1,02 m, su altura 80 cm y la altura del prisma 2,6 m?

Area de la base: $\dfrac{1{,}02 \times 0{,}8}{2} = 0{,}408\ \text{m}^2$

Volumen del prisma: $0{,}408 \times 2{,}6 = \mathbf{1{,}0608\ m^3}$

720. ¿Cuántos estéreos tiene una pila de leña de 15,5 m de largo, 4 m de ancho y 7,25 m de alto? ¿Cuál es el volumen real, si los vacíos se evalúan en 1/7?

Volumen de la pila de leña: $15{,}5 \times 4 \times 7{,}25 = 449{,}5$ *estéreos*
El volumen real será: $449{,}5 \times 6/7 =$ **385,285 estéreos**

721. ¿Cuál es el volumen de una pared maestra que tiene 4,5 m de largo, 25 cm de espesor y 3,2 m de alto?

$$\mathbf{V} = 4{,}5 \times 0{,}25 \times 3{,}2 = \mathbf{3{,}6\ m^3}$$

722. ¿Qué volumen tiene un prisma triangular regular de 2,24 m de alto, si el perímetro de la base mide 3,75 m?

Llamando l al lado de la base, el volumen será:

$$\text{V} = \frac{l^2}{4}\sqrt{3} \times a$$

El lado tiene: $3{,}75 : 3 = 1{,}25\ \text{m}$

$$\mathbf{V} = \frac{1{,}25^2\sqrt{3}}{4} \times 2{,}24 = \mathbf{1{,}5155\ m^3}$$

723. Una caja de hojalata tiene 1,8 m de largo, 1,08 m de ancho y 1,5 m de profundidad. ¿Cuál es en litros su capacidad?

Volumen de la caja: $1{,}8 \times 1{,}08 \times 1{,}5 = 2{,}916\ \text{m}^3$
Capacidad en litros: **2916 litros**

724. Un aljibe rectangular tiene 12,25 m de largo y 75 cm de ancho y de profundidad; calcular su capacidad en hectolitros.

Volumen del paralelepípedo: $12{,}25 \times 0{,}75 \times 0{,}75 = 6{,}890\,625\ \text{m}^3$
Capacidad en hectolitros: **68,906 hl**

725. En una sala de 8 m de largo por 5,75 m de ancho y 3,5 m de altura se quisiera aumentar la cubicación en 8,05 m³, reduciendo la longitud 1 m.

¿Cuánto habrá que levantar el techo para este efecto y cuál será entonces la superficie de las paredes? ¿Es la misma que antes, o ha aumentado o disminuido?

Volumen de la sala: $(8 \times 5{,}75 \times 3{,}5) + 8{,}05 = 169{,}05$ m³

Altura: $\dfrac{169{,}05}{5{,}75 \times 7} = 4{,}2$ m

Habrá que subir el techo: $4{,}2 - 3{,}5 =$ **0,7 cm**

Nuevas dimensiones:

Largo: 7 m
Ancho: 5,75 m
Alto: 4,2 m

Perímetro: $(7 + 5{,}75) \times 2 = 25{,}5$ m

Area de las paredes: $25{,}5 \times 4{,}2 =$ **107,10 m²**
En vez de $27{,}5 \times 3{,}5 = 96{,}25$ m²

Aumento: **10,85 m²**

726. Alrededor de un campo cuadrado se abre un foso de 0,80 m de ancho, con lo cual queda reducida la extensión de la finca a 46,7856 áreas. Si la tierra extraída es de 199,296 m³, ¿cuál será la profundidad del foso y cuál el perímetro exterior?

El área restante cercada por el foso formará un cuadrado, cuyo lado es:

$$l = \sqrt{4678{,}56} = 68{,}4 \text{ m}$$

Lado de la finca incluido foso: $L = 68{,}4 + 0{,}8 \times 2 = 70$ m
Perímetro exterior: $70 \times 4 =$ **280 m**
Area del campo y foso: $70^2 = 4900$ m²
Area del foso solo: $4900 - 4678{,}56 = 221{,}44$ m²
Profundidad del foso: $199{,}296 : 221{,}44 =$ **0,9 m**

727. Con una cartulina rectangular de 28 cm por 23 cm, constrúyase el cubo mayor posible, pegando las aristas con papel de goma. Hállese después su volumen y el área de la cartulina sobrante.

Tomando 4 caras a lo largo, tendrá cada una: $28 : 4 = 7$ cm.
A esas 4 caras se pegan las 2 bases, tomadas del resto de la cartulina.

Volumen del cubo: $7^3 =$ **343 cm³**
Area total: $7^2 \times 6 = 294$ cm²
La cartulina tenía: $28 \times 23 = 644$ cm²
Sobrante: $644 - 294 =$ **350 cm²**

728. Hemos pagado 455 pts por labrar una piedra cúbica, a razón de 84 pts m². ¿A cómo sale ésta, si había costado 600 pts m³?

Area total del cubo: $6a^2 = 455 : 84 = 5{,}4167$ m²
Arista del cubo: $a = \sqrt{5{,}4167 : 6} = 0{,}95$ m
Volumen del cubo: $V = 0{,}95^3 = 0{,}857375$ m³
Coste de la piedra: $600 \times 0{,}857375 + 455 =$ **969,425 pts.**

729. En una caja rectangular se podrían colocar en sentido longitudinal 15 cubitos de 4 cm de arista y quedarían 2 cm vacíos; disponiéndolos en sentido latitudinal, se colocarían 10 cubos de iguales dimensiones y quedaría un vacío de 3 cm, y en sentido vertical cabrían exactamente 8 de esos cubitos. ¿Cuál es el volumen interior de la caja? ¿Cuántos cubos de 5 cm de arista podrían disponerse dentro y cuál sería el espacio que quedará vacío?

Dimensiones de la caja:

Longitud:	$(4 \times 15) + 2 = 62$ cm
Latitud:	$(4 \times 10) + 3 = 43$ cm
Altura:	$4 \times 8 = 32$ cm
Vol. interior:	$62 \times 43 \times 32 = 85\,312$ cm^3 = **85,312 dm^3**

Número de cubos de 5 cm que podrán colocarse:

A lo largo:	$62 : 5 = 12$ *por defecto*
A lo ancho:	$43 : 5 = 8$ *por defecto.*
A lo alto:	$32 : 5 = 6$ *por defecto.*

En total: $12 \times 8 \times 6 =$ **576 cubos.**

Volumen de estos cubitos: $5^3 \times 576 = 72\,000$ cm^3

Espacio vacío: 85,312 dm^3 − 72 dm^3 = **13,312 dm^3**

730. Una clase tiene 8,25 m de largo, 7 m de ancho y 3,45 m de alto. Pregúntase:

1.º Qué volumen de aire contiene.
2.º Cuánto pesa este aire, suponiendo que un litro de aire pesa 1,3 g.

- 1.º *Volumen de la clase:* $8,25 \times 7 \times 3,45 =$ **199,2375 m^3**
- 2.º *Peso del aire:* $1,3 \times 199,237\,5 =$ **259,0075 kg**

731. Las dimensiones exteriores de un edificio son 17,25 m de largo, 11,5 m de ancho y 10,5 m de alto; las paredes exteriores miden, por término medio, 62 cm de espesor. Hay 24 ventanas de 1 m de ancho por 1,72 m y 2 puertas de 1,15 m de ancho por 2,58 m de alto. ¿Cuál es el volumen de las paredes?

Amplitud de las paredes con las puertas y ventanas:

$$2\,(17,25) + 2\,[11,5 - (2 \times 0,62)] = 55,02 \text{ m}$$

Volumen total de las paredes con las puertas y ventanas:

	$55,02 \times 10,5 \times 0,62 = 358,180\,2$ m^3
Vol. ventanas:	$(1 \times 1,72 \times 0,62) \times 24 = 25,593\,6$ m^3
Vol. puertas:	$(2,58 \times 1,15 \times 0,62) \times 2 = 3,679\,08$ m^3
Vol. paredes:	$358,1802 - (25,5936 + 3,679\,08) =$ **328,907 52 m^3**

732. Hay que demoler una pared que tiene 46 m de largo, 1,5 m de alto y 70 cm de espesor. Reedificada, tendrá 80 cm de espesor y 1 m de alto. Por la demolición de la pared antigua, extracción de piedras y acarreo de escombros, se pagan 28 pts por m^3, y 45 pts por la construcción de 1 m^3 de la nueva. ¿Cuánto costará el trabajo?

Volumen de la pared antigua:	$46 \times 1,5 \times 0,7 = 48,3$ m^3
Gasto por la demolición:	$28 \times 48,3 = 1352,4$ pts
Volumen de la pared nueva:	$46 \times 1 \times 0,8 = 36,8$ m^3
Gasto por la construcción:	$45 \times 36,8 = 1656$ pts
Gasto total:	$1656 + 1352,4 =$ **3008,4 pts**

733. Una caja de embalaje se ha guarnecido interiormente con una lámina de cinc que presenta un desarrollo superficial de 3,60 m^2. Hállese el volumen interior de la caja, siendo la longitud el doble de la anchura, y las caras extremas, cuadrados iguales.

Llamando x *a la anchura, la longitud será* 2x.

Perímetro de la caja:	$2(x + 2x) = 6x$
Area lateral:	$6x \times x = 6x^2$
Area de la base:	$2x \times x = 2x^2$
Area total:	$2(2x^2) + 6x^2 = 10x^2$
Luego	$10x^2 = 3{,}6$
	$x = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$ m
Volumen:	$0{,}6 \times 0{,}6 \times 1{,}2 =$ **0,432 m³**

734. Se tiene un triángulo isósceles, cuya área es de 6 m² y la altura es la mitad de la base; ¿cuál será el volumen del prisma triangular recto construido, tomando este triángulo por base, y sabiendo que el área total del prisma es de 24 m²?

En todo triángulo isósceles la altura relativa a la base es al mismo tiempo mediana.

Y cuando, en un triángulo, la mediana es la mitad del lado correspondiente, ese triángulo es rectángulo.

El triángulo, en este caso, es un semicuadrado.

Area del triángulo base: $l^2/2 = 6$ m²

de donde: $l = \sqrt{6 \times 2} = 2\sqrt{3}$ m

Hipotenusa del triáng. $l\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6}$ m

Area lateral prisma: $\text{AL} = (2 \cdot 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6})\,h = 2h\,(2\sqrt{3} + \sqrt{6})$

Area total prisma: $\text{AT} = 2h\,(2\sqrt{3} + \sqrt{6}) + 6 \times 2$

Por el enunciado: $2h\,(2\sqrt{3} + \sqrt{6}) + 12 = 24$

de donde:
$$h = \frac{24 - 12}{2\,(2\sqrt{3} + \sqrt{6})} = \frac{6}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

racionalizando:
$$h = \frac{6\,(2\sqrt{3} - \sqrt{6})}{12 - 6} = 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$$

Vol. prisma: $\mathbf{V} = 6\,(2\sqrt{3} - \sqrt{6}) = 6 \times 1{,}014 =$ **6,084 m³**

735. Tenemos una serie de 30 prismas, cuyas alturas van creciendo de 1 cm a partir de 1 que tiene el primero, hasta 30 cm que tiene el último. Todos ellos tienen por base un exágono regular de 3 cm de perímetro. Se desea saber:

1.º La suma de sus volúmenes;

2.º La suma total de sus áreas.

● 1.º *La suma de los volúmenes es equivalente al volumen de un prisma único cuya altura fuese la suma de todas las alturas de los prismas dados; mas estas alturas van en progresión aritmética, siendo el primer término* 1 cm *y el último* 30 cm.

La suma H *será, pues:*
$$\frac{(1 + 30)\,30}{2} = 465 \text{ cm}$$

Volumen:
$$\mathbf{V} = \frac{3 \times 3^2\sqrt{3}}{2} \times 465 = \mathbf{302{,}0175\ cm^3}$$

● 2.º *La suma total de sus áreas se compone de la suma de sus áreas laterales más* 60 *veces el área de una base.*

La primera equivale al área lateral de un prisma único cuya altura fuese la suma de las alturas de todos los prismas dados, 465 cm:

Area lateral: $AL = 3 \times 465 = 1395 \text{ cm}^2$

Area total: $\mathbf{AT} = 1395 + \dfrac{3 \cdot 0{,}5^2 \sqrt{3} \times 60}{2} = \mathbf{1433{,}97\ cm^2}$

736. Un hojalatero quiere hacer un cubo con una lámina de cinc de 8,64 m². ¿Cuál será:

1.º La longitud de la arista;
2.º El volumen del cubo?

● 1.º *Longitud de la arista:* $\sqrt{8{,}64 : 6} = \mathbf{1{,}20\ m}$
● 2.º *Volumen:* $1{,}2^3 = \mathbf{1{,}728\ m^3}$

737. Para cercar una finca de 32 m de largo por 20 m de ancho, se construye una pared de 1,5 m de altura por 0,2 m de espesor. Dicha pared tiene una puerta de entrada de 1,2 m de ancho abierta hasta arriba. Calcular el volumen y superficie de la pared teniendo en cuenta también el remate y puerta.

Perímetro exterior:	$(32 + 20) \times 2 - 1{,}2 = 102{,}8$ m
Perímetro interior:	$102{,}8 - 0{,}2 \times 8 = 101{,}2$ m
Base de la pared:	$\dfrac{102{,}8 + 101{,}2}{2} \times 0{,}2 = 20{,}4$ m²
Vol. de la pared:	$20{,}4 \times 1{,}5 =$ **30,6 m³**
Area pared (exterior):	$102{,}8 \times 1{,}5 = 154{,}2$ m²
Area pared (interior):	$101{,}2 \times 1{,}5 = 151{,}8$ m²
Montantes puerta:	$0{,}2 \times 1{,}5 \times 2 = 0{,}6$ m²
Remate (igual que la base):	20,4 m²
Area total:	**327 m²**

738. Un ferrocarril atraviesa una llanura por un terraplén cuya sección representa un trapecio de 6 m de alto y 8 m de ancho en la parte superior. Los taludes forman una pendiente de 75 cm por metro. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra se han necesitado por kilómetro para este terraplén, y cuál es la superficie del talud?

Puede considerarse el terraplén como un prisma cuya base es el trapecio de la sección y cuya altura es de 1 km.

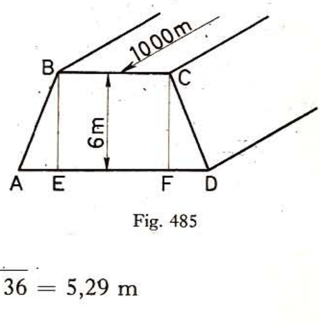


Fig. 485

Sea ABCD (fig. 485) *el trapecio de la sección.*
Longitud de $AB = 6 : 0{,}75 = 8$ m.

En $\triangle ABE$: $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{64 - 36} = 5{,}29$ m

Base mayor del trapecio: $5{,}29 + 8 + 5{,}29 = 18{,}58$ m

Area ABCD: $A_1 = \dfrac{18{,}58 + 8}{2} \times 6 = 79{,}74 \text{ m}^2$

Vol. tierra acarreada: $\mathbf{V} = 79{,}74 \times 1000 = \mathbf{79\ 740\ m^3}$

Un talud tiene la forma de un rectángulo de 1000 m *de longitud por* 8 m *de ancho. Luego:*

Area de los taludes: $\mathbf{A} = (1000 \times 8) \times 2 = \mathbf{16\ 000\ m^2}$.

739. Calcular el volumen del prisma ABCDEFGH (fig. 486) sabiendo que las caras ABCD y EFGH, paralelas y verticales, son dos trapecios cuyas aristas AB = EF = 42 cm y DC = HG = 24 cm; los lados oblicuos de este trapecio tienen 15 cm cada uno; y la longitud del prisma AE = BF = = CG = DH = 80 cm.

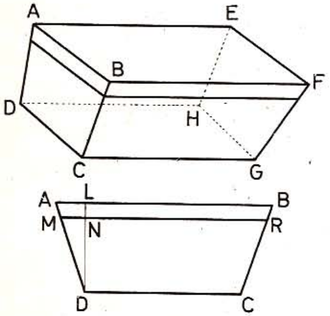


Fig. 486

Suponiendo que este prisma fuera una pila, ¿qué cantidad de agua contendría si estuviese lleno hasta los 2/3 de altura y descansara sobre la base DCGH?

● 1.º *Tomemos el trapecio* ABCD *como base del prisma, la altura de este trapecio será* DL

$$AL = \frac{42 - 24}{2} = 9 \text{ cm}$$

En $\triangle$ALD *(rectángulo):* $DL = \sqrt{AD^2 - AL^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ cm

Area ABCD: $A = \dfrac{42 + 24}{2} \times 12 = 726 \text{ cm}^2$

Volumen del prisma: $\mathbf{V} = 726 \times 80 = 58\ 080 \text{ cm}^3 = \mathbf{58{,}08\ dm^3}$

● 2.º *Sea* MNR *el nivel del agua en la cara* ABCD. $\triangle MND \sim \triangle ALD$, *luego*

$$DN = \frac{DL \times 2}{3} = \frac{12 \times 2}{3} = 8 \text{ cm}$$

$$MN = \frac{AL \times 2}{3} = \frac{9 \times 2}{3} = 6 \text{ cm}$$

$$MR = DC + 2MN = 24 + 12 = 36 \text{ cm}$$

Area CDMR: $A = \dfrac{MR + DC}{2} \times DN = \dfrac{36 + 24}{2} \times 8 = 240 \text{ cm}^2$

Volumen de agua: $\mathbf{V} = 240 \times 80 = 19\ 200 \text{ cm}^3 = \mathbf{19{,}2\ dm^3}$

740. Se quiere construir un dique de piedra de granito que tenga 750 m de largo, 3,5 m de alto, 4,75 m de ancho en la base y 2,2 m en la parte superior. El metro cúbico de granito pesa 2500 kg, y el kilo cuesta 0,3 pts. ¿Cuál será el coste de este dique?

Véase el problema núm. **738.**

Area de la sección ABCD: $\dfrac{2{,}2 + 4{,}75}{2} \times 3{,}5 = \quad 12{,}1625 \text{ m}^2$

Volumen del granito: $12{,}1625 \times 750 = 9121{,}875 \text{ m}^3$
Importe: $0{,}3 \times 9121{,}875 \times 2500 =$ **6 841 406,25 pts.**

741. La altura de un prisma recto es de 4 dm; cada base es un rectángulo, y uno de los lados es el doble del otro; el área total es de 28 dm². Pregúntase cuál es el área de cada una de las caras laterales y de las bases. Dígase, además, el peso del mercurio contenido en este prisma, suponiéndolo hueco. Densidad del mercurio: 13,59.

Sea x *dm el lado menor del rectángulo básico.*
Area lateral: $2\,(2x + x) \times 4 = 24x$
Area de las bases: $2\,(2x \times x) = 4x^2$
Area total: $4x^2 + 24x = 28$
Se simplifica y resuelve: $x^2 + 6x - 7 = 0$
de donde $x = -3 \pm \sqrt{16} = -3 \pm 4 = 1 \text{ dm}$

La respuesta negativa no es aceptable pues se trata de una longitud.

Cara pequeña $= 1 \times 4 =$ **4 dm²**
Cara grande $= 2 \times 4 =$ **8 dm²**
Area de la base $= 2 \times 1 =$ **2 dm²**
Volumen del prisma $= 2 \times 4 = 8 \text{ dm}^3$
Peso del prisma: **P** $= 8 \times 13{,}59 =$ **108,72 kg**

742. La superficie total de un prisma de aluminio de forma exagonal regular es de 12 dm²; su altura es 1 dm. Calcular el volumen y el peso del sólido, si la densidad del aluminio es 2,5.

Sea l *dm el lado del exágono:*

Area lateral: $AL = 6l \times 1 = 6l$

Area total: $AT = 6l + 2\left(\dfrac{3l^2}{2}\sqrt{3}\right) = 6l + 5{,}2l^2$

Por hipótesis: $6l + 5{,}2l^2 = 12$
Se resuelve: $5{,}2l^2 + 6l - 12 = 0$

$$l = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 62{,}4}}{5{,}2} = \frac{-3 \pm 8{,}45}{5{,}2} = 1{,}048 \text{ dm}$$

Area base: $A = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3 \times 1{,}048^2}{2}\sqrt{3} = 2{,}84 \text{ dm}^2$

Volumen del prisma: **V** $= 2{,}84 \times 1 =$ **2,84 dm³**
Peso del prisma: **P** $= 2{,}84 \times 2{,}5 =$ **7,10 kg**

743. Un prisma exagonal tiene 3,82 m de alto; cada arista de la base es de 34 cm. ¿Cuál es su volumen?

Area base: $A = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3 \times 3{,}4^2}{2}\sqrt{3} = 30{,}03288 \text{ dm}^2$

Vol. prisma: **V** $=$ **30,032 88** $\times 38{,}2 =$ **1147,256 dm³**

744. Un aljibe tiene la forma de un prisma octogonal regular de 80 m de perímetro. ¿Qué volumen de agua contiene cuando ésta sube a 75 cm?

Lado del octógono de la base: $80 : 8 = 10$ m

Area del octógono (GEOM. **581**): $A = l^2 (2 + \sqrt{2})$

Area base: $B = 100 (2 + 2\sqrt{2}) = 482{,}842$ m^2

Volumen del agua: $\mathbf{V} = 482{,}842 \times 0{,}75 = \mathbf{362{,}131\ m^3}$

745. ¿Cuánto costará la mampostería de un pabellón de forma octogonal regular de 3 m de lado, 4 m de alto a flor de tierra y 1 m de cimientos, a razón de 50 pts el metro cuadrado de mampostería? Los huecos de puertas y ventanas no entran en cuenta.

Area lateral: $AL = 3 \times 8 \times (4 + 1) = 120$ m^2

Importe: $50 \times 120 =$ **6000 pts**

746. Hallar el área lateral de un prisma exagonal regular cuyo volumen es de 1299 dm^3 y cuya altura es doble que la diagonal mayor de la base.

Area base: $$B = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

La diagonal mayor del exágono regular es doble del lado; la altura del prisma será, pues:

$$h = 2l \times 2 = 4l$$

Vol. prisma: $$V = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \times 4l = 6l^3\sqrt{3}$$

Por hipótesis: $$6l^3\sqrt{3} = 1299$$

$$l = \sqrt[3]{\frac{1299}{6\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1299}{6 \times 1{,}732}} = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ dm}$$

$$h = 20 \text{ dm}$$

Area lateral: $\mathbf{AL} = 6lh = 6 \times 5 \times 20 = \mathbf{600\ dm^2}$

747. ¿Cuál es la longitud de un aljibe rectangular de 2 m de ancho y 2,5 m de alto, si su volumen es de 225 hectolitros?

$$V = 2 \times 2{,}25 \times x = 22{,}5$$

$$\mathbf{x} = \frac{22{,}5}{2 \times 2{,}25} = \mathbf{5\ m}$$

748. ¿Cuál es la profundidad de un estanque de forma cuadrada que tiene 2,4 m de lado, y del cual se han sacado 82 m^3 de tierra?

$$V = 2{,}4 \times 2{,}4 \times x = 82 \text{ m}^3$$

$$\mathbf{x} = \frac{82}{2{,}4 \times 2{,}4} = \mathbf{14{,}236\ m}$$

749. ¿Qué altura tiene un prisma de 5,75 m^3 de volumen si su base tiene 3.05 m^2?

$$V = 3{,}05 \times x = 5{,}75$$

$$\mathbf{x} = \frac{5{,}75}{3.05} = \mathbf{1{,}885\ m}$$

750. Un tejado rectangular (fig. 487) de una sola pendiente cobija una leñera de 8 m de larga por x de fondo y 3,5 m sobre el nivel del suelo en AR y 4,7 m sobre el mismo nivel en DS. Sabiendo que el tejado forma con la horizontal AH un ángulo de 30º, calcular el área del tejado y el volumen de leña que puede contener.

$$DH = 4{,}7 - 3{,}5 = 1{,}2 \text{ m}$$

En $\triangle AHD$, $\angle A = 30^{\circ}$ *luego*

$$AD = 2DH = 2{,}4 \text{ m}$$

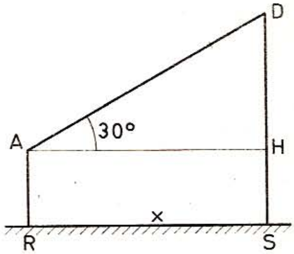


Fig. 487

línea de máxima pendiente.

Area del tejado: $\mathbf{A} = 8 \times 2{,}4 = \mathbf{19{,}2\ m^2}$.

Volumen de leña que se podrá guardar: será el mismo que el del paralelepípedo de 8 m de largo por 3,5 de alto y AH *de fondo, aumentado del volumen del prisma de 8 m de largo y el triángulo* AHD *por base.*

$$AH = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = \frac{2{,}4 \times 1{,}732}{2} = 2{,}0784 \text{ m}$$

Vol. paralelepípedo: $8 \times 2{,}0784 \times 3{,}5$
Volumen del prisma: $8 \times 2{,}0734 \times 0{,}6$
Volumen total: $\mathbf{V} = 8 \times 2{,}0784 \times 4{,}1 = \mathbf{68{,}17\ m^3}$

751. ¿Cuál será la profundidad de un pilón rectangular de 48 cm de largo y 36 cm de ancho, si ha de contener 56 litros?

$$4{,}8 \times 3{,}6 \times x = 56 \quad dm^3$$

$$\mathbf{x} = \frac{56}{4{,}8 \times 3{,}6} = \mathbf{3{,}34\ dm}$$

752. En una zanja de 4,1 m de largo por 3,5 m de ancho, han de caber 24 m^3 de cal. ¿Cuál será su profundidad?

$$4{,}1 \times 3{,}5 \times x = 24 \text{ m}^3$$

$$\mathbf{x} = \frac{24}{4{,}1 \times 3{,}5} = \mathbf{1{,}672\ m}$$

753. ¿Cuántas herraduras se pueden fabricar con una barra de hierro de 3,5 m de largo y 25 mm de espesor y de ancho? Una herradura pesa 450 gramos y la densidad del hierro forjado es de 7,78.

Vol. de la barra: $0{,}25 \times 0{,}25 \times 35 = 2{,}1875\ \text{dm}^3$
Peso de la misma: $2{,}1875 \times 7{,}78 = 17{,}01875\ \text{kg}$

Número de herraduras: $\dfrac{17{,}018\,75}{0{,}45} = \mathbf{37}$

754. Se emplea la décima parte de 1 m^3 de cal viva para revocar 300 m^2. ¿A qué altura se elevará en una zanja de 1,5 m de largo por 1,2 m de ancho la cal viva necesaria para revocar 3500 m^2?

Volumen de la cal: $\dfrac{0{,}1 \times 3500}{300} = 1{,}166\,666\ \text{m}^3$

Por tanto: $1{,}5 \times 1{,}2 \times x = 1{,}166\,666$

$$\mathbf{x} = \frac{1{,}166\,666}{1{,}5 \times 1{,}2} = \mathbf{0{,}64\ m}$$

755. ¿Cuántos hl de trigo puede contener un granero de 8,67 m de largo y 5 m de ancho, cuando sólo está lleno hasta una altura de 30 cm? Exprésese en kilos el peso que sostiene el piso si un hl de trigo pesa 70 kg.

Vol. trigo: $\mathbf{V} = 8{,}67 \times 5 \times 0{,}3 = 13{,}005\ \text{m}^3 = \mathbf{130{,}05\ hl}$
Peso trigo: $\mathbf{P} = 70 \times 130{,}05 = \mathbf{9103{,}50\ kg}$

756. En la construcción de una vía férrea se extrae tierra en una extensión de 186 m de largo por 6 de alto. La zanja tiene 20 m de ancho en la parte superior y 7,50 m en la inferior. Esta tierra se esparce en capas iguales en un terreno de 24 áreas. ¿Cuánto se aumentará la altura de ese terreno?

La tierra extraída puede considerarse como un prisma cuya base es un trapecio.

Vol. prisma: $\text{V} = \dfrac{20 + 7{,}5}{2} \times 6 \times 186 = 15\,345\ \text{m}^3$

Altura de la capa de tierra: $\dfrac{15\,345}{2400} = \mathbf{6{,}393\ m}$

757. En una pared de ladrillo, los espacios vacíos están valuados en un 20 % del volumen total. ¿Qué cantidad de argamasa se necesitará para llenar esos vacíos, si la pared tiene 2,4 m de alto, 9,5 m de largo y 20 cm de espesor?

Volumen de la pared: $2{,}4 \times 9{,}5 \times 0{,}2 = 4{,}56\ \text{m}^3$

Volumen de los vacíos: $\dfrac{4{,}56 \times 20}{100} = \mathbf{0{,}912\ m^3}$

758. Para una construcción se necesitan 5424 m lineales de madera. Un tercio de esta madera tiene una sección rectangular de 16 cm por 20; otro tercio tiene una sección de 15 cm por 16; un sexto, de 20 cm por 22, y el último sexto, de 12 cm por 15. El carpintero recibe por cada metro lineal 11 pts. ¿Cuál será su beneficio o su pérdida si el metro cúbico, incluidos los gastos de transporte, le cuesta 220 pts?

Volumen del 1.^{er} tercio: $0{,}16 \times 0{,}2 \times \dfrac{5424}{3} = 57{,}856\ m^3$

» *del 2.º tercio:* $0{,}15 \times 0{,}16 \times \dfrac{5424}{3} = 43{,}392\ m^3$

» *del 1.^{er} sexto:* $0{,}22 \times 0{,}20 \times \dfrac{5424}{6} = 39{,}888\ m^3$

» *del 2.º sexto:* $0{,}15 \times 0{,}12 \times \dfrac{5424}{6} = 16{,}272\ m^3$

» *total:* $157{,}408\ m^3$

Precio de venta: $11 \times 5424 = 59\,664$ pts.
Precio de compra: $220 \times 157{,}408 = 43\,970{,}56$ pts.

Beneficio: **15 693,44 pts.**

759. Un ladrillo tiene 25 cm de largo, 12 de ancho y 65 mm de espesor. ¿Cuántos ladrillos se necesitarían para construir una pared de 5,2 m de largo, 1,15 m de alto y 56 cm de espesor, descontando por las junturas un 30 % del volumen?

Vol. real de ladrillos: $5{,}2 \times 1{,}15 \times 0{,}56 \times \dfrac{70}{100} = 2{,}34416\ m^3$

Vol. de un ladrillo: $0{,}25 \times 0{,}12 \times 0{,}065 = 0{,}00195\ m^3$

Número de ladrillos: $\dfrac{2{,}344\,16}{0{,}001\,95} = \mathbf{1203}$

760. Una sala tiene la forma de un paralelepípedo rectángulo; la diagonal mide 14,5 m y las tres dimensiones son entre sí como los números 3, 6 y 7. Pregúntase qué volumen de aire contiene.

Sean las dimensiones 3x, 6x, 7x; *tendremos* (GEOM. **726**):

$$(3x)^2 + (6x)^2 + (7x)^2 = 14{,}5^2$$
$$9x^2 + 36x^2 + 49x^2 = 14{,}5^2$$
$$94x^2 = 14{,}5^2$$

de donde $$x = \sqrt{\frac{14{,}5^2}{94}} = 1{,}496$$

Volumen: $\mathbf{V} = 3x \times 6x \times 7x = 126x^3 = 126 \times 1{,}496^3 = \mathbf{421{,}609\ m^3}$

761. El volumen de un prisma exagonal regular es de 71,112 m³ y el lado del exágono mide 2,34 m. Calcular:

1.º El área de la base.
2.º La altura del prisma.

● 1.º *Area de la base:* $\mathbf{A} = \dfrac{3 \times 2{,}34^2 \sqrt{3}}{2} = \mathbf{14{,}2256\ m^2}$

● 2.º *Altura del prisma:* $\mathbf{h} = \dfrac{71{,}112}{14{,}2256} = \mathbf{4{,}998\ \ m}$

762. Se fabrican con oro unas hojas que tienen una diezmilésima de mm de espesor. ¿Qué superficie se podría cubrir con 5 gramos de estas hojas? Densidad del oro: 19,50.

Tomando el cm por unidad, el espesor de 1 *hoja será* $\frac{1}{100\,000}$ *cm.*

Sea A *cm²* *el área que podremos cubrir.*

El peso del oro será: $A \times \frac{1}{100\,000} \times 19{,}5 = 5 \text{ g}$

$$\mathbf{A} = \frac{500\,000}{19{,}5} = 25\,641 \text{ cm}^2 = \mathbf{2{,}5641\ m^2}$$

763. ¿Cuál es el peso y cuál el precio de un tronco rectangular de caoba de 2,75 m de largo, 35 cm de espesor y 2,25 m de ancho, si 1 m³ pesa 12 quintales y cuesta 2850 pts?

- 1.º *Peso:* $2{,}75 \times 0{,}35 \times 2{,}25 \times 12 = $ **25,9875 quintales**
- 2.º *Precio:* $2850 \times 2{,}75 \times 0{,}35 \times 2{,}25 = $ **6 172 pts.**

764. ¿Cuál es la arista de un cubo de 343 cm³ de volumen?

Arista: $\mathbf{l} = \sqrt[3]{343} = \mathbf{7\ cm}$

765. ¿Cuál es el peso de un prisma cuadrangular de hierro colado de 5,27 m de alto, y cuyos lados tienen 12 y 16 cm? La densidad del hierro colado es de 7,25.

Peso: $\mathbf{P} = 52{,}7 \times 1{,}2 \times 1{,}6 \times 7{,}25 = \mathbf{733{,}584\ kg}$

766. ¿Cuánto pesa la hulla de una pila de 6 m de largo, 4 m de ancho y 1,8 m de alto, si la densidad de la hulla es 1,4 y si se descuenta por los vacíos un 15 % del volumen?

Peso: $$\mathbf{P} = \frac{60 \times 40 \times 18 \times 1{,}4 \times 85}{100} = \mathbf{51\,408\ kg}$$

767. La arista de un cubo es de 1 m. Calcular la superficie de una sección trazada según dos aristas opuestas.

La sección es un rectángulo cuyas dimensiones son una arista y la diagonal de una cara.

$\mathbf{A} = 1\sqrt{2} = \mathbf{1{,}4142\ m^2}$.

768. La densidad del oro fundido es de 19,258 y la del cobre de 8,788; si se hiciera un cubo con el oro puro contenido en un millón de monedas antiguas de 20 pts y otro con el cobre contenido en las mismas, ¿cuáles serían las aristas de estos dos cubos? La ley de estas monedas era de 0,900 y 1 g de oro aleado valía 3,10 pts.

Peso de 1 000 000 *de monedas de* 20 pts: $\frac{20\,000\,000}{3{,}1}$ g

Peso del oro puro: $\frac{20\,000\,000 \times 9}{3{,}1 \times 10}$ g

Volumen: $\dfrac{20\,000\,000 \times 9}{3{,}1 \times 10 \times 19{,}258}$ cm^3

Arista del cubo de oro: $\mathbf{l_1} = \sqrt[3]{\dfrac{20\,000\,000 \times 9}{31 \times 19{,}258}} = \mathbf{67{,}05\ cm}$

Arista del cubo de cobre: $\mathbf{l_2} = \sqrt[3]{\dfrac{20\,000\,000}{31 \times 8{,}788}} = \mathbf{41{,}97\ cm}$

769. Un sillar mide 3,2 m de largo, 1,8 m de ancho y 2,4 m de alto. ¿Cuál sería la arista de una piedra cúbica de igual volumen?

Arista: $\mathbf{l} = \sqrt[3]{3{,}2 \times 1{,}8 \times 2{,}4} = \mathbf{2{,}4\ m.}$

770. ¿Cuál será la arista de una zanja cúbica cuyo volumen ha de ser el doble de otra que tiene 2,20 m de lado?

Vol. de la zanja: $V = 2{,}2^3 \times 2$

Arista: $\mathbf{l} = 2{,}2 \times \sqrt[3]{2} = \mathbf{2{,}77178\ m.}$

771. Se quiere fundir en uno solo dos cubos de latón cuyas aristas respectivas miden 15 y 24 cm. ¿Cuál será la arista del cubo?

Arista: $\mathbf{l} = \sqrt[3]{15^3 + 24^3} = \mathbf{25{,}8\ cm.}$

772. La tierra de miga de una bodega de 7,6 m de largo, 5,75 m de ancho y 2,8 m de profundidad se ha transportado en carretas de 0,45 m^3. Si el volumen de la tierra firme es al volumen de la tierra de miga como 10 es a 17, y si los obreros reciben 17,5 pts por la extracción y transporte de 1 m^3 de tierra firme, pregúntase:

1.º ¿Cuántos metros cúbicos de tierra firme han transportado los obreros?
2.º ¿Cuántos metros cúbicos de tierra de miga?
3.º ¿Cuántas carretas se han llenado?
4.º ¿Qué suma ha tenido que pagar el propietario?
5.º ¿Cuánto habría tenido que pagar de más, si hubiera pagado el metro cúbico de tierra de miga a igual precio que el de tierra firme?

- 1.º *Vol. tierra firme:* $\mathbf{V_1} = 7{,}6 \times 5{,}75 \times 2{,}8 = \mathbf{122{,}36\ m^3}$
- 2.º *Vol. tierra miga:* $\mathbf{V_2} = \dfrac{122{,}36 \times 17}{10} = \mathbf{208{,}012\ m^3}$
- 3.º *Número de carretadas:* $\dfrac{208{,}012}{0{,}45} = \mathbf{463}$
- 4.º. *Gasto:* $17{,}5 \times 122{,}36 = \mathbf{2141{,}3\ pts}$
- 5.º *Exceso de gasto:* $\dfrac{2141{,}3 \times 7}{10} = \mathbf{1498{,}91\ pts}$

773. ¿Cuánto pesan 50 m lineales de hierro forjado de 12 mm de espesor por 56 mm de ancho, si la densidad del hierro forjado es de 7,78?

Tomando el decímetro por unidad, tenemos:

Peso: $\mathbf{P} = 0{,}12 \times 0{,}56 \times 500 \times 7{,}78 = \mathbf{261{,}408\ kg.}$

774. ¿Cuál es el peso de un bloque de hielo de 6,8 m de largo, 3,2 m de ancho y 75 cm de espesor, si el peso del agua y el del hielo están en la relación de 16 a 15?

Tomando el decímetro por unidad, tenemos:

Peso: $$\mathbf{P} = \frac{68 \times 32 \times 7{,}5 \times 15}{16} = \mathbf{15\,300\ kg}$$

775. Un montón de greda es dos veces más ancho y cuatro veces más largo que alto. Su volumen es de 2,16 m³. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Sea x *dm la altura, la anchura será* 2x *y la longitud* 4x.

Volumen: $x \times 2x \times 4x = 2160$ *o sea* $8x^3 = 2160$

de donde $x = 6{,}463$ dm

Altura: **0,6463 m** *anchura:* **1,2926 m** *longitud:* **2,5852 m.**

776. Calcular la diagonal de una caja de forma cúbica que tiene 1 m de lado.

Diagonal (GEOM. **326**): $\mathbf{D} = \sqrt{3 \times 1^2} = \mathbf{1{,}732\ m.}$

777. Calcular la diagonal de un cubo que tiene 1 m² de área total.

Area total: $6a^2 = 1$ *de donde* $a^2 = 1/6$

Diagonal: $$\mathbf{D} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{\frac{3}{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \mathbf{0{,}7071\ m}$$

778. El volumen de un paralelepípedo rectángulo es de 6720 cm³ y sus aristas son entre sí como los números 3, 5, 7. ¿Cuál es, en centímetros, la longitud de estas aristas?

Pueden representarse las tres dimensiones por 3x, 5x *y* 7x.

Vol. paralelepípedo: $3x \times 5x \times 7x = 6720$

$$105x^3 = 6720$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{6720}{105}} = 4\ \text{cm}$$

Las tres dimensiones serán: $4 \times 3 = \mathbf{12\ cm}$

$4 \times 5 = \mathbf{20\ cm}$

$4 \times 7 = \mathbf{28\ cm}$

779. Sabiendo que todo cuerpo sumergido en el agua experimenta un empuje vertical ascendente igual al peso del volumen de agua que desaloja, ¿cuánto pesa en el agua un cuerpo de 400 kg, si sus dimensiones son 1,2 m, 62 cm y 40 cm?

Volumen del cuerpo: $1{,}2 \times 6{,}2 \times 4 = 297{,}6\ \text{dm}^3$

El cuerpo en el agua pesa: $400 - 297{,}6 = \mathbf{102{,}4\ kg}$

780. Un tablón en forma de paralelepípedo, de madera de haya, que tiene 20 cm de alto flota sobre el agua. ¿Cuál es el espesor de la parte que sobrenada, si la densidad del haya es de 0,8?

Siendo la densidad 0,8 *ó* 4/5 *la parte que sobrenada será* 1/5 *de* 0,2, *o sea* **0,04 m.**

781. Un paralelepípedo rectángulo de hielo de 10,5 m de alto está sumergido en agua de mar. La densidad del hielo es 0,93 y la del agua de mar es 1,026. ¿Cuál será la altura de la parte del paralelepípedo que sobrenada?

Debemos tener: *Peso agua desalojada* = *Peso hielo*

$$B \times 10{,}5 \times 0{,}93 = B \times h \times 1{,}026$$

de donde:

$$h = \frac{10{,}5 \times 0{,}93}{1{,}026} = 9{,}518 \text{ m}$$

Altura de la parte que sobrenada: 10,5 − 9,518 = **0,982 m.**

III. Area de la pirámide

782. ¿Cuál es el área lateral de una pirámide regular que tiene por base un triángulo equilátero de 5 m de lado, si la apotema de las caras mide 8,165 m? ¿Cuál es el área total de la misma?

El área lateral se compone de tres triángulos iguales de 5 m *de lado y* 8,165 m *de altura.*

- 1.º $$\mathbf{AL} = \frac{3 \times 5 \times 8{,}165}{2} = \mathbf{61{,}2375\ m^2}$$
- 2.º $$\mathbf{AT} = 61{,}2375 + \frac{5^2}{4}\sqrt{3} = \mathbf{72{,}0625\ m^2}$$

783. ¿Cuál es el área total de una pirámide regular que tiene por base un triángulo equilátero, siendo la arista de la base de 8 m y la lateral de 10 m?

Apotema: $$ap = \sqrt{10^2 - 4^2} = 9{,}165 \text{ m}$$

Area total: $$\mathbf{AT} = \left(\frac{3 \times 8 \times 9{,}165}{2}\right) + \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = \mathbf{137{,}6928\ m^2}$$

784. El lado de la base de una pirámide cuadrangular regular tiene 5 m. Determinar el área lateral de esta pirámide siendo su apotema de 8 m.

Area lateral: $\text{AL} = p \times ap = 5 \times 2 \times 8 = \mathbf{80\ m^2}$

785. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 m de lado, las aristas laterales tienen también 10 m. ¿Cuál es el área total de esa pirámide?

El área total se compone de un cuadrado de 10 m *de lado y de* 4 *triángulos equiláteros de* 10 m *de lado.*

$$\mathbf{AT} = 10^2 + 4\left(\frac{10^2}{4}\sqrt{3}\right) = \mathbf{273{,}206\ m^2}$$

786. ¿Cuál es el área lateral de una pirámide pentagonal regular en la que el lado de la base tiene 5,25 m y la apotema de las caras 6,56 m?

$$\mathbf{AL} = \frac{5{,}25 \times 5 \times 6{,}56}{2} = \mathbf{86{,}1\ m^2}$$

787. En una pirámide pentagonal regular de 4,8 m de lado, las aristas laterales tienen 5,25 m. Hallar el área lateral.

Apotema: $ap = \sqrt{5{,}25^2 - 2{,}4^2} = 4{,}67$ m

Area lateral: $\mathbf{AL} = \frac{1}{2} \times 4{,}8 \times 5 \times 4{,}67 = \mathbf{56{,}04\ m^2}$

788. Cada arista lateral de una pirámide exagonal regular mide 15 m. Determinar:

1.º El área lateral, si el lado del exágono tiene 8 m.
2.º El área total.

Apotema de las caras: $ap = \sqrt{15^2 - 4^2} = 14{,}4568$

- 1.º *Area lateral:* $\mathbf{AL} = \frac{8 \times 6}{2} \times 14{,}4568 = \mathbf{346{,}9632\ m^2}$

- 2.º *Area total:* $\mathbf{AT} = 346{,}9632 + \frac{3 \times 8^2 \times 1{,}732}{2} = \mathbf{513{,}24\ \ m^2}$

789. ¿Cuál es el área total de un tetraedro regular de 4 m de lado?

El área total se compone de 4 triángulos equiláteros o sea $l^2 \sqrt{3}$

$$\mathbf{AT} = 16\sqrt{3} = \mathbf{27{,}712\ m^2}$$

790. La altura de una pirámide exagonal regular tiene 8 m. ¿Cuál es el área lateral si el exágono de la base tiene 6 m de lado?

Arista lateral: $l = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ m
Apotema: $ap = \sqrt{10^2 - 3^2} = 9{,}54$ m
Area lateral: $\mathbf{AL} = 6 \times 3 \times 9{,}54 = \mathbf{171{,}72\ m^2}$

IV. Volumen de la pirámide

791. La altura de una pirámide tiene 9 m, y la base, que es un octógono regular, mide 11,24 m². ¿Cuál es su volumen?

$$\mathbf{V} = \frac{11{,}24 \times 9}{3} = \mathbf{33{,}720\ m^3}$$

792. La base de una pirámide es de 25 m² y su altura es de 7,2 m. ¿Cuál es su volumen?

$$\mathbf{V} = \frac{25 \times 7{,}2}{3} = \mathbf{60\ m^3}$$

793. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular de 2,55 m de alto, si el triángulo de la base tiene 75 cm de alto por 80 de base?

$$\mathbf{V} = \frac{0{,}8 \times 0{,}75}{2} \times \frac{2{,}55}{3} = \mathbf{0{,}255\ m^3}$$

794. La altura de una pirámide tiene 3,6 m, y la base, de forma triangular, tiene 3,24 m de base por 2,75 m de altura. Hallar el volumen.

$$\mathbf{V} = \frac{3{,}24 \times 2{,}75}{2} \times \frac{3{,}6}{3} = \mathbf{5{,}346\ m^3}$$

795. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular regular de 2 m de alto, si el lado de la base tiene 80 cm?

$$\mathbf{V} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{3} = \mathbf{184{,}747\ dm^3}$$

796. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular de 3 m de alto, si los tres lados de la base son de 1,5 m, 1,9 m y 2,6 m?

Area de la base: $B = \sqrt{3 \times 1{,}5 \times 1{,}1 \times 0{,}4}$

$$\mathbf{V} = \sqrt{3 \times 1{,}5 \times 1{,}1 \times 0{,}4} \times \frac{3}{3} = \mathbf{1{,}407\ 12\ m^3}$$

797. Una pirámide cuadrangular tiene 15 cm de altura y la base es un cuadrado que puede inscribirse en una circunferencia de 8 cm de diámetro. Calcular el volumen y peso de esta pirámide, suponiéndola maciza y de una materia que pesa 8 gramos por cm³.

La base de esta pirámide es un cuadrado cuyas diagonales tienen 8 *cm; por tanto, su área será:* $\frac{8 \times 8}{2} = 32\ \text{cm}^2$.

Volumen: $$\mathbf{V} = \frac{32 \times 15}{3} = \mathbf{160\ cm^3}$$

Peso: $$\mathbf{P} = 8 \times 160 = 1280\ \text{g} = \mathbf{1{,}28\ kg}$$

798. Una pirámide tiene por base el cuadrado ABCD que puede inscribirse en una circunferencia de radio R = 12 cm. Las aristas laterales forman con la base un ángulo de 45°. Calcular el área total y el volumen de dicha pirámide.

Sea P *el vértice de la pirámide,* O *el centro de la base y* h *la altura* PO.

La altura h, *la semidiagonal* OA *y la arista lateral* PA *forman un triángulo rectángulo en* O *y de* 45° *en* A.

Por tanto: $OA = PO = h = R = 12$ cm

La arista de la base será: $AB = R\sqrt{2}$

Area de la base: $(R\sqrt{2})^2 = 2R^2$

Las caras laterales son triángulos equiláteros puesto que:

$$PA = PB = AB = R\sqrt{2}$$

Area lateral de la pirámide: $AL = 4 \times \frac{(R\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 2R^2\sqrt{3}$

Area total: $AT = 2R^2\sqrt{3} + 2R^2 = 2R^2(\sqrt{3} + 1)$

$$\mathbf{AT} = 2 \times 12^2(\sqrt{3} + 1) = \mathbf{786{,}816\ cm^2}$$

Volumen de la pirámide: $\mathrm{V} = \dfrac{2\mathrm{R}^2 \cdot \mathrm{R}}{3} = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{R}^3$

$$\mathbf{V} = \frac{2}{3} \times 12^3 = \mathbf{1152\ cm^3}$$

799. ¿Cuál es el volumen de un monolito piramidal cuya base cuadrada tiene 1,89 m de lado y la altura de la pirámide tiene 4,12 m?

$$\mathbf{V} = \frac{1{,}89 \times 1{,}89 \times 4{,}12}{3} = \mathbf{4{,}905\ 684\ m^3}$$

800. Amontonando piedras en forma de pirámide rectangular, los lados de la base miden 4,5 m y 3,3 m y la altura del montón 7 m. ¿Cuántas carretadas se llevarán si en cada una caben 0,75 m³?

Número de carretadas: $\dfrac{4{,}5 \times 3{,}3 \times 7}{3 \times 0{,}75} = \mathbf{47}$

801. ¿Cuál es el volumen de una pirámide de 4 m de alto, si la base es un trapecio cuyos lados paralelos tienen 3,72 m y 5,2 m y la altura 2,19 m?

$$\mathbf{V} = \left(\frac{3{,}72 + 5{,}2}{2}\right) \times 2{,}19 \times \frac{4}{3} = \mathbf{13{,}0232\ m^3}$$

802. ¿Cuál es el volumen de una pirámide exagonal regular de 3,6 m de alto, si el lado del exágono es de 3,6 m?

Area del exágono: $\dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3 \times 3{,}6^2}{2}\sqrt{3}$

$$\mathbf{V} = \frac{3 \times 3{,}6^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{3{,}6}{3} = \mathbf{40{,}404\ 096\ m^3}$$

803. ¿Cuál es el volumen de una pirámide exagonal regular si el lado del exágono es de 1,6 m, y las aristas laterales del sólido de 4 m?

Altura de la pirámide: $h = \sqrt{4^2 - 1{,}6^2} = 3{,}67\ \mathrm{m}$

Area de la base: $\mathrm{B} = \dfrac{3 \times 1{,}6^2\sqrt{3}}{2}$

Volumen: $\mathbf{V} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3 \times 1{,}6^2\sqrt{3}}{2} \times 3{,}67 = \mathbf{8{,}136\ m^3}$

804. La base de una pirámide regular es un exágono de 6,12 m de perímetro, y la altura de la pirámide es igual a los 2/3 del perímetro. ¿Cuál es su área total y su volumen?

Lado de la base: $l = 6{,}12 : 6 = 1{,}02\ \mathrm{m}$

Altura de la pirámide: $h = \dfrac{6{,}12 \times 2}{3} = 4{,}08\ \mathrm{m}$

Apotema de la base: $ap_1 = \dfrac{1{,}02\sqrt{3}}{2} = 0{,}51\sqrt{3}\ \mathrm{m}$

Apotema de la pirámide: $ap = \sqrt{4{,}08^2 + (0{,}51\sqrt{3})^2} = 4{,}17$ m

Area lateral: $AL = \dfrac{6{,}12}{2} \times 4{,}17 = 12{,}7602$ m^2

Area base: $B = \dfrac{3 \times (1{,}02)^2 \sqrt{3}}{2} = 2{,}703$ m^2

Area total: **AT** $= 12{,}7602 + 2{,}703 =$ **15,4632 m²**

Volumen: **V** $= \dfrac{1}{3}\, 2{,}703 \times 4{,}08 =$ **3,67608 m³**

V. Area del tronco de pirámide

805. Calcular el área lateral de un tronco de pirámide triangular de bases paralelas en el que los tres lados de la base mayor miden 2, 3 y 4,25 m. El 1.er lado de la base menor tienen 95 cm y las alturas de los tres trapecios 5, 6 y 6,45 m.

Las bases son triángulos semejantes, por tanto:

$$\frac{2}{0{,}95} = \frac{3}{x} = \frac{4{,}25}{y}$$

de donde: $x = 1{,}425$ m; $y = 2{,}018$ m

El área lateral se compone de 3 trapecios cuyas bases y alturas se conocen:

1.er *trapecio:*

$$A_1 = \frac{2 + 0{,}95}{2} \times 5 = 7{,}375 \text{ m}^2$$

2.º *trapecio:*

$$A_2 = \frac{3 + 1{,}425}{2} \times 6 = 13{,}275 \text{ m}^2$$

3.er *trapecio:*

$$A_3 = \frac{4{,}25 + 2{,}018}{2} \times 6{,}45 = 20{,}2143 \text{ m}^2$$

Area lateral del tronco: **AL = 40,8643 m².**

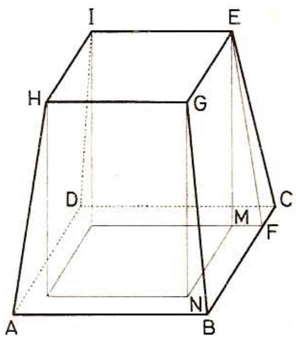


Fig. 488

806. ¿Cuál es el área total de un tronco de pirámide regular (fig. 488) de bases paralelas que son cuadrados de 4 y 2 m de lado? La altura del tronco es de 4 m.

Apotema: $EF = \sqrt{EM^2 + MF^2} = \sqrt{4^2 + 1} = 4{,}123$

Area lateral: $AL = \frac{p + p'}{2} \times ap = \frac{4 \times 4 + 2 \times 4}{2} \times 4{,}123 = 49{,}476 \text{ m}^2$

Area bases: $B + B' = 4^2 + 2^2 = 20 \text{ m}^2$

Area total: $\mathbf{AT = 69{,}476 \ m^2}$

807. ¿Cuál es el área lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas de siete lados, si los polígonos de las bases tienen 1,64 m y 1 m de lado y la altura de los trapecios 2,25 m?

$$\mathbf{AL} = \left(\frac{1{,}64 + 1}{2}\right) \times 7 \times 2{,}25 = \mathbf{20{,}79 \ m^2}$$

VI. Volumen del tronco de pirámide

808. ¿Cuál es el volumen de una pirámide truncada cuya base mayor es de 144 m², la base menor 81 m² y la altura 15 m?

$$\mathbf{V} = \frac{15}{3}(144 + 81 + \sqrt{144 \times 81}) = \mathbf{1665 \ m^3}$$ (GEOM. **839**).

809. Las bases paralelas y cuadradas de un tronco de pirámide regular tienen de lado 9 y 4 dm, y la altura del tronco es de 15 dm. Calcular su volumen.

$$\mathbf{V} = \frac{15}{3}(9^2 + 4^2 + 4 \times 9) = \mathbf{0{,}665 \ m^3}$$

810. ¿Cuál es el volumen de un tablón de 3 m de largo que tiene secciones paralelas cuadradas de 58 y 28 cm de lado?

$$\mathbf{V} = \frac{3}{3}(0{,}58^2 + 0{,}28^2 + 0{,}58 \times 0{,}28) = \mathbf{0{,}5772 \ m^3}$$

811. Las dos bases de un tronco de pirámide son cuadradas y paralelas; sus lados miden 9 y 8 m, y la altura del tronco 3 m. Calcular su volumen.

$$\mathbf{V} = \frac{3}{3}(9^2 + 8^2 + 8 \times 9) = \mathbf{217 \ m^3}$$

812. La base mayor de una viga tiene 30 dm²; la base menor es los 5/6 de la mayor, y la longitud de la viga es de 4 m. ¿Cuál es su volumen?

La base menor tiene: $\frac{30 \times 5}{6} = 25 \text{ dm}^2$.

$$\mathbf{V} = \frac{4}{3}(30 + 25 + \sqrt{30 \times 25}) = \mathbf{109{,}848 \ dm^3}$$

813. ¿Cuál es en litros la capacidad de una artesa de 1,40 m de profundidad y cuya forma es la de una pirámide truncada invertida? La abertura superior es un cuadrado de 1,15 m de lado y cada lado de la inferior tiene 86 cm.

$$\mathbf{V} = \frac{14}{3}(11{,}5^2 + 8{,}6^2 + 11{,}5 \times 8{,}6) = 1423{,}85 \text{ dm}^3 = \mathbf{1423{,}85\ l}$$

814. ¿Cuál es el volumen de un tronco de pirámide exagonal regular de bases paralelas de 70 y 20 cm de lado, si la altura es 2 m?

Area del exágono: $\mathrm{A} = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2}$

$$\mathrm{V} = \frac{20}{3}\left(\frac{3 \times 7^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3 \times 2^2\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{3 \times 7^2\sqrt{3} \times 3 \times 2^2\sqrt{3}}{4}}\right)$$

$$\mathbf{V} = \frac{20}{3}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}(49 + 4 + 14)\right] = \sqrt{3} \times 670 = \mathbf{1160{,}44\ dm^3}$$

815. ¿Cuál es el volumen de un tronco de pirámide exagonal regular de 3,8 m de alto, siendo los radios de las bases de 40 y 20 cm?

$$\mathrm{V} = \frac{38}{3}\left(\frac{3 \times 4^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3 \times 2^2\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{3 \times 4^2\sqrt{3} \times 3 \times 2^2\sqrt{3}}{4}}\right)$$

$$\mathbf{V} = \frac{38}{3}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}(16 + 4 + 8)\right] = 19\sqrt{3} \times 28 = \mathbf{921{,}424\ dm^3}$$

VII. Pirámide y tronco de pirámide

816. El área lateral de una pirámide triangular regular tiene 45 m². Determinar la longitud de la arista lateral, si la apotema es de 6 m.

Area lateral: $\dfrac{3l}{2} \times 6 = 45 \text{ m}^2$

de donde: $l = \dfrac{45 \times 2}{6 \times 3} = 5 \text{ m}$

Arista lateral: $\mathbf{x} = \sqrt{6^2 + 2{,}5^2} = \mathbf{6{,}5\ m}$

817. ¿Cuál es la longitud de la arista de un tetraedro regular cuya área total es de 36 m²?

Area total: $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \times 4 = 36$

de donde: $\mathbf{l} = \sqrt{\dfrac{36}{\sqrt{3}}} = \sqrt{12\sqrt{3}} = \mathbf{4{,}559\ m}$

818. ¿Cuál es la altura de un tetraedro regular que tiene 1 m² de área total?

Llamemos h *a la altura buscada y* a *a la arista. El área total está formada por* 4 *triángulos equiláteros de lado* a

$$4 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 100$$

$$a^2 = \sqrt{\frac{100\sqrt{3}}{3}}$$

La altura en función de la arista (n.º **901**) *es:*

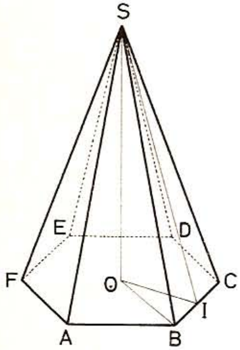


Fig. 489

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{100\sqrt{3}}{3}} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{200\sqrt{3}}}{3}$$

$$\mathbf{h = 6{,}204\ dm}$$

819. El área lateral de una pirámide exagonal regular (fig. 489) es de 180 m²; el lado de la base tiene 6 m. Calcular:

1.º La apotema de las caras.
2.º La altura de la pirámide.
3.º La longitud de una arista lateral.
4.º La inclinación de la apotema de las caras.
5.º La inclinación de una arista lateral.

• 1.º *Area lateral:* $\frac{6 \times 6}{2} \times ap = 180\ m^2$

Apotema: $\mathbf{ap = SI} = \frac{180 \times 2}{36} = \mathbf{10\ m}$

• 2.º *Altura de la pirámide:* $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2}$

pero $SB^2 = SI^2 + BI^2 = 100 + 9 = 109$

luego $\mathbf{SO} = \sqrt{109 - 36} = \mathbf{8{,}54\ m}$

• 3.º $\mathbf{SB} = \sqrt{109} = \mathbf{10{,}44\ m}$

• 4.º *La inclinación de las caras es igual a*

$$\frac{OS}{OI} = \frac{8{,}54}{3\sqrt{3}} = \mathbf{1{,}643}$$

• 5.º *Inclinación de una arista lateral*

$$\frac{OS}{OB} = \frac{8{,}54}{6} = \mathbf{1{,}423}$$

820. ¿Cuál es la base de una pirámide de 5,445 m³ de volumen y 3,63 m de altura?

Base: $\mathbf{B} = \frac{5{,}445 \times 3}{3{,}63} = \mathbf{4{,}5\ m^2}$

821. Una pirámide cuyo volumen es de 68 m^3 tiene 12,75 m de altura. ¿Cuál es el área de la base?

Base: $$\mathbf{B} = \frac{68 \times 3}{12{,}75} = \mathbf{16\ m^2}$$

822. El volumen de una pirámide pentagonal es de 86,85 m^3. ¿Cuál es su altura, si el polígono de la base tiene 17,37 m^2?

$$\mathbf{h} = \frac{86{,}85 \times 3}{17{,}37} = \mathbf{15\ m}$$

823. ¿Cuál es la altura de una pirámide cuyo volumen es de 1,35 m^3 y la superficie de la base 3 m^2?

$$\mathbf{h} = \frac{1{,}35 \times 3}{3} = \mathbf{1{,}35\ m}$$

824. Una pirámide tiene 27 m^3 de volumen. La base de forma trapecial tiene 17 m por suma de los lados paralelos, que distan 3 m. Calcular la altura de la pirámide.

Volumen: $$V = \frac{17 \times 3}{2} \times \frac{h}{3} = 27$$

$$\mathbf{h} = \frac{27 \times 2}{17} = \mathbf{3{,}176\ m}$$

825. ¿Cuál es la altura de una pirámide triangular de 8,6957 m^3 de volumen si los tres lados de la base miden respectivamente 2 m, 2,15 m y 1,85 m?

Area de la base: $B = \sqrt{3 \times 1 \times 0{,}85 \times 1{,}15} = 1{,}7124\ m^2$

Altura: $$\mathbf{h} = \frac{8{,}6957 \times 3}{1{,}7124} = \mathbf{15{,}23\ m}$$

826. ¿Qué arista ha de tener un tetraedro regular para que su volumen sea de 1 dm^3?

Según GEOM. **769:** $$\frac{1}{12} a^3 \sqrt{2} = 1000$$

$$\mathbf{a} = \sqrt[3]{6000\sqrt{2}} = \mathbf{20{,}4\ cm}$$

827. Un tronco piramidal regular tiene 980 cm^3 de volumen y 15 cm de alto; una de las bases, de forma cuadrada, tiene 6 cm de lado. Calcular el lado de la otra.

Llamemos V *al volumen,* h *a la altura,* l *al lado conocido y* x *al lado desconocido; tendremos:*

$$\frac{h}{3}(l^2 + x^2 + \sqrt{l^2x^2}) = V$$

o sea $$5\,(36 + x^2 + 6x) = 980$$
simplificando $$x^2 + 6x + 36 = 196$$
$$x^2 + 6x - 160 = 0$$
$$x = -3 \pm \sqrt{9 + 160} = -3 \pm 13$$

x = 10 cm. *La respuesta negativa no es aceptable.*

828. ¿Cuál es la profundidad de una zanja en forma de tronco de pirámide cuadrangular regular, si el lado de la abertura tiene 2,3 m, el del fondo 1,4 m y el volumen es 36,4 m³?

$$36{,}4 = \frac{h}{3}\,(2{,}3^2 + 1{,}4^2 + 2{,}3 \times 1{,}4)$$

$$\mathbf{h = 10{,}43\ m.}$$

829. Un tronco de pirámide tiene 1 dm³ de volumen y sus bases son triángulos equiláteros de 12 y 18 cm de lado. Calcular la altura.

$$1000 = \frac{h}{3}\left(\frac{18^2}{4}\sqrt{3} + \frac{12^2}{4}\sqrt{3} + \sqrt{\frac{18^2}{4}\sqrt{3} \times \frac{12^2}{4}\sqrt{3}}\right)$$

$$\mathbf{h} = \frac{1000\sqrt{3}}{171} = \mathbf{10{,}129\ cm}$$

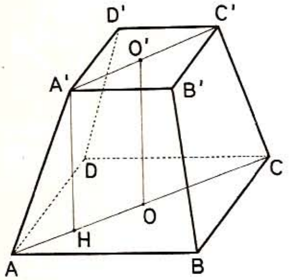


Fig. 490

830. El volumen de un obelisco es de 128,102 m³; este obelisco tiene la forma (fig. 490) de un tronco de pirámide de bases cuadradas y paralelas de 2,4 m y 72 cm de lado. Calcular:

1.º Su altura.
2.º La longitud de una arista lateral.

● 1.º $$128{,}102 = \frac{h}{3}\,(2{,}4^2 + 0{,}72^2 + 2{,}4 \times 0{,}72)$$

de donde

$$\mathbf{h = 48{,}052\ m}$$

● 2.º $$AH = AO - A'O' = 1{,}2\sqrt{2} - 0{,}36\sqrt{2} = 0{,}84\sqrt{2}$$

Arista lateral: $$\mathbf{AA'} = \sqrt{48{,}052^2 + 1{,}4112} = \mathbf{48{,}064\ m}$$

831. ¿Cuál es la longitud de una viga cuyas extremidades son rectángulos paralelos que tienen el uno 33 cm por 28 cm, y el otro 28 cm por 0,2375 m, si por esta viga se pagan 420 pts a razón de 300 pts el m³?

$$V = \frac{420}{0{,}3} = \frac{h}{3}\,(3{,}3 \times 2{,}8 + 2{,}8 \times 2{,}375 + 2{,}8\sqrt{3{,}3 \times 2{,}375})$$

$$\mathbf{h = 177{,}19\ dm = 17{,}719\ m}$$

832. ¿Cuál es el peso de una pirámide de asperón de 4 m² de base y 3 m de alto, si su densidad es de 2,2?

$$\mathbf{P} = V \times D = \frac{400 \times 30}{3} \times 2{,}2 = \mathbf{8800\ kg}$$

833. ¿Cuál es el peso de una pirámide cuadrangular regular de hierro de 2,59 m de alto, si el lado de la base tiene 58 cm? Densidad del hierro: 7,788.

$$\mathbf{P} = \frac{5{,}8^2 \times 25{,}9 \times 7{,}788}{3} = \mathbf{2261{,}832\ kg}$$

834. Una pirámide de base cuadrada tiene 23,48 m de lado y 46,18 m de altura. Suponiendo que esta pirámide sea de piedra de una densidad igual a 2,75, calcular su peso.

$$\mathbf{P} = \frac{234{,}8^2 \times 461{,}8 \times 2{,}75}{3} = \mathbf{23\ 337\ 888{,}75\ kg}$$

835. Calcular el peso de un pedrusco de granito cuya forma es la de un tronco de pirámide cuyas bases tienen respectivamente 3,55 m² y 0,78 m², si la altura del tronco mide 2,8 m y la densidad del granito es de 2,78.

$$\mathbf{P} = \frac{28}{3} (355 + 78 + \sqrt{355 \times 78}) \times 2{,}78 = \mathbf{14\ 685{,}81\ kg}$$

836. Un mausoleo tiene la forma de una pirámide truncada de siete caras y las bases paralelas 2,5 m² y 1,8 m². ¿Cuánto pesa este mausoleo, si la altura es de 3 m y la densidad de la piedra 2,419?

$$\mathbf{P} = \frac{3}{3} (2{,}5 + 1{,}8 + \sqrt{2{,}5 \times 1{,}8}) \times 2{,}419 = \mathbf{15{,}52998\ ton}$$

837. ¿Cuál es el peso de una viga de encina de 4,6 m de larga, si la suma de las bases es de 1,13 m², y su diferencia de 0,15 m²? Densidad de la encina: 0,69.

Base mayor: $\frac{1{,}13 + 0{,}15}{2} = 0{,}64\ m^2$

Base menor: $\frac{1{,}13 - 0{,}15}{2} = 0{,}49\ m^2$

$$\mathbf{P} = \frac{4{,}6}{3} (0{,}64 + 0{,}49 + \sqrt{0{,}64 \times 0{,}49}) \times 0{,}69 = \mathbf{1{,}788\ 02\ Tm}$$

838. ¿Cuál es el volumen de un tetraedro regular de 1 dm de arista?

$$\mathbf{V} = \frac{1}{12} \times 0{,}1^3 \sqrt{2} = \mathbf{0{,}117\ 850\ dm^3}$$

839. Un tronco de pirámide regular (fig. 491) de 4 m de alto, tiene bases cuadradas y paralelas de 3 y 5 m de lado. Calcular:

1.º La longitud de las aristas laterales de la pirámide.
2.º La altura de los cuatro trapecios.

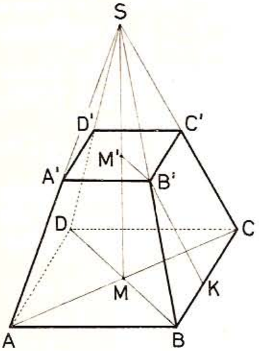


Fig. 491

● 1.º *Tenemos* (GEOM. **827**)

$$\frac{SM'}{SM} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{SM'}{SM' + 4} = \frac{3}{5} \quad \textit{de donde} \quad SM' = \frac{12}{2} = 6 \text{ m}$$

$$SM = SM' + M'M = 6 + 4 = 10 \text{ m}$$
$$SB^2 = SM^2 + MB^2$$
$$2 \cdot MB^2 = AB^2$$

$$MB^2 = \frac{AB^2}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ m}$$

$$\mathbf{SB} = \sqrt{SM^2 + MB^2} = \sqrt{100 + 12{,}5}$$

$$= \sqrt{112{,}5} = \mathbf{10{,}6\ m}$$

● 2.º *Altura de los trapecios:* $B'K = \sqrt{BB'^2 - BK^2}$

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{B'C'}{BC}; \quad \frac{SB'}{10{,}6} = \frac{3}{5}; \quad SB' = \frac{10{,}6 \times 3}{5} = 6{,}36 \text{ m}$$

$$BB' = 10{,}60 - 6{,}36 = 4{,}24 \text{ m}$$

$$BK = \frac{BC - B'C'}{2} = \frac{5 - 3}{2} = 1 \text{ m}$$

$$\mathbf{B'K} = \sqrt{4{,}24^2 - 1^2} = \mathbf{4{,}12\ m}$$

840. Las aristas laterales de un tronco de prisma triangular regular miden 2,5 m, 2,6 m y 2,65 m, y la base tiene 38 cm de lado. Hallar la altura de una pirámide equivalente y de base igual.

Volumen del tronco: $V_1 = B \times \dfrac{2{,}5 + 2{,}6 + 2{,}65}{3}$

Volumen de la pirámide: $V_2 = B \times \dfrac{h}{3}$

Igualando y simplificando

$$\mathbf{h} = 2{,}5 + 2{,}6 + 2{,}65 = \mathbf{7{,}75\ m}$$

841. Una pirámide (fig. 492) está limitada por una base cuadrada de 40 cm de lado y por cuatro triángulos equiláteros. Calcular:

1.º Su superficie total.
2.º Su altura.
3.º Su volumen.

La superficie se compone de un cuadrado y de cuatro triángulos equiláteros; luego:

● 1.º $\mathbf{AT} = 4^2 + 4^2\sqrt{3} = \mathbf{43{,}71\ dm^2}$

● 2.º *Altura* $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2}$

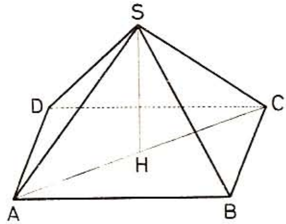


Fig. 492

Pero $$AH^2 = \left(\frac{4}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 8$$

Luego $$\mathbf{SH} = \sqrt{4^2 - 8} = \mathbf{2{,}828\ dm}$$

• 3.º $$\mathbf{V} = \frac{4^2 \times 2{,}828}{3} = \mathbf{15{,}083\ dm^3}$$

842. Una pirámide de nogal de forma exagonal regular (fig. 493) tiene 40 cm de altura, y el lado de la base 15 cm. Calcular:

1.º Su superficie total.
2.º Su volumen.
3.º Su peso, si la densidad del nogal es de 0,6.

Tomemos por unidad el decímetro.

• 1.º *La superficie total se compone del exágono de la base y de seis triángulos isósceles. Calculemos la apotema:*

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2}$$

pero $$OI = \frac{CB\sqrt{3}}{2} \quad (\text{Geom. } \mathbf{447})$$

y $$OI^2 = \frac{3CB^2}{4} = \frac{3 \times 1{,}5^2}{4} = 1{,}6875$$

luego $$SI = \sqrt{4^2 + 1{,}6875} = 4{,}205 \text{ dm}$$

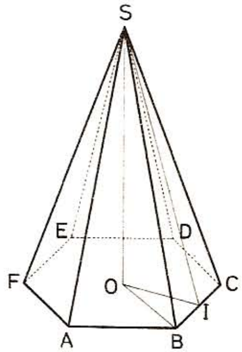


Fig. 493

$$\mathbf{AT} = \frac{3 \times 1{,}5^2\sqrt{3}}{2} + \frac{6 \times 1{,}5 \times 4{,}205}{2} = \mathbf{24{,}768 \quad dm^2}$$

• 2.º $$\mathbf{V} = \frac{3 \times 1{,}5^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{3} = \mathbf{7{,}794\,225\ dm^3}$$

• 3.º $$\mathbf{P} = 7{,}794\,225 \times 0{,}6 = \mathbf{4{,}677 \quad kg}$$

843. Una pirámide cuadrangular regular de granito tiene 3,6 m de alto y pesa 18 316,8 kg. ¿Cuál es la arista de la base? Densidad del granito: 2,65.

Volumen: $$V = \frac{18\,316{,}8}{2{,}65} = a^2 \times \frac{36}{3}$$

de donde: $$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{18\,316{,}8}{2{,}65 \times 12}} = \mathbf{24\ dm}$$

844. Las dos bases de un tronco de pirámide miden respectivamente 8 y 2 m². Construir un prisma equivalente de igual altura y de base cuadrada. ¿Cuál será el lado de esta base?

Llamando l *al lado del cuadrado y* h *a la altura común, tendremos:*

$$V = \frac{h}{3}(8 + 2 + \sqrt{8 \times 2}) = l^2h$$

de donde
$$l = \sqrt{\frac{14}{3}} = \mathbf{2{,}1625\ m}$$

845. El techo de un pabellón tiene la forma de una pirámide exagonal regular. ¿Cuántas tablas de 4 m de largo por 24 cm de ancho se necesitarán para cubrirlo, si el lado del pabellón tiene 3 m y la altura del techo 4,45 m?

La superficie del techo se compone de 6 *triángulos*

Apotema:
$$ap = \sqrt{4{,}45^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{19{,}8025 + 6{,}75} = 5{,}15 \text{ m}$$

$$AL = \frac{3 \times 5{,}15 \times 6}{2} = 46{,}35 \text{ m}^2$$

Area de una tabla:
$$4 \times 0{,}24 = 0{,}96 \text{ m}^2$$

Número de tablas:
$$\frac{46{,}35}{0{,}96} = \mathbf{49}$$

846. Hallar el volumen de la mayor de las pirámides de Egipto cuya base es un cuadrado de 230 m de lado, sabiendo que las caras laterales son triángulos equiláteros.

Altura:
$$SH = \sqrt{230^2 - \frac{230^2}{2}} = 230\sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{230}{\sqrt{2}} = 115\sqrt{2}$$

Volumen:
$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \times 230^2 \times 115\sqrt{2} = \mathbf{2867\,761{,}9\ m^3}$$

847. En un círculo de 10 m de radio se inscribe un triángulo equilátero. ¿Cuál sería el volumen de una pirámide que tuviera ese triángulo por base y de altura 12 m?

Lado triáng. equilátero inscrito (GEOM. **426**): $l = R\sqrt{3}$

Area base (GEOM. **550**):
$$B = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3 \times 10^2\sqrt{3}}{4} = 75\sqrt{3} \text{ m}^2$$

Volumen:
$$\mathbf{V} = 75\sqrt{3} \times \frac{12}{3} = \mathbf{519{,}6\ m^3}$$

848. La aguja de un campanario es una pirámide cuadrangular regular que se ha de empizarrar con pizarras de 24 cm de largo por 20 cm de ancho, de modo que se cubran entre sí en 1/3 de su superficie:

1.º ¿Cuántas pizarras se necesitarán, si la aguja tiene 10,5 m de arista y la base 2,8 m de lado?

2.º ¿Cuál es la altura de la aguja?

• 1.° *La superficie de la aguja se compone de cuatro triángulos isósceles cuyos lados se conocen.*

Tenemos: $A = 4\sqrt{119 \times 91 \times 14^2} = 4 \times 1456,9 \text{ dm}^2$

Area útil de una pizarra: $\dfrac{2,4 \times 2 \times 2}{3} = 3,2 \text{ dm}^2$

Número de pizarras: $\dfrac{4 \times 1456,9}{32} = 1822$ *pizarras*

• 2.° *Altura:* $\mathbf{h} = \sqrt{10,5^2 - \dfrac{2,8^2}{2}} = \mathbf{10,31\ m}$

849. Un obelisco de granito en forma de un tronco de pirámide de bases cuadradas tiene por coronamiento una piramidita. Las bases miden de lado respectivamente 2,42 m y 1,5 m y su distancia es de 21,6 m. Hallar el peso de este obelisco que tiene 22,8 m de altura total. Densidad del granito: 2,75.

Vol. tronco: $V_1 = \dfrac{21,6}{3}(2,42^2 + 1,5^2 + 1,5 \times 2,42) = 84,502\ 08 \text{ m}^3$

Altura de la piramidita: $22,8 - 21,6 = 1,2 \text{ m}$

Vol. de la piramidita: $V_2 = \dfrac{1,2}{3} \times 1,5^2 = 0,9 \text{ m}^3$

Volumen total: $V = 84,502\ 08 + 0,9 = 85,402\ 08 \text{ m}^3$
Peso: $\mathbf{P} = 85\ 402,08 \times 2,75 = \mathbf{234\ 855,72\ kg}$

850. Hallar la altura de una pirámide regular de base cuadrada y de 6,783 m² de área, si cada una de las aristas tiene 3,89 m.
Lado de la base al cuadrado: 6,783 m.
La altura se calcula como en el problema **846.**

Altura: $\mathbf{h} = \sqrt{3,89^2 - \dfrac{6,783}{2}} = \mathbf{3,426\ m}$

851. Las dos bases de una chimenea forman cuadrados de 1,4 m y 0,6 m de lado; la altura es de 12,5 m. Hallar el volumen de la mampostería, descontando el vacío interior que es de 44 cm por 38 cm.
El volumen de la mampostería es la diferencia de dos troncos de pirámide de igual altura.

Vol. exterior: $\dfrac{12,5}{3}(1,4^2 + 0,6^2 + 1,4 \times 0,6) = 13,167 \text{ m}^3$

Vol. interior: $\dfrac{12,5}{3}(0,44^2 + 0,38^2 + 0,44 \times 0,38) = 2,105 \text{ m}^3$

Volumen de la mampostería: $\mathbf{11,062\ m^3}$

VIII. Prismas semejantes

852. El área de un prisma tiene 22,04 m². ¿Cuál es el área de un prisma semejante cuyas dimensiones son la mitad de las primeras?

Estando las dimensiones en la relación de 2 *a* 1, *las áreas estarán en la relación de* 4 *a* 1.

Area del prisma: $$\mathbf{A} = \frac{22{,}04}{4} = \mathbf{551\ m^2}$$

853. ¿Qué lado se ha de dar a un cubo para que su superficie sea la mitad de la de otro cubo que tiene 16 m de lado?

Tenemos $$\frac{A'}{A} = \frac{x^2}{16^2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{16^2}{2}} = 8\sqrt{2} = \mathbf{11{,}3136\ m}$$

854. Un prisma tiene 12,25 m² de área lateral. ¿Cuál es el área de otro semejante cuyas aristas tienen una longitud tres veces mayor que las del primero?

El **área** *será* 9 *veces mayor o sea* **110,25 m².**

855. Se trata de reducir un prisma triangular de 3,5 m de alto y 2 m² de base a otro semejante que tenga sólo 1 m de alto. ¿Cuál será el área de su base?

Las áreas de las bases son proporcionales a los cuadrados de sus dimensiones homólogas.

Luego $$\frac{2}{x} = \frac{3{,}50^2}{1^2}$$

de donde: $$\mathbf{x = 0{,}1633\ m^2}$$

856. ¿En qué proporción están las áreas y volúmenes de dos cubos que tienen respectivamente 2 y 4 m de lado?

Al estar los lados en la relación de 2 *a* 4 *o de* 1 *a* 2.

Las **áreas** *estarán en la relación de* **1** *a* **4.**

Los **volúmenes** *en la relación de* **1 a 8.**

857. Si se hacen los planos de un edificio según la escala de 1 cm por metro, ¿cuáles serían, con relación a este plano, las dimensiones, áreas y volúmenes verdaderos?

- 1.º *Las dimensiones son* 100 *veces mayores.*
- 2.º *Las áreas son* 10.000 *veces mayores.*
- 3.º *Los volúmenes son* 1 000 000 *de veces mayores.*

858. Un aprendiz de carpintero tiene que hacer una caja semejante a otra cuyas dimensiones son: altura, 30 cm; anchura, 48 cm; longitud, 60 cm. Esta caja ha de tener 4 cm menos en la altura, y el aprendiz hace la caja con 4 cm menos en cada dimensión. ¿Cuál es el error cometido?

Siendo las dos cajas sólidos semejantes, las dimensiones están en la misma relación.

Sea la anchura x *cm y la longitud* y *cm.*

$$\frac{30}{26} = \frac{48}{x} = \frac{60}{y}$$

De las dos primeras razones resulta: $x = 41{,}6$ cm

De la primera y tercera: $y = 52$ cm

Error cometido en la anchura: $44 - 41{,}6 =$ **2,4 cm**

Error cometido en la longitud: $56 - 52 =$ **4 cm**

859. La arista de un cubo tiene 0,37 m. ¿Cuál es la arista de un cubo doble?

$$\frac{x^3}{0{,}37^3} = \frac{2}{1}$$

de donde $\mathbf{x} = \sqrt[3]{0{,}37^3 \times 2} = 0{,}37\sqrt[3]{2} = \mathbf{0{,}466\ m}$

860. Un paralelepípedo tiene 16 m³ de volumen. ¿Cuál será el volumen de otro semejante de aristas tres veces mayores?

$$\frac{V}{16} = \frac{3^3}{1^3}$$

de donde: $\mathbf{V} = 16 \times 3^3 = \mathbf{432\ m^3}$

861. ¿Cuáles son las dimensiones de una caja en forma de prisma regular de base cuadrada cuya capacidad es de 4 m³ y su altura el triple del lado de la base?

Llamando x *al lado de la base, la altura será* 3x.

Volumen: $x^2 \times 3x = 3x^3 = 4$

Lado: $\mathbf{x} = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\frac{36}{27}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{36} = \mathbf{1{,}10\ m}$

Altura: $\mathbf{3x = 3{,}30\ m}$

862. Las dimensiones de dos paralelepípedos de madera son: altura, 2 y 3 m; longitud, 6 y 7 m; anchura, 3,5 y 4,5 m. ¿Son semejantes? En caso contrario, ¿qué se ha de modificar en la longitud y anchura del menor para hacerlos semejantes, sin que cambie la altura?

No son semejantes los paralelepípedos por ser desiguales las relaciones de las dimensiones

$$\frac{2}{3} \neq \frac{6}{7} \neq \frac{3{,}5}{4{,}5}$$

Representemos por x, y *la longitud y anchura del paralelepípedo menor, semejante al mayor; tendremos:*

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{7} = \frac{y}{4{,}5}$$

de donde $x = 4{,}67$ m; $y = 3$ m

Hay que disminuir la longitud en $6 - 4{,}67 = \mathbf{1{,}33\ m}$
Hay que disminuir la anchura en $3{,}5 - 3 = \mathbf{0{,}50\ m}$

863. Un paralelepípedo tiene 5 m de largo, 4 m de ancho y 3 m de alto; otro semejante tiene 6 m de ancho. ¿Cuáles serán las demás dimensiones?

Representando por x *la longitud pedida, por* y *la altura, tendremos:*

$$\frac{4}{6} = \frac{5}{x} = \frac{3}{y}$$

de donde:

$$\mathbf{x} = \frac{5 \times 6}{4} = \mathbf{7{,}5\ m}$$

$$\mathbf{y} = \frac{6 \times 3}{4} = \mathbf{4{,}5\ m}$$

864. Tres cubos tienen de lado respectivamente 3, 4 y 5 m. Hallar el lado de otro cubo equivalente a los tres primeros.

Lado del cubo pedido: $\mathbf{l} = \sqrt[3]{3^3 + 4^3 + 5^3} = \mathbf{6\ m}$

865. El peñón errático de Pravolla, en los Alpes, tiene de volumen 17 000 m³. ¿Cuáles serían sus dimensiones si se quisiera labrar con él un paralelepípedo de bases cuadradas y de altura doble del lado de las bases? Se concede que para esta operación el volumen del peñón se reduce a los 9/10 del volumen primitivo.

Volumen del paralelepípedo: $\dfrac{17\,000 \times 9}{10} = 15\,300\ \text{m}^3$

Representando por x *el lado de la base, la altura será* 2x

Volumen: $x^2 \times 2x = 2x^3 = 15\,300$

Lado de la base: $\mathbf{x} = \sqrt[3]{\dfrac{15\,300}{2}} = \mathbf{19{,}7\ m}$

Altura: $\mathbf{2x} = \mathbf{39{,}4\ m}$

IX. Pirámides semejantes

866. Hallar el lado de un tetraedro regular de 10 m³ de volumen.

Volumen (GEOM. **769**): $\dfrac{a^3}{12}\sqrt{2} = 10$

$$\mathbf{a} = \sqrt[3]{\frac{10 \times 12}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\frac{120\sqrt{2}}{2}} = \sqrt[3]{60\sqrt{2}} = \mathbf{4394\ m}$$

867. Un tetraedro regular de 1 m de lado tiene 0,117 851 m³ de volumen. Hallar el volumen de los tetraedros regulares cuyos lados miden: 1.º 0,5 m; 2.º 0,1 m; 3.º 4,5 m.

Los lados de estos tetraedros son, respecto del tetraedro dado, como

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{9}{2}$$

Los volúmenes se hallarán multiplicando 0,117 851 *por el cubo de estas relaciones, o sea por*

$$\frac{1}{8}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{729}{8}$$

1.° **0,014 731 m³**
2.° **0,000 117 m³**
3.° **10,739 172 m³**

868. Una pirámide triangular regular tiene de altura 4,5 m y por lado de la base 2,25 m. Hallar la longitud del lado de la base de otra semejante que tenga 3 m de alto.

De la semejanza de las pirámides resulta:

$$\frac{x}{2{,}25} = \frac{3}{4{,}5}$$

de donde: $\mathbf{x = 1{,}5\ m}$

869. Hallar la altura y el volumen de dos pirámides semejantes (fig. 494) cuyas bases cuadradas tienen 2025 y 1681 m² de área, suponiendo que la inclinación de sus aristas laterales es de 1,4142.

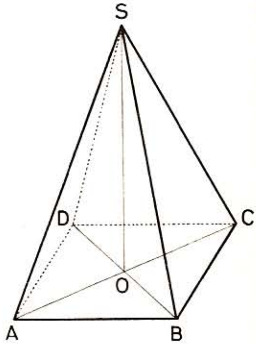


Fig. 494

● 1.° *Inclinación:*

$$\frac{SO}{AO} = 1{,}4142 = \sqrt{2}; \quad SO = AO\sqrt{2}$$

Pero AO, *en la pirámide, se deduce de la relación*

$$2AO^2 = AB^2; \quad AO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{2}} = \frac{45}{\sqrt{2}}$$

Altura 1.ª pirámide: $\mathbf{SO} = \frac{45}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \mathbf{45\ m}$

Volumen 1.ª pirámide: $\mathbf{V} = \frac{2025 \times 45}{3} = \mathbf{30\ 375\ m^3}$

● 2.° *Comparamos las alturas y volúmenes con lados homólogos:*

$$\frac{h_1}{45} = \frac{\sqrt{1681}}{\sqrt{2025}} = \frac{41}{45}; \qquad \mathbf{h_1 = 41\ m}$$

$$\frac{V_1}{30\ 375} = \frac{41^3}{45^3} \qquad \mathbf{V_1} = \frac{41^3 \times 45^3}{45^3 \times 3} = \mathbf{22\ 973\ 2/3\ m^3}$$

870. Se quieren hacer seis zócalos de piedra de sillería sobrepuestos en gradas de igual altura, que es de 1,8 m para los seis zócalos. El primero debe tener 6 m de lado e introducirse 42 cm en el que le sigue y así sucesivamente. Hallar la altura de cada zócalo, la longitud del lado de la base de cada uno y el volumen total (fig. 495).

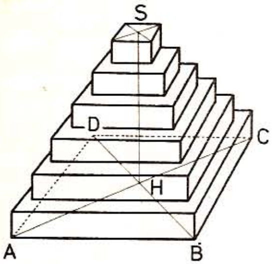


Fig. 495

- 1.º *Altura de cada zócalo:* 1,8 : 6 = **0,3 m.**
- 2.º *Lado de la base:*

1.º	**6 m**	3.º	**4,32 m**	5.º	**2,64 m**
2.º	**5,16 m**	4.º	**3,48 m**	6.º	**1,80 m**

- 3.º *Volumen del* 1.º: $6^2 \times 0,3 =$ **10,800 m³**
  » *del* 2.º: $5,16^2 \times 0,3 =$ **7,987 68 m³**
  » *del* 3.º: $4,32^2 \times 0,3 =$ **5,598 72 m³**
  » *del* 4.º: $3,48^2 \times 0,3 =$ **3,633 12 m³**
  » *del* 5.º: $2,64^2 \times 0,3 =$ **2,090 88 m³**
  » *del* 6.º: $1,8^2 \times 0,3 =$ **0,972 m³**

Volumen total: **31,082 40 m³**

871. ¿A qué distancia del vértice debe cortarse una pirámide paralelamente a la base para que resulten dos partes equivalentes?

Sean P *y* P′ *las pirámides total y parcial;* h *y* h′ *las alturas respectivas:*

$$\frac{h'^3}{h^3} = \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{P}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{h'}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

de donde:

$$\mathbf{h}' = h \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{h} \times \mathbf{0,7937}$$

872. Un tronco de pirámide tiene 855 cm³ de volumen y 15 cm de altura; la base menor es un cuadrado de 6 cm de lado. Hallar el volumen de la pirámide total.

Calculemos el lado x *de la base inferior del tronco.*

Tenemos (GEOM. **839**): $15/3 \times (36 + x^2 + 6x) = 855$

de donde $x^2 + 6x - 135 = 0$

$$x = -3 + \sqrt{9 + 135} = -3 + 12 = 9 \text{ cm}$$

La respuesta negativa no es aceptable ya que se trata de una longitud. Llamemos h *a la altura de la pirámide deficiente.*

Tenemos: $\dfrac{15 + h}{h} = \dfrac{9}{6}; \quad h = 30$ cm

Vol. pirámide total: $\mathbf{V} = \dfrac{9^2 \times (30 + 15)}{3} = \mathbf{1215\ cm^3}$

873. Un tronco de pirámide tiene por volumen 1 dm³ y sus bases son triángulos equiláteros de 12 y 7 cm de lado. Hallar la altura y el volumen de la pirámide total.

Llamemos a la altura del tronco h_1. *Tendremos:*

$$\frac{h_1}{3}\left(\frac{12^2\sqrt{3}}{4} + \frac{7^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{12^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{7^2\sqrt{3}}{4}}\right) = 1000$$

de donde $$\frac{277h_1\sqrt{3}}{12} = 1000 \qquad h_1 = \frac{4000\sqrt{3}}{277} = 25{,}01 \text{ cm}$$

Llamando x *a la altura de la base deficiente, tenemos:*

$$\frac{x}{x + 25{,}01} = \frac{7}{12} \quad \textit{de donde} \quad x = 35{,}01 \text{ cm}$$

Altura de la pirámide: $\mathbf{h} = 25{,}01 + 35{,}01 = \mathbf{60{,}02\ cm}$

Volumen de la pirámide: $\mathbf{V} = \dfrac{12^2\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{60{,}02}{3} = \mathbf{1247{,}45568\ cm^3}$

874. Se corta una pirámide por un plano que pasa por el tercio de las aristas, a contar desde el vértice, y paralelo a la base. ¿Cuántas veces contiene la pirámide primitiva a la pirámide deficiente?

La pirámide primitiva contiene **27** *veces a la pirámide deficiente, pues*

$$\frac{V}{V'} = \frac{3^3}{1} = \frac{27}{1}$$

875. Una pirámide de 36 cm de altura tiene por base un exágono regular de 12 cm de lado. ¿A qué distancia del vértice se halla una sección paralela a la base si el área de la sección es de 1 dm²?

Area del exágono base: $$\frac{3 \times 12^2\sqrt{3}}{2} = 374{,}112 \text{ cm}^2$$

Según GEOM. **754:** $$\frac{36^2}{d^2} = \frac{374{,}112}{100}$$

de donde: $$\mathbf{d} = \sqrt{\frac{36^2 \times 100}{374{,}112}} = \frac{360}{19{,}342} = \mathbf{18{,}61\ cm}$$

876. En la misma pirámide, ¿a qué distancia se halla la sección si el volumen del tronco restante es de 2 dm³?

Vol. de la pirámide total: $V_1 = 374{,}112 \times \dfrac{36}{3} = 4489{,}344 \text{ cm}^3.$

Vol. de la pirámide deficiente: $V_2 = 4489{,}344 - 2000 = 2489{,}344 \text{ cm}^3.$

Por tanto $$\frac{d^3}{36^3} = \frac{2489{,}344}{4489{,}344}$$

de donde $$\mathbf{d} = \sqrt[3]{\frac{36^3 \times 2489{,}344}{4489{,}344}} = 36 \times 0{,}822 = \mathbf{29{,}592\ cm}$$

877. La parte principal del obelisco de Luqsor, que se halla en París, es un tronco de pirámide de 21,6 m de altura. Las bases cuadradas tienen, respectivamente, 2,42 m y 1,54 m de lado. ¿Cuál sería la altura de la pirámide total?

Las alturas son proporcionales a las aristas; llamando H *a la altura de la pirámide total y* h *a la altura de la pirámide deficiente, tendremos:*

$$\frac{2{,}42}{1{,}54} = \frac{H}{h}$$

Restando cada consecuente de su antecedente, resultará:

$$\frac{2{,}42 - 1{,}54}{1{,}54} = \frac{H - h}{h} = \frac{21{,}6}{h}$$

por lo cual $h = 37{,}8$ m

y $\mathbf{H} = 37{,}8 + 21{,}6 = \mathbf{59{,}4\ m}$

878. Una estatua maciza de bronce, de tamaño natural, pesa 482 kg. ¿Cuánto pesará otra estatua cuyo tamaño sea la cuarta parte de la primera?

El **peso** *será* 64 *veces menor, o sea* **7,531 kg**

879. Las chapas de blindaje, fabricadas en el Creuzot, pesan hasta 3594,24 kilogramos. ¿Cuáles son las dimensiones de una de ellas de forma paralelepipédica, si las aristas son entre sí como los números 6, 80 y 120? Densidad del hierro: 7,8.

Dimensiones: $6x, \quad 80x, \quad 120x$

Volumen de la chapa: $6x \times 80x \times 120x = \dfrac{3594{,}24}{7{,}8}$

$$x^3 = \frac{3594{,}24}{7{,}8 \times 6 \times 80 \times 120} = 0{,}008; \quad x = 0{,}2 \text{ dm}$$

$$6x = \mathbf{1{,}2\ dm} \qquad 80x = \mathbf{16\ dm} \qquad 120x = \mathbf{24\ dm}$$

880. En la fábrica de Essen, donde se funden los cañones Krupp, se obtienen masas de acero fundido que pesan hasta 37 000 kg. ¿Cuáles serían las dimensiones de una de ellas, de forma prismática, con base rectangular, y cuyas aristas son entre sí como los números 3, 4 y 5? Densidad del acero: 7,829.

El raciocinio es análogo al anterior:

1,286 m, 1,714 m, 2,143 m

881. En la misma fábrica funciona un martinete que pesa 50 000 kg. ¿Cuáles son sus dimensiones, sabiendo que tiene la forma de una pirámide truncada de base cuadrada, cuyos lados son entre sí como 4 y 3 1/2 y cuya altura es igual a dos veces y media el lado de la base mayor? Densidad del hierro: 7,788.

Dimensiones: $4x, \quad 3{,}5x \quad 10x$ *(en metros)*

Volumen × *densidad* = *peso*

$$\frac{10x}{3}(16x^2 + 12{,}25x^2 + 14x^2)\ 7{,}788 = 50$$

$$x^3 = \frac{50 \times 3}{7{,}788 \times 10 \times 42{,}25}; \quad x = 0{,}357 \text{ m}$$

$$4x = \mathbf{1{,}428\ m}\ ; \quad 3{,}5x = \mathbf{1{,}25\ m}\ ; \quad 10x = \mathbf{3{,}57\ m}$$

882. Un martillo de hierro colado tiene las dimensiones expresadas en la figura 496 y la forma de prisma cuadrangular que termina en otro de base trapecial. ¿Cuál es el volumen de este martillo y cuáles serían las dimensiones de otro semejante que pesase 10,29 kg? Densidad del hierro colado: 7,202.

● 1.º *El volumen del martillo consta del volumen del prisma cuadrangular, aumentado con el volumen del prisma de base trapecial, menos el volumen del hueco prismático donde se introduce el mango.*

Prisma cuadrangular:

$$52 \times 41 \times 50 = 106\,600 \text{ mm}^3$$

Prisma de base trapecial:

$$\left(\frac{5 + 41}{2}\right) \times 50 \times 52 = 59\,800 \text{ mm}^3$$

Volumen total:

$$166\,400 \text{ mm}^3$$

Volumen del hueco:

$$22 \times 14 \times 52 = 16\,016 \text{ mm}^3$$

Volumen real: **150 384 mm³**

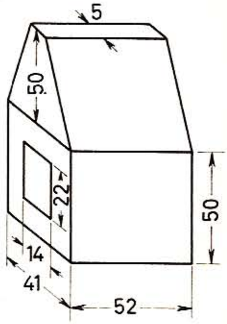


Fig. 496

● 2.º *Los volúmenes de los martillos son entre sí como los cubos de las dimensiones homólogas, o sea:*

$$\frac{150{,}384}{10\,290 : 7{,}202} = \frac{52^3}{x^3} = \frac{50^3}{y^3} = \frac{41^3}{z^3} = \frac{22^3}{v^3} = \frac{14^3}{u^3} = \frac{5^3}{t^3}$$

de donde **x = 110 mm** ; **y = 106 mm** ; **z = 87 mm** ; **v = 47 mm**; **u = 30 mm** ; **t = 11 mm.**

883. Con la hulla extraída durante el año 1875 se hubiera podido construir una pirámide exagonal regular de 1 km de lado y 200 millones de toneladas de peso. ¿Cuál sería la altura de esta pirámide? Densidad de la hulla: 1,135.

Volumen de la pirámide: 200 000 000 : 1,135 m³

Luego
$$\frac{h}{3}\left(\frac{3 \times 1000^2}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{200\,000\,000}{1{,}135}$$

$$\mathbf{h} = \frac{400}{1135\sqrt{3}} = \mathbf{203{,}47\ m}$$

884. ¿Cuáles serían las dimensiones de una pirámide semejante a la anterior, construida con el cobre extraido durante el mismo año, si la producción total se evalúa en 70 000 toneladas? Densidad del cobre: 8,788.

Llamando x *al lado de la base y* h *a la altura, tendremos, comparando los volúmenes:*

$$\frac{200\,000\,000 : 1{,}135}{70\,000 : 8{,}788} = \frac{1000^3}{x^3} = \frac{203{,}47^3}{h^3}$$

de donde: **x = 76,74 m** **h = 15,6 m**

X. Demostrar las siguientes proposiciones

Prisma

885. Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en sus puntos medios.

Sea el paralelepípedo AG (fig. 497). *Por dos aristas opuestas* BF *y* DH *tracemos un plano. Por ser estas dos rectas iguales y paralelas, el cuadrilátero* BFHD *es un paralelogramo y las diagonales* BH *y* DF *se cortan en su punto medio.*

Si dos diagonales cualesquiera se cortan en sus puntos medios, todas las diagonales tienen que pasar por un mismo punto, que es el punto medio de cada una de ellas.

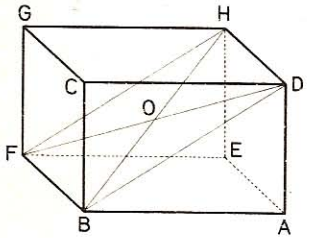


Fig. 497

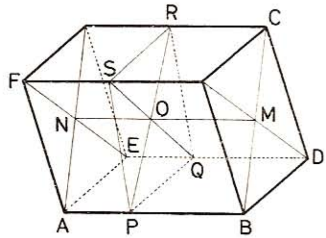


Fig. 498

886. Los dos planos diagonales que pasan por las aristas paralelas de un paralelepípedo le descomponen en cuatro partes equivalentes.

En efecto, en el paralelepípedo AC (fig. 498), *los dos planos* ABC, DEF *se cortan según la recta* MN, *paralela a la* AB; *pues el plano* ABC *es paralelo a la recta* DE *y, por tanto, la intersección de los planos* DEF *y* ABC, *esto es, la recta* MN, *será paralela a la* DE *o a la* AB.

Además, el punto M *es el punto de concurso de las diagonales del paralelogramo* BC. *Luego los cuatro triángulos* BMD, DMC *etc., son equivalentes* **(520 bis).**

Y, en consecuencia, **los prismas** *triangulares* BMDA, DMCE, FCMN, FMBA **son equivalentes,** *ya que tienen la misma altura y bases equivalentes.*

887. Uniendo los puntos de intersección de las diagonales de dos caras opuestas de un paralelepípedo, la recta de unión contiene todos los puntos de intersección de las diagonales de toda sección plana trazada entre las mencionadas caras.

En efecto, la recta MN *que une los puntos de intersección de las diagonales de dos caras opuestas del paralelepípedo* AC *puede tomarse como intersección de los planos* ABC, EDF (fig. 498).

Consideremos la sección plana PQRS *trazada entre las caras opuestas* BMD, ANE *del paralelepípedo* AC. *El plano diagonal* ABC *corta a dicha sección según la diagonal* PR, *y al plano diagonal* EDF, *según la diagonal* QS.

Por consiguiente, el punto de concurso de las diagonales PR *y* QS *se halla sobre la recta* MN.

La recta **MN** *es, por tanto,* **el lugar geométrico** *de los centros de los paralelogramos que se obtienen al trazar secciones planas entre las caras opuestas* BMD *y* ANE *del paralelepípedo* AC.

888. Si en un prisma triangular se traza un plano paralelo a una de las caras laterales, dicha cara y la sección son proporcionales a sus distancias respectivas a la arista opuesta.

Evidentemente un plano, tal como el FGIH (fig. 499), *paralelo a la cara* BE *del prisma triangular* ABCE, *determina un paralelogramo.*

Ahora bien, los paralelogramos BCED *y* FGIH *tienen una dimensión común,* BD = FH, *y sus ángulos son respectivamente iguales.*

Por tanto, sus áreas serán proporcionales a las otras dos dimensiones; luego:

$$\frac{BCED}{FGIH} = \frac{BC}{FG}$$

y también
$$\frac{BC}{FG} = \frac{AB}{AF} = \frac{AJ}{AK}$$

suponiendo que AJ *y* AK *sean las distancias respectivas del punto* A *a las caras* BCED *y* FGIH.

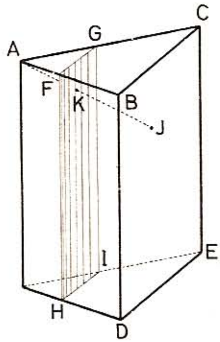


Fig. 499

En consecuencia:
$$\frac{BCED}{FGIH} = \frac{AJ}{AK}$$

889. En un cubo, el plano que pasa por el punto medio de tres aristas no paralelas y no concurrentes corta al sólido según un exágono regular.

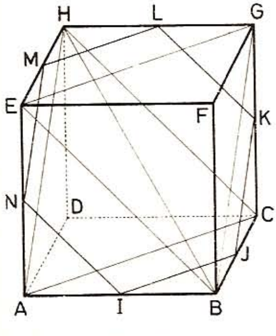


Fig. 500

Consideremos el plano trazado por los puntos medios I, J, K (fig. 500), *de tres aristas no paralelas, dos a dos, y que no pertenecen a un mismo ángulo sólido.*

Tracemos las diagonales BE, BG, GE *de las tres caras del ángulo sólido* F, *y la diagonal* AC.

La recta IJ, *que une los puntos medios de* BA *y* CB, *es paralela a la recta* AC *e igual a la mitad de la misma. También* JK *es paralela a* BG *e igual a su mitad.*

Luego el plano IJK, *trazado por rectas paralelas a* EG *y* BG, *es paralelo a los planos* BEG *y* ACH. *Por lo tanto,* KL *y* CH *son paralelas como intersecciones de dos planos paralelos* IJKL *y* ACH, *por un tercero* CGH.

Pero K *es el punto medio de* CG; *luego* L *es el punto medio de* GH, *y* KL = CH/2, *etc. Por consiguiente, el plano* IJK *pasa por* L, M, N, *puntos medios de los lados correspondientes.*

El exágono obtenido es regular, pues cada lado es la mitad del lado de un triángulo equilátero, y los ángulos son iguales, como suplementos de los ángulos de un *triángulo equilátero. En efecto, la recta* IJ *es paralela a* EG; JK *es paralela a* BG; *luego el ángulo* IJK *es el suplemento del ángulo* BGE.

890. ¿A qué distancia del vértice hay que cortar una pirámide, paralelamente a la base, para que las dos porciones resulten equivalentes?

Sea P *la pirámide total,* P′ *la pirámide parcial;* h *y* h′ *las alturas respectivas. Tenemos la relación:*

$$\frac{h'^3}{h^3} = \frac{P'}{P} = \frac{1}{2}; \qquad \frac{h'}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

De donde $\mathbf{h'} = h \times \mathbf{0{,}7937}$

Nota. —*Puede escribirse también:*

$$\frac{h'}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

luego $\mathbf{h'} = \dfrac{\mathbf{h}}{\mathbf{2}}\sqrt[3]{\mathbf{4}}$

891. Demostrar geométricamente las fórmulas siguientes (fig. 501):

$$\text{I.} \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$\text{II.} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

• I. *Sobre una misma recta tómese, a continuación una de otra, las longitudes* BC = a, CA = b *y constrúyase un cubo que tenga por arista la suma* (a + b). *Sea el cubo* AD.

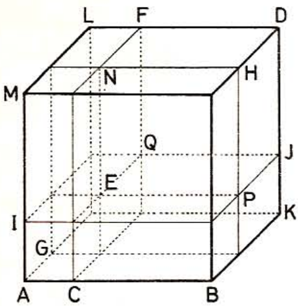


Fig. 501

Tomemos sobre las otras dos dimensiones del cubo, y a partir del vértice A, *longitudes* AI = = AG = b *y por los puntos* C, G, I *tracemos planos paralelos respectivamente a las caras* AL, BM, AK, *los cuales descompondrán al exaedro* AD *en ocho partes, a saber:*

1.º *El cubo* ED = a^3.

2.º *Tres paralelepípedos análogos al* EL, *cada uno de los cuales descansa sobre una de las caras* EF, FJ, EH *del cubo* ED; *de aquí que la suma de ellos sea* $3a^2b$.

3.º *Tres paralelepípedos análogos al* EM, *o sea* $3ab^2$.

4.º *El cubo* AE = b^3.

Por tanto $\mathbf{a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

• II. *Supongamos que en la figura* 501 *sea* AB = a, AC = b. *El cubo que tiene por arista* (a − b), *viene ahora representado por el* ED.

1.º *Separemos del cubo* AD *tres paralelepípedos análogos al* AF, *o sea los paralelepípedos* AF, AH, AJ, *cuyo volumen total es* $3a^2b$.

2.º *Procediendo así, hemos separado los paralelepípedos* AN, AP, AQ, *dos veces, y el cubo* AE, *tres veces; habrá pues que añadir una vez los cuerpos* AN, AP, AQ *y dos veces el cubo* AE, *o sea en junto* $3ab^2 + 2b^3$.

3.º *En esta última operación, al agregar una vez los paralelepípedos* AN, AP, AQ, *hemos agregado tres veces el cubo* AE; *habrá que rebajar, por tanto, estos valores, es decir,* $3b^3$.

En resumen, se tendrá que:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + 2b^3 - 3b^3\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

892. El volumen de un prisma triangular es igual al producto de una cara lateral cualquiera, por la mitad de la distancia de esta cara a la arista opuesta (figura 502).

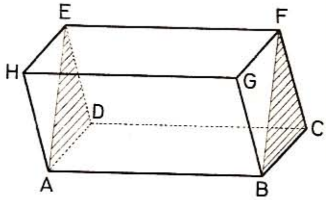


Fig. 502

En efecto, sabido es que un prisma triangular es equivalente a la mitad de un paralelepípedo de igual base y de la misma altura, y como en un paralelepípedo podemos tomar como bases dos caras opuestas cualesquiera, de aquí se sigue que el volumen del paralelepípedo, duplo del prisma triangular dado, sea igual al producto del área de una cara lateral del prisma por la distancia de esta cara a la arista opuesta. Luego el volumen de un prisma triangular es igual al producto de una cara lateral cualquiera por la mitad de la distancia de esta cara a la arista opuesta.

893. El volumen de un prisma regular es igual al producto del área lateral por la mitad de la apotema de la base (fig. 503).

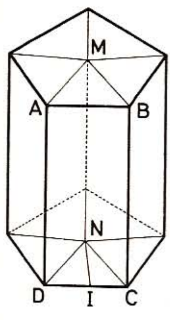


Fig. 503

Por el eje MN *de un prisma regular de* n *caras, y por cada arista lateral del mismo, hagamos pasar sucesivamente planos que le descompondrán en* n *prismas triangulares iguales al* DNCAMB.

Ahora bien, si NI *es la apotema de la base, será perpendicular a la cara* ABCD, *y el volumen del prisma triangular* DNCAMB *será:*

$$\textit{Area}\ \mathrm{ABCD} \times \frac{\mathrm{NI}}{2} \qquad (\text{n.º } \mathbf{892})$$

de donde

$$\mathrm{n} \times (\mathrm{DNCAMB}) = \mathrm{n} \times (\textit{área}\ \mathrm{ABCD}) \times \frac{\mathrm{NI}}{2}$$

o sea:

$$\textit{volumen del prisma regular} = \textit{área lateral} \times \frac{\mathrm{NI}}{2}$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{AL} \times \mathbf{ap}}{\mathbf{2}}$$

894. La suma de los cuadrados de las proyecciones de un segmento sobre tres ejes ortogonales dos a dos, es igual al cuadrado de dicho segmento.

Siempre podremos suponer que el segmento arranca del punto de concurso de los tres ejes ortogonales; pues siempre será posible desplazar los ejes paralelamente a sí mismos hasta disponerlos de esa suerte, quedando en tal desplazamiento las proyecciones sin variación alguna en sus valores o magnitudes.

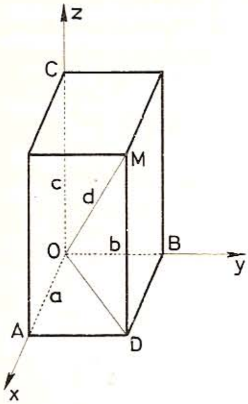


Fig. 504

Sean a, b, c (fig. 504) *las proyecciones del segmento* OM *o* d *sobre los ejes ortogonales* ox, oy, oz. *Se tendrá, sucesivamente:*

$$a^2 + b^2 = OD^2$$
$$OD^2 + c^2 = d^2$$
de donde $$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 = \mathbf{d}^2$$

Esta propiedad equivale a esta otra: En todo paralelepípedo rectángulo, el cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres dimensiones.

Pirámide

895. Los segmentos que unen los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro se cruzan en un mismo punto, que es el punto medio de cada uno de ellos (fig. 505).

Sea el tetraedro VABC. *Consideremos el segmento* DE *que une los puntos medios de las aristas opuestas* AB, VC. *Digo que uno cualquiera de los segmentos que unen dos pares de aristas opuestas restantes,* GF, *por ejemplo, pasará por el punto medio* I, *del* DE *y que, asimismo, el punto* I *es el punto medio de* GF.

En efecto, la figura DFEG *es un paralelogramo, ya que* DF *y* GE *son paralelos a* AC *e iguales a la mitad de éste, respectivamente, por lo que sus diagonales* DE *y* GF *se cortan en su punto medio.*

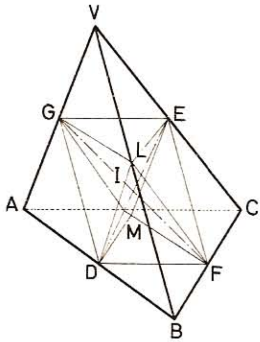


Fig. 505

896. Los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular son los vértices de un octaedro, también regular.

Supongamos que el tetraedro VABC (fig. 505) *sea regular; al unir consecutivamente los puntos medios de las aristas se obtienen ocho triángulos, cuyos lados son la mitad del lado del tetraedro regular dado.*

Por consiguiente, todas las caras de la figura GLEDMF *son ocho triángulos equiláteros, iguales entre sí.*

Además, en un tetraedro regular, VB *y* AC *son ortogonales; por tanto, la sección* GEFD *es un cuadrado, y las rectas* GF, ED *son perpendiculares entre sí e iguales.*

De aquí se concluye que el sólido **GLEDMF** *es un octaedro, cuyas ocho caras son triángulos equiláteros y cuyos ejes* DE, GF, LM *son iguales y perpendiculares entre sí dos a dos. Luego* **es un octaedro regular.**

897. Los puntos medios de las aristas de un tetraedro cualquiera son los vértices de un octaedro cuyas aristas opuestas son iguales y paralelas, y cuyo volumen es la mitad del volumen del tetraedro dado.

Los puntos medios G, L, E, D, M, F *de las aristas de un tetraedro cualquiera* VABC (fig. 505) *son los vértices de un octaedro, en el cual las aristas* GE *y* DF *son paralelas a la* AC, *e igual a la mitad de ella; por tanto,* GE *y* DF *son iguales y paralelas.*

Además, el plano GLE *es paralelo al* ABC*; luego el tetraedro* VGLE *es semejante al* VABC, *siendo* 1/2 *la razón de semejanza, tendremos:*

$$\frac{\textit{Volumen}\ \mathrm{VGLE}}{\textit{Volumen}\ \mathrm{VABC}} = \frac{\mathrm{VG}^3}{\mathrm{VA}^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Así pues, si del tetraedro VABC *rebajamos sucesivamente los tetraedros* VGLE, ADMG, BDFL, CEFM, *quedará el octaedro considerado.*

Por tanto, $\quad$ Vol. **GLEDFM** $= \mathrm{VABC} - 4 \times \frac{1}{8} \times \mathrm{VABC} = \mathbf{\frac{1}{2}\ VABC.}$

898. Dado un tetraedro cuyas seis aristas son iguales, que llamaremos a (figura 506):

1.º Si designamos por H el punto medio de la arista CD, demostrar que el plano ABH es perpendicular a dicha arista CD y decir qué ángulo forman las dos direcciones AB y CD.

2.º Si se corta el tetraedro por medio de un plano paralelo a las direcciones AB y CD trazado por un punto cualquiera M de la arista BC, demostrar que la sección MNPQ así obtenida es un rectángulo. Indicar la posición que ocuparía el punto M dado caso que la sección MNPQ fuese un cuadrado.

3.º ¿De qué naturaleza son los dos sólidos en que la sección MNPQ divide al tetraedro?

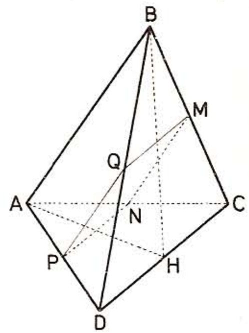


Fig. 506

● 1.º *Como las medianas* AH *y* BH *son al mismo tiempo alturas de los triángulos equiláteros* ADC *y* BDC, *la recta* CD *será perpendicular a las* AH *y* BH *y, por tanto, al plano* ABH.

De lo dicho se desprende que la recta CD *es perpendicular a cualquiera otra recta trazada en el plano* ABH *y, por consiguiente, a la* AB; **forman,** *pues,* **un ángulo de 90º.**

● 2.º *Por el paralelismo del plano sección* MNPQ, *resulta que las rectas* MQ *y* PN *son paralelas a la* CD, *y las rectas* PQ *y* MN *lo son también a la* AB.

Mas acabamos de ver que las rectas CD *y* AB *son ortogonales; por tanto, las rectas* MQ, PN *serán perpendiculares a las* PQ, MN, *y el cuadrilátero* **MNPQ,** *por tener sus lados paralelos y rectangulares,* **será un rectángulo.**

Para que dicho rectángulo fuese un cuadrado sería necesario que **el punto M** *fuese el* **punto medio de BC.** *En este caso se tendría que*

$$\mathrm{MQ} = \mathrm{PN} = \frac{\mathrm{DC}}{2} \quad y \quad \mathrm{PQ} = \mathrm{MN} = \frac{\mathrm{AB}}{2}$$

Al ser iguales las aristas CD *y* AB, *resultará que todos los lados del rectángulo* MNPQ *serán iguales, siendo, por tanto, un cuadrado.*

• 3.º *La sección* MNPQ *descompone al tetraedro en estos dos sólidos:*

ABMNPQ *y* DCMNPQ.

El primero tiene las aristas AB, NM, PQ *paralelas y el segundo tiene las* DC, MQ, PN *también paralelas; por tanto, estos dos sólidos son* **dos troncos de prismas.**

899. Hallar el volumen del paralelepípedo rectángulo ABCDEFGH (figura 507) sabiendo que sus tres dimensiones AB, AD, AE son proporcionales a los números 3, 4, 5 y que la diagonal AC del rectángulo ABCD es igual a 1 m.

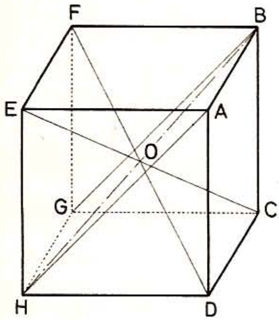


Fig. 507

Dimensiones:

$$AB = 3x; \quad AD = 4x; \quad AE = 5x$$

Vol. paralelepípedo:

$$V = 3x \times 4x \times 5x = 60\ x^3 \qquad (1)$$

En el rectángulo ABCD:

$$(3x)^2 + (4x)^2 = 1$$

de donde

$$x = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

Sustituyendo en (1):

$$\mathbf{V} = 60\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{60}{125} = \mathbf{0{,}48\ m^3}$$

900. Dado un cubo ABCDEFGH (fig. 508) de arista a, hacemos pasar un plano transversal por la recta DH, diagonal de la cara superior, y por el vértice B, con lo cual queda determinada la pirámide ABDH. Hállese el volumen y el área total de dicha pirámide.

• 1.º *Tomando el punto* B *como vértice de la pirámide, la altura* AB *será la arista* a, *y la base* AHD *será un semicuadrado de lado* a; *por tanto:*

$$\mathbf{V} = \frac{a}{3} \times \frac{a^2}{2} = \frac{\mathbf{a^3}}{\mathbf{6}}$$

El volumen de la pirámide es igual a la sexta parte del volumen del cubo.

• 2.º *El área total de la pirámide se compone de tres semicuadrados iguales al* AHD *más el área del triángulo equilátero* BHD, *cuyos lados son iguales a las diagonales de las caras del cubo:*

$$A_r = 3 \times \frac{a^2}{2} + \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\mathbf{A_r} = \frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{2}}(\mathbf{3} + \sqrt{\mathbf{3}})$$

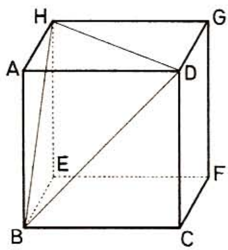


Fig. 508

901. Dada una pirámide (fig. 509) cuya base y caras laterales son triángulos equiláteros de lado a, calcular:

1.º El área total.

2.º Calcular el volumen de la pirámide.

La pirámide dada es un tetraedro regular.

● 1.º *El área lateral es la de 4 triáng. equiláteros de lado* a

$$\mathbf{AT} = 4 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \mathbf{a^2\sqrt{3}}$$

● 2.º *Las aristas* VA, VB, VC *son segmentos oblicuos iguales. El pie,* G, *de la perpendicular* VG *equidista de* A, B *y* C. G *es por tanto el circuncentro, y en este caso además baricentro, del* △ABC. *Por tanto:*

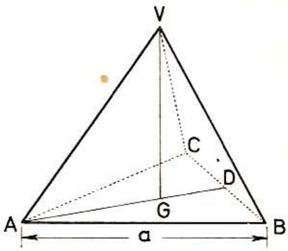


Fig. 509

$$AG = \frac{2}{3} \times AD = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

En △VAG: $$VG = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Volumen VABC: $$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\mathbf{a^3\sqrt{2}}}{\mathbf{12}}$$

902. El volumen de una pirámide regular es igual al producto del área lateral por 1 3 de la distancia del centro de la base a una cara lateral.

Sea P *una pirámide regular de* n *caras,* O *el centro de su base y* S *la cúspide. Haciendo pasar planos por el centro* O, *la cúspide* S *y cada uno de los vértices de la base, la pirámide* P *queda dividida en* n *pirámides triangulares iguales, cuyas bases son las caras de* P *y cuyas cúspides se confunden con el centro* O. *Su altura es, pues, la distancia* d *de* O *a cada una de las caras (la misma para todas).*

Llamando A *al área de cada una de las caras de* P *y* V *a su volumen, tendremos:*

$$\mathbf{V} = \left(\frac{1}{3}A \times d\right) \times n = (A \times n) \times \frac{d}{3} = \textbf{área lateral de P} \times \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{3}}$$

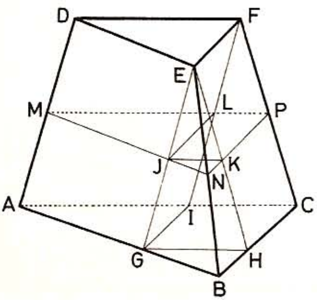


Fig. 510

903. El volumen de un tronco de pirámide triangular (fig. 510) de bases paralelas es igual a la sexta parte de la altura del tronco por la suma de las áreas de las dos bases, más el cuádruplo del área de la sección equidistante de estas bases.

Si V, B, b, S, h *representan respectivamente el volumen del tronco de pirámide* ABCDEF, *el área* ABC, *el área* DEF, *el área* MNP *y la altura del tronco, decimos que será:*

$$V = \frac{h}{6}(B + b + 4S)$$

Primera demostración $\triangle ABC \sim \triangle MNP \sim \triangle DEF$

luego
$$\frac{Area\ ABC}{AB^2} = \frac{Area\ MNP}{MN^2} = \frac{Area\ DEF}{DE^2}$$

o bien
$$\frac{B}{AB^2} = \frac{b}{DE^2} = \frac{S}{MN^2}$$

de ahí que sea
$$\frac{\sqrt{B}}{AB} = \frac{\sqrt{b}}{DE} = \frac{\sqrt{S}}{MN}$$

y también
$$\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{B} + \sqrt{b})}{\frac{1}{2}(AB + DE)} = \frac{\sqrt{S}}{MN}$$

y como
$$\frac{1}{2}(AB + DE) = MN$$

se infiere que también será
$$\sqrt{S} = \frac{1}{2}(\sqrt{B} + \sqrt{b})$$

o sea
$$S = \frac{1}{4}(\sqrt{B} + \sqrt{b})^2$$

Por otra parte, sabido es que

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb}) = \frac{h}{6}(2B + 2b + 2\sqrt{Bb})$$

$$V = \frac{h}{6}[B + b + (B + b + 2\sqrt{Bb})]$$

$$V = \frac{h}{6}[B + b + (\sqrt{B} + \sqrt{b})^2]$$

y, por último:

$$\mathbf{V = \frac{h}{6}(B + b + 4S)}$$

Segunda demostración.—*El volumen del tronco* ABCDEF *representado por* V *puede descomponerse en esta forma:*

$$V = AGIDEF + CHGIEF + EGBH$$

$$V = AGI \cdot h + CHGI \cdot \frac{h}{2} + GBH \cdot \frac{h}{3} = \frac{h}{6}(6AGI + 3CHGI + 2GBH)$$

Teniendo en cuenta que DEF = MJL = AGI, *que* CHGI = 2 JKPL *y que* BGH = 4 JNK, *tenemos:*

$$V = \frac{h}{6}\,[(AGI + CHGI + GBH) + AGI + 4AGI + 2CHGI + GBH]$$

$$= \frac{h}{6}\,(ABC + DEF + 4MJL + 4JKPL + 4JNK)$$

$$= \frac{h}{6}\,(ABC + DEF + 4MNP) = \frac{h}{6}\,(B + b + 4S)$$

XI. Poliedros regulares

904. ¿Cuál es el número de aristas de un octaedro regular?
El octaedro regular está limitado por 8 triángulos equiláteros cuyo número total de lados será $8 \times 3 = 24$, *los cuales combinados de dos en dos para formar los ángulos diedros, darán:*

$$24 : 2 = \mathbf{12\ aristas}$$

905. ¿Cuál es el área de un octaedro regular de 3 cm de arista?

$$A = 8 \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 2l^2\sqrt{3}$$

Si $l = 3$ cm, $\quad \mathbf{A} = 2 \times 9\sqrt{3} = \mathbf{31{,}176\ cm^2}$

906. ¿Cómo puede descomponerse el volumen del octaedro regular?
Puede descomponerse en dos pirámides cuadrangulares regulares que tienen por altura la semidiagonal del octaedro.

907. ¿Cuál es el volumen del mismo?
La altura de cada una de las dos pirámides cuadrangulares en que se puede dividir al octaedro es igual a la semidiagonal del octaedro; luego

$$h = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Volumen octaedro: $\quad \mathbf{V} = \left(\frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \times 2 = \mathbf{\frac{a^3\sqrt{2}}{3}}$

908. ¿Cuál es el número de aristas de un icosaedro regular?
De un raciocinio análogo al del núm. **904,** *resulta:*

$$\frac{20 \times 3}{2} = \mathbf{30\ aristas}$$

909. ¿Cuál es el área de un icosaedro regular de 3 cm de arista?
Esta área es igual a la de 20 triángulos equiláteros iguales, o sea:

$$A = 20 \times \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 5a^2\sqrt{3}$$

Si $a = 3$ cm: $\quad \mathbf{A} = 5 \times 9\sqrt{3} = \mathbf{77{,}94\ cm^2}$

910. ¿Cuál es la arista de un icosaedro regular de 1 dm^2 de área?

Según la fórmula anterior: $5a^2\sqrt{3} = 1$

por tanto: $$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{1}{5\sqrt{3}}} = \mathbf{0{,}339\ dm}$$

911. Un octaedro está inscrito en un exaedro regular de arista a, de tal modo que cada vértice sea tangente en el centro de una cara del exaedro. Calcular el área y volumen del octaedro (fig. 511).

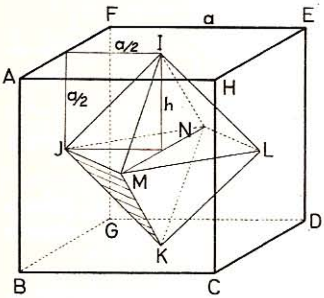


Fig. 511

Las 12 aristas son iguales; cada una es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos valen cada uno a/2.

Arista: $$\text{IJ} = \sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

• 1.º **Area** *del octaedro; consta de 8 triángulos equiláteros de lado* IJ:

$$\mathbf{AT} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3} \times 8 = \mathbf{a^2\sqrt{3}}$$

• 2.º **Volumen:** *La base de cada pirámide es un cuadrado de lado* IJ:

Area base: $$\text{B} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

Altura de cada pirámide (n.º **907**): $$h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$$

Vol. octaedro: $$\mathbf{V} = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{2} \times \frac{a}{2}\right) \times 2 = \mathbf{\frac{a^3}{6}}$$

912. ¿Cuál es el número de aristas de un dodecaedro regular?
El dodecaedro está limitado por 12 *pentágonos regulares iguales.*

Luego tiene $$\frac{5 \times 12}{2} = \mathbf{30\ aristas.}$$

913. ¿Cuál es el área de un dodecaedro regular de 3 cm de lado?
Este área se compone de 12 *pentágonos regulares iguales, cuyos lados* (GEOM. **452**) *y apotema* (GEOM. **449**) *son:*

Lado del pentágono en función de r: $$l = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad (1)$$

Apotema: $$ap = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2} \qquad (2)$$

Despejando r *en* (1): $$r = \frac{2l}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Llevando r *a* (2): $\quad ap = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4 \times 4l^2}{10 - 2\sqrt{5}} - l^2} = \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{8}{5 - \sqrt{5}} - 1} =$

$$= \frac{l}{2}\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})\,(5 - \sqrt{5})}{20}} = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$$

Area pentágono: $\quad A_1 = p \times ap = \dfrac{5l}{2} \times \dfrac{l}{2}\sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} =$

$$= \frac{l^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

Area dodecágono: $\quad \mathbf{A} = 12A_1 = \mathbf{3l^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}$

Aplicación: *para* l = 3 cm: $\quad \mathbf{A} = 27\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \mathbf{185{,}810\,76\ cm^2}$

914. ¿Cuál es la arista de un dodecaedro regular de 1 dm² de área?

Tenemos **(913)** $\quad 3\,l^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 1 \quad$ *es decir* $\quad l^2 \times 20{,}64564 = 1$

$$\mathbf{l} = \sqrt{\frac{1}{20{,}645\,64}} = \mathbf{0{,}2201\ dm}$$

915. Trazar el desarrollo de la superficie total de un octaedro regular de 2 cm de lado.

Este desarrollo consta de 8 *triángulos equiláteros iguales* (fig. 512).

1.º *Se trazan dos circunferencias iguales de* 2 *cm de radio que se intercepten en un arco de* 60º.

2.º *Se trazan en cada una de ellas tres arcos de* 60º *además del que interceptan.*

3.º *Se trazan las cuerdas y radios correspondientes.*

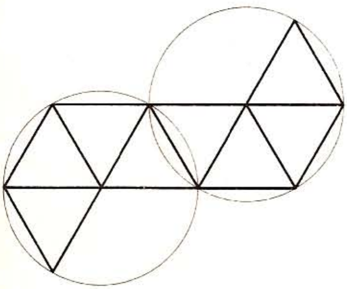


Fig. 512

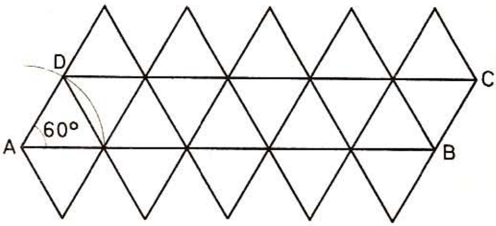


Fig. 513

916. Trazar el desarrollo de un icosaedro regular de 2 cm de arista.

Este desarrollo consta de 20 *triángulos equiláteros iguales* (fig. 513).

1.º *Se traza un paralelogramo* ABCD *tal que* $\angle$A = 60º, AB = 10 cm *y* AD = 2 cm.

2.º *Se dividen* AB *y* CD *en* 5 *partes iguales.*
3.º *Se trazan* 10 *triángulos equiláteros uniendo los puntos de división.*
4.º *Se construyen otros* 10 *triángulos equiláteros opuestos por las bases a los* 10 *triángulos anteriores.*

917. Trazar el desarrollo de un dodecaedro de 2,5 cm de arista.

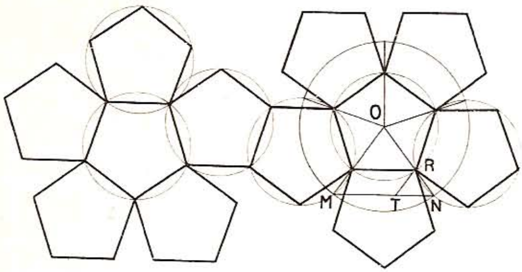


Fig. 514

Este desarrollo consta de 12 *pentágonos regulares iguales de* 2,5 *cm de lado* (fig. 514).

1.º *Se traza una circunferencia de radio arbitrario,* OM, *y se inscribe en ella un pentágono regular* (GEOMETRÍA **460**). *En uno de sus lados,* MN, *se toma* MT = 2,5 *cm. Por* T *se traza* TR *paralela a* OM. *La circunferencia de centro* O *y radio* OR *corta a los* 5 *radios en puntos que unidos dan un pentágono de* 2,5 *cm de lado.*

2.º *Se trazan* 5 *circunferencias de radio* OR *que tengan con la anterior por cuerda común el lado y se completan los pentágonos.*

3.º *Se traza otra serie de seis circunferencias igual a la anterior pero que tenga una cuerda común con alguna de las circunferencias anteriores. Luego se inscribe en cada una de ellas un pentágono.*

918. Trazar el desarrollo de la superficie total del sólido de Arquímedes (figura 515), y calcular esta superficie cuando la arista es de 15 mm.

Este desarrollo consta de 18 *cuadrados iguales y de* 8 *triángulos equiláteros iguales:*

Area de los 18 *cuadrados:*	40,50 cm²
Area de los 8 *triángulos:*	7,79 cm²
Area total:	**48,29 cm²**

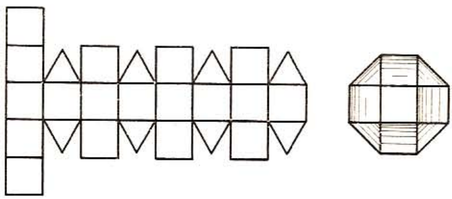


Fig. 515

8

EJERCICIOS SOBRE LOS CUERPOS REDONDOS

I. Area del cilindro

919. ¿Cuál es el área lateral de un cilindro, si el diámetro tiene 4 m y la altura 3,75 m?

Area lateral: $\mathrm{AL} = 2\pi rl$ (GEOM. **809**)

$\mathbf{AL} = 2\pi \times 2 \times 3{,}75 = \mathbf{47{,}124\ m^2}$

920. El radio de la base de un cilindro es de 2,8 m, la altura es igual a los 3/5 de la circunferencia de la base. ¿Cuál es el área lateral de este cilindro?

Circunf. de la base: $2{,}8 \times 2 \times 3{,}1416 = 17{,}592$ m

Altura: $\dfrac{17{,}592 \times 3}{5} = 10{,}555$ m

Area lateral: $\mathbf{AL} = 17{,}592 \times 10{,}555 = \mathbf{185{,}6836\ m^2}$

921. Una columna cilíndrica tiene 58 cm de radio y 4 m de altura. ¿Cuál es el área lateral?

Area lateral: $\mathbf{AL} = 2 \times 3{,}1416 \times 0{,}58 \times 4 = \mathbf{14{,}577\ m^2}$

922. El área de la base de un cilindro es de 3,08 m². Hallar el área lateral sabiendo que la altura es igual a tres veces el radio de la base.

$$\mathrm{AL} = 2\pi rh = 2\pi r \times 3r = 6\pi r^2$$
$$\pi r^2 = 3{,}08$$
$$\mathbf{AL} = 3{,}08 \times 6 = \mathbf{18{,}48\ m^2}$$

923. El radio de la base de un cilindro tiene 35 cm, y la altura es el duplo del diámetro. Hallar:

1.º El área lateral del cilindro.
2.º El área de las bases.

Altura $0{,}35 \times 2 \times 2 = 1{,}4$ m

- 1.º *Area lateral:* $\mathbf{AL} = 2\pi rl = 2 \times 3{,}1416 \times 0{,}35 \times 1{,}40 = \mathbf{3{,}078768\ m^2}$
- 2.º *Area de las bases:* $\mathbf{B} = 0{,}35^2 \times 3{,}1416 \times 2 = \mathbf{0{,}769692\ m^2}$

II. Volumen del cilindro

924. ¿Cuál es el volumen de un cilindro cuya base tiene 2 m^2 y la altura 1,46 m?

$$\mathbf{V} = 2 \times 1{,}46 = \mathbf{2{,}92\ m^3}$$

925. ¿Cuál es el volumen de un cilindro que tiene 85 cm de altura y cuya base tiene 35 cm de radio?

Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h$ (GEOM. **812**)

$$\mathbf{V} = 3{,}1416 \times 0{,}35^2 \times 0{,}85 = \mathbf{0{,}327\,119\ m^3}$$

926. ¿Cuál es el volumen de un cilindro cuya circunferencia de la base tiene 3,08 m y la altura 1,50 m?

$$V = Ba = \frac{C^2}{4\pi} \times h$$

$$\mathbf{V} = \frac{3{,}08^2}{4\pi} \times 1{,}5 = \mathbf{1{,}132\,320\ m^3}$$

927. ¿Cuántos litros contiene una cuba cilíndrica de 4,8 m de diámetro y 1,96 m de profundidad?

Radio de la base: $48 : 2 = 24$ dm
Volumen: $\mathbf{V} = 3{,}1416 \times 24^2 \times 19{,}6 =$ **35 467,407 litros**

928. Un cilindro de 25 cm de radio contiene cierta cantidad de agua. ¿En cuánto se elevará el nivel del agua si durante $13^m\ 30^s$ está vertiendo agua en él un grifo que arroja 16 litros por minuto?

Agua que ha vertido el grifo: $16 \times 13{,}5 = 216\ l = 216\ dm^3$
Base del cilindro: $2{,}5^2 \times 3{,}1416 = 19{,}635\ dm^2$
Altura del nivel de agua: $216 : 19{,}635 =$ **11 dm**

929. El área lateral de un cilindro es de 942 cm^2 y su altura 15 cm. ¿Cuál será su volumen? ($\pi = 3{,}14$).

Circunferencia de la base: $942 : 15 = 62{,}80$ cm
Radio: $62{,}8 : (3{,}14 \times 2) = 10$ cm
Volumen: $\mathbf{V} = 10^2 \times 3{,}14 \times 15 =$ **4710 cm^3**

930. Con una lámina de latón rectangular ABCD, tal que AB = 40 cm AD = 36 cm, se fabrica un tubo cilíndrico. Calcular el área lateral y el volumen del tubo obtenido:

1.º Cuando se unen los bordes AB y DC de la lámina.

2.º Cuando se unen los bordes AD y BC. En ambos casos hay que perder una faja de 1 cm de ancho.

● 1.º Se une AB con DC.—*En este caso el tubo tiene* 40 *cm de largo y la circunferencia de la base* 36 − 1 = 35 *cm*

Area lateral: $\mathbf{AL} = 40 \times 35 = \mathbf{1400} \quad \mathbf{cm^2}$

Radio de la base: $\dfrac{35}{2 \times 3{,}14}$

Volumen: $\mathbf{V} = 3{,}14 \times \left(\dfrac{35}{2 \times 3{,}14}\right)^2 \times 40 = \mathbf{3901{,}26\ cm^3}$

• 2.º Cuando se unen los bordes BC con AD:

Circunferencia de la base: $40 - 1 = 39$ cm
Area lateral: $\mathbf{AL} = 39 \times 36 = \mathbf{1404} \quad \mathbf{cm^2}$

Volumen: $\mathbf{V} = 3{,}14 \times \left(\dfrac{39}{2 \times 3{,}14}\right)^2 \times 36 = \mathbf{4359{,}24\ cm^3}$

931. Un pozo, comprendida la mampostería, tiene 1,86 m de diámetro y 12 m de profundidad. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra ha sido necesario extraer para construirle?

$$\mathbf{V} = \left(\frac{1{,}86}{2}\right)^2 \times 3{,}1416 \times 12 = \mathbf{32{,}606\,038\ m^3}$$

III. Dimensiones del cilindro

932. Hallar la altura de un cilindro cuyo volumen es de 2,7 m^3 y base 3,25 m^2.

De la fórmula: $V = B \times h$ *resulta* $h = \dfrac{V}{B}$

$$\mathbf{h} = \frac{2{,}7}{3{,}25} = \mathbf{0{,}83\ m}$$

933. Un tonelero tiene que hacer una cuba cilíndrica de 1,4 m de profundidad. ¿Cuál será el diámetro, debiendo ser la capacidad de 11 hl? ($\pi = 22/7$).

11 hl *equivalen a* 1,1 m^3.

Vol. cilindro: $\dfrac{22}{7} \times r^2 \times 1{,}4 = 1{,}1$

Diámetro: $\mathbf{2r} = 2\sqrt{\dfrac{1{,}1 \times 7}{1{,}4 \times 22}} = 2 \times \dfrac{1}{2} = \mathbf{1\ m}$

934. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro cuyo volumen es de 248 dm^3 y su altura 1,2 m?

Tenemos: $B \times 12 = 248\ dm^3$

$$\mathbf{B} = \frac{248}{12} = \mathbf{20{,}67\ dm^2}$$

935. ¿Cuál es el radio. de la base de un depósito cilíndrico de 5000 hl de capacidad y cuya profundidad es de 5 m?

5000 hl *equivalen a* 500 m^3

Tenemos: $$V = \pi r^2 h$$

de donde: $$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{500}{3{,}1416 \times 5}} = \mathbf{5{,}642\ m}$$

936. De un depósito cilíndrico cuyo diámetro es de 8,4 m salen 7,7 litros de agua por segundo. ¿Cuánto habrá bajado el nivel del agua al cabo de 3/4 de hora? ($\pi = 22/7$).

Tres cuartos de hora son $45 \times 60 = 2700$ *segundos.*
Volumen del agua salida: $7{,}7 \times 2700$ *litros.*

Area base depósito: $$\left(\frac{84}{2}\right)^2 \times \frac{22}{7} = \frac{42^2 \times 22}{7} \text{ dm}^2$$

El nivel bajará: $$\mathbf{h} = \frac{7{,}7 \times 2700 \times 7}{42^2 \times 22} = \mathbf{3{,}75\ dm}$$

937. Hallar la altura de un cilindro cuya base tiene 84 m^2, si esta altura es la mitad del diámetro.

De la fórmula $\pi r^2 = A$ *resulta:*

$$r = \mathbf{h} = \sqrt{\frac{84}{3{,}1416}} = \mathbf{5{,}17\ m}$$

938. Una placa circular de hierro colado que sirve para cerrar el registro de una alcantarilla tiene 4 cm de espesor. ¿Cuál será el diámetro, si pesa 394,052 kg, teniendo presente que está perforada en el centro por un orificio cuadrado de 2 cm de lado? Densidad, 7,9; $\pi = 22/7$.

Volumen del orificio:	$2 \times 2 \times 4 = 16$	cm^3
que pesarán:	$7{,}9 \times 16 = 126{,}4$	g
Peso de la placa sin orificio:	$394{,}052 + 0{,}1264 = 394{,}1784$	kg
que representan un volumen de:	$394{,}1784 : 7{,}9 = 49{,}896$	dm^3

$$V = \pi r^2 h \quad \textit{de donde} \quad r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

Diámetro: $$\mathbf{2r} = 2\sqrt{\frac{49{,}896 \times 7}{22 \times 0{,}4}} = \mathbf{12{,}6\ dm}$$

939. Una troje de forma cilíndrica contiene 1200 hl de trigo. ¿A qué altura subirá el trigo de la troje si ésta tiene 8 m de diámetro?

Altura: $$\mathbf{h} = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{120}{3{,}1416 \times 4^2} = \mathbf{2{,}387\ m}$$

940. En un cilindro de 1 m^3 de volumen el diámetro es doble de la altura:
1.º ¿Cuál es el diámetro?
2.º ¿Cuál la altura?
3.º ¿Cuál el área total?
Llamemos r *al radio,* 2r *al diámetro y* r *a la altura.*

- 1.º *Vol. cilindro:* $\pi r^2 \times r = \pi r^3 = 1$

Diámetro: $\mathbf{2r} = 2\sqrt[3]{\dfrac{1}{3{,}1416}} = 0{,}68 \times 2 = \mathbf{1{,}36\ m}$

- 2.º *Altura:* $\mathbf{h} = r = \mathbf{0{,}68\ m}$
- 3.º *Area total:* $\text{AT} = 2\pi r \times r + 2\pi r^2 = 4\pi r^2$
$\mathbf{AT} = 4 \times 3{,}1416 \times 0{,}68^2 = \mathbf{5{,}8107\ m^2}$

941. Un cilindro cuya altura es igual al diámetro tiene de área total 1 m^2.
1.º ¿Cuál es su altura?
2.º ¿Cuál su volumen?
Sea r *el radio y* 2r *la altura.*

Area total: $\text{AT} = 2\pi r\,(r + 2r) = 6\pi r^2 = 1\ \text{m}^2$

de donde: $r = \sqrt{\dfrac{1}{3{,}1416 \times 6}} = 0{,}230\,33\ \text{m}$

Altura: $\mathbf{h} = 2r = 0{,}230\,33 \times 2 = \mathbf{0{,}460\,66\ \ m}$

Volumen: $\mathbf{V} = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 = 1 \times \dfrac{r}{3} = \mathbf{0{,}076\,678\ m^3}$

942. El agua contenida en un vaso cilíndrico de 35 cm de diámetro y de 1 m de altura ha de envasarse en otro también cilíndrico y de 80 cm de diámetro. ¿Hasta qué altura subirá el nivel del agua?

Vol. agua 1.^{er} *vaso = Vol. agua* 2.º *vaso*

$$\pi \times \left(\frac{0{,}35}{2}\right)^2 \times 1 = \pi \times \left(\frac{0{,}8}{2}\right)^2 \times x$$

$$\mathbf{x} = \frac{0{,}35^2}{4} : \frac{0{,}8^2}{4} = \frac{0{,}1225}{0{,}64} = \mathbf{0{,}191\ m}$$

943. Hallar el volumen de un cilindro cuya área total es de 62,8 cm^2, siendo la suma del radio y la altura 5 cm. Calcular el área lateral y la de la base ($\pi = 3{,}14$).

Area total: $\text{AT} = 2\pi\text{R}\,(\text{R} + h)$
Tendremos, pues: $62{,}8 = 2 \times 3{,}14\text{R} \times 5 = 31{,}4\text{R}$

de donde $\text{R} = \dfrac{62{,}8}{31{,}4} = 2\ \text{cm}$ *y* $h = 5 - 2 = 3\ \text{cm}$

Volumen: $\mathbf{V} = \pi\text{R}^2 h = 3{,}14 \times 4 \times 3 = \mathbf{37{,}68\ cm^3}$
Area lateral: $\mathbf{AL} = 3{,}14 \times 2 \times 2 \times 3 = \mathbf{37{,}68\ cm^2}$

Area de la base: $\mathbf{B} = \dfrac{62{,}8 - 37{,}68}{2} = \mathbf{12{,}56\ cm^2}$

944. Las medidas efectivas de capacidad usadas en el comercio por mayor son cilindros cuya profundidad es igual al diámetro. ¿Cuál es el diámetro de las medidas siguientes:

1.º Del hectolitro.
2.º Del medio hectolitro.
3.º Del doble decalitro
4.º Del decalitro.
5.º Del medio decalitro.

$$V = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 \quad \textit{de donde} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

- 1.º *Hectolitro:* $\mathbf{2r} = 2\sqrt[3]{\dfrac{100}{6{,}2832}} = 2{,}51 \times 2 = \mathbf{5{,}02\ dm}$
- 2.º *Medio hl:* $\mathbf{2r} = 2\sqrt[3]{\dfrac{50}{6{,}2832}} = 1{,}99 \times 2 = \mathbf{3{,}98\ dm}$
- 3.º *Doble dal:* $\mathbf{2r} = 2\sqrt[3]{\dfrac{20}{6{,}2832}} = 1{,}47 \times 2 = \mathbf{2{,}94\ dm}$
- 4.º *Decalitro:* $\mathbf{2r} = 2\sqrt[3]{\dfrac{10}{6{,}2832}} = 1{,}16 \times 2 = \mathbf{2{,}32\ dm}$
- 5.º *Medio dal:* $\mathbf{2r} = 2\sqrt[3]{\dfrac{5}{6{,}2832}} = 0{,}92 \times 2 = \mathbf{1{,}84\ dm}$

945. ¿Cuál es el área total de una cisterna cilíndrica de 1200 m³ de volumen, cuya altura es igual al diámetro?

$$V = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3 = 1200\ \text{m}^3$$

de donde
$$r = \sqrt[3]{\frac{1200}{2 \times 3{,}1416}} = 5{,}758\ \text{m}$$

El área interior se compone del área lateral más el área de la base.

$$A = 2\pi r \times 2r + \pi r^2 = 5\pi r^2$$
$$\mathbf{A} = 5 \times 3{,}1416 \times 5{,}758^2 = \mathbf{520{,}7919\ m^2}$$

IV. Aplicaciones

946. Hallar el peso de un tubo de plomo de 2,5 m de largo, 18 cm de diámetro interior y cuyo espesor tiene 8 mm. Densidad del plomo: 11,4.

La base del tubo es una corona.

Volumen del tubo: $V = \pi (R^2 - r^2)\, h$

Peso del tubo: $P = \pi (R^2 - r^2)\, h \times d$

$$\mathbf{P} = 3{,}1416\,(0{,}98^2 - 0{,}9^2) \times 25 \times 11{,}4 = \mathbf{134{,}662\ kg}$$

947. ¿A cuántos kilogramos equivale la presión del agua en el fondo de una cisterna cilíndrica de 5,75 m de diámetro, si el agua llega a una altura de 3,4 m?

Presión es la fuerza por cada unidad de superficie:

$$presión = \frac{Peso}{Superficie} = \frac{V \times p\ específico}{S} = h \times peso\ esp.$$

$$\textbf{presión} = 34 \text{ dm} \times 1 = \mathbf{34\ kg/dm^2}$$

948. Se ha cavado un pozo de forma cilíndrica de 12,8 m de profundidad por 1,9 m de diámetro. ¿Cuál es su volumen? Tómese $\pi = 3{,}14$. Se construye después en esa excavación una pared de mampostería alrededor y verticalmente. Concluida la obra, el pozo cilíndrico tiene 1,5 m de diámetro. ¿A cuánto asciende el gasto total si se han dado 160 pts por metro cúbico de tierra extraída y 500 pts por metro cúbico de mampostería?

Volumen del pozo:	$0{,}95^2 \times 3{,}14 \times 12{,}80 = 36{,}27328$ m³
Coste del vaciado:	$160 \times 36{,}273\,28 =$ 5 803,70 pts
Volumen de la cantería:	$3{,}14 \times 12{,}80 \times (0{,}95^2 - 0{,}75^2) = 13{,}665\,28$ m³
Coste de la cantería:	$500 \times 13{,}665\,28 =$ 6 832,60 pts
Importe total:	$5803{,}70 + 6832{,}60 =$ **12 636,30 pts**

949. Un cilindro lleno de un líquido cuya densidad es 0,915 tiene 25 cm de altura interior y 20 cm de diámetro interior. Hallar el peso total si el vaso tiene 1 mm de espesor. Densidad del recipiente 4,4.

Peso del líquido:	$\pi \times 1^2 \times 2{,}5 \times 0{,}915 =$	$2{,}2875\ \pi$ kg
Volumen de la envoltura:	$\pi\,(1{,}01^2 - 1^2) \times 2{,}5 =$	$0{,}05025\ \pi$ dm³
Volumen del fondo del vaso:	$\pi \times 1{,}01^2 \times 0{,}01 =$	$0{,}010201\ \pi$ dm³
Volumen total:		$0{,}060451\ \pi$ dm³
Peso del vaso:	$0{,}060451\pi \times 4{,}4 =$	$0{,}2659844\ \pi$ kg
Peso total:	$\pi\,(2{,}2875 + 0{,}2659844) =$	**8,022 kg**

950. La altura interior de un vaso de cinc de 1 litro de capacidad y de forma cilíndrica es el duplo del diámetro y su espesor es de 5 mm. Hallar su peso. Densidad del cinc 7,19.

Radio interior del vaso: $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4 \times 3{,}1416}} = 0{,}43$ dm

Altura interior del vaso:	$0{,}43 \times 4 = 1{,}72$ dm
Radio exterior del vaso:	$0{,}43 + 0{,}05 = 0{,}48$ dm
Volumen de la envoltura:	$\pi\,(0{,}48^2 - 0{,}43^2) \times 1{,}72 = 0{,}07826\ \pi$
Volumen del fondo del vaso:	$\pi \times 0{,}48^2 \times 0{,}05 = 0{,}01152\ \pi$
Peso del vaso:	$\pi\,(0{,}07826 + 0{,}01152) \times 7{,}19 =$ **2,02796 kg**

951. En un tubo cilíndrico de 10 cm de diámetro interior se vierten 4,04481 kg de leche cuya densidad es 1,03. ¿Qué altura alcanza el líquido?

$$V = \frac{P}{D} = \frac{4{,}04481}{1{,}03} = 3{,}927 \text{ dr}$$

Altura: $$\mathbf{h} = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{3{,}927}{0{,}7854} = \mathbf{5\ dm}$$

952. Se ha cavado un pozo cilíndrico que tiene 2 m de diámetro y 1,5 m de profundidad. Al remover la tierra ha aumentado 2/3 de volumen. ¿Cuántos volquetes de 0,75 m³ de cabida se necesitan para transportar la tierra?

Volumen del pozo: $3{,}1416 \times 1^2 \times 1{,}50 = 4{,}7124 \text{ m}^3$

Volumen de la tierra: $\dfrac{4{,}7124 \times 5}{3} = 7{,}854 \text{ m}^3$

Volquetes *que se necesitan:* 7,854 : 0,75 = **11 por exceso**

953. La densidad del vapor de agua es los 5/8 de la densidad del aire y 1 litro de aire pesa 1,293 gramos en París. Hallar el peso del vapor contenido en el cilindro de una caldera que tiene 50 cm de diámetro y 80 cm de largo.

Volumen del cilindro: $V = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \times 3{,}1416 \times 8 = 157{,}08 \text{ dm}^3$

Peso del vapor: $\mathbf{P} = 157{,}08 \times 1{,}293 \times \dfrac{5}{8} = \mathbf{126{,}94\ g}$

954. Tres piezas cilíndricas de distintas clases de madera miden 4,6 m de largo por 34 cm de diámetro, y tienen, respectivamente, por densidad, 0,75, 0,56 y 0,69. Calcular su peso total.

Vol. de cada pieza: $V = \left(\dfrac{3{,}4}{2}\right)^2 \times 3{,}1416 \times 46 = 417{,}644 \text{ dm}^3$

Peso 1.ª pieza:	$417{,}644 \times 0{,}75 = 313{,}23$ kg
Peso 2.ª pieza:	$417{,}644 \times 0{,}56 = 233{,}88$ kg
Peso 3.ª pieza:	$417{,}644 \times 0{,}69 = 288{,}174$ kg
Peso total:	**835,284 kg**

955. Un cilindro de hierro colado tiene 1,4 m de largo y 86 mm de diámetro. Después de pasado por el torno el diámetro disminuye 3,5 mm. Hallar el peso que se ha disminüido. Densidad del hierro colado: 7,25.

Diámetro primitivo: 0,86 dm.
Diámetro después de pasado por el torno: $0{,}86 - 0{,}035 = 0{,}825$ dm.
Peso del hierro colado que se ha disminuido:

$$\mathbf{P} = 3{,}1416 \times \left[\left(\frac{0{,}86}{2}\right)^2 - \left(\frac{0{,}825}{2}\right)^2\right] \times 14 \times 7{,}25 = \mathbf{4{,}7013\ kg}$$

956. Un rollo cilíndrico de madera tiene 0,25 m de radio y 2,2 m de largo y pesa 275 kg. ¿Cuál es la densidad de la madera con que está hecho?

Vol. del rollo: $V = 3{,}1416 \times 2{,}5^2 \times 22 = 431{,}97 \text{ dm}^3$
Densidad: 275 : 431,97 = **0,637**

957. Un depósito de cinc de forma cilíndrica tiene 1,5 m de radio. Vertiendo en él 20 m³ de agua se nota que se pierde por un orificio que está a 2,15 m de la base, que es imposible tapar. ¿Cuántos hectolitros de agua se han derramado y a qué altura habría subido si no hubiera sido por el orificio?

Vol. del agua conservada:	$3{,}1416 \times 1{,}5^2 \times 2{,}15 =$	$15{,}19749\ m^3$
Agua perdida:	$20 - 15{,}19749 =$	$4{,}80251\ m^3$
	$=$	**48,0251 hl**
Altura *sin el orificio:*	$20 : 3{,}1416 \times 1{,}5^2 =$	**2,83 m**

958. Una cuba cilíndrica de 1 m de diámetro pesa 45 350 g. Después de puesta en un estanque, se envasan en ella 151 litros de agua. ¿Cuántos centímetros se hundirá?

Según el principio de Arquímedes, la cuba desalojará un peso de agua igual a su peso total, o sea

$$45{,}35 + 151 = 196{,}35 \text{ kg}$$

Este peso representa un volumen de 196,35 dm^3.
De la fórmula $V = \pi r^2 h$, *resulta:*

$$\mathbf{h} = \frac{196{,}35}{3{,}1416 \times 5^2} = 2{,}5 \text{ dm} = \mathbf{25\ cm}$$

959. Un cilindro de corcho tiene 40 cm de altura y 60 cm de diámetro. Hallar su peso, sabiendo que la densidad del corcho es 1 4 de la del agua. ¿Qué peso será necesario ponerle encima para que se hunda por completo en el agua?

- 1.º *Vol. del cilindro:* $V = 3{,}1416 \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 \times 4 = 113{,}097\ dm^3$

  Peso del corcho: $\mathbf{P} = \frac{113{,}097}{4} = \mathbf{28{,}274\ kg}$

- 2.º *Hay que añadir:* $113{,}097 - 28{,}274 = \mathbf{84{,}823\ kg}$

960. Hallar el valor de un cilindro macizo de latón de 38 cm de largo y 9 cm de diámetro, a razón de 36 pts el kg. Densidad del latón: 8,75.

Vol. del cilindro:	$V = 3{,}1416 \times \frac{81}{4} \times 38 =$	$2\,417{,}4612\ cm^3$
Peso del latón:	$P = 8{,}750 \times 2417{,}4612 =$	21 152,7855 g
Valor del latón:	$36 \times 21{,}1527855 =$	**761,50 pts**

961. Una placa circular de hierro colado de 1,2 m de diámetro y 0,05 m de espesor tiene en el medio un hueco cuadrado de 12 cm de lado. ¿Cuánto pesará esta placa, teniendo presente que la densidad de esa fundición es 7,2? Tómese $\pi = 3{,}14$.

Area de la placa:	$3{,}14 \times 6^2 - 1{,}2^2 = 111{,}6\ dm^2$
Volumen:	$111{,}6 \times 0{,}5 = 55{,}8\ dm^3$
Peso:	$\mathbf{P} = 55{,}8 \times 7{,}2 = \mathbf{401{,}76\ kg}$

962. Una probeta cilíndrica de 3,5 dm de diámetro está llena de agua hasta 14 cm de altura; introduciendo en ella una piedra sube el nivel hasta 2,04 dm. ¿Cuál es el volumen de la piedra? Tómese $\pi = 3{,}14$.

Diferencia del nivel:	$20{,}4 - 14 = 6{,}4$ cm
Vol. piedra:	$\mathbf{V} = 3{,}14 \times 17{,}5^2 \times 6{,}4 = \mathbf{6154{,}4\ cm^3}$

963. Calcular el peso de la leche contenida en un vaso cilíndrico que tiene 40 cm de diámetro interior y 50 cm de alto. Densidad de la leche: 1,03.

Volumen de la leche: $V = 3{,}1416 \times \left(\frac{4}{2}\right)^2 \times 5 = 62{,}832\ \text{dm}^3$

Peso de la leche: $P = 1{,}03 \times 62{,}832 = \mathbf{64{,}417\ kg}$

964. ¿Cuánto se pagará por labrar un cilindro de asperón que tiene 66 cm de diámetro y 2,4 m de largo, a 75 pts el m²?

Area lateral del cilindro: $AL = 0{,}66 \times 3{,}1416 \times 2{,}4$
Importe: $75 \times 0{,}66 \times 3{,}1416 \times 2{,}4 = \mathbf{373{,}22\ pts}$

965. Un tronco de roble de 5,75 m de largo y 76 cm de diámetro vale 850 pts. ¿Cuál es el precio del metro cúbico?

Volumen del tronco: $V = \left(\frac{0{,}76}{2}\right)^2 \times 3{,}1416 \times 5{,}75$

Precio *del metro cúbico:* $\frac{850}{0{,}38^2 \times 3{,}1416 \times 5{,}75} = \mathbf{325{,}8\ pts.}$

966. Una columna cilíndrica de madera de 5 m de altura y 25 cm de diámetro ha de cubrirse con una chapa de hierro batido de 2 mm de espesor cuyo precio es de 500 pts el quintal. ¿Cuánto costará este trabajo, si se pagan 50 pts por la hechura? Densidad del hierro: 7,80.

Radio interior del hierro batido: $2{,}5 : 2 = 1{,}25\ \text{dm}$
Radio exterior: $1{,}25 + 0{,}02 = 1{,}27\ \text{dm}$
Volumen del hierro batido: $(1{,}27^2 - 1{,}25^2) \times 3{,}1416 \times 50\ \text{dm}^3$
Importe del hierro batido:

$$(1{,}27^2 - 1{,}25^2) \times 3{,}1416 \times 50 \times 7{,}8 \times \frac{500}{100} = 308{,}75\ \text{pts}$$

Valor total: $308{,}75 + 50 = \mathbf{358{,}75\ pts}$

967. ¿Cuál será el precio de la cal necesaria para blanquear una torre de 6,8 m de diámetro y 25 m de altura? Sábesé que con 1 hl de cal que vale 34 pts se pueden blanquear 10 m².

Area lateral de la torre: $AL = 3{,}1416 \times 6{,}8 \times 25\ \text{m}^2$

Cal empleada: $\frac{3{,}1416 \times 6{,}8 \times 25}{10}\ \text{hl}$

Precio de la cal: $\frac{3{,}1416 \times 6{,}8 \times 25}{10} \times 34 = \mathbf{1815{,}84\ pts.}$

968. En la catedral de Córdoba hay unas 1000 columnas de 0,4 m de diámetro y 4 m de altura. ¿Cuál es el volumen de cada columna y cuál el volumen total?

Vol. de una columna: $\left(\frac{0{,}4}{2}\right)^2 \times 3{,}1416 \times 4 = \mathbf{0{,}502\ 656\ m^3}$

Vol. de las 1000 *columnas:* $0{,}502\ 656 \times 1000 = \mathbf{502{,}656\ m^3}$

969. Una caldera de vapor, formada por un cilindro de 5,8 m de largo por 0,9 m de diámetro, está colocada de tal suerte que la superficie caldeada forma un sector de 130º. ¿Qué área está caldeada?

Area *caldeada:* $$\frac{\pi \times 0{,}9 \times 5{,}8 \times 130}{360} = \mathbf{5{,}922\ m^2}$$

970. ¿Cuánto se pagará por cavar un pozo de 15 m de profundidad y 2,3 m de diámetro, sabiendo que hasta 3 m de profundidad se pagan 8 pts por m³ y desde 3 hasta 6 m se pagan 3 pts más por metro cúbico, y así sucesivamente?

Vol. pozo de 3 m: $$V = \left(\frac{2{,}3}{2}\right)^2 \times 3{,}1416 \times 3 = 12{,}464\,298\ m^3$$

Gasto 1.ª *serie de* 3 m: $12{,}464\,298 \times 8$
2.ª » $12{,}464\,298 \times (8 + 3)$
3.ª » $12{,}464\,298 \times (11 + 3)$
4.ª » $12{,}464\,298 \times (14 + 3)$
5.ª » $12{,}464\,298 \times (17 + 3)$

Importe: $12{,}464\,298\,(8 + 11 + 14 + 17 + 20) = \mathbf{872{,}50\ pts.}$

971. Una chapa rectangular de hierro batido que tiene 1,75 m por 80 cm se enrolla en forma de tubo a lo largo o a lo ancho. Hallar el diámetro y el volumen en ambos casos, y el peso del tubo, si el metro cuadrado de hierro batido pesa 8,25 kg; hallar también el precio del tubo, si el medio kilo de hierro batido vale 6,5 pts.

Diámetro en el 1.er caso: $17{,}5 : 3{,}1416 = \mathbf{5{,}57\ dm}$
Diámetro en el 2.º caso: $8 : 3{,}1416 = \mathbf{2{,}54\ dm}$

Vol. en el 1.er caso: $$V_1 = \left(\frac{5{,}57}{2}\right)^2 \times 3{,}1416 \times 8 = \mathbf{194{,}955\ dm^3}$$

Vol. en el 2.º caso: $$V_2 = \left(\frac{2{,}54}{2}\right)^2 \times 3{,}1416 \times 17{,}5 = \mathbf{88{,}796\ dm^3}$$

Peso del tubo: $\mathbf{P} = 1{,}75 \times 0{,}8 \times 8{,}25 = \mathbf{11{,}55\ kg}$
Precio *del tubo:* $6{,}5 \times 11{,}55 \times 2 = \mathbf{150{,}15\ pts}$

972. ¿Cuál es el área total de un cilindro que tiene 1 m de altura y de diámetro? ¿Cuál sería el lado de un cubo de igual área?

Area total cilindro: $AT = 2\pi r\,(h + r) = 2\pi r\,(2r + r) = 6\pi r^2$
o sea $\mathbf{AT} = 6 \times 3{,}1416 \times 0{,}5^2 = \mathbf{4{,}7124\ m^2}$
Por hipótesis: $6a^2 = 4{,}7124\ m^2$
Lado del cubo: $a = \sqrt{4{,}7124 : 6} = \mathbf{0{,}8862\ m}$

973. Se quiere agotar un pozo de 8,6 m de profundidad por 2 m de diámetro con una bomba que saca 10 litros cada 2 minutos. ¿Cuánto tiempo se necesitará para agotarlo?

Vol. del pozo: $V = \pi \times 10^2 \times 86 = 27\,017{,}76\ dm^3$

Tiempo *preciso:* $$\frac{27\,017{,}76}{\frac{10}{2} \times 60} = \mathbf{90\ h\ 3\ m\ 33\ s}$$

974. ¿Cuál es el volumen de una bóveda semicilíndrica que tiene 6 m de largo y 5,8 m de diámetro interior, siendo de 86 cm el espesor de la obra? ¿Cuánto costará la construcción de esta bóveda a razón de 200 pts el metro cúbico?

El volumen de la bóveda es igual al volumen de un medio cilindro de $\left(\frac{5,8}{2} + 0,86\right)$ *de radio, menos otro medio cilindro de* $\frac{5,8}{2}$ *de radio.*

$$\mathbf{V} = \frac{\pi \times 3,76^2 \times 6}{2} - \frac{\pi \times 2,9^2 \times 6}{2} = 3\pi\,(3,76^2 - 2,9^2) = \mathbf{53,981\ m^3}$$

Importe *de la construcción:* $200 \times 53,981 = \mathbf{10\,796,25\ pts.}$

975. Un cilindro de 1 m de diámetro está circunscrito a un cubo. ¿Cuál es la diferencia de volúmenes entre los dos sólidos?

La arista del cubo, como también la altura del cilindro, es igual al lado del cuadrado inscrito en la base.

Arista del cubo: $a = r\sqrt{2}$

Vol. del cilindro: $V_1 = \pi r^2 \times r\sqrt{2} = \pi r^3 \sqrt{2}$

Vol. del cubo: $V_2 = (r\sqrt{2})^3 = 2r^3\sqrt{2}$

Diferencia de volúmenes: $V_1 - V_2 = r^3\sqrt{2}\,(\pi - 2)$

$$\mathbf{V_1 - V_2} = 5^3 \times 1,4142 \times 1,1416 = \mathbf{201,806\ dm^3}$$

976. Un depósito circular tiene 5,4 m de diámetro y 1,4 m de profundidad. ¿En cuánto tiempo lo llenará un grifo que da 0,4 litros por segundo?

Tiempo: $$\frac{\pi \times 27^2 \times 14}{0,4 \times 60 \times 60} = \mathbf{22\ h\ 15\ m\ 58\ s}$$

977. Se quiere forrar completamente, con bramante de 2 mm de diámetro, la superficie lateral de un cilindro de 80 cm de diámetro y 1,2 m de largo. ¿Cuántos metros de bramante serán menester?

$$\frac{\pi \times 0,8 \times 1,2}{0,002} = \mathbf{1507,968\ m}$$

978. ¿Qué cantidad de agua sacará en cada movimiento del émbolo una bomba cuyo tubo tiene 16 cm de diámetro, siendo de 46 cm la altura debajo del émbolo?

Vol. del cuerpo de bomba: $\mathbf{V} = 3,1416 \times 0,8^2 \times 4,6 = \mathbf{9,25\ litros}$

979. Un rectángulo de 40 cm de largo por 5 cm de ancho gira tanto alrededor de su lado mayor como al de su lado menor. Hallar el volumen y el área total engendrados cada vez.

Alrededor del lado mayor:

$\mathbf{V} = 3,1416 \times 5^2 \times 40 = \mathbf{3\,141,6\ cm^3}$

$\mathbf{AT} = 2\pi r\,(h + r) = 2 \times 3,1416 \times 5\,(40 + 5) = \mathbf{1\,413,72\ cm^2}$

Alrededor del lado menor:

$\mathbf{V} = 3,1416 \times 40^2 \times 5 = \mathbf{25\,132,8\ cm^3}$

$\mathbf{AT} = 2\pi r\,(h + r) = 2 \times 3,1416 \times 40\,(5 + 40) = \mathbf{11\,309,76\ cm^2}$

980. ¿Cuántos ladrillos se necesitarán para revestir un pozo de 3,45 m de profundidad y de 1,1 m de diámetro, si los ladrillos tienen 12 cm de ancho y 6 cm de alto (contando las junturas)? La longitud del ladrillo representa el espesor de la pared.

Número de ladrillos: $\dfrac{\pi \times 1{,}1 \times 3{,}45}{0{,}12 \times 0{,}06} = 1655{,}88$ *es decir,* **1656**

981. Un cubo cuya arista tiene 1 m está circunscrito a un cilindro. Hallar la diferencia de volúmenes entre los dos sólidos.

Volumen del cubo: $V_1 = 1^3 = 1\ m^3$
Radio del cilindro: 0,5 m
Volumen del cilindro: $V_2 = \pi \times 0{,}5^2 \times 1 = 0{,}785\,4\ m^3$
Diferencia: $\mathbf{V_1 - V_2} = 1 - 0{,}7854 = \mathbf{0{,}214\,6\ m^3}$

982. Se corta a escuadra un cilindro de madera que mide 5 m de largo y 60 cm de diámetro. Hallar:
1.º El volumen de la madera cortada.
2.º El área total de los cuatro segmentos.

Lado del cuadrado inscrito: $r\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ dm
● 1.º *Volumen:* $\mathbf{V} = [\pi\, 3^2 - (3\sqrt{2})^2] \times 5 = \mathbf{513{,}72\ dm^3}$
● 2.º *Area total:* $\mathbf{A} = \pi \times 3^2 - 2 \times 3^2 = \mathbf{10{,}2744\ dm^2}$

983. Si se necesita 1 cm^3 de oro para dorar la superficie lateral de un cilindro de 75 cm de altura y 20 cm de radio, ¿cuál será el espesor de la capa de oro, que suponemos uniforme en todo el cilindro?
Sea x *cm el espesor de la capa de oro:*

$$1 = \pi\,[(20 + x)^2 - 20^2] \times 75$$

de donde: $x^2 + 40x - 1/75\pi = 0$
Espesor: $\mathbf{x = 0{,}0010609\ mm}$

984. Dos hojas rectangulares de cinc tienen ambas 1,6 m por 60 cm. Se enrolla la primera a lo largo, ajustando los bordes, y la segunda del mismo modo, pero a lo ancho. Hallar la diferencia de capacidad de los cilindros resultantes.
Empleamos la fórmula del área del círculo en función de la circunferencia:

Diferencia: $\dfrac{16^2 \times 6}{4\pi} - \dfrac{6^2 \times 16}{4\pi} = \dfrac{240}{\pi} = \mathbf{76{,}39\ dm^3}$

985. Un tubo metálico tiene 1,5 m de largo, 40 cm de diámetro exterior y pesa 700,969 kg. Hallar el espesor de sus paredes, si la densidad del metal es de 7,7.
Tomemos por unidad el decímetro, llamemos x *al radio interior.*

$$V = \frac{700{,}969}{7{,}7} = 15 \times 3{,}1416\,(2^2 - x^2)$$

de donde: $2^2 - x^2 = \dfrac{700{,}969}{7{,}7 \times 15\pi}$ $\quad x = \sqrt{4 - \dfrac{700{,}969}{7{,}7 \times 15\pi}} = 1{,}437$

Espesor: $2 - 1{,}437 = \mathbf{0{,}562\ dm}$

986. Calcular el volumen de la mampostería de un depósito elíptico cuyo eje mayor tiene interiormente 5,8 m, el eje menor 4,9 m y cuya profundidad es de 85 cm; el espesor de las paredes es de 38 cm y el del fondo de 20 cm.

Area de la elipse: $A = \pi ab$

Semiejes externos: $\begin{cases} a = \dfrac{5,8}{2} + 0,38 = 3,28 \text{ m} \\ b = \dfrac{4,9}{2} + 0,38 = 2,83 \text{ m} \end{cases}$

Vol. envoltura: $V_1 = \pi\,(3,28 \times 2,83 - 2,9 \times 2,45)\,0,85 = 5,814\,370 \text{ m}^3$

Vol. fondo: $V_2 = \pi \times 3,28 \times 2,83 \times 0,2 = 5,832\,317 \text{ m}^3$

Volumen total: $\mathbf{V = 11,646\,687 \text{ m}^3}$

987. ¿Cuál es la capacidad de una bañera de 1 m de altura y de base elíptica cuyos ejes tienen 1,85 m y 64 cm?

Capacidad: $\mathbf{V} = \pi \left(\dfrac{18,5 \times 6,4}{4}\right) \times 10 = \mathbf{929,91 \text{ litros}}$

988. A un cilindro de 1 m de alto y 35 cm de diámetro se le quita un sector cuyo ángulo central tiene 140°. Hallar el volumen de este sector y su área total.

- 1.° *Vol. sector cilíndrico:* $\mathbf{V} = \dfrac{\pi \times 35^2 \times 1 \times 140}{4 \times 360} = \mathbf{37\,415,583 \text{ cm}^3}$

- 2.° *El área total se compone de 2 sectores de circulares de* 140°, *de 2 rectángulos de* 1 m *por* 0,175 m *y del área lateral cilíndrica correspondiente al arco de* 140°.

Area sectores circulares: $A_1 = \pi \times \left(\dfrac{35}{2}\right)^2 \times \dfrac{140}{360} \times 2 = 748,31 \text{ cm}^2$

Area rectángulos: $A_2 = 100 \times 17,5 \times 2 = 3500 \text{ cm}^2$

Area lateral cilíndrica: $A_3 = \pi \times 35 \times 100 \times \dfrac{140}{360} = 4276,06 \text{ cm}^2$

Area total pedida: $\mathbf{A = 8524,37 \text{ cm}^2}$

989. A un cilindro de 1 m de largo y 30 cm de diámetro se le quita un prisma triangular cuya base es el triángulo equilátero inscrito. Hallar el volumen de este prisma y el de la parte restante.

- 1.° *Vol. prisma:*

$$\mathbf{V} = \frac{(r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \times h = \frac{3 \times 1,5^2\sqrt{3}}{4} \times 10 = \mathbf{229,2275 \text{ dm}^3}$$

- 2.° *Vol. restante:* $\mathbf{V} = \left(\pi \times 1,5^2 - \dfrac{3 \times 1,5^2\sqrt{3}}{4}\right) \times 10 = \mathbf{41,458 \text{ dm}^3}$

990. En un cilindro de 1,5 m de largo y 40 cm de diámetro se inscribe un prisma exagonal regular. Hallar el volumen de la parte restante del cilindro.

Vol. restante: $\mathbf{V} = \left[\pi \times 2^2 - \dfrac{3 \times 2^2\sqrt{3}}{2}\right] \times 15 = \mathbf{32{,}616\ dm^3}$

991. Una bóveda semicilíndrica de 5 m de largo tiene su diámetro interior de 2,05 m y el exterior de 2,62 m. Hallar el volumen de la mampostería.

$$\mathbf{V} = \pi\left(\frac{2{,}62^2}{4} - \frac{2{,}05^2}{4}\right) \times \frac{5}{2} = \mathbf{5{,}226\ 64\ m^3}$$

992. Una bóveda tiene 7,4 m de largo y 42 cm de espesor; su arco interior pertenece a una circunferencia de 4,3 m de radio y corresponde a un ángulo central de 135°. Hallar el volumen de la mampostería de esta bóveda.

$$\mathbf{V} = \pi\,(4{,}72^2 - 4{,}3^2) \times 7{,}4 \times \frac{135}{360} = \mathbf{33{,}027\ 043\ m^3}$$

V. Area del cono

993. Hállese la fórmula del área total del cono de revolución en función del radio y la generatriz (fig. 516).

Sabiendo que OA $= r$, VA $= 1$, *tenemos que el área de la base será* πr^2, *y* πrl *el área lateral.*

Sumando: $\mathbf{AT} = \pi\mathbf{r}^2 + \pi\mathbf{rl} = \pi\mathbf{r}(\mathbf{r} + \mathbf{l})$ (1)

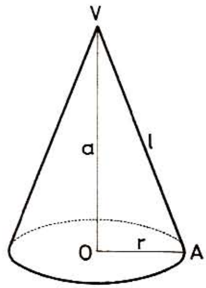


Fig. 516

994. Hállese la fórmula del área lateral del cono de revolución en función del radio y la altura.

Area lateral: $\text{AL} = \pi rl$

pero $l = \sqrt{\text{VO}^2 + \text{OA}^2} = \sqrt{a^2 + r^2}$

$$\mathbf{AL} = \pi\mathbf{r}\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{r}^2}$$

995. Hállese la fórmula del área total del cono de revolución en función del radio y la altura.

En la fórmula (1), *sustituyamos* l *por* $\sqrt{a^2 + r^2}$, *y resultará:*

$$\mathbf{AT} = \pi\mathbf{r}\,(\mathbf{r} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{r}^2})$$

996. Hállese la fórmula del área lateral del cono de revolución en función de la altura y la generatriz.

Area lateral: $\text{AL} = \pi rl$

pero $\mathbf{r} = \sqrt{l^2 - a^2}$

$$\mathbf{AL} = \pi\mathbf{l}\sqrt{\mathbf{l}^2 - \mathbf{a}^2}$$

997. Hállese la fórmula del área total del cono de revolución en función de la generatriz l y la altura h.

Area total: $\mathrm{AT} = \pi r\,(r + l)$

$$\mathbf{AT} = \pi \sqrt{l^2 - h^2}\,(l + \sqrt{l^2 - h^2}) = \pi\,(\mathbf{l}\sqrt{\mathbf{l}^2 - \mathbf{h}^2} + \mathbf{l}^2 - \mathbf{h}^2)$$

998. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuya generatriz tiene 4,5 m y la circunferencia de la base 6,25 m?

$$\mathbf{AL} = \frac{4{,}5 \times 6{,}25}{2} = \mathbf{14{,}0625\ m^2}$$

999. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuya generatriz es de 3,75 m y el radio de su base de 1,89? Calcular el área total del mismo.

$$\mathbf{AL} = 3{,}1416 \times 1{,}89 \times 3{,}75 = \mathbf{22{,}2661\ m^2}$$
$$\mathbf{AT} = 3{,}1416 \times 1{,}89\,(1{,}89 + 3{,}75) = \mathbf{33{,}488\ m^2}$$

1.000. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuya altura es de 3,25 m y el radio de 1,25 m? Calcular el área total del mismo.

$$\mathbf{AL} = 3{,}1416 \times 1{,}25 \times \sqrt{3{,}25^2 + 1{,}25^2} = \mathbf{13{,}643\,814\ m^2}$$
$$\mathbf{AT} = 3{,}1416 \times 1{,}25\,(1{,}25 + \sqrt{3{,}25^2 + 1{,}25^2}) = \mathbf{18{,}5525\ m^2}$$

1.001. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto que tiene 2,08 m de altura y 1,04 m de radio?

Según n.º **994** $\mathbf{AL} = \pi r \sqrt{a^2 + r^2} = \pi \times 1{,}04 \sqrt{2{,}08^2 + 1{,}04^2} = \mathbf{7{,}53\ m^2}$

1.002. ¿Cuál es el área total de un cono cuya altura sea de 10 m y la circunferencia de la base de 314 dm? ($\pi = 3{,}14$).

$$2\pi r = 31{,}4\ \mathrm{m} \qquad r = \frac{31{,}4}{2\pi} = 5\ \mathrm{m}$$

Area total (n.º **995**):

$$\mathbf{AT} = \pi r\,(r + \sqrt{a^2 + r^2}) = \pi \times 5\,(5 + \sqrt{100 + 25}) = 25\pi\,(1 + \sqrt{5}) = \mathbf{254{,}03\ m^2}$$

1.003. Un cono recto cortado por un plano que pasa por el eje tiene por sección un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es de 1,8 m. ¿Cuál es el área lateral del cono?

La altura es igual al radio $1{,}8 : 2 = 0{,}9$ m

$$\mathbf{AL} = \pi r l = \pi \times 0{,}9 \times \sqrt{0{,}9^2 + 0{,}9^2} = \mathbf{3{,}598\,734\ m^2}$$

1.004. ¿Cuál es el área total de un cono recto que tiene 3,69 m de altura y 4,95 de generatriz?

$$\mathrm{AT} = \pi r\,(l + r) \qquad r = \sqrt{4{,}95^2 - 3{,}69^2} = 3{,}299\ \mathrm{m}$$
$$\mathbf{AT} = 3{,}1416 \times 3{,}299\,(4{,}95 + 3{,}299) = \mathbf{85{,}4938\ m^2}$$

1.005. Se construye un cono con un sector circular correspondiente a un círculo de 14 cm de radio y 63º de medida angular. Averígüese el área lateral y la de la base de dicho cono. Tómese $\pi = 22/7$.

● 1.º *El área lateral será la misma que la del sector; por tanto:*

$$\mathbf{AL} = \frac{14^2 \times 22 \times 63}{7 \times 360} = \mathbf{107{,}80\ cm^2}$$

• 2.º *El área de la base será la de un círculo cuya circunferencia sea la longitud del arco del sector dado.*

Area del círculo: $\mathbf{A} = \dfrac{C^2}{4\pi} = \dfrac{15{,}4^2 \times 7}{4 \times 22} = \mathbf{18{,}865\ m^2}$

1.006. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto que tiene 5,25 m de altura y 4,62 m la circunferencia de la base?

Radio: $r = \dfrac{4{,}62}{2\pi} = \dfrac{2{,}31}{\pi}$

Aplicando la fórmula del núm. **994,** *tendremos:*

$$\mathbf{AL} = \pi \times \frac{2{,}31}{\pi}\sqrt{5{,}25^2 + \left(\frac{2{,}31}{\pi}\right)^2} = \mathbf{12{,}2457\ m^2}$$

1.007. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuyo radio de la base tiene 1,4 m y cuya generatriz es los 5/4 de la circunferencia de la base?

Circunferencia de la base: $2\pi \times 1{,}4$.

Generatriz: $\dfrac{2\pi \times 1{,}4 \times 5}{4}$

$$\mathbf{AL} = \pi r l = \frac{\pi \cdot 1{,}4 \cdot 2\pi \cdot 1{,}4 \cdot 5}{4} = \frac{3{,}1416^2 \cdot 1{,}4^2 \cdot 5}{2} = \mathbf{48{,}363\ m^2}$$

1.008. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuya generatriz tiene 3 m, siendo el diámetro de la base el doble de la altura?

Diámetro: $2r = 2h,$ *de donde* $r = h$

$$l^2 = h^2 + r^2 = 2r^2 = 9; \quad r = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{AL} = 3{,}1416 \times 3 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \mathbf{19{,}98\ m^2}$$

1.009. ¿Cuánto pesa el tejado de cinc de una torrecilla cuyo remate es un cono de 3 m de lado y 2,7 m de diámetro? Se sabe que la hoja de cinc tiene 1 mm de espesor y que su densidad es de 6,86.

Area: $AL = 3{,}1416 \times 13{,}5 \times 30\ dm^2$

Volumen: $V = 3{,}1416 \times 13{,}5 \times 30 \times 0{,}01\ dm^3$

Peso: $\mathbf{P} = 3{,}1416 \times 13{,}5 \times 30 \times 0{,}01 \times 6{,}86 = \mathbf{87{,}283\ kg}$

1.010. ¿Cuál será el ángulo que tiene el sector formado por el desarrollo del área lateral de un cono de revolución de 4 m de circunferencia y 5 m de generatriz o lado?

El desarrollo de un cono de revolución es un sector circular cuyo radio es la generatriz, y la circunferencia es igual al arco.

Longitud del arco: $\dfrac{\pi \times 5 \times n}{180} = 4$

de donde: $\mathbf{n} = \dfrac{180^\circ \times 4}{5\pi} = \mathbf{45^\circ\ 50'\ 11''}$

1.011. Constrúyase un cono de revolución tal que el diámetro $2r = 6$ cm y que el área lateral sea los $5/3$ de la base. Calcúlese además el radio y el ángulo del sector que representa el desarrollo del área lateral del mismo.

El área lateral es πrl *y la de la base* πr².

Se tendrá, por tanto: $$\frac{\pi rl}{\pi r^2} = \frac{l}{r} = \frac{5}{3}$$

de donde, radio del sector: $$\mathbf{l} = \frac{5 \times 3}{3} = \mathbf{5\ cm}$$

La longitud del arco del sector es igual a la de la circunferencia básica:

$$\frac{\pi l n}{180} = 2\pi r$$

$$\mathbf{n} = \frac{360r}{l} = \frac{360 \times 3}{5} = \mathbf{216^o}$$

VI. Volumen del cono

1.012. Hállese la fórmula del volumen del cono en función de la generatriz y del radio.

Vol. del cono: $\mathrm{V} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$ *pero* $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

Sustituyendo $$\mathbf{V} = \frac{\pi \mathbf{r}^2 \sqrt{\mathbf{l}^2 - \mathbf{r}^2}}{\mathbf{3}}$$

1.013. Hállese la fórmula del volumen del cono en función de la generatriz y de la altura:

En el triángulo rectángulo VOA (fig. 517), *tenemos:*

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{VA}^2 - \mathrm{VO}^2 \quad \textit{o sea} \quad \mathrm{r}^2 = l^2 - h^2$$

$$\mathbf{V} = \frac{\pi (\mathbf{l}^2 - \mathbf{h}^2)\,\mathbf{h}}{\mathbf{3}}$$

1.014. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya altura es de 1,35 m y el área de la base de 3,4 m²?

$$\mathbf{V} = \frac{3{,}4 \times 1{,}35}{3} = \mathbf{1{,}53\ m^3}$$

1.015. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya altura mide 2,1 m y el radio de la base 56 cm?

$$\mathbf{V} = \frac{3{,}1416 \times 0{,}56^2 \times 2{,}1}{3} = \mathbf{0{,}689\,644\ m^3}$$

1.016. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya altura es de 4 m y la generatriz de 5 m?

Radio de la base: $r^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$$V = \frac{3{,}1416 \times 9 \times 4}{3} = \mathbf{37{,}699\ m^3}$$

1.017. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya generatriz es de 1,6 m y la altura de 1,02 m?

Fórm. n.º **1.013:** $V = \frac{3{,}1416 \times (1{,}6^2 - 1{,}02^2) \times 1{,}02}{3} = \mathbf{1{,}623\ 151\ m^3}$

1.018. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya circunferencia de la base es de 1,98 m y la altura de 1,23 m?

Area de la base: $B = \frac{C^2}{4\pi}$

Vol. cono: $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{C^2 \times h}{12\pi} = \frac{1{,}98^2 \times 1{,}23}{12 \times 3{,}1416} = \mathbf{0{,}1279\ m^3}$

1.019. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya generatriz tiene 5,25 m y el diámetro de la base 4,13 m?

Fórm. núm. **1.012:** $V = \frac{3{,}1416 \times 2{,}065^2 \sqrt{5{,}25^2 - 2{,}065^2}}{3} = \mathbf{21{,}55\ m^3}$

1.020. ¿En qué proporción están los volúmenes de dos conos de una misma altura y cuyos diámetros respectivos tienen 56 cm y 1,12 m?

Llamando h *a la altura, los volúmenes de los dos conos serán:*

$$V_1 = \frac{\pi h}{3} \times \frac{0{,}56^2}{4}; \quad V_2 = \frac{\pi h}{3} \times \frac{1{,}12^2}{4}$$

luego: $\frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{V_2}} = \frac{0{,}56^2}{1{,}12^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

1.021. Un cono y un cilindro tienen iguales bases y alturas. ¿En qué proporción están sus volúmenes?

Volumen del cilindro: $V_1 = \pi r^2 h$

Volumen del cono: $V_2 = \frac{\pi r^2 h}{3}$

La relación es de **3** *a* **1.**

1.022. Una pila de heno tiene 6 m de altura; la parte inferior es un cilindro que tiene 3,8 m de alto por 5 m de diámetro; el remate es de forma cónica. Hállese el volumen de heno que contiene:

Vol. del cilindro: $V_1 = \pi \times 2{,}5^2 \times 3{,}8$

Vol. del cono: $V_2 = \pi \times 2{,}5^2 \times \dfrac{6 - 3{,}8}{3}$

Vol. total: $\mathbf{V} = 3{,}1416 \times 2{,}5^2 \left(3{,}8 + \dfrac{2{,}2}{3}\right) = \mathbf{89{,}012\ m^3}$

1.023. Si construimos un cono de revolución con una cartulina dándole por área lateral la de un sector de 120º y radio R (figura 517), hallar el área total y el volumen de dicho cono. Aplicación: R = 27 cm, $\pi = 3{,}14$.

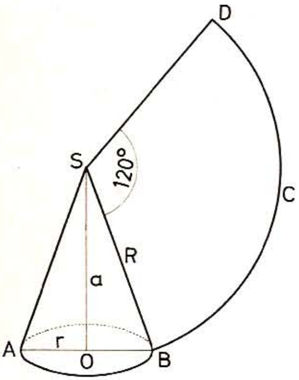


Fig. 517

Sea r *el radio de la base del cono y* h *su altura.*

La circunferencia de la base es igual al arco BD, *esto es, igual a la tercera parte de una circunferencia de radio* R.

$$2\pi r = \frac{2\pi R}{3}$$

de donde $r = \dfrac{2\pi R}{2\pi \times 3} = \dfrac{R}{3}$

El triángulo rectángulo SOB, *dará:*

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{9}} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

Area total:

$$\mathbf{AT} = \pi r\,(l + r) = \pi \cdot \frac{R}{3}\left(R + \frac{R}{3}\right) = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\,\pi\mathbf{R}^2$$

Volumen: $\mathbf{V} = \dfrac{\pi r^2 h}{3} = \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{R^2}{9} \times \dfrac{2R\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\mathbf{2\pi R^3\sqrt{2}}}{\mathbf{81}}$

Aplicación: $\mathbf{AT} = \dfrac{4}{9} \times 3{,}14 \times 27^2 = \mathbf{1017{,}36\ \ cm^2}$

$$\mathbf{V} = \frac{2 \times 3{,}14 \times 27^3 \times 1{,}414}{81} = \mathbf{2151{,}716\ cm^3}$$

VII. Area del tronco de cono

1.024. Hallar la fórmula del área total del tronco de cono en función de la generatriz y de los radios.

Sean R *y* r *los radios,* l *la generatriz:*

Area de las bases: $\pi R^2 + \pi r^2 = \pi(R^2 + r^2)$
Area lateral: $\pi(R + r)l$
Area total: $\mathbf{AT} = \pi(R^2 + r^2) + \pi\,(R + r)l = \pi\ \mathbf{R^2 + r^2 + l\,(R + r)]}$

1.025. Hallar una fórmula para calcular el área total del tronco de cono en función de la altura y de los radios.

En la fórmula anterior: $\mathrm{AT} = \pi\,[\mathrm{R}^2 + r^2 + l\,(\mathrm{R} + r)]$

sustituyamos l *por su valor en función de la altura y de los radios.*

$$l = \sqrt{a^2 + (\mathrm{R} - r)^2}$$

$$\mathbf{AT = \pi\,[R^2 + r^2 + (R + r)\sqrt{a^2 + (R - r)^2}\,]}$$

1.026. ¿Cuál es el área lateral de una cuba de forma tronco-cónica si el diámetro del fondo tiene 2,1 m, el de la abertura 2,3 m y la generatriz 3,84 m?

Area lateral: $\mathrm{AL} = \pi l\,(\mathrm{R} + r)$

$$\mathbf{AL} = 3{,}1416\,(1{,}05 + 1{,}15) \times 3{,}84 = \mathbf{26{,}5402\ m^2}$$

1.027. ¿Cuál es el área de un tronco de cono, si la generatriz es de 6 m y la suma de las circunferencias de las bases paralelas 8,48 m?

$$\mathbf{A} = \frac{8{,}48}{2} \times 6 = \mathbf{25{,}44\ m^2}$$

1.028. ¿Cuántos metros cuadrados de hojalata se necesitan para hacer un vaso cuya forma es la de un tronco de cono con tapa, si las dos bases tienen 20 y 29 cm de radio y la profundidad es 12 cm? ($\pi = 22/7$).

Area lateral: $\mathrm{AL} = \quad (20 + 29)\sqrt{9^2 + 12^2} = 2310\ \mathrm{cm}^2$

Area bases: $\mathrm{AB} = \dfrac{22}{7}\,(20^2 + 29^2) = 3900{,}3\ \mathrm{cm}^2$

Area total: $\mathbf{6210{,}3\ cm^2}$

1.029. Hallar el área interior y exterior de una chimenea que mide 22 m de altura y cuyos radios interior y exterior de la base superior tienen 30 y 40 cm y los de la base inferior 1 m y 1,2 m.

Area interior: $3{,}1416\,(0{,}3 + 1)\sqrt{22^2 + 0{,}7^2} = \mathbf{88{,}855\ m^2}$

Area exterior: $3{,}1416\,(0{,}4 + 1{,}2)\sqrt{22^2 + 0{,}8^2} = \mathbf{110{,}657\ m^2}$

1.030. En un cono de 6 m de altura y 4 m de radio se traza a 2 m del vértice una sección paralela a la base. Hallar el área lateral del tronco de cono que resulta.

El área pedida es la diferencia entre las áreas laterales de dos conos; éstas son entre sí como los cuadrados de sus líneas homólogas.

Area lateral del cono total: $\mathrm{AL} = \pi \cdot 4 \cdot \sqrt{6^2 + 4^2} = 4\pi\sqrt{52}\ \mathrm{m}^2.$

Sea x *el área lateral del cono deficiente, tendremos:*

$$\frac{x}{4\pi\sqrt{52}} = \frac{2^2}{6^2} = \frac{1}{9} \quad \textit{de donde} \quad x = \frac{4\pi\sqrt{52}}{9}\ \mathrm{m}^2$$

Area lateral del tronco de cono:

$$\mathbf{AL} = 4\pi\sqrt{52} - \frac{4\pi\sqrt{52}}{9} = \frac{4\pi\sqrt{52} \times 8}{9} = \mathbf{80{,}53\ m^2}$$

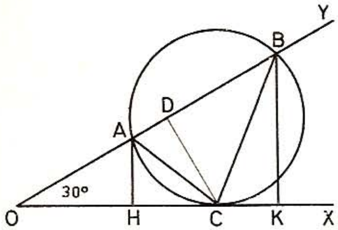


Fig. 518

1.031. Dado un ángulo XOY = 30° (figura 518), y sobre el lado OY dos puntos A y B tales que sea OA = 4 m y OB = 9 m, por A y B trazamos una circunferencia que sea al mismo tiempo tangente a la recta OX.

1.° Siendo C el punto de contacto sobre OX, calcúlese el valor de OC y además el de CD, altura del triángulo ABC, así como las distancias AH y BK desde los puntos A y B a la recta OX.

2.° Hallar el área engendrada por el segmento AB al girar alrededor del eje OX.

• 1.° $\mathbf{OC} = \sqrt{OA \times OB} = \sqrt{36} = \mathbf{6}$ **m**

Siendo $\angle XOY = 30°$; $\mathbf{CD} = \frac{OC}{2} = \mathbf{3}$ **m**

Asimismo $\mathbf{AH} = \frac{OA}{2} = \mathbf{2}$ **m**

y $\mathbf{BK} = \frac{OB}{2} = \mathbf{4{,}5\ m}$

• 2.° $\mathbf{A} = \pi\,(AH + BK) \times AB = 3{,}1416 \times 6{,}5 \times 5 = \mathbf{102{,}102\ m^2}$.

VIII. Volumen del tronco de cono

1.032. ¿Cuál es el volumen de un tronco de cono de bases paralelas si la base inferior tiene 2,25 m², la superior 1,21 m² y la altura del tronco 90 cm?

$$\mathbf{V} = \frac{0{,}9}{3}\,(2{,}25 + 1{,}21 + \sqrt{2{,}25 \times 1{,}21}) = \mathbf{1{,}533\ m^3}$$

1.033. ¿Cuál es el volumen de un tronco de cono de bases paralelas cuyo radio de la base superior tiene 42 cm, el de la base inferior 63 cm y la altura del tronco 2,1 m?

$$\mathbf{V} = 3{,}1416 \times \frac{2{,}1}{3}\,(0{,}42^2 + 0{,}63^2 + 0{,}42 \times 0{,}63) = \mathbf{1{,}842\ 646\ m^3}$$

1.034. ¿Cuál es el volumen de un árbol de forma troncocónica de 9,25 m de largo si las circunferencias de los extremos miden 1,5 m y 55 cm?

$$\mathbf{V} = \frac{9{,}25}{3}\left(\frac{1{,}5^2}{4\pi} + \frac{0{,}55^2}{4\pi} + \frac{1{,}5 \times 0{,}55}{4\pi}\right) = \mathbf{0{,}867\ 773\ m^3}$$

1.035. ¿Cuál es el volumen de un árbol troncocónico cuya longitud es igual a 12 veces la suma de las circunferencias de sus extremos, si sus diámetros respectivos tienen 50 y 12 cm?

$$V = 3{,}1416\,(2{,}5^2 + 0{,}6^2 + 2{,}5 \times 0{,}6)\,\frac{12\pi \times 6{,}2}{3} = \mathbf{1985\ dm^3}$$

1.036. Los radios de un tronco de cono tienen respectivamente 90 y 40 cm y la altura es igual al duplo de la media geométrica de estos radios. ¿Cuál es el volumen?

Altura: $h = 2\sqrt{9 \times 4} = 12$ dm

$$V = 3{,}1416 \times \frac{12}{3}\,(9^2 + 4^2 + 9 \times 4) = \mathbf{1253{,}498\ dm^3}$$

1.037. Los radios de un tronco de cono tienen respectivamente 90 y 40 cm y la generatriz es igual a la suma de los radios. ¿Cuál es el volumen? ($\pi = 22/7$).

Generatriz: $9 + 4 = 13$ dm

Altura: $\sqrt{13^2 - (9-4)^2} = 12$ dm

$$V = \frac{22}{7} \times \frac{12}{3}\,(9^2 + 4^2 + 9 \times 4) = \mathbf{1672\ dm^3}$$

1.038. Una cuba llena de vino tiene la forma de un cono truncado de 1 m de profundidad; el diámetro del fondo es de 85 cm, el de la abertura de 1,25 m. ¿Cuántos toneles de 108 litros de capacidad se podrán llenar con el vino de la cuba?

$$V = 3{,}1416 \times \frac{10}{3}\,(6{,}25^2 + 4{,}25^2 + 6{,}25 \times 4{,}25) = 876{,}3755\ dm^3$$

Número de toneles: $\frac{V}{108} =$ **8 toneles** *(sobrarán* 12,3755 *litros).*

1.039. Un mástil tiene 24 m de largo; el extremo alto tiene 0,38 m de diámetro y el diámetro de la base es los 15/7 del otro del extremo alto. Hállese el volumen.

$$V = \frac{\pi h}{3}\,(R^2 + r^2 + Rr)$$

$$V = 3{,}1416 \times \frac{24}{3}\left[0{,}19^2 + \left(\frac{0{,}19 \times 15}{7}\right)^2 + \frac{0{,}19^2 \times 15}{7}\right] = \mathbf{7{,}021\,675\ m^3}$$

1.040. Un hojalatero tiene que hacer una alcuza de forma análoga a la de la figura 519 y con las dimensiones indicadas en la misma. Hallar el área lateral y el volumen de esa alcuza.

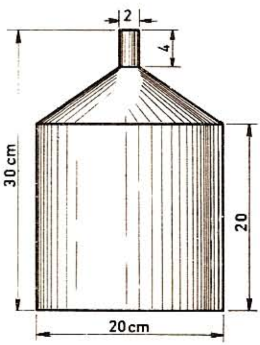


Fig. 519

La alcuza se compone de dos cilindros y de un tronco de cono.
Area lateral del cilindro menor:

$$2\pi r'h' = 2 \times 3{,}1416 \times 1 \times 4 = 25{,}13 \text{ cm}^2$$

Area lateral del cilindro mayor:

$$2\pi rh = 2 \times 3{,}1416 \times 10 \times 20 = 1256{,}64 \text{ cm}^2$$

Area del tronco de cono:

$$3{,}1416 \times 11 \times \sqrt{36 + 81} = 373{,}73 \text{ cm}^2$$

Area lateral: $\mathbf{AL = 1655{,}50\ cm^2}$

Vol. del cilindro menor: $3{,}1416 \times 1 \times 4 = 12{,}57 \text{ cm}^3$

Vol. del cilindro mayor: $3{,}1416 \times 10^2 \times 20 = 6283{,}20 \text{ cm}^3$

Vol. del tronco de cono: $3{,}1416 \times \quad (100 + 1 + 10) = 697{,}43 \text{ cm}^3$

Vol. total: $\mathbf{V = 6993{,}20\ cm^3}$

IX. Dimensiones del cono y del tronco de cono

1.041. ¿Cuál es la fórmula que permite hallar la generatriz l de un cono en función de la altura y del radio?

$$\mathbf{l = \sqrt{h^2 + r^2}}$$

1.042. Hallar la altura de un cono en función de la generatriz y del radio.

$$\mathbf{h} = \sqrt{l^2 - \mathbf{r}^2} = \mathbf{\sqrt{(l + r)(l - r)}}$$

1.043. Calcular el radio de un cono en función de la generatriz y de la altura.

$$\mathbf{r} = \sqrt{l^2 - h^2} = \mathbf{\sqrt{(l + h)(l - h)}}$$

1.044. ¿Cuál es la generatriz de los conos que tienen las dimensiones respectivas siguientes: alturas, 6, 9 y 12 m; radios, 4, 3 y 4 m?

- 1.^{er} *cono* $\mathbf{l} = \sqrt{36 + 16} = \mathbf{7{,}211\ m}$
- 2.º » $\mathbf{l} = \sqrt{81 + 9} = \mathbf{9{,}49\ m}$
- 3.^{er} » $\mathbf{l} = \sqrt{144 + 16} = \mathbf{12{,}64\ m}$

1.045. ¿Cuál es la altura de los conos que tienen las siguientes dimensiones respectivas: generatrices, 12, 16 y 20 m; radios, 4, 5 y 6 m?

- 1.^{er} *cono* $\mathbf{h} = \sqrt{144 - 16} = \mathbf{11{,}313\ m}$
- 2.º » $\mathbf{h} = \sqrt{256 - 25} = \mathbf{15{,}198\ m}$
- 3.^{er} » $\mathbf{h} = \sqrt{400 - 36} = \mathbf{19{,}078\ m}$

1.046. ¿Cuál es el radio de los conos que tienen las siguientes dimensiones respectivas: generatrices, 6, 9 y 12 m; alturas, 5, 6 y 4 m?

- 1.er *cono* $\mathbf{r} = \sqrt{36 - 25} =$ **3,316 m**
- 2.º » $\mathbf{r} = \sqrt{81 - 36} =$ **6,708 m**
- 3.er » $\mathbf{r} = \sqrt{144 - 16} =$ **11,313 m**

1.047. ¿Cuál es la generatriz de un cono recto cuya área lateral tiene 30,8 m^2 y el radio de la base 2,109 m?

$$A = \pi r l \quad \textit{de donde} \quad l = \frac{A}{\pi r}$$

$$\mathbf{l} = \frac{30{,}8}{3{,}1416 \times 2{,}109} = \mathbf{4{,}648\ m}$$

1.048. ¿Cuál es la circunferencia de la base de un cono cuya área lateral es de 28 m^2 y la generatriz de 7 m?

$$A = \pi r l; \quad 2A = 2\pi r l \quad \textit{de donde} \quad 2\pi r = \frac{2A}{l}.$$

$$\mathbf{C} = \frac{2 \times 28}{7} = \mathbf{8\ m}$$

1.049. ¿Cuál es la altura de un cono que tiene 3,077 m^3 de volumen y 35 cm de radio en la base?

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad \textit{de donde} \quad h = \frac{3V}{\pi r^2}$$

$$\mathbf{h} = \frac{3 \times 3{,}077}{\pi \times 0{,}35^2} = \mathbf{23{,}924\ m}$$

1.050. ¿Cuál es la altura de un cono cuyo volumen es de 0,188 65 m^3 y cuya circunferencia de la base tiene 1,54 m?

$$V = \frac{h}{3} \times B = \frac{h}{3} \times \frac{C^2}{4\pi}$$

$$0{,}188\,65 = \frac{h}{3} \times \frac{1{,}54^2}{4\pi}$$

$$\mathbf{h} = \frac{0{,}188\,65 \times 12 \times 3{,}1416}{1{,}54^2} = \mathbf{2{,}998\ m}$$

1.051. ¿Cuál es la altura de un cono cuyo volumen tiene 4 m^2 y la base 3,6 m^2?

$$V = \frac{1}{3} B \times h$$

de donde $$\mathbf{h} = \frac{3V}{B} = \frac{3 \times 4}{3{,}6} = \mathbf{3{,}33\ m}$$

1.052. ¿Cuál es el radio de un cono cuyo volumen es de 1,6 m^3 y la altura de 80 cm?

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{3 \times 1{,}6}{\pi \times 0{,}8}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}} = \mathbf{1{,}382\ m}$$

1.053. Una cuba cónica de 20 cm de alta está llena de agua. ¿A qué altura subirá el agua cuando se haya vertido la mitad? (figura 520).

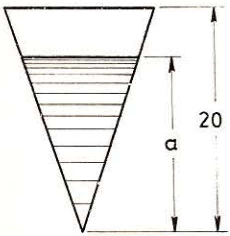


Fig. 520

$$\frac{V}{V'} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{2}{1}$$

como H = 20 cm:

$$\frac{20^3}{h^3} = \frac{2}{1}$$

de donde:

$$\mathbf{h} = \sqrt[3]{\frac{20^3}{2}} = 20\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \mathbf{15{,}87\ cm}$$

1.054. Un embudo de 20 cm de diámetro ha de tener 2 litros de capacidad. ¿Cuál será su altura?

Volumen: $$\pi \times 1 \times \frac{h}{3} = 2\ dm^3$$

de donde: $$\mathbf{h} = \frac{6}{3{,}1416} = 6 \times 0{,}318\ 31 = \mathbf{1{,}91\ dm}$$

1.055. ¿Cuál es el diámetro de un cono de estaño que tiene 25 cm de altura y cuyo peso es de 19 111,4 gramos? Densidad del estaño: 7,3.

Tomando por unidad el decímetro, tendremos:

Volumen cono: $$\frac{19{,}1114}{7{,}3} = \pi r^2 \times \frac{2{,}5}{3}$$

diámetro: $$\mathbf{2r} = 2\sqrt{\frac{19{,}1114 \times 3}{7{,}3 \times 2{,}5 \times \pi}} = 2 \times 1 = \mathbf{2\ dm}$$

1.056. El radio de la base de un cono recto es de 2,10 m y la generatriz es igual a los 4/5 de la circunferencia de la base. Hállese:

1.º El área lateral del cono.
2.º La altura del mismo.

- 1.º $$\mathbf{AL} = \pi rl = 2 \times 3{,}1416 \times 2{,}1 \times \frac{4}{5} \times 3{,}1416 \times 2{,}1 = \mathbf{69{,}64\ m^2}$$

- 2.º $$\mathbf{h} = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{5} \times 2 \times 3{,}1416 \times 2{,}1\right)^2 - 2{,}1^2} = \mathbf{10{,}34\ m}$$

1.057. Un embudo tiene 13 litros de capacidad. Hallar su diámetro y su profundidad, si ésta es el duplo del diámetro.

$$V = \pi r^2 \times \frac{h}{3} = \pi r^2 \times \frac{4r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

de donde: $$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{13 \times 3}{3{,}1416 \times 4}} = 1{,}46 \text{ dm}$$

Diámetro: **0,291 m** *Altura:* **0,582 m**

1.058. Hallar el radio de la base de un cono que tiene 1 m^3 de volumen y 3 m de altura.

Volumen: $$\pi r^2 \times \frac{3}{3} = 1$$

de donde: $$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = \sqrt{0{,}3183} = \mathbf{0{,}56\ m}$$

1.059. Hallar la altura de un cono truncado en función del volumen y de los radios.

Llamando R *y* r *a los radios de las bases, tendremos:*

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{3V}}{\pi(\mathbf{R^2 + r^2 + Rr})}$$

1.060. ¿Cuál es el radio de la base inferior de un tronco de cono recto que tiene 30,615 m^2 de área lateral y 1,95 m de generatriz, si el radio de la base superior es de 1,4 m? ($\pi = 3{,}14$).

$$AL = \pi(R + r)l$$
$$30{,}615 = 3{,}14\,(R + 1{,}4)\,1{,}95$$

$$R + 1{,}4 = \frac{30{,}615}{3{,}14 \times 1{,}95} = 5 \text{ m}$$

$$\mathbf{R} = 5 - 1{,}4 = \mathbf{3{,}6\ m}$$

1.061. ¿Cuál es la profundidad de un vaso de 11,176 litros de capacidad, cuya forma es la de un cono truncado, sabiendo que el diámetro superior tiene 24 cm y el inferior 28 cm? ($\pi = 22/7$).

Volumen tronco: $$\frac{\pi h}{3}(1{,}2^2 + 1{,}4^2 + 1{,}2 \times 1{,}4) = 11{,}176$$

$$\mathbf{h} = \frac{11{,}176 \times 3 \times 7}{22 \times 5{,}08} = \mathbf{2{,}1\ dm}$$

1.062. Un cono tiene 2,25 m de radio y 3 m de altura. ¿Cuál es por metro la inclinación de la generatriz?

La inclinación de la generatriz es de $\frac{3}{2{,}25} = \mathbf{1{,}33}$

1.063. Un cono tiene 3 m de altura y 4 de diámetro. ¿Cuál es el ángulo formado por la altura y la generatriz?

Tangente: $2 : 3 = 0{,}666$
La tabla de tangentes da **33° 39′.**

1.064. ¿Cuál es el precio de 4 troncos de árbol troncocónicos de 4 m de largo, sabiéndose que los radios de los extremos de cada uno tienen 34 y 26 cm y que el metro cúbico vale 196 pts? ¿Cuál sería la diferencia de precio si se consideraran como cilindros cuya base fuera la media aritmética de las bases dadas?

Precio troncos: $\frac{4\pi}{3}(0{,}17^2 + 0{,}13^2 + 0{,}17 \times 0{,}13) \times 4 \times 196$ pts

Precio cilindros: $\pi\left(\frac{0{,}17 + 0{,}13}{2}\right)^2 \times 4 \times 4 \times 196$ pts

Diferencia: $16\pi \times 196\left[\frac{0{,}17^2 + 0{,}13^2 + 0{,}17 \times 0{,}13}{3} - 0{,}15^2\right] = \mathbf{1{,}31\ pts}$

1.065. Un pan de azúcar queda dividido por una sección paralela a la base en dos porciones equivalentes. Si el cono tiene 0,54 m de altura por 0,18 m de diámetro, ¿qué altura tendrá el cono deficiente que resulta?

Siendo los volúmenes de dos conos semejantes proporcionales a los cubos de las alturas, tendremos llamando x *a la altura:*

$$\frac{x^3}{0{,}54^3} = \frac{1}{2}$$

de donde:
$$\mathbf{x} = \sqrt[3]{\frac{0{,}54^3}{2}} = \mathbf{0{,}428\ m}$$

1.066. Desde el vértice de una hojalata rectangular (fig. 521) se describe un arco de circunferencia con un radio igual al lado menor, y se construye un cono con el sector así obtenido. Hállese la altura y el volumen de este cono.

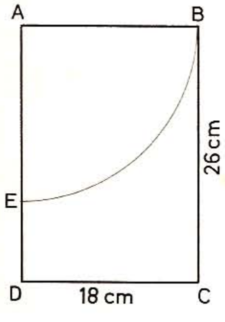


Fig. 521

El área lateral del cono es igual al sector circular ABE.

Luego $$\pi r \times 18 = \frac{\pi \times 18^2}{4}$$

de donde, radio de la base: $r = 4{,}5$ cm

$$\mathbf{h} = \sqrt{18^2 - 4{,}5^2} = \mathbf{17{,}4\ cm}$$
$$\mathbf{V} = \frac{17{,}4\pi}{3} \times 4{,}5^2 = \mathbf{369\ \ cm^3}$$

1.067. Dos vasos de forma cónica y de peso igual, tienen 25 cm de altura interior y 12 cm de diámetro. Se llena el uno de éter cuya densidad es 0,71 y el otro de ácido sulfúrico cuya densidad es 1,84. Hállese la diferencia de peso de los dos vasos.

Tomemos por unidad el centímetro para obtener el peso en gramos

Peso del ácido sulfúrico: $\dfrac{\pi \times 6^2 \times 25 \times 1{,}84}{3}$

Peso del éter: $\dfrac{\pi \times 6^2 \times 25 \times 0{,}71}{3}$

Diferencia: $\dfrac{\pi \times 6^2 \times 25}{3} \times (1{,}84 - 0{,}71) = \mathbf{1065\ g}$

1.068. Las dos bases paralelas de un tronco de cono son de 22 y 40 dm². Hallar el diámetro que ha de darse a un cilindro de igual altura y de volumen equivalente.

Volumen: $\dfrac{h}{3}(22 + 40 + \sqrt{22 \times 40}) = \pi r^2 h$

$$r^2 = \frac{62 \times \sqrt{22 \times 40}}{3\pi}; \quad \mathbf{2r} = 2\sqrt{\frac{62 + \sqrt{880}}{3\pi}} = \mathbf{62{,}3\ cm}$$

1.069. Se ha hincado verticalmente en el suelo, cerca de un árbol cuya sombra tiene 34 m, un jalón de 1,4 m de altura y cuya sombra es de 2,1 m. Hallar:

1.º La altura del árbol.

2.º Su volumen, siendo de 1,2 m la circunferencia de la base, y suponiéndolo perfectamente cilíndrico.

Llamemos x *a la altura del árbol; tendremos:*

- 1.º $\dfrac{14}{21} = \dfrac{x}{34}$; $\mathbf{x} = 22\dfrac{2}{3} = \mathbf{22{,}67\ m}$
- 2.º *Volumen:* $\mathbf{V} = \dfrac{1{,}2^2}{4\pi} \times 22\dfrac{2}{3} = \mathbf{0{,}865\ m^3}$

1.070. El triángulo rectángulo ABC (fig. 522) gira alrededor de BC. Calcular:

1.º El área total engendrada.

2.º El volumen. Dimensiones: hipotenusa, AC = 15 cm; BC = 10 cm

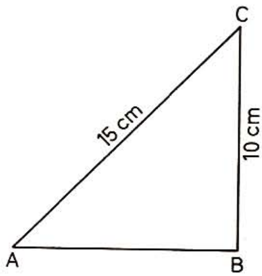


Fig. 522

$$AB = \sqrt{15^2 - 10^2} = 5\sqrt{5}\ \text{cm}$$

- 1.º *Area total:* $\mathbf{AT} = \pi 5\sqrt{5} \times (15 + 5\sqrt{5}) = \mathbf{919{,}54\ cm^2}$
- 2.º *Volumen:* $\mathbf{V} = \pi \times 125 \times \dfrac{10}{3} = \mathbf{1309\ cm^3}$

1.071. Hallar la superficie total y el volumen, si el mismo triángulo gira alrededor de AB.

- 1.º *Area total:* $\mathbf{AT} = \pi \times 10 \times (10 + 15) = \mathbf{785{,}40\ cm^2}$
- 2.º *Volumen:* $\mathbf{V} = \pi \times \dfrac{10^2\sqrt{125}}{3} = \mathbf{1170{,}801\ cm^3}$

1.072. El trapecio ABCD (fig. 523) gira alrededor de BC. Hallar el área engendrada por AD y el volumen engendrado por el trapecio.

- 1.º *Area engendrada por* AD: $\pi\,(10 + 25)\,25 = \mathbf{2748{,}9\ cm^2}$
- 2.º *El volumen engendrado será el de un tronco de cono:*

$$V = \frac{\pi h}{3}\,(r^2 + r'^2 + rr')$$

$$h = AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{25^2 - (25 - 10)^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ cm}$$

$$\mathbf{V} = 3{,}1416 \times \frac{20}{3}\,(25^2 + 10^2 + 25 \times 10) = \mathbf{20\,420{,}4\ cm^3}$$

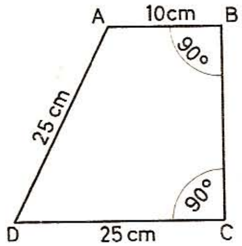


Fig. 523

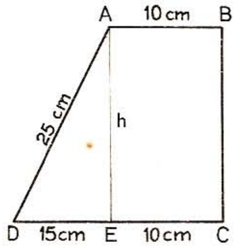


Fig. 524

1.073. Hallar el área total engendrada y el volumen, si el mismo trapecio gira alrededor de DC (fig. 524).

- 1.º *Area* AD $= \pi \times 20 \times 25 = 1\,570{,}80$ cm²
  Area AB $= 2\pi \times 20 \times 10 = 1\,256{,}64$ cm²
  Area BC $= \pi \times 400 = 1\,256{,}64$ cm²

  Area total: **4 084,08 cm²**

- 2.º *Vol.* ADE $= \dfrac{\pi \times 400}{3} \times 15 = 7\,183{,}20$ cm³
  Vol. ABCE $= \pi \times 400 \times 10 = 12\,566{,}40$ cm³

  Volumen total: **19 746,60 cm³**

1.074. El agua contenida en un vaso cónico de 18 cm de altura y 24 cm de diámetro se vierte en un vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro. ¿Hasta qué altura subirá el agua?

$$V = \pi \times 12^2 \times \frac{18}{3} = \pi \times 5^2 \times h$$

$$\mathbf{h} = \frac{144 \times 6}{25} = \mathbf{34{,}56\ cm}$$

1.075. Una cuba en forma de cono truncado tiene la base elíptica; los ejes del fondo tienen respectivamente 1,8 m y 1,2 m; los de la abertura tienen 2,08 m y 1,5 m. ¿Cuál es su capacidad si la altura es de 86 cm?

Area de la elipse: πab. (GEOM. **914.**)

Volumen de la cuba:

$$\mathbf{V} = \frac{8,6\pi}{3}(9 \times 6 + 10,4 \times 7,5 + \sqrt{9 \times 6 \times 10,4 \times 7,5}) = \mathbf{1772,4\ l}$$

1.076. Hallar el ángulo del sector formado por el desarrollo de la superficie lateral de un cono de 4 m de circunferencia y 5 m de generatriz.

Véase el n.º **1.010.**

1.077. Tres conos macizos de latón, de 50 cm de altura, tienen por diámetros 12, 24 y 36 cm. Hallar la arista del cubo equivalente a estos tres conos.

Vol. total: $\frac{0,6^2 \times 5\pi}{3} + \frac{1,2^2 \times 5\pi}{3} + \frac{1,8^2 \times 5\pi}{3}$

$$\text{VT} = \frac{5\pi \times 0,6^2}{3}(1 + 4 + 9) = 26,38944 \text{ dm}^3$$

Arista: $\mathbf{a} = \sqrt[3]{26,38944} = \mathbf{2,97\ dm}$

1.078. En un círculo de hojalata de 84 cm de radio se corta un sector de 150º para hacer un cono. Hallar:

1.º El radio de la base de este cono.
2.º El volumen.
3.º El volumen del cono hecho con el sobrante de la hojalata.

• 1.º *Longitud del arco del sector:* $l = \frac{\pi \times 84 \times 150}{180}$ cm

Este arco forma la circunferencia de base del cono:

$$2\pi r = \frac{\pi \times 84 \times 150}{180}$$

de donde:

$$\mathbf{r} = \frac{84 \times 150}{180 \times 2} = \mathbf{35\ cm}$$

• 2.º *Volumen:* $\mathbf{V} = \frac{\pi \times 35^2\sqrt{84^2 - 35^2}}{3} = \mathbf{100\ 765,511\ cm^3}$

• 3.º *Long. del arco parte sobrante:* $\text{L} = \frac{\pi \times 84 \times 210}{180}$ cm

Long. circunferencia base: $2\pi\text{R} = \frac{\pi \times 84 \times 210}{180}$

Radio de la base: $\text{R} = \frac{84 \times 210}{360} = 49$ cm

Volumen del cono: $\mathbf{V} = \frac{\pi \times 49^2 \times \sqrt{84^2 - 49^2}}{3} = \mathbf{171\ 552,545\ cm^3}$

X. Area de la esfera

1.079. Una esfera tiene 3,08 m de radio. ¿Cuál es:
1.º La circunferencia de un círculo máximo.
2.º El área de la esfera?

● 1.º *El radio de la circunf. de un círculo máximo es el de la esfera.*

$$\mathbf{C} = 2\pi r = 2 \times 3{,}1416 \times 3{,}08 = \mathbf{19{,}352\ m}$$

● 2.º *Area esfera:* $A = 4\pi r^2 = 2\pi r \times 2r = C \times 2r$
$\mathbf{A} = 19{,}352 \times 6{,}16 = \mathbf{119{,}2083\ m^2}$

1.080. ¿Cuál es el área de una sección central en una esfera de 2,4 m de radio?

El área pedida es la de un círculo máximo:

$$\mathbf{A} = \pi r^2 = 3{,}1416 \times 5{,}76 = \mathbf{18{,}0956\ m^2}$$

1.081. Expresar en función del radio r de una esfera el área total de un hemisferio y de su base.

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Area del hemisferio:} & 2\pi r^2 \\ \textit{Area del círculo máximo:} & \pi r^2 \end{array}\right\} \quad \textit{Area total:} \quad \mathbf{AT = 3\pi r^2}$$

1.082. ¿Cuál es el área de una esfera, si la circunferencia de un círculo máximo tiene 4,84 m?

Según **1.079**-2.º: $A = C \times D$

Pero $D = \dfrac{C}{\pi}$

de donde: $\mathbf{A} = C \times \dfrac{C}{\pi} = 4{,}84^2 \times 0{,}3183 = \mathbf{7{,}4565\ m^2}$

1.083. Expresar el radio de una esfera en función del área.

Tenemos (GEOM. **960**) $A = 4\pi r^2$

de donde $\mathbf{r} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{4\pi}}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{\dfrac{\mathbf{A}}{\pi}}$

1.084. ¿Cuál es el radio de una esfera que tiene 6,16 m² de área?

Según n.º **1.083:** $\mathbf{r} = \sqrt{\dfrac{A}{4\pi}} = \sqrt{\dfrac{6{,}16}{12{,}5664}} = \mathbf{0{,}7\ m}$

1.085. Expresar la circunferencia máxima de una esfera en función del área A de dicha esfera.

Tenemos: $A = 4\pi r^2$ *y* $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

Sustituyendo r *por su valor en:* $C = 2\pi r$

da:
$$\mathbf{C} = 2\pi \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}} = \pi\sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\mathbf{A}\pi}$$

1.086. ¿Cuál es la circunferencia máxima de una esfera que tiene 12 m^2 de área?

Según **1.085:** $C = \sqrt{A\pi} = \sqrt{12 \times 3{,}1416} = \mathbf{6{,}14\ m}$

1.087. ¿Cuál es, en función del diámetro exterior D y del espesor *e*, el área interior y exterior de una esfera hueca?

Si D *es el diámetro exterior,* D — 2e *será el diámetro interior.*

Area exterior: $\pi\mathbf{D}^2$
Area interior: $\pi\mathbf{(D - 2e)}^2$

1.088. ¿Cuál es el área exterior e interior de una esfera hueca de 35 mm de espesor, si el diámetro exterior tiene 1,05 m?

Area exterior: $\pi D^2 = 3{,}1416 \times 1{,}05^2 = \mathbf{3{,}4636\ m^2}$
Area interior: $\pi\,(D - 2e)^2 = 3{,}1416 \times 0{,}98^2 = \mathbf{3{,}0172\ m^2}$

1.089. ¿Cuál es en dm^2 el área de una bala de cañón de forma esférica cuyo radio es de 10 cm?

$$A = 4\pi r^2 = 4 \times 3{,}1416 \times 1^2 = \mathbf{12{,}5664\ dm^2}$$

1.090. ¿Cuál es el espesor de una esfera hueca cuyas áreas interior y exterior son de 3 m^2 y 3,12 m^2?

El espesor pedido es la diferencia entre los radios R *y* r.

$$4\pi R^2 = 3{,}12; \quad \textit{de donde} \quad R = \sqrt{\frac{3{,}12}{4\pi}} = 0{,}4983\ m$$

$$4\pi r^2 = 3; \quad \textit{de donde} \quad r = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} = 0{,}4886\ m$$

Espesor: **0,0097 m**

1.091. ¿Cuál es el área total de un cilindro, de un cono y de una esfera, siendo *r* el radio de estos tres cuerpos y 2*r* la altura de los dos primeros? Aplicación en el caso que $r = 25$ cm.

Area esfera: $\mathbf{A = 4\pi r^2}$
Area total cilindro: $\mathbf{AT} = 2\pi r\,(l + r) = 2\pi r \times 3r = \mathbf{6\pi r^2}$
Area total cono: $AT = \pi r\,(l + r)$
$l = \sqrt{4r^2 + r^2} = \sqrt{5r^2} = r\sqrt{5}$
Sustituyendo $\mathbf{AT} = \pi r\,(r\sqrt{5} + r) = \pi\mathbf{r^2\,(\sqrt{5} + 1)}$
Suma áreas: $\mathbf{S} = 4\pi r^2 + 6\pi r^2 + \pi r^2\,(\sqrt{5} + 1) = \pi\mathbf{r^2\,(11 + \sqrt{5})}$
Para r = 25 cm: $\mathbf{S} = 3{,}1416 \times 25^2 \times 13{,}236 = \mathbf{25\ 988{,}886\ cm^2}$

1.092. ¿Cuál es el área total de un segmento esférico de una base de 80 cm de altura en una esfera de 2,1 m de radio?

El área pedida se compone del área del casquete esférico más el área del círculo de la base.

Area del casquete: $2\pi rh = 6{,}2832 \times 2{,}1 \times 0{,}8 = 10{,}5557 \text{ m}^2$

Calculemos el radio x *del círculo de la base. Este radio es una media proporcional entre los dos segmentos del diámetro*

$$x^2 = 3{,}4 \times 0{,}8 = 2{,}72$$

Area de la base: $\pi x^2 = 3{,}1416 \times 2{,}72 = 8{,}5451 \text{ m}^2$

Area total: $\mathbf{AT} = 10{,}5557 + 8{,}5451 = \mathbf{19{,}1008\ m^2}$

1.093. Expresar la altura de un casquete esférico en función de su área y del radio de la esfera.

Llamemos h *a la altura,* r *al radio de la esfera y* A *al área del casquete dado.*

Tenemos (GEOM. **959,** 3.ª):

$$\text{A} = 2\pi rh \quad \textit{de donde} \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{2\pi r}}$$

1.094. ¿Cuál es la altura de un casquete esférico de 3 m² en una esfera de 1 m de radio?

Según n.º **1.093:** $\mathbf{h} = \dfrac{3}{6{,}2832 \times 1} = \mathbf{0{,}4774\ m}$

1.095. Una esfera cuyo radio tiene 4 m está cortada por dos planos que pasan a un mismo lado del centro, a 2 y 3 m. Se pregunta:

1.º ¿Cuál es el área de la zona resultante?

2.º ¿Cuáles son las áreas de las dos bases de esta zona?

● 1.º *La altura de la zona es de* 1 m.

Area de la zona: $\mathbf{A} = 2\pi rh = 6{,}2832 \times 4 \times 1 = \mathbf{25{,}1328\ m^2}$

● 2.º *Radios de las bases:*

$$r_1^2 = 4^2 - 2^2 = 12; \qquad r_2^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

Area 1.ª base: $\mathbf{A_1} = 3{,}1416 \times 12 = \mathbf{37{,}6992\ m^2}$

Area 2.ª base: $\mathbf{A_2} = 3{,}1416 \times 7 = \mathbf{21{,}9912\ m^2}$

1.096. Una esfera tiene 1,8 m de radio. ¿Cuál sería el radio de un círculo equivalente a una zona de esta esfera, cuya altura fuera de 20 cm?

Sea x *el radio del círculo pedido.*

Tendremos: $\pi x^2 = 2\pi rh$

De donde: $\mathbf{x} = \sqrt{2rh} = \sqrt{2 \times 1{,}8 \times 0{,}2} = \mathbf{0{,}848\ m}$

1.097. En una esfera de 42 cm de radio se trazan, a un mismo lado del centro, planos paralelos, a 14 cm de distancia. Hallar los radios de las bases de las zonas y del casquete que resultan.

Número de zonas que se ha de determinar: 42 : 14 = 3.

Habrá 3 *secciones; la* 1.ª *será un círculo máximo:* $\mathbf{r_1} = \mathbf{42\ cm.}$

El radio de la 2.ª sección será una media proporcional entre los dos segmentos del diámetro:

$$\mathbf{r}_2 = \sqrt{(42 + 14)(14 + 14)} = 28\sqrt{2} \approx \mathbf{39{,}60\ cm}$$

El radio de la 3.ª sección es una media proporcional entre 70 *y* 14.

$$\mathbf{r}_3 = \sqrt{70 \times 14} = 14\sqrt{5} = \mathbf{31{,}31\ cm}$$

1.098. ¿Cuál es el radio de una esfera en la cual un casquete de 35 cm de altura tiene un área igual a 2 m²?

De la fórmula $A = 2\pi rh$, *resulta:*

$$\mathbf{r} = \frac{A}{2\pi h} = \frac{2}{6{,}2832 \times 0{,}35} = \mathbf{0{,}9\ m}$$

1.099. El área de un casquete esférico es 2,85 m². Hallar el área de la esfera correspondiente, si la altura del casquete es de 45 cm.

Area casquete: $A = 2\pi rh$ *de donde* $r = \dfrac{A}{2\pi h}$

Area esfera: $E = 4\pi r^2 = 4\pi \times \dfrac{A^2}{4\pi^2 h^2} = \dfrac{A^2}{\pi h^2}$

$$\mathbf{E} = \frac{2{,}85^2}{3{,}1416 \times 0{,}45^2} = \mathbf{12{,}7677\ m^2}$$

1.100. ¿Cuál ha de ser la altura de un casquete correspondiente a una esfera de 9 m de radio para que tenga 169,6464 m² de área?

Area de la zona: $A = 2\pi rh$

$$\mathbf{h} = \frac{A}{2\pi r} = \frac{169{,}6464}{6{,}2832 \times 9} = \mathbf{3\ m}$$

1.101. ¿Cuál es el área convexa de un huso de 80° en una esfera de 5 mm de radio?

Area del huso (GEOM. **964**): $A = \dfrac{\pi r^2 n}{90}$

$$\mathbf{A} = \frac{3{,}1416 \times 5^2 \times 80}{90} = \mathbf{69{,}81\ mm^2}$$

1.102. ¿Cuál es el área total de una cuña de 25° en una esfera de 88 cm de radio?

El área total de una cuña esférica se compone del área del huso, más el área de los dos semicírculos máximos que la determinan.

Area pedida: $A = \pi r^2 + \dfrac{\pi r^2 \times 25}{90} = \pi r^2\left(1 + \dfrac{25}{90}\right) = \dfrac{\pi r^2 \times 23}{18}$

$$\mathbf{A} = \frac{3{,}1416 \times 88^2 \times 23}{18} = \mathbf{31\ 086{,}481\ cm^2}$$

1.103. ¿Cuál es el radio de una esfera en la cual el área de un huso de 45° es de 1m²?

Area huso: $$A = \frac{\pi r^2 \times 45}{90} = 1$$

de donde $$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{90}{45\pi}} = \sqrt{\frac{2}{3{,}1416}} = \mathbf{0{,}798\ m}$$

1.104. ¿Cuál es el ángulo de un huso esférico cuya área tiene 104,72 m², si el radio de la esfera es de 10 m?

Area huso: $$\frac{\pi r^2 n}{90} = 104{,}72$$

$$\mathbf{n} = \frac{104{,}72 \times 90}{3{,}1416 \times 100} = \mathbf{30^\circ}$$

1.105. Una caldera de vapor de forma cilíndrica termina en sus extremos en una semiesfera de 40 cm de radio. Hallar el área externa de esta caldera, si el cilindro tiene un radio igual al de las esferas, y la longitud es el duplo del diámetro.

Llamemos r *al radio común al cilindro y a la esfera.*

Area de la parte cilíndrica:	$2\pi r \times 4r =$	$8\pi r^2$
Area de los dos hemisferios:		$4\pi r^2$
Area total:		$12\pi r^2$

$$\mathbf{AT} = 12\pi r^2 = 12 \times 3{,}1416 \times 0{,}4^2 = \mathbf{6{,}0318\ m^2}$$

1.106. ¿Cuánto costará el dorado de una bola de 25 cm de radio, si el metro cuadrado de ese dorado vale 535 pts?

Area de la bola: $4\pi r^2 = 4 \times 3{,}1416 \times 0{,}0625\ m^2$
Gasto: $535 \times 4 \times 3{,}1416 \times 0{,}0625 =$ **420,2 pts**

1.107. Siendo la presión del aire sobre 1 cm² de 1,026 kg calcular la fuerza necesaria para separar dos hemisferios de Magdeburgo de 6 cm de radio después de hecho el vacío.

Fuerza: $$F = 1{,}026\ kg \times 4\pi r^2\ cm^2$$
$$\mathbf{F} = 1{,}026 \times 4 \times 3{,}1416 \times 36 = \mathbf{464{,}15255\ kg}$$

1.108. Dada una esfera de centro O y radio R (fig. 525), se traza un plano secante que determina un círculo de centro D y de diámetro AB, y un casquete esférico de altura DC.

1.° Determinar el área A de dicha esfera, y sirviéndose de R y CD hallar el área A_1 del casquete.

2.° Determinar el valor de CD en el caso en que sea $\frac{A_1}{A} = \frac{1}{n}$ hallando en este mismo caso OD en función de R y de n.

- 1.º *Area esfera:* $A = \mathbf{4\pi R^2}$ (1)
  Area casquete: $A_1 = \mathbf{2\pi R \times CD}$ (2)
- 2.º *Dividiendo ordenadamente, resulta:*

$$\frac{A_1}{A} = \frac{CD}{2R} = \frac{1}{n}$$

de donde $$\mathbf{CD = \frac{2R}{n}}$$

$$\mathbf{OD} = OC - CD = R - \frac{2R}{n} = \mathbf{R\left(1 - \frac{2}{n}\right)}$$

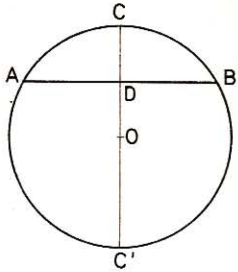


Fig. 525

XI. Volumen de la esfera

1.109. ¿Cuál es el volumen de una esfera de 84 cm de radio?

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}1416 \times 84^3 = \mathbf{2482\,702\ cm^3}$$

1.110. ¿Cuál es el volumen de una esfera de 4 cm de diámetro?

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6} \times 3{,}1416 \times 4^3 = \mathbf{33{,}510\ cm^3}$$

1.111. ¿Cuál es el volumen de una esfera cuya área tiene 113,0976 m²?
En función del área de la esfera, el volumen es igual al producto de dicha área por 1/3 del radio. Busquemos el radio:

$$A = 4\pi r^2 \quad \textit{de donde} \quad r = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

$$V = \frac{A}{3} \times \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \frac{113{,}0976}{3} \times \sqrt{\frac{113{,}0976}{4 \times 3{,}1416}} = \mathbf{113{,}0976\ m^3}$$

1.112. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la cual la circunferencia de un círculo máximo es de 4,62 m?

Tenemos $2\pi r = 4{,}62$ *de donde* $r = \dfrac{4{,}62}{2\pi} = \dfrac{2{,}31}{\pi}$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2{,}31}{\pi}\right)^3 = \mathbf{1{,}665\,224\ m^3}$$

1.113. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la que un círculo máximo tiene 13,86 m²? ($\pi = 22/7$).

Area círculo: $\pi r^2 = 13{,}86$

de donde: $$r = \sqrt{\frac{13,86}{\pi}} = \sqrt{\frac{13,86 \times 7}{22}} = 2,1 \text{ m}$$

Volumen esfera: $$\mathbf{V} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 2,1^3 = \mathbf{38,808\ m^3}$$

1.114. ¿Cuál es el radio de una esfera en función de su volumen? Aplicación en una esfera de 179 dm^3.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \textit{de donde} \quad r^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$\mathbf{r} = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{3V}}{\mathbf{4}\pi}}; \quad \mathbf{r} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 179}{4\pi}} = \mathbf{3,49\ dm}$$

1.115. ¿Cuál es el diámetro de una esfera en función de su volumen? Aplicación en una esfera de 40 dm^3.

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3 \qquad \text{(Geom. } \mathbf{891}\text{)}$$

De donde $$\mathbf{D} = \sqrt[3]{\frac{\mathbf{6V}}{\pi}} = \sqrt{\frac{V}{0,5236}}$$

Para V = 40 dm^3: $$\mathbf{D} = \sqrt{\frac{40}{0,5236}} = \mathbf{4,243\ dm}$$

1.116. ¿Cuál es el área de una esfera de 1 m^3 de volumen?

Vol. esfera: $$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1$$

de donde $$r^3 = \frac{3}{4\pi}; \quad r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$$

Area: $$\mathbf{A} = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\right)^2 = 4\pi \sqrt[3]{\frac{9}{16\pi^2}} = \sqrt[3]{36\pi} = \mathbf{4,836\ m^2}$$

1.117. ¿Cuál es la circunferencia máxima de una esfera que tiene 14 cm^3 de volumen?

Vol. esfera: $$\frac{1}{6}\pi D^3 = 14 \quad \textit{de donde} \quad D = \sqrt[3]{\frac{84}{\pi}}$$

La circunferencia de un círculo máximo es:

$$\mathbf{C} = \pi D = \pi \sqrt[3]{\frac{84}{\pi}} = \sqrt[3]{84\pi^2} = \mathbf{9,394\ cm}$$

1.118. Se corta una esfera de 1,2 m de radio por dos planos paralelos distantes 90 cm, simétricos con relación al centro. Hallar el volumen del segmento esférico que resulta.

Vol. segmento dos bases (GEOM. **982**): $V = \dfrac{\pi a^3}{6} + \dfrac{\pi a}{2}(m^2 + n^2)$

como m = n: $$V = \frac{\pi a^3}{6} + \pi a m^2 = \pi a\left(\frac{a^2}{6} + m^2\right)$$

$$m^2 = 120^2 - 45^2 = 12\,375$$

$$\mathbf{V} = 3{,}1416 \times 90\left(\frac{90^2}{6} + 12\,375\right) = \mathbf{3\,880\,661{,}4\ cm^3}$$

1.119. La altura de un casquete esférico es de 25 cm; el radio de su esfera tiene 84 cm. Hallar el volumen del sector esférico correspondiente.

Vol. sector esférico (GEOM. **971**): $V = \dfrac{2}{3}\pi r^2 a$

Por tanto: $\mathbf{V} = \dfrac{2}{3} \times 3{,}1416 \times 84^2 \times 25 = \mathbf{369\,452\ cm^3}$

1.120. Un sector circular de 60 cm de radio y cuyo ángulo tiene 30°, gira alrededor de uno de sus radios. Hallar:

1.° El volumen del sector esférico engendrado.

2.° El área total de este sector.

● 1.° **Volumen.**—*Sea* AOD *el sector generador* (fig. 526), *que gira alrededor de* OD.

Volumen sector esférico:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 a$$

Pero $$a = OD - OC = r - \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3})$$

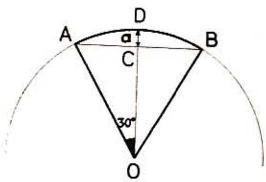


Fig. 526

Luego $$V = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot \frac{r}{2}(2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi r^3(2 - \sqrt{3})}{3}$$

$$\mathbf{V} = \frac{\pi \times 60^3 \times (2 - \sqrt{3})}{3} = 72\,000\pi(2 - \sqrt{3}) = \mathbf{60\,620{,}3136\ cm^3}$$

● 2.° **Area.**—*El área pedida se compone del área del casquete más el área lateral del cono.*

Area casquete: $A_1 = 2\pi r a = 2\pi r \times \dfrac{r}{2}(2 - \sqrt{3}) = \pi r^2(2 - \sqrt{3})$

Area lateral cono: $AL = \pi r' l$ *pero* $r' = \dfrac{r}{2}$ *y* $l = r$

Luego: $AL = \pi \times \dfrac{r}{2} \times r = \dfrac{\pi r^2}{2}$

Área total:

$$AT = \pi r^2 (2 - \sqrt{3}) + \frac{\pi r^2}{2} = \pi r^2 \left(2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = \pi r^2 \times 0{,}768$$

Para r = 60 $\quad$ **AT** = 3,1416 × 60² × 0,768 = **8685,89 568 cm²**

1.121. El radio de una esfera es de 1,5 m; uno de sus sectores esféricos tiene 1,545 m³. Hallar el área del casquete que le sirve de base.

Llamemos x *a la superficie del casquete,* r *al radio de la esfera.*

Vol. sector: $\quad V = x \times \dfrac{r}{3}$

$$\mathbf{x} = \frac{3V}{r} = \frac{3 \times 1{,}545}{1{,}5} = \mathbf{3{,}09\ m^2}$$

1.122. ¿Cuál es el radio de la esfera en la cual un sector esférico de 0,633 m³ tiene por base un casquete de 1,2 m²?

$$\mathbf{r} = \frac{3 \times 0{,}663}{1{,}2} = \mathbf{1{,}6575\ m}$$

1.123. En una esfera (fig. 527) de 1 m de radio las alturas de dos casquetes opuestos son de 4 y de 6 dm.

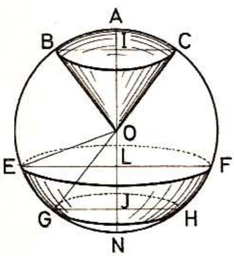


Fig. 527

Calcular el volumen:

1.º Del sector correspondiente a cada casquete.

2.º Del cono correspondiente a cada casquete.

3.º Del segmento correspondiente a cada casquete.

4.º Del segmento esférico comprendido entre los dos segmentos.

Los planos BIC *y* GHJ *determinan los casquetes:* ABC *y* GNH.

Conocemos: AO = 10 dm; JN = 6 dm
AI = 4 dm; IJ = 10 dm

$$BI^2 = AI \times IN = 4 \times 16 = 64$$
$$GJ^2 = JN \times JA = 6 \times 14 = 84$$

- 1.º *Sector* ACOB: $\mathbf{V} = \dfrac{2\pi r^2 a}{3} = \dfrac{6{,}2832 \times 10^2 \times 4}{3} = \mathbf{837{,}76\ dm^3}$
- 2.º *Sector* OGNH: $\mathbf{V} = \dfrac{6{,}2832 \times 10^2 \times 6}{3} = \mathbf{1256{,}64\ dm^3}$
- 3.º *Cono* BOC: $\mathbf{V} = \dfrac{3{,}1416 \times 64 \times 6}{3} = \mathbf{402{,}125\ dm^3}$
- 4.º *Cono* OGH: $\mathbf{V} = \dfrac{3{,}1416 \times 84 \times 4}{3} = \mathbf{351{,}858\ dm^3}$

- 5.º *Segmento* ABC:

$$\mathbf{V} = \frac{\pi \mathrm{AI}^2}{3}(3\mathrm{R} - \mathrm{AI}) = \frac{\pi \times 4^2}{3}(30 - 4) = \frac{416\pi}{3} = \mathbf{435{,}6352\ dm^3}$$

- 6.º *Segmento* GNH:

$$\mathbf{V} = \frac{\pi \mathrm{JN}^2}{3}(3\mathrm{R} - \mathrm{JN}) = \frac{\pi \times 6^2}{3}(30 - 6) = 288\pi = \mathbf{904{,}7808\ dm^3}$$

- 7.º *Segmento* BCHG:

$$\mathrm{V} = \frac{\pi \mathrm{IJ}^3}{6} + \frac{\pi \mathrm{IJ}}{2}(\mathrm{BI}^2 + \mathrm{GJ}^2)$$

$$\mathbf{V} = \frac{10^3\pi}{6} + \frac{10\pi}{2}(64 + 84) = \frac{2720\pi}{3} = \mathbf{2848{,}384\ dm^3}$$

1.124. ¿Cuál es el área de un círculo máximo de una esfera cuyo volumen es igual a 32 cm³?

Tenemos: $\frac{4}{3}\pi r^3 = 32$ *de donde* $r = \sqrt[3]{\frac{32 \times 3}{4\pi}}$

Area círculo: $\mathbf{A} = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt[3]{\frac{32 \times 3}{4\pi}}\right)^2 = 4\sqrt[3]{9\pi} = \mathbf{12{,}18\ cm^2}$

1.125. En la figura 527, BO = 20 cm, AI = 5 cm; calcular el volumen:
1.º Del sector BACO.
2.º Del cono BICO.
3.º Del segmento BAC.

- 1.º *Sector* BACO: $\mathbf{V} = \frac{2}{3}\pi r^2 a = \frac{2\pi}{3} \times 20^2 \times 5 = \mathbf{4189\ cm^3}$

- 2.º *Cono* BICO: $\mathrm{V} = \frac{\pi \mathrm{BI}^2 \times \mathrm{OI}}{3} = \frac{\pi \times \mathrm{NI} \times \mathrm{AI} \times \mathrm{OI}}{3}$

$$\mathbf{V} = \frac{3{,}1416 \times 35 \times 5 \times 15}{3} = \mathbf{2749\ cm^3}$$

- 3.º *Segmento* BAC:

$$\mathbf{V} = \frac{\pi \mathrm{AI}^2}{3}(3\mathrm{R} - \mathrm{AI}) = \frac{\pi \times 5^2}{3}(60 - 5) = \frac{1375\pi}{3} = \mathbf{1440\ cm^3}$$

1.126. ¿Cuál es el volumen de la cuña esférica que pertenece a una esfera de 1 m³, si el ángulo del huso es de 25º?

El volumen de la cuña esférica es igual al volumen de la esfera multiplicado por $\frac{n}{360}$

$$\mathbf{V} = \frac{1000 \times 25}{360} = \mathbf{69{,}444\ dm^3}$$

1.127. ¿Cuál es el volumen de una cuña esférica si el radio de la esfera tiene 12 dm y el ángulo del huso es de 51º 39′ 45″?

$$\mathbf{V} = \frac{\pi r^3 \times 51^\circ 39' 45''}{270} = \frac{3{,}1416 \times 12^3 \times 185\,985''}{270 \times 60 \times 60} = \mathbf{1039\ dm^3}$$

1.128. ¿Cuál es el radio de una esfera, si una cuña esférica tiene 21 dm^3 y el ángulo del huso 15°?

Vol. cuña:
$$\frac{\pi r^3 \times 15}{270} = 21$$

$$\mathbf{r} = \sqrt[3]{\frac{21 \times 270}{15\pi}} = \sqrt[3]{\frac{7 \times 54}{\pi}} = \mathbf{4{,}937\ dm}$$

1.129. En un cilindro cuya altura es igual al diámetro se inscriben: 1.° una esfera; 2.° un cono. Calcular la razón de los volúmenes de estos tres cuerpos.

Llamemos V *al volumen del cilindro,* V′ *al volumen de la esfera,* V′′ *al volumen del cono y* r *al radio de la base del cilindro. Tendremos:*

Cilindro:
$$V = \pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

Esfera:
$$V' = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Cono:
$$V'' = \pi r^2 \times \frac{2r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

De donde
$$\frac{V}{V'} = \frac{2\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{2 \times 3}{4} = \frac{3}{2}$$

y
$$\frac{V}{V''} = \frac{2\pi r^3}{\frac{2}{3}\pi r^3} = \frac{2 \times 3}{2} = \frac{3}{1}$$

Los volúmenes de estos tres cuerpos son entre sí como **3, 2, 1.**

1.130. El radio mayor de una esfera hueca tiene 25 cm. ¿Cuál es el espesor de la envoltura si su volumen es de 4 dm^3?

Sea R *el radio de la esfera exterior y* r *el radio de la esfera interior.*

Volumen de la esfera exterior:
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi \times 25^3}{3} = 65\,450\ cm^3$$

Vol. de la esfera interior:
$$65\,450 - 4000 = 61\,450\ cm^3$$

o sea
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 61\,450$$

de donde
$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \times 61\,450}{4\pi}} = 24{,}48\ cm$$

Espesor:
$$\mathbf{R - r} = 25 - 24{,}48 = \mathbf{0{,}52\ cm}$$

1.131. ¿Cuál es el volumen de una envoltura esférica de 2 cm de espesor si el diámetro exterior tiene 2,22 m?

Sea V *el volumen pedido,* R *y* r *los radios exterior e interior:*

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$$

Pero $R = 1{,}11$ m *y* $r = 1{,}11 - 0{,}02 = 1{,}09$ m

$$\mathbf{V} = \frac{4}{3}\pi (1{,}11^3 - 1{,}09^3) = \mathbf{0{,}304\ 107\ m^3}$$

1.132. ¿Cuál es el peso de una envoltura esférica de cobre de 25 mm de espesor, sabiendo:

1.º Que el diámetro exterior es de 1,35 m.
2.º Que la densidad del cobre es 8,78?

Sea P *el peso pedido,* V *el volumen y* d *la densidad; sabido es que*

$$P = V \times d$$

Llamando D *y* D′ *a los diámetros exterior e interior, tendremos:*

$$V = \frac{1}{6}\pi D^3 - \frac{1}{6}\pi D'^3 = \frac{1}{6}\pi (D^3 - D'^3)$$

y $$P = \frac{1}{6}\pi d (D^3 - D'^3);$$

pero $$D' = 13{,}5 - 2 \times 0{,}25 = 13 \text{ dm}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{6}\pi \times 8{,}78 (13{,}5^3 - 13^3) = \mathbf{1210{,}902\ kg}$$

1.133. ¿Cuál es el espesor de la pared de una pompita de jabón si una gota de agua cuyo diámetro es de 2 mm produce una pompa de 15 cm de radio?

Tomemos por unidad el milímetro.

El volumen de la pared de la pompita es igual al volumen de la gota de agua.

Llamemos r *al radio de la gota de agua,* R *al radio externo de la esferilla de jabón,* R′ *al radio interno de la misma.*

Su espesor: $e = R - R'$

Volumen de la gota de agua: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$

Volumen total de la pompa de jabón: $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 150^3$

Volumen interior de la pompa: $\frac{4\pi}{3} \times 150^3 - \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}(150^3 - 1)$

de donde resulta: $\frac{4\pi}{3} R'^3 = \frac{4\pi}{3}(150^3 - 1)$

$$R' = \sqrt[3]{150^3 - 1} = \sqrt[3]{3\ 374\ 999} = 149{,}9999 \text{ mm}$$

$$\mathbf{e} = 150 - 149{,}9999 = \mathbf{0{,}0001\ mm}$$

1.134. Una esfera hueca tiene 43 cm de radio exterior y 4 cm de espesor. Hallar el radio de otra esfera maciza de igual volumen.

Sean x *el radio de la esfera pedida,* R *y* r *los radios exterior e interior de la esfera hueca.*

Tenemos:
$$\frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

o sea
$$x^3 = R^3 - r^3$$
$$\mathbf{x} = \sqrt[3]{R^3 - r^3} = \sqrt[3]{0{,}43^3 - 0{,}39^3} = \mathbf{0{,}27\ m}$$

1.135. Hallar el peso de una bola de madera de 120 cm de diámetro, sabiendo que metida en el agua se sumerge 21 cm ($\pi = 22/7$).

El peso de la bola es igual al peso del agua desalojada, esto es, al peso de un segmento esférico de agua de 21 cm de alto.

Llamando h *a la altura del segmento y* r *al radio de la esfera, el volumen del segmento es:*
$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$$
$$V = \frac{22}{7} \times 2{,}1^2 \left(6 - \frac{2{,}1}{3}\right) = 73{,}458\ \text{dm}^3$$

Peso:
$$\mathbf{P} = V \times d = \mathbf{73{,}458\ kg}$$

1.136. Un cubo y una esfera tienen igual área, que es 2,4 m². ¿Qué diferencia de volumen hay entre ambos cuerpos?

Sea a *la arista del cubo,* R *el radio de la esfera y* A *el área.*

Area cubo:
$$A = 6a^2$$

de donde
$$a = \sqrt{\frac{A}{6}} = \sqrt{\frac{240}{6}} = 6{,}32\ \text{dm}$$

Vol. cubo:
$$V_1 = a^3 = 6{,}32^3 = 252{,}435\ \text{dm}^3$$

Area esfera:
$$A = 4\pi R^2$$

de donde
$$R = \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \sqrt{\frac{240}{4\pi}} = 4{,}37\ \text{dm}$$

Vol. esfera:
$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 4{,}37^3 = 349{,}555\ \text{dm}^3$$
$$\mathbf{V_2 - V_1} = 349{,}555 - 252{,}435 = \mathbf{97{,}12\ dm^3}$$

1.137. El área total de un cono de revolución es igual al área de una esfera que tiene 12 cm de radio. Si el radio del cono es el tercio del radio de la esfera, hallar, con una aproximación de 1/1000 la altura del cono.

Radio de la esfera: $R = 12$ cm; *del cono:* $r = 4$ cm

Por hipótesis:
$$\pi r (l + r) = 4\pi R^2$$
$$4 (l + 4) = 4 \times 12^2$$
$$l = 140$$

Altura:
$$\mathbf{h} = \sqrt{140^2 - 4^2} = \mathbf{139{,}942\ cm}$$

1.138. Hallar el peso de una bola de billar de marfil que tiene 14 cm de circunferencia. Densidad del marfil: 1,9.

Circunferencia: $$2\pi R = 14$$

de donde $$R = \frac{14}{2\pi} = \frac{7}{\pi} \text{ cm}$$

Vol. esfera: $$V = \frac{4\pi}{3} \times \frac{7^3}{\pi^3} = \frac{4 \times 343}{3\pi^2} = 46{,}336 \text{ cm}^3$$

$$\mathbf{P} = V \times D = 46{,}336 \times 1{,}9 = \mathbf{88{,}0384\ g}$$

1.139. ¿Cuál es el diámetro de una bola de oro que vale 350 000 pts si el 1/2 kg vale 18 600 pts? Densidad del oro: 19,20.

Peso del oro: $$P = \frac{350\,000}{37\,200} = 9{,}408\,602 \text{ kg}$$

Volumen: $$V = \frac{P}{D} = \frac{9{,}408\,602}{19{,}2} = 0{,}490\,031 \text{ dm}^3$$

Vol. esfera: $$\frac{1}{6}\pi d^3 = 0{,}490\,031$$

$$\mathbf{d} = \sqrt[3]{\frac{0{,}490031 \times 6}{\pi}} = \mathbf{0{,}97\ dm}$$

1.140. En un vaso cilíndrico de 68 cm de diámetro, en parte lleno de agua, se echan 80 bolas de igual diámetro. Si el nivel del agua sube 20 cm, hallar el diámetro de una de las bolas.

El volumen de las 80 *bolas es igual al volumen de un cilindro de* 20 *cm de altura y de* 68 *cm de diámetro. Llamando* R *al radio de una bola:*

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\pi \times 34^2 \times 20}{80}$$

$$R^3 = \frac{34^2 \times 3}{16} = \frac{17^2 \times 3}{4}$$

Diámetro: $\mathbf{2\,R} = 2\sqrt[3]{216{,}75} = 6{,}008 \times 2 = \mathbf{12{,}016\ cm}$

1.141. Una esfera (fig. 528) tiene de radio 5 cm y a 3 cm del centro se traza un plano secante cuyo diámetro es AB. Si trazamos el cono VAB circunscrito a ese círculo secante, hállese

1.º El volumen de la esfera.
2.º El área de la zona mayor AFB.
3.º El área de la sección AB y el área lateral del cono VAB.

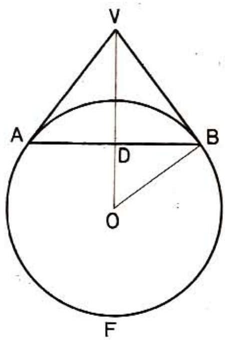


Fig. 528

● 1.º *Volumen esfera:*

$$\mathbf{V} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4 \times 3{,}1416 \times 125}{3} = \mathbf{523{,}6\ cm^3}$$

- 2.º *Area* AFB: $\mathbf{A} = 2\pi ra = 2\pi \times 5 \times 8 = \mathbf{251{,}328\ cm^2}$
- 3.º *Area sección* AB: $\mathbf{A} = \pi DB^2 = \pi(5^2 - 3^2) = 16\pi = \mathbf{50{,}26\ cm^2}$

$$\triangle ODB \sim \triangle VDB$$

Luego

$$\frac{OB}{VB} = \frac{OD}{DB}; \qquad \frac{5}{VB} = \frac{3}{4}$$

$$VB = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3}\ \text{cm}$$

Area lateral cono VAB: $\mathbf{AL} = \pi \times DB \times VB = 3{,}1416 \times 4 \times \frac{20}{3} = \mathbf{83{,}776\ cm^2}$

1.142. Una esfera de marfil entra exactamente en un cubo de 4 cm de arista. Calcular el volumen de esa bola y la diferencia que hay entre su área y la del cubo.

- 1.º *Volumen de la bola:* $\mathbf{V} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}1416 \times 2^3 = \mathbf{33{,}5104\ cm^3}$
- 2.º *Area de la bola:* $A_1 = 4\pi r^2 = 4 \times 3{,}1416 \times 2^2 = 50{,}2656\ \text{cm}^2$
  Area del cubo: $A_2 = 4^2 \times 6 = 96\ \text{cm}^2$
  Diferencia: $\mathbf{A_2 - A_1} = 96 - 50{,}2656 = \mathbf{45{,}7344\ cm^2}$

1.143. Calcular el peso de una copa metálica semiesférica cuyo diámetro interno tiene 32 cm, siendo el espesor de 5 mm y la densidad del metal 7.

Volumen del metal: $V = \frac{2 \times 3{,}1416}{3}(16{,}5^3 - 16^3) = 829{,}48\ \text{cm}^3$

Peso de la copa: $\mathbf{P} = 7 \times 829{,}48 = \mathbf{5806{,}36\ g}$

1.144. Se funde un cubo metálico de 80 cm de lado y se lo transforma en una esfera. Hallar:

1.º Su diámetro.
2.º En cuánto excede la superficie del cubo a la de la esfera.

- 1.º *Vol. del cubo:* $V = 8^3 = 512\ \text{dm}^3$

  Radio de la esfera: $r = \sqrt[3]{\frac{3 \times 512}{4\pi}} = 4{,}96\ \text{dm}$

  Diámetro: $\mathbf{2r} = 4{,}96 \times 2 = \mathbf{9{,}92\ dm}$
- 2.º *Area del cubo:* $8^2 \times 6 = 384\ \text{dm}^2$
  Area de la esfera: $4 \times \pi \times 4{,}96^2 = 309{,}15\ \text{dm}^2$

  Dif. $= \mathbf{74{,}85\ dm^2}$

1.145. Se inscribe un cubo en una esfera. Expresar su arista en función del radio de la esfera.

Sea R *el radio de la esfera, la diagonal del cubo inscrito será* 2 R.

El cuadrado de la diagonal de un cubo es igual a tres veces el cuadrado de la arista (GEOM. **794**); *llamando* x *a la arista, tendremos:*

$$4\,R^2 = 3x^2$$

$$\mathbf{x = \frac{2}{3}R\sqrt{3}}$$

1.146. ¿Cuál es el volumen del cubo inscrito en una esfera de 800 dm³? *Sea* R *el radio de la esfera y* a *la arista del cubo.*

Vol. esfera: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 800$

Luego $R^3 = \frac{800 \times 3}{4\pi} = \frac{600}{\pi}$

Tenemos también (n.º **1.145**): $a = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$

De donde $a^3 = \frac{8R^3\sqrt{3}}{9}$

$$\mathbf{V} = a^3 = \frac{8 \times 600 \times \sqrt{3}}{9\pi} = \frac{1600 \times \sqrt{3}}{3\pi} = \mathbf{294{,}042\ dm^3}$$

1.147. Una esfera de cobre de 18 cm de radio contiene a otra de platino de 5 cm de radio, de modo que no hay ningún vacío entre las dos esferas. ¿Cuál es el peso de la masa resultante? Densidad del platino: 21,5; densidad del cobre: 8,85.

Esfera exterior: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi}{3} \times 18^3 = 24\,429 \quad cm^3$

Esfera platino: $V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi}{3} \times 5^3 = 523{,}6\ cm^3$

El volumen de cobre es la diferencia de los volúmenes de las esferas:

$$24{,}429 - 0{,}5236 = 23{,}905\ dm^3$$

Peso del cobre: $23{,}905 \times 8{,}85 = 211{,}564$ kg
Peso del platino: $0{,}5236 \times 21{,}5 = 11{,}257$ kg

Peso total: **222,821 kg**

1.148. Tres bolas metálicas cuyos diámetros respectivos tienen 1,2 m, 30 y 40 cm han de fundirse en una sola. ¿Cuál será el diámetro de esta última?

Sean d, d′, d″ *los diámetros respectivos de las tres bolas*, y *D el diámetro pedido. Tendremos:*

$$\frac{\pi D^3}{6} = \frac{\pi d^3}{6} + \frac{\pi d'^3}{6} + \frac{\pi d''^3}{6} = \frac{\pi}{6}(d^3 + d'^3 + d''^3)$$

Por tanto: $D^3 = d^3 + d'^3 + d''^3$

$$\mathbf{D} = \sqrt[3]{1{,}2^3 + 0{,}3^3 + 0{,}4^3} = \mathbf{1{,}34\ m}$$

1.149. Un cubo, una esfera y un cilindro cuyo diámetro es igual a la altura, tienen cada uno 1 m² de área. Hallar el volumen de cada uno de estos tres cuerpos.

Volumen del cubo.—*Llamando* x *a la arista, tendremos:*

Area cubo: $6x^2 = 1$ *de donde* $x = \sqrt{\frac{1}{6}}$

Volumen: $\mathbf{V} = x^3 = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^3 = \mathbf{0{,}068\ m^3}$

Volumen de la esfera.—*Llamando* r *al radio, tendremos:*

Area esfera: $4\pi r^2 = 1$ *de donde* $r = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$

$$\mathbf{V} = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\right)^3 = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}} = \mathbf{0{,}094\ 031\ m^3}$$

Volumen del cilindro.—*Llamando* r′ *al radio de la base, tendremos:*

$$4\pi r'^2 + 2\pi r'^2 = 1$$

o sea: $6\pi r'^2 = 1$ *de donde* $r' = \sqrt{\frac{1}{6\pi}}$

$$\mathbf{V} = \pi r'^2 \times 2r' = 2\pi r'^3 = 2\pi\left(\sqrt{\frac{1}{6\pi}}\right)^3 = \mathbf{0{,}076\ 778\ m^3}$$

1.150. Un cubo, una esfera y un cilindro cuya altura es igual al diámetro tienen cada uno 1 m³ de volumen. Hallar la razón de sus áreas.

Area del cubo.—*Llamando* x *a la arista, tendremos:*

$$x^3 = 1 \quad \textit{de donde} \quad x = 1$$

Area: $A = 6x^2 = 6\ \text{m}^2$

Area de la esfera.—*Llamando* r *al radio, tendremos:*

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1 \quad \textit{de donde} \quad r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$$

Area: $A = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\right)^2 = \sqrt[3]{36\pi} = 4{,}836\ \text{m}^2$

Area del cilindro.—*Llamando* r′ *al radio, tendremos:*

$$\pi r'^2 \times 2r' = 2\pi r'^3 = 1$$

de donde $r' = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$$A = 6\pi r'^2 = 6\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2 = 3\sqrt[3]{2\pi} = 5{,}5358\ \text{m}^2$$

Las áreas son proporcionales a: **6, 4,836** *y* **5,5358.**

1.151. La circunferencia exterior de una bola hueca tiene 72 cm y su espesor 24 mm. ¿Cuál es su capacidad y cuál el volumen de la envoltura?

• 1.º *Diámetro exterior:* $7{,}2 : \pi = 2{,}29$ dm

Diámetro interior: $2{,}29 - 2 \times 0{,}24 = 1{,}81$ dm

Capacidad: $\frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{\pi}{6} \times 1{,}81^3 = \mathbf{3{,}104\ dm^3}$

• 2.º *Volumen de las paredes:* $\mathbf{V} = \frac{\pi}{6}(2{,}29^3 - 1{,}81^3) = \mathbf{3{,}186\ dm^3}$

1.152. Una bóveda semiesférica tiene por diámetro interior 4,8 m y su espesor es de 70 cm. Hallar el volumen de la mampostería.

Diámetro exterior: $4{,}8 + 1{,}4 = 6{,}2$ m

Volumen de la mampostería:

$$\mathbf{V} = \frac{\pi}{12} \times 6{,}2^3 - \frac{\pi}{12} \times 4{,}8^3 = \frac{\pi}{12}(6{,}2^3 - 4{,}8^3) = \mathbf{33{,}441\ m^3}$$

1.153. Un objeto macizo de hierro colado consta de tres partes:

1.ª De un cubo cuya arista mide 42 cm.

2.ª De un cilindro de 1,2 m de altura y 28 cm de diámetro.

3.ª De una esfera de 60 cm de circunferencia. Hallar el volumen y el peso de este objeto. Densidad del hierro colado: 7,25.

Volumen del cubo: $4{,}2^3 = 74{,}088$ dm³

Volumen del cilindro: $\pi \times 1{,}4^2 \times 12 = 73{,}904$ dm³

Diámetro de la esfera: $6 : \pi$ dm

Volumen de la esfera: $\frac{\pi}{6}\left(\frac{6}{\pi}\right)^3 = 3{,}648$ dm³

Volumen total: $\mathbf{V} = \mathbf{151{,}640\ dm^3}$

Peso: $\mathbf{P} = 151{,}64 \times 7{,}25 = \mathbf{1099{,}39\ kg}$

1.154 El diámetro de una esfera mide 60 cm. ¿Cuál es el diámetro de la base de un cono de volumen equivalente y de 30 cm de altura?

Por hipótesis: $\frac{1}{6} \times \pi D^3 = \frac{1}{3} \times \frac{\pi d^2}{4} \times h$

$$\frac{1}{6} \times \pi \times 6^3 = \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{3}{3}$$

$$6^2 = \frac{d^2}{4}$$

Diámetro: $\mathbf{d} = \sqrt{6^2 \times 4} = \mathbf{12\ dm}$

1.155. Una bala de cañón de forma esférica de hierro colado pesa 12 kg. Calcular:

1.º Su radio.

2.º El peso del oro necesario para formar una capa de 6/10 de milímetro de espesor alrededor de ella. Densidad del oro: 19,26; densidad del hierro colado: 7,25.

- 1.º *Volumen de la bala:* $\dfrac{12\,000}{7{,}25} = 1655{,}172 \text{ cm}^3 = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Radio de la esfera: $\mathbf{r} = \sqrt[3]{\dfrac{1655{,}172 \times 3}{4\pi}} = \mathbf{7{,}33\ cm}$

- 2.º *Radio de la bala dorada:* $7{,}33 + 0{,}06 = 7{,}39 \text{ cm}$

Volumen de la capa de oro: $\dfrac{4\pi}{3}(7{,}39^3 - 7{,}33^3) = 40{,}832 \text{ cm}^3$

Peso del oro: $\mathbf{P} = 40{,}832 \times 19{,}26 = \mathbf{786{,}42\ \ g}$

1.156. Siendo la densidad media del globo terráqueo 5,44 hallar el peso de la tierra en millones de toneladas.

Diámetro terrestre: $40\,000 : \pi$ km

Volumen: $V = \dfrac{\pi D^3}{6} = \dfrac{\pi}{6}\left(\dfrac{40\,000}{\pi}\right)^3 = \dfrac{40\,000^3}{6\pi^2} \text{ km}^3$

Peso: $\mathbf{P} = \dfrac{40\,000^3 \times 5{,}44}{6\pi^2} =$ **5882 352 941 176 000 millones ton.**

1.157. ¿Cuántas balas esféricas de plomo se fabricarán con 1 kg de este metal, siendo su diámetro 2 cm? Densidad del plomo: 7,25.

Vol. de una bala: $V = \dfrac{1}{6}\pi D^3 = \dfrac{\pi}{6} \times 2^3 \text{ cm}^3$

Peso: $P = \dfrac{\pi}{6} \times 2^3 \times 7{,}25$

Número de balas: $\dfrac{1000}{\dfrac{1}{6}\pi \times 2^3 \times 7{,}25} = \dfrac{3000}{29\pi} = \mathbf{33}$

1.158. Un globo esférico de tafetán barnizado mide 10 m de diámetro y pesa 250 gramos el metro cuadrado. Hallar:

1.º El peso de la envoltura.
2.º El volumen del globo.

- 1.º *Area del globo:* $A = 4\pi r^2 = 4\pi \times 5^2 = 314{,}16 \text{ m}^2$
  Peso de la envoltura: $\mathbf{P} = 314{,}16 \times 0{,}25 = \mathbf{78{,}540\ kg}$

- 2.º *Volumen del globo:* $\mathbf{V} = A \times \dfrac{r}{3} = \dfrac{314{,}16 \times 5}{3} = \mathbf{523{,}600\ m^3}$

1.159. ¿Cuál es el peso de una esfera de vidrio llena de agua, siendo 30 cm el diámetro interior, 1 mm el espesor del vidrio y 2,64 la densidad del mismo?

Capacidad de la esfera: $V = \dfrac{1}{6}\pi D^3 = \dfrac{\pi \times 3^3}{6}$ litros

Peso del agua contenida: $\frac{\pi \cdot 3^3}{6}$ kg

Vol. del vidrio: $\frac{\pi}{6} \times 3{,}02^3 - \frac{\pi}{6} \times 3^3 = \frac{\pi}{6}(3{,}02^3 - 3^3)\ \text{dm}^3$

Peso del vidrio: $\frac{\pi}{6}(3{,}02^3 - 3^3) \times 2{,}64$ kg

Peso total: $\mathbf{P} = \frac{\pi \cdot 3^3}{6} + \frac{\pi}{6}(3{,}02^3 - 3^3) \times 2{,}64 = \mathbf{14{,}889\ kg}$

1.160. ¿Cuál es el volumen de la capa atmosférica que envuelve a la tierra, si su espesor es 1/60 del radio terrestre?

Radio terrestre: $r = \frac{40\,000}{2\pi} = \frac{20\,000}{\pi}$ km

Radio exterior: $\text{R} = \frac{20\,000 \times 61}{60\pi} = \frac{61\,000}{3\pi}$ kg

Vol. capa:

$$\mathbf{V} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{61\,000}{3\pi}\right)^3 - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{20\,000}{\pi}\right)^3 = \frac{4 \times 10\,981 \times 10^9}{81\pi^2} = \mathbf{54\,943\,000\,000\ km^3}$$

1.161. Se ha dorado por galvanoplastia una esfera de 9 cm de radio y 850 gramos de peso, y al sacarla del baño su peso ha aumentado 12 gramos. Siendo 19,258 la densidad del oro, hallar el espesor de la capa de este metal.

Volumen de la esfera: $\frac{4}{3}\pi \times 9^3 = 3053{,}635\ \text{cm}^3$

Volumen del dorado: $\frac{12}{19{,}258} = 0{,}623\,261\ \text{cm}^3$

Vol. de la esfera dorada: $3053{,}635 + 0{,}623\,261 = 3054{,}258\,261\ \text{cm}^3$

Radio de esta esfera: $r = \sqrt[3]{\frac{3 \times 3054{,}258\,261}{4\pi}} = 9{,}000\,52$ cm

Espesor de la capa de oro: $9{,}000\,52 - 9 = \mathbf{0{,}000\,52\ cm}$

1.162. El vacío de una esfera de plomo hueca, cuyo diámetro tiene 5 cm, es de 5,45 cm³. Hallar el peso de esta esfera si la densidad del plomo es 11,35.

El volumen del metal es la diferencia entre el volumen de la esfera y el volumen del vacío.

Volumen esfera: $\text{V} = \frac{1}{6}\pi\text{D}^3 = \frac{\pi}{6} \times 5^3 = 65{,}45\ \text{cm}^3$

Volumen del metal: $65{,}45 - 5{,}45 = 60\ \text{cm}^3$

Peso del metal: $\mathbf{P} = 60 \times 11{,}35 = \mathbf{681\ g}$

1.163. La figura 529 representa un sólido en el cual AC es la generatriz del cono ACBE, tangente a la esfera AO, de 11 cm de radio. Si OC mide 25 cm, calcular ($\pi = 22/7$):

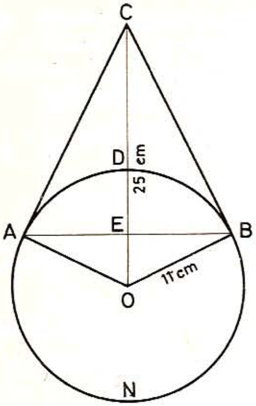


Fig. 529

1.º La tangente AC.
2.º La cuerda AB.
3.º La altura del cono ACBE.
4.º El volumen del mismo.
5.º El volumen del sector esférico AOBD.
6.º El área total del sólido.
7.º El volumen total del sólido.
8.º El ángulo AOB.

- 1.º *En* $\triangle$AOC: $\mathbf{AC} = \sqrt{\mathrm{CO}^2 - \mathrm{AO}^2} =$
$= \sqrt{625 - 121} = 6\sqrt{14} = \mathbf{22{,}45\ cm}$

- 3.º *En* $\triangle$AOC: $\mathrm{AO}^2 = \mathrm{OE} \times \mathrm{OC}$

de donde: $\mathrm{OE} = \dfrac{\mathrm{AO}^2}{\mathrm{OC}} = \dfrac{121}{25}$ cm

$$\mathbf{CE} = \mathrm{OC} - \mathrm{OE} = 25 - \frac{121}{25} = \frac{504}{25} = \mathbf{20{,}16\ cm}$$

- 2.º *En* $\triangle$AOC: $\mathrm{AE}^2 = \mathrm{OE} \times \mathrm{CE} = \dfrac{121}{25} \times \dfrac{504}{25}$

$$\mathrm{AE} = \frac{11}{5} \times \frac{6\sqrt{14}}{5} = \frac{66\sqrt{14}}{25}\ \mathrm{cm}$$

$$\mathbf{AB} = 2\mathrm{AE} = \frac{66\sqrt{14}}{25} \times 2 = \frac{132\sqrt{14}}{25} = \mathbf{19{,}756\ cm}$$

- 4.º *Vol. cono* ACB: $\mathbf{V} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{22}{7} \times \dfrac{121}{25} \times \dfrac{504}{25} \times \dfrac{504}{25} = \mathbf{2060{,}771\ cm^3}$

- 5.º *Vol. sector* AOBD: $\mathbf{V} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{22}{7} \times 121 \left(11 - \dfrac{121}{25}\right) = \mathbf{1561{,}706\ cm^3}$

- 6.º *El área total del sólido se compone:*
a) *Del área lateral del cono* CAB:

$$\mathrm{AL} = \pi \times \mathrm{AE} \times \mathrm{AC} = \pi \times \frac{66\sqrt{14}}{25} \times 6\sqrt{14} = \frac{\pi \times 66 \times 6 \times 14}{25}\ \mathrm{cm}^2$$

b) *Del área de la zona* ANB:

$$\mathrm{Z} = 2\pi r \times \mathrm{EN} = 2\pi \times 11 \times \left(11 + \frac{121}{25}\right) = \frac{2\pi \times 11 \times 396}{25}\ \mathrm{cm}^2$$

Area total: $\mathbf{AT} = \dfrac{22}{7} \times \dfrac{66 \times 4 \times 54}{25} = \mathbf{1792{,}18\ cm^2}$

- 7.º *Volumen del cono:* $\mathrm{V}_1 = 2060{,}771\ \mathrm{cm}^3$ [4.ª solución]

Vol. segmento ABN: $\mathrm{V}_2 = \pi \times \mathrm{EN}^2 \left(r - \dfrac{\mathrm{EN}}{3}\right)$

$$V_2 = \frac{22}{7} \times \frac{396^2}{25^2} \times \left(11 - \frac{396}{25 \times 3}\right) = 4510{,}566 \text{ cm}^3$$

Vol. total: $\mathbf{V_1 + V_2} = 2060{,}771 + 4510{,}566 = \mathbf{6571{,}337\ cm^3}$

• 8.º *Cálculo de* $\angle$AOB. a) *Por la tabla de cuerdas*

$$\frac{AB}{r} = \frac{19{,}756}{11} = 1{,}796$$

A este número corresponde el arco de 128º 20′.

b) *Por trigonometría:*

$$\angle AOB = 2\angle AOE \qquad tg\ AOE = \frac{AE}{OE} = \frac{9{,}878}{4{,}84} = \frac{44{,}9}{22}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \log & 44{,}9 = 1{,}652246 \\ \log & 22 = 1{,}342423 \\ \hline \log tg\ AOE & = 0{,}309823 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} \angle AOE = 63^\circ\ 53'\ 46'' \\ \mathbf{\angle AOB = 127^\circ\ 47'\ 32''} \end{array}$$

1.164. La figura 530 representa dos conos, ACD y BCD, de igual base, que tiene 16 cm de radio y cuya altura total es de 43 cm. Hallar el radio de la esfera equivalente.

1.º *El volumen de cada cono es igual a la base común multiplicada por* 1/3 *de su altura; y la suma de los volúmenes es igual a la base común multiplicada por* 1/3 *de la suma de las alturas, que es de* 43 cm. *Luego*

$$V = \frac{\pi \times 16^2 \times 43}{3} = 11\ 527{,}577 \text{ cm}^3$$

2.º *Llamando* r *al radio de la esfera equivalente, tendremos:*

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 11\ 527{,}577$$

de donde

$$\mathbf{r} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 11\ 527{,}577}{4\pi}} = \mathbf{14{,}013\ cm}$$

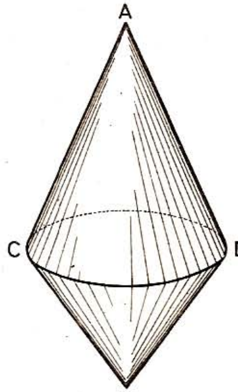


Fig. 530

1.165. Una bola de madera de 128 mm de diámetro se sumerge 44 mm en el agua pura. ¿Cuál es la densidad de esta madera?

Volumen esfera: $V_1 = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{\pi}{6} \times 128^3 \text{ mm}^3$

Parte sumergida:

$$V_2 = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi \times 44^2}{3}(3 \times 64 - 44) = \frac{\pi \times 44^2 \times 148}{3}$$

Densidad: $\mathbf{D} = \frac{\pi/3 \times 44^2 \times 148}{\pi/6 \times 128^3} = \mathbf{0{,}267}$

9

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

Geometría del espacio

1.166. ¿Cuántas pastillas de jabón de base cuadrada cuyo lado tiene 13 cm y 29 cm la altura podrán caber en una caja cuyas dimensiones son las siguientes: 1,17 m, 0,9 m y 1,04 m, debiendo reservar los 3/25 del volumen de la caja para el embalaje?

Volumen de la caja: $117 \times 90 \times 104$ cm^3

Espacio ocupado por el jabón: $\dfrac{117 \times 90 \times 104 \times 22}{25}$ cm^3

Volumen de una pastilla de jabón: $13 \times 13 \times 29$ cm^3

Número de pastillas: $\dfrac{117 \times 90 \times 104 \times 22}{25 \times 13 \times 13 \times 29} = \mathbf{197}$

1.167. Durante una tormenta cayó una capa de agua de 4 mm. Calcular el agua que llovería en un jardín de 25 m por 12 m y cuántas regaderas de 8 litros cada una serían precisas para repartir la cantidad de agua equivalente.

Cantidad de agua: $250 \times 120 \times 0{,}04 = 1200$ dm^3
Número de regaderas: $1200 : 8 = \mathbf{150}$

1.168. El espesor de la tierra laborable de una finca de 60 áreas es, por término medio, de 0,3 m. Para mejorarla se le echan 1/120 de su volumen de cal que cuesta 46 pts los 100 kg; la labor sale a 1,20 pts el m². Hallar el gasto de la mejora sabiendo que el metro cúbico de cal pesa 1700 kg.

Vol. del suelo laborable:	6 000	×	0,3	=	1 800 m^3
Vol. de cal:	1 800	:	120	=	15 m^3
Peso de la cal:	1 700	×	15	=	25 500 kg
Precio de la cal:	46	×	255	=	11 730 pts
Para echarla:	1,2	×	6000	=	7 200 pts
Coste total:	11 730	+	7200	=	**18 930 pts**

1.169. Una pradera de forma trapecial tiene las dimensiones siguientes: base menor, 125 m; altura, 60 m; los lados oblicuos tienen 65 y 75 m. Calcular:

1.º El área de esta pradera.

2.º El volumen del agua necesaria para inundarla con una capa de 10 cm de altura.

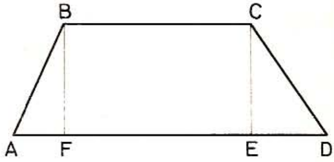


Fig. 531

Tracemos las perpendiculares BF *y* CE (figura 531); *tendremos:*

$$EF = BC = 125$$

$$AF = \sqrt{65^2 - 60^2} = 25; \quad ED = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45$$

$$AD = AF + FE + ED = 25 + 125 + 45 = 195$$

- 1.º *Area pradera:* $\mathbf{A} = \dfrac{195 + 125}{2} \times 60 = \mathbf{9600\ m^2}$
- 2.º *Volumen del agua:* $\mathbf{V} = 9600 \times 0{,}1 = \mathbf{960\ m^3}$

1.170. ¿Cuál es el área que se cubriría con el desarrollo de las caras de un cubo cuya arista tiene 50 cm?

Area total cubo: $A = 6 \times 50^2 = 15\,000\ cm^2 = 1{,}5\ m^2$

1.171. Un terreno rectangular de 3500 m² tiene 50 m de ancho. Por el otro lado, que linda con un camino, se levanta una pared de 1,5 m de alto por 0,3 m de espesor, con una puerta de entrada de 2 m de ancha. Si el m³ de mampostería cuesta 350 pts y los trabajos preliminares han costado 1200 pts en conjunto, ¿cuánto cuesta en total la tapia?

Longitud del terreno:	$3500 : 50 =$	70	m
Longitud de mampostería:	$70 - 2 =$	68	m
Volumen de la tapia:	$68 \times 1{,}5 \times 0{,}3 =$	30,6	m³
Precio:	$350 \times 30{,}6 =$	10 710	pts
Coste total:	$10\,710 + 1200 =$	**11 910**	**pts**

1.172. Los contrafuertes de un muro tienen la forma de un prisma rectangular de 4,5 m de ancho coronado por un prisma triangular cuya base es también de 4,5 m. La altura total es de 7,5 m y la del rectángulo es doble que la del triángulo. Si el espesor de la piedra es de 0,35 m, ¿qué volumen se necesita?

Altura del rectángulo:	$\dfrac{7{,}5 \times 2}{3} =$	5	m
Altura del triángulo:	$7{,}5 - 5 =$	2,5	m
Area del rectángulo:	$5 \times 4{,}5 =$	22,5	m²
Area del triángulo:	$\dfrac{4{,}5 \times 2{,}5}{2} =$	5,625	m²
Area total:	$22{,}5 + 5{,}625 =$	28,125	m²
Volumen de piedra:	$\mathbf{V} = 28{,}125 \times 0{,}35 =$	**9,843 75**	**m³**

1.173. Se quiere construir una cisterna cúbica. ¿Cuáles son las dimensiones que se le han de dar para que, llena hasta los 2/3, pueda contener 677,5 hl de agua?

Llamando a a la arista, tendremos:

$$\frac{2a^3}{3} = 67\,750 \text{ dm}^3$$

de donde
$$\mathbf{a} = \sqrt[3]{\frac{67\,750 \times 3}{2}} = \mathbf{46{,}67\ dm}$$

1.174. ¿Cuál es el volumen de un cubo que tiene de área total 3,1974 m²?

Arista del cubo: $a = \sqrt{\dfrac{3{,}1974}{6}} = 0{,}73 \text{ m}$

Vol. del cubo: $\mathbf{V} = 0{,}73^3 = \mathbf{0{,}389\,017\ m^3}$

1.175. Una pirámide de base cuadrada pesa 50 kg. Calcúlese su altura, si un lado de la base tiene 25 cm; esta pirámide es de bronce, y un centímetro cúbico de este metal pesa 9 gramos.

Volumen de la pirámide: $\dfrac{50\,000}{9} \text{ cm}^3$

Area de la base: $25 \times 25 = 625 \text{ cm}^2$

Altura: $\mathbf{h} = \dfrac{50\,000 \times 3}{9 \times 625} = 26\dfrac{2}{3} = \mathbf{26{,}67\ cm}$

1.176. Un carbonero compra a razón de 7000 pts decastéreo, un montón de leña que tiene 7,5 m de largo por 3,25 m de ancho y 2 m de alto. Con ella fabrica carbón que luego vende con una ganancia del 20 %. ¿A cómo venderá el saco de carbón de 8 dal si la leña se reduce a los 3/5 de su volumen?

Vol. de la leña: $7{,}5 \times 3{,}25 \times 2 = 48{,}75 \text{ m}^3 = 4{,}875$ *decastéreos*
Precio de compra: $7000 \times 4{,}875 = 34\,125$ pts

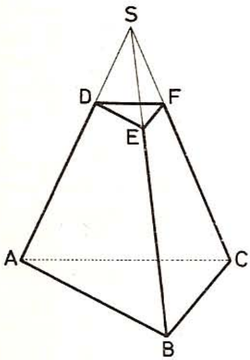


Fig. 532

Precio de venta: $\dfrac{120 \times 34\,125}{100} = 40\,950$ pts.

Volumen del carbón: $\dfrac{48{,}75 \times 3}{5} = 29{,}25 \text{ m}^3 =$

$= 2925$ decalitros

Precio del saco de carbón: $\dfrac{40\,950 \times 8}{2925} = \mathbf{112\ pts.}$

1.177. Por un plano paralelo a la base se corta la pirámide SABC (fig. 532) en el tercio de la arista a contar desde el vértice. ¿Cuál será el volumen del tronco de pirámide ABCDEF, si la pirámide deficiente SDEF tiene 3 m³?

Sea V *el volumen de la pirámide total* SABC, *y* V′ *el volumen de la pirámide deficiente* SDEF, a *y* a′ *las aristas correspondientes; tendremos:*

$$\frac{V}{V'} = \frac{a^3}{a'^3} = \frac{3^3}{1^3} = 27$$

luego $$V = 27\,V' = 27 \times 3 = 81 \text{ m}^3$$

Vol. tronco: $$\mathbf{V - V' = 81 - 3 = 78 \text{ m}^3}$$

1.178. Un dique de granito descansa sobre una base rectangular de 64 m de largo y 4 m de ancho. Por un lado es vertical y su altura mide 5 m y por el otro lado está en forma de plano inclinado, de modo que este dique tiene sólo 2 m de ancho en la parte superior. Hallar su volumen.

El dique tiene la forma de un prisma recto cuya base es un trapecio rectángulo, y la altura, la longitud del dique.

$$\mathbf{V} = \frac{(2+4)\,5}{2} \times 64 = \mathbf{960 \text{ m}^3}$$

1.179. Un ganadero tiene 18 vacas suizas, y para alojarlas quiere construir un establo colocándolas en una sola fila. Cada vaca necesita un espacio de 2,5 por 1,5 m, debiéndose tener en cuenta que ha de haber un pasillo detrás de las vacas de 1,5 m de ancho y que cada vaca necesita por término medio una cubicación de 24 m³ de aire. Hállense las dimensiones interiores que debe tener el establo.

Longitud:	1,5	×	18	=	**27 m**
Anchura:	2,5	+	1,5	=	**4 m**
Volumen:	24	×	18	=	**432 m³**
Area:	27	×	4	=	**108 m²**
Altura:	432	:	108	=	**4 m**

1.180. Una aula tiene 7 m de largo por 6,5 m de ancho y 3,8 m de altura. ¿Cuánto habrá que levantar el techo para que los 36 alumnos y el maestro tengan cada uno 5 m³ de aire?

Volumen de aire necesario:	5	×	37	=	185 m³
Area de la base:	7	×	6,5	=	46,2 m²
Altura de la aula:	185	:	46,2	=	4 m
Habrá que levantar el techo:	4	−	3,8	=	**0,2 m**

1.181. En una caja cuya anchura es los 2/5 de la longitud se echa agua hasta la altura de 28 cm; entonces la caja contiene 2940 litros de agua. Calcular la longitud y la anchura.

Sea x *dm la longitud de la caja, la anchura será:* 2x/5.

Vol. del agua: $$x \times \frac{2x}{5} \times 2{,}8 = 2940$$

$$x^2 = \frac{2940 \times 5}{2 \times 2{,}8} = 2625$$

Longitud $x = \sqrt{2625} = \mathbf{51{,}23\ dm}$

Anchura: $\frac{2x}{5} = \frac{51{,}23 \times 2}{5} = \mathbf{20{,}49\ dm}$

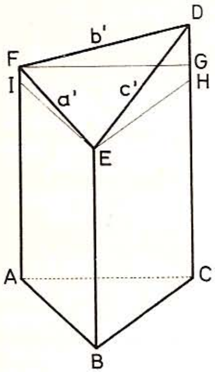


Fig. 533

1.182. Un paralelepípedo rectángulo tiene de largo 2,4 m, de ancho 1,6 m y de alto 1,3 m. Hallar la longitud de cada una de sus diagonales.

Las diagonales de un paralelepípedo rectángulo son iguales, y el cuadrado de cada una es igual a la suma de los cuadrados de las dimensiones.

Tomando el dm por unidad y llamando d *a la diagonal,*

$$\mathbf{d} = \sqrt{24^2 + 16^2 + 13^2} = \sqrt{1001} = \mathbf{31{,}64\ dm}$$

1.183. Calcular el volumen de un tronco de prisma triangular cuyas aristas miden 33, 38 y 42 cm (figura 533). Se sabe que una de las bases es perpendicular a las aristas y que tiene la forma de un triángulo equilátero de 13 cm de lado. Calcular también el área de la segunda base.

- 1.º $\mathbf{V} = \frac{13^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{(33 + 38 + 42)}{3} = \frac{169 \times 113\sqrt{3}}{12} = \mathbf{2756{,}43\ cm^3}$

- 2.º *Por los vértices* E *y* F *tracemos, en cada cara, rectas paralelas a los lados de la base. Cada lado de la base superior será la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el cual un cateto es igual al lado del triángulo equilátero de la base, y el otro a la diferencia de dos aristas laterales consecutivas.*

$$a' = \sqrt{13^2 + (38 - 33)^2} = \sqrt{169 + 25} = 13{,}92 \text{ cm}$$
$$b' = \sqrt{13^2 + (42 - 38)^2} = \sqrt{169 + 16} = 13{,}60 \text{ cm}$$
$$c' = \sqrt{13^2 + (42 - 33)^2} = \sqrt{169 + 81} = 15{,}81 \text{ cm}$$

Area de esta base: $\mathrm{A} = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)}$

$$\mathbf{A} = \sqrt{21{,}66 \times 7{,}74 \times 8{,}06 \times 5{,}85} = \mathbf{88{,}91\ cm^2}$$

1.184. Se quiere construir un aljibe de 1299,375 hl de capacidad; este aljibe ha de tener la forma de un paralelepípedo cuyas dimensiones sean entre sí como los números 4, 7 y 11. Calcular estas dimensiones.

Las dimensiones pueden representarse por 4x, 7x *y* 11x.

Volumen: $4x \times 7x \times 11x = 308x^3 = 129{,}9375 \text{ m}^3$

$$x = \sqrt[3]{\frac{129{,}9375}{308}} = 0{,}75$$

Dimensiones: $0{,}75 \times 4 = \mathbf{3\ m}$; $0{,}75 \times 7 = \mathbf{5{,}25\ m}$; $0{,}75 \times 11 = \mathbf{8{,}25\ m}$

1.185. En una caja cúbica de 8 cm de lado se echa agua hasta una altura de 10 cm y pesándola se ve que pesa 752 gramos. Se introduce en el agua una piedra de modo que quede completamente sumergida, y entonces el agua se eleva hasta 11,5 cm y el peso de la caja es de 992 gramos. Se desea saber:

1.º El volumen de la piedra.

2.º El peso y la densidad de la misma.

● 1.º *El volumen será:* $8 \times 8 \times 1{,}5 = \mathbf{96}\ \mathbf{cm^3}$

● 2.º *El peso:* $992 - 752 = \mathbf{240}\ \mathbf{g}$

La densidad: $240 : 96 = \mathbf{2{,}5}$

1.186. Un bloque de piedra cúbico que tiene 0,6 m de lado y cuesta 650 pts el metro cúbico, le mandamos tallar en todas sus caras a 150 pts el metro cuadrado, ¿a cuánto sale esa piedra tallada?

Volumen del bloque:	$0{,}6^3 =$	$0{,}216\ m^3$
Precio del bloque:	$650 \times 0{,}216 =$	140,4 pts
Area de las caras:	$0{,}6^2 \times 6 =$	$2{,}16\ m^2$
Precio de la talla:	$150 \times 2{,}16 =$	324 pts
Precio total:	$140{,}4 + 324 =$	**464,4 pts**

1.187. Con un bloque de piedra de 1,35 m de largo por 0,8 m de ancho y 0,6 m de alto se fabrica una pila, dejando un borde de 0,12 m a los lados y 0,24 m en el fondo (fig. 534). ¿Cuánto cabe la pila?

Largo de la pila: $1{,}35 - 0{,}24 = 1{,}11$ m

Ancho: $0{,}80 - 0{,}24 = 0{,}56$ m

Alto: $0{,}60 - 0{,}24 = 0{,}36$ m

$V = 1{,}11 \times 0{,}56 \times 0{,}36 =$ **223,776 litros**

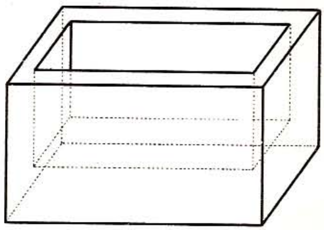


Fig. 534

1.188. Cavamos un pozo cúbico de 1,6 m de lado. La tierra extraída aumenta 1/4 de volumen y se la esparce en un terreno de 4 áreas. ¿Cuál será el espesor de la capa de tierra que se forma y cuánto habría que alargar el pozo para que el espesor de tierra fuera de 2 cm no cambiando la anchura y profundidad del pozo?

Volumen del pozo: $1{,}6^3 = 4{,}096\ m^3$

El de la tierra será: $\dfrac{4096 \times 5}{4} = 5{,}12\ m^3$

● 1.º **Espesor** *de la capa de tierra:* $5{,}12 : 400 = \mathbf{0{,}0128\ m}$

● 2.º *Para un espesor de 2 cm, el volumen sería:* $\dfrac{5{,}12 \times 2}{1{,}28} = 8\ m^3$

Volumen del pozo en tal caso: $\dfrac{8 \times 4}{5} = 6{,}4\ m^3$

Longitud del mismo: $6{,}4 : 1{,}6^2 = 2{,}5$ m

Habría que prolongarle en $2{,}5 - 1{,}6 = \mathbf{0{,}9}$ **m**

1.189. Deseamos construir un estanque rectangular de 1,5 m por 1,2 m de base interior. ¿Qué profundidad habrá que darle para que quepan 2700 litros de agua?

Base: $1{,}5 \times 1{,}2 = 1{,}8 \text{ m}^2$
Altura: $2{,}7 : 1{,}8 = \mathbf{1{,}5\ m}$

1.190. ¿Cuál es en kilogramos la presión de la atmósfera sobre una superficie octogonal regular de 3 cm de lado, cuando el barómetro marca 76 cm? Densidad del mercurio: 13,6.

Esta presión es igual al peso de una columna de mercurio cuya base es la superficie que recibe la presión, y cuya altura es la del barómetro.

Area del octógono regular, en función del lado:

$$A = 2l^2 (1 + \sqrt{2}) \qquad (\text{GEOM. } \mathbf{581})$$

Peso: $\mathbf{P} = 2 \times 0{,}09 (1 + \sqrt{2}) \times 7{,}6 \times 13{,}6 = \mathbf{44{,}915\ kg}$

1.191. ¿Cuál es el lado del cubo equivalente a una pirámide que tiene por base un triángulo equilátero de 4 cm de lado y por altura la del triángulo equilátero que le sirve de base?

Sea l el lado del triángulo equilátero de la base.

Vol. pirámide: $$V = \frac{1}{3} \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{3l^3}{24} = \frac{l^3}{8}$$

Lado del cubo equivalente: $$\mathbf{a} = \sqrt[3]{\frac{l^3}{8}} = \frac{l}{2} = \frac{4}{2} = \mathbf{2\ cm}$$

1.192. Un cartón cuya forma es la de un triángulo equilátero de 24 cm de lado se pliega en sus tres ángulos para formar un tetraedro regular. Hallar el volumen de este tetraedro.

El triángulo equilátero dado es el desarrollo del tetraedro regular pedido; luego la arista a *de este tetraedro será igual a la mitad del lado del triángulo equilátero, y su volumen será* (GEOM. **838**):

$$\mathbf{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{12^3\sqrt{2}}{12} = 12^2\sqrt{2} = \mathbf{203{,}645\ cm^3}$$

1.193. El lado de un tetraedro regular tiene 24,96 m. Calcular su volumen y el radio de la esfera inscrita.

● 1.° $\mathbf{V} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{24{,}96^3\sqrt{2}}{12} = \mathbf{1832{,}594\ m^3}$ (n.° **901**)

● 2.° *Las alturas del tetraedro regular se cortan en el punto que está a los 3/4 de cada una de ellas, a partir del vértice* (GEOM. **868**). *Luego el radio de la esfera inscrita es 1/4 de la altura.*

Altura: $$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$ (n.° **901**)

Luego $$\mathbf{r} = \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{24{,}96 \times 2{,}4495}{12} = \mathbf{5{,}0949\ m}$$

1.194. Un estanque circular de 3,5 m de radio está rodeado por una verja que ha costado 250 pts el metro lineal. Si mandamos reparar el fondo del estanque a razón de 100 pts el metro cuadrado, ¿cuánto costarán las reparaciones, cuánto habrá costado la verja y qué cantidad de agua contiene cuando sube el nivel a 0,5 m?

	Circunferencia de la verja:	$3{,}1416 \times 7 =$ 22	m
	Precio de la misma:	$250 \times 22 =$ 5500	pts
	Area del fondo del estanque:	$3{,}5^2 \times 3{,}1416 =$ 38,4846	m^2
• 1.º	*Precio de las reparaciones:*	$100 \times 38{,}4846 =$ **3848,46**	**pts**
• 2.º	*Cantidad de agua:*	$38{,}4846 \times 0{,}5 =$ **19,242**	**m^3**

1.195. Una piedra que pesa 75 kg y cuya densidad es 2,5, tiene la forma de un prisma exagonal regular de 30 cm de altura. Presenta un hueco cilíndrico cuyo eje es el del prisma y cuyo diámetro es igual a los 2/5 del lado del exágono de la base. Calcular la longitud de este lado.

Sea l *el lado del exágono de la base y* h *la altura del prisma.*

Radio del hueco cilíndrico: $l : 5$

Volumen del prisma: $\dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2} \times h$

Volumen de la parte cilíndrica: $\dfrac{\pi l^2}{25} \times h$

Vol. piedra: $\dfrac{3l^2\sqrt{3}h}{2} - \dfrac{\pi l^2 h}{25} = l^2 h \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{25}\right)$

En decímetros cúbicos este volumen es: $75 : 2{,}5 = 30\,dm^3$.

Luego $3l^2\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{25}\right) = 30$

$$l^2\,(2{,}598\,075 - 0{,}125\,664) = 10$$

$$\mathbf{l} = \sqrt{\frac{10}{2{,}598\,075 - 0{,}125\,664}} = \sqrt{\frac{10}{2{,}472\,441}} = \sqrt{4{,}044\,63} = \mathbf{2{,}0111\ dm}$$

1.196. Se construye un pabellón que tiene la forma de un prisma exagonal de base regular y que remata en una pirámide regular cuya base es la base superior del prisma. Toda la superficie exterior del pabellón se ha pintado a razón de 10 pts el m^2. Se sabe: 1.º que el gasto total por esta pintura es de 14 580 pts; 2.º que la altura del prisma es el duplo del lado de la base; 3.º que la altura de uno de los triángulos isósceles que forman las caras laterales de la pirámide es los 2/3 de la altura del prisma. Calcular:

1.º El lado de la base.

2.º La altura del pabellón.

• 1.º *Sea* l *el lado de la base del pabellón, la altura del prisma será* $2l$, *y el área lateral* $6l \times 2l = 12l^2$.

Apotema de la pirámide: $\dfrac{2}{3} \times 2l = \dfrac{4l}{3}$

Area lateral de la pirámide: $6l \times \dfrac{2l}{3} = \dfrac{12l^2}{3} = 4l^2$

Area exterior total del pabellón: $12l^2 + 4l^2 = 16l^2$

Luego $16l^2 = \dfrac{14\,580}{10} = 1458 \text{ m}^2$

$$1 = \sqrt{\frac{1458}{16}} = \mathbf{9{,}54\ m}$$

● 2.º **Cálculo de la altura de la pirámide.**—*Esta altura es un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la apotema de la pirámide* $4l/3$, *y el otro cateto es la apotema del polígono de la base, o sea* $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$

luego $$h = \sqrt{\left(\frac{4l}{3}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{37l^2}{36}} = \frac{l\sqrt{37}}{6}$$

$$h = \frac{9{,}54 \times \sqrt{37}}{6} = \frac{9{,}54 \times 6{,}083}{6} = 9{,}671 \text{ m}$$

Altura total: $9{,}671 + 2 \times 9{,}54 = \mathbf{28{,}75\ m}$

1.197. Se quiere hacer con cartón una cesta cuya forma es la de una pirámide truncada regular de bases paralelas (fig. 535). La base inferior es un pentágono regular inscrito en un círculo de 3 cm de radio; las caras laterales son trapecios iguales, en los cuales la base mayor tiene 7 cm y la altura 35 mm. Trazar la base y las caras laterales que se suponen desarrolladas en el papel, como si se tratara de hacer la cesta. Calcular en mm² la superficie de cartón que se necesitará.

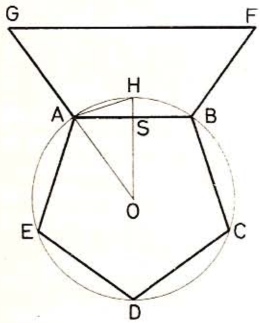


Fig. 535

● 1.º *Para obtener la base o fondo de la cesta se inscribirá un pentágono regular en una circunferencia de 3 cm de radio.*

Para obtener las caras laterales hay que construir, sobre cada lado del pentágono, un trapecio isósceles, tal como el ABFG, *de 35 mm de altura y cuya base superior tenga 7 cm.*

● 2.º *El desarrollo se compone del pentágono* ABCDE *y de cinco trapecios iguales al* ABFG.

Area pentágono: $$A_1 = \frac{5 \times AB \times OS}{2} \qquad (1)$$

Según GEOM. **460:** $AB = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \dfrac{30}{2} \times 2{,}351 = 35{,}265 \text{ mm}$

En $\triangle$ASO: $OS^2 = AO^2 - AS^2$

$$AS^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{R^2}{16}(10 - 2\sqrt{5})$$

Luego $$OS^2 = R^2 - \frac{R^2}{16}(10 - 2\sqrt{5}) = \frac{R^2}{16}(6 + 2\sqrt{5})$$

$$OS = \frac{R}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

sustituyendo en (1): $$A_1 = \frac{5}{2} \times \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \times \frac{R}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$$

$$A_1 = \frac{5R^2}{16}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5})} = \frac{5R^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Para R=30 mm: $$A_1 = \frac{5 \times 30^2}{8}\sqrt{14{,}4722} = \frac{4500}{8} \times 3{,}804 = 2139{,}75 \text{ mm}^2$$

Area trapecios: $$A_2 = \frac{70 + 35{,}265}{2} \times 35 \times 5 = 9210{,}6875 \text{ mm}^2$$

Area cartón: $$\mathbf{A} = 2139{,}75 + 9210{,}69 = \mathbf{11\,350{,}47\ mm^2}$$

1.198. Calcular el volumen de un tronco de pirámide regular de bases paralelas; la base inferior es un exágono de 80 cm de lado. El lado de la base superior tiene 40 cm y la altura del tronco 12 cm.

$$V = \frac{h}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})$$

Llamando l *y* l' *a los lados de las bases y sustituyendo tendremos:*

$$B = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \quad y \quad B' = \frac{3l'^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{h}{2}\left(\frac{3l^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3l'^2\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{3l'^2\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$V = \frac{h}{3}\left(\frac{3l^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3l'^2\sqrt{3}}{2} + \frac{3ll'\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\mathbf{V} = \frac{h\sqrt{3}}{2}(l^2 + l'^2 + ll') =$$

$$= \frac{1{,}2}{2}\sqrt{3}(8^2 + 4^2 + 8 \times 4) = \mathbf{116{,}39\ dm^3}$$

1.199. Un obelisco tiene la forma de un tronco de pirámide de base cuadrada (fig. 536). La base inferior tiene 1,2 m de lado, la superior 70 cm y la altura 15 m. El tronco remata en una pirámide regular cuyas caras laterales son triángulos equiláteros. Hallar el volumen del obelisco.

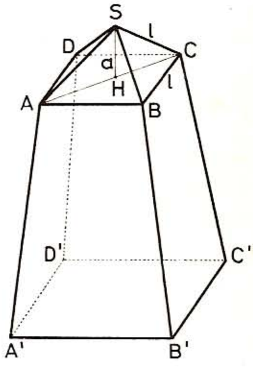


Fig. 536

- 1.º *Volumen del tronco:*

$$V_1 = \frac{h}{3}(B + B + \sqrt{BB'})$$

$$V_1 = 50(12^2 + 7^2 + 12 \times 7) = 13\,850 \text{ dm}^3$$

• 2.º *Volumen de la pirámide en que remata el obelisco. Sea* l *el lado de la base superior del tronco. La altura* a *de la pirámide es un cateto del triángulo rectángulo* SHA, *en el cual*

$$\mathrm{SA} = l \quad y \quad \mathrm{AH} = \frac{l\sqrt{2}}{2} \text{ (mitad de la diagonal AC).}$$

$$a = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{2}} = \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

Volumen pirámide: $$\mathrm{V}_2 = \frac{l^2}{3} \times \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{l^3\sqrt{2}}{6}$$

o sea: $$\mathrm{V}_2 = \frac{7^3\sqrt{2}}{6} = \frac{343 \times 1{,}4142}{6} = 80{,}845 \text{ dm}^3$$

Volumen total: $\mathbf{V} = 13\,850 + 80{,}845 = \mathbf{13\,930{,}845\ dm^3}$

1.200. Un barra de oro puro tiene la forma de una pirámide regular cuya base es un exágono regular de 5 cm de lado y el área lateral es igual a 7 veces la de la base. Calcular la altura de la pirámide, su volumen, su peso y su valor. Densidad del oro: 19,36. Valor del kg de oro puro: 37 200 pts.

• 1.º *Llamemos* l *al lado del exágono de la base.*

Area de esta base: $$\mathrm{B} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

Area lateral: $$\mathrm{AL} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \times 7 = \frac{21l^2\sqrt{3}}{2}$$

Apotema pirámide: $$ap = \frac{21l^2\sqrt{3}}{2} : 3l = \frac{7l\sqrt{3}}{2}$$

La altura h *de la pirámide es un cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la apotema de la pirámide, y el otro cateto la apotema del exágono que es igual a* $\frac{l\sqrt{3}}{2}$

$$h^2 = \left(\frac{7l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{147l^2}{4} - \frac{3l^2}{4} = \frac{144l^2}{4} = 36l^2$$

$$\mathbf{h} = \sqrt{36l^2} = 6l = 6 \times 5 = \mathbf{30\ cm}$$

• 2.º *Volumen de la pirámide:* $\mathrm{V} = \mathrm{B} \times \frac{h}{3}$

$$\mathbf{V} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{6l}{3} = 3l^3\sqrt{3} = 3 \times 5^3\sqrt{3} = \mathbf{649{,}5\ cm^3}$$

• 3.º *Peso:* 19,36 × 649,5 = **12 574,32 g**

• 4.º *Valor:* 37 200 × 12,574 = **467 752,80 pts**

1.201. La altura de una pirámide es de 5,4 m; la base es un cuadrado de 2,25 m de lado. Paralelamente a la base se traza un plano que determina en la pirámide una sección de 3,24 m². Hallar la distancia de esta sección a la base.

Designando por h *la altura de la pirámide, por* B *el área de la base, por* A *el área de la sección, y por* x *la distancia de esta sección al vértice, tendremos:*

$$\frac{B}{A} = \frac{h^2}{x^2} \quad \textit{de donde} \quad x = \sqrt{\frac{A \times h^2}{B}}$$

Sustituyendo: $$x = \sqrt{\frac{3{,}24 \times 5{,}4^2}{2{,}25^2}} = 4{,}32 \text{ m}$$

Distancia *pedida:* $5{,}40 - 4{,}32 = \mathbf{1{,}08\ m}$

1.202. El fondo de un foso es un rectángulo de 2,1 m de largo y 1 m de ancho. La cara superior, también de forma rectangular tiene 3,15 m de largo y 1,5 m de ancho. 1.º Demostrar que este foso tiene la forma de un tronco de pirámide de bases paralelas y 2.º calcular su capacidad en hl si su profundidad es de 1,5 m.

- 1.º *Sea* ABCD *la cara inferior y* A′B′C′D′ *la cara superior.*

$$\left.\begin{aligned} \frac{AB}{A'B'} &= \frac{2{,}10}{3{,}15} = \frac{2}{3} \\ \frac{BC}{B'C'} &= \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \quad \textit{Luego} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

las caras son, por tanto, polígonos semejantes paralelos.

- 2.º $V = 15/3\,(21 \times 10 + 31{,}5 \times 15 + \sqrt{21 \times 10 \times 31{,}5 \times 15})\ \text{dm}^3$
  $\mathbf{V} = 5\,(210 + 472{,}5 + 315) = 4987{,}5\ \text{dm}^3 = \mathbf{49{,}875\ hl}$

1.203. Dado un tronco de pirámide triangular cuyas bases tienen 10,24 m² y 6,25 m² y cuya altura es de 4,2 m, hallar el volumen de la pirámide formada por la base menor y la prolongación de las caras laterales del tronco.

Llamemos B *y* B′ *a las bases del tronco,* h *a su altura, y* x *a la altura de la pirámide buscada.*

Tendremos: $$\frac{B}{B'} = \frac{(h + x)^2}{x^2}$$

de donde: $$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B'}} = \frac{h + x}{x} \quad \textit{o sea} \quad \frac{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}{\sqrt{B'}} = \frac{h}{x}$$

por tanto: $$x = \frac{h\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$$

Tomando por unidad el decímetro, tendremos:

$$x = \frac{42\sqrt{625}}{\sqrt{1024} - \sqrt{625}} = \frac{42 \times 25}{32 - 25} = 150 \text{ dm}$$

Volumen de la pirámide: $$\mathbf{V} = \frac{625 \times 150}{3} = \mathbf{31\,250\ dm^3}$$

1.204. Calcular el peso de una barra de metal de 11,35 de densidad, si su forma es la de un cono recto cuya generatriz tiene 36 cm y la circunferencia de la base 84 cm.

Radio: $r = \dfrac{84}{2\pi} = \dfrac{42}{\pi} = 42 \times \dfrac{1}{\pi} = 42 \times 0{,}3183 = 13{,}37$ cm

Altura: $h = \sqrt{36^2 - 13{,}37^2} = \sqrt{49{,}37 \times 22{,}63} = 33{,}42$ cm

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \times 13{,}37^2 \times 33{,}42}{3} = 6256 \text{ cm}^3$$

Peso: $\mathbf{P} = 11{,}35 \times 6256 = 71\,005{,}60$ g $=$ **71,0056 kg**

1.205. Con oro se hace una pirámide cuadrangular regular cuya base tiene por radio 86 cm y cuya apotema es de 5,76 m. ¿Cuál es su peso si el oro tiene por densidad 19,25? ¿Cuál sería el radio de la base de un cono recto de 1,86 m de altura y cuyo volumen fuera el de la pirámide?

● 1.º *Siendo regular la pirámide, su base es un cuadrado cuyo lado es igual a* $86\sqrt{2}$ cm.

Altura pirámide: $h = \sqrt{576^2 - (43\sqrt{2})^2} = 572{,}78$ cm

Area base: $(86\sqrt{2})^2 = 86^2 \times 2 = 14\,792$ cm^2

Volumen pirámide: $V = \dfrac{14\,792 \times 572{,}78}{3}$ cm^3

Peso: $\mathbf{P} = \dfrac{14{,}792 \times 572{,}78 \times 19{,}25}{3} =$ **54 365,60 kg**

● 2.º *Vol. cono:* $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3} = \dfrac{\pi R^2 \times 186}{3} = \dfrac{14\,792 \times 572{,}78}{3}$

$$R^2 = \frac{14\,792 \times 572{,}78}{186\pi}$$

$$R = \sqrt{\frac{14\,792 \times 572{,}78}{186\pi}}$$

log. 14 792 = 4,170 027	*log.* 186 = 2,269 513
log. 572,78 = 2,757 988	*log.* π = 0,497 150
6,928 015	2,766 663

$$\log R = \frac{6{,}928\,015 - 2{,}766\,663}{2} = 2{,}080\,676$$

R = 120,41 cm

1.206. Un rectángulo ABCD, girando alrededor de CB, engendra un volumen ECDABF (fig. 537); el arco descrito desde el extremo A del lado DA es igual a 30º 30′; el lado CB del rectángulo tiene 5 m, y 3 m el lado AB. Hallar el volumen así engendrado.

El volumen engendrado puede considerarse como un prisma cuya base fuese el sector DCE; *su volumen será:*

$$V = \textit{sector}\ DCE \times CB$$

$$V = \frac{\pi AB^2 \times 30{,}5^o}{360} \times CB$$

$$\mathbf{V} = \frac{9\pi \times 30{,}5 \times 5}{360} = \mathbf{11{,}977\ 35\ m^3}$$

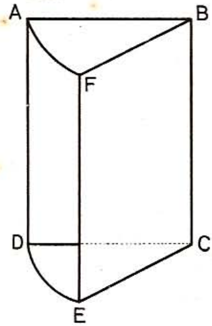


Fig. 537

Otra solución. — *Teniendo este sólido la misma altura que el cilindro, si representamos su volumen por* V', *y por* V *el del cilindro, resultará:*

$$\frac{V'}{V} = \frac{30{,}5^o}{360^o} = \frac{61}{720}$$

Pero $V = \pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$

Luego: $\mathbf{V'} = 45\pi \times \frac{61}{720} = \frac{61\pi}{16} = \mathbf{11{,}977\ 35\ m^3}$

1.207. Con tafetán que pesa 250 gramos el metro cuadrado se quiere fabricar un globo esférico de 904,78 m³ de capacidad. Hallar el peso del tafetán empleado.

Tenemos: $\frac{4\pi R^3}{3} = 904{,}78\ m^3$

de donde: $R = \sqrt[3]{\frac{904{,}78 \times 3}{4\pi}} = \sqrt[3]{216} = 6\ m$

Area del globo: $A = 4\pi R^2 = 4\pi \times 6^2 = 144\pi\ m^2$

Peso del tafetán: $\mathbf{P} = 0{,}25 \times 144\pi = \mathbf{113{,}097\ kg}$

1.208. El peso de una esfera de cobre es de 26,364 kg; siendo 8,788 la densidad del cobre, hallar el área de esta esfera.

Volumen de la esfera: $V = \frac{26{,}364}{8{,}788} = 3\ dm^3$

Luego: $\frac{4\pi R^3}{3} = 3$

de donde: $R = \sqrt[3]{\frac{9}{4\pi}} = 0{,}895\ dm$

Area: $\mathbf{A} = 4\pi R^2 = 4\pi \times 0{,}895^2 = \mathbf{10{,}06\ dm^2}$

1.209. Un depósito semiesférico tiene 50 hl de capacidad. Calcular su diámetro interior.

Llamando d *al diámetro de este depósito, tendremos:*

$$\frac{1}{6}\pi d^3 = 50 \times 2 = 100 \text{ hl} = 10 \text{ m}^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} \qquad \begin{array}{r} \log 60 = 1{,}778\ 151 \\ \log \pi = 0{,}497\ 150 \\ \hline 1{,}281\ 001 \end{array}$$

$$\log d = \frac{1{,}281\ 001}{3} = 0{,}427\ 000; \qquad \mathbf{d = 2{,}673\ m}$$

1.210. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es de 6 cm y uno de los ángulos agudos de 60º, gira alrededor del lado opuesto al ángulo de 60º. ¿Cuál es el volumen engendrado, si el triángulo ha dado la vuelta completa?

Este triángulo es la mitad del triángulo equilátero cuyo lado tiene 6 *cm; por tanto, el radio del cono obtenido es igual a* $l : 2 = 3$ *cm; la altura del cono es igual a* $\frac{l}{2}\sqrt{3}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3} \times \frac{l^2}{4} \times \frac{l}{2}\sqrt{3} = \frac{\pi l^3 \sqrt{3}}{24}$$

sustituyendo $$\mathbf{V} = \frac{\pi \times 6^3\sqrt{3}}{24} = 9\pi\sqrt{3} = \mathbf{48{,}972\ cm^3}$$

1.211. Una cúpula semiesférica tiene 7,5 m de diámetro interior y el espesor de la mampostería es de 50 cm. ¿Cuál es el precio:

1.º De la mampostería, si cuesta 49,8 pts el metro cúbico.

2.º El precio de la pintura de la cúpula a razón de 32 pts el m²?

● 1.º *Radio interior:* $R = 7{,}5 : 2 = 3{,}75$ m

Radio exterior: $R' = 3{,}75 + 0{,}5 = 4{,}25$ m

Volumen: $V = \frac{2\pi}{3}(4{,}25^3 - 3{,}75^3) = 50{,}328$ m³

Precio mampostería: $\mathbf{P} = 49{,}8 \times 50{,}328 =$ **2506,32 pts**

● 2.º *Area de la cúpula:* $A = 2 \times \pi \times 3{,}75^2 = 88{,}36$ m²

Gasto pintura: $\mathbf{G} = 32 \times 88{,}36 =$ **2827,52 pts**

1.212. La circunferencia de la base de un cono recto tiene 6,6 m y las generatrices forman con el plano de la base un ángulo de 60º. Calcular el volumen y el área total del cono ($\pi = 22/7$).

Radio de la base: $$r = \frac{66}{2\pi} = \frac{33}{\pi} \text{ dm}$$

La sección según el eje es un triángulo equilátero; la generatriz es igual al diámetro de la base, o sea:

$$l = 2r = \frac{66}{\pi} \quad y \quad h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{33\sqrt{3}}{\pi}$$

$$\mathbf{V} = \frac{\pi}{3} \times \frac{33^2}{\pi^2} \times \frac{33\sqrt{3}}{\pi} = \frac{33^2 \times 11\sqrt{3}}{\pi^2} = \frac{33^2 \times 11 \times 7^2\sqrt{3}}{22^2} =$$

$$= \frac{9 \times 11 \times 49\sqrt{3}}{4} = \mathbf{2100{,}483\ dm^3}$$

$$\mathbf{AT} = \pi r\,(l + r) = \pi r \cdot 3r = 3\,\pi r^2 = 3\pi \cdot \frac{33^2}{\pi^2} = \frac{3 \cdot 33^2 \cdot 7}{22} = \mathbf{1039{,}5\ dm^2}$$

1.213. Una esfera tiene 3 cm de radio. ¿A qué distancia del centro ha de trazarse un plano para que la sección que resulte sea 1/3 del área de un círculo máximo?

Sea DB (fig. 538) *el radio de la sección; sea* x *la distancia* OD.

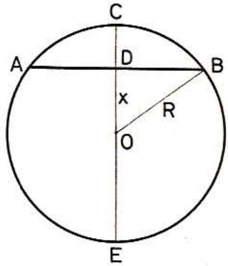


Fig. 538

Area sección: $\pi DB^2 = \pi\,(R^2 - x^2)$

Luego $\pi\,(R^2 - x^2) = \frac{1}{3}\,\pi R^2$

$$R^2 - x^2 = \frac{R^2}{3}$$

$$x^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}$$

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{2R^2}{3}} = R\sqrt{\frac{2}{3}} = 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6} = \mathbf{2{,}4495\ cm}$$

1.214. La arista de un cubo es de 35 cm. Calcular ($\pi = 22/7$):

1.º El área de la esfera circunscrita a dicho cubo.

2.º Su peso, si es de hierro. Densidad del hierro: 7,8.

• 1.º *El radio de la esfera circunscrita es igual a la mitad de la diagonal del cubo. Designando la arista por* a, *y por* d *la diagonal, tendremos:*

$$d = a\sqrt{3} \quad \textit{de donde} \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Area: $\mathbf{A} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2 = \frac{3 \times 22 \times 35^2}{7} = \mathbf{11\,550\ cm^2}$

• 2.º $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{22 \times 35^3\sqrt{3}}{7 \times 2} =$

$$= 116\,693{,}5\ cm^3$$

Peso: $\mathbf{P} = 116{,}6935 \times 7{,}8 = \mathbf{910{,}2093\ kg}$

1.215. Considerando la tierra como si fuera esférica, hallar en hectáreas el área de la zona comprendida entre los paralelos situados en el hemisferio norte, el uno a 45º y el otro a 30º de latitud (fig. 539).

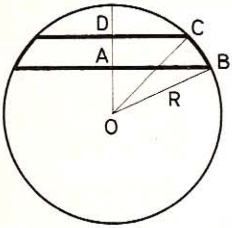


Fig. 539

Area de la zona: $z = 2\pi Ra$

$$a = AD = OD - OA$$

pero $\quad OD = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} \quad y \quad OA = \dfrac{R}{2}$

$$z = 2\pi R\left(\frac{R\sqrt{2}}{2} - \frac{R}{2}\right) = \pi R^2\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$z = \pi \times \left(\frac{40\,000}{2\pi}\right)^2 \times 0{,}4142 = \frac{20\,000^2 \times 0{,}4142}{\pi}$$

$$\begin{aligned} 2\,\textit{log}\ \ 20\,000 &= 8{,}602\,060 \\ \textit{log}\ \ 0{,}4142 &= \bar{1}{,}617\,210 \\ \textit{colog}\ \pi &= \bar{1}{,}502\,850 \\ \hline \textit{log}\ z &= 7{,}722\,120 \end{aligned}$$

$z = 52\,737\,560{,}98\ km^2$

z = 52 737 560 98 ha

1.216. Al echar en un vaso lleno de agua 3 esferas metálicas cuyos diámetros son entre sí como los números 3, 5 y 7, se derraman 3,96 dl de agua. Calcular el volumen de cada una de dichas esferas y el diámetro de la menor.

Volumen de las tres esferas: 396 cm^3.

● 1.º *Siendo los volúmenes proporcionales a los cubos de los diámetros, hay que dividir* 396 *proporcionalmente a* 3^3, 5^3 *y* 7^3, *o sea a* 27, 125 *y* 343.

Los volúmenes respectivos serán:

$$\frac{396 \times 27}{495};\quad \frac{396 \times 125}{495};\quad \frac{396 \times 343}{495}$$

o sea

$$\frac{4 \times 27}{5} = \mathbf{21{,}6\ cm^3};\qquad \frac{4 \times 125}{5} = \mathbf{100\ cm^3};\qquad \frac{4 \times 343}{5} = \mathbf{274{,}4\ cm^3}$$

● 2.º *Volumen de la esfera menor:* $\quad \dfrac{1}{6}\pi D^3 = 21{,}6$

$$D = \sqrt[3]{\frac{21{,}6 \times 6}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{129{,}6}{\pi}}$$

$$\begin{aligned} \textit{log}\ \ 129{,}6 &= 2{,}112\,605 \\ \textit{log}\ \pi &= 0{,}497\,150 \\ \hline & \ \ \ 1{,}615\,455 \end{aligned}$$

$$\textit{log}\ D = \frac{1{,}615455}{3} = 0{,}538485$$

Diámetro de la esfera menor: $\quad$ **D = 3,455 cm.**

1.217. ¿Cuáles son las dimensiones del medio hectolitro de madera que se usa en el comercio?

Llamando R *al radio de la base, la altura será* 2 R.

$$V = \pi R^2 \times 2\,R = 2\pi R^3 = 50\ dm^3$$

$$\mathbf{R} = \sqrt[3]{\frac{25}{\pi}} = \mathbf{1{,}996\ dm}$$

$$\mathbf{2R} = 1{,}996 \times 2 = \mathbf{3{,}992\ dm}$$

1.218. El cuerpo del areómetro de Nicholson está formado por un cilindro que termina en dos conos de igual base; su longitud total es de 20 cm y la altura de cada cono es el tercio de la del cilindro. Hallar el radio de la base del cilindro, sabiendo que el volumen total del cuerpo del areómetro es de 934,437 504 cm^3.

Si a *es la altura de cada cono, la del cilindro será* 3a; *total*, 5a.

Altura de cada cono: $20 : 5 = 4$ cm
Altura del cilindro: $4 \times 3 = 12$ cm

Llamando x *al radio buscado,*

Vol. conos: $$2V_1 = \frac{4\pi x^2}{3} \times 2 = \frac{8\pi x^2}{3}$$

Vol. cilindro: $$V_2 = 12\pi x^2$$

Volumen total: $$\frac{8\pi r^2}{3} + 12\pi x^2 = \frac{44\pi x^2}{3} = 934{,}437504\ cm^3$$

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{934{,}437\ 504 \times 3}{44\pi}} = \sqrt{20{,}28} = \mathbf{4{,}5\ cm}$$

1.219. El radio de un círculo menor trazado en una esfera (fig. 540) es de 39 mm; la distancia rectilínea de un punto de su circunferencia a su polo tiene 65 mm. Calcular el radio de la esfera.

$$IP = \sqrt{PB^2 - IB^2} = \sqrt{65^2 - 39^2} = \sqrt{104 \times 26} = 52\ mm$$

$$PB^2 = IP \times PP'$$

de donde $$PP' = \frac{PB^2}{IP} = \frac{65^2}{52} = 81{,}25\ mm$$

$$\mathbf{R} = \frac{81{,}25}{2} = \mathbf{40{,}625\ mm}$$

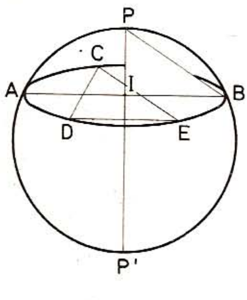


Fig. 540

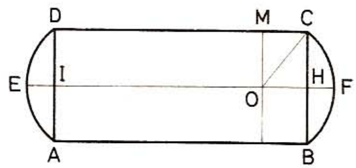


Fig. 541

1.220. Una caldera se compone de un cilindro ABCD (fig. 541) y dos casquetes esféricos idénticos AED y BFC. Si el radio del cilindro es de 40 cm y la longitud del mismo es de 200 cm, se desea conocer:

1.º La altura HF = IE de los casquetes, teniendo presente que el radio de la esfera a la cual pertenecen dichos casquetes es OC = OF = 50 cm.

2.º El área total de la caldera.

3.º El radio R_1 que tendría una esfera de igual área que la caldera.

• 1.º *Tracemos, desde el centro* O *de la esfera a la cual corresponde el casquete* BFC, *la perpendicular* OM *sobre* CD.

En $\triangle$OMC: $\quad MC = OH = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$ cm

de donde $\quad$ **HF** $= OF - OH = 50 - 30 =$ **20 cm**

• 2.º *El área total de la caldera se compone del área* A_1 *del cilindro* ABCD, *aumentado del área* A_2 *de dos casquetes iguales a* BFC.

$$A_1 = 2\pi \times OM \times CD = 2\pi \times 40 \times 200 = 50\,265{,}6 \text{ cm}^2$$
$$A_2 = 2 \times 2\pi \times OF \times HF = 4\pi \times 50 \times 20 = 12\,566{,}4 \text{ cm}^2$$

Area total: $\mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} = 50\,265{,}6 + 12\,566{,}4 = \mathbf{62\,832 \text{ cm}^2}$

• 3.º *Se tiene:* $\quad 4\pi R_1^2 = 62\,832$

de donde: $\quad \mathbf{R_1} = \sqrt{\dfrac{62\,832}{4 \times 3{,}1416}} = \mathbf{707 \text{ cm}}$

1.221. La sección de un canal tiene la forma de un trapecio isósceles cuyas bases tienen 3,15 m y 1,65 m y la altura 2,5 m. Este canal está lleno hasta los 4/5 de su altura y la velocidad de la corriente es de 34 cm por segundo. Calcular el tiempo necesario para que el agua circulada llene un depósito que tiene la forma de un cono truncado de 6,3 m de profundidad, si los radios de las bases son de 25 y 16 m ($\pi = 22/7$).

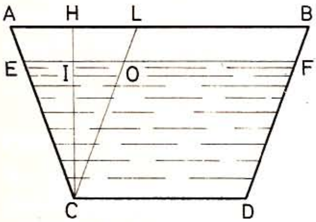


Fig. 542

Sea ABDC (fig. 542) *la sección del canal;* EF *representa el nivel del agua.*

$$CI = \frac{4}{5} \times CH = \frac{2{,}5 \times 4}{5} = 2 \text{ m}$$

Tracemos CL *paralela a* DB:

$$LB = OF = CD = 1{,}65 \text{ m}$$
$$AL = AB - LB = 3{,}15 - 1{,}65 = 1{,}5 \text{ m}$$

$\triangle CEO \sim \triangle CAL$, *por tanto*

al ser $\quad CI = CH \times \dfrac{4}{5}$ $\quad$ *será* $\quad EO = AL \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{1{,}5 \times 4}{5} = 1{,}2$ m

$$EF = EO + OF = 1{,}2 + 1{,}65 = 2{,}85 \text{ m}$$

El volumen del agua que pasa por segundo es igual al volumen del prisma líquido cuya base es el trapecio EFDC, *y cuya altura es la velocidad de la corriente,* 0,34 *m*.

$$V = \frac{2{,}85 + 1{,}65}{2} \times 2 \times 0{,}34 = 1{,}53 \text{ m}^3$$

Volumen del depósito: $V_1 = \dfrac{22 \times 6{,}3}{7 \times 3}(25^2 + 16^2 + 25 \times 16) = 8454{,}6 \text{ m}^3$

Tiempo necesario: $\dfrac{8454{,}6}{1{,}53} = 5525{,}8 \text{ seg} = \mathbf{1\ h\ 32\ m\ 5{,}8\ s}$

1.222. ¿Cómo ha de cortarse una hoja de papel para formar una pantalla tronco-cónica que tenga 23 cm de diámetro de abertura superior y 35 cm de abertura inferior, si su generatriz es de 18 cm?

El cono entero desarrollado daría un sector de círculo; calculemos el radio y el ángulo de este sector.

- 1.º *El radio de este sector es la generatriz del cono.*

Sea SAB *la sección recta del cono y* CE *el radio de esta sección* (fig. 543).

$$CE = \frac{23}{2} = 11{,}5 \text{ cm}; \quad AF = \frac{35}{2} = 17{,}5 \text{ cm}; \quad AC = 18 \text{ cm}$$

$\triangle SEC \sim \triangle SFA$, *luego:* $\dfrac{SC}{SA} = \dfrac{CE}{AF}$

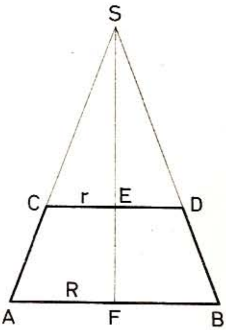


Fig. 543

Sea x *la distancia* SC; *sustituímos:*

$$\frac{x}{18 + x} = \frac{11{,}5}{17{,}5}$$

de donde: $x = \mathbf{SC} = \mathbf{34{,}5\ cm}$

y $\mathbf{SA} = 34{,}5 + 18 = \mathbf{52{,}5\ cm}$

- 2.º *Sea* nº *la abertura del arco.*

Long. del arco:

$$\frac{\pi \times 52{,}5 \times n}{180} = \pi \times 35$$

de donde: $\mathbf{n} = \dfrac{35 \times 180}{52{,}5} = \mathbf{120^o}$

Construcción. — *Dibujar un ángulo de* 120º; *desde el vértice, con radios iguales a* 52,5 *cm y* 34,5 *cm, describir arcos concéntricos. La superficie comprendida entre los dos arcos representará la parte que se ha de cortar.*

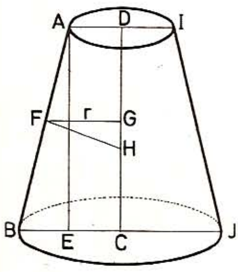


Fig. 544

Nota. — *Para calcular el ángulo del sector, hubiéramos podido utilizar también la base menor del tronco de cono.*

1.223. Las bases de un tronco de cono (fig. 544) tienen 1,25 m y 86 cm de circunferencia y la generatriz 72 cm. Calcular el volumen y el área lateral de este tronco.

- 1.º *Area lateral:*

$$\mathbf{AL} = \frac{125 + 86}{2} \times 72 = \mathbf{7\,596\ \ cm^2}$$

• 2.º

$$BJ = \frac{125}{\pi} = 39{,}8 \text{ cm}$$

$$AI = \frac{86}{\pi} = 27{,}4 \text{ cm}$$

$$BE = \frac{BJ - AI}{2} = \frac{39{,}8 - 27{,}4}{2} = 6{,}2 \text{ cm}$$

En $\triangle$BAE: $$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{72^2 - 6{,}2^2} = 71{,}8 \text{ cm}$$

Volumen del tronco:

$$\mathbf{V} = \frac{\pi \times 71{,}8}{3}(19{,}9^2 + 13{,}7^2 + 19{,}9 \times 13{,}7) = \mathbf{64\,386 \quad cm^3}$$

1.224. Se funde una barra cilíndrica de 50 cm de longitud y 24 mm de diámetro para formar una esfera que ha de cubrirse con una capa de plata de 1 mm de espesor. Calcular el peso de esta capa, si la densidad de la plata es 10,47.

Vol. esfera obtenida: $V = \pi \times 1{,}2^2 \times 50 \text{ cm}^3$

luego: $$\frac{4\pi R^3}{3} = \pi \times 1{,}2^2 \times 50$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{\pi \times 1{,}2^2 \times 50 \times 3}{4\pi}} = \sqrt[3]{54} = 3{,}78 \text{ cm} \simeq 38 \text{ mm}$$

La plata forma una capa esférica cuyo volumen es la diferencia entre los volúmenes de dos esferas de radios respectivamente iguales a 39 *y* 38 *mm.*

$$V_1 = \frac{4\pi 39^3}{3} - \frac{4\pi 38^3}{3} = \frac{4\pi}{3}(39^3 - 38^3) = 4{,}1888 \times 4447 \text{ mm}^3$$

Peso de la plata: $\mathbf{P} = 10{,}47 \times 4{,}1888 \times 4{,}447 = \mathbf{195{,}034\ g}$

1.225. Un fuste de columna de 6 m de altura está formado de un cilindro que remata en cono truncado, cuya altura es el duplo de la del cilindro. El radio de la base superior del tronco es los 5/6 del de la base inferior, que es el del cilindro. Calcular el radio de la base del cilindro, siendo el volumen del fuste 4,177 m³.

Llamemos R *al radio de la base del cilindro y* h *a su altura.*

Vol. cilindro: $$V_1 = \pi R^2 h$$

Vol. tronco de cono: $$V_2 = \frac{\pi \cdot 2h}{3}\left[R^2 + \left(\frac{5R}{6}\right)^2 + \frac{5R^2}{6}\right]$$

$$V_2 = \frac{2\pi h}{3}\left[R^2 + \frac{25R^2}{36} + \frac{5R^2}{6}\right] = \frac{2\pi h}{3} \times \frac{91R^2}{36} = \frac{91\pi R^2 h}{54}$$

Volumen total: $$V = \pi R^2 h + \frac{91\pi R^2 h}{54} = \frac{145\pi R^2 h}{54}$$

Siendo la altura total del fuste igual a 6 m, *la altura* h *del cilindro será* $6 : 3 = 2 \text{ m} = 20 \text{ dm}$; *luego tendremos:*

$$\frac{145\pi R^2 \times 20}{54} = 4177 \text{ dm}^3$$

de donde:
$$R = \sqrt{\frac{4177 \times 27}{1450\pi}} = \mathbf{4{,}975\ dm}$$

1.226. Dado un cono (fig. 545) cuya altura es 28 dm y 21 dm el radio de la base, se le corta por medio de un plano paralelo a la base a 7 dm del vértice. Calcular el área lateral y el volumen del tronco resultante ($\pi = 22/7$).

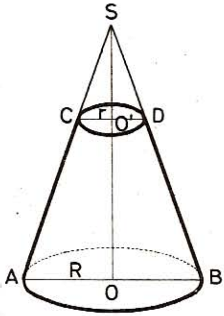


Fig. 545

- 1.º *Arista* SA: $\sqrt{28^2 + 21^2} = \sqrt{1225} = 35$ dm

Area lateral del cono:

$$A = \pi r l = \frac{22}{7} \times 21 \times 35 = 2310 \text{ dm}^2$$

Sea A′ *el área lateral del cono determinado por la sección, y* A *el área del cono total. Tendremos:*

$$\frac{A'}{A} = \frac{SO'^2}{SO^2} = \frac{7^2}{28^2} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{A - A'}{A} = \frac{16 - 1}{16} = \frac{15}{16}$$

de donde A − A′, *o sea área lateral del tronco:*

$$\mathbf{A - A'} = A \times \frac{15}{16} = 2310 \times \frac{15}{16} = \mathbf{2165{,}625\ dm^2}$$

- 2.º *También tendremos:* $\frac{V'}{V} = \frac{SO'^3}{SO^3} = \frac{7^3}{28^3} = \frac{1}{64}$

$$\frac{V - V'}{V} = \frac{64 - 1}{64} = \frac{63}{64}$$

Por tanto, V − V′, *o sea volumen del tronco:*

$$\mathbf{V - V'} = V \times \frac{63}{64} = 22 \times 21 \times 28 \times \frac{63}{64} = \mathbf{12\,733{,}875\ dm^3}$$

1.227. Una caldera consta de un cilindro, de radio R y longitud 2R (figura 546), terminado por dos casquetes esféricos cuyo ángulo central tiene 4/3 de ángulo recto. Calcular, en función de R:

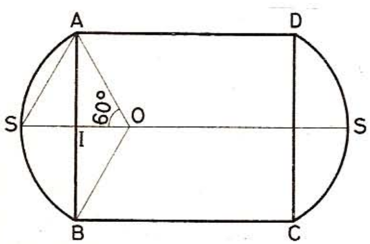


Fig. 546

1.º El radio de la esfera a la cual pertenecen los dos casquetes.

2.º El área de la caldera, prescindiendo del espesor de las chapas. Aplicación numérica: R = 1 m.

- 1.º *Sea* O *el centro del casquete* ASB. *En el* △AOS: OA = OS *y* ∠AOS = 60, *luego es equilátero.*

Por hipótesis: $AI = R \quad y \quad AO = r$

En $\triangle OAI$: $AI^2 = AO^2 - OI^2$

o sea
$$R^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3r^2}{4}$$

de donde
$$\mathbf{r = \frac{2R\sqrt{3}}{3}}$$

para R = 1 m:
$$\mathbf{r} = \frac{2 \times 1 \times 1{,}732}{3} = \mathbf{1{,}1547\ m}$$

• 2.º **Area de la caldera.**—*Se compone del área lateral del cilindro más el área de los dos casquetes.*

Area lateral cilindro: $AL = 2\pi R \times 2\,R = 4\pi R^2$

$$a = SI = \frac{r}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

Area del casquete ASB:

$$A = 2\pi ra = 2\pi \times \frac{2R\sqrt{3}}{3} \times \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{4\pi R^2}{3}$$

Area de la caldera:

$$\mathbf{AT} = 4\pi R^2 + \frac{4\pi R^2}{3} \times 2 = \mathbf{\frac{20\pi R^2}{3}}$$

Para R = 1 m:

$$\mathbf{AT} = \frac{20}{3}\pi R^2 = \frac{20}{3} \times 3{,}1416 \times 1 = \mathbf{20{,}944\ m^2}$$

1.228. La circunferencia externa de la sección recta de una caldera de cobre tiene 3,142 m. La longitud de la parte cilíndrica es 3 m y el espesor 1,5 mm; la parte cilíndrica termina en dos hemisferios cuyo radio es el de la caldera. Hallar el volumen y el peso de esta caldera, si la densidad del cobre es 8,85 ($\pi = 3{,}142$).

Radio:
$$\frac{3{,}142}{2\pi} = \frac{1}{2}\ m$$

Vol. de la caldera:

$$V = \pi R^2\, h + \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2\left(h + \frac{4R}{3}\right)$$

$$\mathbf{V} = 3{,}142 \times \frac{1}{4}\left(3 + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \mathbf{2{,}88\ m^3}$$

• 2.º *Como el espesor es pequeño en comparación de la superficie, para hallar el volumen se puede, sin error notable, hacer el producto de la superficie por el espesor del cobre.*

Area de la caldera: $A = 3 \times 3{,}142 + 4\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 12{,}568\ m^2$

Volumen del cobre: $\mathbf{V} = 1256{,}8 \times 0{,}015 = \mathbf{18{,}852\ dm^3}$

Peso: $\mathbf{P} = V \times D = 18{,}852 \times 8{,}85 = \mathbf{166{,}84\ kg}$

1.229. En un triángulo rectángulo los catetos tienen respectivamente 108 y 144 mm. ¿A qué distancia de la hipotenusa ha de trazarse una paralela a ella para obtener un trapecio de 972 mm²? Si se hace girar este triángulo alrededor de la hipotenusa, ¿cuáles serán el volumen y el área del sólido engendrado?

Sea BAC (fig. 547) *el triángulo rectángulo,* EF *la paralela a la hipotenusa y* AD *la altura; tendremos:*

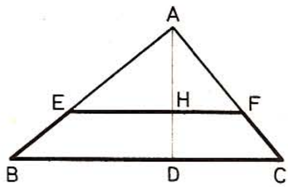


Fig. 547

• 1.º $BC = \sqrt{BA^2 + AC^2} = \sqrt{144^2 + 108^2} = 180\ mm$

$$BC \times AD = AB \times AC$$

Luego $$AD = \frac{AB \times AC}{AD} = \frac{144 \times 108}{180} = 86{,}4\ mm$$

Area $\triangle$ABC:

$$A_1 = \frac{BA \times AC}{2} = \frac{144 \times 108}{2} = 7776\ mm^2$$

Area $\triangle$AEF: $A_2 = 7776 - 972 = 6804\ mm^2$

Por ser semejantes los triángulos ABC *y* AEF, *tenemos:*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{AD^2}{AH^2} \quad o\ sea \quad \frac{7776}{6804} = \frac{86{,}4^2}{AH^2}$$

$$AH = \sqrt{\frac{6804 \times 7464{,}96}{7776}} = \sqrt{6531{,}84} = 80{,}82\ mm$$

$$\mathbf{DH} = AD - AH = 86{,}4 - 80{,}82 = \mathbf{5{,}58\ mm}$$

• 2.º *El área engendrada es igual a la suma de las áreas laterales de dos conos, cuyo radio es* AD, *y las generatrices* AC *y* AB, *o sea:*

$$\pi AD \times AC + \pi AD \times AB = \pi AD\,(AC + AB) = \pi 86{,}4\,(108 + 144) = \mathbf{68\,401{,}6\ mm^2}$$

• 3.º *El volumen engendrado es igual a la suma de los volúmenes de dos conos cuyo radio es* AD, *y las alturas* CD *y* BD, *o sea:*

$$V = \frac{\pi}{3} AD^2 \times CD + \frac{\pi}{3} AD^2 \times BD = \frac{\pi}{3} AD^2\,(CD + BD)$$

$$\mathbf{V} = \frac{\pi}{3} AD^2 \times BC = \frac{\pi}{3} \times 7464{,}96 \times 180 = \mathbf{1407\,115\ mm^3}$$

1.230. Dada una circunferencia O de radio R (fig. 548), trazamos dos diámetros perpendiculares, AB, CD, y en el punto M del arco AC trazamos la tangente ME, que cortará a la prolongación de DC en el punto E.

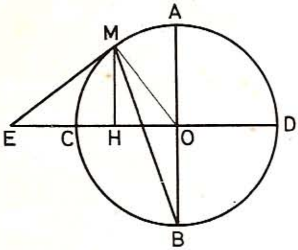


Fig. 548

a) Demuéstrese que $\angle MEO = 2 \times \angle MBA$.

b) Suponiendo que $\angle MBA = 15^o$, calcúlese:

1.º La longitud de ME.

2.º La longitud de MH perpendicular trazada desde el punto M a la recta CD.

c) El contorno EMAD engendra, al girar alrededor del eje ED, la superficie de una peonza. Hállese, en función del radio R, el área de dicho juguete.

● a) *Tracemos el radio* OM. $\angle MEO = \angle MOA$ *por ser de la misma especie y tener sus lados respectivamente perpendiculares. Mas el ángulo central* MOA *es duplo del ángulo inscrito* MBA, *que intercepta igual arco; por tanto,* $\angle \mathbf{MEO} = \mathbf{2} \times \angle \mathbf{MBA}$.

● b) *Si* $\angle MBA = 15^o$, *el* $\angle MEO = 30^o$ *y los triángulos rectángulos* OEM *y* HEM *son dos triángulos semiequiláteros; por consiguiente:*

1.º $$EO = 2OM = 2R \quad y \quad \mathbf{ME} = \frac{EO\sqrt{3}}{2} = \mathbf{R\sqrt{3}}$$

2.º $$\mathbf{MH} = \frac{ME}{2} = \frac{\mathbf{R\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

● c) *El área engendrada por el contorno* EMAD *al girar alrededor del eje* ED *es igual al área lateral del cono que engendra la recta* ME, *más el área del casquete esférico engendrado por el arco* MD, *a saber:*

$$A_r = (\pi \times MH \times ME) + (2\pi R \times HD)$$

pero $$HD = HO + OD = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}$$

Luego $$\mathbf{A}_r = \left(\pi \times R\sqrt{3} \times \frac{R\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi R \times \frac{3R}{2} = \frac{\mathbf{9\pi R^2}}{\mathbf{2}}$$

1.231. Sobre un plano se desarrolla la superficie convexa de un cono de 63 cm de altura y 16 896 cm^3 de volumen. Calcular el ángulo central y el área del sector circular que resulta ($\pi = 22/7$).

● 1.º *Calculamos el radio y la generatriz del cono.*

Vol. del cono:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad de\ donde \quad r^2 = \frac{3V}{\pi h}$$

Radio:

$$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{3 \times 16\,896 \times 7}{22 \times 63}} = \sqrt{256} = 16 \text{ cm}$$

Generatriz: $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{63^2 + 256} = \sqrt{4225} = 65$ cm

Area sector = área lateral del cono

$$\mathbf{A} = \pi r l = \frac{22}{7} \times 16 \times 65 = \mathbf{3268{,}57\ cm^2}$$

● 2.º *Para obtener el ángulo del sector igualemos el área del sector y el área lateral del cono:*

$$\frac{\pi l^2 n^{\circ}}{360^{\circ}} = \pi r l; \qquad \frac{l n^{\circ}}{360} = r$$

$$\mathbf{n} = \frac{360\ r}{l} = \frac{360 \times 16}{65} = \mathbf{88^{\circ}\ 36'\ 55{,}38''}$$

1.232. Un vaso cilíndrico, de 1 hl de capacidad, tiene el diámetro igual a la altura y está lleno de agua hasta la mitad. Se echa en él una esfera de plomo que pesa 200 kg. Calcular:

1.º Cuántos centímetros subirá el nivel del agua.

2.º A qué distancia del nivel se hallará el punto más alto de la esfera, si la densidad del plomo es 11,3.

● 1.º *Si* d *representa el diámetro del cilindro, tendremos:*

Vol. cilindro: $\frac{\pi d^2}{4} \times d = \frac{\pi d^3}{4} = 100\ \text{dm}^3$

$$d = \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} = 5{,}03\ \text{dm}$$

Altura del líquido: $5{,}03 : 2 = 2{,}515$ dm

Volumen de la esfera: $200 : 11{,}3 = 17{,}699 \simeq 17{,}7\ \text{dm}^3$

Volumen total: $50 + 17{,}7 = 67{,}7\ \text{dm}^3$

Altura del líquido después de la inmersión de la esfera:

A 50 dm³ — 2,515 dm *de altura*

A 67,7 dm³ — x »

$$x = \frac{2{,}515 \times 67{,}7}{50} = 3{,}405\ \text{dm}$$

El nivel ha subido: $3{,}405 - 2{,}515 = 0{,}89$ dm $=$ **8,9 cm.**

● 2.º *Si* d′ *es el diámetro de la esfera, tenemos:*

$$\frac{1}{6}\pi d^3 = 17{,}7; \qquad d' = \sqrt[3]{\frac{17{,}7 \times 6}{\pi}} = 3{,}233\ \text{dm}$$

Distancia de la esfera al nivel del líquido:

$$3{,}405 - 3{,}233 = \mathbf{0{,}172\ dm}$$

1.233. En un cono invertido (fig. 549) que tiene en el vértice un ángulo de 60º, colocamos una esferilla de cristal de 3 cm de radio, de modo que sea tangente a la cara interior del cono.

1.º Suponiendo demostrado que los puntos de contacto de la esfera con el cono forman una circunferencia, calcular el radio de esta circunferencia.

2.º Calcular el volumen de la parte inferior del cono comprendida entre el vértice de éste y la esferilla.

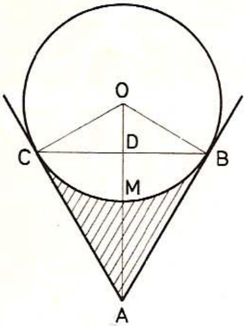


Fig. 549

● 1.º *Sea* r = 3 cm *el radio de la esferilla. En el triángulo rectángulo* ABO, *tendremos:*

$$\angle OAB = \frac{\angle A}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

y, por tanto, $OA = 2 \times OB = 2r$

El triángulo rectángulo ODB *es un semitriángulo equilátero en el que:*

$$OB = r; \quad OD = \frac{OB}{2} = \frac{r}{2}; \quad BD = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

El radio de la circunferencia de contacto será, por consiguiente:

$$\mathbf{BD} = \frac{\mathbf{r}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \mathbf{2{,}598\ cm}$$

● 2.º *El volumen de la parte comprendida entre el vértice del cono y la esferilla es igual a la diferencia entre la suma de los volúmenes de los conos* OCB, ACB *y el volumen del sector esférico* OCMB.

Vol. conos:

$$V_1 = \frac{\pi BD^2}{3}(OD + DA) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times 2r = \frac{\pi r^3}{2}$$

Vol. sector:

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 \times DM = \frac{2}{3}\pi r^2 \times \frac{r}{2} = \frac{\pi r^3}{3}$$

$$\mathbf{V_1 - V_2} = \frac{\pi r^3}{2} - \frac{\pi r^3}{3} = \frac{\pi r^3}{6} = \frac{\pi (3)^3}{6} = \mathbf{14{,}137\,2\ cm^3}$$

1.234. Hallar el volumen y el área total de un cono formado con un sector circular cuyo arco tiene 45º y el radio 25 cm.

● 1.º *Arco del sector o circunferencia del cono:*

$$\frac{\pi \times 25 \times 45}{180} = \frac{25\pi}{4}$$

Radio de la base del cono:

$$2\pi r = \frac{25\pi}{4} \quad \textit{de donde} \quad r = \frac{25}{8}\text{ cm}$$

Altura cono:

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - \left(\frac{25}{8}\right)^2} = 24{,}8\text{ cm}$$

El área total del cono: $\quad AT = \pi r\,(l + r)$

$$\mathbf{AT} = \frac{25\pi}{8}\left(25 + \frac{25}{8}\right) = \frac{25\pi}{8} \times \frac{225}{8} = \frac{5625\pi}{64} = \mathbf{276{,}12\ cm^2}$$

● 2.º *Volumen:* $\quad \mathbf{V} = \dfrac{\pi \times 24{,}8}{3}\left(\dfrac{25}{8}\right)^2 = \dfrac{3875\pi}{48} = \mathbf{253{,}617\ cm^3}$

1.235. Un cono de plomo cuya generatriz es igual al diámetro de la base, pesa 10 kg. Calcular las dimensiones de este cono, su área lateral, su área total, el peso del plomo que se le ha de quitar para reducirlo a una esfera inscrita, y el radio de la esfera que se formaría con el plomo quitado. (Densidad del plomo: 11,3.)

● 1.º *Sea* x *el radio de la base del cono, la generatriz será* 2x *y la altura* $x\sqrt{3}$ (GEOM. **447**).

Vol. cono: $\quad V = \pi x^2 \times \dfrac{x\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi x^3\sqrt{3}}{3}$

Pero $\quad V = \dfrac{10\,000}{11{,}3}\ \text{cm}^3$

Luego $\quad \dfrac{\pi x^3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{10\,000}{11{,}3}$

y $$x^3 = \frac{10\,000 \times 3}{11{,}3 \times \sqrt{3} \times \pi} = \frac{10\,000\sqrt{3}}{11{,}3 \times \pi} \qquad (1)$$

Radio: $\quad \mathbf{x} = \sqrt[3]{\dfrac{10\,000\sqrt{3}}{11{,}3 \times \pi}} = \mathbf{7{,}8724\ cm}$

Altura del cono: $\quad \mathbf{x\sqrt{3}} = 7{,}8724 \times \sqrt{3} = \mathbf{13{,}635\ cm}$

● 2.º *Area lateral:*

$$\mathbf{AL} = \pi x \times 2x = 2\pi x^2 = 2\pi \times 7{,}8724^2 = \mathbf{389{,}399\ cm^2}$$

● 3.º *Area total:*

$$\mathbf{AT} = \pi x\,(x + 2x) = 3\pi x^2 = 3\pi \times 7{,}8724^2 = \mathbf{584{,}098\ cm^2}$$

● 4.º *Dibujando la sección del cono y de la esfera inscrita, por un plano que pase por el eje del cono, se ve que la sección del cono es un triángulo equilátero y el centro de la esfera inscrita es el baricentro del triángulo. Luego*

Radio esfera inscrita: $\quad r = \dfrac{h}{3} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$

Vol. esfera: $\quad V = \dfrac{4\pi}{3}\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{4\pi \times x^3 \times 3\sqrt{3}}{3 \times 27} = \dfrac{4\pi x^3\sqrt{3}}{27}$

Plomo quitado: $\quad V_1 = \dfrac{\pi x^3\sqrt{3}}{3} - \dfrac{4\pi x^3\sqrt{3}}{27} = \dfrac{5\pi x^3\sqrt{3}}{27}$

Sustituyendo x^3 *por su valor en* (1):

$$V_1 = \frac{5\pi\sqrt{3}}{27} \times \frac{10\,000\sqrt{3}}{11,3\ \pi} = \frac{50\,000}{9 \times 11,3}$$

Peso del plomo: $$\mathbf{P} = \frac{50\,000}{9 \times 11,3} \times 11,3 = \frac{50\,000}{9} = \mathbf{5555,5\ g}$$

● 5.° *Sea* R *el radio de la esfera de volumen igual al del plomo quitado.*

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{50\,000}{9 \times 11,3}$$

de donde $$\mathbf{R} = \sqrt[3]{\frac{50\,000 \times 3}{9 \times 11,3 \times 4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{125\,000\ \pi}{339\ \pi}} = \mathbf{4,896\ cm}$$

1.236. Dado un cono (fig. 550) que tiene 50 cm de altura y la misma longitud como radio de la base, se le inscribe una esfera de 10 cm de radio.

1.° ¿Cuál será el volumen de la parte restante del cono?

2.° ¿Cuál será el radio de la circunferencia de contacto de la esfera y el cono, suponiendo demostrado que los puntos de contacto formen una circunferencia?

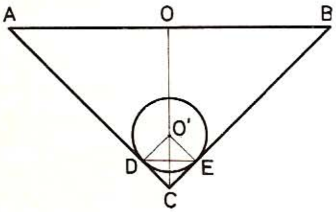


Fig. 550

● 1.° *Vol. cono:* $V_1 = \frac{\pi}{3} \times OA^2 \times OC$

$$V = \frac{\pi}{3} \times 5^2 \times 5 = \frac{125\,\pi}{3}\ dm^3$$

Vol. esfera: $V_2 = \frac{4\pi}{3} \times O'D^3 = \frac{4\pi}{3}\ dm^3$

Diferencia: $$\mathbf{V_1 - V_2} = \frac{125\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{121\pi}{3} = \mathbf{126,65\ dm^3}$$

● 2.° *Tracemos los radios* O'D *y* O'E *de la esfera perpendiculares respectivamente a* AC *y* BC *y unamos* D *con* E. *El cuadrilátero* O'DCE *tiene los ángulos rectos y dos lados contiguos iguales; es, por tanto, un cuadrado.*

El radio de la circunferencia de contacto será, por consiguiente:

$$\mathbf{r} = \frac{DE}{2} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{2} = \frac{1,4142}{2} = \mathbf{0,7071\ dm}$$

1.237. Si dado un triángulo isósceles ABC (fig. 551), tal que sea AB = BC = 10 cm, AC = = 12 cm, trácese la altura BH.

1.° ¿Dónde está el centro O de la circunferencia inscrita en dicho triángulo?

2.° Trácese por el punto de contacto D el radio OD y hállense dos triángulos semejantes, deduciendo de su semejanza la longitud de la circunferencia inscrita.

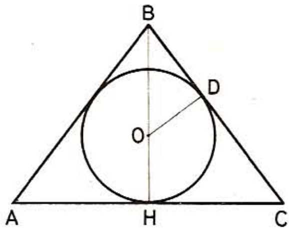


Fig. 551

3.º Tomando la altura BH como eje de rotación, calcular el volumen engendrado por el triángulo y el volumen engendrado por el círculo inscrito.

● 1.º *El centro de la circunferencia inscrita en un triángulo se halla en el punto de concurso de las bisectrices interiores. Como la altura* BH *es al mismo tiempo bisectriz del triángulo* ABC, *el centro de la circunferencia inscrita se hallará* **sobre la recta BH.**

● 2.º *Circunf. inscrita:* $C = 2\pi \times OD$ (1)

$\triangle ODB \sim \triangle BHC$ *(rectángulos con un ángulo agudo común)*

luego $\dfrac{OD}{CH} = \dfrac{BD}{BH}$ *de donde* $OD = \dfrac{CH \times BD}{BH}$ (2)

$$BD = BC - DC = BC - CH = BC - \frac{AC}{2} = 10 - 6 = 4 \text{ cm}$$

En $\triangle BHC$: $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

Sustituyendo en (2): $OD = \dfrac{6 \times 4}{8} = 3$ cm

Sustituyendo en (1): $\mathbf{C} = 2\pi \times 3 = \mathbf{18{,}8496\ cm}$

● 3.º *Al girar el triángulo* BAC *alrededor del eje* BH *se engendra un cono de revolución. El círculo engendra una esfera.*

Vol. cono: $\mathbf{V_1} = \dfrac{\pi}{3} CH^2 \times BH = \dfrac{\pi}{3} \times 36 \times 8 = \mathbf{301{,}5936\ cm^3}$

Vol. esfera: $\mathbf{V_2} = \dfrac{4\pi OD^3}{3} = \dfrac{4\pi \times 27}{3} = \mathbf{113{,}0976\ cm^3}$

1.238. En un molde cuya forma es la de un cono equilátero se vierten 1360 kg de hierro fundido que lo llenan hasta los 2/3 de la altura, a contar desde la base. ¿Cuál es el radio de la base de este cono? Densidad del hierro colado: 7,2.

Sea r *el radio de la base del cono, la generatriz será* 2r *y la altura* $r\sqrt{3}$.

El hierro tiene en el molde la forma de un tronco de cono (la base menor, arriba) cuya altura será $2/3 \times r\sqrt{3}$ *y el radio de la base superior,* r/3.

$$V = \frac{\pi h}{3}\left[r^2 + \left(\frac{r}{3}\right)^2 + r \times \frac{r}{3}\right] = \frac{\pi}{3} \times \frac{2r\sqrt{3}}{3}\left(r^2 + \frac{r^2}{9} + \frac{r^2}{3}\right)$$

$$V = \frac{2\pi r\sqrt{3}}{9} \times \frac{13r^2}{9} = \frac{26\pi r^3\sqrt{3}}{81}$$

Luego $$\frac{26\pi r^3\sqrt{3}}{81} = \frac{1360}{7{,}2} = \frac{1700}{9}$$

de donde $$r = \sqrt[3]{\frac{1700 \times 81}{9 \times 26\pi\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{5100\sqrt{3}}{26\pi}}$$

$$\begin{aligned} log\ \ 5100 &= 3,707\,570 \\ log\ \ \sqrt{3} &= 0,238\,561 \\ colog\ \ 26 &= \overline{2},585\,027 \\ colog\ \ \pi &= \overline{1},502\,850 \\ \hline log\ \ r^3 &= 2,034\,008 \end{aligned}$$

$$log\ \ r = 0,678\,003$$
$$\mathbf{r = 4,764\ dm}$$

1.239. Un semiexágono regular (fig. 552) de 2,35 m de lado gira alrededor del diámetro de la circunferencia circunscrita. Hallar el radio de la esfera que tenga un área equivalente a la engendrada por el perímetro del semiexágono.

Por el teorema de la línea poligonal regular que gira alrededor de un eje (GEOM. **956**) *sabemos:*

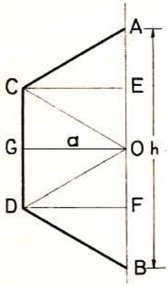


Fig. 552

Area engendrada: $\quad A = 2\pi ah$

$$a = OG = \frac{l\sqrt{3}}{2}; \qquad h = AB = 2l$$

$$A = 2\pi \times \frac{l\sqrt{3}}{2} \times 2l = 2\pi l^2\sqrt{3}$$

Siendo r *el radio de la esfera de área equivalente, tendremos:*

$$4\pi r^2 = 2\pi l^2\sqrt{3} \quad \text{de donde} \quad r^2 = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{r} = l\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,35 \times 0,93 = \mathbf{2,185\ m}$$

1.240. Un crisol que tiene la forma de un cono truncado de 4 cm de diámetro en el fondo, 7 cm en el borde superior y 10 cm de altura, está lleno de un metal fundido que se quiere colar en un molde esférico. ¿Cuál ha de ser el radio de este molde para que el metal lo llene exactamente?

Volumen del metal contenido en el crisol:

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + r'^2 + rr') = \frac{10\pi}{3}(2^2 + 3,5^2 + 2 \times 3,5) = 77,5\pi$$

Llamando R *al radio del molde esférico, tendremos:*

$$\frac{4\pi R^3}{3} = 77,5\pi$$

$$\mathbf{R} = \sqrt[3]{\frac{77,5 \times 3}{4}} = \sqrt[3]{58,125} = \mathbf{3,87\ cm}$$

1.241. Dada una semicircunferencia de diámetro AB = 2 R, en los extremos de éste, A y B se trazan dos semirrectas AX, BY tangentes. Por un punto cualquiera M, de la AX se traza la recta MN tangente en el punto P a la semicircunferencia y secante en N a BY, trazando además los segmentos OM, ON, PA, PB (fig. 553).

1.º Demuéstrese que los triángulos MON y APB son rectángulos y semejantes.

2.º Demuéstrese que el producto AM $\times$ $\times$ BN $=$ R^2.

3.º Dado caso que sea AM $=$ R/2, hállese la razón entre las áreas de los triángulos MON y APB.

4.º Siendo AM $=$ R 2 hállese el volumen engendrado por la superficie plumeada cuando gira alrededor del eje AB. Dicha superficie no es otra que la diferencia entre el trapecio rectángulo AMNB y el semicírculo ABP.

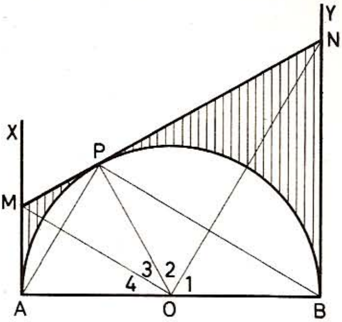


Fig. 553

● 1.º *Tracemos el radio* OP. *Por ser* OP $=$ OB $=$ R, NP $=$ NB *como tangentes trazadas a una misma circunferencia desde el mismo punto, y* ON, *común a los dos triángulos:*

$$\triangle ONP = \triangle ONB \quad \textit{luego} \quad \angle O_1 = \angle O_2$$

De modo análogo: $\triangle OMP = \triangle OMA$ *y, por tanto,* $\angle O_3 = \angle O_4$.

Como la suma de los ángulos consecutivos trazados alrededor del punto O, *y en un mismo semiplano es igual a 2 rectos, tenemos que*

$$\angle O_2 + \angle O_3 = \angle O_1 + \angle O_4 = 1 \textit{ recto}$$

Siendo $\angle$MON *recto, el* **△MON es rectángulo.**

El **△APB es rectángulo** *por tener el ángulo* P *inscrito en una semicircunferencia.*

△ONM $\sim$ **△PBA** *(rectángulos con un ángulo agudo igual:* $\angle MNO = \angle PBA$).

En efecto: $\angle MNO = \angle ONB$

pero $\angle PBA = \angle ONB$

por ser de la misma especie y tener sus lados respectivamente perpendiculares.

Por tanto: $\angle MNO = \angle PBA$

● 2.º *En* △MON *(rectángulo):* $MP \times PN = OP^2 = R^2$

pero $MP = AM$ *y* $NP = BN$ *(tangentes iguales)*

luego $\mathbf{AM \times BN = R^2}$

● 3.º *Si* AM $=$ R/2, *de la relación anterior se deduce que*

$$BN = 2\,R$$

$$MN = MP + PN = AM + BN = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5R}{2}$$

La razón de las áreas de los triángulos semejantes MON *y* APB *es igual a la razón de los cuadrados de sus lados homólogos, esto es:*

$$\frac{\triangle \mathbf{MON}}{\triangle \mathbf{APB}} = \frac{MN^2}{AB^2} = \frac{25R^2}{4} : 4R^2 = \mathbf{\frac{25}{16}}$$

● 4.° *El volumen engendrado por la superficie plumeada es la diferencia entre el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio* AMNB *y el volumen de la esfera que engendra al semicírculo* APB.

$$\mathbf{V} = \frac{\pi}{3} \times 2R\left(4R^2 + \frac{R^2}{4} + R^2\right) - \frac{4\pi R^3}{3} = \mathbf{\frac{13\pi R^3}{6}}$$

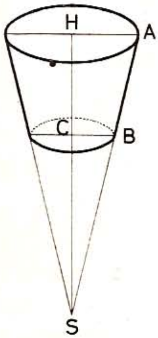


Fig. 554

1.242. Se pinta interior y exteriormente una cuba de madera cuya forma es la de un tronco de cono (fig. 554). La base superior tiene 1,7 m de diámetro interior. El lado, que tiene 1,1 m, sería 1/4 de la generatriz total del cono si se prolongara hasta el vértice. ¿Cuál es el importe del trabajo a razón de 7,5 pts el m²? Se supone que el área exterior es igual a la interior.

Por hipótesis: SA = 44 dm y SB = 33 dm

$$\triangle SAH \sim \triangle SBC \quad \textit{luego} \quad \frac{BC}{AH} = \frac{SB}{SA}$$

de donde $$BC = \frac{SB \times AH}{SA} = \frac{33 \times 8{,}5}{44} \doteq 6{,}375 \text{ dm}$$

Area lateral de la cuba: $\pi \times 11\,(8{,}5 + 6{,}375) = 163{,}625\ \pi\ \text{dm}^2$
Area del fondo: $\pi \times 6{,}375^2 = 40{,}641\ \pi\ \text{dm}^2$
Area pintada: $2\,(163{,}625\ \pi + 40{,}641\ \pi) = 408{,}532\ \pi\ \text{dm}^2$

Importe: $\frac{7{,}5}{100} \times 408{,}532\ \pi =$ **96,26 pts**

1.243. Un vaso tiene la forma de un cono truncado de 90 cm de altura; el fondo tiene de diámetro 30 cm y la abertura 45 cm. El vaso contiene, hasta los 2/3 de la altura, pólvora para bombas esféricas cuyo diámetro interior es de 10 cm. ¿Cuántas bombas se podrán llenar con ella?

Sea ABEF (fig. 555) *la parte del vaso llena de pólvora. Tracemos* AH *paralela a* IK.

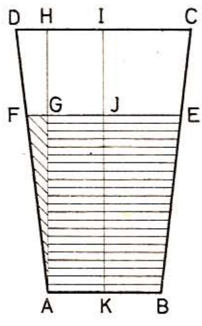


Fig. 555

$$DI = 4{,}5 : 2 = 2{,}25 \text{ dm}$$

$$AK = 3 \ : 2 = 1{,}5 \text{ dm}$$

$$JK = \frac{2}{3} \times IK = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \text{ dm}$$

$$DH = ID - AK = 2{,}25 - 1{,}5 = 0{,}75 \text{ dm}$$

$$FJ = FG + AK = \frac{2}{3} \times DH + AK = \frac{2 \times 0{,}75}{3} + 1{,}5 = 2 \text{ dm}$$

Volumen del tronco de cono ABEF:

$$V_1 = \frac{\pi \times 6}{3}(2^2 + 1{,}5^2 + 2 \times 1{,}5) = 18{,}5\ \pi\ \text{dm}^3$$

Volumen de una bomba: $V_2 = \frac{\pi \times 1^3}{6} = \frac{\pi}{6}$ dm³

N.º de bombas: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{18{,}5\pi}{\pi\, 6} = 18{,}5 \times 6 = \mathbf{111}$

1.244. Se quiere cortar un cartón para hacer una pantalla en forma de un tronco de cono en el que las circunferencias de las bases tengan 1,005 m y 189 mm y la generatriz 13,6 cm. Si se desarrolla esta pantalla, ¿cuál es el valor del ángulo central del sector que resultará y la longitud del radio que termine en el arco mayor?

● 1.º *Sea* x *el radio del arco menor en el desarrollo. Los arcos del desarrollo son semejantes por corresponder a ángulos centrales iguales; por tanto:*

$$\frac{189}{1005} = \frac{x}{136 + x}$$

Luego $\frac{189}{1005 - 189} = \frac{x}{136}$ *o sea* $\frac{189}{816} = \frac{x}{136}$

$$x = \frac{136 \times 189}{816} = 31{,}5 \text{ mm}$$

por tanto, $\mathbf{OD} = 136 + 31{,}5 = \mathbf{167{,}5\ mm}$

● 2.º *Para obtener el ángulo del sector basta calcular el número de grados de un arco de* 1005 *mm en un círculo de* 167,5 *mm de radio, o de un arco de* 189 *mm en un círculo de* 31,5 *mm de radio. En este último caso, tendremos:*

$$\frac{\pi \times 31{,}5 \times n}{180} = 189$$

de donde $\mathbf{n} = \frac{189 \times 180}{3{,}1416 \times 31{,}5} = \mathbf{343^\circ\ 46'\ 25{,}9''}$

1.245. En una circunferencia (fig. 556) de diámetro AB y radio R = 5 cm se traza, perpendicularmente al diámetro, la cuerda CD = 6 cm, se unen los puntos C y D con los extremos del diámetro A y B y se hace girar la figura obtenida alrededor de AB como eje. Hecho esto, calcúlese:

1.º La diferencia entre las áreas del bicono obtenido y la esfera.

2.º La diferencia entre el volumen del bicono y el de la esfera.

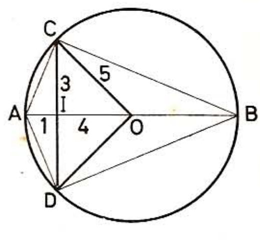


Fig. 556

Sea I *el punto de intersección de la cuerda* CD *con el diámetro* AB, *tendremos* CI = DI. *Unamos* C *y* D *con el centro* O *y tendremos, en el triángulo rectángulo* CIO; *hipotenusa* CO = 5, *cateto* CI = 3 *y* OI = $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ cm.

Por consiguiente: AI = 5 − 4 = 1 cm

Longitud de AC = AD = $\sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ cm

» *de* CB = BD = $\sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ cm

● 1.º **Area del bicono.**—*Se compone de dos conos que tienen por base común un círculo de 6 cm de diámetro y por generatriz:*

uno de ellos, $AC = \sqrt{10}$

y el otro $CB = 3\sqrt{10}$

Area del bicono:

$$A_1 = \pi \times \frac{CD}{2}(AC + CB) = \pi \times 3(\sqrt{10} + 3\sqrt{10}) = 12\pi\sqrt{10}\ \text{cm}^2$$

Area de la esfera: $A_2 = 4\pi R^2 = 100\,\pi\ \text{cm}^2$

Diferencia entre áreas: $\mathbf{A_2 - A_1} = 100\pi - 12\pi\sqrt{10} = \mathbf{194{,}9438\ cm^2}$

● 2.º **Volumen del bicono.**—*Se compone de dos conos cuya base común es*

$\pi \times 3^2 = 9\pi\ \text{cm}^2$ *y cuyas alturas son* AI *y* BI

Volumen del bicono: $V_1 = \frac{1}{3} \times 9\pi(AI + BI) = 3\pi \times 2R = 6\pi R\ \text{cm}^3$

Volumen de la esfera: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3\ \text{cm}^3$

Diferencia: $\mathbf{V_2 - V_1} = \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi R = \pi R\left(\frac{4}{3}R^2 - 6\right) = \mathbf{429{,}352\ cm^3}$

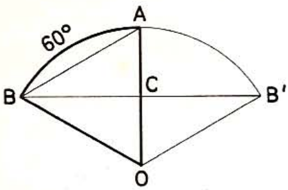


Fig. 557

1.246. Un sector circular AOB (fig. 557), cuyo arco tiene 60º, gira alrededor del radio OA. ¿Cuál será el volumen engendrado, si el radio del círculo a que pertenece este sector es de 3 cm?

El volumen engendrado es un sector esférico.

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 a \qquad (\text{Geom. } \mathbf{971})$$

La altura de la zona, a = R/2. *En efecto, el triángulo* OBA *es equilátero y* CA = OC = R/2.

Luego $\mathbf{V} = \frac{2}{3}\pi R^2 \times \frac{R}{2} = \frac{\pi R^3}{3} = \frac{\pi \times 3^3}{3} = 9\pi = \mathbf{28{,}2744\ cm^3}$

1.247. La longitud de un cateto de un triángulo rectángulo es de 28 m. Sabiendo que la suma de los otros dos lados es igual al duplo del primero, calcular la arista del cubo equivalente al cono engendrado por este triángulo cuando gira alrededor del lado conocido.

Llamemos x *a la hipotenusa e* y *al cateto desconocido; tendremos las dos ecuaciones siguientes:*

$$x + y = 56 \qquad (1)$$
$$x^2 - y^2 = 28^2 \qquad (2)$$

Dividamos (2) *por* (1): $x - y = \dfrac{28 \times 28}{56} = 14$ (3)

Sumemos (1) *y* (3):

$$2x = 70$$
$$x = 35 \text{ m}$$

por tanto, $y = 21$ m

Vol. cono: $V = \dfrac{\pi \times 21^2 \times 28}{3} = 4116 \times \pi \text{ m}^3$

Llamando a *a la arista del cubo equivalente, tendremos:*

$$a^3 = 4116 \times \pi$$
$$\mathbf{a} = \sqrt[3]{4116 \times \pi} = \mathbf{23{,}47\ m}$$

1.248. Dada una semicircunferencia (fig. 558) de centro O y diámetro AB = 2R, determinar en la prolongación de AB un punto C tal, que al trazar desde él una tangente a la semicircunferencia, el triángulo que resulte AMC sea isósceles, y luego demostrar:

1.º Que si esa condición se cumple, se tendrá: MB = MO.

2.º Si hacemos girar la figura alrededor de AC:

a) La relación entre las áreas engendradas por la tangente CM y el arco ADM.

b) La relación entre los volúmenes engendrados por el triángulo OMC y el sector OADM.

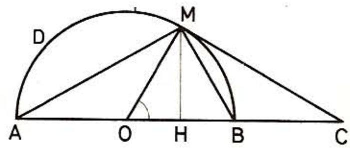


Fig. 558

Supongamos el problema resuelto y sea el triángulo isósceles AMC, *en el cual* $\angle A = \angle C$.

Por ser $\angle C$ *complemento del* $\angle O$, *el triángulo rectángulo* OMC *da:*

$$\angle A + \angle O = \angle C + \angle O = 90^\circ$$

Pero $$\angle A = \frac{\widehat{MB}}{2} \quad y \quad \angle O = \widehat{MB}$$

luego $$\frac{\widehat{MB}}{2} + \widehat{MB} = 90^\circ \quad y \quad \widehat{MB} = 60^\circ$$

de donde se infiere que los ángulos A *y* C *valen cada uno* 30º *y, en el triángulo rectángulo* OMC, *será:*

$$\mathbf{OC} = 2\,\text{OM} = \mathbf{2\,R}$$

con lo cual queda determinada la posición del punto C.

- 1.º MB *es la cuerda de un arco de* 60º; *luego* **MB = R = MO.**
- 2.º a) *La tangente, en su revolución alrededor del eje* AC, *engendra el área lateral de un cono:*

$$A = \pi r l = \pi \times MH \times MC$$

$$MH = \frac{OM\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \qquad MC = 2 \cdot MH = R\sqrt{3}$$

$$A_1 = \frac{\pi R\sqrt{3}}{2} \times R\sqrt{3} = \frac{3\pi R^2}{2}$$

El arco ADM *engendra una zona esférica cuya altura* h = AH = 3 R/2.

$$A_2 = 2\pi rh = 2\pi R \times \frac{3R}{2} = 3\pi R^2$$

Razón de áreas: $$\frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{A_2}} = \frac{3\pi R^2}{2} : 3\pi R^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

b) *El triángulo* OMC *engendra un bicono, cuyo radio común es* MH *y cuya altura total será* OH + HC = OC = 2R. *Por tanto:*

$$V_1 = \frac{\pi \times MH^2 \times OC}{3} = \frac{\pi}{3} \times \frac{R^2 \times 3}{4} \times 2R = \frac{\pi R^3}{2}$$

El sector OADM *engendra un segmento esférico con una sola base, disminuido del cono engendrado por el triángulo* MOH.

Vol. segmento esférico (GEOM. **982**): $V = \frac{\pi a^2}{3}(3R - a)$

$$V' = \frac{\pi}{3} \times AH^2 (3R - AH) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{3R}{2}\right)^2\left(3R - \frac{3R}{2}\right) = \frac{9\pi R^3}{8}$$

Vol. cono engendrado por $\triangle$MOH: $V'' = \frac{\pi}{3} \times HM^2 \times OH$

$$V'' = \frac{\pi}{3} \times \frac{3R^2}{4} \times \frac{R}{2} = \frac{\pi R^3}{8}$$

Vol. engendrado por el sector OADM:

$$V_2 = V' - V'' = \frac{9\pi R^3}{8} - \frac{\pi R^3}{8} = \pi R^3$$

Razón de volúmenes: $$\frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{V_2}} = \frac{\pi R^3}{2} : \pi R^3 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

1.249. En un crisol de forma de cono truncado que tiene 30 mm de diámetro en el fondo, 60 mm en la abertura y 80 mm de altura, hay acero fundido cuya capa superior tiene 50 mm de diámetro. ¿Cuál ha de ser el radio del molde esférico en que ha de colarse todo este acero para obtener una bala de cañón?

Sea ABCD (fig. 559) *la sección recta del tronco, y* EF *el nivel del metal fundido. Tracemos* DG *y* CH *perpendiculares a* DC.

$$GH = LN = DC = 30 \text{ mm}$$

$$AG = \frac{AB - GH}{2} = \frac{60 - 30}{2} = 15$$

$$EL = \frac{EF - LN}{2} = \frac{50 - 30}{2} = 10$$

$\triangle DLE \sim \triangle DGA$, *luego:* $\dfrac{DL}{DG} = \dfrac{EL}{AG}$

designando DL *por* x: $\dfrac{x}{80} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

$$x = \frac{2 \times 80}{3} = \frac{160}{3}$$

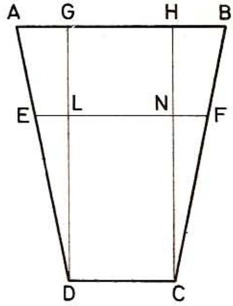


Fig. 559

Volumen del tronco de cono EFCD:

$$V_1 = \frac{160\pi}{3 \times 3}(25^2 + 15^2 + 25 \times 15) =$$

$$= \frac{160\pi}{9} \times 1225$$

Designando por R *el radio de la bala esférica, tendremos:*

Vol. bala: $V_2 = \dfrac{4\pi R^3}{3} = \dfrac{160 \times 1225 \times \pi}{9}$

$$R = \sqrt[3]{\frac{160 \times 1225 \times 3}{9 \times 4}} = \sqrt[3]{\frac{49\,000}{3}}$$

$$\begin{aligned} \textit{log.}\quad 49\,000 &= 4{,}690\,196 \\ \textit{log.}\quad 3 &= 0{,}477\,121 \\ \hline \textit{log.}\quad R^3 &= 4{,}213\,075 \end{aligned}$$

$$\log R = \frac{4{,}213\,075}{3} = 1{,}404\,358 \qquad \mathbf{R = 25{,}372\ mm}$$

1.250. Se tiene un tronco de cono (fig. 560) en el cual la esfera tangente a sus dos bases lo es también a la superficie lateral. Hallar su volumen, si las bases tienen 16 y 36 cm de radio.

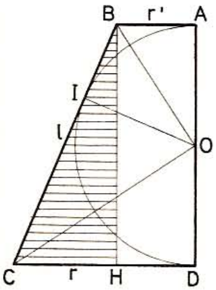


Fig. 560

Sean r *y* r′ *los radios de las bases del tronco.*

BI = BA *(tangentes desde un mismo punto)*

CI = CD *por la misma razón.*

Luego BI + CI = BA + CD

o sea $BC = r' + r = 16 + 36 = 52$ cm

$CH = CD - HD = CD - AB = 36 - 16 = 20$ cm

En el triángulo rectángulo BHC, *tenemos:*

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{52^2 - 20^2} = 48$$

Vol. tronco: $\mathbf{V} = \dfrac{48\pi}{3}(36^2 + 16^2 + 36 \times 16) = \mathbf{106\,965\ cm^3}$

1.251. Un vaso tiene la forma de un cono circular recto cuyo ángulo en el vértice es de 60°. En este vaso se vierten 1617 gramos de mercurio. Calcular la altura a que llegará el mercurio. Densidad del mercurio: 13,5; $\pi = 22/7$.

Siendo de 60° el ángulo en el vértice, la sección según el eje será un triángulo equilátero. El mercurio contenido en este vaso tiene también la forma de un cono equilátero.

Designando por x *la altura de este último:*

el lado será $\frac{2x\sqrt{3}}{3}$ (GEOM. **583**), *y el radio de la base* $\frac{x\sqrt{3}}{3}$ (GEOM. **576**).

Volumen: $$V = \frac{\pi r^2 a}{3} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times x = \frac{\pi x^3}{9}$$

$$\frac{\pi x^3}{9} = V = \frac{P}{D} = \frac{1617}{13{,}5}$$

$$x^3 = \frac{1617 \times 9 \times 7}{13{,}5 \times 22} = \frac{1617 \times 7}{1{,}5 \times 22}$$

$$\mathbf{x} = \sqrt[3]{\frac{1617 \times 7}{1{,}5 \times 22}} = \mathbf{7\ cm}$$

1.252. En un semicírculo de hierro batido se juntan borde con borde las dos mitades del diámetro para formar un cono recto de base circular y de 1 litro de capacidad. Calcular el radio del semicírculo.

Llamando x *al radio del semicírculo,* r *al radio de la base del cono y* l *a su generatriz, como* l = x, *tendremos:*

$$\frac{\pi x^2}{2} = \pi r l = \pi r x$$

Luego $$r = \frac{x}{2}$$

Altura cono: $$h = \sqrt{x^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$$

Volumen: $$V = \frac{\pi}{3} \times \frac{x^2}{4} \times \frac{x}{2}\sqrt{3} = \frac{\pi x^3 \sqrt{3}}{24} = 1\ \text{dm}^3$$

por tanto: $$x^3 = \frac{24}{\pi\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3\pi} = \frac{8\sqrt{3}}{\pi}$$

$$\mathbf{x} = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{3}}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\pi}} = 2 \times 0{,}82 = \mathbf{1{,}64\ dm}$$

1.253. Un cono de plomo cuya altura es igual al diámetro de la base, pesa 288,75 kg y se corta en dos partes de igual altura por medio de un plano paralelo a la base. El tronco de cono así obtenido se funde para darle: 1.° forma esférica; 2.° forma de un cilindro de diámetro igual a la altura. Calcular el área de esta esfera y el área total del cilindro. Densidad del plomo: 11,25 ($\pi = 22/7$).

• 1.º *Sea* V *el volumen del cono total y* V′ *el del cono deficiente.*

$$\frac{V'}{V} = \frac{a'^3}{a^3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Luego el cono deficiente es 1/8 *del cono total; por tanto, el tronco será los* 7/8 *del cono total.*

Vol. cono: $$V = \frac{P}{D} = \frac{288{,}75}{11{,}25} = \frac{77}{3} \text{ dm}^3$$

Vol. tronco: $$\frac{77 \times 7}{3 \times 8}$$

Designemos por R *el radio de la esfera equivalente y tendremos:*

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{77 \times 7}{3 \times 8}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{77 \times 7 \times 3 \times 7}{3 \times 8 \times 4 \times 22}} = \sqrt[3]{\frac{7^3}{2^6}} = \frac{7}{4} \text{ dm}$$

Area de la esfera: $$\mathbf{A} = 4\pi R^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{7^2}{4^2} = \mathbf{38{,}5\ dm^2}$$

• 2.º *Sea* x *el radio del cilindro equilátero equivalente al tronco:*

Vol. cilindro = Vol. tronco

$$\pi x^2 \times 2x = 2\pi x^3 = \frac{77 \times 7}{3 \times 8}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{77 \times 7 \times 7}{3 \times 8 \times 2 \times 22}} = \sqrt[3]{\frac{7^3}{3 \times 2^5}} = \frac{7}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{3 \times 2^2}} \text{ dm}$$

Area total cilindro: $$AT = 2\pi x^2 + 2\pi x \times 2x = 6\pi x^2$$

$$\mathbf{AT} = \frac{6 \times 22}{7} \times \frac{7^2}{4} \sqrt[3]{\frac{1}{3^2 \times 2^4}} = \frac{231}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{18}} =$$

$$= 115{,}5 \times 0{,}3816 = \mathbf{44{,}0748\ dm^3}$$

1.254. Un vaso cuya forma es la de un tronco de cono (fig. 561) contiene agua. El radio de la base inferior es de 60 cm; la superficie del agua tiene 80 cm de radio y su profundidad 2,5 m. En este vaso se echa un cubo de mármol cuyo lado tiene 60 cm. ¿A qué altura subirá el agua?

Determinemos la altura h *del cono* ODC; *siendo* y *la altura del cono* OAB, *tendremos:*

$$\frac{y}{a} = \frac{r}{c}$$

pero $$c = r' - r = 8 - 6 = 2 \text{ dm}$$

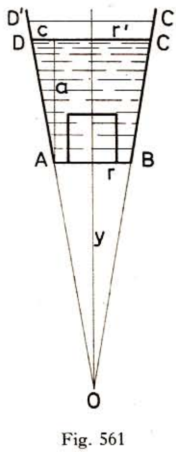


Fig. 561

Sustituyendo, resultará: $\frac{y}{25} = \frac{6}{2} = 3$

así que $y = 25 \times 3 = 75$

Altura: $h = 75 + 25 = 100$ dm

Designemos por V *el volumen del cono* OCD, *por* V′ *y* z *el volumen y la altura del cono* OC′D′ *obtenido después de la inmersión del cubo; por ser semejantes estos dos conos:*

$$\frac{V}{V'} = \frac{(a + y)^3}{z^3} = \frac{100^3}{z^3} \tag{1}$$

Pero $$V = \frac{\pi \times 8^2 \times 100}{3} = \frac{6400\pi}{3}$$

y $$V' = \frac{6400\pi}{3} + 6^3 = \frac{6400\pi + 648}{3}$$

Sustituyendo en (1) V, V′ *por su valor, tendremos:*

$$\frac{\frac{1}{3}(6400\pi + 648)}{\frac{1}{3} \times 6400\pi} = \frac{z^3}{100^3}$$

o sea $$1 + \frac{81}{800\pi} = \frac{z^3}{100^3}$$

de donde: $$z^3 = 100^3 \left(1 + \frac{81}{800\pi}\right) = 1032\,228{,}800611$$

$$z = \sqrt[3]{1\,032\,228{,}800611} = 101{,}06 \text{ dm}$$

Altura del agua: $z - y = 101{,}06 - 75 =$ **26,06 dm**

1.255. ¿Cuál ha de ser el espesor de una esfera hueca de cobre, para mantenerse en equilibrio en el agua de modo que el nivel del líquido se halle a la altura del centro? El diámetro exterior de la esfera tiene 20 cm y la densidad del cobre es 8,8.

Sea x *el espesor pedido.*

El volumen de la envoltura es la diferencia de dos esferas que tienen por radios R *y* R − x. *Luego:*

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{4\pi}{3}(R - x)^3 = \frac{4\pi}{3}[R^3 - (R - x)^3]$$

El peso de esta esfera ha de ser igual al peso del agua desalojada; este peso tiene por expresión:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

Como el peso de la esfera hueca es igual al producto de su volumen por su densidad, tendremos:

$$\frac{4\pi}{3}[R^3 - (R - x)^3] \times D = \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$2[R^3 - (R - x)^3] \times D = R^3$$

Sustituyendo: $$2[1^3 - (1 - x)^3] \times 8{,}8 = 1^3$$

$$1 - (1 - x)^3 = \frac{1}{2 \times 8{,}8} = \frac{5}{88}$$

$$(1 - x)^3 = 1 - \frac{5}{88} = \frac{83}{88}$$

$$1 - x = \sqrt[3]{\frac{83}{88}}$$

$$\mathbf{x} = 1 - \sqrt[3]{\frac{83}{88}} = 1 - 0{,}98 = \mathbf{0{,}02\ dm}$$

1.256. Un aeronauta ha alcanzado la altura de 10 km. Calcular la parte de la superficie terrestre que puede divisar desde esa altura, suponiendo que la tierra es esférica y que su radio es de 6366 km.

Sea M (fig. 562) *la posición del aeronauta; hay que determinar el área de la zona* BAD. *Calculemos primero su altura* AC *ó* y.

En $\triangle$OBM: $$OB^2 = OM \times OC$$

Luego

$$OC = \frac{OB^2}{OM} = \frac{R^2}{R + AM} = \frac{6366^2}{6366 + 10} = 6356 \text{ km}$$

$$AC = OA - OC = 6366 - 6356 = 10 \text{ km}$$

Area de la zona:

$$\mathbf{A} = 2\pi Ra = 40\,000 \times 10 = \mathbf{400\,000\ km^2}$$

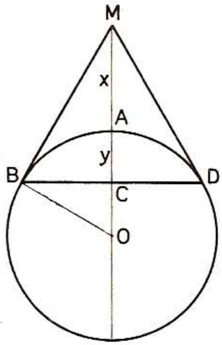


Fig. 562

1.257. Un cono circular de madera tiene por radio de base 40 cm y pesa 100 kg; por medio de una sección paralela a la base se le corta en dos partes de igual altura. Calcular los pesos, los volúmenes y las áreas laterales de las dos partes así obtenidas. Densidad de la madera: 0,6.

• 1.º *Vol. cono total:* $$V = \frac{100}{0{,}6} = \frac{1000}{6} = \frac{500}{3} \text{ dm}^3$$

Designemos por V *el volumen del cono total; por* V′ *el volumen del cono deficiente, y por* h *y* h′ *las alturas correspondientes; tendremos:*

$$\frac{V'}{V} = \frac{h'^3}{h^3} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

de donde: $$\mathbf{V'} = \frac{V}{8} = \frac{500}{3 \times 8} = \frac{125}{6} = \mathbf{20{,}833\ dm^3}$$

Vol. tronco: $$\mathbf{V_1} = \frac{500}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{875}{6} = \mathbf{145{,}833\ dm^3}$$

- 2.º *Peso del cono V':* $100 : 8 = \mathbf{12{,}5\ kg}$

  Peso del tronco: $100 - 12{,}5 = \mathbf{87{,}5\ kg}$

- 3.º *Calculemos la altura y la generatriz del cono total:*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \times 4^2 \times h = \frac{500}{3}\ dm^3$$

$$h = \frac{500}{16\pi} = 9{,}95\ dm$$

Generatriz: $l = \sqrt{9{,}95^2 + 4^2} = \sqrt{115{,}0025} = 10{,}72$ dm

Area lateral cono total: $A = \pi r l = \pi \times 4 \times 10{,}72\ dm^2$

Llamando A *y* A' *a las áreas laterales de los dos conos, tendremos:*

$$\frac{A'}{A} = \frac{h'^2}{h^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Luego $$\mathbf{A'} = \frac{A}{4} = \frac{4 \times 10{,}72\,\pi}{4} = 10{,}72\,\pi = \mathbf{33{,}677\ dm^2}$$

Tronco: $$\mathbf{AL} = \pi \times 4 \times 10{,}72 \times \frac{3}{4} = 32{,}16 \times \pi = \mathbf{101{,}033\ dm^2}$$

1.258. En un vaso de forma cónica, lleno de agua hasta los 3/4 de su altura a contar desde el fondo, se vierte mercurio hasta llenarlo con el agua contenida. Calcular el espesor y los pesos de las dos masas líquidas superpuestas, suponiendo que el vaso tenga 15 cm de profundidad y 6 cm de abertura. Densidad del mercurio: 13,59.

- 1.º *Capacidad del vaso:* $V = \frac{\pi}{3} \times 3^2 \times 15 = 45\pi = 141{,}37\ cm^3$.

Antes que se vierta el mercurio, el agua forma un cono semejante al cono total, y sus dimensiones son los 3/4 de las dimensiones del mismo.

Vol. agua: $$V_1 = 141{,}37 \times \frac{3^3}{4^3} = 59{,}64\ cm^3$$

Peso del agua: $\mathbf{P_1} = \mathbf{59{,}64\ g}$

Vol. mercurio: $V_2 = 141{,}37 - 59{,}64 = 81{,}73\ cm^3$

Peso del mercurio: $\mathbf{P_2} = 13{,}59 \times 81{,}73 = \mathbf{1110{,}72\ g}$

- 2.º *El mercurio forma un cono en el fondo del vaso; determinemos la altura* h *de este cono.*

$$\frac{V_2}{V} = \frac{h_2^3}{h^3} \quad \textit{o sea} \quad \frac{81{,}73}{141{,}37} = \frac{h_2^3}{15^3}$$

Por tanto: $$\mathbf{h_2} = \sqrt[3]{\frac{15^3 \times 8173}{14\,137}} = \mathbf{12{,}495\ cm}$$

Espesor del agua: $15 - 12{,}495 = \mathbf{2{,}505\ cm}$

1.259. Demostrar que si se tiene un cilindro y un cono equilátero circunscritos a una esfera (fig. 563).

1.º El área total del cilindro es una media geométrica entre las de la esfera y del cono.

2.º El volumen del cilindro es también una media geométrica entre los volúmenes de la esfera y del cono.

Cono equilátero es aquel en el cual la sección que pasa por el eje determina un triángulo equilátero.

Llamemos R *al radio de la esfera.*

AB = ED *que es el lado del triáng. equilátero inscrito en el círculo de radio* R. *Luego*

$$AB = ED = R\sqrt{3}$$

En el triáng. rectáng. ODC, $\angle C = 30^\circ$; *por tanto*

$$\begin{aligned} OC &= 2 \times OD &&= 2R \\ AC &= AO + OC &&= R + 2R = 3R \\ BC &= 2 \times BD &&= 2 \times AD = 2R\sqrt{3} \end{aligned}$$

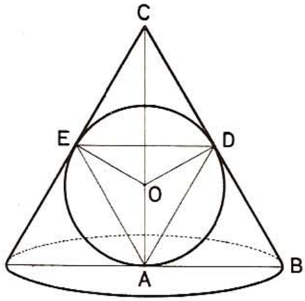


Fig. 563

- 1.º *Area esfera:* $A_1 = 4\pi R^2$

  Area total cono: $A_2 = \pi \times AB\,(BC + AB)$

  $A_2 = \pi \times R\sqrt{3}\,(2R\sqrt{3} + R\sqrt{3}) = 9\pi R^2$

  Area total cilindro: $A_3 = 2\pi R\,(R + 2R) = 6\pi R^2$

  $$4\pi R^2 \times 9\pi R^2 = 36\pi^2 R = (6\pi R^2)^2$$

  $$\mathbf{A_1 \times A_2 = A_3^2} \quad \textit{c.s.q.d.}$$

- 2.º *Vol. esfera:* $V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$

  Vol. cono: $V_2 = \frac{\pi}{3} \times AB^2 \times AC$

  $V_2 = \frac{\pi}{3} \times (R\sqrt{3})^2 \times 3R = 3\pi R^3$

  Vol. cilindro: $V_3 = \pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$

  $$\frac{4}{3}\pi R^3 \times 3\pi R^3 = 4\pi^2 R^6 = (2\pi R^3)^2$$

  $$\mathbf{V_1 \times V_2 = V_3^2} \quad \textit{c.s.q.d.}$$

1.260. Hallar el peso de la figura 564, acotada en centímetros, sabiendo que el grueso de la chapa es de 22 mm y la densidad 8,8.

Area del trapecio a: $\dfrac{17 + 8}{2} \times 18 = 225 \text{ dm}^2$

A deducir:

Area del cuadrado b: $8 \times 8 = 64$

Area del semicírculo c: $\dfrac{6^2 \times \pi}{2} = 56{,}5488$

$\left.\begin{matrix} 8 \times 8 = 64 \\ \dfrac{6^2 \times \pi}{2} = 56{,}5488 \end{matrix}\right\} 120{,}5488 \text{ dm}^2$

Area efectiva: $104{,}4512 \text{ dm}^2$

Volumen: $104{,}4512 \times 0{,}22 = 22{,}979\,264 \text{ dm}^3$

Peso: $22{,}979\,264 \times 8{,}8 =$ **202,217 kg**

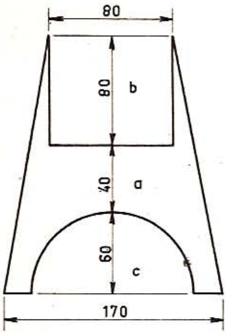


Fig. 564

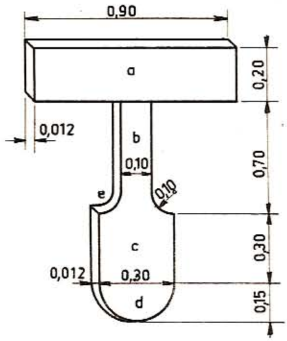


Fig. 565

1.261. Hallese el peso de la figura 565, sabiendo que la chapa es de 0,012 m de gruesa, que las dos curvas pequeñas son iguales y que la densidad es 7,8.

Area del brazo a: $9 \times 2 = 18 \text{ dm}^2$

Area de la cruz b: $6 \times 1 = 6 \text{ dm}^2$

Area del pie c: $4 \times 3 = 12 \text{ dm}^2$

Area del semicírculo d: $\dfrac{1{,}5^2 \times \pi}{2} = 3{,}5343 \text{ dm}^2$

Area del semicírculo e: $\dfrac{1^2 \times \pi}{2} = 1{,}5708 \text{ dm}^2$

Area efectiva: $39{,}5343 - 1{,}5708 = 37{,}9635 \text{ dm}^2$

Volumen: $37{,}9635 \times 0{,}12 = 4{,}555\,62 \text{ dm}^3$

Peso: $4{,}555\,62 \times 7{,}8 =$ **35,533 836 kg**

1.262. Hallar el peso de la figura 566, acotada en milímetros, si la densidad del material empleado en su construcción es 8,2.

Vol. del cilindro a:	$3^2 \times \pi \times 4 =$	$113{,}097\,6$ cm³
Vol. tronco cono b:	$\frac{12\pi}{3}(4^2 + 2^2 + 4 \times 2) =$	$351{,}859\,2$ cm³
Vol. del cilindro c:	$1^2 \times \pi \times 4 =$	$12{,}566\,4$ cm³
Vol. de la semiesfera d:	$\frac{2}{3} \times \pi \times 1^3 =$	$2{,}094\,4$ cm³
Vol. total de la figura:		$479{,}617\,6$ cm³
Peso	$479{,}617\,6 \times 8{,}2 =$	**3732,864 32 g**

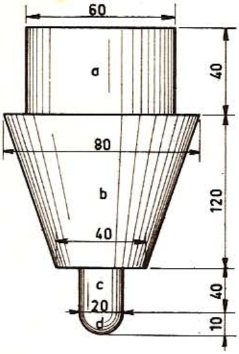


Fig. 566

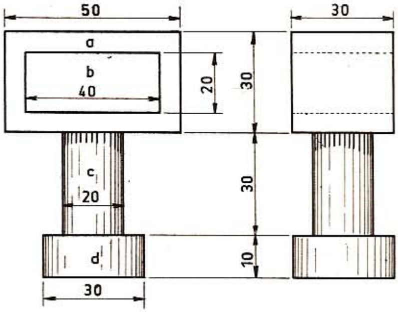


Fig. 567

1.263. Hallar el peso de los cuerpos que representa la figura 567, acotada en centímetros. Densidad, 7,8.

El primer cuerpo es un prisma y los otros dos son cilindros.

Vol. del prisma a:	$5 \times 3 \times 3 =$	45 dm³
Vol. del prisma hueco b:	$4 \times 2 \times 3 =$	24 dm³
Vol. efectivo:		21 dm³
Vol. del cilindro c:	$3{,}1416 \times 1^2 \times 3 =$	$9{,}424\,8$ dm³
Vol. del cilindro d:	$3{,}1416 \times 1{,}5^2 \times 1 =$	$7{,}068\,6$ dm³
Total:		$37{,}493\,4$ dm³

Peso: $37{,}493\,4 \times 7{,}8 =$ **292,448 52 kg**

1.264. Hallar en dobles decalitros la capacidad del fanal que representa la fig. 568 acotada en metros.

Vol. del cilindro a:

$$3{,}1416 \times 6^2 \times 3{,}5 = 395{,}841 \text{ dm}^3$$

Vol. de la semiesfera b:

$$\frac{4 \times 3{,}1416 \times 6^3}{3 \times 2} = 452{,}390 \text{ dm}^3$$

Vol. total: 848,231 dm³

Capacidad fanal: 42,41 dobles decalitros

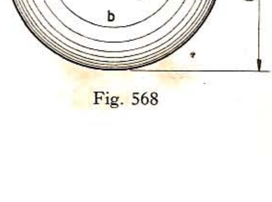


Fig. 568

1.265. Hallar el peso de los cuerpos que representa la figura 569, acotada en metros, siendo la densidad 4,2.

Vol. del cono a: $\dfrac{3{,}1416 \times 2^2 \times 2}{3} = 8{,}377\ 6\ \text{dm}^3$

Vol. tronco cono b: $\dfrac{8\pi}{3}(2^2 + 3^2 + 2 \times 3) = 159{,}174\ 4\ \text{dm}^3$

Vol. del cilindro c: $3{,}1416 \times 4^2 \times 1{,}5 = 75{,}398\ 4\ \text{dm}^3$

Vol. total: $242{,}950\ 4\ \text{dm}^3$

Peso: $242{,}950\ 4 \times 4{,}2 =$ **1020,391 68 kg**

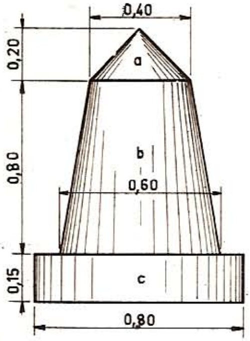


Fig. 569

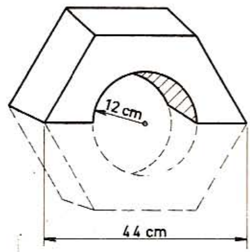


Fig. 570

1.266. Dada la sección de un cojinete de bronce que tiene de longitud 26 cm y 7,2 de densidad, hallar el peso del mismo (fig. 570).

Area del semiexágono: $\dfrac{3 \times 22^2\sqrt{3}}{4} = 628{,}716\ \text{cm}^2$

Area del semicírculo: $\dfrac{12^2 \times 3{,}1416}{2} = 226{,}195\ \text{cm}^2$

Area efectiva: $402{,}521\ \text{cm}^2$

Volumen: $402{,}521 \times 26 = 10\ 465{,}546\ \text{cm}^3 = 10{,}465\ 546\ \text{dm}^3$

Peso: $10{,}465\ 546 \times 7{,}2 =$ **75,351 931 2 kg**

1.267. Hallar el peso de la pieza que representa la figura 571, acotada en centímetros. Espesor, 20 cm. Densidad, 7,2.

Area del brazo vertical: $95 \times 15 = 1425$ cm²
Area del brazo horizontal: $95 \times 15 = 1425$ cm²

Area de las cuatro esquinas: $4\left(15^2 - \dfrac{15^2 \times 3{,}1416}{4}\right) = 141{,}636$ cm²

Area total: 2991,636 cm²
A deducir el cuadrado central (contado 2 veces): $15^2 = 225$ cm²

2766,636 cm²

Volumen: $2766{,}636 \times 20 = 55\,332{,}72$ cm³
Peso: $55{,}332\,72 \times 7{,}2 =$ **398,3955 84 kg**

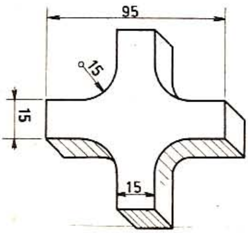


Fig. 571

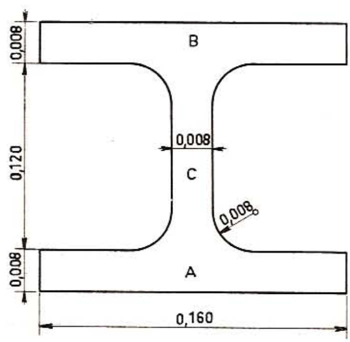


Fig. 572

1.268. Hallar el peso de la pieza que representa la figura 572, si tiene 3,84 m de longitud y la densidad es 7,8. Las cuatro curvas son iguales y tienen 8 mm de radio.

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Area del rectángulo B:} & 1{,}6 \times 0{,}08 \\ \textit{Area del rectángulo C:} & 1{,}2 \times 0{,}08 \\ \textit{Area del rectángulo A:} & 1{,}6 \times 0{,}08 \end{array}\right\} \quad 4{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}352 \text{ dm}^2$$

Area esquinas: $4\left[0{,}08^2 - \dfrac{3{,}1416 \times 0{,}08^2}{4}\right] = 0{,}0055$ dm²

Area total: 0,3575 dm²
Volumen: $0{,}3575 \times 38{,}4 = 13{,}728$ dm³
Peso: $13{,}728 \times 7{,}8 =$ **107,078 4 kg**

1.269. Hallar el peso del carril que representa la figura 573 si tiene una longitud de 11,9 m y la densidad es de 7,8.

Area de los dos semicírculos a:	$3{,}1416 \times 1^2 =$	$3{,}1416$ dm²
Area del rectángulo b:	$4 \times 2 =$	8 dm²
Area del rectángulo c:	$4{,}5 \times 1 =$	$4{,}5$ dm²
Area del trapecio d:	$\frac{8+1}{2} \times 1{,}5 =$	$6{,}75$ dm²
Area del rectángulo e:	$8 \times 1 =$	8 dm²
		$30{,}3916$ dm²

Volumen: $30{,}3916 \times 119 = 3616{,}6$ dm³

Peso: $3616{,}6 \times 7{,}8 =$ **28 209,48 kg**

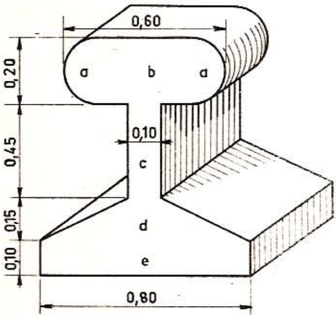


Fig. 573

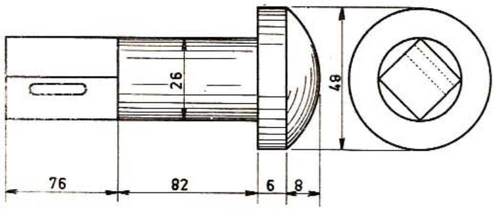


Fig. 574

1.270. Hállese el peso de la figura 574 si las medidas están dadas en milímetros. Densidad, 8. Chabetero, 40×10.

Vol. del segmento:	$\left(8^3 \times \frac{\pi}{6}\right) + \frac{(24^2 \times \pi \times 8)}{2} =$	$7\,506{,}329\,6$ mm³
Vol. del cilindro:	$24^2 \times \pi \times 6 =$	$10\,857{,}369\,6$ mm³
Vol. del cilindro:	$13^3 \times \pi \times 82 =$	$43\,536{,}292\,8$ mm³
Vol. del prisma:	$\frac{26^2}{2} \times 76 =$	$25\,688$ mm³
Vol. total:		$87\,587{,}992\,0$ mm³
Vol. del chabetero:	$(30 \times 10 + 5^2 \times \pi)\,18{,}3846 =$	$6\,959{,}306\,4$ mm³
Vol. efectivo:		$80\,628{,}685\,6$ mm³

Peso: $80{,}628\,6856 \times 8 =$ **645,029 4 g**

1.271. Hállese el peso de la figura 575, cuyas dimensiones están dadas en milímetros. Densidad, 9; radio del cono superior, 16,165.

Vol. del cono:	$\dfrac{16{,}165^2 \times \pi \times 28}{3} =$	7 661,945 92	mm³
Vol. del cilindro mayor:	$40^2 \times \pi \times 14 =$	70 371,84	mm³
Vol. del cilindro menor:	$9^2 \times \pi \times 60 =$	15 268,176	mm³
Vol. de la tuerca:	$\dfrac{3 \times 20^2 \sqrt{3}}{2} \times 12 =$	12 470,4	mm³
Vol. total:		105 772,361 92	mm³

Peso: 105,772 361 92 × 9 = **951,951 25 g**

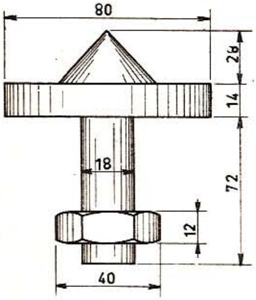


Fig. 575

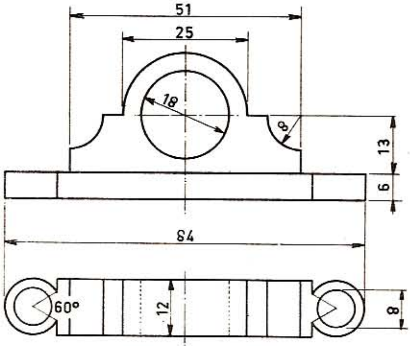


Fig. 576

1.272. Hállese el peso del cojinete representado en la figura 576. Dimensiones en milímetros. Densidad, 7.

Area del rectángulo:	$51 \times 13 =$	663	mm²
Area de un semicírculo:	$\dfrac{12{,}50^2 \times \pi}{2} =$	245,437 5	mm²
Area total:		908,437 5	mm²
Descontando	$\left(\dfrac{8^2 \times \pi}{2}\right) + 9^2 \times \pi =$	355,000 8	mm²
Area efectiva:		553,436 7	mm²
Volumen:	$553{,}436\,7 \times 12 =$	6 641,240 4	mm³
Area del rectángulo:	$61{,}608 \times 12 =$	739,296	mm²
Area de $\dfrac{10}{6}$ *de círculo:*	$\dfrac{6^2 \times \pi \times 10}{6} =$	188,496	mm²
Area de dos triángulos:	$\dfrac{6^2}{4} \times \sqrt{3} \times 2 =$	31,176	mm²
Area total:		958,968	mm²
Descontando:	$4^2 \times \pi \times 2 =$	100,531 2	mm²
Area efectiva:		858,436 8	mm²

Volumen: $858{,}436\,8 \times 6 = 5\,150{,}620\,8$ mm^3
Volumen total: $6641{,}240\,4 + 5150{,}620\,8 = 11\,791{,}861\,2$ mm^3

Peso: $11{,}791\,861\,2 \times 7 =$ **82,543 g**

1.273. Hallar el peso de los cuerpos geométricos que representa la figura 577 acotada en milímetros, siendo la densidad 8.

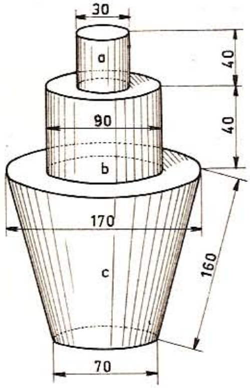


Fig. 577

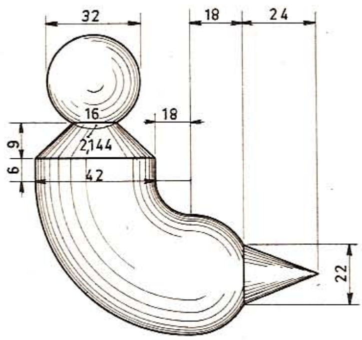


Fig. 578

Vol. del cilindro a: $3{,}1416 \times 15^2 \times 40 = 28\,274{,}40$ mm^3
Vol. del cilindro b: $3{,}1416 \times 45^2 \times 40 = 254\,469{,}60$ mm^3
Vol. del tronco de cono c:
Altura del tronco: $\sqrt{160^2 - 50^2} = 151{,}98$ mm

$$V = \frac{3{,}1416 \times 151{,}98}{3}(85^2 + 35^2 + 85 \times 35) = 1\,818\,328{,}234 \text{ mm}^3$$

Total: $2\,101\,072{,}234$ mm^3

Peso: $2{,}101\,072\,234 \times 8 =$ **16,808 577 kg**

1.274. Hállese el peso de la figura 578, acotada en mm. Densidad, 7,85.
Vol. esfera: $32^3 \times 0{,}5236 = 17\,157{,}324\,8$ mm^3
Vol. segmento esférico:

$$2{,}144^3 \times 0{,}5236 + \frac{8^2 \times 2{,}144\pi}{2} = 220{,}699\,1 \text{ mm}^3$$

Vol. efectivo: $16\,936{,}625\,7$ mm^3

Vol. del tronco: $(8^2 + 21^2 + 8 \times 21)\,\dfrac{9\pi}{3} = 6\,342{,}890\,4$ mm^3

Vol. del cilindro: $21^2 \times \pi \times 6 = 8\,312{,}673\,6$ mm^3

Vol. de $\frac{1}{4}$ *de toro:* $\frac{78\pi}{4} \times 21^2 \times \pi =$ 84 844,059 9 mm³

Vol. del segmento: $18\pi \left[\frac{18^2}{6} + \frac{11^2 + 21^2}{2}\right] =$ 18 943,848 0 mm³

Vol. del cono: $11^2 \times \pi \times \frac{24}{3} =$ 3 041,068 8 mm³

Volumen total: 138 421,166 4 mm³

Peso: 7,85 × 0,138 421 166 4 = **1,086 606 156 24 kg**

1.275. Hállese el peso de una manivela que tenga por medidas las de la figura 579, expresadas en milímetros. Densidad, 9.

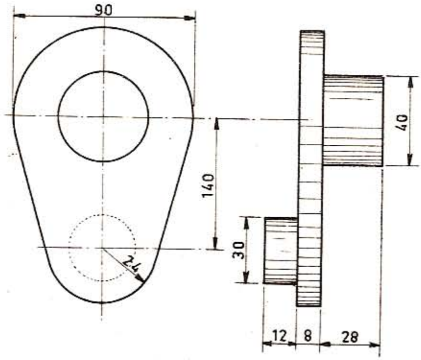


Fig. 579

Area del semicírculo mayor: $\frac{45^2 \times \pi}{2} =$ 3 180,87 mm²

Area del semicírculo menor: $\frac{24^2 \times \pi}{2} =$ 904,780 8 mm²

Area del trapecio: $\frac{90 + 48}{2} \times 140 =$ 9 660 mm²

Area total: 13 745,650 8 mm²

Volumen: 13 745,6508 × 8 = 109 965,206 4 mm³
Vol. del cilindro mayor: $20^2 \times \pi \times 28 =$ 35 185,92 mm³
Vol. del cilindro menor: $15^2 \times \pi \times 12 =$ 8 482,32 mm³

Volumen total: 153 633,446 4 mm³

Peso: 153,633 4464 × 9 = **1,3827 kg**

1.276. Calcúlese el peso de la figura representada en la figura 580. Medidas en mm. Chapa, 9 mm. Densidad, 7,8. Chabeteros, 4 × 12.

Area del semicírculo: $\frac{2^2 \times \pi}{2} =$ 6,283 2 mm²

Area del trapecio: $\frac{(9 + 4)\,14}{2} =$ 91 mm²

Area de la semicorona: $\frac{(18^2 - 9^2)\pi}{2} =$ 381,704 4 mm²

Area del trapecio de 50°: $\frac{(21^2 - 12^2)\pi \times 50}{360} =$ 129,591 mm²

Area del rectángulo: $7 \times 22 =$ 154 mm²

Area del rectángulo: $40 \times 9 =$ 360 mm²

Area total: 1122,578 6 mm²

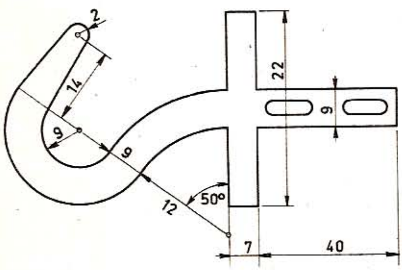


Fig. 580

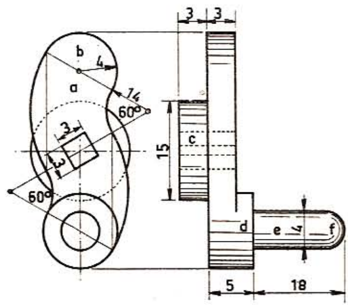


Fig. 581

Descontando:

Area de dos círculos: $2^2 \times \pi \times 2 =$ 25,1328 mm²

Area de dos rectángulos: $8 \times 4 \times 2 =$ 64 mm²

89,1328 mm²

Area efectiva: 1 033,4458 mm²

Volumen: $1\,033{,}4458 \times 9 =$ 9 301,0122 mm³

Peso: $9{,}301\,0122 \times 7{,}8 =$ **72,547 89 g**

1.277. Hallar el peso de la pieza que representa la figura 581, acotada en milímetros, sabiendo que la densidad es 8.

Area del trap. doble: de 60°, a: $\frac{(22^2 - 14^2) \times 3{,}1416}{3} =$ 301,593 6 mm²

Area del círculo extremo b: $4^2 \times 3{,}1416 =$ 50,265 6 mm²

Area total: 351,859 2 mm²

Vol.:	$351{,}8592 \times 3 =$	1 055,577 6 mm³
Vol. del cilindro c:	$7{,}5^2 \times 3{,}1416 \times 3 =$	530,145 0 mm³
Vol. del cilindro d:	$4^2 \times 3{,}1416 \times 2 =$	100,531 2 mm³
Vol. del cilindro e:	$2^2 \times 3{,}1416 \times 16 =$	201,062 4 mm³
Vol. de la semiesfera f:	$\frac{2}{3} \times 3{,}1416 \times 2^3 =$	16,755 2 mm³
Volumen total:		1 904,071 4 mm³
Volumen a descontar:	$3^2 \times 6 =$	54 mm³
Volumen efectivo:		1 850,071 4 mm³

Peso: $1{,}850\,071\,4 \times 8 =$ **14,800 571 2 g**

1.278. Hallar el valor de 12 piezas como las que representa la figura 582, acotada en milímetros, sabiendo que cuesta 325 pts el kilo y que la densidad es de 7,2. Espesor de la chapa, 14 mm.

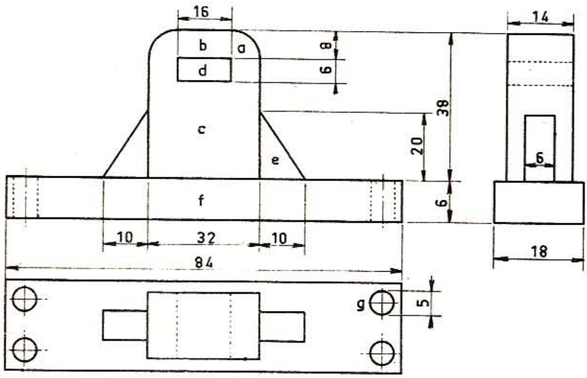


Fig. 582

Area de dos cuadrantes a:	$\frac{8^2 \times 3{,}1416}{2} =$	100,531 2 mm²
Area del rectángulo b:	$16 \times 8 =$	128 mm²
Area del rectángulo c:	$30 \times 32 =$	960 mm²
Area total:		1 188,531 2 mm²
Area a descontar d:	$16 \times 6 =$	96 mm²
Area efectiva:		1 092,531 2 mm²
Vol. de la chapa:	$1092{,}5312 \times 14 =$	15 295,436 8 mm³
Vol. de dos chapas triangul. c:	$\frac{20 \times 20}{2} \times 6 =$	1 200 mm³
Volumen total:		16 495,436 8 mm³

Area del rectángulo base f:	$84 \times 18 =$	1 512	mm²
Area a descontar los 4 círc. g:	$2{,}5^2 \times 3{,}1416 \times 4 =$	78,54	mm²
Area efectiva:		1 433,46	mm²
Volumen anterior:		16 495,436 8	mm³
Volumen de la base f:	$1433{,}46 \times 6 =$	8 600,76	mm³
Volumen total:		25 096,196 8	mm³

Peso: $\dfrac{25\,096{,}1968 \times 7{,}2}{1000} = 180{,}692\,616\,96$ g

Valor de 12 piezas: $\dfrac{325 \times 180{,}692\,616 \times 12}{1000} =$ **704,7 pts**

1.279. Hallar el peso de la pieza que representa la figura 583, acotada en milímetros, siendo la densidad 7.

Area de $\frac{5}{6}$ *de círculo* a:	$\dfrac{20^2 \times 3{,}1416 \times 5}{6} =$	1 047,2	mm²
Area del triángulo b:	$\dfrac{20^2}{4} \times \sqrt{3} =$	173,2	mm²
Area del rectángulo c:	$20\left[50 - \left(20 + \dfrac{20\sqrt{3}}{2}\right)\right] =$	253,6	mm²
Area total:		1 474	mm²
Area a descontar:	$10^2 \times 3{,}1416 =$	314,16	mm²
Area efectiva:		1 159,84	mm²

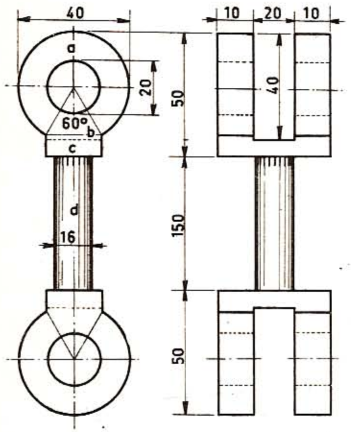


Fig. 583

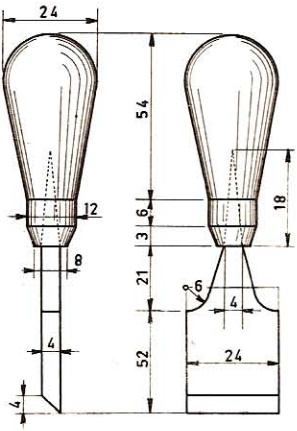


Fig. 584

Vol. de las cuatro patillas:	$1159{,}84 \times 10 \times 4 =$	46 393,6 mm³
Vol. de dos prismas:	$20 \times 10 \times 20 \times 2 =$	8 000 mm³
Vol. del cilindro d:	$8^2 \times 3{,}1416 \times 150 =$	30 159,36 mm³
Volumen total:		84 552,96 mm³

Peso: $84{,}552\,96 \times 7 =$ **591,870 72 g**

1.280. Búsquese el peso del formón representado en la figura 584, acotado en mm. Densidad del acero, 7,8; ídem de la madera, 0,65.

Vol. de la semiesfera: $\dfrac{24^3 \times 0{,}5236}{2} = 3\,619{,}123\,2 \text{ mm}^3$

Vol. del tronco de cono: $(12^2 + 6^2 + 12 \times 6)\dfrac{42\pi}{3} = 11\,083{,}564\,8 \text{ mm}^3$

Vol. del cilindro: $6^2 \times \pi \times 6 = 678{,}585\,6 \text{ mm}^3$

Vol. del tronco: $\dfrac{3\pi}{3}(6^2 + 4^2 + 6 \times 4) = 238{,}761\,6 \text{ mm}^3$

Vol. total del mango: $15\,620{,}035\,2 \text{ mm}^3$

Vol. pirámide a descontar: $\dfrac{4^2 \times 18}{3} = 96 \text{ mm}^3$

Volumen efectivo: $15\,524{,}035\,2 \text{ mm}^3$

Peso del mango: $\dfrac{15\,524{,}0352 \times 0{,}65}{1000} = 10{,}090\,6 \text{ g}$

Area del rectángulo: $54 \times 24 = 1\,296 \text{ mm}^2$

Descontando: $\dfrac{6^2 \times \pi}{2} = 56{,}548\,8 \text{ mm}^2$

Area efectiva: $1\,239{,}451\,2 \text{ mm}^2$

Area del trapecio: $\dfrac{(12 + 4)15}{2} = 120 \text{ mm}^2$

Area total: $1\,359{,}451\,2 \text{ mm}^2$

Volumen: $1359{,}4512 \times 4 = 5\,437{,}804\,8 \text{ mm}^3$

Vol. del prisma del filo: $\dfrac{4 \times 4}{2} \times 24 = 192 \text{ mm}^3$

Vol. de la pirámide: $\dfrac{4 \times 4}{3} \times 18 = 96 \text{ mm}^3$

Volumen total: $5\,725{,}804\,8 \text{ mm}^3$

Peso: $\dfrac{5725{,}8048 \times 7{,}80}{1000} = 44{,}661\,2 \text{ g}$

Peso total: $10{,}0906 + 44{,}6612 =$ **54,751 8 g**

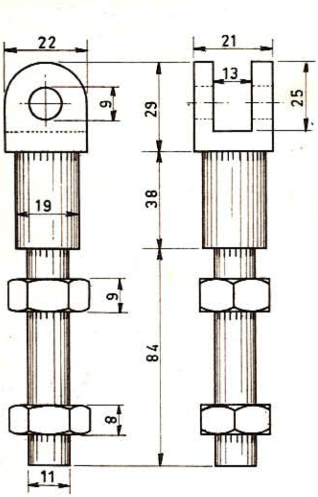


Fig. 585

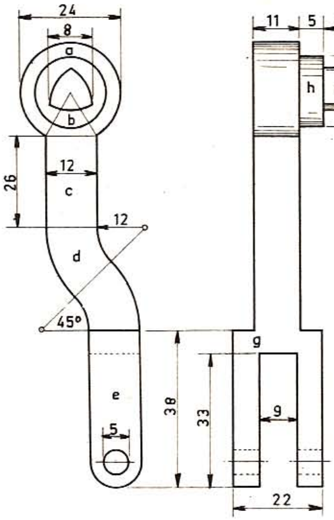


Fig. 586

1.281. Hallar el peso de la pieza representada en la figura 585, acotada en milímetros, siendo la densidad 7,8.

Area del semicírculo:	$\dfrac{11^2 \times 3{,}1416}{2} =$	190,066 8 mm²
Area del rectángulo:	$14 \times 22 =$	308 mm²
Area total:		498,066 8 mm²
Volumen:	$498{,}0668 \times 8 =$	3 984,534 4 mm³
Vol. del prisma:	$22 \times 4 \times 21 =$	1 848 mm³
Vol. total de la cabeza:		5 832,534 4 mm³
Vol. a descontar:	$4{,}5^2 \times 3{,}1416 \times 8 =$	508,939 2 mm³
Volumen efectivo:		5 323,595 2 mm³
Vol. del cilindro:	$9{,}5^2 \times 3{,}1416 \times 38 =$	10 774,117 2 mm³
Altura del cilindro:	$84 - (8 + 9) = 67$ mm	
Vol. del cilindro:	$5{,}5^2 \times 3{,}1416 \times 67 =$	6 367,237 8 mm³
Vol. de las 2 tuercas:	$\dfrac{3 \times 11^2}{2} \times \sqrt{3} \times 17 =$	5 344,086 0 mm³
Volumen total:		27 809,036 2 mm³

Peso: 27,809 0362 × 7,8 = **216,910 482 36 g**

1.282. Hallar el peso de la pieza representada en la figura 586, acotada en centímetros, siendo la densidad 0,67.

Area del sector a: $\frac{12^2 \times 3{,}1416 \times 5}{6} = 376{,}992 \text{ cm}^2$

Area del triángulo b: $\frac{12^2 \times \sqrt{3}}{4} = 62{,}352 \text{ cm}^2$

Area del rectángulo c: $12 \times 26 = 312 \text{ cm}^2$

Area $\frac{2}{8}$ *de corona* d: $\frac{(24^2 - 12^2) \times 3{,}1416}{4} = 339{,}292\ 8 \text{ cm}^2$

Area total de la chapa: $1\ 090{,}636\ 8 \text{ cm}^2$

Volumen: $1090{,}6368 \times 11 = 11\ 997{,}004\ 8 \text{ cm}^3$

Area rectángulo e: $27 \times 12 = 324$

Area semicírculo f: $\frac{6^2 \times \pi}{2} = 56{,}5488 \text{ cm}^2$

Area total: $380{,}5488 \text{ cm}^2$

Area a descontar: $2{,}5^2 \times \pi = 19{,}635 \text{ cm}^2$

Area efectiva: $360{,}9138 \text{ cm}^2$

Volumen: $360{,}9138 \times 13 = 4\ 691{,}879\ 4 \text{ cm}^3$

Vol. prisma g, *que completa las patillas:* $12 \times 5 \times 22 = 1\ 320 \text{ cm}^3$

Volumen del cilindro h: $9^2 \times 3{,}1416 \times 5 = 1\ 272{,}348 \text{ cm}^3$

Volumen del prisma triangular curvilíneo m:

$$9 \times \left[\frac{8^2}{4}\sqrt{3} + \left(\frac{8^2 \times 3{,}1416}{6} - \frac{8^2}{4}\sqrt{3}\right) 3\right] = 405{,}964\ 8 \text{ cm}^3$$

Volumen total: $19\ 687{,}197 \text{ cm}^3$

Peso: $19{,}687\ 197 \times 0{,}67 =$ **13,190 421 99 kg**

1.283. Hállese el peso de la altera que tenga por medidas las de la figura 587, expresadas en milímetros. Densidad, 7,45.

Vol. de las dos esferas: $24^2 \times 0{,}5236 \times 2 = 14\ 476{,}492\ 8 \text{ mm}^3$

Vol. del cilindro: $6^2 \times \pi \times 41{,}216 = 4\ 661{,}430\ 6 \text{ mm}^3$

Volumen total: $19\ 137{,}923\ 4 \text{ mm}^3$

Vol. 2 segmentos: $2 \times \frac{\pi \times 1{,}608^2}{3}\left(3 \times 12 - 1{,}608\right) = 186{,}246\ 9 \text{ mm}^3$

Volumen efectivo: $18\ 951{,}676\ 5 \text{ mm}^3$

Peso: $18{,}951\ 676\ 5 \times 7{,}45 =$ **141,189 99 g**

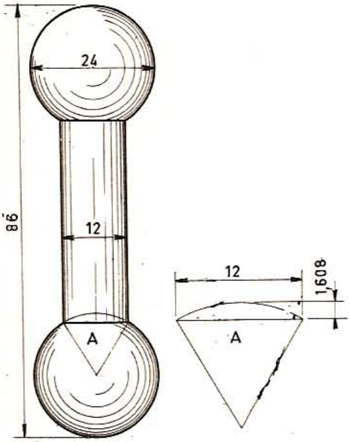


Fig. 587

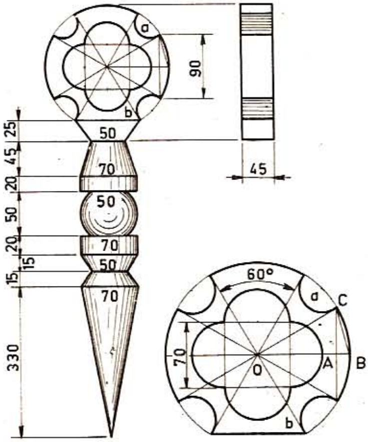


Fig. 588

1.284. Hallar el peso del objeto que representa la figura 588, acotada en milímetros, siendo la densidad 7.

La parte plana se compone de una parte circular y un trapecio. La parte circular forma un segmento circular, de 300° *y* R = 90 *mm. Hay que descontar:*

1.° *Dos círculos* a *cuyo diámetro es* $l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.
2.° *Dos círculos de* d = 70 mm.
3.° *Un cuadrado de* l = 70 mm.

A. segmento: $\dfrac{\pi \cdot 90^2 \cdot 300}{360} + \dfrac{90^2\sqrt{3}}{4} = 24\,713{,}1 \text{ mm}^2$

A. trapecio: $\dfrac{90+50}{2} \times 25 = 1\,750 \text{ mm}^2$

} $26\,463{,}10 \text{ mm}^2$

A. dos círculos a: $2\pi \cdot 45^2\,(2-\sqrt{3}) = 3\,409{,}89 \text{ mm}^2$
A. dos círculos: $2\pi \cdot 35^2 = 7\,696{,}92 \text{ mm}^2$
A. cuadrado: $70^2 = 4\,900 \text{ mm}^2$

} $16\,006{,}81 \text{ mm}^2$

Area efectiva: $10\,456{,}29 \text{ mm}^2$

Volumen: $10\,456{,}29 \times 45 = 470\,533{,}05 \text{ mm}^3$

Vol. 3 troncos: $\dfrac{\pi\,(35^2+25^2+35\times 25)\,(45+15+15)}{3} = 214\,021{,}50 \text{ mm}^3$

Vol. 2 cilindros: $\pi \times 35^2 \times 20 \times 2 = 153\,938{,}40 \text{ mm}^3$

Vol. segmento: $\dfrac{\pi \cdot 50^3}{6} + \dfrac{\pi \cdot 50}{2}\,(25^2 \times 2) = 163\,625{,}10 \text{ mm}^3$

Vol. cono: $\dfrac{\pi \times 35^2 \times 330}{3} = 423\,330{,}60 \text{ mm}^3$

Volumen total: $1\,425\,448{,}65 \text{ mm}^3$

Peso: $1{,}425\,448\,65 \times 7 = \mathbf{9{,}978\,140\,55 \text{ kg}}$

1.285. Encontrar el peso de un martillo que tenga las dimensiones indicadas en la figura 589, expresadas en milímetros. Densidad del acero, 7,78; ídem de la madera, 0,67.

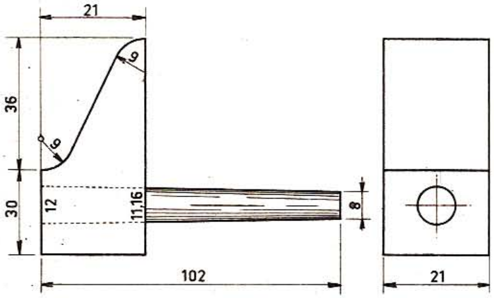


Fig. 589

El cuadrante superior compensa al inferior.

Area del trapecio: $\dfrac{9 + 12}{2} \times 18 = 189 \text{ mm}^2$

Area del rectángulo: $39 \times 21 = 819 \text{ mm}^2$

Area total: $1\,008 \text{ mm}^2$

Volumen: $1008 \times 21 = 21\,168 \text{ mm}^3$

A descontar: $(5{,}58^2 + 6^2 + 6 \times 5{,}58) \times \dfrac{21\pi}{3} = 2\,212{,}675\,3 \text{ mm}^3$

Volumen efectivo: $18\,955\,324\,7 \text{ mm}^3$

Peso: $18{,}955\,3247 \times 7{,}78 = 147{,}472\,4 \text{ g}$

Vol. tronco (mango):

$$(6^2 + 4^2 + 6 \times 4) \times \frac{102\pi}{3} = 8\,117{,}894\,4 \text{ mm}^3$$

Peso: $8{,}117\,8944 \times 0{,}67 = 5{,}438\,9 \text{ g}$

Peso total: **152,911 3 g**

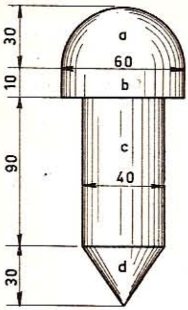


Fig. 590

1.286. Hallar el peso de la pieza que representa la figura 590, acotada en centímetros, siendo la densidad del material empleado 7,8.

Vol. de la semiesfera a: $\dfrac{3{,}1416 \times 60^3}{6 \times 2} = 56\,548{,}8 \text{ cm}^2$

Vol. del cilindro b: $3{,}1416 \times 30^2 \times 10 = 28\,274{,}4 \text{ cm}^3$

Vol. del cilindro c: $3{,}1416 \times 20^2 \times 90 = 113\,097{,}6 \text{ cm}^3$

Vol. del cono d: $\dfrac{3{,}1416 \times 20^2 \times 30}{3} = 12\,566{,}4 \text{ cm}^3$

Vol. total: $210\,487{,}2 \text{ cm}^3$

Peso: $210{,}487\,2 \times 7{,}8 =$ **1641,800 16 kg**

Apéndice

APENDICE

I. Ejercicios sobre los conjugados armónicos, polos y polares

1.287. Los puntos A, B, C y D forman una cuaterna armónica. Demostrar que $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 2\,\overline{BC} \cdot \overline{DA}$.

Por definición $$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{DB} = -\overline{CB} \cdot \overline{DA} = \overline{BC} \cdot \overline{DA} \qquad (1)$$

Por otra parte $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ *y* $\overline{CD} = \overline{CB} + \overline{BD}$

Luego
$$\begin{aligned}
\overline{AB} \cdot \overline{CD} &= (\overline{AC} + \overline{CB})(\overline{CB} + \overline{BD}) \\
&= \overline{AC} \cdot \overline{CB} + \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{CB}^2 + \overline{CB} \cdot \overline{BD} \\
&= \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{DB} + \overline{BC}^2 + \overline{BC} \cdot \overline{DB} \\
&= \overline{BC}\,(\overline{CA} + \overline{BC} + \overline{DB}) + \overline{CA} \cdot \overline{DB} \\
&= \overline{BC}\,(\overline{DB} + \overline{BC} + \overline{CA}) + \overline{CA} \cdot \overline{DB} \\
&= \overline{BC} \cdot \overline{DA} + \overline{CA} \cdot \overline{DB} \quad \textit{y en virtud de} \quad (1) \\
&= \overline{BC} \cdot \overline{DA} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} = \mathbf{2\,\overline{BC} \cdot \overline{DA}}.
\end{aligned}$$

1.288. Formando los puntos A, B, C, D una cuaterna armónica, y siendo M el punto medio de $\overline{CD}$, demostrar que $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$.

En efecto $$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \quad \textit{(relación de Descartes)}$$

$$2\,\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}\,(\overline{AC} + \overline{AD}) = \overline{AB} \cdot 2\,\overline{AM}$$

Luego $$\mathbf{\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AM}}$$

1.289. Formando los puntos A, B, C y D una cuaterna armónica, siendo O el punto medio de $\overline{AB}$ y M el punto medio de $\overline{CD}$, demostrar que $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4\,\overline{OM}^2$.

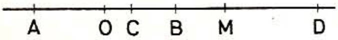


Fig. 591

Tenemos:
$$\overline{AB} = 2\cdot\overline{OB}$$
$$\overline{OB}^2 = \overline{OC}\cdot\overline{OD}$$
$$\overline{AB}^2 = 4\,\overline{OB}^2 = 4\,\overline{OC}\cdot\overline{OD}$$

pero $$\overline{OC} = \overline{OM} - \overline{CM};\quad \overline{OD} = \overline{OM} + \overline{MD} = \overline{OM} + \overline{CM}$$
$$\overline{OC}\cdot\overline{OD} = (\overline{OM} - \overline{CM})(\overline{OM} + \overline{CM}) = \overline{OM}^2 - \overline{CM}^2$$

$$\overline{AB}^2 = 4\,\overline{OC}\cdot\overline{OD} = 4\,\overline{OM}^2 - 4\,\overline{CM}^2 = 4\,\overline{OM}^2 - 4\left(\frac{CD}{2}\right)^2 = 4\,\overline{OM}^2 - \overline{CD}^2$$

luego $$\mathbf{AB^2 + \overline{CD}^2 = 4\,\overline{OM}^2}$$

1.290. Formando los puntos A, B, C y D una cuaterna armónica siendo O el punto medio de $\overline{AB}$ y M el punto medio de $\overline{CD}$, mostrar que $\overline{AC} = 2\,\overline{AM}\cdot\overline{OC}$.

Tenemos $$\overline{AC}^2 = (\overline{AO} + \overline{OC})^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 + 2\,\overline{AO}\cdot\overline{OC}$$

Pero $$\overline{AO}^2 = \overline{OC}\cdot\overline{OD} \quad \textit{(relación de Newton)}$$

Luego $$\overline{AC}^2 = \overline{OC}\cdot\overline{OD} + \overline{OC}^2 + 2\,\overline{AO}\cdot\overline{OC} = \overline{OC}\,(\overline{OD} + \overline{OC} + 2\,\overline{AO})$$
$$\mathbf{\overline{AC}^2} = \overline{OC}\,(2\,\overline{OM} + 2\,\overline{AO}) = 2\,\overline{OC}\,(\overline{AO} + \overline{OM}) = \mathbf{2\,\overline{OC}\cdot\overline{AM}}$$

1.291. Formando los puntos A, B, C, D, una cuaterna armónica, siendo E el conjugado de D con relación a los puntos A y C, y F el conjugado de D con relación a los puntos C y B, mostrar que E y F son conjugados armónicos con relación a los puntos C y D. (Utilizar la relación de Descartes de origen C.)

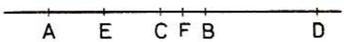


Fig. 592

Tenemos: $$\frac{2}{CD} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} \tag{1}$$

$$\frac{2}{CA} = \frac{1}{CE} + \frac{1}{CD} \quad (2) \qquad \frac{2}{CB} = \frac{1}{CF} + \frac{1}{CD} \tag{3}$$

(1) *nos da* $\dfrac{4}{CD} = \dfrac{2}{CA} + \dfrac{2}{CB}$ *y teniendo en cuenta* (2) *y* (3)

$$\frac{4}{CD} = \frac{1}{CE} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{CF} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{CE} + \frac{1}{CF} + \frac{2}{CD}$$

Luego $$\frac{4}{CD} - \frac{2}{CD} = \frac{2}{CD} = \frac{1}{CE} + \frac{1}{CF}$$

relación que nos dice que E *y* F *son conjugados armónicos de* C *y* D.

1.292. En una circunferencia se trazan dos cuerdas AB y AC. Mostrar que las rectas soportes de AB y AC dividen armónicamente al diámetro MON perpendicular al segmento BC.

El diámetro MON *perpendicular a la cuerda* BC *divide a dicha cuerda y al arco* BC *en dos partes iguales.*

Luego los segmentos AN *y* AM *son bisectrices del ángulo* BAC *y, en consecuencia,* M *y* N *son conjugados armónicos de los puntos* P *y* Q, *intersecciones del soporte de dicho diámetro con los soportes de* AB *y* AC.

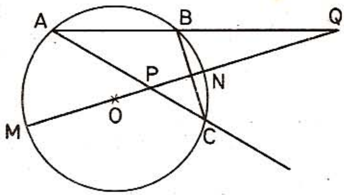


Fig. 593

1.293. Dos rectas (R) y (R′) dividen el plano en cuatro regiones si son secantes, y en tres si son paralelas. Decir en cada caso en qué regiones se halla la polar de un punto P situado en cualquiera de estas regiones.

Sea O *el punto de intersección de* (R) *y* (R′). *La polar de* P *pasará siempre por* O.

Si P *se halla en la región* (1) *o en la región* (3), *la polar se halla en las regiones* (2) *y* (4) *y si* P *se halla en la región* (2) *o en la región* (4) *la polar se halla en las regiones* (1) *y* (3).

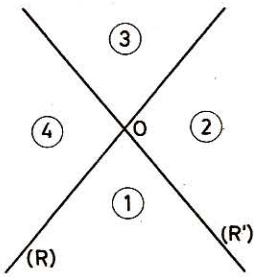


Fig. 594

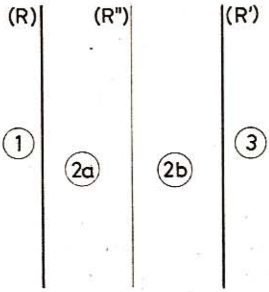


Fig. 595

Si (R) *y* (R′) *son paralelas consideremos la recta* (R″) *paralela equidistante de* (R) *y* (R′). (R″) *divide la faja determinada por* (R) *y* (R′) *en dos regiones* (2a) *y* (2b).

Si P *se halla en la región* (1), *la polar se halla en la región* (2a) *y viceversa si* P *se halla en la región* (2a), *la polar se halla en la región* (1). *Del mismo modo, si* P *se halla en la región* (3) *la polar se halla en la región* (2b) *y viceversa.*

Finalmente, si P *se halla sobre* (R″) *la polar se halla en el infinito.*

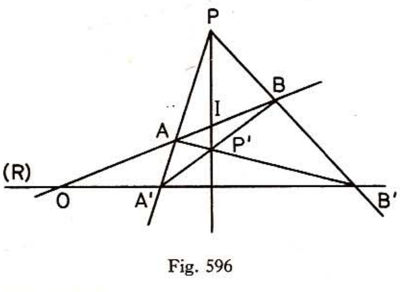


Fig. 596

1.294. En un plano (π) se trazan dos puntos fijos A y B y una recta fija (R) que no pasa ni por A ni por B. Por un punto variable P del plano se trazan las semirrectas PA y PB que cortan a (R) en A′ y B′. Se traza finalmente la semirrecta PP′, siendo P′ el punto de intersección de los segmentos AB′ y BA′.

Demostrar que cuando P varía la semirrecta PP′ pasa por un punto fijo.

1.º *Si la recta* AB *no es paralela a* (R), *sea* O *el punto de intersección de ambas.* PP′ *es la polar de* O *con relación a las rectas* PAA′ y PBB′.

Luego el punto I *de intersección de* PP′ *con* AB *es conjugado de* O *con relación a los puntos* A *y* B. *Luego* I *es fijo.*

2.º *Si* AB *y* (R) *son paralelas,* O *se halla en el infinito y el punto* I *es el punto medio de* AB (GEOM. **331**).

1.295. Sean (R) y (R′) dos rectas fijas secantes en el punto O. Por un punto fijo P de su plano se trazan dos rectas variables simétricas con relación a la recta PO. Una de ellas corta a (R) en M y la otra corta a (R′) en N.

Demostrar que la recta MN pasa por un punto fijo.

Sea I *el punto de intersección de* PO *con* MN. PO *es bisectriz interior del ángulo* MPN *ya que* PM *y* PN *son simétricas con relación a* PO. *Es, pues, una recta fija.*

La bisectriz exterior es también fija y corta a la recta MN *en el punto* F *conjugado de* I *con relación a* MN. *Luego* F *es fijo por ser el polo de la recta fija* PO.

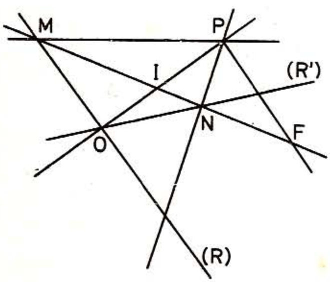


Fig. 597

1.296. Dos cuaternas armónicas (ABCD) y (A′B′C′D′) tienen un punto común A y soportes distintos. Demostrar que las rectas BB′, CC′ y DD′ son concurrentes o paralelas.

La recta BB′ *es la polar de* A *con relación a las rectas* CC′ *y* DD′.

Por tanto, si CC′ *y* DD′ *son concurrentes en* O, BB′ *pasa también por* O *y si* CC′ *y* DD′ *son paralelas* BB′ *es paralela a dichas rectas.*

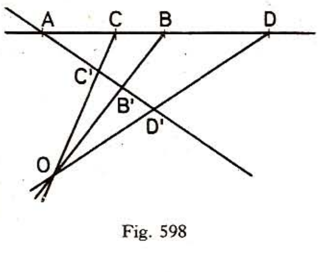


Fig. 598

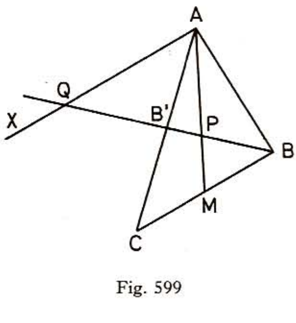


Fig. 599

1.297. Dado un triángulo ABC se traza la mediana AM y la recta AX paralela a BC. Por B se traza una recta cualquiera que corta a las rectas AM, AC y AX respectivamente en P, B′ y Q. Demostrar que la cuaterna (BB′PQ) es armónica.

El haz (ABMCX) *es armónico* (GEOM. **332**).

1.298. Dados un punto O y dos rectas (R) y (R′), construir una circunferencia de centro O de manera que el polo de (R) se halle sobre (R′).

El polo de (R) *se halla sobre la perpendicular a* (R′) *trazado por* O, *la cual corta a* (R) *en* P *y a* (R′) *en* P′.

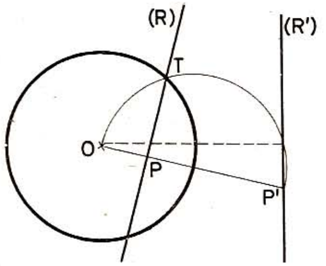


Fig. 600

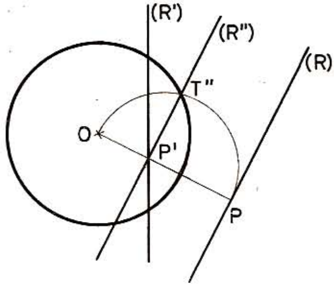


Fig. 601

Si P′ *es polo de* (R) *tenemos* $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2$.

Por consiguiente, el problema sólo es posible cuando O *es exterior al segmento* $\overline{PP'}$. *Suponiendo esta condición realizada, el radio* R *de la circunferencia buscada es la media geométrica entre* $\overline{OP}$ *y* $\overline{OP'}$.

Si $\overline{OP} < \overline{OP'}$ *trazaremos la semicircunferencia de diámetro* $\overline{OP'}$ *la cual cortará a* (R) *en* T, *y la circunferencia de centro* O *y de radio* OT *es la circunferencia buscada, ya que* $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OT}^2$.

Si $\overline{OP} > \overline{OP'}$ *trazaremos por* P′ *la recta* (R″) *paralela a* (R) *y luego la semicircunferencia de diámetro* OP *la cual cortará a* (R″) *en* T″. *La circunferencia de centro* O *y de radio* OT″ *es la circunferencia buscada, ya que* $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OT''}^2$.

Si $\overline{OP} = \overline{OP'}$, *la circunferencia de centro* O *y de radio* $\overline{OP} = \overline{OP'}$ *es la circunferencia buscada.*

1.299. Demostrar que la polar de un punto P con relación a una circunferencia (C) es también eje radical de (C) y de la circunferencia de diámetro OP.

1.º *Si* P *se halla sobre* (C), P′ *coincide con* P; *la polar de* P *es tangente a* (C) *en* P.

La circunferencia de diámetro OP *es tangente interior a* (C) *y el eje radical* (E) *se confunde con la polar.*

2.º *Si* P *no está sobre* (C), P *se halla en el exterior o en el interior de* (C) *y* P′ *en el interior o en el exterior de* (C). *En ambos casos*

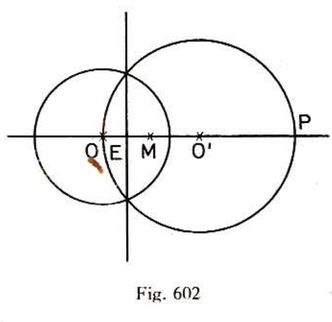


Fig. 602

llamemos O′ *al centro de la circunferencia de diámetro* OP *y* M *al punto medio de* $\overline{OO'}$.

La distancia del pie del eje radical (E) *al punto* M *es* $ME = \dfrac{R^2 - \left(\dfrac{\overline{OP}}{2}\right)^2}{2\overline{OO'}}$

Como $\overline{OO'} = \dfrac{\overline{OP}}{2}$ *resulta* $\overline{ME} = \dfrac{4R^2 - \overline{OP}^2}{4\overline{OP}}$ (GEOM. **392**)

La distancia del pie de la polar al punto O *es* $\overline{OP'} = \dfrac{R}{\overline{OP}}$

y la distancia $\overline{MP'} = \overline{OP'} - \overline{OM} = \dfrac{R^2}{\overline{OP}} - \dfrac{\overline{OP}}{4} = \dfrac{4R^2 - \overline{OP}^2}{4\overline{OP}}$

Luego $\overline{MP'} = \overline{ME}$ *y la polar se confunde con el eje radical.*

1.300. Comparar las posiciones de la polar de un punto P con relación a una circunferencia (C) y del eje radical de (C) y de la circunferencia puntual P.

La distancia de la polar al centro O *de* (C) *es* $\overline{OP'} = \dfrac{R^2}{\overline{OP}}$

Si E *es el pie del eje radical y* M *el punto medio de* $\overline{OP}$, *tenemos:*

$$\overline{ME} = \frac{R^2 - 0}{2\overline{OP}} \quad y \quad \overline{OE} = \overline{OM} + \overline{ME} = \frac{\overline{OP}}{2} + \frac{R^2}{2\overline{OP}}$$

Comparemos, pues: $\overline{OP'} = \dfrac{R^2}{\overline{OP}} = \dfrac{2R^2}{2\overline{OP}}$ *y* $\overline{OE} = \dfrac{\overline{OP}^2 + R^2}{2\overline{OP}}$

Si $\overline{OP} < R$ *es* $\overline{OP'} > R$ *y* $\overline{OE} < \overline{OP'}$
Si $\overline{OP} = R$ *es* $\overline{OP'} = R$ *y* $\overline{OE} = R = \overline{OP'}$
Si $\overline{OP} > R$ *es* $\overline{OP'} < R$ *y* $\overline{OE} > \overline{OP'}$

1.301. Dados tres puntos alineados en el orden ABC, por A se trazan las tangentes AT y AT′ a todas las circunferencias (C) que pasan por B y C. Demostrar que la cuerda variable TT′ que une los puntos de contacto pasa por un punto fijo.

Las cuerdas TT′ *son polares de* A *con relación a las circunferencias* (C).

Todas estas polares contienen al punto A′ *conjugado de* A *con relación a los puntos* B *y* C.

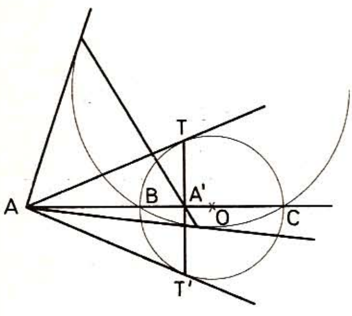


Fig. 603

1.302. Construir una circunferencia (C) que pasa por un punto dado A y con relación a la cual un punto dado B admita como polar una recta dada (R).

1.º *El centro* O *de* (C) *se halla sobre la perpendicular* BI *a* (R) *trazada por* B.

2.º *Tracemos la recta* BA *y sea* B′ *su punto de intersección con* (R).

3.º *Busquemos el conjugado* A′ *de* A *con relación a los puntos* B *y* B′ (A′ *es el pie de la polar de* A *con relación a la circunferencia de diámetro* BB′ *el cual pasa también por* I).

4.º *Tracemos la mediatriz del segmento* AA′. *Su intersección con la recta* BI *da el centro* O *de la circunferencia* (C) *buscada cuyo radio es* OA.

En efecto (C) *es ortogonal a la circunferencia de diámetro* BB′ *y por consiguiente* I, B, *son conjugados con relación a* (C) *ya que están alineados sobre un diámetro de* (C).

1.303. ¿Existen circunferencias (C) que admiten como conjugados un par de puntos dados A y A′?

Sí, todas las circunferencias ortogonales a la circunferencia de diámetro AA′.

1.304. ¿Existen circunferencias (C) que admiten como conjugados dos pares de puntos A y A′, B y B′?

Sí, cuando las circunferencias de diámetro AA′ *y* BB′ *tienen eje radical. Suponiendo esta condición realizada, todas las circunferencias ortogonales a la vez a las dos circunferencias antedichas responden a la cuestión. Su centro se halla sobre la porción de eje radical exterior a dichas circunferencias.*

1.305. ¿Existen circunferencias (C) que admiten como conjugados tres pares de puntos dados A y A′, B y B′ y C y C′?

Sí, cuando las circunferencias de diámetro AA′, BB′ *y* CC′ *admiten un centro radical* O. *La circunferencia ortogonal a las tres circunferencias antedichas responde a la cuestión. Su centro se halla en* O.

1.306. Dado un triángulo ABC, ¿existe una circunferencia (C) con relación a la cual el triángulo ABC sea autopolar?

Si el triángulo ABC *es acutángulo o rectángulo no existe circunferencia* (C).

Si ABC *es obtusángulo, existe una circunferencia* (C). *Su centro se halla en el ortocentro de* ABC (GEOM. **997**). *Su radio es la media geométrica entre los segmentos cuyo origen común es el ortocentro y cuyos extremos son un vértice y el pie de la altura correspondiente* (GEOM. **997**).

Para construir dicha circunferencia (C).

1.º *Se trazan dos alturas* AH *y* BK *por ejemplo, cuyos soportes al cortarse determinan el ortocentro* O, *centro de* (C).

2.º *Se traza la circunferencia de diámetro* AH *y la tangente* OT *a esta circunferencia.* OT *es el radio de* (C) *ya que* $\overline{OT}^2 = \overline{OH} \cdot \overline{OA}$.

1.307. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas AH, BK y CI. Designando por O el ortocentro de ABC:

1.º Decir dónde se hallan los ortocentros de los triángulos BOC, CAO, y ABO.

2.º Trazar las circunferencias (C_1), (C_2) y (C_3) con relación a las cuales los triángulos BOC, CAO y ABO son respectivamente autopolares.

3.º ¿Qué es el punto O con relación a (C_1), (C_2) y (C_3)?

● 1.º *Los ortocentros de* BCO, CAO *y* ABO *son respectivamente los vértices* A, B *y* C *del triángulo dado.*

● 2.º *Basta aplicar la construcción señalada en el problema anterior a cada uno de los triángulos en cuestión.*

● 3.º *El punto* O *es el centro radical de* (C_1), (C_2) *y* (C_3) *pues* O *es el punto común a los tres ejes radicales.*

1.308. En un triángulo ABC se traza la circunferencia circunscrita (C) y las tres medianas AM, BN, CP. Tomando (C) como circunferencia directriz dibujar la figura obtenida al transformar la figura dada, por polares recíprocas.

Sea el triángulo ABC *acutángulo,* O *el circuncentro,* AM, BN, CP *las medianas y* G *su punto de concurso.*

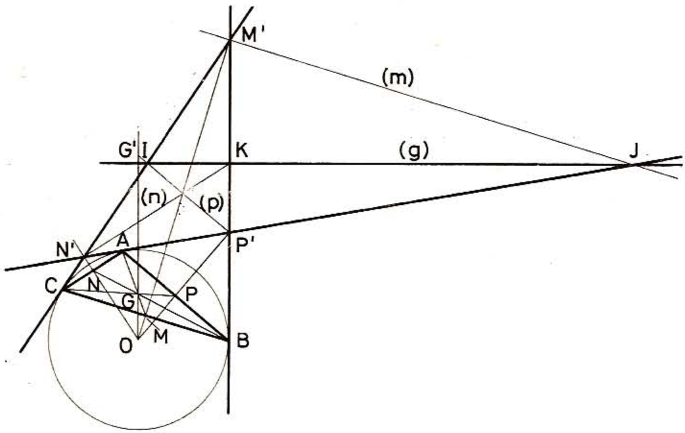


Fig. 604

Las tangentes a la circunferencia, trazadas por A, B, C *son las polares de los vértices* A, B *y* C. *Los puntos* M'P' *y* N' *de intersección de dichas tangentes, son los polos de los lados* BC, AB *y* AC *respectivamente.*

Las perpendiculares a OM', OP' *y* ON' *trazadas respectivamente en los puntos* M', P' *y* N' *son las polares* (m), (p) *y* (n) *de los puntos* M, P *y* N.

Los puntos I, J, K *de intersección de las polares* (p), (m) *y* (n) *con las tangentes* N'M', P'N' *y* P'M' *son los polos de las medianas* AP, AM *y* BN. *Estos polos se hallan sobre la polar* (g) *del punto* G *de concurso de dichas medianas. De la construcción se deduce fácilmente que* OM', ON' *y* OP' *son bisectrices interiores del triángulo* M'P'N' *y que* M'J, P'I *y* N'K *son bisectrices exteriores de dicho triángulo ya que dichas rectas son perpendiculares a las bisectrices interiores. Por consiguiente, los polos* I, J, K, *de las medianas del triángulo* ABC *coinciden con los pies de las bisectrices exteriores del triángulo* M'P'N' *de donde se deduce las propiedades correlativas siguientes:*

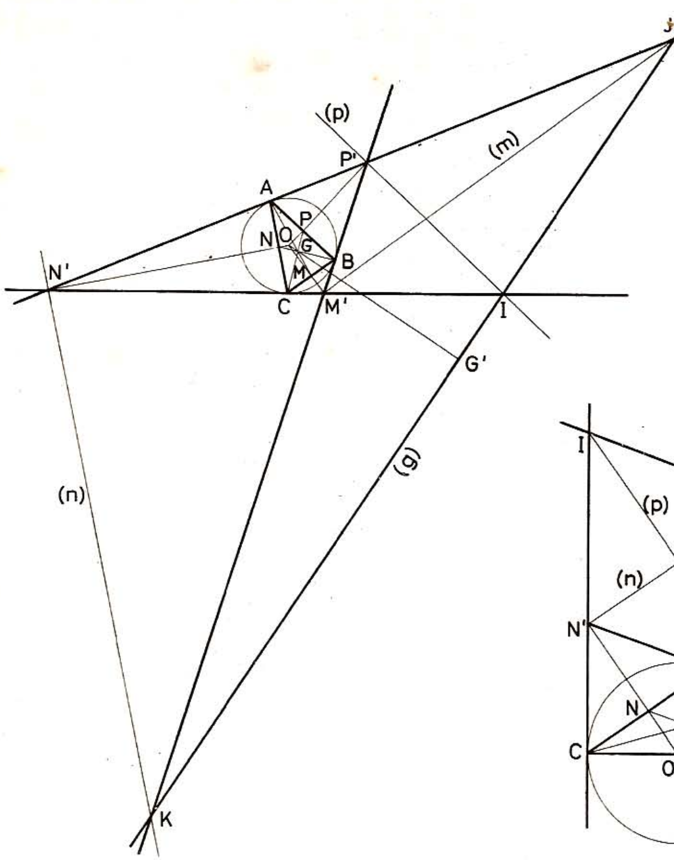


Fig. 605

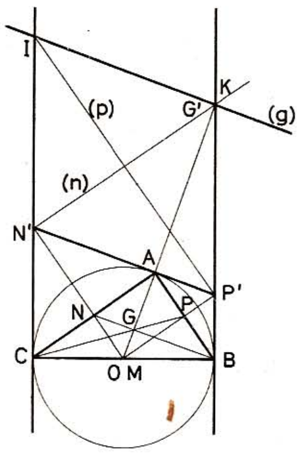


Fig. 606

«Las medianas de un triángulo son concurrentes.» «Los pies de las bisectrices exteriores de un triángulo están en línea recta.»

Si el triángulo dado ABC *es obtusángulo en* A, (C) *es exinscrita con relación al triángulo* M′P′N′ *determinado por las polares de* ABC (*tangentes a* (C) *en* A, B *y* C). *Los polos* I, K *de las medianas* CP *y* BN *son pies de bisectrices interiores, mientras que* J (*polo de* AM) *es pie de bisectriz exterior. De ello se deduce la propiedad correlativa de la de las medianas.*

«En un triángulo, los pies de las bisectrices interiores y el pie de la bisectriz exterior del tercer ángulo están en línea recta.»

Si el triángulo dado ABC *es rectángulo en* A, *el punto* M *coincide con* O, *y su conjugado* M′ *se halla en el infinito. Las polares de* B *y* C (*tangentes a* (C) *en* B *y* C) *son paralelas de suerte que el vértice* M′ *del triángulo* M′P′N′ *se halla en el infinito. La polar* (g) *de* G *es paralela al lado* N′P′.

Los polos I *y* K *de las medianas* CP *y* BN *se hallan sobre* (g) *y uno de ellos (en la figura,* K), *coincide con* G′. *El polo* J *de la mediana* AM *se halla en el infinito sobre* (g).

II. Ejercicios sobre los ejes radicales y los haces de circunferencias

1.309. Dado un triángulo ABC, se trazan las circunferencias cuyos diámetros son AB, BC y CA. Hallar su centro radical.

Las alturas son ejes radicales; luego su centro radical es el ortocentro del triángulo.

1.310. En un triángulo ABC, se trazan las bisectrices AD, AD′, BE, BE′ y CF, CF′ y luego las circunferencias cuyos diámetros son DD′, EE′ y FF′. Demostrar que el circuncentro de ABC tiene igual potencia con relación a las tres circunferencias mencionadas:

Los puntos D, D′ *son conjugados armónicos con relación a* B, C; E, E′ *con relación a* C, A *y* F, F′ *con relación a* A, B. *Luego la circunferencia circunscrita al triángulo* ABC *es ortogonal a las tres circunferencias mencionadas y por consiguiente el circuncentro tiene como potencia el cuadrado del radio de la circunferencia circunscrita.*

1.311. Sobre un eje XOX′ se consideran dos puntos variables P_1 y P_2 cuyas abscisas son X_1 y X_2.

1.º ¿Qué puede decirse de las circunferencias de diámetro P_1P_2 cuando $X_1X_2 = a$?

2.º ¿Qué puede decirse de ellas si $X_1X_2 = -a$?

3.º ¿Y si $X_1X_2 = 0$?

- 1.º *Tracemos la circunferencia* (C) *de centro* O *y de radio* a. *Sean* I, J *los puntos de intersección de* XOX′ *con* (C). *Las circunferencias de diámetro* P_1P_2 *tales que* $X_1X_2 = a$ *son ortogonales a* (C) *ya que* $\overline{OI}^2 = \overline{OJ}^2 = OP_1 \cdot OP_2$. *Luego estas circunferencias forman un haz cuyos puntos límites son* I *y* J.
- 2.º *Por el punto* O *tracemos el diámetro* KL *perpendicular a* IJ. *Las circunferencias de diámetro* P_1P_2 *tales que* $X_1X_2 = -a$ *pasan por* K *y* L *ya que* $OP_1 \cdot OP_2 = -OK^2 = -OL^2 = -a$.

  Dichas circunferencias forman, pues, un haz cuyos puntos básicos son K *y* L.
- 3.º *Si* $X_1X_2 = 0$ *uno de los puntos* P_1 *o* P_2 *coincide con* O.

  Dichas circunferencias forman, pues, un haz tangente a la perpendicular KOL *a* X′OX *trazada por* O.

1.312. Dados tres puntos A, B y C trazar la circunferencia (C) del haz determinado por los puntos básicos A y B, que pasan por C.

El centro de (C) *se halla sobre la mediatriz de* AB *y sobre la mediatriz de los segmentos* CA *y* CB. *El centro de* (C) *es, pues, el circuncentro del triángulo* ABC.

El problema admite siempre solución excepto cuando C *está alineado con* B *y* A. *En este último caso la circunferencia* (C) *es la recta* AB.

1.313. Dados los puntos A, B, C trazar la circunferencia (C) del haz cuyos puntos límites son los puntos A y B, que pasa por C.

Tracemos primero la circunferencia (C′) *que pasa por los puntos* A, B *y* C *y luego la circunferencia* (C) *ortogonal a* (C′) *en* C.

1.314. Trazar la circunferencia (C) que pasa por un punto dado A, y pertenece al haz tangente en un punto dado P sobre una recta dada (R).

Dicha circunferencia tiene el centro en el punto de intersección I *de la perpendicular a* (R) *trazada por* P, *con la mediatriz del segmento* AP. *Su radio es* IP.

1.315. Cuatro puntos A, B, C, D, forman una cuaterna armónica. Se trazan las circunferencias cuyos diámetros son AB y CD. ¿Cuántas circunferencias ortogonales a las dos anteriores pueden trazarse?

Una infinidad. — *Sus centros se hallan en las porciones exteriores del eje radical de las dos circunferencias dadas. Forman un haz cuyos puntos límites son los puntos de intersección de las dos circunferencias dadas.*

1.316. Dadas dos circunferencias (C) y (C′) y una recta (R), trazar una circunferencia (C″) ortogonal a (C′) y que admita con (C) la recta (R) como eje radical.

1.er caso. — (C) *y* (R) *no tienen ningún punto común.*

En este caso determinan un haz cuyos puntos límites son las intersecciones IJ, *de la perpendicular a* (R) *trazada por el centro de* (C), *con la circunferencia cuyo centro es el pie* K *de la perpendicular mencionada, y cuyo radio es la longitud de la tangente trazada de* K *a* (C). (C″) *es, pues, la circunferencia del haz que es ortogonal a* (C′). *Su centro* O″ *se halla en el punto de intersección de la recta* IJ *con el eje radical de las circunferencias* (C′) *y de diámetro* IJ. *Su radio es la longitud de la tangente trazada por* O″ *a* (C′).

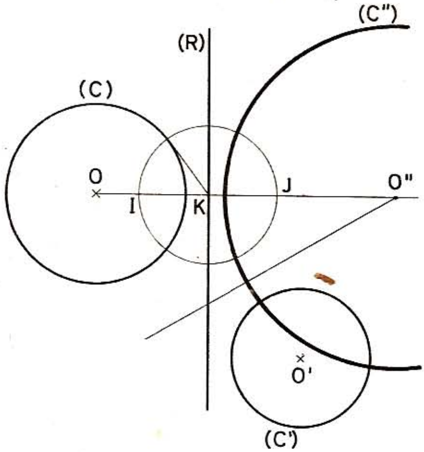


Fig. 607

2.º caso. — (C) *y* (R) *tienen dos puntos comunes* A *y* B. *Pasando* (C″) *por* A *y siendo ortogonal a* (C′) *pasa también por* A′ *conjugado armónico de* A *con relación a* MN *extremidades del diámetro de* (C′) *cuyo soporte pasa por* A. *Basta, pues, hallar* A′ (*intersección de* MN *con la cuerda* TT′ *de los contactos de las tangentes a* (C′) *trazadas por* A *y luego trazar la circunferencia que pasa por* A, B *y* A′.

3.er caso. — (C) *y* (R) *tienen un punto común* A. *Como en el caso anterior, ya que en* A *hay dos puntos confundidos* (A *y* B). *El centro de* (C″) *se halla sobre la perpendicular a* (R) *trazada por* A *y sobre la mediatriz de* AA′.

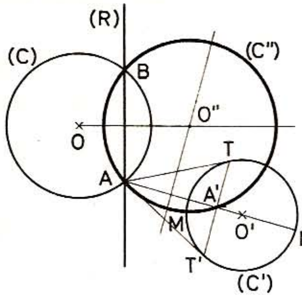


Fig. 608

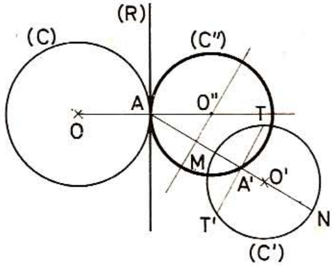


Fig. 609

III. Ejercicios sobre las áreas de las superficies planas limitadas por líneas curvas

1.317. Aplicar las fórmulas de los trapecios inscritos, de los trapecios circunscritos, de la media aritmética, de Simpson, de Poncelet y de Parmentier, al trapecio mixtilíneo representado en la figura (dimensiones en mm). Confrontar luego los resultados con el método de la cuadrícula.

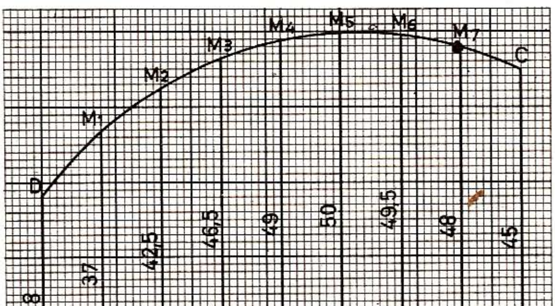


Fig. 610

Tenemos:

$$E = 28 + 45 = 73 \text{ mm}$$
$$I = 37 + 46,5 + 50 + 48 = 181,5 \text{ mm}$$
$$P = 42,5 + 49 + 49,5 = 141 \text{ mm}$$

Fórm. trapecios inscritos: $A = 8/2\,(73 + 363 + 282) = 2872\ mm^2$
Fórm. trapecios circunscritos: $A = 2 \times 8 \times 181{,}5 = 2904\ mm^2$
Fórm. media aritmética: $A = 8/4\,(73 + 1089 + 282) = 2888\ mm^2$
Fórm. de Simpson: $A = 8/3\,(73 + 726 + 282) = 2882{,}66\ mm^2$
Fórm. de Poncelet: $A = 8/4\,(73 + 1452 - 85) = 2880\ mm^2$
Fórm. de Parmentier: $A = 8/6\,(73 + 2178 - 85) = 2888\ mm^2$
La cuadrícula da unos 2880 mm².

1.318. Dibujar una semicircunferencia cuyo diámetro AB mida 10 cm. Dividir AB en ocho partes iguales, trazar las ordenadas correspondientes y aplicar las distintas fórmulas de aproximación para obtener el área del semicírculo. Comparar los resultados con el que da la fórmula geométrica y la cuadrícula.

Tenemos: $P_1M_1 = 32{,}5$ mm; $P_2M_2 = 43$ mm; $P_3M_3 = 48{,}5$ mm; $P_4M_4 = 50$ mm; $P_5M_5 = 48{,}5$ mm; $P_6M_6 = 43$ mm; $P_7M_7 = 32{,}5$ mm

$$E = 0 + 0 = 0$$
$$I = 32{,}5 + 48{,}5 + 48{,}5 + 32{,}5 = 162\ mm$$
$$P = 43 + 50 + 43 = 136\ mm$$

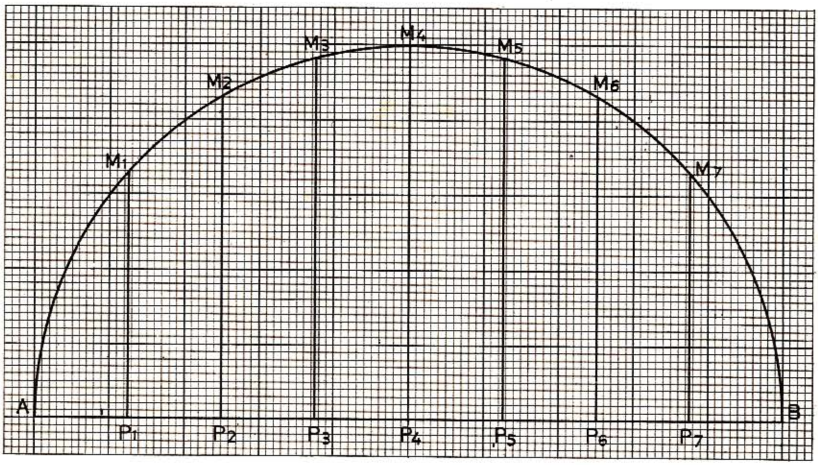


Fig. 611

Fórm. trap. inscritos: $A = \frac{12{,}5}{2}(0 + 324 + 272) = 3725\ mm^2$

Fórm. trap. circunscritos: $A = 2 \times 12{,}5 \times 162 = 4050\ mm^2$

Fórm. media aritmética: $A = \frac{12{,}5}{4}(0 + 972 + 272) = 3887{,}5\ mm^2$

Fórm. de Simpson: $A = \frac{12,5}{3} (0 + 648 + 272) = 3833,333 \text{ mm}^2$.

Fórm. de Parmentier: $A = \frac{12,5}{6} (0 + 1994 - 65) = 4018,75 \text{ mm}^2$

Fórm. de Poncelet: $A = \frac{12,5}{4} (0 + 1296 - 65) = 3846,875 \text{ mm}^2$

La cuadrícula da unos 3898 mm².

La fórmula geométrica da: $A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3,1416 \times 2500}{2} = 3927 \text{ mm}^2$

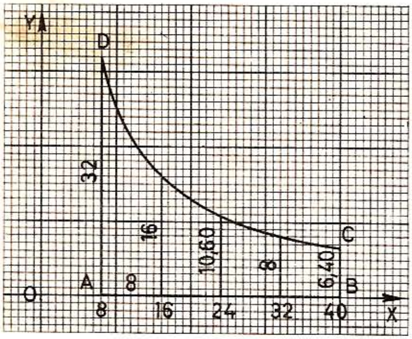


Fig. 612

1.319. Una hipérbola equilátera tiene por ecuación $y = \frac{256}{x}$

1.º Tomando el mm por unidad dibujar el trapecio curvilíneo ABCD cuyos vértices tienen por coordenadas A(8,0), B(40,0), C(40,6,4), D(8,32).

2.º Dividir el lado AB en cuatro partes iguales y calcular las ordenadas correspondientes a los puntos de división.

3.º Calcular el área del trapecio aplicando las fórmulas de aproximación y confrontarlas con el resultado que da la cuadrícula.

Cuadro de valores:

x	8	12	16	20	24	28	32	36	40
y	32	21	16	12,8	10,60	9,1	8	7,1	6,40

$$E = 32 + 6,40 = 38,40 \text{ mm}$$
$$I = 16 + 8 = 24 \text{ mm}$$
$$P = 10,60 \text{ mm}$$

Fórm. trap. inscritos: $A = 8/2\,(38,40 + 48 + 21,2) = 430,4 \text{ mm}^2$
Fórm. trap. circunscritos: $A = 2 \times 8 \times 24 = 384 \text{ mm}^2$
Fórm. media aritmética: $A = 8/4\,(38,40 + 144 + 21,2) = 407,2 \text{ mm}^2$
Fórm. de Simpson: $A = 8/3\,(38,40 + 96 + 21,2) = 414,93 \text{ mm}^2$
Fórm. de Poncelet: $A = 8/4\,(38,40 + 192 - 24) = 412,8 \text{ mm}^2$
Fórm. de Parmentier: $A = 8/6\,(38,40 + 288 - 24) = 403,2 \text{ mm}^2$
La cuadrícula da unos 402 mm²

1.320. La hipotenusa de un triángulo rectángulo curvilíneo OAB es un arco de parábola cuya ecuación es $y = \sqrt{32x}$. Las coordenadas de los vértices son O(0,0), A(24,0) y B(24,27,7).

1.º Dibujar este triángulo tomando el mm por unidad.

2.º Dividir el lado OA en seis partes iguales y calcular su área mediante las fórmulas de aproximación.

3.º Trazar BC perpendicular a OY, calcular el área del rectángulo OABC, y compararla con la del triángulo curvilíneo OAB.

Cuadro de valores:

x	0	4	8	12	16	20	24
y	0	11,2	16	19,5	22,6	25,2	27,7

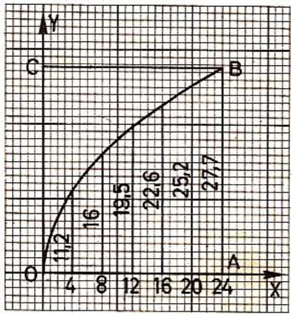


Fig. 613

$$E = 0 + 27{,}7 = 27{,}7 \text{ mm}$$
$$I = 11{,}2 + 19{,}5 + 25{,}2 = 55{,}9 \text{ mm}$$
$$P = 16 + 22{,}6 = 38{,}6 \text{ mm}$$

Fórm. trap. inscritos: $A = 4/2\ (27{,}7 + 111{,}8 + 77{,}2) = 433{,}4 \text{ mm}^2$

Fórm. trap. circunscritos: $A = 2 \times 4 \times 55{,}9 = 447{,}2 \text{ mm}^2$

Fórm. media aritmética: $A = 4/4\ (27{,}7 + 335{,}4 + 77{,}2) = 440{,}3 \text{ mm}^2$

Fórm. de Simpson: $A = 4/3\ (27{,}7 + 223{,}6 + 77{,}2) = 438 \text{ mm}^2$

Fórm. de Poncelet: $A = 4/4\ (27{,}7 + 447{,}2 - 36{,}4) = 438{,}5 \text{ mm}^2$

Fórm. de Parmentier: $A = 4/6\ (27{,}7 + 670{,}8 - 36{,}4) = 441{,}6 \text{ mm}^2$

La cuadrícula da unos 435 *mm*^{2}

El área del rectángulo OABC $= 24 \times 27{,}7 = 664{,}8 \text{ mm}^2$

Los 2/3 *de* 664,8 *dan* 443,2 *lo que confirma el teorema conocido: «El área de un segmento parabólico limitado por la curva y una cuerda perpendicular al eje es igual a los* 2/3 *del área del rectángulo cuyas dimensiones son la cuerda considerada y la porción de eje comprendida entre el vértice de la parábola y el pie de la cuerda.»* (GEOM. **650 bis.**)

IV. Ejercicios sobre la elipse

1.321. Dados los focos FF′ y un punto P de una elipse construir los cuatro vértices.

1.º *Tracemos la recta que pasa por* F′F *y la mediatriz del segmento* F′F. *Su punto de intersección es el centro* O *de la elipse.*

2.º *Tracemos la circunferencia de centro* F′ *y de radio* F′M = F′P + PF = $2a$ *la cual corta a la recta* F′F *en los puntos* I′ *e* I.

Los puntos medios de los segmentos I′F *y* FI *son los vértices* A′ *y* A *de la elipse.*

$$\textit{En efecto}\quad \mathrm{OA'} = \mathrm{FA'} - \mathrm{FO} = \frac{\mathrm{FI'}}{2} - \mathrm{FO} = \frac{\mathrm{FF'} + \mathrm{F'I'}}{2} - \mathrm{FO} =$$

$$= \frac{2c + 2a}{2} - c = c + a - c = a$$

$$\textit{Asimismo}\quad \mathrm{OA} = \mathrm{F'A} - \mathrm{F'O} = \mathrm{F'I} - \mathrm{AI} - \mathrm{F'O} = \mathrm{F'I} - \frac{\mathrm{FI}}{2} - \mathrm{FO} =$$

$$= 2a - \frac{(2a - 2c)}{2} - c = 2a - a + c - c = a$$

3.º *Los puntos de intersección de la mediatriz de* F′F *con la circunferencia de centro* F *y de radio* OA = a, *son los vértices* B *y* B′ *de la elipse.*

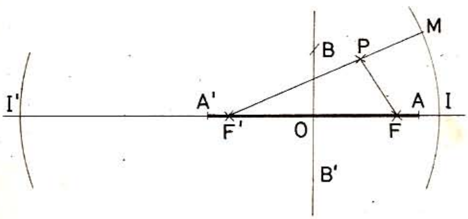


Fig. 614

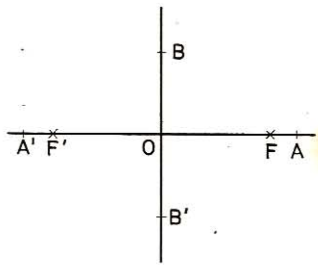


Fig. 615

1.322. Dados los focos F′F y la longitud $2b$ construir los vértices A′ y A.

1.º *Tracemos la recta que pasa por* F′F *y la mediatriz del segmento* F′F. *Su punto de intersección es el centro* O *de la elipse.*

2.º *Sobre la mediatriz llevemos las distancias* OB′ = OB = b (B′ *y* B *son vértices de la elipse*).

3.º *Haciendo centro en* O *y con radio* BF, *llevemos sobre la recta* F′F *las distancias* OA′ = OA = BF (A *y* A′ *son los vértices de la elipse*).

1.323. Dados un foco F, un vértice B del eje menor y un punto P de la elipse, hallar el otro foco y los 3 vértices restantes.

1.º *El otro foco se halla sobre la circunferencia de centro* B *y de radio* BF. *Tracemos esta circunferencia y el diámetro* FBM.

2.º *El otro foco se halla sobre la circunferencia de centro* P *y de radio igual a* P′M = FM − FP′ = 2a − FP. *Tracemos, pues, esta circunferencia. Sus puntos de intersección con la circunferencia anterior dan las posiciones* F_1 *y* F_2 *del otro foco.*

3.° *Tracemos los segmentos* FF_1 *y* FF_2 *y sus mediatrices. Los pies* O_1 *y* O_2 *de estas mediatrices son centros de las elipses buscadas.*

4.° *Sobre estas mediatrices llevemos respectivamente los segmentos* $O_1B_1 = O_1B$ *y* $O_2B_2 = O_2B$.

5.° *Sobre la recta* FO_1F_1 *llevemos* $O_1A_1 = O_1A'_1 = BF$ *y sobre la recta* FO_2F_2 *llevemos* $O_2A_2 = O_2A'_2 = BF$.

Hay, pues, dos elipses: E_1 *cuyos focos son* F *y* F_1 *y sus vértices* A_1, A'_1, B_1, B; *y* E_2 *cuyos focos son* F *y* F_2 *y sus vértices* A_2, A'_2, B *y* B_2.

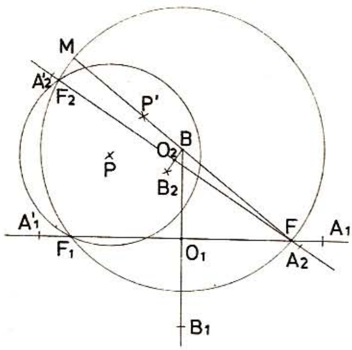


Fig. 616

1.324. Hallar el lugar geométrico del centro (C) de una circunferencia variable tangente a dos circunferencias fijas tangentes interiormente.

Sean las circunferencias fijas de centro O_1 *y* O_2 *y de radio* R_1 *y* R_2.

Sea C *el centro de la circunferencia variable tangente a* O_1 *en* T_1 *y a* O_2 *en* T_2.

Tenemos $\overline{O_1C} = \overline{O_1T_1} - \overline{CT_1} = R_1 - \overline{CT_1}$

$\overline{O_2C} = \overline{O_2T_2} + \overline{T_2C} = R_2 + \overline{T_2C}$

Como $\overline{CT_1} = \overline{T_2C}$

resulta $\overline{O_1C} + \overline{O_2C} = R_1 + R_2 = \text{Cte.}$

El lugar geométrico del punto C *es, pues, la elipse cuyos focos son* O_1 *y* O_2 *y cuyo eje mayor es* $R_1 + R_2$.

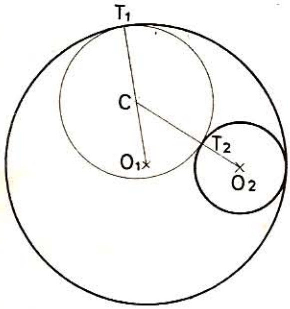


Fig. 617

1.325. Hallar los vértices de una elipse dados los focos y una tangente.

Sean F *y* F′ *los focos y* (T) *la tangente.*

1.° *Tracemos la recta que pasa por* F′F *y la mediatriz del segmento* F′F. *Su pie* O *es el centro de la elipse.*

2.° *Tracemos el simétrico* F″ *de* F *con relación a la tangente* (T). F′F″ *es el radio* 2a *de la circunferencia directriz.*

3.° *Sobre la recta* F′F *llevemos* OA = = OA′ = 1/2 F′F″. A *y* A′ *son dos vértices.*

4.° *Desde* F′ *como centro cortemos la mediatriz de* F′F *con un radio igual a* 1/2 F′F″. *Los puntos de intersección* BB′ *son dos vértices de la elipse.*

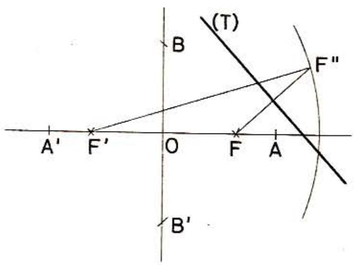


Fig. 618

1.326. Dados el foco y tres tangentes de una elipse, determinar el otro foco y los vértices.

Sea F *el foco dado y* (T_1), (T_2) *y* (T_3) *las tangentes dadas.*

1.º *Tracemos los simétricos* F_1, F_2, F_3 *de* F *con relación a* (T_1), (T_2) *y* (T_3).

2.º *Tracemos la circunferencia que pasa por* F_1, F_2 *y* F_3. *Su centro es el otro foco* F′ *de la elipse y su radio nos da la longitud* 2a *del eje mayor.*

3.º *Tracemos la recta* F′F *y la mediatriz del segmento* F′F. *A partir de su pie* O, *llevemos sobre* F′F *los segmentos* OA = OA′ = a *y haciendo centro en* F′ *cortemos la mediatriz de* F′F *con un radio igual a* a. *Sus intersecciones son los vértices* B *y* B′.

1.327. Hallar el lugar geométrico del segundo foco de las elipses variables que tienen un foco fijo y son tangentes a una recta fija (T) en un punto fijo P. Hallar también el lugar geométrico de sus centros.

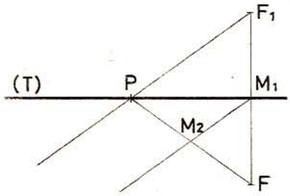


Fig. 619

1.º *Tracemos el simétrico* F_1 *de* F *con relación a* (T). *Los centros de las circunferencias directrices y, por consiguiente, el segundo foco de las elipses, se hallan siempre sobre la recta* PF_1.

2.º *El centro* O *de estas elipses se halla siempre en el punto medio del segmento* F′F. *Su lugar geométrico es, pues, la recta* M_1M_2 *deducida de* PF_1 *mediante la homotecia de centro* O *y valor* 1/2.

1.328. En una elipse una tangente móvil corta en P y P′ a las tangentes trazadas en los vértices A y A′ del eje mayor.

1.º Demostrar que la circunferencia de diámetro PP′ pasa por los focos.

2.º Demostrar que el producto AP × A′P′ es constante.

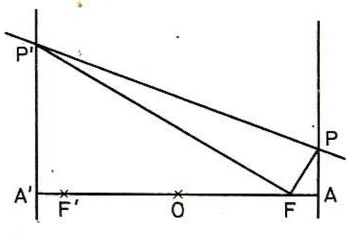


Fig. 620

1.º *Sabemos* (GEOM. **619**) *que el ángulo* PFP′ *es constante y en este caso es igual a* $\dfrac{\angle AFA'}{2} = 90^\circ$. *Luego la circunferencia de diámetro* PP′ *pasa por* F *y por la misma razón pasa por* F′.

2.º *Los triángulos rectángulos* PAF *y* FA′P′ *tienen los ángulos respectivamente iguales (lados perpendiculares). Luego son semejantes y* $\dfrac{AP}{FA'} = \dfrac{FA}{A'P'}$

Por tanto, $AP \times A'P' = FA' \times FA = (a+c)\,(a-c) = a^2 - c^2 = b^2 = \text{Cte}.$

1.329. En una elipse los ejes miden 10 cm y 6 cm respectivamente. Calcular la distancia focal, la excentricidad, el diámetro de la circunferencia principal, el diámetro de la circunferencia directriz, el diámetro de la circunferencia ortóptica, el valor del parámetro y el área.

Distancia focal: $2c = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$ cm
Diámetro de la circ. principal: $2a = 10$ cm

Diámetro de la circ. directriz: $4a = 20$ cm
Diámetro de la circ. ortóptica: $2\sqrt{5^2 + 3^2} = 2\sqrt{34} = 11{,}662$ cm
Parámetro: $\frac{3^2}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8$ cm
Area: $\pi \times 5 \times 3 = 15\pi = 47{,}1240$ cm^2

1.330. Si M es un punto de la elipse cuyos ejes son AA′ y BB′ y el centro O, demostrar que la suma de los cuadrados de las áreas de los triángulos OMA y OMB es constante.

En efecto: si x, y *son las coordenadas de* M, *tenemos:*

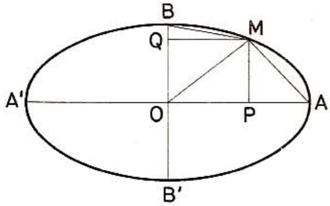


Fig. 621

$$\text{Area OMA} = \frac{1}{2}\,\text{OA} \times \text{PM} = \frac{1}{2}\,a\,y$$

$$\text{Area OMB} = \frac{1}{2}\,\text{OB} \times \text{QM} = \frac{1}{2}\,b\,x$$

$$\left(\frac{ay}{2}\right)^2 + \left(\frac{bx}{2}\right)^2 = \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{4}$$

Pero como M (x, y) *es un punto de la elipse, tenemos:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \textit{es decir} \quad \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2} = 1 \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 = \text{Cte.}$$

Luego la suma de los cuadrados de las áreas de los triángulos OMA *y* OMB,

$$\frac{a^2y^2 + b^2x^2}{4} = \frac{a^2b^2}{4} = \text{Cte.}$$ *es el cuadrado del área del triángulo* OAB

V. Ejercicios sobre la hipérbola

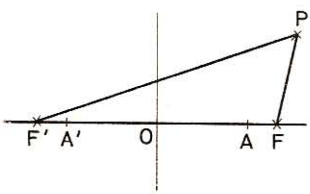


Fig. 622

1.331. Hallar los dos vértices de una hipérbola dados los focos y un punto P.

1.º *Tracemos la recta* F′F *y la mediatriz del segmento* F′F.

2.º *A partir del pie* O *de la mediatriz, llevemos:*

$$\text{OA} = \text{OA}' = \frac{1}{2}(\text{PF}' - \text{PF})$$

1.332. Hallar los dos vértices de una hipérbola dados un foco, un punto P y las longitudes $2a$ y $2c$.

1.º *El otro foco se halla sobre la circunferencia de centro* F *y de radio* 2c. *Tracemos esta circunferencia.*

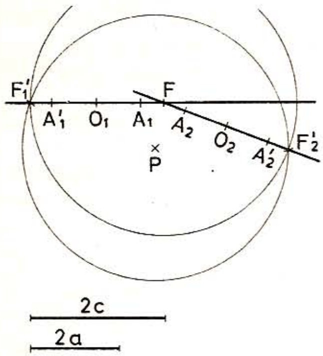


Fig. 623

2.º *También se halla sobre la circunferencia de centro* P *y de radio* (2a + PF). *Tracemos esta circunferencia. Las intersecciones de ambas dan el otro foco. Hay, en general, dos soluciones* F'_1 *y* F'_2.

3.º *A partir del punto medio de los segmentos* F'_1F *y* F'_2 *llevemos* $O_1A_1 = O_1N_1 = O_2A_2 = O_2A'_2 = a$ *y obtenemos los vértices* $A_1A'_1$ *y* A_2, A'_2.

1.333. Dados los focos y una asíntota, hallar la otra asíntota y los vértices.

La otra asíntota es simétrica de la asíntota dada, con relación a la recta focal F'F.

El segmento F'_1F_1 *interceptado sobre una asíntota por las proyecciones ortogonales de los focos tiene una longitud igual al eje transverso. Luego desde el centro* O *basta llevar sobre la recta* F'F *los segmentos* $OA' = OA = OF_1 = \dfrac{F'_1F_1}{2}$

1.334. Hallar el lugar geométrico del centro C de una circunferencia variable tangente a dos circunferencias fijas tangentes exteriormente.

Si O_1 *y* O_2 *son los dos centros de las circunferencias fijas y* R_1 *y* R_2 *son sus radios, y* r *es el radio de la circunferencia variable* (C), *si* (C) *es tangente exteriormente a las otras dos, tenemos:*

$$CO_1 - CO_2 = (R_1 + r) - (R_2 + r) = R_1 - R_2 = \text{Cte.}$$

y si (C) *es tangente interiormente a las otras dos, tenemos:*

$$CO_2 - CO_1 = (r - R_2) - (r - R_1) = R_1 - R_2 = \text{Cte.}$$

En ambos casos el lugar geométrico de C *es la hipérbola cuyos focos son* O_1 *y* O_2 *y la longitud del eje transverso es* $(R_1 - R_2)$.

1.335. Hallar el lugar geométrico del segundo foco F' de la hipérbola de la cual se conocen un foco F y dos puntos P_1 y P_2.

Las circunferencias de centros P_1 *y* P_2 *y de radios* P_1F *y* P_2F *son tangentes a la circunferencia directriz relativa al otro foco. Luego el lugar geométrico de* F' *es el lugar geométrico del centro de una circunferencia variable tangente a dos circunferencias fijas (problema anterior). Es, pues, la hipérbola cuyos focos son* P_1 *y* P_2 *y cuyo eje transverso es* $(P_1F - P_2F)$.

1.336. Hallar los vértices y las asíntotas de una hipérbola de la cual se conocen los focos y una tangente.

Si F_1 *y* F'_1 *son las proyecciones ortogonales de los focos sobre la tangente, el segmento* $F_1F'_1$ *es diámetro de la circunferencia principal. Las intersecciones de esta circunferencia con la recta* F'F *son los vértices* A *y* A' *de la hipérbola.*

Si por A *y* A' *trazamos perpendiculares a* FF' *y las cortamos con la circun-*

ferencia de centro O *y de radio* OF, *obtendremos los cuatro vértices del rectángulo cuyas diagonales son las asíntotas.*

1.337. Conocidos un foco F y dos tangentes T_1 y T_2 y un punto P de una hipérbola, hallar el foco F′ y los vértices.

Los simétricos F_1 *y* F_2 *de* F *con relación a las tangentes* T_1 *y* T_2 *se hallan sobre la circunferencia directriz de centro* F′ *la cual es también tangente a la circunferencia de centro* P *y de radio* PF. *El centro* F′ *se halla, pues, determinado. Para hallar los vértices* A *y* A′ *bastará llevar sobre* FF′ *a una y otra parte de su punto medio* O, *los segmentos* OA′ = OA = a *(mitad del radio de la circunferencia directriz trazada).*

1.338. Dados un foco F y tres puntos P_1P_2 y P_3 de una hipérbola hallar el otro foco y los vértices.

La circunferencia tangente a las tres circunferencias (C_1), (C_2) *y* (C_3) *de centro* P_1, P_2 *y* P_3 *y radios* P_1F, P_2F *y* P_3F *es la circunferencia directriz cuyo centro es el foco* F′ *buscado. Luego a partir de* O *punto medio de* FF′ *se llevan los segmentos* OA = OA′ = a *(mitad del radio de la circunferencia directriz).*

1.339. Dados tres puntos alineados en el orden K, L, M, se consideran todas las circunferencias (C) tangentes en L a la recta KM. Por K y M se trazan las tangentes KT_1 y MT_2 (diferentes de KLM) las cuales se cortan en I. Hallar el lugar geométrico de I cuando (C) varía.

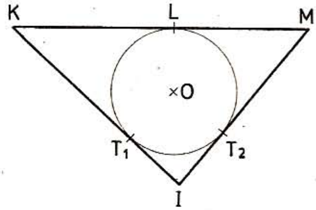


Fig. 624

Tenemos $IT_1 = IT_2;\ MT_2 = ML$

y $KL = KT_1$

Luego $IK - IM = IT_1 + T_1K - IT_2 - T_2M = T_1K - T_2M = KL - LM = \text{Cte.}$

Luego el lugar geométrico del punto I *es la hipérbola cuyos focos son* K *y* M *y la longitud del eje transverso* KL − LM.

1.340. Lugar geométrico del centro de las hipérbolas variables admitiendo el punto fijo F como foco, y tangentes a dos rectas dadas (R_1) y (R_2).

Las circunferencias directrices referentes al foco F′ *variable, pasan por los puntos* F_1 *y* F_2 *simétricos de* F *con relación a* (R_1) *y* (R_2).

El lugar geométrico de F′ *es, pues, la mediatriz del segmento* F_1F_2. *Como el centro* O *es el punto medio del segmento* F_1F_2, *su lugar geométrico se deduce del de* F′ *mediante una homotecia de centro* F *y razón* 1/2.

VI. Ejercicios sobre la parábola

1.341. Dados el foco F y dos puntos P_1 y P_2 de una parábola hallar su directriz.

1.º *Trazar las circunferencias de centro* P_1 *y* P_2 *con radios* P_1F *y* P_2F.

2.º *Trazar las tangentes comunes a estas circunferencias. Son las directrices (dos respuestas).*

1.342. Dados un punto P, el parámetro p y la directriz (D) de una parábola, hallar el foco F.

1.º *Trazar la circunferencia de centro* P *y tangente a* (D).

2.º *Trazar una paralela a* (D) *a la distancia* p. *Los puntos de intersección son los focos buscados. Hay dos, una o cero soluciones.*

1.343. Dados un punto P y una recta (R) que no pasa por P.

1.º Hallar el lugar geométrico de los focos de las parábolas que pasan por P y admiten (R) como directriz.

2.º Hallar los focos de las parábolas anteriores que pasan por el punto M.

• 1.º *Es la circunferencia de centro* P *y tangente a* (R).

• 2.º *Son los puntos de intersección de la circunferencia anterior con la circunferencia de centro* M *y tangente a* (R). *Esta segunda parte admite dos, una o cero soluciones según que las dos circunferencias sean secantes, tangentes o no tengan ningún punto común.*

1.344. Dados el foco y dos tangentes de una parábola, hallar la tangente en el vértice y la directriz.

1.º *Tracemos las proyecciones ortogonales* F_1 *y* F_2 *del foco* F *sobre las dos tangentes dadas. La recta determinada por* F_1 *y* F_2 *es la tangente* T *en el vértice de la parábola.*

2.º *La directriz se deduce de* T *mediante la homotecia de centro* F *y de razón* 2.

1.345. Dados el foco F, un punto P y la tangente (T) que no pasa por P, de una parábola, hallar la directriz y la tangente en el vértice.

1.º *Trazar el simétrico* F′ *de* F *con relación a* T.

2.º *Trazar la circunferencia de centro* P *y de radio* PF.

3.º *Por* F′ *trazar una tangente a la circunferencia anterior. Es la directriz* (D) *(dos, una o cero soluciones).*

4.º *La tangente en el vértice se deduce de* (D) *mediante la homotecia de centro* F *y de razón* 1/2.

1.346. Hallar el foco y la directriz de una parábola dados un punto P, la tangente en este punto y la tangente (T) en el vértice.

1.º *En el punto* I *de intersección de la tangente en* P *con* (T) *trazar una perpendicular* L′IL.

2.º *Por el punto* P *trazar una perpendicular a* (T) *la cual cortará a* L′IL *en un punto* D *de la directriz.*

3.º *Por* D *trazar una paralela a* (T); *es la directriz.*

4.º *Sobre* IL *llevar un segmento* $\overline{IF} = \overline{DI}$. *La extremidad de* $\overline{IF}$ *es el foco. (También podría hallarse* F *buscando la intersección de* L′IL *con la circunferencia de centro* P *y radio* PD.*)*

1.347. Hallar el foco y la directriz de una parábola conociendo la tangente (T) en el vértice y las tangentes (T_1) y (T_2).

1.° *Por los puntos* I_1 *e* I_2 *de intersección de* (T_1) *y* (T_2) *con* (T), *trazar perpendiculares a* T_1 *y* T_2. *Su intersección da el foco* F.

2.° *Deducir la directriz de* T *mediante una homotecia de centro* F *y de razón* 2.

1.348. Hallar la directriz de una parábola conociendo el foco, un punto P y la normal PN en este punto.

1.° *Trazar la recta* NF *y el segmento* PS *perpendicular a* NF.

2.° *Llevar el segmento* FD = SN *pero en sentido contrario.*

3.° *Por* D *trazar la perpendicular a* FN, *es la directriz.*

1.349. Hallar el lugar geométrico del foco de las parábolas que pasan por un punto dado P y admiten una recta dada (R) como tangente en el vértice.

Si PT *es la tangente en* P *a una de las parábolas,* PT *cortará a* (R) *en cierto punto* I *que es la proyección ortogonal de* F *sobre* PT.

Por consiguiente, cuando la tangente PT *gira alrededor del punto fijo* P, *el punto* I *describe la recta fija* (R) *y* F *se halla sobre la parábola de foco* P *y cuya tangente en el vértice es* (R).

1.350. Se consideran todas las parábolas cuyos ejes son paralelos a una dirección dada y que son tangentes a una recta dada (R) en uno de sus puntos P. Hallar el lugar geométrico del foco F y del vértice V de dichas parábolas.

Como la tangente (R) *es bisectriz del ángulo formado por el radio vector y la semirrecta trazada por* P *paralelamente al eje en la parte exterior de la parábola, el lugar geométrico del foco* F *es la recta trazada por* P *simétricamente a la dirección del eje, con relación a la recta* (R). *El lugar geométrico de* V *es una recta que pasa por* P *y es mediana de los triángulos cuyos lados son la recta* (R), *la perpendicular trazada por* P *a la dirección del eje y el segmento de paralela al eje interceptado por las dos rectas anteriores.*

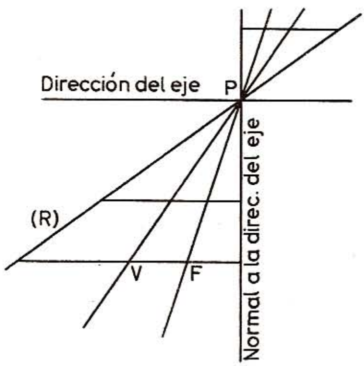


Fig. 625

VII. Ejercicios sobre la traslación

1.351. Dadas dos rectas (R) y (R′) no paralelas y un vector $\overrightarrow{AB}$, hallar sobre (R) un punto P y sobre (R′) un punto P′ tales que $\overrightarrow{PP'} \simeq \overrightarrow{AB}$.

1.° *Imprimamos a* (R) *la traslación* $\overrightarrow{AB}$, *obtenemos* (R″) *que corta a* (R′) *en el punto* P′.

2.° *Hallemos el homólogo de* P′ *y obtendremos* P. *El vector* $\overrightarrow{PP'}$ *es* $\simeq$ *a* $\overrightarrow{AB}$. *El problema siempre es posible ya que* (R) *y* (R′) *no son paralelas.*

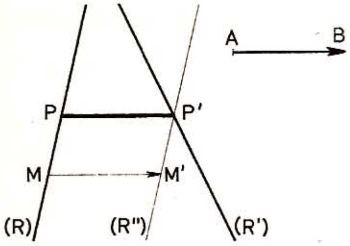


Fig. 626

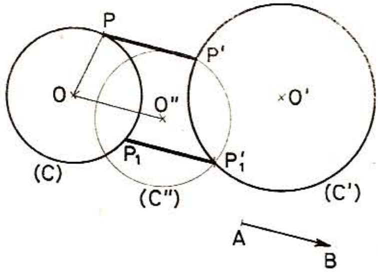


Fig. 627

1.352. Dadas dos circunferencias (C) y (C′) y un vector $\overrightarrow{AB}$, hallar sobre (C) un punto P y sobre (C′) un punto P′ tales que $\overrightarrow{PP'} \simeq \overrightarrow{AB}$.

1.º *Imprimamos a* (C) *la traslación* $\overrightarrow{AB}$, *obtenemos* (C″) *que corta a* (C′) *en los puntos* P′ *y* P'_1

2.º *Hallemos los homólogos de* P′ *y* P'_1. *Obtenemos* P *y* P_1.

Los vectores $\overrightarrow{PP'}$ *y* $\overrightarrow{P_1P'_1}$ *son las soluciones pedidas.*

El problema admite cero, una o dos soluciones según que (C″) *sea exterior tangente o secante con* (C).

1.353. Una circunferencia de radio R constante pero de centro O variable pasa por un punto fijo A y se trazan las tangentes CT y C′T′ paralelas a una dirección dada (D). Hallar el lugar geométrico del centro O y el lugar geométrico de los puntos de contacto C y C′.

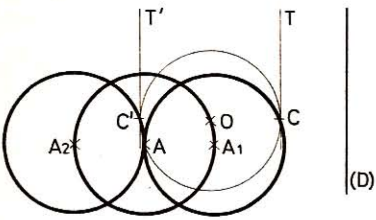


Fig. 628

1.º *El lugar geométrico de* O *es la circunferencia de centro* A *y de radio* R *ya que* A *es fijo y* AO = R.

Si imprimimos al punto O *una traslación* $\overrightarrow{OC}$ *perpendicular a* (D) *y de amplitud* (R) *vemos que el lugar geométrico de* C *es la circunferencia de centro* A_1 *y de radio* R *y el lugar geométrico de* C′ *es la circunferencia de centro* A_2 *y de radio* R.

1.354. Hallar el lugar geométrico del ortocentro O de un triángulo ABC cuyos vértices B y C son fijos mientras que el vértice A describe una circunferencia fija que pasa por B y C.

Sea M *el centro de la circunferencia descrita por* A. *Tracemos el diámetro* BMD *y las cuerdas* AD *y* CD. *Como* ∠BCD = 90º, DC *y* AO *son paralelos (perpendiculares a* BC).

Del mismo modo CO *y* DA *son paralelos (perpendiculares a* AB). *Luego el cuadrilátero* ADCO *es un paralelogramo y* AO = DC = Cte. *El lugar geométrico de* O *se deduce del lugar geométrico de* A *mediante la traslación* $\overrightarrow{DC}$. *Es, pues, la circunferencia de centro* M′ *y de igual radio que la descrita por* A.

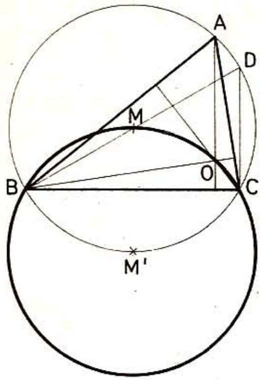


Fig. 629

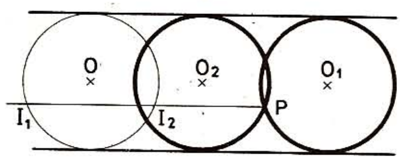


Fig. 630

1.355. Trazar una circunferencia tangente a dos rectas paralelas y que pase por un punto dado P.

1.º *Tracemos una de las infinitas circunferencias tangentes a dos rectas paralelas dadas. Sea* O *su centro.*

2.º *Por el punto* P *tracemos una paralela a las rectas dadas la cual cortará a la circunferencia trazada en los puntos* I_1 *e* I_2. *Imprimiendo a la circunferencia* O *las traslaciones* $\overrightarrow{I_1P}$ *e* $\overrightarrow{I_2P}$, *obtenemos las circunferencias pedidas. El problema admite cero, una o dos soluciones según que el punto* P *esté al exterior de la banda, en el borde de la banda o en el interior de la misma.*

VIII. Ejercicios sobre la rotación en el plano

1.356. Un punto P describe la semicircunferencia de diámetro AB = 2R. Al exterior del triángulo APB se construye el cuadrado BCDP. Hallar el lugar geométrico del vértice C.

Tracemos $\angle CBP = 90^\circ$ *y* $BC = BP$

Luego C *es el homólogo de* P *en la rotación* (B — 90º). *El lugar geométrico de* C *es, pues, la semicircunferencia de diámetro* BA'.

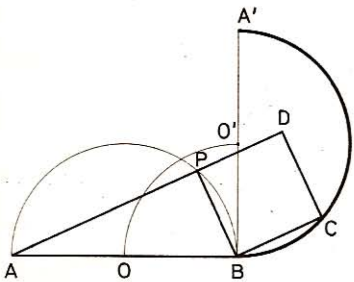


Fig. 631

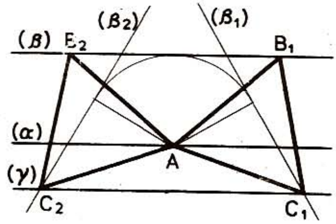


Fig. 632

1.357. Construir un triángulo equilátero ABC cuyos vértices se hallan sobre tres rectas paralelas dadas.

Sean (α), (β) *y* (γ) *las tres paralelas sobre las cuales se hallan respectivamente los vértices* A, B *y* C.

En un triángulo equilátero, C *es el homólogo de* B *en la rotación* (A, 60°).

Tomemos, pues, un punto A *sobre* (α). *La rotación* (A, $\pm$60°) *transforma* (β) *en* (β_2) *y* (β_1) *las cuales cortan a* (γ) *en* C_2 *y* C_1 *respectivamente.*

Conociendo dos vértices del triángulo equilátero buscado es fácil hallar el tercero. Hay dos soluciones A, B_1, C_1 *y* A, B_2, C_2.

Nota.—*Para hallar* B_1 *y* B_2 *una vez conocidos* C_1 *y* C_2 *se podría también transformar* (α) *mediante la rotación* ($C_1 \pm 60$) *o* ($C_2 \pm 60$). *Se llega a las mismas soluciones.*

1.358. Construir un triángulo equilátero cuyos vértices estén sobre tres circunferencias concéntricas.

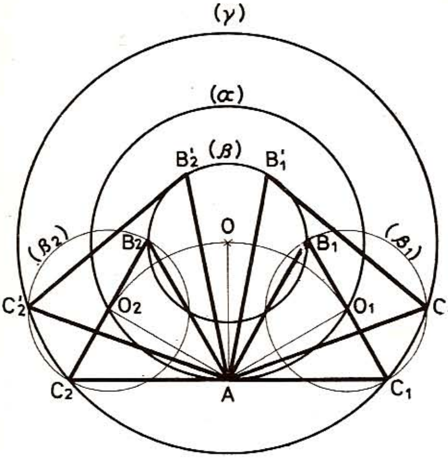


Fig. 633

Sea O *el centro de las tres circunferencias concéntricas* (α), (β) *y* (γ) *sobre las cuales se hallan respectivamente los vértices* A, B *y* C *del triángulo equilátero buscado.*

En un triángulo equilátero, C *es el homólogo de* B *en la rotación* (A, 60°).

Tomemos, pues, un punto A *cualquiera de* (α).

La rotación (A, $\pm$60°) *transforma* (β) *en* (β_1) *y* (β_2) *las cuales cortan a* (γ) *en* C_1 *y* C'_1, C_2 *y* C'_2 *lo que da cuatro soluciones* AC_1B_1, $AC'_1B'_1$, AC_2B_2 *y* $AC'_2B'_2$. *El problema sólo es posible mientras* $(R_\gamma - R_\beta) \leqq R_\alpha \leqq R_\gamma + R_\beta$.

1.359. Dados una circunferencia (C) de centro O y dos puntos fijos A y B en su plano, hallar dos puntos P y P′ de (C) tales que $\angle POP' = 90°$ y que las rectas AP y BP′ sean paralelas (utilizar la rotación de centro O que transforma P en P′).

Si la recta AP *es paralela a* BP′, *la rotación* (O, 90°) *transforma* AP *en* A′P′ *perpendicular a* BP′.

El punto P′ *se halla, pues, en la intersección de* (C) *con la semicircunferencia de diámetro* BN.

El problema admite, pues, cero, una, o dos soluciones según el caso, de donde resulta la construcción siguiente:

1.° *Efectuamos la rotación* (O, 90°) *de* A *hacia* B. *Obtenemos* A′.

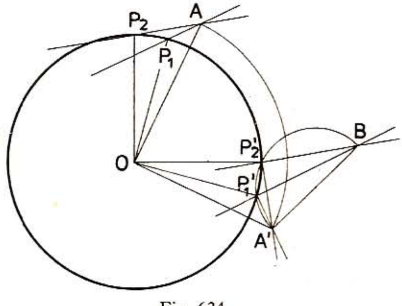


Fig. 634

2.° *Trazamos la semicircunferencia de diámetro* A'B *la cual corta a* (C) *en los puntos* P'_1 *y* P'_2.

3.° *Efectuamos una rotación* (O, 90°) *de sentido contrario a la del* 1.°. *Obtenemos así los puntos* P_1 *y* P_2.

4.° *Trazamos* AP_1, AP_2, BP'_1 *y* BP'_2 *y los radios* OP_1, OP_2, OP'_1 *y* OP'_2.

1.359 bis. Lugar geométrico de las rotaciones que transforman una en otra, dos rectas dadas (R) y (R').

1.^er caso.—(R) *y* (R') *son secantes. El lugar geométrico de los centros de rotación está constituido por las bisectrices* IB *e* IB' *de los ángulos formados por dichas rectas, ya que los puntos de dichas bisectrices equidistan de* (R) *y* (R').

2.° caso.—(R) *y* (R') *son paralelas. El punto de intersección* I *está relegado al infinito. Una de las bisectrices se ha transformado en la paralela* (R'') *equidistante de* (R) *y* (R'); *la otra bisectriz queda relegada al infinito en la dirección perpendicular a* (R'').

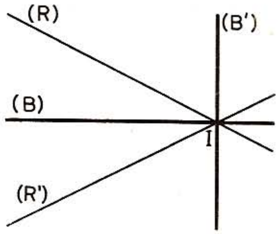


Fig. 635

IX. Ejercicios sobre la rotación alrededor de un eje

1.360. Dados dos puntos P y P' hallar un eje (E) tal que por rotación alrededor de (E) pueda pasarse de P a P'.

Sea π *el plano mediatriz del segmento* PP'. *Cualquier recta* (R) *de* π *orientada responde a la pregunta.*

1.361. Dados dos planos P y P' hallar un eje (E) tal que por rotación alrededor de (E) pueda pasarse de P a P'.

1.^er caso.—P *y* P' *son secantes. Si* π *y* π *son los planos bisectores de los diedros formados por* P *y* P', *cualquier recta de* π *o* π' *paralela a la arista de dichos diedros, una vez orientada responde a la pregunta.*

2.° caso.—P *y* P' *son paralelos. La intersección de dichos planos queda relegada al infinito y los planos bisectores se confunden con el plano* π *equidistante de* P *y* P'. *Cualquier recta de* π, *orientada, responde a la pregunta.*

1.362. Dados en el espacio los vectores AB y $\overrightarrow{A'B'}$ de igual módulo pero no equipolentes, mostrar que se puede pasar de $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{A'B'}$ mediante una rotación.

Por la recta AA' *que pasa por el origen de los vectores pasa un plano* π *con el cual* $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{A'B'}$ *forman ángulos iguales* (γ).

Descompongamos $\overrightarrow{AB}$ *y* $\overrightarrow{A'B'}$ *en* $\overrightarrow{AC}$ *y* $\overrightarrow{A'C'}$ *situados sobre* π *y en* $\overrightarrow{AD}$ *y* $\overrightarrow{A'D'}$ *normales a* π.

$\overrightarrow{AC}$ *y* $\overrightarrow{A'C'}$ *tienen igual longitud* $\overrightarrow{AB}\cos\gamma = \overrightarrow{A'B'}\cos\gamma$.

$\overrightarrow{AD}$ *y* $\overrightarrow{A'D'}$ *tienen también igual longitud* AB $\operatorname{sen}\gamma = \overrightarrow{A'B'}\operatorname{sen}\gamma$.

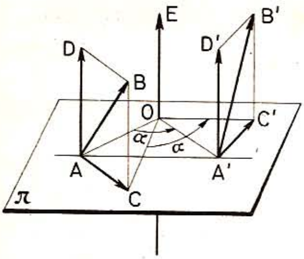


Fig. 636

En el plano π existe, pues, un centro O *de rotación que transforma* $\overrightarrow{AC}$ *en* $\overrightarrow{A'C'}$. *Por* O *pasa un eje* (E) *normal a π que transforma* $\overrightarrow{AD}$ *en* $\overrightarrow{A'D'}$ *mediante una rotación de igual ángulo que la anterior. Luego esta rotación alrededor del eje* (E) *permite pasar de* $\overrightarrow{AB}$ *a* $\overrightarrow{A'B'}$.

1.363. Dadas dos rectas en el espacio (R) y (R′) se señala un punto P sobre (R) y un punto P′ sobre (R′). Hallar el eje de rotación que transforma (R) en (R′) siendo P′ el homólogo de P.

Tomemos sobre (R) *y* (R′) *los vectores* $\overrightarrow{PV}$ *y* $\overrightarrow{P'V'}$ *de igual módulo. El ejercicio anterior da la respuesta.*

1.364. Dadas en el espacio dos circunferencias (C) y (C′) de igual radio y de distinto centro O y O′ demostrar que existen dos rotaciones que permiten pasar de (C) a (C′).

1.er caso.—*Los planos de* (C) *y* (C′) *son secantes. Según el ejercicio n.º* **1.361** *los ejes buscados se hallan en los planos bisectores de los diedros formados por los planos de* C *y* C′ *y según el ejercicio* **1.360,** *los ejes que permiten pasar de* O *a* O′ *se hallan en el plano π mediatriz de* OO′. *Los ejes buscados se hallan, pues, en las intersecciones de π con cada uno de los dos bisectores antedichos.*

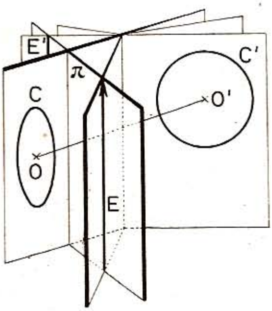


Fig. 637

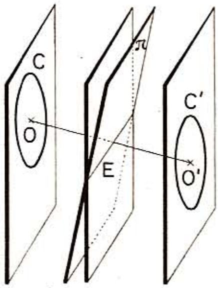


Fig. 638

2.º caso.—*Los planos de* (C) *y* (C′) *son paralelos. Según el ejercicio* **1.361** *el eje buscado se halla en la intersección de π con el plano equidistante de los planos de* (C) *y* (C′). *Hay una sola solución.*

X. Ejercicios sobre el semigiro

1.365. Dadas dos rectas (R_1) y (R_2) en el espacio, demostrar que existen dos semigiros que permiten pasar de una a otra.

En efecto, hemos visto (ejercicio **1.363**) *que existe una rotación que permite* *pasar de una a otra. Por otra parte sabemos* (GEOM. **1.044**) *que cualquier rotación en el espacio puede considerarse de una infinidad de maneras como el producto de dos semigiros cuyos ejes son normales al eje de rotación en un punto común.*

1.366. Se consideran dos semigiros cuyos ejes (E_1) y (E_2) no son coplanarios. Se designan por O_1 y O_2 los pies respectivos sobre (E_1) y (E_2) de la perpendicular común. Por O_1 se traza la recta (R) paralela a (E_2).

1.º ¿Cuál es el producto de los semigiros cuyos ejes son (E_1) y (R)?

2.º ¿Cuál es el producto de los semigiros cuyos ejes son (R) y (E_2)? (Aplicaciones al atornillamiento.)

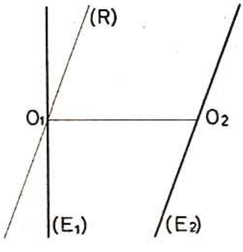


Fig. 639

● 1.º *Como* (E_1) *y* (R) *son secantes, el producto de estos semigiros* (GEOM. **1.044**) *es una rotación cuyo eje es* O_1O_2 *y el ángulo* $2\,(\widehat{E_1, R})$.

● 2.º *Como* (R) *y* (E_2) *son paralelos, el producto de estos semigiros* (GEOM. **1.043**) *es una traslación definida por el vector* $\vec{V} = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}$.

Nota.—*De los resultados anteriores puede deducirse que el producto de dos semigiros cuyos ejes* (E_1) *y* (E_2) *no son coplanarios es también el producto de una rotación y de una traslación definida por un vector paralelo al eje de la rotación.*

En efecto, sea O_1O_2 *la perpendicular común. Por* O_1 *tracemos* (R) *paralela a* (E_2), (R) *y* (E_1) *determinan un plano* P. *Sea* M *un punto cualquiera de dicho plano.*

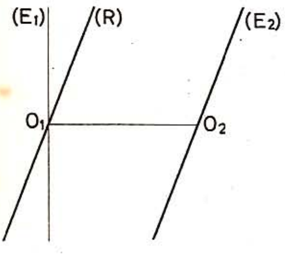


Fig. 640

Los semigiros (E_1) *y* (E_2) *hacen pasar sucesivamente el punto de* M *a* M_1 *y luego de* M_1 *a* M_2.

Si intercalamos entre el paso de M_1 *a* M_2 *dos semigiros de eje* (R), *el primero hace pasar el punto de* M_1 *a* N *y el segundo de* N *a* M_1 *de manera que en total cuatro semigiros sucesivos hacen pasar el punto de* M_1 *a* M_2 *a saber:* M *y* (E_1) *da* M_1 *y* (R) *da* N *y* (R) *da* M_1 *y* (E_2) *da* M_2.

Ahora bien, los semigiros (E_1) *y* (R) *equivalen a la rotación de eje* O_1O_2 *y de ángulo* $2\,(\widehat{E_1, R}) = 2\,(\widehat{E_1, E_2})$.

Y los semigiros (R) *y* (E_2) *equivalen a la traslación* $\vec{V} = 2\,\overrightarrow{O_1O_2}$.

El producto de estas dos últimas transformaciones (rotación y traslación) se llama desplazamiento helicoidal o atornillamiento. Y, recíprocamente, dado un atornillamiento de eje (E) *de ángulo* α *y de traslación* $\vec{V}$, *si elegimos un eje* (E_1) *perpendicular a* (E) *en un punto* O_1, *si llamamos* (R) *al eje deducido de* (E_1) *mediante la rotación* $\alpha/2$ *de eje* (E) *y luego llamamos* (E_2) *al eje deducido de* (R) *mediante la traslación* $\vec{V}/2$, *el producto de los semigiros* (E_1) *y* (E_2) *es equivalente al atornillamiento dado.*

XI. Ejercicios sobre la inversión

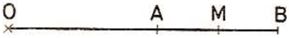


Fig. 641

1.367. Dados tres puntos A, B, M alineados con O y tales que M es el punto medio de $\overline{AB}$, una inversión (O, K) los transforma en A′B′M′. Demostrar que O y M′ son conjugados armónicos con relación a A′ y B′.

En efecto $\overline{OA} + \overline{OB} = 2\overline{OM}$ *y* $\overline{OA} = \dfrac{K}{\overline{OA'}}$; $\quad \overline{OB} = \dfrac{K}{\overline{OB'}}$; $\quad \overline{OM} = \dfrac{K}{\overline{OM'}}$

Luego $\dfrac{K}{\overline{OA'}} + \dfrac{K}{\overline{OB'}} = \dfrac{2K}{\overline{OM'}}$ *es decir* $\dfrac{1}{\overline{OA'}} + \dfrac{1}{\overline{OB'}} = \dfrac{2}{\overline{OM'}}$

relación que demuestra que O *y* M′ *son conjugados armónicos de* A′ y B′.

1.368. Demostrar que si cuatro puntos A, B, C, D forman una división armónica, una inversión de centro O alineado con ellos los transforma en cuatro puntos A′B′C′D′ formando también una división armónica.

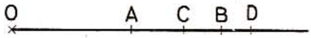


Fig. 642

En efecto $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad \begin{matrix}\overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC} \\ \overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\overline{DA} = \overline{OA} - \overline{OD} \\ \overline{DB} = \overline{OB} - \overline{OD}\end{matrix}$

$$\overline{OA} = \frac{K}{\overline{OA'}} \qquad \overline{OB} = \frac{K}{\overline{OB'}} \qquad \overline{OC} = \frac{K}{\overline{OC'}} \qquad \overline{OD} = \frac{K}{\overline{OD'}}$$

Luego $$\frac{\overline{OA} - \overline{OC}}{\overline{OB} - \overline{OC}} = -\frac{\overline{OA} - \overline{OD}}{\overline{OB} - \overline{OD}}$$

y $$\frac{\dfrac{K}{\overline{OA'}} - \dfrac{K}{\overline{OC'}}}{\dfrac{K}{\overline{OB'}} - \dfrac{K}{\overline{OC'}}} = -\frac{\dfrac{K}{\overline{OA'}} - \dfrac{K}{\overline{OD'}}}{\dfrac{K}{\overline{OB'}} - \dfrac{K}{\overline{OD'}}}; \qquad \frac{\dfrac{\overline{OC'} - \overline{OA'}}{\overline{OA'} \cdot \overline{OC'}}}{\dfrac{\overline{OC'} - \overline{OB'}}{\overline{OB'} \cdot \overline{OC'}}} = -\frac{\dfrac{\overline{OD'} - \overline{OA'}}{\overline{OA'} \cdot \overline{OD'}}}{\dfrac{\overline{OD'} - \overline{OB'}}{\overline{OB'} \cdot \overline{OD'}}}$$

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C}} = -\frac{\overline{A'D'}}{\overline{B'D'}} \quad \textit{y, finalmente,} \quad \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = -\frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}}$$

1.369. Se quiere transformar un triángulo escaleno ABC en un triángulo isósceles (A′B′ = A′C′) mediante una inversión cuyo centro O esté en el plano ABC. ¿Dónde hay que tomar O?

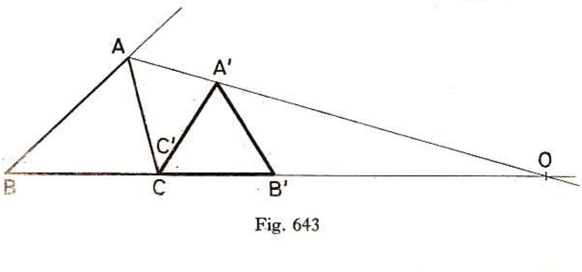


Fig. 643

Debemos tener

A′B′ = A′C′

$$\overline{A'B'} = \frac{\overline{AB} \cdot K}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}$$

$$\overline{A'C'} = \frac{\overline{AC} \cdot K}{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}$$

Luego debemos tener $\dfrac{\overline{AB} \cdot K}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} = \dfrac{\overline{AC} \cdot K}{\overline{OA} \cdot \overline{OC}}$ *o sea* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{OC}}$

esta relación indica que O *es el punto de intersección de la bisectriz exterior de* $\angle A$ *con el lado* BC. *Tomando por ejemplo por potencia de inversión* $\overline{OC}^2$, C′ *coincide con* C, *se hallan* A′ *y* B′ *conjugados de* A *y* B *con relación a la circunferencia de inversión (centro* O, *radio* OC).

1.370. Dado un punto O sobre una circunferencia (C) de radio (R), ¿cuál debe ser la potencia de la inversión de centro O que transforma (C): 1.º en un diámetro de (C)? 2.º en una tangente de (C)?

En el 1.er caso: $K = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = 2\,R \cdot R \quad = 2\,R^2$

En el 2.º caso: $K = \overline{OP} \cdot \overline{OP} \ = 2\,R \cdot 2\,R = 4\,R^2$

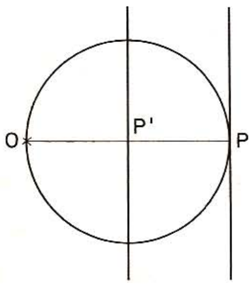


Fig. 644

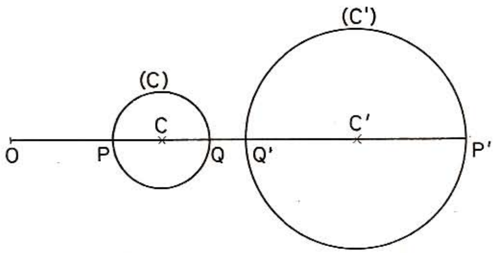


Fig. 645

1.371. Se transforma una circunferencia de centro C y radio R mediante una inversión (O, K). Calcular el radio de la circunferencia inversa (C′) sabiendo que $OC = d \neq R$.

Si P *y* Q *son los puntos de intersección de la recta* OC *con* (C) *y* P′ *y* Q′ *son los inversos, tenemos* $2\,R' = \overline{OP'} - \overline{OQ'} = \dfrac{K}{\overline{OP}} - \dfrac{K}{\overline{OQ}}$

$$2R' = K\left(\frac{\overline{OQ} - \overline{OP}}{\overline{OQ} \cdot \overline{OP}}\right) = K\,\frac{2R}{(d + R)\,(d - R)}$$

Luego $$R' = \frac{KR}{d^2 - R^2}$$

1.372. En el problema anterior, si (C_1) designa una circunferencia de centro C y de radio $R_1 \neq R \neq d$ y (C'_1) es la inversa de (C_1) en la misma inversión, determinar d para que las circunferencias (C') y (C'_1) sean iguales.

El problema anterior nos da: $$R'_1 = \frac{KR_1}{d^2 - R_1^2}$$

Para que $R_1 = R'$ *debe ser* $$\frac{KR_1}{d^2 - R_1^2} = \frac{KR}{d^2 - R^2}$$

$$R_1 d^2 - R_1 R^2 = R d^2 - R R_1^2 \qquad d^2 (R_1 - R) = R R_1 (R - R_1)$$

$$d^2 = \frac{RR_1 (R - R_1)}{(R_1 - R)} = - RR_1 \quad \textit{resultado imposible.}$$

1.373. ¿Se puede transformar por inversión, tres circunferencias dadas en tres circunferencias cuyos centros estén alineados?

1.er caso.—*Los tres centros* C_1, C_2 *y* C_3 *no están alineados. En este caso* C_1, C_2 *y* C_3 *están sobre una circunferencia* C_4 *que corta a* (C_1), (C_2) *y* (C_3). *Tomando el centro* O *de inversión en un punto cualquiera de* (C_4) *con tal que no sea de intersección con alguna de las tres circunferencias dadas, la figura inversa de* (C_4) *será una línea recta y los inversos* C'_1, C'_2 *y* C'_3 *de* C_1, C_2 *y* C_3 *estarán sobre esta recta y* (C_1), (C_2) *y* (C_3) *se transformarán en circunferencias* (C'_1), (C'_2) *y* (C_3) *de centros* O'_1, O'_2 *y* O'_3.

2.º caso.—*Los tres centros* C_1, C_2 *y* C_3 *están sobre una recta* (R). *Tomando* O *en un punto cualquiera de* (R) *que no sea de intersección con alguna de las circunferencias dadas, los inversos* C'_1, C'_2 *y* C'_3 *de* C_1, C_2 *y* C_3 *estarán sobre* (R) *y las circunferencias* (C_1), (C_2) *y* (C_3) *se transformarán en circunferencias* (C'_1), (C'_2) *y* (C'_3) *de centros* O_1, O_2 *y* O_3.

1.374. Dados dos puntos A y B exteriores a una circunferencia (C), trazar mediante una inversión conveniente una circunferencia (X) que pase por A y B y sea tangente a (C).

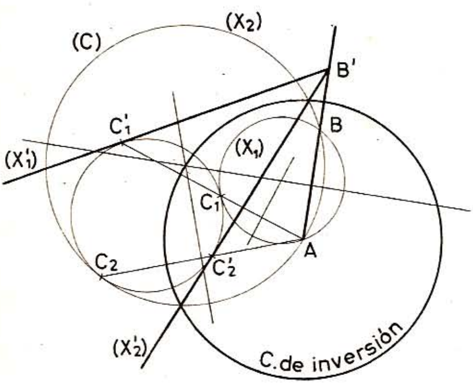


Fig. 646

Tomemos como centro de inversión el punto A *y como potencia la potencia de* A *con relación a* (C). *La circunferencia* (C) *se transforma en sí misma. La recta* (AB) *en sí misma siendo* B' *el inverso de* B.

Como la circunferencia (X) *buscada debe pasar por* A *su inversa será una recta* (X') *y como* (X) *debe pasar por* B *y ser tangente a* (C) *su inversa* (X') *pasará por* B' *y será tangente a* (C'), *es decir, a* (C), *de lo cual se deduce la construcción siguiente:*

1.º *Se halla* B' *inverso de* B *(conjugado de* B *con relación a la* (C) *de inversión).*

2.° *Trazar las tangentes de B′ a (C). (Puntos de contacto C'_1 y C'_2.)*

3.° *Hallar los inversos C_1 y C_2 de C'_1 y C'_2 (intersecciones de (C) con C'_1 y C'_2.)*

4.° *Hallar los centros de (X_1) y (X_2) (intersecciones de la mediatriz de AB con las de AC_1 y AC_2).*

5.° *Trazar las circunferencias (X_1) y (X_2).*

1.375. Transformar mediante la inversión (O, r^2) la figura formada por un triángulo ABC y su circunferencia inscrita de radio r y centro O.

La circunferencia inscrita se transforma en sí misma (circunferencia de inversión).

Los lados se transforman en arcos de circunferencia tangentes a dichos lados y limitados por las bisectrices.

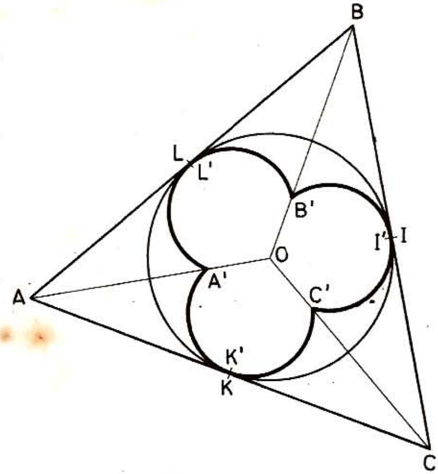


Fig. 647

1.376. Transformar mediante la inversión (O, $-a^2$) la figura formada por el cuadrado OABC de lado a y los dos arcos AC cuyos centros respectivamente son O y B.

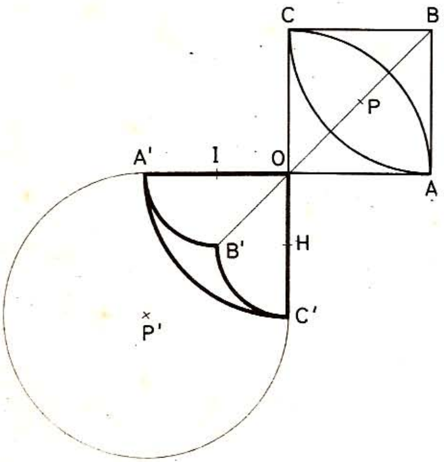


Fig. 648

1.° *Los lados OA y OC se transformarán en OA′ y OC′.*

2.° *El arco AC de centro O, se transformará en $\widehat{A'C'}$ de centro O.*

3.° *El vértice B se transformará en B′.*

$$\overline{OB'} = \frac{-a^2}{a\sqrt{2}} = \frac{-a\sqrt{2}}{2}$$

4.° *El lado AB se transforma en $\widehat{A'B'}$ y el lado CB en $\widehat{C'B'}$.*

Los centros de estos arcos con I, H.

Las circunferencias soportes de los arcos $\widehat{A'B'}$ y $\widehat{B'C'}$ pasan por O.

5.° *El arco AC de centro B se transforma en el arco A′C′ cuyo centro P′ es el inverso del pie P de la polar de O con relación al arco AC de centro O.*

Índice

ÍNDICE

Proporcionalidad

Problemas sobre las áreas

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Poliedros

Cuerpos redondos

APÉNDICE