

15
G. M. BRUÑO

ELEMENTOS
DE
GEOMETRÍA



EDITORIAL BOURET

PARÍS

ELEMENTOS
DE
GEOMETRÍA

*Para la Enseñanza Secundaria y Escuelas
preparatorias*

POR

G. M. BRUÑO



EDITORIAL BOURET
23, RUE VISCONTI - PARÍS

Propiedad del Editor

Printed in Belgium

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

§ I. — Definiciones preliminares.

1. La observación de los cuerpos materiales nos proporciona las ideas de **espacio**, de **volumen**, de **superficie**, de **línea** y de **punto**.

Un cuerpo material ocupa una porción del espacio absoluto. Esta porción es el volumen del cuerpo, y está limitada por una superficie. Una porción de superficie está limitada por una línea.

Una porción determinada de línea está limitada en cada una de sus extremidades por un punto.

2. Una vez adquiridas estas nociones, se puede prescindir de su origen experimental y concebir un volumen, una superficie, una línea, un punto, independiente de todo cuerpo material.

La Geometría estudia las propiedades de estos objetos abstractos, que se llaman **figuras geométricas**.

3. **Cuerpo ó sólido geométrico.** — *Cuerpo geométrico es una porción cualquiera del espacio, considerada con respecto de su forma y de su extensión, y prescindiendo de la materia que la constituye.*

Una porción cualquiera de un cuerpo geométrico es también un cuerpo geométrico. Llámase **volumen** la extensión de un cuerpo

4. Superficie. — *Todo cuerpo geométrico está limitado por una superficie que determina su forma exterior y lo separa del espacio inmediato.*

Una porción cualquiera de una superficie es también una superficie.

Una superficie puede ser considerada en sí misma, prescindiendo del cuerpo que limita.

Una superficie no tiene volumen, porque no ocupa ninguna porción del espacio; pero posee una extensión propia, llamada *extensión superficial*. La extensión de una superficie limitada se llama *área* de esta superficie.

5. Línea. — *Toda porción de una superficie está limitada por una línea.* Una porción cualquiera de una línea es también una línea.

Se puede trazar en una superficie una infinidad de líneas, y por una línea, hacer pasar una infinidad de superficies.

Se puede concebir una línea, prescindiendo de toda superficie.

Una línea no tiene volumen, porque no ocupa ninguna porción del espacio; no tiene área, porque no llena ninguna porción de superficie, pero posee una extensión propia llamado *extensión lineal*.

La extensión de una línea limitada se llama la *longitud* de esta línea.

6. Punto. — *Toda porción de línea se termina, en cada uno de sus extremos, por un punto.*

Si dos líneas se cortan, cada una de sus intersecciones es un punto.

Se puede tomar en una línea una infinidad de puntos, y hacer pasar por un punto, una infinidad de líneas.

Se puede concebir un punto, prescindiendo de toda línea.

Un punto no tiene volumen, ni área, ni longitud; no posee ninguna extensión.

7. Invariabilidad de las figuras. — *Una figura geométrica determinada no se concibe sin una forma, una magnitud y una posición.*

Se admite que una figura geométrica puede permanecer siempre idéntica á sí misma, sin cambiar su

forma ni su magnitud. Una tal figura se llama *invariable*.

8. Desalojamiento de las figuras. — Se admite que una figura invariable puede ocupar sucesivamente en el espacio una infinidad de posiciones diferentes.

Se dice que una figura *invariable* es *inmóvil* cuando conserva una misma posición en el espacio; y que *está en movimiento* cuando ocupa sucesivamente varias posiciones diferentes.

Por ser, en todas sus posiciones, la figura idéntica á sí misma :

1º Una figura invariable es independiente de su posición en el espacio.

2º Dos figuras invariables que coinciden en una posición dada pueden coincidir en cualquiera otra posición; es decir, guardan la propiedad de poder coincidir cada vez que se las sobrepone.

Se dice que estas figuras son *iguales*. Luego, dos figuras son *iguales* cuando pueden coincidir por superposición.

9. Generación de las figuras. — La *línea* puede considerarse engendrada por un *punto* que se mueve en el espacio; la *superficie*, por una *línea* que cambia de lugar, y el *volumen* por una *superficie* que cambia de lugar en el espacio.

10. Definiciones. — **Axioma** es una verdad evidente por sí misma.

EJEMPLOS. — *Dos magnitudes iguales á una tercera son iguales entre sí.*

Si con dos cantidades iguales se ejecuta una misma operación, los resultados son iguales.

11. **Postulado** es una propiedad que se admite en las figuras geométricas, porque no está en contradicción con las nociones intuitivas, pero sin que se pueda demostrar.

V. gr. : la invariabilidad de las figuras geométricas.

12. **Teorema** es una verdad que se hace evidente por medio de la demostración.

EJEMPLO. — *La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.*

13. Lema es una proposición destinada á facilitar la demostración de un teorema.

14. Problema es una cuestión que debe resolverse.

15. *Solución* de un problema es la indicación del método que debe emplearse para resolverlo.

16. Se llama *proposición* el enunciado de un axioma, de un teorema ó de un problema.

17. *Hipótesis* es una suposición; *corolario* es una consecuencia, y *escolio* es una observación.

18. El enunciado de una proposición comprende dos partes, á saber: la *hipótesis* ó *suposición*, y la *consecuencia* ó *conclusión*.

La *hipótesis* es lo que se toma como punto de partida, ó lo que se supone como verdadero.

La *conclusión* es la consecuencia que se deduce de la *hipótesis*.

Cuando la consecuencia no es evidente se deduce de la hipótesis por medio de un raciocinio llamado *demostración*.

19. Dos proposiciones son *recíprocas* una de otra, cuando la segunda tiene por hipótesis la conclusión de la primera, y por conclusión la hipótesis de la primera.

EJEMPLO. — *Al mayor ángulo de un triángulo está opuesto el mayor lado. Recíprocamente, al mayor lado está opuesto el mayor ángulo.*

La recíproca de una proposición verdadera puede ser falsa. Así *todos los ángulos rectos son iguales*, pero no todos los ángulos iguales son rectos.

§ II. — La línea recta.

20. **Noción.** — *La idea de la línea recta es una noción intuitiva, adquirida por la consideración de los objetos materiales.*

Un hilo bien tendido nos presenta la imagen de la línea recta.

Según esta idea, la recta está caracterizada por las propiedades siguientes, que se admite sin demostración.

21. Postulados de la recta. — 1° *Dos puntos determinan una recta*, es decir que por dos puntos dados puede pasar una recta y sólo una.

2° *La recta es una línea indefinida*, es decir que se prolonga indefinida en dos sentidos opuestos.

22. Propiedades de la recta. — 1° *Se puede tomar en una recta una infinidad de puntos, y por un punto pueden pasar una infinidad de rectas.*

2° *Dos rectas que tienen dos puntos comunes se confunden. Dos rectas distintas sólo pueden tener un punto común.*

3° *Dos rectas pueden coincidir de una infinidad de modos.*

23 Semirecta. — *Llámase semirecta la parte de una recta que principia en un punto de esta recta y se extiende indefinida de un solo lado de este punto.*

El origen de la semirecta es el punto donde comienza. El sentido de la semirecta es el del movimiento de un punto móvil que la recorre, alejándose del origen.

Dos semirectas son *opuestas* cuando una es el prolongamiento de la otra.

24. Segmento rectilíneo. — *Llámase segmento rectilíneo una porción de recta comprendida entre dos puntos y terminada en estos puntos, que son*  *los extremos del segmento.*

El segmento rectilíneo que une el punto A al punto B se representa por la notación AB. Cuando no hay que temer una equivocación, se dice á menudo la recta AB, en vez de decir el segmento rectilíneo AB.

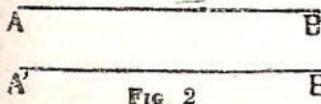


FIG 2

25. Igualdad. — *Dos segmentos rectilíneos son iguales cuando pueden coincidir.*

Dos segmentos iguales siem-

pre se pueden sobreponer de dos modos diferentes estando los puntos A y B en A'y B', ó en B' y A'.

26. Adición. — *Sumar dos segmentos rectilíneos, es juntar los en una misma recta, de una y otra parte de un extremo común. La suma es el segmento que une los extremos no comunes.*

27. Longitud. — *La longitud de un segmento rectilíneo es el número que expresa la razón de este segmento á otro escogido como unidad.*

28. Distancia entre dos puntos. — *La distancia entre dos puntos es la longitud del segmento rectilíneo que une estos dos puntos.*

29. Línea poligonal. — *Línea quebrada ó poligonal es la línea formada por varios segmentos de recta diferentes y contiguos.*

30. Línea curva. — *Línea curva es la que no es recta en ninguna de sus partes.*

Suele considerarse la línea curva como una línea quebrada formada de elementos infinitamente pequeños.

§ III. — La superficie plana.

31. Noción. — *La idea de la superficie plana es una noción intuitiva, sugerida por la observación. La superficie de un cristal bien terso nos da la idea del plano.*

Según esta noción experimental, se admite sin demostración las propiedades siguientes.

32. Postulados de la superficie plana. — 1º *Un plano es una superficie indefinida, que contiene toda la recta determinada por dos de sus puntos.*

2º *Todo plano divide el espacio en dos regiones, situadas de una y otra parte del plano.*

3º *Toda recta situada en un plano divide esta superficie en dos regiones situadas de una y otra parte de la recta.*

33. Propiedades del plano. — 1° *Se puede trazar en un plano una infinidad de rectas, y por una recta pasan una infinidad de planos.*

2° *Tres puntos que no están en línea recta determinan un plano, es decir que por tres puntos que no están en una misma recta pasa un plano, y sólo uno.*

En efecto, los dos primeros puntos, A y B, determinan una recta. Por esta recta puede pasar un plano móvil, que, al girar al rededor de la recta AB, pasa una vez por el tercer punto, el punto C, y sólo una vez.

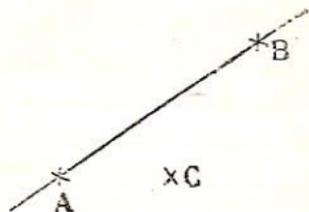


FIG. 3.

3° *Si dos planos se cortan, su intersección es una línea recta.*

Si dos planos tuvieran tres puntos comunes que no estuviesen en una misma recta, estos planos se confundieran.

34. Semiplano. — *Semiplano es la región de un plano situada de un lado de una recta de este plano.*

35. Superficie poliédrica. — *Superficie poliédrica ó quebrada es una superficie formada por varios planos diferentes.*

36. Superficie curva. — *Superficie curva es una superficie que no es plana en ninguna de sus partes.*

No obstante se considera la superficie curva como una superficie poliédrica formada de elementos planos infinitamente pequeños.

37. Línea convexa. — *Se llama línea convexa una línea plana que no puede ser cortada en más de dos puntos por una recta.*

38. Superficie convexa. — *Se llama superficie convexa una superficie que no puede ser cortada en más de dos puntos por una recta.*

§ IV. — Objeto y divisiones de los Elementos de Geometría.

39. — La Geometría es la ciencia que estudia las figuras con respecto de su forma, de su extensión y de sus posiciones relativas.

Se divide ordinariamente en dos partes: la Geometría plana y la Geometría en el espacio.

La presente obra se divide en ocho Libros: cuatro consagrados á la Geometría plana, tres á la Geometría en el espacio, y el último á las curvas usuales.

Esta división se ha adoptado para conformarse al uso habitual; no obstante, haremos observar que se podría, y tal vez con ciertas ventajas, estudiar varios teoremas del Libro V inmediatamente después de cada uno de los tres primeros Libros.

Además, en la demostración de algunos teoremas de la Geometría plana, se supone que ciertos planos giran al rededor de una recta, lo que es del dominio propio de la Geometría en el espacio; la división anterior debe considerarse, pues, como relativa y cómoda para el estudio, pero no como absoluta.

LIBRO I

LOS PUNTOS Y LAS RECTAS DE UN PLANO

CAPÍTULO PRIMERO

SISTEMA DE DOS RECTAS

§ I. — Ángulos.

I. — MEDIDA DE LOS ÁNGULOS

40. Definición. — *Ángulo es la figura formada por dos semirectas que parten de un mismo punto. Estas dos lí-*

neas se llaman lados del ángulo, y su intersección vértice.

Las dos rectas AB y AC forman el ángulo BAC ó el ángulo A.

La magnitud de un ángulo depende únicamente de la abertura de sus lados y no de la longitud de éstos.

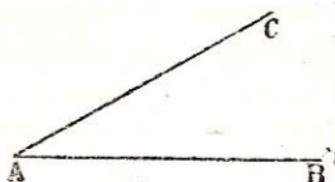


FIG. 4.

41. Igualdad. — Dos ángulos son iguales cuando pueden coincidir.

42. Ángulos adyacentes. — Se llaman ángulos adyacentes dos ángulos que tienen un mismo vértice, y que están situados de una y otra parte de un lado común.

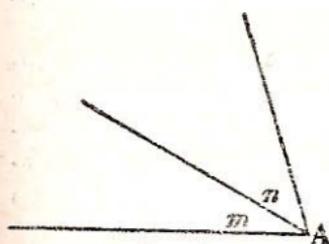


FIG. 5.

EJEMPLO: los ángulos m y n .

43. Adición de los ángulos. — Sumar dos ángulos, es darles la posición de dos ángulos adyacentes. La suma es el ángulo formado por los lados no comunes.

44. Generación de los ángulos. — Una semirecta puede girar en un plano, al rededor de su origen, en dos sentidos opuestos.

Si gira al rededor de su origen en un sentido constante, y pasa de la posición inicial OA á la posición final OB, engendra un ángulo AOB cuyo interior es la región barrida ó rozada por la semirecta móvil.

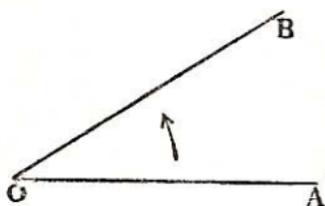


FIG. 6.

45. Ángulo de una vuelta. — El ángulo de una vuelta es el ángulo engendrado por una semirecta que gira en su plano, al rededor de su origen y en un sentido constante, hasta que su posición final coincida con su posición inicial.

Este ángulo es igual á la suma de todos los ángulos consecutivos que pueden formarse en su plano, al rededor de su vértice.

46. **Divisibilidad de los ángulos.** — Todo ángulo es divisible en un número cualquiera de partes iguales.

La *bisectriz* de un ángulo es la recta que divide este ángulo en dos partes iguales.

47. **Ángulo recto, grado, minuto, segundo.** — *Llámanse ángulo recto la cuarta parte de un ángulo de una vuelta.*

48. *Se llama ángulo agudo todo ángulo menor que un recto, y ángulo obtuso todo ángulo mayor que un recto.*

49. **Ángulo de un grado** es la 90^{a} parte del ángulo recto. El grado se divide en 60 *minutos*, y el minuto en 60 *segundos*. Un ángulo de 23 grados, 27 minutos, 25 segundos se escribe: $23^{\circ}27'25''$.

Se usa también otra división del ángulo recto en cien grados, llamados *centésimales*; uno de estos grados se divide en cien minutos, y cada minuto en cien segundos. Un ángulo de 23 grados, 27 minutos, en este sistema, se escribe $23\gamma,27$, indicándose los grados por la letra griega γ .

50. **Ángulos complementarios y suplementarios.** — *Dos ángulos son complementarios cuando su suma es igual á un ángulo recto, y suplementarios cuando su suma es igual á dos ángulos rectos.*

Se llama complemento de un ángulo lo que es preciso añadirle para formar un ángulo recto, y suplemento de un ángulo lo que es preciso añadirle para obtener dos rectos.

51. Dos ángulos iguales tienen complementos iguales y suplementos iguales.

Recíprocamente, dos ángulos que tienen complementos iguales ó suplementos iguales son iguales.

52. **Teorema.** — *Un ángulo formado por dos semirectas opuestas es igual á dos ángulos rectos.*

Sean las dos semirectas opuestas OA y OB; forman dos ángulos m y n cuya suma es 4 rectos. Basta demos-

trar que son iguales para demostrar que cada uno de ellos es igual á 2 rectos. Pero, si se hace girar el semiplano AmB al rededor de la recta AB , el ángulo m coincide con el ángulo n ; luego son iguales y cada uno vale 2 rectos.

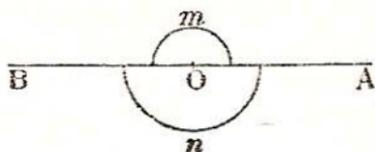


FIG. 7.

53. Recíproca. — Si un ángulo AOB es igual á dos rectos, sus lados son directamente opuestos.

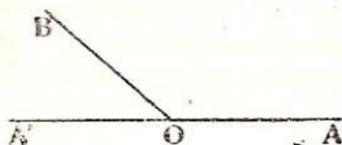


FIG. 8.

Sea el ángulo AOB . Si es igual á dos rectos, es igual al ángulo formado por el lado OA y la semirecta opuesta OA' (nº 52); pero entonces OA' y OB

coinciden, y los lados del ángulo AOB son directamente opuestos.

54. Corolarios. — 1º Para encontrar el suplemento de un ángulo dado, basta prolongar uno de sus lados más allá del vértice;

2º La suma de los ángulos consecutivos formados de un mismo lado de una recta es igual á

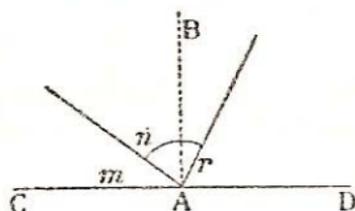


FIG. 9.

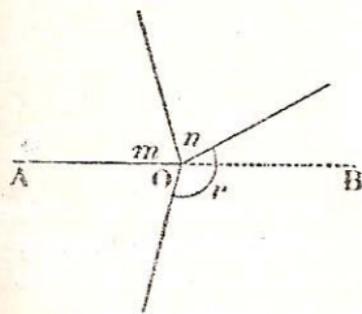


FIG. 10.

dos ángulos rectos; porque los ángulos m, n, r , tienen por suma el ángulo DAC cuyo valor es dos rectos.

3º La suma de todos los ángulos formados al rededor de un mismo punto, sobre un plano, es igual á 4 ángulos rectos; porque la suma de estos ángulos

es igual al ángulo de una vuelta.

2. — **ÁNGULOS ADYACENTES SUPLEMENTARIOS.**

55. Teorema. — *La condición necesaria y suficiente para que dos ángulos adyacentes sean suplementarios, es que sus lados exteriores sean opuestos.*

Condición necesaria. — Si dos ángulos adyacentes son suplementarios, sus lados exteriores son opuestos.

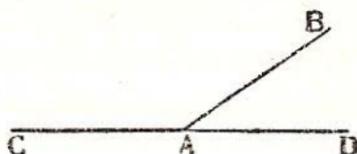


FIG. 11.

Sean CAB y BAD dos ángulos adyacentes suplementarios. La suma de estos ángulos es el ángulo CAD que vale dos rectos (n° 52). Luego, sus lados AC y AD son opuestos (n° 53).

Condición suficiente. — Si dos ángulos adyacentes tienen sus lados exteriores directamente opuestos, son suplementarios.

En efecto, sean los ángulos CAB y BAD. La suma de estos ángulos es el ángulo CAD, cuyos lados son directamente opuestos; luego, este ángulo es igual á dos rectos (n° 52) y los ángulos CAB y BAD son suplementarios (n° 50).

56. Escolio. — *Si varios ángulos consecutivos reunidos valen dos ángulos rectos, sus lados exteriores AC y AD estarán opuestos.*

57. Teorema. — *Si dos án-*

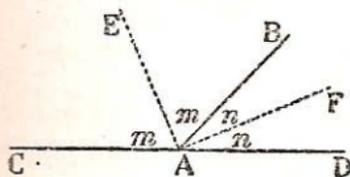


FIG. 13

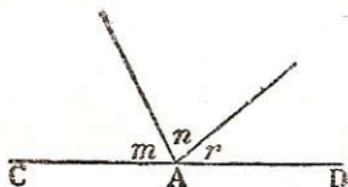


FIG. 12.

gulos adyacentes son suplementarios, sus bisectrices formarán un ángulo recto.

Sean BAC y BAD dos ángulos adyacentes suplementarios, y AE, AF las bisectrices de estos ángulos.

Así pues : $2m + 2n = 2$ rectos
y por consiguiente : $m + n = 1$ recto.

3. — ÁNGULOS OPUESTOS AL VÉRTICE.

58. Definición. — Se llama *ángulos opuestos al vértice* dos ángulos tales que los lados de uno son las prolongaciones de los lados del otro.

59. Teorema. — Dos ángulos opuestos al vértice son iguales.

Sean m y n dos ángulos opuestos al vértice; OA y OB siendo opuestas, el suplemento de m es s (nº 55); OC y OD siendo opuestas, el suplemento de n es igualmente el ángulo s ; luego los dos ángulos m y n son iguales por tener el mismo suplemento (nº 54).

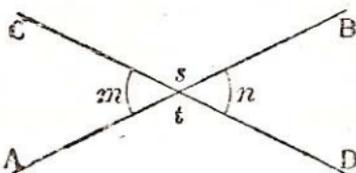


FIG. 14.

Del mismo modo los ángulos opuestos s y t son iguales, por tener cada uno por suplemento el ángulo n .

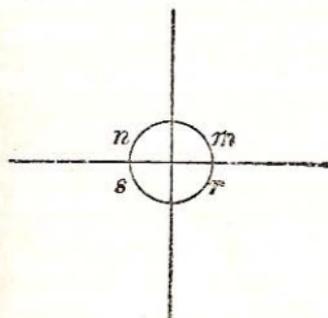


FIG. 15.

60. Corolarios. — 1º Si dos rectas forman un ángulo recto, forman 4 ángulos rectos. En efecto, si m es recto, s es recto también, como ángulo opuesto al vértice; y también los suplementos de estos ángulos son iguales;

2º Si dos rectas forman dos ángulos adyacentes iguales, se cortan en ángulo recto. En efecto, siendo iguales m y n , cada uno es recto, y también s y r .

§ II. — Rectas perpendiculares.

61. Definición. — Dos rectas son *perpendiculares* cuando

se cortan en ángulo recto. Para que dos rectas sean perpendiculares, basta:

- 1° Que formen un ángulo recto;
- 2° Que formen dos ángulos adyacentes iguales.

62. Teorema. — Por un punto tomado sobre una recta, se puede levantar una perpendicular á esta recta, y no se puede levantar más que una sola.

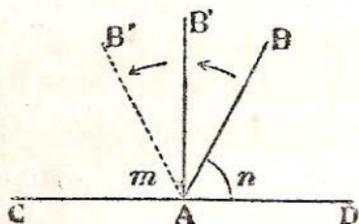


FIG. 16

Sea el punto A tomado sobre la recta CD.

1° Una oblicua cualquiera AB forma con CD dos ángulos desiguales: n ó $\angle BAD$ y m ó $\angle BAC$. La oblicua puede girar al rededor del

punto A.

El ángulo n , desde luego menor que el ángulo m , crecerá constantemente, mientras que el ángulo adyacente BAC ó m disminuirá; habrá por consiguiente una posición AB' para la cual los ángulos m y n serán iguales, y entonces AB' será perpendicular á CD .

2° Si la recta móvil se desvía de la posición AB' , los dos ángulos dejan de ser iguales, y la recta es oblicua

63. Teorema. — Desde un punto tomado fuera de una recta siempre se puede bajar una perpendicular á dicha recta, y no se le puede bajar más que una sola.

1° Se puede bajar una perpendicular. Sea el punto A y la recta BC. Haciendo girar el semiplano ABC al rededor de la recta BC, el punto A cae en A' . La recta AA' es perpendicular á BC, porque los ángulos adyacentes AEB y $A'EB$ se sobreponen y son iguales.

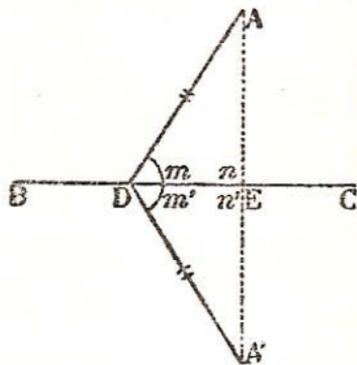


FIG. 17.

2° Sólo se puede bajar una perpendicular. Sea AD otra perpendicular. Si se hace girar el semiplano BAC

al rededor de BC , el ángulo m se reproduce en m' ; por hipótesis, estos ángulos son rectos; luego las rectas DA y DA' son opuestas; así, hubiera entre los puntos A y A' dos rectas diferentes AEA' y ADA' , lo que es imposible.

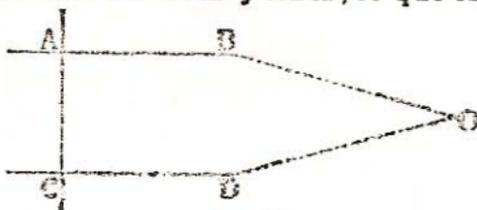


Fig. 18.

64. Corolario. — *Dos rectas perpendiculares a una tercera no tienen ningún punto común.*

Si se encontrasen en un punto O , hubiera, de este punto, dos perpendiculares a la misma recta, lo que es imposible.

65. Posiciones relativas de dos rectas de un plano. — En general, dos rectas distintas de un plano tienen un punto común y se llaman concurrentes. Pero, según lo que se acaba de ver, puede suceder que dos rectas distintas, situadas en un mismo plano, no tengan ningún punto común. Se dice entonces que son paralelas.

§ III. — Rectas paralelas.

66. Definición. — *Dos rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, no tienen ningún punto común.*

El Teorema anterior (n° 64) ha establecido la existencia de tales rectas.



Fig. 19.

67. Teorema. — *Por un punto se puede trazar una paralela á una recta dada.*

Del punto A se baja una perpendicular á la recta BC , y en A se levanta una perpendicular AD á AB ; AD y BC son paralelas por ser

ambas perpendiculares á la recta AB (n° 64).

68. Postulado de Euclides. — *Por un punto dado, no se puede trazar más que una sola paralela á una recta dada.*

Se admite esta proposición sin demostración porque no está en contradicción con las definiciones y los teoremas anteriores.

69. Correlarios. — 1° *Si dos rectas AB y CD son paralelas, toda recta AE que encuentre á una de ellas encuentra también á la otra (fig. 20).* — En efecto, si AE no encontrase a CD, habría, por el punto A, dos paralelas a CD (n° 68), lo que es imposible (n° 68).

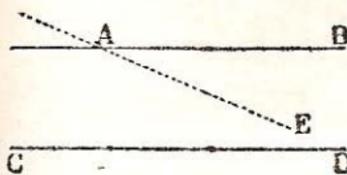


FIG. 20.

2° *Dos rectas AB y CD paralelas cada una á una tercera EF (fig. 21) son paralelas entre sí.* — En efecto, si AB y CD se encontrasen, habría, por su punto de concurso, dos paralelas á EF, lo que es imposible (n° 68).

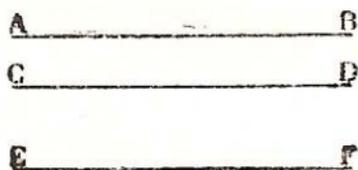


FIG. 21.

70. Teorema. — *Si dos rectas son paralelas, cualquiera recta perpendicular á una de ellas lo es igualmente á la otra.*

Sean AB y CD dos paralelas, y sea AC perpendicular á AB (fig. 22).

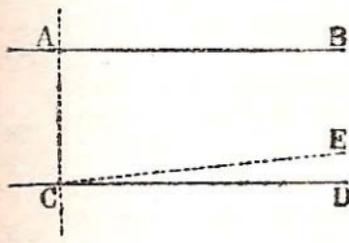


FIG. 22.

Si se traza CE perpendicular á AC, las dos rectas AB y CE serán paralelas, por ser perpendiculares á la misma recta AC (n° 64).

Como por el punto C no se puede trazar más que una sola paralela á AB (n° 68), luego las dos rectas CD

y CE se confunden; por consiguiente CD es perpendicular á AC, y recíprocamente AC es perpendicular á CD, que es lo que se quería demostrar.

71. Escolio. — Las perpendiculares levantadas sobre dos rectas concurrentes OA , OC (fig. 23) son concurrentes. — En efecto, si las perpendiculares AB , CE fueran paralelas, la recta AOD , perpendicular á AB , lo sería también á DCE (nº 70); habría entonces en el punto O dos perpendiculares OC y OD á la misma recta CE , lo que es imposible (nº 68).

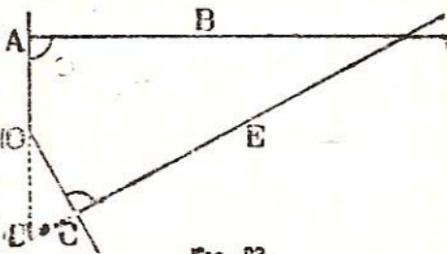


FIG. 23.

72. Definiciones. — Se llama secante toda recta que corta una figura.

Dos rectas cortadas por una secante forman ocho ángulos; los cuatro ángulos comprendidos entre las rectas se llaman internos ó interiores; los otros cuatro se llaman externos ó exteriores.

Se llaman ángulos alternos-internos dos ángulos no adyacentes, situados en el interior de las rectas á uno y otro lado de la secante.

EJEMPLO. — Los ángulos m y n , lo mismo que H é I (fig. 24).

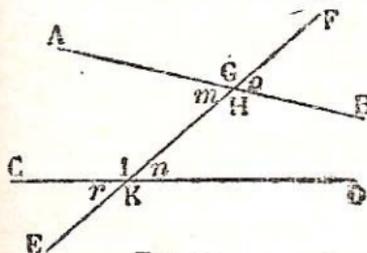


FIG. 24.

Por analogía, se llaman ángulos alternos externos los ángulos o y r , lo mismo que G y K .

Se llaman ángulos correspondientes, dos ángulos no adyacentes situados del mismo lado de la secante, uno en el interior y otro en el exterior de las rectas.

EJEMPLOS. — Los ángulos n y o , lo mismo que K y H , I y G , r y m .

Se llaman ángulos internos de un mismo lado dos ángulos situados en el interior de las rectas y del mismo lado de la secante.

EJEMPLOS. — Los ángulos n y H , lo mismo que I y m .

73. Teorema. — Si dos rectas (AB , CD) cortadas por una secante (GK) forman unos ángulos alternos-internos iguales ($m = n$), estas rectas son paralelas.

En efecto, supongamos que estas rectas tengan un punto común, v. gr., en O . La línea quebrada $AGIC$

uede coincidir con la línea quebrada DKHB, de modo que GI coincida con KH, y el ángulo m coincida con su igual n . Entonces, la semirecta $G'A'$ coincide con KD , é $I'C'$ coincide con HB ; y como $G'A'$ é $I'C'$ tienen un punto común (O'), resulta que HB y KD deben tener

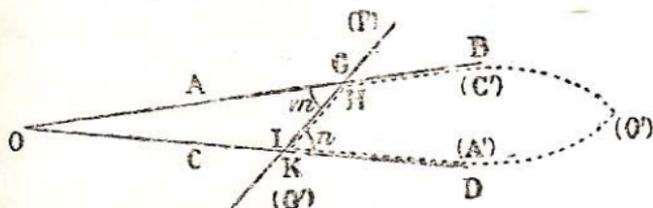


FIG. 25.

también un punto común O' , y si se admite que GA é IC se cortan en O , es preciso admitir que las dos rectas AB y CD pasan ambas por los dos puntos O y O' , lo que es imposible. Luego, las rectas AG é IC no pueden tener ningún punto común, y son paralelas.

74. Recíproca. — Si dos rectas son paralelas, forman con una secante unos ángulos alternos-internos iguales.

Sean las paralelas AB y CD , y la secante MN . Construyamos en F un ángulo n igual á m , la recta EG es paralela á AB (nº 73), y como por F sólo se puede trazar una paralela á AB , EG se confunde con CD .

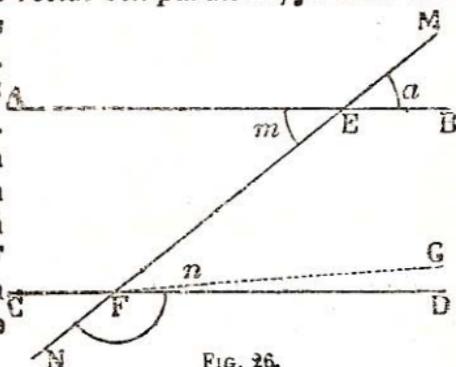


FIG. 26.

75. Escolios. I. — Dos rectas son paralelas cuando, cortadas por una secante, forman :

Ángulos correspondientes iguales;

Ó ángulos alternos-externos iguales;

Ó ángulos internos de un mismo lado, suplementarios.

Cada uno de estos casos puede referirse al que se ha mostrado antes.

II. — Dos rectas se encuentran cuando, cortadas por una secante, forman con ella ángulos alternos-internos desiguales;

Ó ángulos correspondientes desiguales;

Ó *ángulos internos de un mismo lado, no suplementarios.*

III. — *Dos rectas situadas en un mismo plano se encuentran cuando una de ellas es perpendicular, y la otra oblicua, á una tercera.*

§ IV. — **Ángulos cuyos lados son paralelos ó perpendiculares.**

76. *Definición.* — *Dos semirectas paralelas tienen el mismo sentido si están del mismo lado de la recta que une sus orígenes. Dos semirectas paralelas tienen sentidos opuestos cuando están de uno y otro lado de la recta que une sus orígenes.*

77. *Teorema.* — *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos son iguales ó suplementarios: iguales, si los lados paralelos tienen dos á dos el mismo sentido ó dos á dos unos sentidos opuestos; suplementarios, en el caso contrario.*

Sean a y c dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos (fig. 27).

Si se prolonga hasta su encuentro dos lados no paralelos, los ángulos a y n son iguales por ser alternos-internos, lo mismo que c y n ; luego $a = c$.

Si se considera los dos ángulos a y m , siendo suplementarios los ángulos m y c , los ángulos m y a también lo serán.

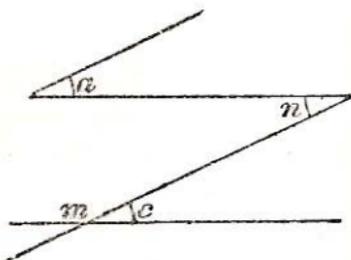


FIG. 27.

78. *Teorema.* — *Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales ó suplementarios; iguales, si ambos ángulos son agudos ú obtusos; suplementarios, si uno es agudo y el otro obtuso.*

Sean a y c dos ángulos cuyos lados son recíprocamente perpendiculares (fig. 28), á saber: AF perpendicular á OD , y AG perpendicular á OE .

Tracemos OD' perpendicular á OD , y OE' perpendicular á OE . Se tiene $a + n = 1$ recto y $a' + n = 1$ recto, de donde $a' = a$.

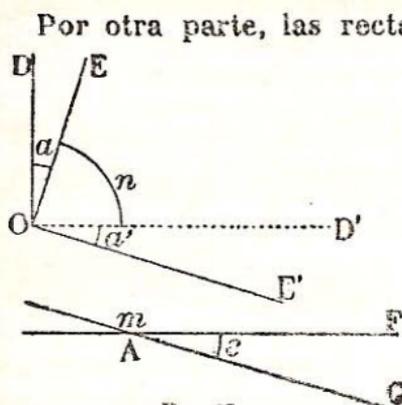


FIG. 28.

Por otra parte, las rectas OD' y AF son paralelas, por ser perpendiculares á la misma recta OD ; sucediendo lo mismo con las rectas OE' y AG ; por lo tanto los ángulos a' y c son iguales por tener sus lados paralelos, luego también $a = c$.

Siendo suplementarios los ángulos m y c , los ángulos m y a también lo serán.

79. Escolio. — Las perpendiculares bajadas desde un mismo punto sobre los lados de un ángulo forman un ángulo suplementario del primero, cuando el punto está en el interior del ángulo dado ó de su opuesto al vértice (fig. 29).

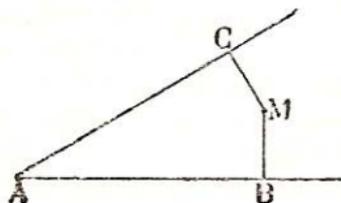


FIG. 29.

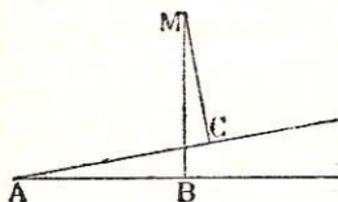


FIG. 30.

Las perpendiculares forman un ángulo igual al primero, cuando el punto está en el exterior del ángulo dado y de su opuesto al vértice (fig. 30).

§ V — Simetría en un plano.

i. — SIMETRÍA CON RELACIÓN A UN PUNTO.

80. Definición. — Dos puntos son simétricos con relación á un punto dado cuando este último punto es el medio de la recta que une los dos primeros.



FIG. 31.

Se dice que cada punto es el homólogo del otro.

EJEMPLO. — Si se tiene $OA = OA'$, los puntos A y A' son simétricos con relación al punto O ; el punto A es

el simétrico de A' o su homólogo, y recíprocamente. El punto O es el centro de simetría.

81. *Dos figuras son simétricas con relación a un centro, cuando los puntos de las dos figuras son simétricos de dos en dos con relación al centro dado.*

Se dice que cada figura es la homóloga de la otra.

EJEMPLO. — Las figuras ABC , $A'B'C'$ (fig. 32) son simétricas con relación al centro O , si se tiene $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$.

OA es el segmento homólogo de OA' , etc.

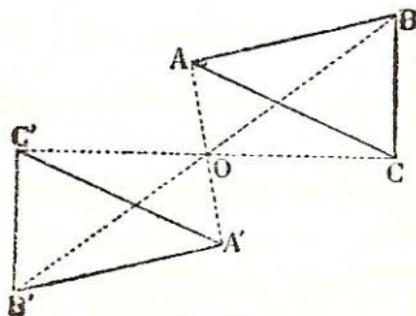


FIG. 32.

82. Teorema. — *Dos figuras situadas en el mismo plano y simétricas con relación a un punto de este plano, son iguales.*

En efecto, si una de las figuras (ABC) ejecuta al rededor del centro O una media vuelta, cada uno de sus puntos viene a coincidir con su correspondiente de la otra figura.

Como consecuencia de este teorema se deducen las relaciones que se indican en el número siguiente.

83. Relaciones entre dos figuras simétricas con relación á un punto y situadas en un mismo plano con este punto.

Se distingue las relaciones métricas, referentes á la magnitud y á la forma de las figuras, y las relaciones gráficas, referentes á su posición relativa.

1º Relaciones métricas. —

Se resumen en la igualdad. Así, la figura simétrica de una recta es una recta,

la figura simétrica de un segmento de recta es un segmento igual,

la figura simétrica de un ángulo es un ángulo igual.

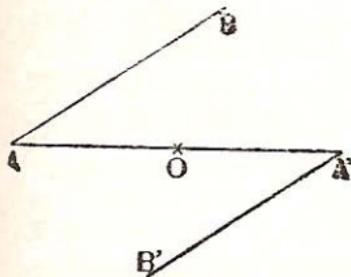


FIG. 33.

2º Relaciones gráficas. — El centro de simetría es su propio homólogo.

Toda recta que pasa por el centro de simetría coincide con su homóloga.

Dos semirectas simétricas son paralelas y tienen sentidos opuestos.

En efecto, sean las semirectas AB y $A'B'$; la recta OA tiene como homóloga la recta OA' , y los ángulos A y A' son homólogos, y por consiguiente iguales; pero, ocupan la posición de alternos-internos; luego las rectas AB y $A'B'$ son paralelas.

2. — SIMETRÍA CON RELACIÓN Á UNA RECTA.

84. Definiciones. — *Dos puntos son simétricos con relación á una recta, cuando cada es perpendicular en la mitad del segmento que une los dos puntos.*



FIG. 34.

EJEMPLO. — Si la perpendicular $PB = PB'$, los puntos B y B' son simétricos con relación á la recta XY ; el punto B es el simétrico

de B' , y recíprocamente. La recta XY es el eje de simetría.

85. Dos figuras son simétricas con relación á un eje cuando los puntos de las dos figuras son de dos en dos simétricos con relación á este eje.

EJEMPLO. — Las figuras DEF , $D'E'F'$ son simétricas con relación al eje XY si se tiene

$$PD = PD', \quad QD = QE', \\ RF = RF'.$$

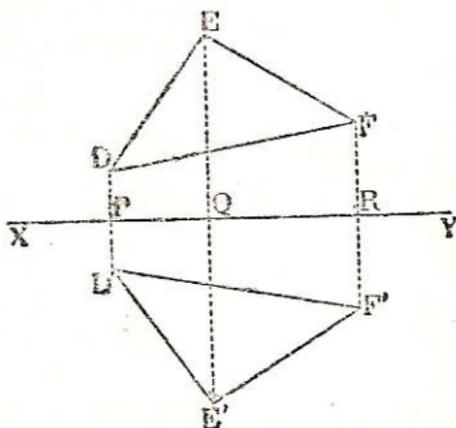


FIG. 35.

86. Definición. — *Dos figuras son inversamente iguales cuando, volviendo el plano de la primera pueda ésta coincidir con la segunda.*

87. Teorema. — *Dos figuras simétricas con relación a un eje son inversamente iguales.*

En efecto, sean las figuras DEF y D'E'F'; el semiplano XYE gira al rededor del eje hasta que coincida con el semiplano XYE', las dos figuras coinciden.

88. Consecuencias : relaciones entre dos figuras planas simétricas con relación a un eje.

Relaciones métricas. — Se resumen en la igualdad inversa; luego:

La figura simétrica de una recta es una recta,

La figura simétrica de un segmento de recta es un segmento igual.

La figura simétrica de un ángulo es un ángulo igual.

Relaciones gráficas. — *Todo punto del eje coincide con su homólogo.*

Toda recta perpendicular al eje coincide con su homóloga.

Si una recta corta el eje, su homóloga corta el eje en el mismo punto y bajo el mismo ángulo.

Si una recta es paralela al eje, su homóloga también es paralela al eje.

CAPÍTULO II

TRIÁNGULOS

§ I. — Definiciones

89. *Triángulo es una figura plana limitada por tres rectas, que se llaman lados.*

En un triángulo se debe considerar seis elementos principales: tres ángulos y tres lados.

90. *Perímetro de un triángulo es la suma de sus tres lados.*

Se designa ordinariamente los tres ángulos de un triángulo por tres letras mayúsculas, A, B, C, por ejemplo, y los lados opuestos por las mismas letras minúsculas, *a*, *b*, *c*.

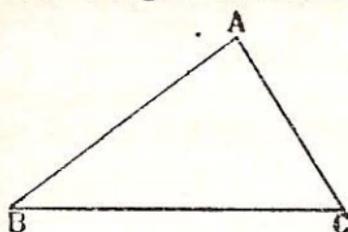


FIG. 36.

Para evitar confusión, se puede decir *a* chica, *b* chica, *c* chica.

91. Un triángulo es rectángulo cuando tiene un ángulo recto,
 — obtusángulo cuando tiene un ángulo obtuso,
 — acutángulo cuando sus tres ángulos son agudos.

Se llama hipotenusa el lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Los lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo se llaman catetos.

92. Un triángulo es equilátero cuando sus tres lados son iguales,
 — isósceles cuando tiene dos lados iguales,
 — escaleno cuando sus tres lados son desiguales.

93. La base de un triángulo es el lado sobre el cual se supone que descansa, y el vértice es el punto de concurso de los otros dos lados.

Se puede tomar como base de un triángulo, cualquiera de sus lados.

En un triángulo isósceles, se llama especialmente vértice el punto de concurso de los lados iguales, y base el lado opuesto al vértice.

94. Se llama altura de un triángulo la perpendicular bajada desde uno de los vértices sobre el lado opuesto ó sobre su prolongación.

En un triángulo rectángulo, se llama especialmente altura la perpendicular bajada desde el vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa.

En un triángulo isósceles, se llama *altura principal* la que pasa por el vértice del ángulo que forman los lados iguales.

95. Se llama *mediana de un triángulo* la recta que une cualquiera de los vértices con el punto medio del lado opuesto.

En un triángulo cualquiera, hay tres alturas, tres medianas y tres bisectrices.

§ II. — Propiedades fundamentales de los triángulos.

I. — RELACIONES ENTRE LOS ÁNGULOS.

96. Teorema. — *La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos.*

Sea el triángulo ABC; por el vértice A, tracemos una paralela DE á la base.

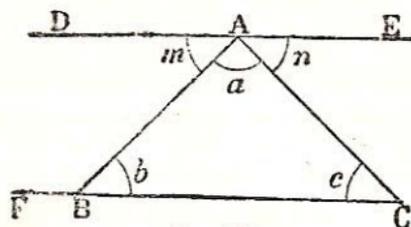


FIG. 37.

Los ángulos b y m son iguales por ser alternos-internos (nº 74); y los ángulos c y n son iguales por la misma razón; luego la suma $a + b + c$ es igual al ángulo DAE, cuyo valor es 2 rectos (nº 54).

97. Consecuencias. — 1º *Cada ángulo de un triángulo es el suplemento de la suma de los otros dos;*

2º *El ángulo exterior ABF es igual á la suma de los ángulos interiores no adyacentes a y c;*

3º *Si dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales, el tercer ángulo del primero es también igual al tercer ángulo del segundo;*

4º *Un triángulo cualquiera siempre tiene por lo menos dos ángulos agudos;*

5º *Los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios;*

6º *Cada ángulo de un triángulo equilátero es igual á los dos tercios de un ángulo recto, esto es, vale 60º.*

2. — CORRESPONDENCIA ENTRE LOS ÁNGULOS Y LOS LADOS.

98. Teorema. — *En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos á los lados iguales son iguales.*

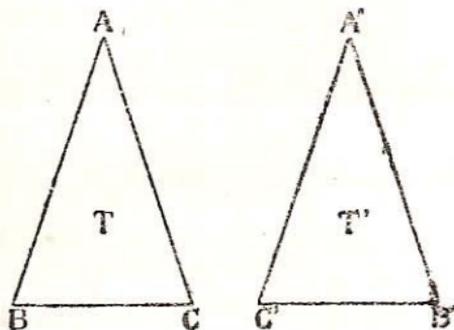


FIG. 38.

Sea ABC un triángulo isósceles, y sean AB y AC los dos lados iguales. Si se supone volteado el triángulo, y reproducido en T', el ángulo A' puede coincidir con A, el lado A'C' con AB, y el lado A'B' con AC; los dos triángulos coinciden,

y por consiguiente los ángulos B' ó B y C son iguales.

99. Recíproca. — *Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos á estos ángulos también son iguales.*

Sean B y C dos ángulos iguales, en el triángulo T; supongamos este triángulo volteado en la posición T'.

Los cuatro ángulos B, C, C' y B' son iguales; por tanto los triángulos T y T' podrán coincidir, colocando el lado BC sobre C'B', y el ángulo B sobre C', y el ángulo C sobre B'; luego se tiene:

$$BA = C'A' = CA.$$

100. Teorema. — *En un triángulo cualquiera, al mayor lado está opuesto el mayor ángulo.*

Sea el triángulo ABC, en el cual el lado AB es mayor que el lado AC. Tomemos en AB una longitud AD igual á AC. El triángulo ADC es isósceles, y los ángulos m son iguales (nº98). Pero, en el triángulo CBD, el ángulo ADC es exterior é igual á $B + n$.

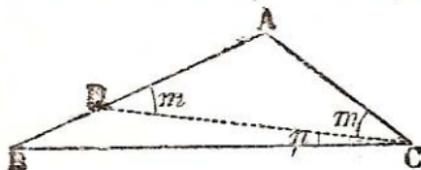


FIG. 39.

Como $m = B + n$
 y $C = m + n$
 resulta $C = B + 2n$
 luego $C > B$.

101. Recíproca. — *En un triángulo cualquiera, al mayor ángulo está opuesto el mayor lado.*

Sea, en el triángulo ABC, el ángulo C mayor que B.

Si suponemos $c = b$, se necesita $C = B$ (n° 98).

Si suponemos $c < b$, se necesita $C < B$ (n° 100) lo que es contrario á la hipótesis, luego, se tendrá $c > b$.

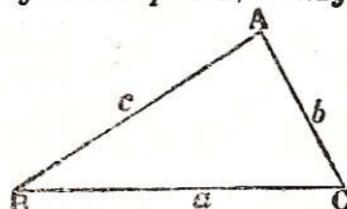


FIG. 40.

3. — RELACIONES ENTRE LOS LADOS.

102. Teorema. — *Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.*

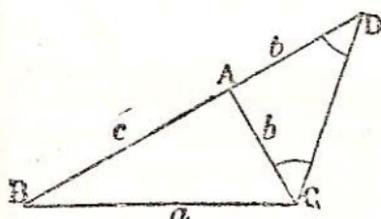


FIG. 41.

Sea el triángulo ABC. Prolonguemos BA de un segmento AD igual á b. El triángulo ADC es isósceles, y los ángulos ADC y DCA son iguales; luego, en el triángulo BCD el ángulo

BCD, es mayor que el ángulo CBD, y el lado BD es mayor que el lado BC, ó

$$b + c > a.$$

Transponiendo uno de los términos del primer miembro, se tiene:

$$b > a - c$$

$$c > a - b.$$

4. — CORRESPONDENCIA ENTRE DOS LADOS Y SU PROYECCIONES SOBRE EL TERCERO

103. Definición. — *Se llama proyección de una recta*

sobre otra, la parte de esta última comprendida entre las

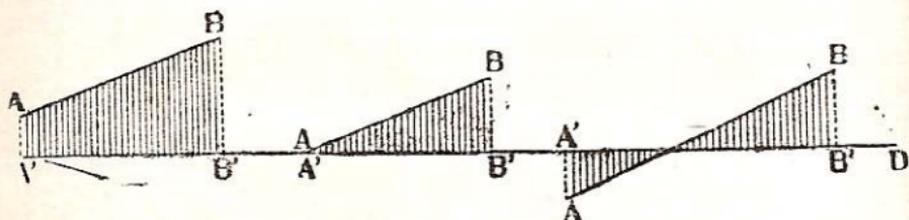


FIG. 42.

perpendiculares bajadas de las extremidades de la primera recta sobre la segunda.

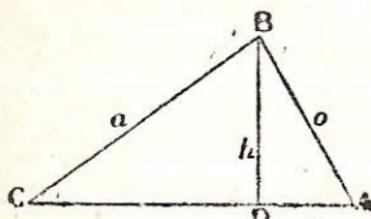


FIG. 43.

Por ejemplo $A'B'$ es la proyección de AB sobre CD (fig. 42).

En un triángulo cualquiera ABC (fig. 43), la altura BD determina sobre el lado CA dos segmentos

DC y DA que son las proyecciones respectivas de los lados BC y BA sobre el lado CA .

104. Teorema. — Si desde un punto tomado fuera de una recta se baja á esta recta una perpendicular y varias oblicuas :

- 1º La perpendicular es menor que cualquiera oblicua ;
- 2º Dos oblicuas cuyos pies se apartan igualmente del pie de la perpendicular son iguales ;
- 3º De dos oblicuas, la mayor es aquella cuyo pie se aparta más del pie de la perpendicular.

Sean A el punto dado (fig. 44), AB una perpendicular, AC , AD , AE , diferentes oblicuas :

1º El triángulo ACB es rectángulo en B ; luego, el cateto AB , opuesto á un ángulo agudo, es menor que la hipotenusa AC , opuesta al ángulo recto (nº 101);

2º Si la distancia BE es igual á BC , las oblicuas AC

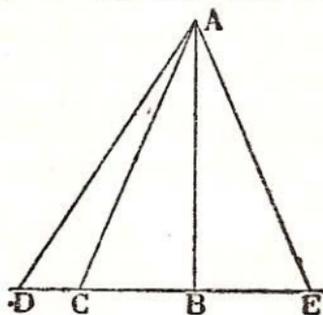


FIG. 44.

y AE son simétricas con relación á AB y son iguales (n° 88);

3° En el triángulo ACD, el ángulo C es obtuso, y el ángulo D es agudo; luego (n° 101) el lado AD, opuesto al ángulo C, es mayor que el lado AC, opuesto al ángulo D.

105. Consecuencias. Corolarios. — 1° *La menor línea que se puede trazar de un punto á una recta es la perpendicular á esta recta.*

AB es la *distancia* del punto A á la recta DE;

2° *Las oblicuas iguales AC y AE forman ángulos iguales BAE, BAC con la perpendicular AB;*

3° *Si dos oblicuas que parten de un mismo punto son iguales, sus pies están igualmente distantes del pie de la perpendicular;* porque la desigualdad de las distancias traería consigo la desigualdad de las oblicuas;

4° *Si dos oblicuas que parten de un mismo punto son desiguales, el pie de la más larga está más distante del pie de la perpendicular;* porque si estuviera menos distante, la oblicua sería la menos larga, y si los pies estuviesen igualmente distantes, las dos oblicuas serían iguales;

5° *De un punto á una recta, no se puede bajar más que dos oblicuas iguales, y estas dos oblicuas están situadas á uno y otro lado de la perpendicular.*

5. — MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO RECTILÍNEO.

106. Definición. — *Mediatriz de un segmento rectilíneo es la perpendicular levantada en la mitad de este segmento.*

107. Teorema. — *Todo punto de la mediatriz de una recta está igualmente distante de los extremos de esta recta.*

Sea A un punto cualquiera de la mediatriz de CD (fig. 45). Puesto que se tiene $BC = BD$, las oblicuas AC y AD son iguales (n° 105) y por lo mismo el punto

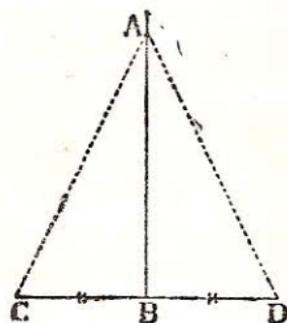


FIG. 45.

A está equidistante de los extremos de la recta CD.

108. Recíproca. — *Cualquier punto equidistante de los extremos de una recta pertenece a la mediatriz de esta recta.*

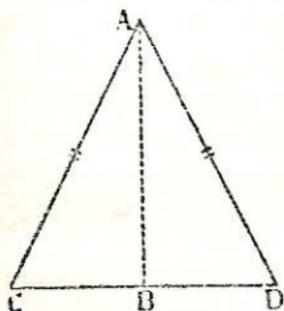


FIG. 46.

Sea A un punto equidistante de los extremos de la recta CD de manera que se tenga $AC = AD$. Supongamos AB perpendicular a CD; siendo iguales las oblicuas AC y AD, sus pies están equidistantes del pie de la perpendicular (nº 105); así $BC = BD$, y la perpendicular AB cae en medio de CD.

109. Definición. — *Se llama lugar geométrico el conjunto de los puntos que gozan de una misma propiedad.*

La mediatriz de una recta es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de esta recta.

110. Teorema. — *Todo punto tomado fuera de la mediatriz de una recta está desigualmente distante de los extremos de la recta.*

Este teorema es una consecuencia de los teoremas anteriores (nºs 108 y 109); pero se acostumbra demostrarlo directamente :

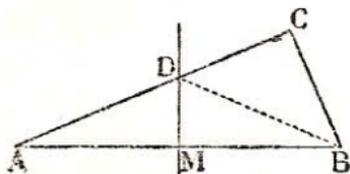


FIG. 47

$$AC = AD + DC = BD + DC$$

como :

$$BD + DC > BC.$$

resulta :

$$AC > BC$$

6. — SIMETRÍA EN EL TRIÁNGULO ISÓSCELES.

111. Teorema. — *La altura principal de un triángulo isósceles es un eje de simetría de la figura.*

En efecto, los lados AB y AC siendo iguales, la per-

pendicular AH cae en la mitad de la base (n° 105), luego AH es eje de simetría por los vértices B y C, y por toda la figura.

112. Recíproca. — *Si la altura divide en dos partes iguales la base ó el ángulo en el vértice, el triángulo es isósceles.*

En efecto, en estos dos casos, la altura es un eje de simetría.

113. Escolio. — En un triángulo isósceles, la recta que une el vértice con la mitad de la base es á la vez *altura, mediana, bisectriz y perpendicular á la mitad de la base.*

La recta que tiene cualquiera de estas cuatro propiedades, tiene también las otras tres.

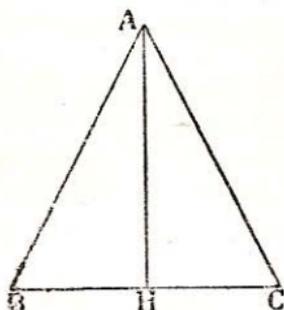


FIG. 48.

§ III. — Igualdad de los triángulos.

1. — TRIÁNGULOS CUALESQUIERA.

Hay tres casos de igualdad de los triángulos cualesquiera.

114. Primer caso. — *Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual adyacente a dos ángulos respectivamente iguales.*

Sean los dos triángulos T y T' que tienen el lado BC igual a B'C', el ángulo B igual a B' y el ángulo C igual a C'.

Vamos a demostrar que son iguales, es decir que pueden coincidir por superposición.

Coloquemos el primer triángulo sobre el segundo, de manera que el lado BC coincida con su igual B'C'. Siendo el ángulo B igual a B', el lado BA seguirá la dirección B'A'; del mismo modo, siendo el ángulo C igual a C', el lado CA seguirá la dirección C'D'. Debiendo encontrarse el punto A a la vez sobre B'A' y

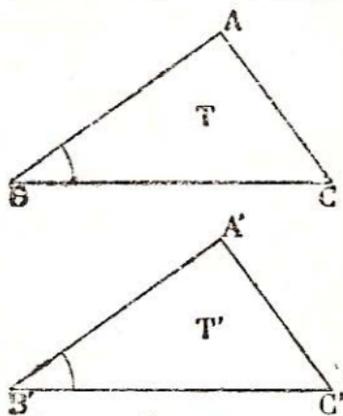


FIG. 49.

sobre $C'A'$, estará necesariamente en la intersección A' y los dos triángulos coincidirán, luego son iguales.

115. Segundo caso. — *Dos triángulos son iguales cuando tienen un ángulo igual, formado por lados respectivamente iguales.*

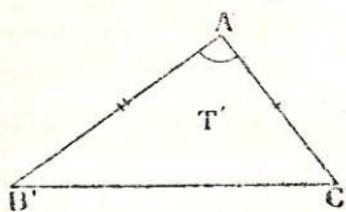
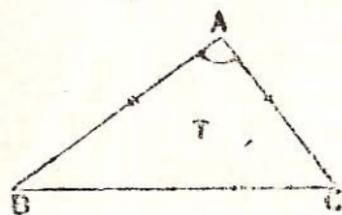


Fig. 50

Sean los dos triángulos T y T' que tienen los ángulos A y A' iguales y los lados AB y AC respectivamente iguales a los lados $A'B'$ y $A'C'$.

Sobrepongamos el primer triángulo sobre el segundo, de manera que el ángulo A coincida con su igual A' . El lado AB coincidirá con su igual $A'B'$, y el lado AC con su igual $A'C'$; por lo mismo el tercer lado BC coincidirá con $B'C'$, y los dos triángulos serán iguales, ya que coincidirán.

116. Tercer caso. — *Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales.*

Sean los dos triángulos T y T' que tienen sus tres lados respectivamente iguales.

Coloquemos T' en T'' de manera que los triángulos T y T'' tengan por ambas partes un lado común AB , y tracemos la línea CC'' .

Se tiene por hipótesis $AC = A'C'$ ó $AC = AC''$ y $BC = BC''$; estando cada uno de los puntos A y B equidistantes de C y C'' , la recta AB , que une estos dos puntos, será perpendicular al medio de CC'' ; luego, los triángulos ACB y $AC''B$ son simétricos con relación a AB y pueden coincidir.

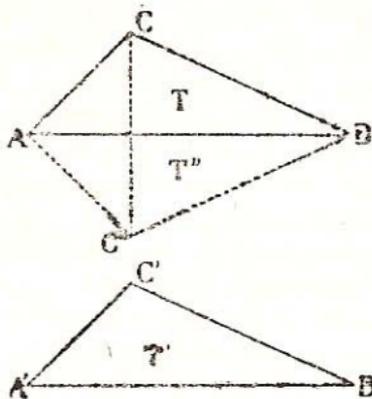


Fig. 51

117. Escolio. — En dos triángulos iguales, los seis elementos son respectivamente iguales, y á los ángulos iguales están opuestos lados iguales, y recíprocamente

2. — TEOREMAS CONTRARIOS.

118. Teorema. — Cuando dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, y los ángulos comprendidos desiguales, los terceros lados son desiguales, y al menor ángulo se opone el menor lado.

Sean los dos triángulos ABC y ABC' que tienen los lados BA y BC respectivamente iguales á BA y BC', y el ángulo ABC del primero, menor que el ángulo ABC' del segundo.

Supongamos estos dos triángulos colocados uno sobre otro, de un mismo lado de AB.

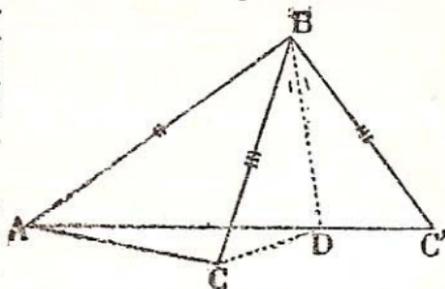


FIG. 52.

El ángulo CBC' es la diferencia entre los dos ángulos ABC y ABC' de los dos triángulos; sea BD la bisectriz del ángulo CBC', y tracemos la recta CD.

Los dos triángulos BDC y BDC' son iguales, por tener un ángulo igual en B, un lado común BD, y el lado BC igual á BC' (nº 115), luego $DC = DC'$.



En el triángulo ACD, se tiene $AC < AD + DC$, de donde, substituyendo por DC su igual DC', $AC < AD + DC'$ ó $AC < AC'$.

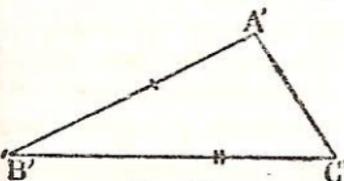


FIG. 53.

119. Recíproca. — Cuando dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, y los terceros lados desiguales, los ángulos opuestos á estos lados son desiguales, y a menor lado se opone el menor ángulo

Sean los dos triángulos ABC y $A'B'C'$ que tienen el lado AB igual á $A'B'$, BC igual á $B'C'$, y AC menor que $A'C'$.

Si se supusiera el ángulo B igual á B' , los triángulos serían iguales por tener un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales, de donde resultaría AC igual á $A'C'$, lo que es contra la hipótesis.

Si se supusiera el ángulo B mayor que B' , se tendría también, en virtud del teorema directo (nº 118), $AC > A'C'$, lo que también es contra la hipótesis.

Luego el ángulo B es menor que B' .

3. — TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

Hay dos casos de igualdad de los triángulos rectángulos.

120. Primer caso. — *Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen igual la hipotenusa y uno de los ángulos agudos.*

Sean los dos triángulos rectángulos T y T' que tienen la hipotenusa BC igual á $B'C'$ y el ángulo agudo C igual á C' .

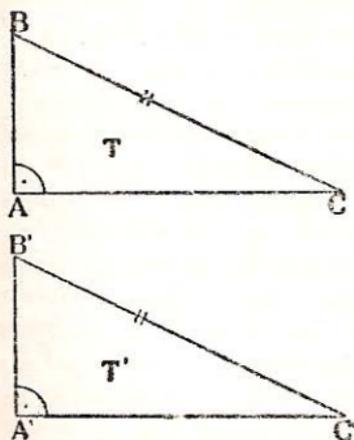


FIG. 54.

Coloquemos el primer triángulo sobre el segundo, de manera que el ángulo C coincida con su igual C' . La hipotenusa CB coincide con su igual $C'B'$; el cateto CA toma la dirección $C'A'$, y los dos catetos BA y $B'A'$ son perpendiculares bajadas del mismo punto B sobre la misma recta $C'A'$; luego estas dos líneas se confunden (nº 63) y los triángulos son iguales.

121. Segundo caso. — *Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen igual la hipotenusa y uno de los catetos.*

Sean los triángulos rectángulos T y T' que tienen la

hipotenusa BC igual á $B'C'$, y el cateto AB igual al cateto $A'B'$.

Coloquemos el primer triángulo sobre el segundo de manera que el cateto AB coincida con su igual $A'B'$. Coincidiendo los ángulos rectos A y A' , el cateto AC seguirá la dirección $A'C'$. Siendo las hipotenusas BC y $B'C'$ dos oblicuas iguales que parten de un mismo punto B' , sus pies tienen que estar á igual distancia del pie de la perpendicular $B'A'$; así el punto C cae en C' , y los dos triángulos coinciden y por consiguiente son iguales.

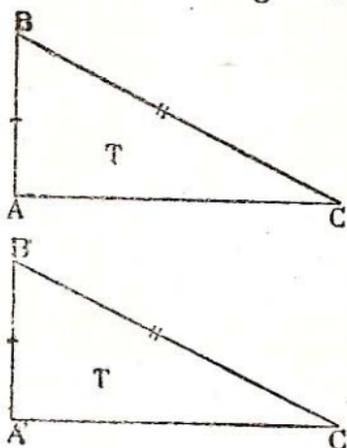


Fig. 55.

122. Lugar geométrico. — *La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los dos lados de dicho ángulo.*

En efecto:

1° *Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo está equidistante de los dos lados de este ángulo.*

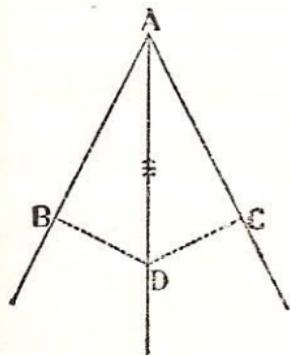


Fig. 56

Sea D un punto cualquiera tomado sobre la bisectriz del ángulo A (fig. 56). Las distancias de este punto á los dos lados del ángulo están determinadas por las perpendiculares DB y DC (n° 105).

Los triángulos rectángulos ADB y ADC son iguales por tener igual la hipotenusa AD , y un ángulo agudo igual en A por ser la mitad del ángulo BAC (n° 120);

luego $DB = DC$

2° *Cualquier punto equidistante de los dos lados de un ángulo pertenece á la bisectriz de este ángulo.*

Porque si el punto D es tal que se tenga $DB = DC$,

los triángulos rectángulos ADB y ADC son iguales por tener igual la hipotenusa AD, y uno de los catetos DB igual á DC (n° 121); luego los ángulos en A son iguales, y AD es bisectriz del ángulo A.

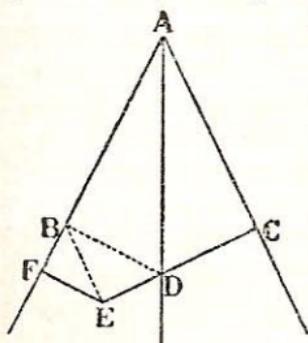


Fig. 57.

Por ser	$EF < EB$
y	$EB < ED + DB$
ó	$EB < ED + DC$
ó por último	$EB < EC$
se tiene	$EF < EC.$

123. Teorema contrario. — *Cualquier punto tomado fuera de la bisectriz está desigualmente distante de los lados del ángulo.*

Esto es una consecuencia de los teoremas anteriores (n°s 121 y 122), pero se puede demostrar directamente.

Se necesita probar que EF es menor que EC,

§ IV. — Rectas notables en el plano de un triángulo.

1. — PARALELAS Á LOS LADOS DE UN TRIÁNGULO

124. Lema. — *Dos rectas paralelas comprendidas entre otras dos paralelas son iguales.*

Sean AB y CD, dos paralelas comprendidas entre otras dos AC y BD (fig. 58).

Si se traza la recta BC, los ángulos m y n son iguales por alternos internos, lo mismo que los ángulos o y r ; luego los dos triángulos ABC y BCD son iguales por tener un lado igual, BC,

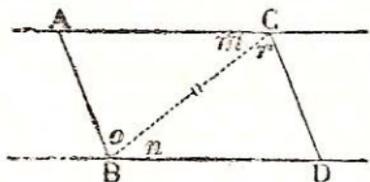


Fig. 58.

adyacente á ángulos respectivamente iguales; por lo tanto $AB = CD$, y $AC = BD$, que es lo que se quería demostrar.

125. Corolario. — *Dos rectas paralelas están en todos sus puntos á igual distancia; porque las rectas AB y CD (fig. 59), perpendiculares á las paralelas AC y BD, son paralelas é iguales entre sí (n° 64 y 124).*

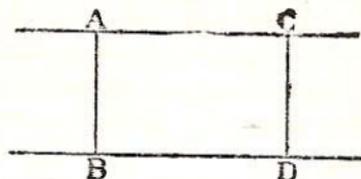


FIG. 59.

126. Escolios. — I. *El lu-*

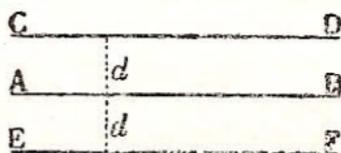


FIG. 60.

gar geométrico de los puntos situados á una distancia determinada de una recta, es el conjunto de las dos líneas trazadas á uno y otro lado paralelamente á la recta dada á la distancia propuesta.

II. *Con relación á dos*

rectas AB y CD que se cortan, existen cuatro puntos E, F, G, H, situados á una distancia determinada d de estas dos rectas; estos puntos son las intersecciones de los lugares geométricos trazados por estas mismas rectas.

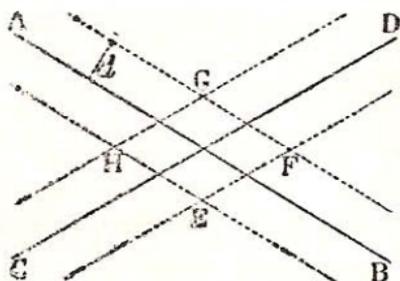


FIG. 61.

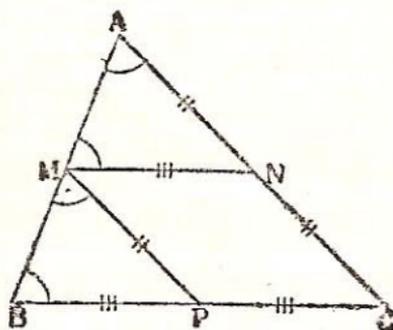


FIG. 62.

127. Teorema. — *Si por el punto medio de un lado de un triángulo se traza una paralela al tercer lado, esta paralela pasa por el punto medio del segundo lado y es igual á la mitad del tercero.*

Sea el triángulo ABC. Por el punto medio M de AB, tracemos la paralela MN á BC; y MP, para-

lela á AC.

Los ángulos NAM y PMB son iguales, por tener sus

lados respectivamente paralelos (n° 77); y los ángulos AMN y MBP son iguales por el mismo motivo; y como $AM = MB$, los triángulos AMN y MBP son iguales (n° 114); luego, $MN = BP$, y $AN = MP$.

Por otra parte, á causa de las paralelas comprendidas entre paralelas (n° 124), $MN = PC$ y $MP = NC$; luego, N es el punto medio de AC, y MN es igual á la mitad de BC.

Corolario. — *Uniendo los puntos medios de los lados de un triángulo, se forma un nuevo triángulo cuyos lados son paralelos á los lados del triángulo dado y respectivamente iguales á la mitad de cada uno.*

2. — MEDIATRICES DE UN TRIÁNGULO.

128. Teorema. — *Las mediatrices de un triángulo se cortan en un mismo punto, que equidista de los tres vértices del triángulo.*

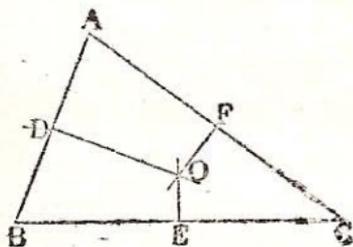


FIG. 63.

Sea el triángulo ABC, y los puntos medios D, E, F de los lados. Las mediatrices de las rectas AB y BC se cortan en un punto O (n° 71). Este punto equidista de A y B, porque pertenece á la mediatriz DO (n° 107); equidista también de B y C, por pertenecer á la mediatriz

EO; luego $AO = OB = OC$, y $AO = OC$; el punto O equidista de A y de C, y pertenece á la mediatriz FO (n° 108).

3. — ALTURAS DE UN TRIÁNGULO.

129. Teorema. — *Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.*

Sea el triángulo ABC. Por cada vértice tracemos una paralela al lado opuesto. Estas tres rectas determinan un triángulo $A'B'C'$ cuyos lados son paralelos á los lados del triángulo dado. Por otra parte, A es el punto medio de $B'C'$, en efecto, $C'A = BC$, por ser para-

lelas comprendidas entre paralelas (n° 124): $AB' = BC$ por el mismo motivo; por consiguiente $AC' = AB'$. Del mismo modo se ve que B y C son los puntos medios de $C'A'$ y de $A'B'$. Luego, las alturas del triángulo ABC son las mediatrices del triángulo $A'B'C'$ y se cortan en un mismo punto (n° 128).

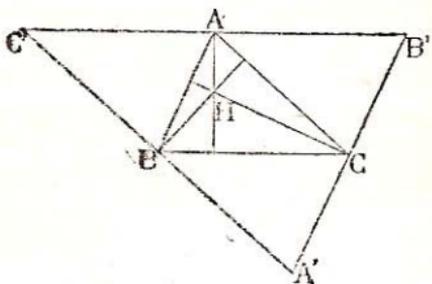


FIG. 64.

Este punto se llama el ortocentro del triángulo ABC

4. — MEDIANAS DE UN TRIÁNGULO.

130. — Teorema. Las medianas de un triángulo se cortan en un mismo punto, situado á los $\frac{2}{3}$ de cada una á partir del vértice.

Sean BE y CD dos medianas del triángulo ABC; la recta DE es paralela á BC e igual á $\frac{BC}{2}$ (n° 127).

Tomando los puntos medios M y N de los lados BO y CO del triángulo BOC, MN es paralela á BC e igual á $\frac{BC}{2}$ (n° 127). Los ángulos

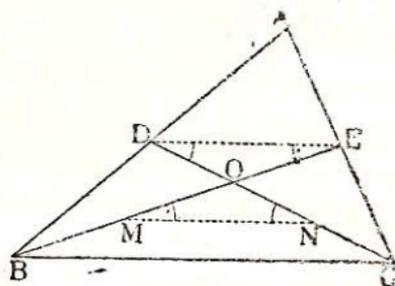


FIG. 65.

M y E son iguales, por ser alternos-internos, y los ángulos N y D son iguales por el mismo motivo; luego, los triángulos OMN y OED son iguales por tener un lado igual adyacente á dos

ángulos respectivamente iguales (n° 114); y $OM = OE = \frac{BE}{3}$.

Podríamos dar la misma demostración por la mediana CD; luego, la mediana BE está cortada en O por las otras dos, y las tres medianas se cortan en un mismo punto.

5. — BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO.

131. Teorema. — *Las bisectrices de un triángulo se cortan en un mismo punto, que equidista de los 3 lados.*

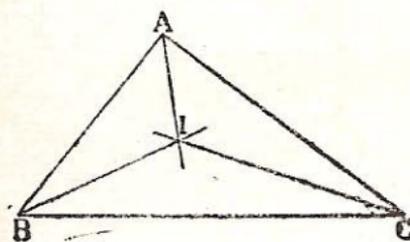


FIG. 66.

Sea el triángulo ABC. Las bisectrices de los ángulos B y C se cortan en un punto I, que equidista de los lados AB y BC, por pertenecer á la bisectriz del ángulo B, y de los lados AC y CB, por pertenecer á la bisectriz del ángulo C (nº 122, 1º).

Luego, este punto equidista de los lados AB y AC, y pertenece á la bisectriz del ángulo A (nº 122, 2º). Luego, las tres bisectrices se cortan en un mismo punto.

CAPÍTULO III

CUADRILÁTEROS

§ I. — Definiciones.

132. Definiciones. — *Se llama polígono la figura plana limitada por líneas rectas, que se llaman lados del polígono.*

El triángulo es el más sencillo de los polígonos.

Se llama diagonal de un polígono, la recta que une dos vértices no consecutivos.

Perímetro de un polígono es la suma de sus lados.

133. Cuadriláteros. — *Un polígono de 4 lados se llama cuadrilátero.*

Paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. Figura A.

Rectángulo es un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos (nº 1). Figura B.

Rombo es un cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales. Figura C.

Cuadrado es un cuadrilátero que tiene sus lados y sus ángulos iguales. — Es á la vez cuadrilátero regular, rombo y rectángulo. Figura D.



FIG. 67.

Trapezio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos. Estos dos lados se llaman bases. Figura E.

Trapezio rectángulo es el que tiene dos ángulos rectos. Figura F.

Trapezio isósceles ó simétrico es aquel cuyos lados no paralelos son iguales. Figura G.



FIG. 68.

§ II. — Paralelogramos.

134. Teorema. — Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales, lo mismo que los ángulos opuestos.

Sea el paralelogramo ABCD. Tiremos la diagonal BD; los ángulos m y m' son iguales, lo mismo que n y n' , por alternos-internos; como los

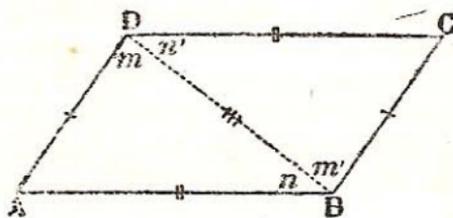


FIG. 69.

dos triángulos ABD y BCD son iguales por tener un lado igual BD adyacente á dos ángulos respectivamente igua-

les (n° 114), los lados AB y CD , opuestos á los ángulos iguales m y m' , son iguales, lo mismo que $AD = BC$.

Además, los ángulos A y C son iguales por estar opuestos al lado común BD , y el ángulo total B es igual al ángulo total D .

135 Observación. — La suma de los 4 ángulos es igual á 4 rectos, porque es la suma de los ángulos de los dos triángulos ABD y BCD .

136. Teorema. — *El cuadrilátero que tiene sus lados opuestos iguales es un paralelogramo.*

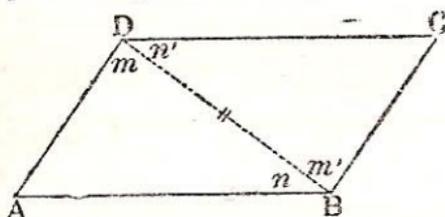


FIG. 70.

Sea el cuadrilátero $ABCD$, en el que se tiene $AB = CD$ y $AD = BC$.

Tirando la diagonal BD , se tienen dos triángulos ABD y BCD iguales por tener sus lados respectivamente

iguales (n° 116); luego el ángulo m del uno es igual al m' del otro, y las rectas AD y BC son paralelas, porque forman con la secante BD ángulos alternos-internos iguales; del mismo modo los ángulos n y n' son iguales, y las rectas AB y CD que forman estos ángulos son paralelas (n° 73).

Por lo tanto el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo (n° 133).

137. Teorema. — *Todo cuadrilátero que tiene sus ángulos opuestos iguales es un paralelogramo.*

Sea el cuadrilátero $ABCD$, en el que se tiene $A = C$ y $B = D$.

La suma de estos cuatro ángulos puede representarse por $2A + 2B$, y por ser

esta suma igual a cuatro ángulos rectos (n° 135), se tiene :

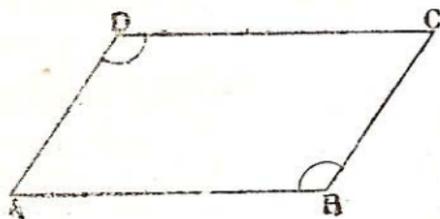


FIG. 71.

$$\begin{aligned} 2 A + 2 B &= 4 \text{ rectos} \\ \text{de donde} \quad A + B &= 2 \text{ rectos} \end{aligned}$$

luego las rectas AD y BC son paralelas, por formar con AB ángulos interiores suplementarios de un mismo lado (n° 73).

Se puede escribir igualmente :

$$\begin{aligned} 2 A + 2 D &= 4 \text{ rectos} \\ \text{de donde} \quad A + D &= 2 \text{ rectos} \end{aligned}$$

por lo tanto las rectas AB y CD son paralelas, y el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

138. Escolio. — *El rectángulo, el rombo y el cuadrado son paralelogramos*, porque el rectángulo tiene sus ángulos opuestos iguales, el rombo tiene sus lados opuestos iguales, y el cuadrado reúne las dos condiciones (n° 133).

139. Teorema. — *Todo cuadrilátero que tiene dos lados iguales y paralelos es un paralelogramo.*

Sea el cuadrilátero ABCD, que tiene los lados AB y CD iguales y paralelos.

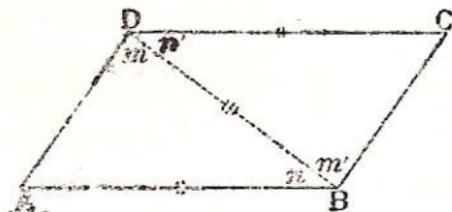


FIG. 72.

Si se traza la diagonal BD, los ángulos n y n' son iguales por alternos-internos, y los dos triángulos ABD y BCD son iguales por tener un ángulo igual (n , n') formado por lados respectivamente iguales (n° 115); como los ángulos m y m' opuestos á los lados iguales AB y CD son iguales, las rectas AD y BC que forman estos ángulos son paralelas (n° 73), y la figura ABCD es un paralelogramo.

140. Teorema. — *Las diagonales de un paralelogramo se cortan por la mitad.*

Sea ABCD un paralelogramo cualquiera, y sean AC y BD sus diagonales.

En los triángulos OAB y OCD, los lados AB y CD son

iguales por ser lados opuestos de un paralelogramo; los ángulos OAB y OCD son iguales por alternos-internos,

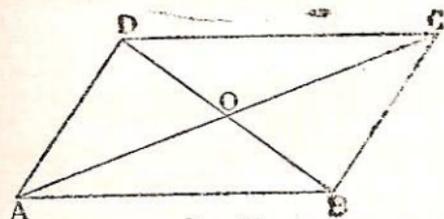


Fig. 73.

lo mismo que los ángulos OBA y ODC.

Luego estos triángulos son iguales por tener un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; por consiguiente, el lado OA

del uno es igual al lado OC del otro y OB del primero es igual a OD del segundo, por lo tanto el punto O es el punto medio de cada una de las dos diagonales.

141. Teorema. — *Todo cuadrilátero cuyas diagonales se cortan por la mitad es un paralelogramo.*

Sea ABCD un cuadrilátero cuyas diagonales AC y BD se cortan por la mitad.

Los triángulos opuestos AOB y COD son iguales por tener un ángulo igual en O formado por lados respectivamente iguales;

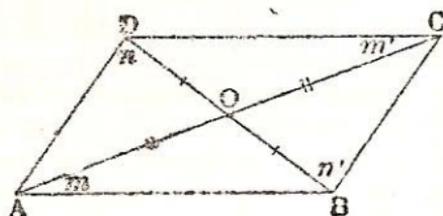


Fig. 74.

luego el ángulo m del uno es igual al ángulo m' del otro, y las rectas AB y CD que forman estos ángulos alternos-internos iguales, son paralelas (nº 73).

Igualmente el triángulo AOD es igual á COB, el ángulo n igual á n' , y las rectas AD y CB son paralelas. Luego el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

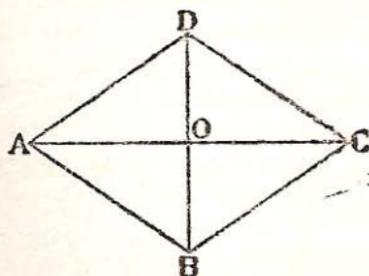


Fig. 75.

142. Escolios. — I. *Las diagonales de un rombo se cortan en ángulo recto.* — En efecto, siendo el rombo

ABCD un paralelogramo, el punto O es la mitad de las

dos diagonales, y los triángulos DOA y DOC son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; como sus ángulos en O son iguales por estar opuestos á lados iguales DA y DC, estos ángulos serán rectos (nº 60).

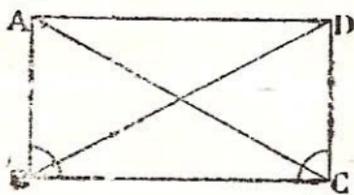


Fig. 76.

II. *Las diagonales de un rectángulo son iguales.* — En efecto, en los triángulos rectángulos ABC y BCD, los ángulos rectos B y C es-

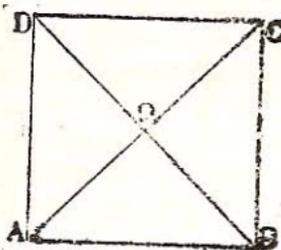


Fig. 77.

tan formados por lados respectivamente iguales, luego son iguales, y sus hipotenusas AC y BD son iguales.

III. *En un cuadrado, las diagonales son iguales, y se cortan por la mitad y en ángulo recto; porque el cuadrado es á la vez un rectángulo y un rombo.*

§ III. — Trapecio.

143. **Teorema.** — *La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralela á las bases é igual á la semisuma de las mismas.*

Sea el trapecio ABCD. Tracemos la diagonal BD, y por el punto medio E del lado AD, tracemos la recta EGF paralela á las bases.

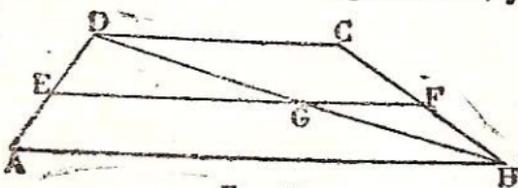


Fig. 78.

Siendo paralela al lado AB del triángulo ABD, esta recta pasará por el punto medio G del lado DB (nº 127); por serlo al lado DC del triángulo BDC, pasará por el punto medio F del lado BC. Por lo tanto, se confundirá con la recta que une los puntos medios de los lados AD y CB.

En los triángulos ADB y DCB, tenemos:

$$EG = \frac{AB}{2} \text{ y } GF = \frac{DC}{2}$$

sumando ordenadamente:

$$EG + GF = \frac{AB + DC}{2}$$

$$\text{ó } EF = \frac{AB + DC}{2}.$$

La recta EF se llama la base media.

§ IV. — Casos de igualdad de los paralelogramos.

144. Un paralelogramo puede considerarse como formado por el conjunto de dos triángulos; luego tendremos los mismos casos de igualdad que en los triángulos.

145. Primer caso. — Dos paralelogramos son iguales cuando tienen una diagonal igual y que forma con los lados ángulos respectivamente iguales.

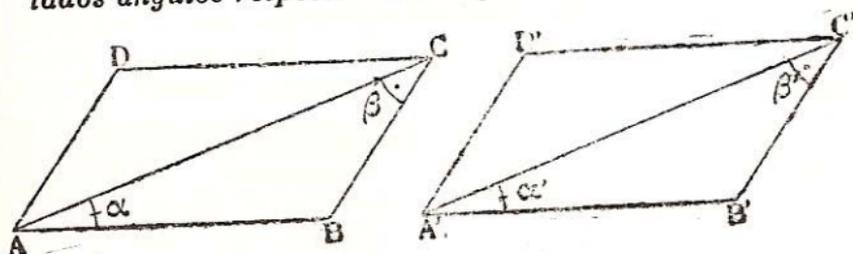


Fig. 79.

Sean los paralelogramos ABCD y A'B'C'D', tales que $AC = A'C'$, y $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$.

El triángulo ABC es igual al triángulo A'B'C' (n.º 114); cuando estos dos triángulos coinciden, las rectas CD y C'D' coinciden también, porque son dos paralelas a la recta AB, trazadas del mismo punto C (n.º 68); AD y A'D'

coinciden por el mismo motivo; los dos paralelogramos coinciden y son iguales.

146. Segundo caso. — *Dos paralelogramos son iguales, cuando tienen un ángulo igual, formado por dos lados respectivamente iguales.*

Sean los paralelogramos ABCD y A'B'C'D' (fig. 79), en los cuales $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, y los ángulos B y B' son iguales.

Los triángulos ABC y A'B'C' son iguales (nº 115) y hemos visto, en el caso anterior, que, cuando estos triángulos son iguales, los paralelogramos también son iguales.

147. Tercer caso. — *Dos paralelogramos son iguales cuando tienen los dos lados respectivamente iguales, y una diagonal igual.*

Sean los paralelogramos ABCD y A'B'C'D' (fig. 79) en los cuales $AB = A'B'$, $BC = B'C'$; $AC = A'C'$. Los triángulos ABC y A'B'C' son iguales (nº 116); y según lo que hemos visto en el primer caso, los paralelogramos también son iguales.

CAPÍTULO IV

POLÍGONOS CUALESQUIERA

§ I. — Definiciones.

148	El polígono de 5	lados se llama	pentágono.
—	6	—	exágono.
—	7	—	eptágono.
—	8	—	octágono.
—	9	—	eneágono.
—	10	—	decágono.
—	11	—	endecágono.
—	12	—	dodecágono.
—	15	—	pentedecágono.

Los demás polígonos no han recibido nombre particular; se dice: polígono de 14 lados, de 20 lados, etc.

149. **Polígono convexo** es aquel cuyo contorno ó perimetro no puede ser cortado en más de dos puntos por una línea recta.

El polígono no convexo (fig. 80) tiene ángulos mayores que dos ángulos rectos. Estos ángulos se llaman *ángulos entrantes*.

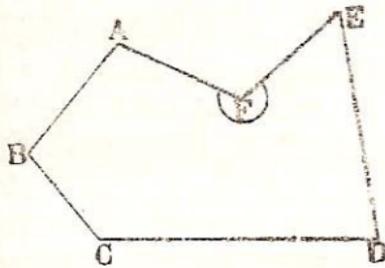


FIG. 80.

Un polígono es *equiángulo* cuando todos sus ángulos son iguales, y *equilátero* cuando todos sus lados son iguales.

Se llama **polígono regular** el que tiene todos sus lados y sus ángulos iguales.

Un polígono regular es á la vez equilátero y equiángulo.

Dos polígonos son *equiángulos* entre sí cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales; *equiláteros* entre sí, cuando tienen sus lados respectivamente iguales.

Se llama **ángulo exterior** de un polígono el ángulo formado por un lado cualquiera, y la prolongación del lado adyacente.

§ II. — Relaciones entre los ángulos.

150. **Teorema.** — La suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos.

Sea ABCDE un polígono cualquiera. Si se une el vértice A con los vértices no adyacentes por medio de las diagonales AC y AD, cada lado del polígono sirve de base á un triángulo, con

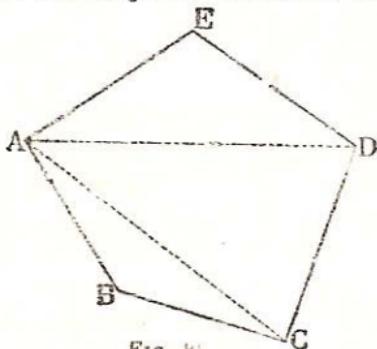


FIG. 81

excepción de los dos lados que forman el ángulo A.

Estando formados todos los ángulos de estos triángulos por los ángulos del polígono, la suma de estos últimos ángulos es igual á tantas veces dos rectos como triángulos hay ; es decir, á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos.

151. *Escolio.* — Si se representa por n el número de lados de un polígono, el número de triángulos formados por las diagonales que parten de un mismo vértice será $n - 2$, y la suma de los ángulos será $(n - 2) \times 2$ rectos ó $2nr - 4r$.

Si el polígono es regular, cada uno de los ángulos es igual á

$$\frac{(n - 2) \times 2r}{n} \text{ ó } \frac{2nr - 4r}{n} \text{ ó } 2r - \frac{4r}{n}.$$

152. *Teorema.* — La suma de los ángulos externos de un polígono cualquiera es igual á cuatro ángulos rectos.

En efecto, siendo n el número de lados, la suma de todos los ángulos, tanto internos como externos, es igual á n veces 2 rectos ; se tendrá pues, tomando el ángulo recto como unidad :

Suma de todos los ángulos : $2n$.

Suma de los ángulos internos (nº 150) : $2n - 4$.

Diferencia, para los ángulos externos : 4 ángulos rectos.

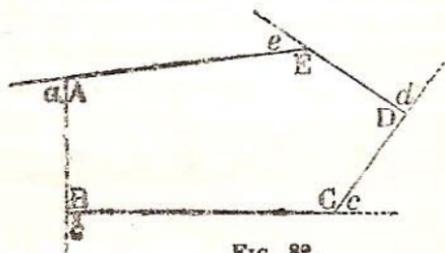


FIG. 82.

§ III. — Relaciones entre los lados.

153. *Teorema.* — Cada lado de un polígono es menor que la suma de los demás.

Sea un polígono ABCDE. Trazando las diagonales podemos escribir (nº 102) :

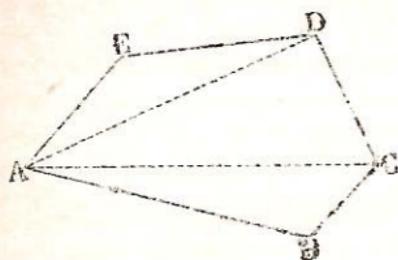


FIG. 83.

$$\begin{aligned} AB &< BC + AC \\ AC &< AD + CD \\ AD &< DE + EA \end{aligned}$$

y sumando ordenadamente:

$$AB < BC + CD + DE + EA.$$

154. Teorema. — *Toda línea poligonal convexa es menor que cualquier otra línea envolvente que tiene los mismos extremos.*

Sea ABCD una línea convexa envuelta por otra AEFD. Prolonguemos AB y BC.

Tenemos:

$$AB + BG < AE + EG$$

(n° 102)

$$BC + CH < BG + GF + FH \text{ (n° 153)}$$

$$CD < CH + HD$$

y sumando ordenadamente:

$$AB + BC + CD < AE + EF + FD.$$

§ IV. — Igualdad de los polígonos.

155. Teorema. — *Dos polígonos son iguales cuando tienen sus lados y sus ángulos respectivamente iguales.*

En efecto, en este caso, los dos polígonos pueden coincidir. Es fácil averiguarlo, transportando el primero sobre el segundo de modo que el ángulo EAB coincida con E'A'B' (fig. 85); se ve que los varios ángulos y lados del primero coinciden con sus correspondientes del segundo.

156. Teorema. — *Dos polígonos iguales pueden descomponerse en un mismo número de triángulos respectivamente iguales y dispuestos del mismo modo.*

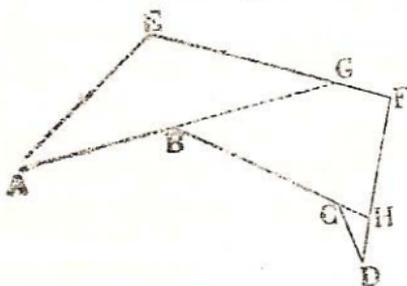


FIG. 84.

En efecto, siendo iguales los polígonos, pueden coincidir. Cuando coincidan, podremos trazar las líneas de división simultáneamente en ambos polígonos. Los triángulos ABC $A'B'C'$, etc., resultan evidentemente iguales.

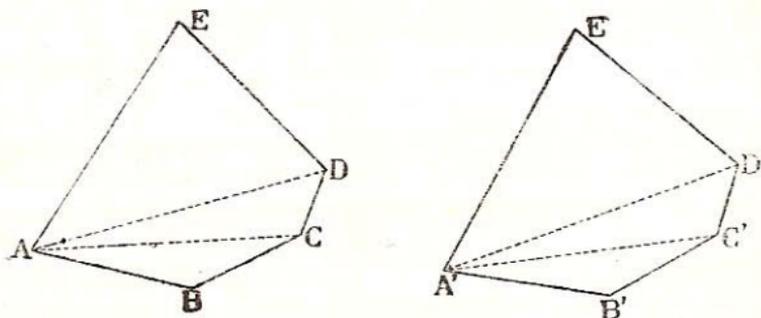


Fig. 85.

157. Recíproca. — *Si dos polígonos pueden descomponerse en un mismo número de triángulos respectivamente iguales, y dispuestos del mismo modo, son iguales.*

En efecto, pueden coincidir los triángulos, y por consiguiente los polígonos.

LIBRO II

CIRCUNFERENCIA

CAPÍTULO I

CIRCUNFERENCIA, CENTRO, DIÁMETRO

158. Definiciones. — *Circunferencia es una curva plana y cerrada cuyos puntos todos están equidistantes de otro punto interior llamado centro.*

Se llama radio la recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia. — EJEMPLO OL.

Círculo es la superficie plana limitada por la circunferencia.

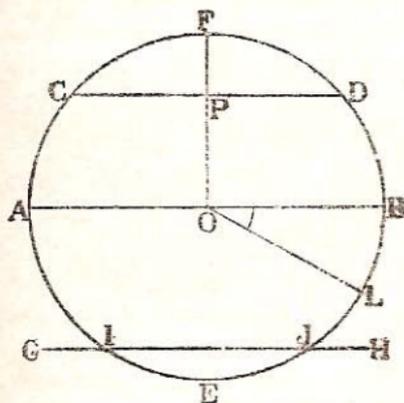


Fig. 86.

159. Simetría con relación al centro. — El centro de la circunferencia es un centro de simetría de la curva.

En efecto, sea una circunferencia de centro O (fig. 86); si el punto A pertenece á la circunferencia, su simétrico B pertenece también á la curva, porque $OA = OB$, por ser radios de la misma circunferencia.

160. Diámetro. — Diámetro de una circunferencia es una recta del plano de la circunferencia que pasa por el centro.

Llámanse también diámetro la parte de esta recta comprendida dentro de la circunferencia (v. gr.: AB , fig. 86). En este sentido, todos los diámetros son iguales y valen dos radios.

161. Simetría con relación á los diámetros. — Todo diámetro de una circunferencia es un eje de simetría de la curva.

Sea el diámetro AA' , y dos puntos M y M' de la circunferencia que pertenecen á una perpendicular á AA' .

Estos puntos son simétricos con relación á AA' ; en efecto, OM y OM' son iguales, por ser radios de la misma circunferencia, y las distancias PM y PM' son iguales (nº 105).

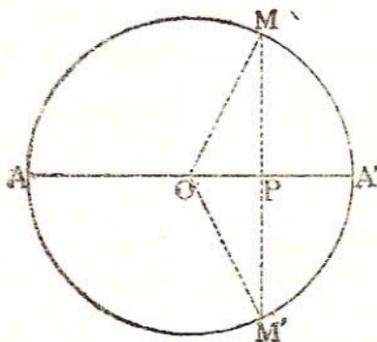


Fig. 87.

162. Teorema. — Todo diámetro divide la circunferencia y el círculo en dos partes iguales.

En efecto, las dos partes se pueden sobreponer, por ser simétricas, tanto con relación al diámetro como con relación al centro.

163. **Circunferencias iguales.** — Una circunferencia está determinada cuando se conoce su centro, su radio y su plano.

De esto se sigue que dos circunferencias que tienen el mismo radio son iguales y coinciden, cuando se sobreponen sus planos y sus centros.

CAPÍTULO II

ARCOS

§ I. — Medida de los arcos.

164. **Definición.** — *Arco de círculo es una parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de esta curva, que se llaman los extremos del arco.*

165. **Igualdad.** — *Dos arcos que tienen el mismo radio son iguales cuando pueden sobreponerse.*

166. **Adición.** — *Sumar dos arcos del mismo radio, es colocarlos sobre una misma circunferencia, de una y otra parte de un extremo común. La suma es el arco comprendido entre los extremos no comunes.*

167. **Divisibilidad.** — *Todo arco puede dividirse en un número cualquiera de partes iguales.*

168. **Medida de los arcos.** — *La medida de un arco es la razón que tiene con un arco del mismo radio, escogido como unidad.*

La unidad usual es el grado, ó $\frac{1}{360}$ de la circunferencia. Cada grado se divide en 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos.

A veces se emplea como unidad la cuarta parte de la circunferencia, llamada cuadrante, y que vale 90 grados.

La división centesimal, de la cual hemos hablado acerca de los ángulos (n° 49), se emplea á veces también para los arcos.

§ II. — Correspondencia entre los arcos y los ángulos en el centro.

169. Definición. — *Ángulo en el centro es el ángulo formado por dos radios.*

Todo ángulo en el centro intercepta un arco determinado, y recíprocamente.

170. Teorema. — *En un mismo círculo ó en círculos iguales :*

1° *Dos ángulos en el centro iguales interceptan arcos iguales;*

2° *El mayor ángulo en el centro intercepta el mayor arco.*

1° Sea el ángulo ABC igual á DEF. Se puede sobre-

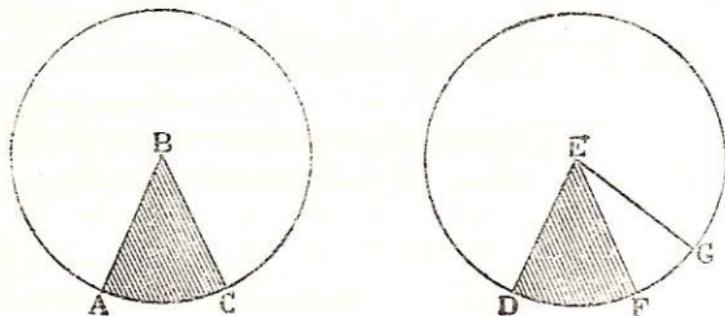


FIG. 88.

poner los dos círculos de manera que el radio BA se aplique sobre ED; el ángulo ABC se aplica sobre su igual DEF, y el arco AC se confunde con DF, luego estos arcos son iguales.

2° Sea el ángulo ABC menor que DEG.

Consideremos un ángulo DEF igual al ángulo ABC, de donde resulta el arco DF igual á AC (n° 170, 1°);

pero el arco DF no es más que una parte de DFG, en consecuencia el arco DG es mayor que el arco AC.

171. Teorema. — *En un mismo círculo ó en círculos iguales :*

1° *A arcos iguales corresponden ángulos en el centro iguales ;*

2° *Al mayor arco corresponde el mayor ángulo.*

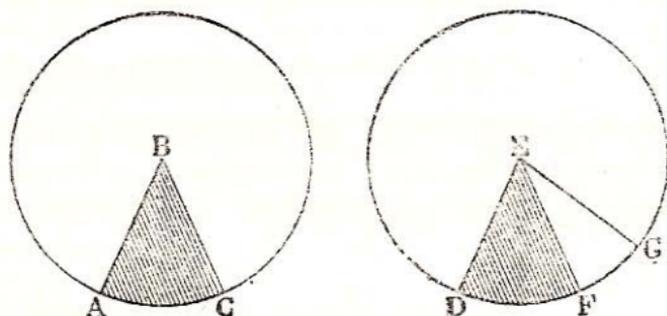


FIG. 89.

1° Sea el arco AC igual á DF. De donde resulta que el ángulo ABC es igual á DEF, porque si estos ángulos fueran desiguales, los arcos interceptados lo serían también (n° 170, 2°);

2° Sea el arco AC menor que DG. De donde resulta que el ángulo ABC también es menor que DEG; porque si estos ángulos fueran iguales, los arcos interceptados también lo serían (n° 170, 1°); y si el ángulo ABC fuera mayor que DEG, el arco AC sería también mayor que DG, lo que es contrario á la hipótesis.

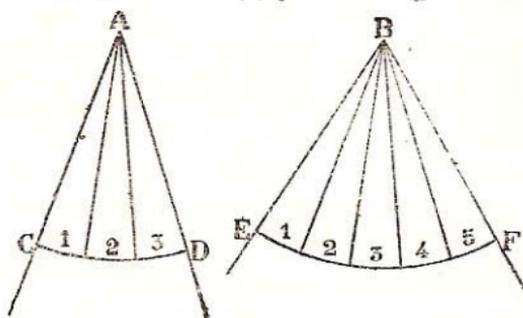


FIG. 90.

172. Teorema.

— *Dos ángulos cualesquiera son entre sí como los*

arcos comprendidos entre sus lados, y descritos desde sus vértices con un mismo radio.

Sean A y B dos ángulos cualesquiera, CD y EF los arcos comprendidos entre sus lados. Vamos á demostrar que se tiene:

$$\frac{\text{ángulo A}}{\text{ángulo B}} = \frac{\text{arco CD}}{\text{arco EF}}$$

1° Admitamos que los arcos CD y EF tengan una medida común, que esté contenida, por ejemplo, 3 veces en CD, y 5 veces en EF; estos arcos son entre sí como los números 3 y 5, y tenemos:

$$\frac{\text{arco CD}}{\text{arco EF}} = \frac{3}{5}$$

Unamos los centros A y B con los puntos de división de los dos arcos; siendo iguales los arcos parciales, determinan en los centros ángulos iguales (n° 170); el ángulo A contiene 3 de estos ángulos iguales, y el ángulo B contiene 5; por tanto tenemos:

$$\frac{\text{ángulo A}}{\text{ángulo B}} = \frac{3}{5} \text{ de donde se deduce}$$

$$\frac{\text{ángulo A}}{\text{ángulo B}} = \frac{\text{arco CD}}{\text{arco EF}}$$

2° Si los arcos no tienen ninguna medida común,

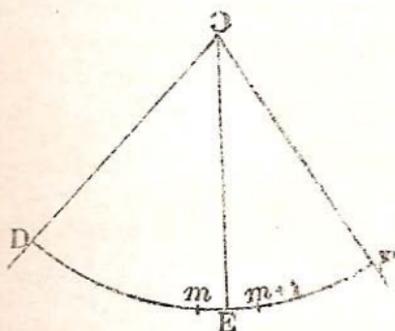


FIG. 91.

se lleva el ángulo menor DOE sobre el mayor DOF, y se supone el arco DF dividido en un número cualquiera n de partes iguales. El punto E se encuentra entre dos puntos de división, por ejemplo entre el m^o y el punto siguiente, marcado $m + 1$.

$$\text{En consecuencia: } \frac{m}{n} < \frac{\text{arco DE}}{\text{arco DF}} < \frac{m+1}{n}$$

Si se une cada punto de división con el punto O, el ángulo DOF queda dividido en n partes iguales, y el ángulo DOE es mayor que m de estos ángulos parciales y menor que $m + 1$ de estos mismos ángulos.

$$\text{Luego: } \frac{m}{n} < \frac{\text{ángulo DOE}}{\text{ángulo DOF}} < \frac{m+1}{n}.$$

En ambos casos, las razones extremas $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$ ó $\frac{m}{n}$ y $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ difieren de $\frac{1}{n}$; por consiguiente si se divide DF en un gran número de partes iguales, la diferencia $\frac{1}{n}$ pudiendo llegar á ser tan pequeña como se quiera, tiende hacia cero; y en todos casos se tiene la proporción

$$\frac{\text{ángulo DOE}}{\text{ángulo DOF}} = \frac{\text{arco DE}}{\text{arco DF}}$$

173. Corolarios. — *Un ángulo cualquiera es al ángulo recto como el arco comprendido entre los lados de este ángulo es al cuadrante.*

Del mismo modo: *Un ángulo cualquiera es al ángulo de un grado como el arco comprendido entre los lados de este ángulo es al arco de un grado.*

En otros términos: *La relación de un ángulo cualquiera al ángulo unidad es la misma que la relación del arco comprendido al arco unidad:*

$$\begin{aligned} \frac{\text{ángulo CAD}}{\text{ángulo unidad}} &= \frac{\text{arco CD}}{\text{arco unidad}} \quad \text{ó} \quad \frac{\text{ángulo CAD}}{1} \\ &= \frac{\text{arco CD}}{1}. \end{aligned}$$

Lo que se expresa ordinariamente como sigue:

Un ángulo cualquiera tiene por medida el arco comprendido entre sus lados, y descrito desde su vértice con un radio arbitrario.

§ III. — Correspondencia entre los arcos y sus cuerdas.

174. Definiciones. — *Cuerda es una recta que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.* — Tal es AB (fig. 92).

Se dice que la cuerda *subtiende* el arco que termina en los extremos de dicha cuerda. En realidad, una cuerda DF corresponde a dos arcos DEF y DCF; pero, salvo indicación contraria, cuando se habla del arco *subtendido* por una cuerda dada, no se quiere designar más que el menor de los dos arcos.

Segmento circular es la superficie comprendida entre un arco y la cuerda que la subtiende. — EJEMPLO: DFE.

175 Teorema. — El diámetro es la mayor cuerda del círculo.

En efecto, el diámetro COD es igual á la suma de los

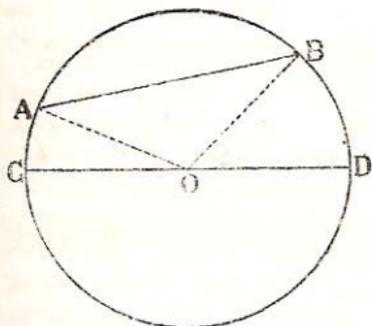


FIG. 92.

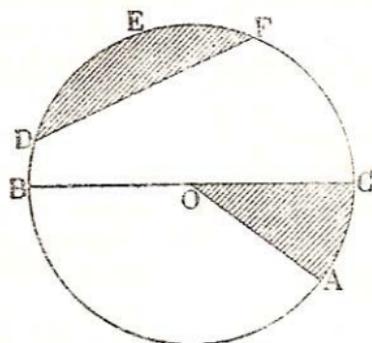


FIG. 93.

dos lados OA y OB, en el triángulo OAB; pero la suma $OA + OB$ es mayor que el tercer lado AB; luego $CD > AB$.

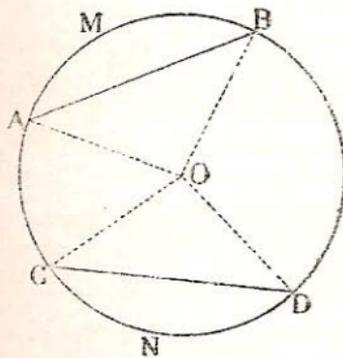


FIG. 94.

176. Teorema. — En un mismo círculo, ó en círculos iguales:

1º Dos arcos iguales están subtendidos por cuerdas iguales;
2º El mayor arco está subtendido por la mayor cuerda.

1º Sean AMB y CND, dos arcos iguales; tracemos los radios OA, OB, OC, OD.

Siendo iguales dos arcos AMB y CND, los ángulos en el centro AOB y COD lo son también (nº 174); luego los

triángulos AOB y COD son iguales por tener un ángulo igual en O, formado por lados iguales, luego AB es igual á CD.

2° Sea el arco AMB mayor que CND; tracemos los radios OA, OB, OC, OD.

Puesto que el arco AMB es mayor que CND, el ángulo en el centro AOB también es mayor que COD (n° 171); así es que los dos triángulos AOB y COD tienen dos lados respectivamente iguales, y el ángulo comprendido AOB mayor que COD; por consiguiente, el tercer lado AB es mayor que CD (n° 118).

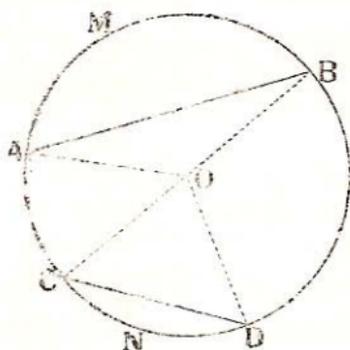


FIG. 95.

177. Teorema. — *En un mismo círculo, ó en círculos iguales :*

1° *Dos cuerdas iguales subtienden arcos iguales ;*

2° *La cuerda mayor subtiende el arco mayor.*

1° En el caso de que las cuerdas sean iguales, no se podría suponer la desigualdad de los arcos, puesto que esta hipótesis traería consigo la desigualdad de las cuerdas (n° 176, 2°).

2° Consideremos una cuerda mayor. Si los arcos fueran iguales, las cuerdas también lo serían, y si el primer arco fuera menor que el segundo, la primera cuerda sería menor que la segunda, lo que es contrario á la hipótesis.

178. Observación. — *En todas estas relaciones, es preciso no considerar más que arcos menores que la semicircunferencia. Cuando un arco excede de la semicircunferencia, su cuerda disminuye al aumentar el arco.*

CAPÍTULO III

POSICIONES RELATIVAS DE UNA CIRCUNFERENCIA Y DE UN PUNTO

179. Interior y exterior de una circunferencia. — Un punto del plano de una circunferencia es interior á ella cuando su distancia al centro es menor que el radio; el punto es exterior á la circunferencia cuando su distancia al centro es mayor que el radio.

180. Distancia de un punto á la circunferencia. — La distancia de un punto á una circunferencia es la menor distancia que se pueda encontrar entre este punto y un punto de la circunferencia. El Teorema siguiente da el medio de encontrarla.

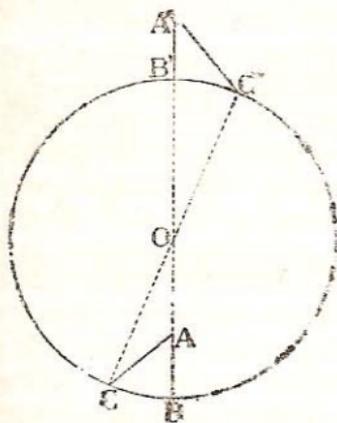


Fig. 96.

ó

de donde, restando OA :

181. Teorema. — La menor distancia de un punto á una circunferencia es la parte del radio, ó del radio prolongado, comprendida entre dicho punto y la circunferencia.

1º Sean A un punto interior, OB el radio trazado por este punto, y AC una recta trazada desde este mismo punto á un punto cualquiera de la circunferencia.

Trazando el radio OC, se tiene :

$$OC < OA + AC$$

$$OA + AB < OA + AC$$

$$AB < AC$$

2º Sean A' un punto exterior, OA' la recta que une este punto con el centro, y A'C' una recta trazada desde este mismo punto á un punto cualquiera de la circunferencia.

Trazando el radio OC', se tiene :

$$A'B' + B'O < A'C' + C'O$$

de donde, restando OB' y OC' :

$$A'B' < A'C'$$

182. Corolarios. — 1º La recta AB (fig. 96) es la verdadera distancia del punto A á la circunferencia; del mismo modo que A'B' es la verdadera distancia de A'.

2º El lugar geométrico de los puntos situados á una distancia dada a de una circunferencia de radio r , se compone de otras dos circunferencias concéntricas á la primera, y que tienen por radios, una $r+a$, y la otra $r-a$.

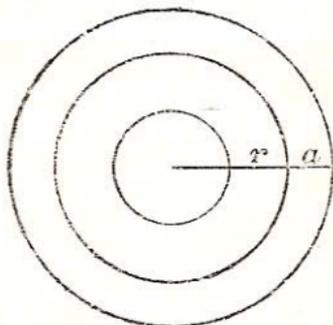


FIG. 97.

CAPÍTULO IV

POSICIONES RELATIVAS DE UNA CIRCUNFERENCIA Y DE UNA RECTA

§ I. — Teoremas generales.

183. Teorema. — Una línea recta no puede tocar á la circunferencia en más de dos puntos.

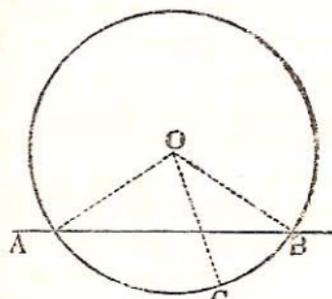


FIG. 98.

La recta AB toca á la circunferencia en A y en B. Si se supusiera que un tercer punto C pudiera pertenecer á la circunferencia y á la recta, se podría bajar, desde el punto O á la misma recta AB, tres rectas iguales, lo que es imposible (nº 105, 5º).

184. Corolario. — La circunferencia es una línea curva; no es recta en ninguna parte, porque no puede tener más de dos puntos que pertenezcan á la misma recta.

185. Teorema. — Una recta encuentra una circunferencia en dos puntos, si su distancia al centro es menor que el radio; en un punto, si esta distancia es igual al

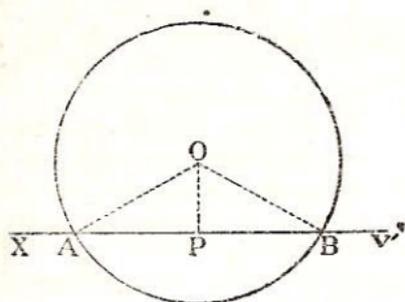


FIG. 99.

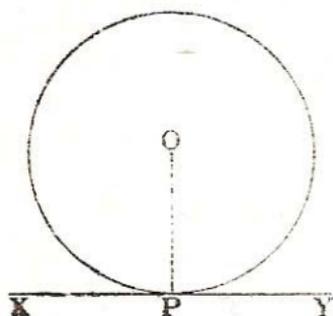


FIG. 100.

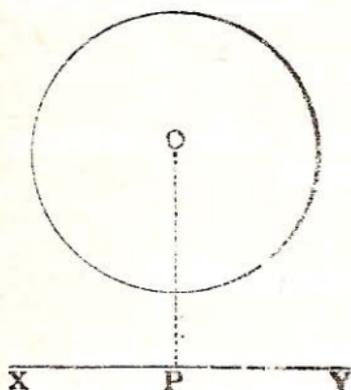


FIG. 101.

radio; en ninguno, si esta distancia es mayor que el radio.

Sea una recta XY y una circunferencia O de radio R . Del centro O bajemos la perpendicular OP .

1° Si $OP < R$, existen sobre XY dos puntos A y B , tales que $OA = OB = R$. Estos puntos pertenecen á la circunferencia.

2° Si $OP = R$, el punto P pertenece á la circunferencia; los demás puntos de XY distan más de O y son ex-

teriores á la circunferencia.

3° Si $OP > R$, el punto P es exterior á la circunferencia, y *á fortiori* los demás puntos de XY .

§ II. — Secantes.

186. Definición. — Una secante es una recta que corta la circunferencia en dos puntos.

El Teorema anterior dió á conocer la existencia de estas rectas.

187. Teorema. — *En un mismo círculo, ó en círculos iguales :*

1° *Dos cuerdas iguales están igualmente distantes del centro ;*

2° *La cuerda mayor está más cerca del centro.*

1° Sean AB y CD dos cuerdas iguales, OE y OF las perpendiculares que representan las distancias de estas cuerdas al centro.

Si se supone que el arco CD se mueve sobre la circunferencia hasta que coincida con el arco BA , las cuerdas CD y BA coinciden también, y OF y OE son dos perpendiculares bajadas de un mismo punto á una misma recta ; luego coinciden y son iguales.

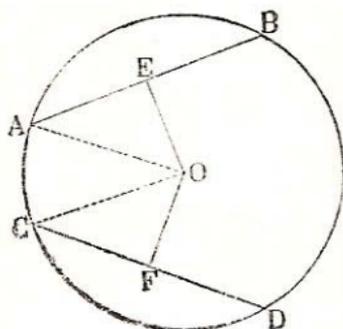


FIG. 102.

2° Sea la cuerda AB menor que CD , y sean OF y OG las distancias de estas cuerdas al centro O .

El arco AMB es menor que CND (n° 177) ; luego si se lleva el primer arco sobre CNE , la cuerda CE , igual á AB , se encontrará en el segmento CND ; pero la perpendicular OG es menor que la oblicua OI ; luego, con más razón, OG es menor que OH ó que su igual OF .

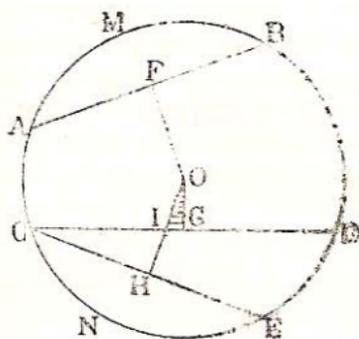


FIG. 103.

188. Recíproca. — 1° *Dos cuerdas equidistantes del centro son iguales ;* porque si fueran desiguales, sus distancias al centro también serían desiguales.

2° *La cuerda más cercana del centro es la mayor ;* porque si las cuerdas fueran iguales, estarían equidistantes del centro ; y si la primera cuerda fuera menor que la segunda, su distancia al centro sería mayor, lo que es contrario á la hipótesis.

§ III. — Tangentes.

189. Definiciones. — Se llama *tangente* una recta indefinida que no tiene más que un punto común con la circunferencia. Este punto común se llama *punto de contacto*.

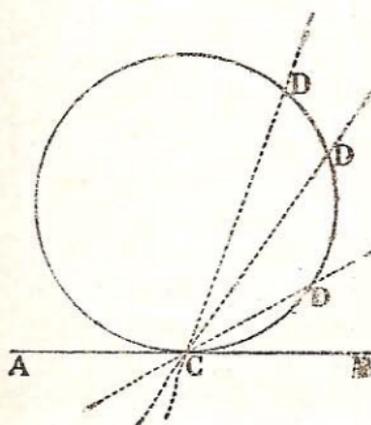


Fig. 104.

Cuando una recta es tangente á una circunferencia, la circunferencia es igualmente tangente á la recta.

La tangente debe considerarse como el límite de las posiciones que toma una secante CD que gira al rededor del punto C, tendiendo el segundo punto de intersección á confundirse con el primero.

Recta normal en un punto de una curva es la perpendicular á la tangente trazada por este mismo punto.

190. Teorema. — Toda recta perpendicular á la extremidad de un radio es tangente á la circunferencia.

Sea la recta AB perpendicular á la extremidad del radio OC.

El radio OC es al mismo tiempo perpendicular á AB, y cualquiera otra recta OD es oblicua, por consiguiente mayor que el radio OC, y el punto D queda fuera del círculo. Así es que la recta AB no tiene más que el punto C común con la circunferencia.

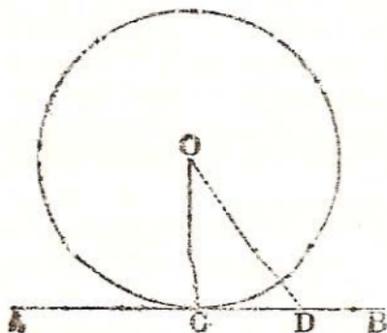


Fig. 105.

191. Recíproca. — La recta tangente á una circunferen-

cia es perpendicular al radio que termina en el punto de contacto.

Sea OC el radio trazado en el punto de contacto de la tangente AB.

Estando fuera del círculo todos los puntos de AB, con excepción de C, OC es la línea más corta que se puede trazar desde el punto O á la recta AB.

Por tanto OC es perpendicular á AB, y recíprocamente AB es perpendicular á OC.

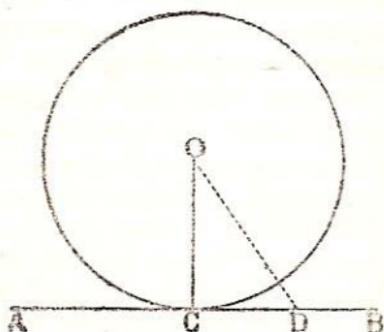


Fig. 106.

192. Corolarios. — 1º En todo punto de la circunferencia, se le puede trazar una tangente, y sólo una ;

2º La perpendicular bajada del centro sobre la tangente pasa por el punto de contacto ;

3º Todos los puntos de la tangente son exteriores al círculo, con excepción del punto de contacto ;

4º Se puede trazar á una circunferencia dos tangentes paralelas á una dirección dada ; son perpendiculares en los extremos del diámetro perpendicular á esta dirección.

§ IV. — Diámetros.

193. Teorema. — Todo diámetro perpendicular á una cuerda divide á esta cuerda y el arco subtendido en dos partes iguales.

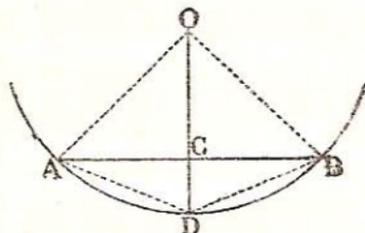


Fig. 107.

En efecto, las dos partes de la cuerda y del arco son simétricas con relación al diámetro (nº 161), y son iguales.

194. Escolios. — I. El centro, el punto medio de la cuerda y los puntos medios de los dos arcos subtendidos

están en una misma línea recta, que es perpendicular á la cuerda.

La recta determinada por cualesquiera de estas dos condiciones satisface también las otras; por ejemplo, la perpendicular levantada por la mitad de una cuerda pasa por el centro del círculo, y por los puntos medios de los arcos subtendidos.

II. Para dividir un arco en dos partes iguales, basta levantar una perpendicular en medio de la cuerda que subtiende este arco.

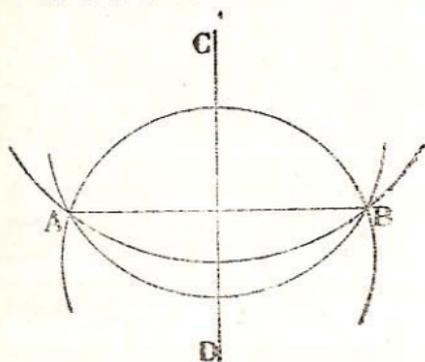


FIG. 108.

III. La perpendicular indefinida CD, trazada por la mitad de una recta AB, es el lugar de los centros de las circunferencias que pasan por las extremidades A y B de esta recta.

VI. Los puntos medios de las cuerdas paralelas á una misma dirección están en el diámetro perpendicular á esta dirección.

Diámetros conjugados. — Dos diámetros perpendiculares entre sí se llaman diámetros conjugados. Cada uno de ellos es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro.

195. Teorema. — Los arcos de un mismo círculo comprendidos entre dos paralelas son iguales.

1º Sean los arcos AC y BD, comprendidos entre las cuerdas paralelas AB y CD. Tiremos el radio OI perpendicular á AB, y por consiguiente á CD (nº 70). El

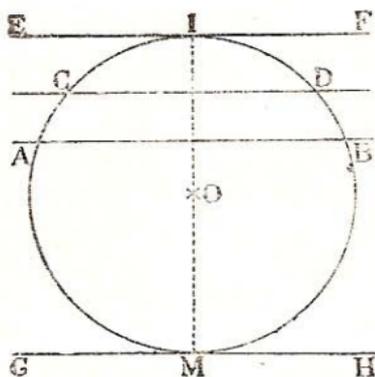


FIG. 109.

punto I es el medio del arco AIB, y al mismo tiempo el medio del arco CID (nº 164); resulta pues:

$$\begin{aligned} IA &= IB \\ IC &= ID \end{aligned}$$

de donde, restando miembro á miembro,

$$AC = BD.$$

2º Sea la cuerda CD paralela á la tangente EF. El radio OI llevado al punto de contacto es perpendicular á EF (nº 191), y por consiguiente á CD; divide, pues, el arco subtendido CID en dos partes iguales.

3º Sea por último el caso de dos tangentes paralelas EF y GH. Tracemos una cuerda cualquiera AB paralela á EF, y por consiguiente también á GH (nº 69). En virtud de lo que acaba de demostrarse resulta:

$$\begin{aligned} IA &= IB \\ MA &= MB \end{aligned}$$

de donde, sumando miembro á miembro,

$$IAM = IBM.$$

196. Escolio. — *Si dos tangentes EF y GH son paralelas, los radios OI y OM tirados á los puntos de contacto están en línea recta. Porque el radio OI, perpendicular á EF, es también perpendicular á GH, y se confunde por consiguiente con OM.*

CAPÍTULO V

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

197. Teorema. — *Por tres puntos que no están en línea recta se puede hacer pasar una circunferencia, y sólo una.*

Uniendo los tres puntos, se forma un triángulo, cuyas mediatrices se cortan en un mismo punto O que equidista de los tres vértices (nº 128). Haciendo centro en este punto, y tomando un radio OA, se puede trazar

una circunferencia que pasará por B y C, porque $OB = OC = OA$.

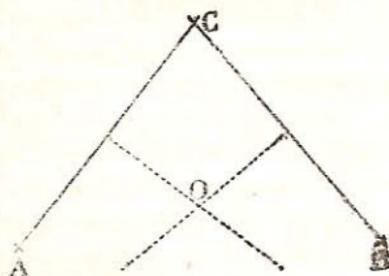


Fig. 110.

Por no haber otro punto que equidiste de A, B, C, no hay otro centro ni otra circunferencia.

198. Escelios. — I. Dos círculos no pueden cortarse más que en dos puntos.

II. Para encontrar el centro de un arco dado ABC, basta trazar dos cuerdas no paralelas AB y BC y levantar perpendiculares por sus puntos medios.

III. Si se hace pasar una circunferencia por los tres vértices de un triángulo, esta circunferencia es circunscrita al triángulo, y el triángulo es inscrito en la circunferencia.

199. Teorema. — Si dos circunferencias tienen un punto común fuera de la recta de los centros, tienen igualmente otro punto común simétrico del primero.

Sean O y C los centros de dos circunferencias, y sea A un punto común, fuera de la línea de los centros. Tracemos AA' perpendicular á OC, y hagamos $DA' = DA$. Se trata de demostrar que el punto A' simétrico de A con relación á OC, es común á las dos circunferencias.

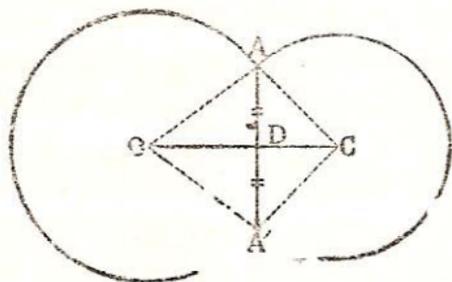


Fig. 111.

Tracemos OA, OA', CA, CA'. En virtud de las construcciones, la recta OC es perpendicular en la mitad de AA'; y por estar equidistante de los extremos de una recta cualquier punto

de la perpendicular levantada por la mitad de dicha recta OA' es igual á OA, radio de la primera circunferencia; del mismo modo CA' es igual á CA, radio de la

segunda circunferencia. Luego el punto A' pertenece á las dos circunferencias.

200. Corolarios. — 1° Si dos circunferencias se cortan, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios, y mayor que su diferencia. Porque en este caso, se puede construir un triángulo AOC con los dos radios y la distancia de los centros (n° 102).

2° Cuando dos circunferencias se cortan, la recta de los centros es perpendicular en la mitad de la cuerda común. Porque cada centro equidista de las extremidades de esta cuerda.

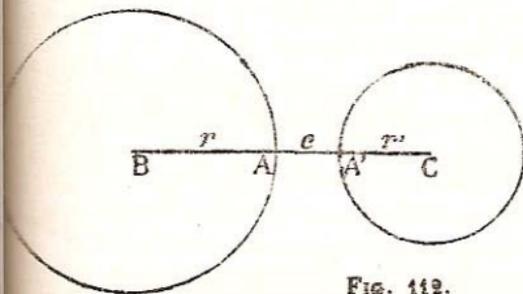
201. De iniciación. — Dos circunferencias son tangentes cuando se tocan en un solo punto.

Circunferencias secantes son dos circunferencias que se cortan.

202. Teorema. — Si dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto está sobre la recta de los centros. Porque, si estuviera fuera de esta línea, habría otro punto común simétrico del primero, y las dos circunferencias serían secantes.

203. Teorema. — Si dos circunferencias son tangentes, la perpendicular levantada sobre la recta de los centros por el punto de contacto es una tangente común á las dos circunferencias; porque esta recta es perpendicular á la extremidad de cada uno de los dos radios.

204. Escolio. — Dos circunferencias pueden ocupar,



BC

FIG. 112.

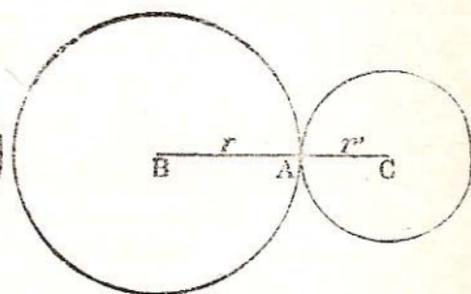


FIG. 113.

una con respecto á la otra. seis posiciones diferentes :

1° Pueden ser exteriores; entonces la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios (fig. 112):

$$d = (r + r') + e.$$

2° Pueden ser tangentes exteriormente, en este caso la distancia de los centros es igual á la suma de los radios (fig. 113):

$$d = r + r'.$$

3° Pueden ser secantes; entonces la distancia de los centros está comprendida entre la suma y la diferencia de los radios (fig. 114):

$$(r + r') > d > (r - r').$$

4° Pueden ser tangentes interiormente, y en este caso la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios (fig. 114):

$$d = r - r'.$$

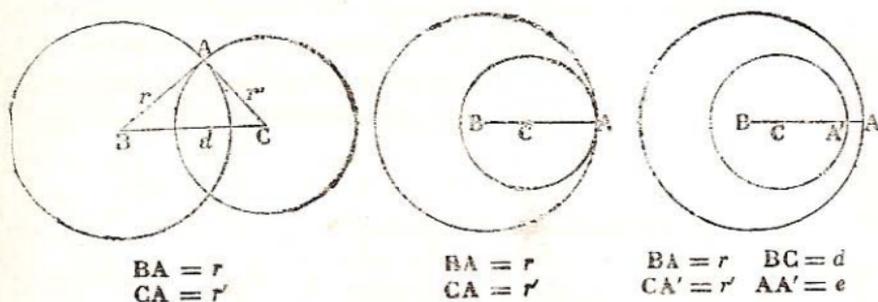


Fig. 114.

5° Por último, pueden ser interiores la una á la otra; entonces la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios (fig. 114):

$$d = (r - r') - e.$$

6° Dos circunferencias interiores pueden ser concéntricas, es decir tener el mismo centro; entonces el espacio comprendido entre las dos circunferencias recibe el nombre de corona.

205. Observación. — Los seis enunciados relativos á las posiciones respectivas de dos circunferencias dan

lugar á seis proposiciones recíprocas, que se demuestran por reducción al absurdo. — Por ejemplo, si se da la distancia de los centros igual á la diferencia de los radios, las circunferencias no pueden ser exteriores, ni interiores, ni secantes, ni tangentes exteriormente; son, pues tangentes interiormente.

CAPÍTULO VI

VALUACIÓN DE LOS ÁNGULOS

§ I. — Ángulos en el centro.

206. **Ángulo en el centro.** — *Un ángulo cualquiera puede hacerse ángulo en el centro, porque basta describir una circunferencia con un radio cualquiera, haciendo centro en el vértice del ángulo.*

Se sabe que, en unos círculos iguales, los ángulos en el centro son proporcionales á los arcos correspondientes (nº 172).

207. **Teorema.** — *La medida de un ángulo en el centro es igual á la medida del arco comprendido entre sus lados, con tal que se tome como unidad de arco el arco correspondiente á la unidad de ángulo.*

Sea α la medida del ángulo y a la del arco; por ser proporcionales estas cantidades, tenemos $\alpha = Ka$ siendo K una constante.

Si se compara el ángulo unidad y el arco unidad, tenemos $1 = K \times 1$; luego $K = 1$, y $\alpha = a$.

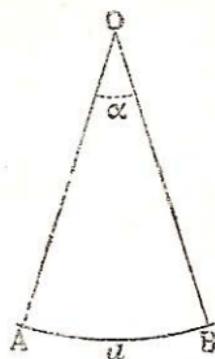


FIG. 115.

§ II. — Ángulos cuyo vértice está en la circunferencia.

208. **Ángulo del segmento.** — *Ángulo del segmento, ó ángulo semi-inscrito es el que tiene su vértice en la circunferencia, y cuyos lados son una cuerda y una tangente.*

209. **Teorema.** — *El ángulo del segmento tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

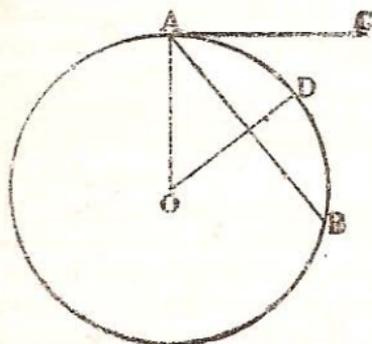


Fig. a.

Sea el ángulo CAB. Desde el centro O, bajemos OA, perpendicular á AC, y OD, perpendicular á AB. Los ángulos CAB y AOD son iguales, por tener sus lados respectivamente perpendiculares (nº 78); pero AOD tiene como medida el arco AD, que es la mitad del arco ADB (nº 193); luego, el ángulo CAB tiene como medida la mitad del arco ADB.

210. **Ángulo inscrito.** — *Ángulo inscrito es el ángulo formado por dos cuerdas que salen del mismo punto.*

211. **Teorema.** — *El ángulo inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

Sea el ángulo DAC. Tracemos la tangente AB. El ángulo inscrito DAC es la diferencia de los ángulos semi-inscritos BAD y BAC; luego

$$\begin{aligned} \text{áng. CAD} &= \frac{\text{arco ACD}}{2} \\ - \frac{\text{arco AC}}{2} &= \frac{\text{arco CD}}{2} \end{aligned}$$

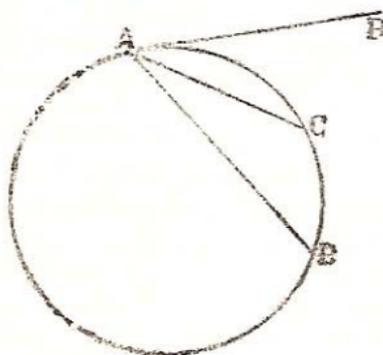


Fig. b.

212. **Corolarios.** — 1º *Todos los ángulos M, M', ins-*

critos en un mismo segmento, son iguales; porque todos tienen por medida la mitad del arco BNC del segmento opuesto; el segmento BMC se llama capaz del ángulo M.

2º Todo ángulo inscrito en un semicírculo es recto; porque tiene por medida la mitad de una semicircunferencia, ó un cuadrante.

3º Todo ángulo M inscrito en un segmento mayor que el semicírculo es agudo; y cualquier ángulo N inscrito en un segmento menor que el semicírculo es obtuso.

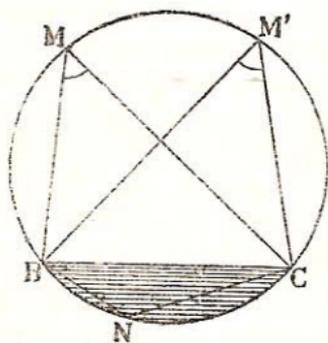


Fig. 116.

4º Dos ángulos M y N, inscritos en los dos segmentos determinados por una misma cuerda BC, son suplementarios; porque juntos tienen por medida la mitad de la circunferencia.

§ III. — Ángulos cuyo vértice no está en la circunferencia.

213. Teorema. — El ángulo que tiene su vértice en el interior de la circunferencia tiene por medida la suma de los arcos comprendidos entre sus lados y entre sus prolongaciones.

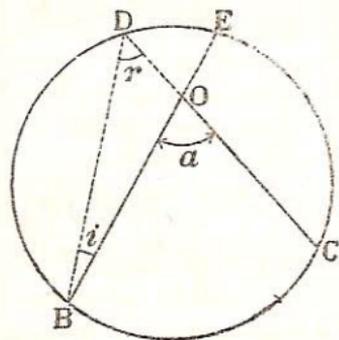


Fig. 117.

Sea el ángulo BOC ó a prolonguemos los lados BO y CO, y tiremos la recta BD.

El ángulo a , exterior al triángulo BOD, es igual á la suma de los dos ángulos interiores opuestos r é i (nº 97); siendo inscritos estos dos ángulos, el primero tiene por medida $\frac{1}{2}$ BC, y el segundo $\frac{1}{2}$ DE; luego

el ángulo a tiene por medida $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ DE.

214. Teorema. — El ángulo formado por dos secantes

que se encuentran fuera del círculo tiene por medida la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.

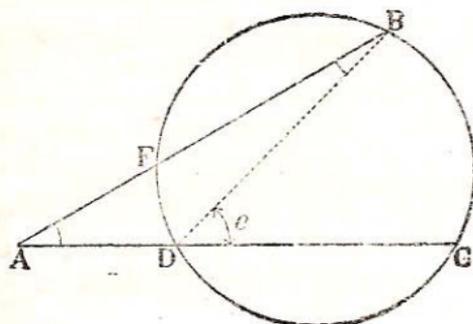


FIG. 118.

Sea el ángulo BAC ó A; tracemos la cuerda BD. El ángulo e es exterior al triángulo BAD, por lo que se tiene $A + B = e$, de donde

$$A = e - B.$$

Por ser inscritos estos dos últimos ángulos, tienen respectivamente por medida $1/2 BC$ y $1/2 DF$, y el ángulo A tendrá por medida $1/2 BC - 1/2 DF$.

215. Escolios. — I. La demostración es aplicable al caso en que las secantes lleguen á ser tangentes; por ejemplo, si la recta AB es tangente, el

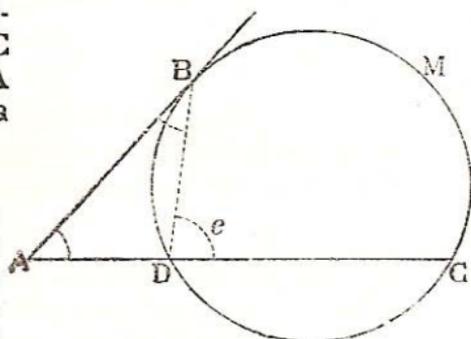


FIG. 119.

ángulo B es un ángulo del segmento; se tiene todavía $A = e - B$, de donde la medida de A es igual á

$$1/2 BC - 1/2 BD.$$

II. El ángulo BAC ó a , formado por una cuerda AB y la prolongación AC de otra cuerda es el suplemento del ángulo BAD

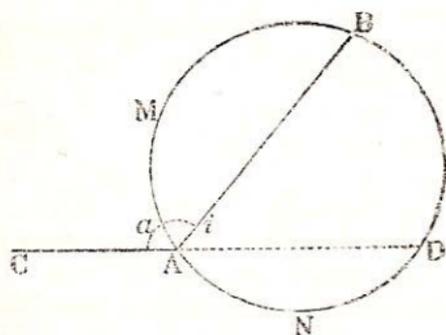


FIG. 120.

ó i . Estos dos ángulos tienen pues en conjunto por

medida una semicircunferencia; teniendo el ángulo i por medida $1/2$ BD , el ángulo a tendrá por medida la mitad del resto, ó sea $1/2$ $AMB + 1/2$ AND ; esto es, la mitad del arco comprendido entre los lados, más la mitad del arco comprendido entre sus prolongaciones, siendo esto cierto para todo ángulo que tiene su vértice en el círculo.

§ IV. — Aplicaciones.

216. Teorema. — *El arco de un segmento es el lugar de los vértices de los ángulos inscritos que tienen por medida la mitad del arco opuesto.*

Sea el segmento ACB :

1º Todos los ángulos inscritos C, C' son iguales entre sí (nº 212);

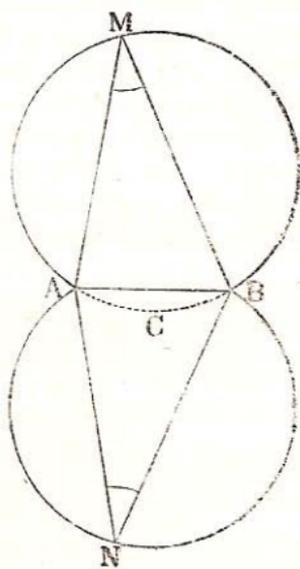


Fig. 122.

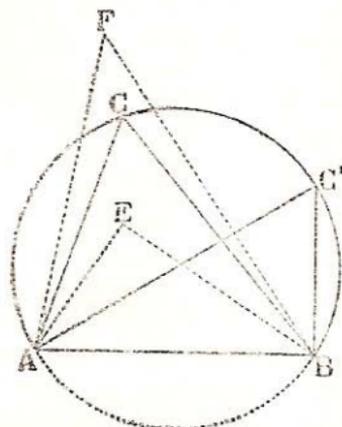


Fig. 121.

2º Todo ángulo cuyo vértice E se encuentra en el interior del segmento tiene una medida mayor que la mitad de ADB (nº 213); y todo ángulo F cuyo vértice está en el exterior del segmento tiene una medida menor que $1/2$ ADB (nº 214).

217. Escolio. — *El lugar de los vértices de los ángulos iguales cuyos lados pasan por dos puntos A y B , se compone de dos arcos simétricos AMB, ANB .*

218. Definición. — *Cuadrilátero inscrito en una circunferencia es aquel cuyos vértices están en la circunferencia y cuyos lados son unas cuerdas. V. gr. : El cuadrilátero ABCD.*

219. Teorema. — *En un cuadrilátero inscrito, los ángulos opuestos son suplementarios.*

Sea ABCD un cuadrilátero inscrito. Todos los ángulos son inscritos; y dos ángulos opuestos, tales como A y C, tienen juntamente por medida $\frac{1}{2} \text{BCD} + \frac{1}{2} \text{BAD}$, es decir la mitad de la circunferencia; luego estos ángulos son suplementarios.

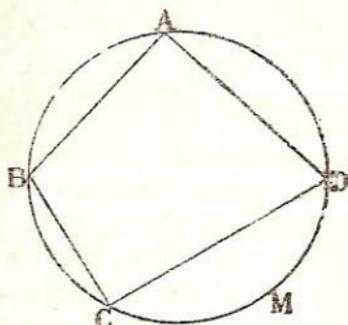


FIG. 123.

220. Recíproca. — *Todo cuadrilátero que tiene dos ángulos opuestos suplementarios es inscribible.*

Sea ABCD un cuadrilátero en el que los ángulos opuestos A y C son suplementarios. Si se hace pasar una circunferencia por los tres puntos B, A, D, el ángulo A será inscrito y tendrá por medida la mitad del arco BMD. El ángulo C, suplemento de A, tendrá una medida igual a la mitad del arco restante BAD; así es que el punto C está necesariamente sobre el arco BMD (n° 212).

CAPÍTULO VII

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

§ I. — Instrumentos.

221. Los principales instrumentos empleados para trazar las figuras geométricas son : la regla y el compás.

La práctica del dibujo utiliza además la escuadra y el transportador.

La regla sirve para trazar líneas rectas; el compás

para describir circunferencias ó arcos ; la escuadra para construir ángulos rectos y perpendiculares ; el transportador, para medir y construir cualquiera clase de ángulos.

222. Verificaciones. — Se verifica la *regla* por un doble trazo que se hace entre dos puntos,



FIG. 125.

límetros, muy útiles para el dibujo de las figuras. Tales son los *dobles decímetros*.

Se verifica la *escuadra* por una doble colocación á lo largo de una regla ; si la escuadra es defectuosa, la mediana de las dos posiciones da la verdadera dirección de la perpendicular.

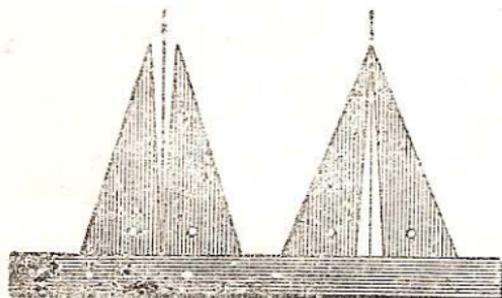


FIG. 126.

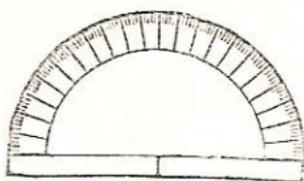


FIG. 124.

volteando la regla.

Algunas reglas, cortadas en bisel, tienen divisiones métricas en centímetros y en mi-

§ II. — Problemas con relación á las rectas y á los ángulos.

1. — RECTA.

223. Problema. — *Trazar una perpendicular por la mitad de una recta dada AB. — Dividir una recta dada AB en dos partes iguales.*

Desde los extremos A y B, con un mismo radio, se

describen arcos que se corten en C y D, y se traza la recta CD, que satisface la condición pedida. Porque estando el punto C equidistante de A y de B, pertenece á la perpendicular levantada por la mitad de AB; y lo mismo sucede con el punto D (nº 108).

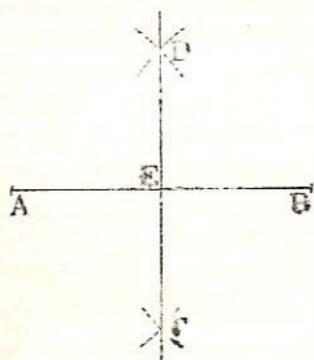


FIG. 127.

224. Escolio. — Repitiendo la construcción sobre cada parte obtenida, se divide la recta sucesivamente en 4, 8, 16, 32... partes iguales.

225. Problema. — Por un punto dado A, levantar una perpendicular á una recta dada CD.

1º Con el compás. Si el punto A está en la recta, se toma distancias iguales AC y AD con lo que se vuelve al problema anterior; desde los puntos C y D, con un mismo radio, se

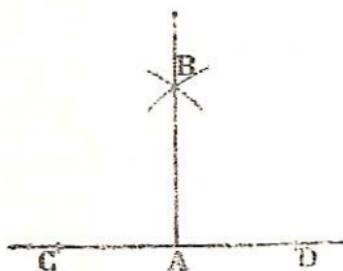


FIG. 128

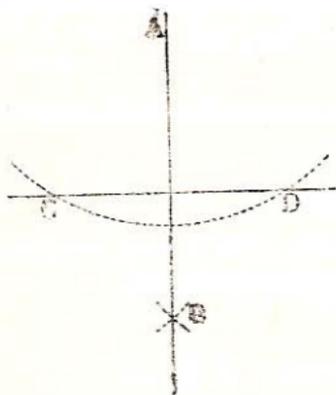


FIG. 129.

describen arcos que se cortan en B. La recta AB es perpendicular á CD. — Como el punto A es la mitad de CD, y el punto B equidista de los puntos C y D, la línea á AB es perpendicular en la mitad de CD (nº 108).

Si el punto dado A está fuera de la recta, se traza desde este punto como centro, un arco que corte á la recta en dos puntos C y D; desde estos puntos C y D, con un mismo radio, se tra-

za dos arcos que se corten en B, y AB será la perpendicular pedida. — Por estar los dos puntos A y B equidistantes de los puntos C y D, la recta AB es perpendicular en la mitad de CD (n° 108).

Si el punto dado B está en un extremo de la recta AB, que no puede prolongarse, se describe desde un punto O cualquiera, con el radio OB, una circunferencia CBD; se traza el diámetro COD y en seguida

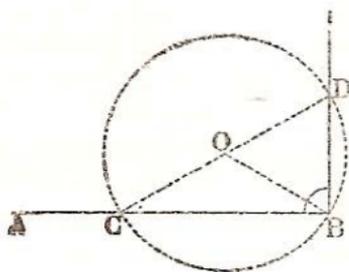


FIG. 130.

la recta BD, que será la perpendicular pedida, porque el ángulo CBD es recto por estar inscrito en un semicírculo (n° 212, 2°).

2° Con la escuadra. Se aplica la regla á lo largo de la recta dada, se hace deslizar la escuadra á lo largo de la regla, hasta el punto dado A, y se

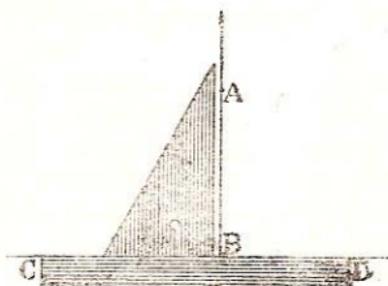


FIG. 131.

traza AB, que es la perpendicular pedida, porque el ángulo ABC es recto.

3° Con el transportador. Si el punto dado A está en la recta, se coloca el transportador de manera que su diámetro esté en la línea recta CD, y su centro en el punto dado; se señala un ángulo de 90 grados, y la línea AB, que forma este ángulo, es la perpendicular pedida.

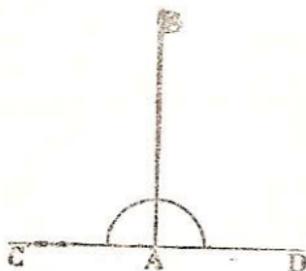


FIG. 132.

226. Problema. — Por un punto dado A, trazar una paralela á una recta dada CD.

1° Con el compás. Desde el punto A como centro, se

traza un arco cualquiera DB; desde el punto D como

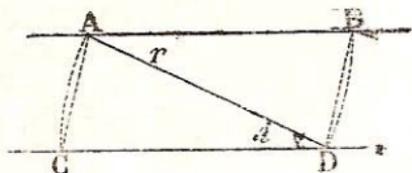


FIG. 133.

centro y con el mismo radio, se traza el arco AC; se toma el arco DB igual á AC, y se traza la recta AB que será la paralela pedida; porque los arcos AC y DB son iguales por estar subtendidos

por cuerdas iguales en círculos iguales. luego los ángulos r é i son iguales, y como estos ángulos tienen la posición de alternos-internos, las rectas AB y CD son paralelas (nº 73).

2º Con la escuadra. Se coloca la regla y la escuadra la una contra la otra, de manera que uno de los costados de la escuadra coincida con la recta dada CD, luego se

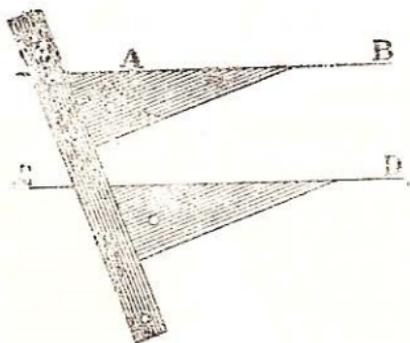


FIG. 134.

hace resbalar la escuadra á lo largo de la regla, hasta llegar al punto dado A, y se traza la línea recta AB, que será la paralela pedida; porque las dos rectas AB y CD forman con EF ángulos correspondientes iguales (nº 75).

2. — ÁNGULOS.

227. Problema. — En un punto dado D de una recta DE, construir un ángulo igual á un ángulo dado A.

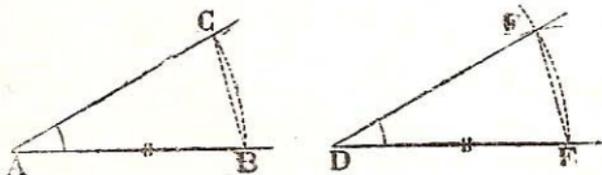


FIG. 135.

Desde los puntos A y D como centros, con un mismo

radio, se describen los arcos BC y EF; desde el punto E como centro, con una abertura del compás igual á la distancia BC, se corta el arco EF, y se traza la recta DF. El ángulo D es igual al ángulo A, porque estos ángulos tienen por medida los arcos BC y EF; y estos arcos son iguales por estar subtendidos por cuerdas iguales en círculos iguales.

228. Problema. — *Dividir un arco dado BEC, ó un ángulo dado A en dos partes iguales.*

Sea por dividir el arco BEC; se traza una perpendicular en la mitad de la cuerda BC, la cual pasa por la mitad del arco (n° 193).

Para dividir un ángulo BAC, se traza desde su vértice como centro, y con un radio arbitrario, el arco BEC; desde los puntos B y C, con un mismo radio, se traza arcos que se cortan en D, y se traza la recta AD, que es la bisectriz del ángulo A.

En efecto, si se traza DB y DC, los triángulos ADB y ADC son iguales por tener sus lados respectivamente iguales, luego los ángulos en A son iguales, por opuestos á los lados iguales DB y DC.

Escolio. — Procediendo de igual manera con cada parte obtenida, se divide el arco ó ángulo sucesivamente en 4, 8, 16, 32... partes iguales.

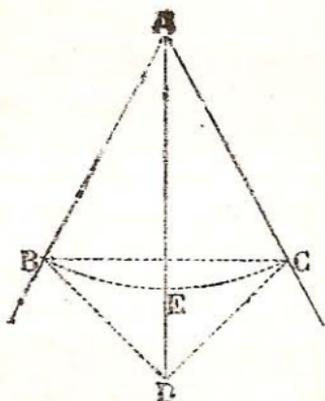


FIG. 136

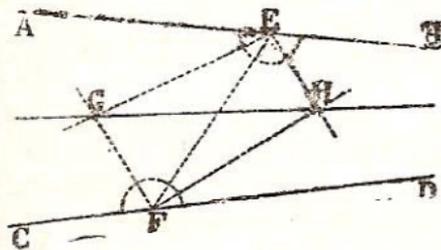


FIG. 137.

229. Problema. — *Trazar la bisectriz del ángulo de dos rectas dadas AB y CD, sin recurrir al vértice de este ángulo.*

1º método. Se traza una secante cualquiera EF, luego las bisectrices EG, FG, EH, FH, de los cuatro ángulos interiores, y por últi-

ma, se traza la recta GH, que es la bisectriz del ángulo.

mo la recta GH, que satisface la condición pedida.

En efecto, perteneciendo el punto G a las dos bisectrices EG y FG, equidista de las rectas AE, EF, FC (n° 122). Así es que este punto está á igual distancia de las dos rectas dadas AB y CD, y por consiguiente pertenece á la bisectriz de su ángulo (n° 122).

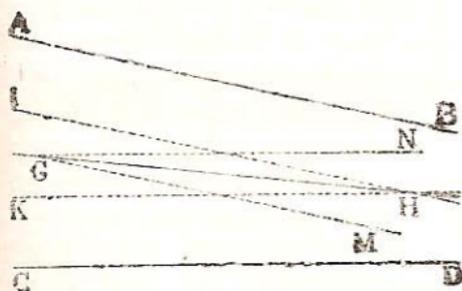


Fig. 135.

Otro tanto puede decirse del punto H; y como dos puntos bastan para determi-

nar la posición de una recta, GH es la línea pedida.

2° método. Dos rectas IH y KH trazadas paralelamente á las dos rectas dadas y á distancias iguales de estas mismas rectas determinan en H un punto equidistante de AB y de CD; otro punto G, obtenido de igual manera, acaba de determinar la bisectriz GH.

230. Problema. — *Encontrar el camino mínimo para ir de un punto A á otro B, tocando una recta dada MN. Supóngase que los dos puntos están situados de un mismo lado de la recta.*

Tracemos AA' perpendicular á MN; tomemos DA' = DA y tiremos las rectas A'B y AC; la línea quebrada AC + CB es el camino pedido. Para demostrarlo basta probar que este camino es más corto que cualquiera otro, AE + EB por ejemplo.

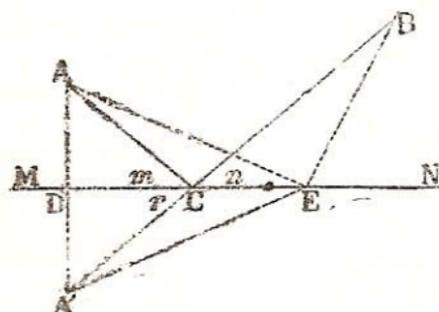


Fig. 136.

MN es perpendicular en la mitad de AA', luego CA = CA', y EA = EA' (n° 107); por consiguiente la línea quebrada AC + CB es igual en longitud á A'CB, y AE + EB = A'E + EB.

Pero la línea recta $A'CB < A'E + EB$; luego también
 $AC + CB < AE + EB$.

231. Escolio. — Las dos partes CA y CB del camino mínimo forman con la recta MN ángulos iguales; porque siendo el ángulo $m = r$ y $r = n$, se tendrá $m = n$.

232. Diferencia máxima. — Cuando se da dos puntos A y B situados á uno y otro lado de una recta MN , se puede proponer el problema siguiente.

233. Determinar sobre MN un punto cuya diferencia de las distancias á los puntos A y B sea máxima.

Debe buscarse el punto B' simétrico de B , y trazar $AB'C$. El punto C satisface á la cuestión. En efecto, $AC - BC = AB'$;

mientras que $AE - BE$ equivale á $AE - B'E$, luego $AB' > AE - B'E$.

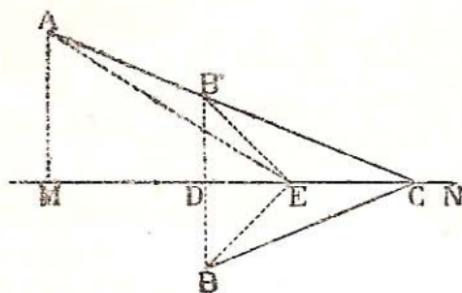


FIG. 140.

3. — TRIÁNGULOS.

234. Problema. — Construir un triángulo, conociendo un lado a y los dos ángulos adyacentes B y C .

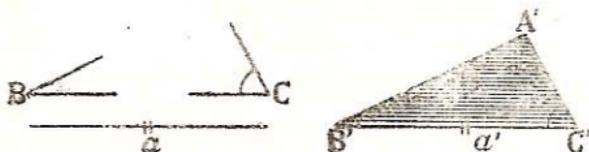


FIG. 141.

Se tira una recta $B'C'$ igual al lado dado a ; se construye el ángulo B' igual á B y C' igual á C , y el triángulo $A'B'C'$ será el triángulo pedido.

235. Observación. — I. La suma de los dos ángulos

dados debe ser menor que dos ángulos rectos, debiendo ser el resto el valor del tercer ángulo (n.º 97).

II. Si los dos ángulos dados no son adyacentes al lado dado, se puede encontrar el tercer ángulo, puesto que es el suplemento de la suma de los otros dos, y se reduce así al caso anterior.

236. Problema. — *Construir un triángulo, dados dos lados a y b , y el ángulo que forman C .*

Se construye primero un ángulo C' igual al ángulo



FIG. 142

dado C ; sobre los lados de este ángulo, se lleva $C'B$ igual con a y $C'A'$ igual á b , y se traza $A'B'$, con lo que resulta el triángulo pedido.

237. Observación. — El problema siempre es posible cualesquiera que sean los datos.

238. Problema. — *Construir un triángulo, dados los tres lados a , b , c .*

Se traza una recta $B'C'$ igual á uno de los lados dados



FIG. 143.

a por ejemplo; desde los puntos B' y C' , con radios iguales respectivamente á c y á b se traza arcos cuyo punto de concurso en A' determina el tercer vértice del triángulo.

239. Observaciones. — I. Para que el problema sea posible, es necesario y suficiente que el mayor de los la-

dos conocidos sea menor que la suma de los otros dos (n° 102).

II. Los tres problemas anteriores (n°s 233, 235, 237) corresponden á los tres casos de igualdad que se han estudiado anteriormente.

240. Problema. — *Construir un triángulo, conociendo dos lados a y b y el ángulo A opuesto al lado a .*

Se construye el ángulo A' igual al ángulo dado A .



Fig. 14a.

sobre uno de los lados de este ángulo, se lleva una longitud $A'C'$ igual al lado b ; desde el punto C' como centro, con un radio igual al lado a , se traza un arco, que puede cortar al lado opuesto en dos puntos B' y B'' . Resultan así dos triángulos $A'B'C'$ y $A'B''C'$ que satisfacen las condiciones del problema.

241. Discusión. — El problema propuesto se conoce con el nombre de caso incierto, porque, según los datos, se pueden obtener dos soluciones, una sola, ó ninguna.

Admitamos que el ángulo dado A sea agudo:

1° Si la longitud del lado a es menor que la perpendicular CD ó h , no hay solución; porque el arco descrito desde el punto C como centro, con a por radio, no encuentra la recta AD ;

2° Cuando $a = h$, no hay más que una solución; el arco es tangente en D , y el triángulo rectángulo ADC satisface la cuestión;

3° Cuando se tiene $a > h$ y $a < b$, hay dos soluciones ABC , $AB'C$, porque el arco corta á ADB en dos puntos;

4° Si $a = b$, no se tiene más que una solución, y el triángulo ACE es isósceles;

5º Cuando se tiene $a > b$, no hay más que una solución AFC.

El arco corta á AD en dos puntos F y F'; pero el

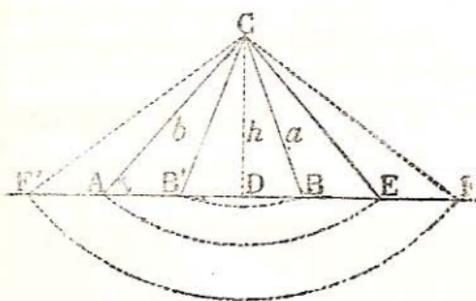


FIG. 145.

triángulo AF'C no resuelve la cuestión, porque el ángulo CAF' es el suplemento del ángulo dado.

Admitamos que el ángulo propuesto A sea recto ú obtuso :

1º Cuando a es menor que b ó

igual á b , no hay solución;

2º Cuando a es $> b$, no hay más que una solución. En efecto, con un ángulo recto A, se obtiene dos triángulos iguales, lo que no constituye en realidad más que una solución.

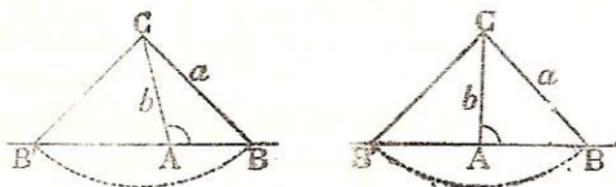


FIG. 146.

Con un ángulo obtuso, el triángulo ABC es el único que resuelve la cuestión.

Resumen. — Cualquiera que sea el ángulo se obtiene una sola y única solución cuando se tiene $a < b$.

Para que haya dos soluciones, se necesita que el ángulo A sea agudo y que se tenga $a < b$, pero al mismo tiempo $a > h$.

242. Construir un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa a y uno de los catetos b .

Sea $BC = a$ la hipotenusa. El ángulo recto será inscrito en un semicírculo (nº 212), y tendrá su vértice en una semicircunferencia cuyo diámetro es BC. Haciendo

pues centro en O , punto medio de BC , con un radio igual a $\frac{BC}{2}$, se describe esta semicircunferencia. Después, haciendo centro en C , con un radio igual a b , se corta la semicircunferencia en A . El triángulo BAC es el triángulo rectángulo pedido.

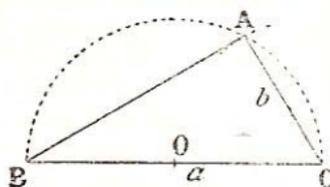


FIG. 147.

4. — TANGENTES.

243. Problema. — *Por un punto A de una circunferencia, trazar una tangente a esta circunferencia.*

Sabemos que la tangente en A es perpendicular al radio OA ; luego, basta elevar en A una perpendicular a OA (n° 224).

244. Problema — *Tirar una tangente a un círculo desde un punto A tomado fuera de él.*

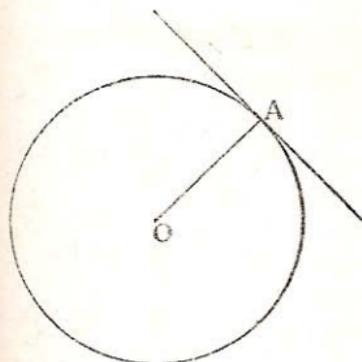


FIG. 148.

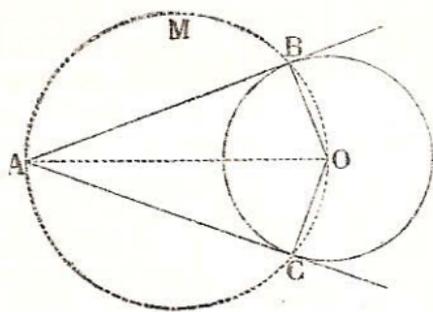


FIG. 149.

Sobre OA como diámetro, se describe una circunferencia, o simplemente el arco BOC , que determina los puntos de contacto B y C ; y se traza las rectas AB y AC que son tangentes a la circunferencia O .

En efecto, el ángulo ABO es recto por estar inscrito en el semicírculo $OBMA$ (n° 212, 2°), luego AB es perpendicular en la extremidad del radio OB ; por consi-

guiente la recta AB es tangente a la circunferencia O . Lo mismo decimos de la recta AC .

245. Escolios. — I. *Las tangentes tiradas desde un mismo punto a una misma circunferencia son iguales; y la recta que une el centro del círculo con el punto de concurso de las dos tangentes es bisectriz del ángulo formado por dichas tangentes, e igualmente del ángulo formado por los radios de contacto.*

Porque los dos triángulos rectángulos AOB y AOC son iguales, por tener igual la hipotenusa AO y uno de los catetos $OB=OC$. Luego $AB=AC$, y los ángulos en A son iguales, así como los ángulos en O .

II. *El ángulo de dos tangentes trazadas desde un mismo punto a una circunferencia es el suplemento del ángulo formado por los radios de contacto.*

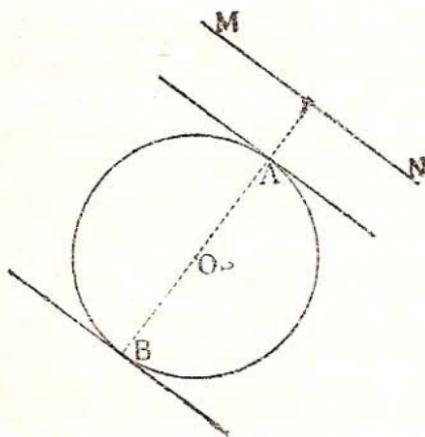


FIG. 150.

Porque teniendo el cuadrilátero $ABOC$ dos ángulos rectos B y C , los otros dos ángulos A y O son suplementarios (nº 135).

246. Problema. — *Trazar dos tangentes a una circunferencia paralelas a una recta dada.*

Sea la circunferencia O y la recta MN . Del centro O se baja una perpendicular BA a la recta MN ; y en

los extremos A y B se traza las tangentes (nº 241), perpendiculares a AB (nº 191): y paralelas a MN .

247. Problema. — *Trazar una tangente común a dos circunferencias dadas O y P .*

Con un radio OC igual a la diferencia o a la suma de los radios dados (fig. 151 y 152), se describe una circunferencia, a la cual se tira una tangente auxiliar PC (nº 242); se traza las rectas PD y OBC perpendiculares a PC , lo cual determina en B y en D los puntos de contacto de la tangente común BD .

En efecto, las rectas PD y CB son iguales por construcción, y paralelas por ser perpendiculares a la misma recta PC (nº 64); por lo tanto el cuadrilátero PDBC es un paralelogramo (nº 139), y como los ángulos P y C son rectos, esta figura es un rectángulo (nº 133). Luego BD es perpendicular en la extremidad de los radios BO y PD, en consecuencia es una tangente común a las dos circunferencias dadas.

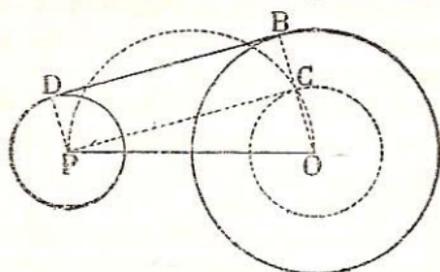


Fig. 151.

248. Escolio.— 1º A dos circunferencias exteriores, se puede trazar cuatro tangentes comunes, a saber, dos exteriores y dos interiores.

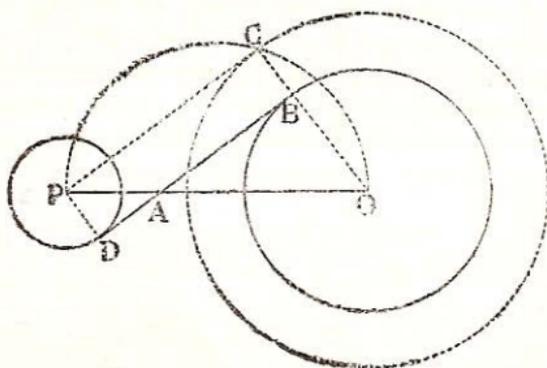


Fig. 152.

2º El número de tangentes comunes se reduce a tres para dos circunferencias tangentes exteriormente, a dos para dos circunferencias secantes, y a una sola para dos circunferencias tangentes inferiormente.

3º Dos circunferencias interiores la una a la otra no tienen ninguna tangente común.

249. Problema. — *Inscribir una circunferencia en un triángulo ABC.*

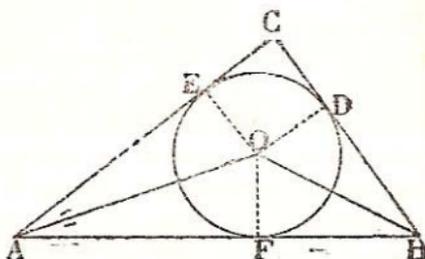


Fig. 153.

Se traza las bisectrices de dos ángulos A y B de este triángulo; el punto de concurso O está equidistante de los dos lados del ángulo A, y también de los del ángulo B.

Por consiguiente las perpendiculares OD, OE y OF son iguales, luego la circunferencia descrita desde el punto O como centro y con el radio OD, pasa por los tres puntos D, E, F. El triángulo ABC es circunscrito a esta circunferencia, puesto que los lados son perpendiculares en las extremidades de los radios OD, OE, OF.

250. Problema. — *Describir una circunferencia tangente a tres rectas que se cortan dos a dos.*

Cualquiera circunferencia tangente a las rectas ilimitadas ABG, GBE tiene su centro a igual distancia de dichas rectas. Este centro pertenece pues a la bisectriz de los ángulos opuestos al vértice ABE, EBG o a la bisectriz de los ángulos ABE, CBG. Luego es preciso trazar las tres bisectrices interiores de los ángulos del triángulo ABC y las tres bisectrices exteriores LAM, LBN, MCN del mismo triángulo.

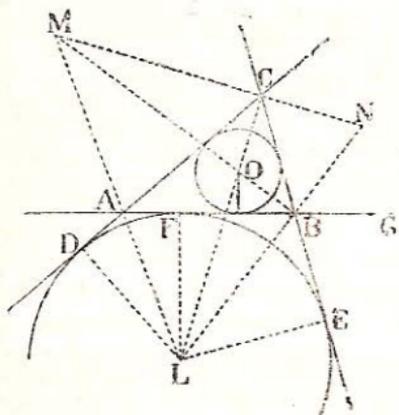


FIG. 154.

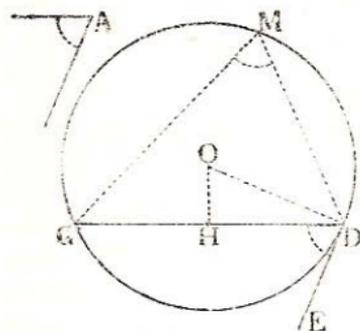


FIG. 155.

Las seis bisectrices se cortan de tres en tres y dan cuatro centros : O, L, M, N.

El centro O corresponde al círculo inscrito en el triángulo ABC.

Los centros L, M, N corresponden a los círculos ex-inscritos.

251. Problema. — *Describir sobre una recta dada como cuerda, un segmento capaz de un ángulo dado (nº 212).*

Sea A el ángulo dado y CD la cuerda. Se construye

el ángulo CDE igual con A, y se levanta HO perpendicular en la mitad de CD, y DO perpendicular a DE. Desde el punto O como centro se traza la circunferencia DMC, con lo que se tendrá el segmento pedido CDM.

Porque todo ángulo M, inscrito en este segmento, tiene por medida la mitad del arco CD, el cual es también la medida del ángulo CDE, igual con A.

LIBRO III

FIGURAS SEMEJANTES

CAPÍTULO I

RELACIONES NUMÉRICAS ENTRE UNOS SEGMENTOS RECTILÍNEOS

§ I. — DIVISIÓN DE UN SEGMENTO

252. *Definición.* — Razón de dos segmentos de recta es la razón de los números que expresan las longitudes de estos dos segmentos, cuando se los ha medido con una misma unidad.

253. *Teorema.* — En un segmento de recta AB, no se puede encontrar más que un punto cuya relación de las distancias a los puntos dados A y B sea igual a una razón dada.

Sea AB la recta dada; $\frac{3}{2}$ la razón dada y un punto C al que se tenga :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{3}{2}$$

Si un punto C' pudiera dar :

$$\frac{AC'}{BC'} = \frac{3}{2}$$



Fig. 156.

se podría escribir :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC'}{BC'}$$

Por ser la suma de los dos primeros términos de una proporción al segundo término, como la suma de los dos últimos es al cuarto, se tiene

$$\frac{AC + BC}{BC} = \frac{AC' + BC'}{BC'}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC'}$$

Siendo iguales los numeradores, los denominadores también lo serán; así C' se confunde con el punto C , y no hay más que un solo punto que divida a AB en la relación dada.

254. Sobre la prolongación de una recta AB , no se puede encontrar más que un punto cuya relación de las distancias a los puntos dados A y B sea igual a una razón dada.



Fig. 157.

Sea $\frac{AD}{BD} = \frac{3}{2}$

si se tuviera también

$$\frac{AD'}{BD'} = \frac{3}{2}$$

se tendría la proporción

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AD'}{BD'}$$

de donde

$$\frac{AB - BD}{BD} = \frac{AD' - BD'}{BD'}$$

o

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AB}{BC'}$$

Así $BD = BD'$ y los puntos D y D' se confunden.

§ II. — Teoremas generales.

I. — TEOREMA DE LAS RECTAS PARALELAS.

255. Teorema. — *Las paralelas que determinan partes iguales sobre una secante dada, determinan también partes iguales sobre cualquiera otra secante.*

Sean $AB, CD, EF, GH...$ paralelas que determinan sobre AG partes iguales, y sea BH una secante cualquiera.

Tracemos paralelamente a BH las rectas AL, CM, EN ; todas estas rectas son iguales respectivamente a los segmentos BD, DF, FH , por ser lados opuestos de paralelogramos (nº 134). Basta pues demostrar que $AL = CM = EN$.

Como los ACL , triángulos CEM , EGN son iguales por tener un lado igual adyacente a ángulos respectivamente iguales (nº 114),

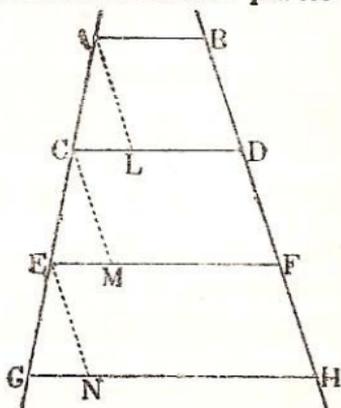


FIG. 158.

se tiene $AL = CM = EN$
 y en consecuencia $BD = DF = FH$
 que es lo que se quería demostrar.

256. Corolario. — *Para dividir una recta dada AB en un número cualquiera de partes iguales, en 5 por ejemplo, se traza una recta indefinida AC, sobre la cual se llevan 5 partes cualesquiera iguales entre sí; se traza CB, y en seguida, por los puntos de división unas paralelas á CB.*

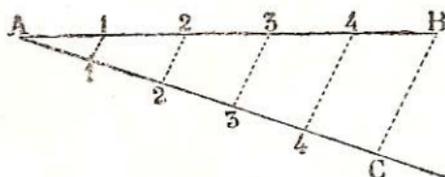


Fig. 159.

257. Teorema. — *Unas rectas paralelas dividen dos secantes en partes proporcionales.*

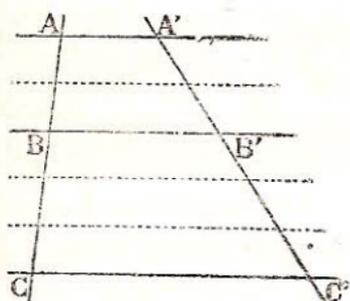


Fig. 160.

Sean las paralelas AA', BB', CC' y las secantes AC, A'C'. Se trata de demostrar que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Supongamos que los segmentos AB y BC tengan una medida común, contenida, por ejemplo, 2 veces en AB y 3 veces en BC. Tenemos $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$; si por todos los puntos de división se trazan unas paralelas á AA' los segmentos A'B' y B'C' serán divididos en 2 y 3 partes iguales, y se puede escribir $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2}{3}$.

Luego $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Si los segmentos AB y BC son inconmensurables, un

raciocinio idéntico al del n° 172 muestra que la propiedad todavía permanece.

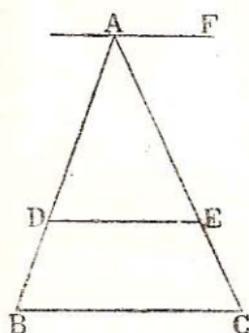


FIG. 161.

258. Teorema. — *Toda paralela á un lado de un triángulo divide en una misma relación á los otros dos lados.*

Por el vértice A podemos trazar otra paralela AF á la base, y según el Teorema anterior tenemos

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

259. Teorema. — *Toda recta que corta en una misma relación á dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.*

Sea DE una recta que corta en una misma relación á los dos lados AB y AC del triángulo ABC de manera que se tiene:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Si, por el punto D, se trazara una paralela á BC, esta paralela dividiría á AC en una relación igual á $\frac{DA}{DB}$. Como no hay entre A

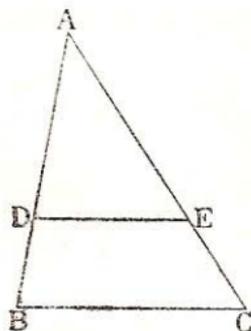


FIG. 162.

y C, más que un solo punto para el cual la relación de las distancias á los dos puntos A y C sea igual á la relación de DA á DB (n° 251), la paralela pasará necesariamente por el punto E, y se confundirá con DE.

2. — TEOREMA DE THALES.

260. Definición. — *Dos triángulos semejantes son aquellos que tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales. Lados homólogos son los lados opuestos á los ángulos iguales.*

261. Teorema de Thales. — *Toda recta paralela á un lado de un triángulo determina un segundo triángulo semejante al primero.*

Sea ABC un triángulo cualquiera, y DE una paralela al lado BC. Vamos á demostrar que los dos triángulos ADE y ABC tienen los ángulos respectivamente iguales, y los lados homólogos proporcionales.

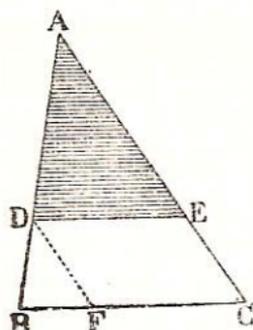


Fig. 163.

1° El ángulo A es común; los ángulos D y B son iguales por correspondientes, lo mismo que E y C.

2° Tracemos DF paralela á AC. La figura DECF es un paralelogramo, y por lo tanto $DE = FC$ (n° 134).

Por ser DE y BC paralelas se tiene (n° 258): $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

Las paralelas DF y AC dan igualmente:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{FC \text{ ó } DE}{BC} \text{ de donde } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

262. Escolio. — *La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado, é igual á su mitad.*

Porque cortando esta recta en una misma relación á los dos primeros lados, es paralela al tercero (n° 259); el triángulo parcial es semejante al triángulo total (n° 261); y cada lado del primero es la mitad de su homólogo en el segundo.

3. — TRIÁNGULOS SEMEJANTES.

Hay tres casos de similitud de los triángulos.

263. Primer Caso. — *Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.*

Sean los dos triángulos ABC y DEF, que tienen el ángulo A igual á D, y el ángulo B igual á E. Tomemos $DG = AB$, y tracemos GH paralela á EF. El triángulo

DGH es semejante á DEF, por ser EF y GH paralelas (n° 261), y basta demostrar la igualdad de los dos triángulos ABC y DGH.

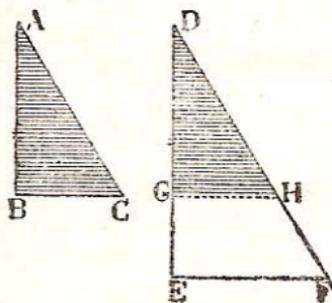


Fig. 164.

Los ángulos B y E son iguales por hipótesis; $E = G$ por correspondientes, y $B = G$, por la misma razón; además $A = D$ por hipótesis.

Luego los dos triángulos ABC y DGH son iguales por tener un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente

iguales, y ABC es semejante á DEF.

264. Corolario. — *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen igual uno de sus ángulos agudos.*

265. Segundo Caso. — *Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales.*

Sean los dos triángulos ABC y DEF, tales que se tenga $A = D$, y la proporción $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.

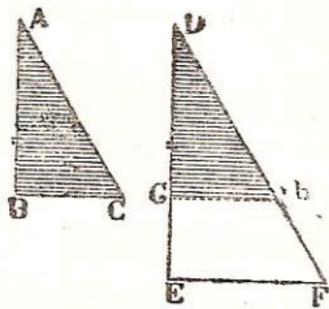


Fig. 165.

Tomemos $DG = AB$, y tracemos GH paralela á EF. El triángulo DGH es semejante á DEF, por ser EF y GH paralelas (n° 261), y basta demostrar la igualdad de los dos triángulos ABC y DGH.

Las paralelas GH y EF dan $\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}$.

Puesto que $DG = AB$, la primera razón de esta proporción es igual á la primera razón de la proporción dada $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$; por tanto las otras dos razones

son iguales, y como tienen el mismo denominador DF, sus numeradores AC y DH son iguales.

Luego los dos triángulos ABC y DGH son iguales por tener un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales, y ABC es semejante á DEF.

266. Tercer Caso. — *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres lados proporcionales.*

Sean los dos triángulos ABC y DEF, en los que se tiene

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Tomemos $DG = AB$, y tracemos GH paralela á EF. El triángulo DGH es semejante á DEF, por ser paralelas las rectas EF y GH (n.º 261), y basta demostrar la igualdad de los dos triángulos ABC y DGH.

La semejanza de los triángulos DGH y DEF da

$$\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF} = \frac{GH}{EF}.$$

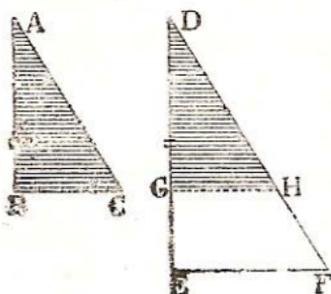


FIG. 166.

Como $DG = AB$, la primera de estas tres razones es igual á la primera de las tres razones dadas;

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

por lo tanto las otras razones, de una y otra parte, son iguales, y puesto que los denominadores son respectivamente iguales en las dos series, los numeradores también lo serán:

$$AC = DH, BC = GH.$$

Luego los dos triángulos ABC y DGH son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales y ABC es semejante á DEF.

267. Escolio. — *Los tres casos de semejanza, que aca-*

ban de establecerse entre los triángulos, presentan una analogía notable con los *tres casos de igualdad* (n^{os} 114, 115, 116).

En la demostración de cada caso de semejanza, el caso de igualdad correspondiente ha sido aplicado entre el triángulo dado ABC y el triángulo auxiliar DGH.

268. Teorema. — *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares son semejantes.*

Sean ABC y A'B'C' dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares. Basta probar que son equiángulos entre sí (n^o 263).

Dos ángulos que tienen sus lados paralelos ó perpendiculares entre sí son iguales, ó suplementarios (n^{os} 77 y 78); se tiene pues:

$$\begin{aligned} A &= A' \text{ ó bien } A + A' = 2 \text{ rectos} \\ B &= B' \text{ ó bien } B + B' = 2 \text{ rectos} \\ C &= C' \text{ ó bien } C + C' = 2 \text{ rectos.} \end{aligned}$$

No se puede hacer más que una de las tres hipótesis siguientes:

- 1^o $A + A' = 2 \text{ rectos}, B + B' = 2 \text{ rectos}, C + C' = 2 \text{ rectos};$
- 2^o $A = A' \quad B + B' = 2 \text{ rectos}, C + C' = 2 \text{ rectos};$
- 3^o $A = A' \quad B = B', \text{ de donde resulta } C = C'.$

En la primera hipótesis, la suma de los ángulos de los dos triángulos valdría 6 rectos; la segunda daría más de 4 rectos; así la tercera es la única admisible.

269. Escolio. — *En estos triángulos, los lados homólogos son paralelos ó perpendiculares entre sí.*

4. — TEOREMA DE LAS RECTAS CONCURRENTES.

270. Teorema. — *Si un haz de rectas que parten de un*

mismo punto es cortado por dos paralelas, estas últimas líneas quedan divididas en partes proporcionales.

Sean AD y $A'D'$ dos paralelas cortadas por un haz de rectas salidas del punto O .

Los triángulos OAB , OBC , OCD , son respectivamente semejantes á los triángulos $OA'B'$, $OB'C'$, $OC'D'$, y se tiene:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}; \quad \frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'};$$

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{OD}{OD'}.$$

Teniendo estas proporciones de dos en dos una razón común, todas las razones son iguales, y se tiene

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}.$$

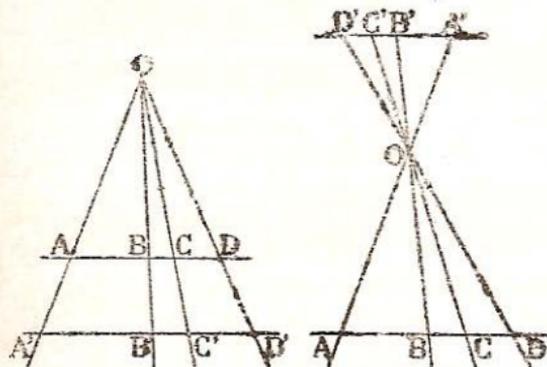


Fig. 168.

271. Recíproca. — Si varias secantes cortan proporcionalmente dos rectas paralelas, estas secantes concurren en un mismo punto.

Sean las paralelas AD y $A'D'$ cortadas por las secantes AA' , BB' , CC' , DD' , de tal manera que se tenga

de tal manera que se tenga

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Sea O el punto de concurso de las dos secantes AA' y BB'; por los puntos O y C, tracemos una recta OC, y llamemos C' el punto de concurso de esta recta con la recta A'D'.

Se tiene, en virtud del teorema directo :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Siendo la primera razón la misma que en la hipótesis, se deduce $\frac{BC}{B'C'} = \frac{BC}{B'C''}$ y por consiguiente $B'C' = B'C''$.

Así es que los puntos C' y C'' se confunden, y la secante CC' pasa por el punto O.

Como podría aplicarse una demostración análoga con respecto á la secante DD', queda demostrado el teorema en toda su generalidad.

272. Escollo. — El teorema es igualmente cierto cuando los segmentos correspondientes de las paralelas son iguales; pero en este caso el punto de concurso de las secantes se aleja indefinidamente; en otros términos, las secantes llegan á ser paralelas entre sí.

§ III. — Relaciones métricas en el triángulo.

1. — MEDIAS PROPORCIONALES.

273. Teorema. — *En todo triángulo rectángulo :*

1° Cada cateto es medio proporcional entre su proyección sobre la hipotenusa y la hipotenusa entera ;

2° La altura es media proporcional entre los dos segmentos que determina sobre la hipotenusa.

Sea ABC un triángulo rectángulo, y sea AD la perpendicular bajada del vértice del ángulo recto sobre la hipotenusa.

1° Los triángulos rectángulos CAB y CDA son seme-

jantes por tener un ángulo agudo común C (nº 264); se puede por lo tanto decir (nº 260): a , hipotenusa del primer triángulo, es á b , hipotenusa del segundo, como b , opuesto al ángulo B en el primer triángulo, es á m , su homólogo en el segundo:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}.$$

Del mismo modo los triángulos CAB y ADB son semejantes, y dan:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}.$$

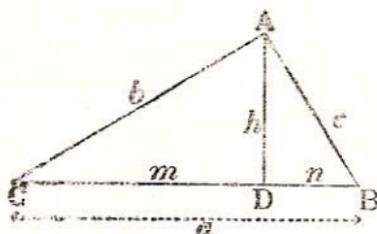


Fig. 169.

2º Los triángulos CDA y ADB, semejantes cada uno á CAB, son semejantes entre sí, y dan la proporción:

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}.$$

274. **Escolio.** — I. *En todo triángulo rectángulo, El cuadrado de un cateto es igual á su proyección sobre la hipotenusa, multiplicada por la hipotenusa entera;*

El cuadrado de la altura es igual al producto de los dos segmentos de la hipotenusa.

En efecto, de las tres proporciones anteriores, se deduce, haciendo producto de extremos y medios:

$$b^2 = am \quad c^2 = an \quad h^2 = mn.$$

Aplicación á la circunferencia.

275. **Teorema.** — *La perpendicular bajada de un punto de la circunferencia sobre el diámetro es media proporcional entre los dos segmentos que determina sobre dicho diámetro.*

Sea AD una perpendicular bajada de un punto A de la circunferencia sobre el diámetro BC.

Tracemos las rectas AB y AC, el triángulo ABC es

rectángulo en A (n° 212), y AD la altura de este triángulo. Se tiene pues (n° 273, 2°):

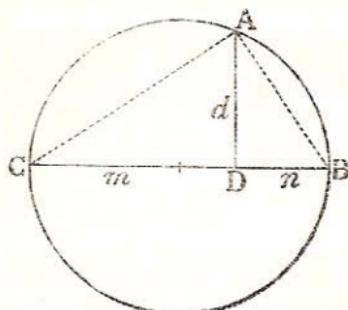


Fig. 170.

$$\frac{DC}{DA} = \frac{DA}{DB} \text{ ó } \frac{m}{d} = \frac{d}{n}.$$

276. Corolario. — *El cuadrado de la perpendicular bajada de un punto de la circunferencia sobre el diámetro es igual al producto de los dos segmentos del diámetro.*

Porque la proporción anterior da $d^2 = mn$.

277. Escolios. — I. *El cuadrado de la cuerda trazada por un extremo de un diámetro, es igual al producto de su proyección sobre dicho diámetro, por todo el diámetro.*

Porque siendo AB una cuerda cualquiera, AM su proyección sobre el diámetro AD, el triángulo rectángulo ABD da (n° 274);

$$\overline{AB^2} = AM \times AD.$$

Luego la cuerda es media proporcional entre su proyección sobre el diámetro y todo el diámetro.

II. *Los cuadrados de las cuerdas trazadas por un extremo de un diámetro son entre sí como las proyecciones de estas mismas cuerdas sobre el diámetro.*

Porque si AB, AC son dos cuerdas trazadas por los extremos de un diámetro AD, y AM, AN las proyecciones de las cuerdas sobre este diámetro, se tiene:

$$\begin{aligned} \overline{AB^2} &= AM \times AD \\ \overline{AC^2} &= AN \times AD \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\overline{AB^2}}{\overline{AC^2}} = \frac{AM \times AD}{AN \times AD} = \frac{AM}{AN}.$$

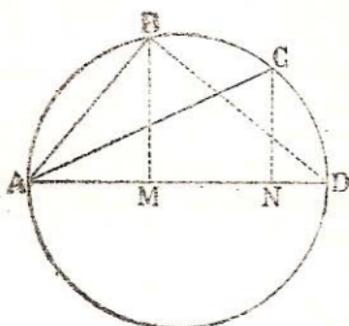


Fig. 171.

III. El cuadrado de la cuerda trazada por el extremo de un diámetro es al cuadrado del mismo diámetro como la proyección de esta cuerda sobre el diámetro es al diámetro entero.

$$\text{Porque se tiene } \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{AM \times AD}{AD \times AD} = \frac{AM}{AD}.$$

2. — TEOREMA DE PITÁGORAS.

278. Teorema. — El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

En efecto, sumando ordenadamente las igualdades $b^2 = am$ y $c^2 = an$, se obtiene :

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m + n) = aa = a^2.$$

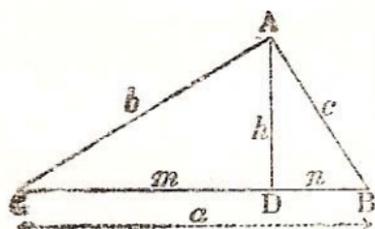


FIG. 178.

De esta misma relación se infiere que el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

279. Escolio. — En todo triángulo rectángulo, los cuadrados de los catetos son entre sí como las proyecciones de los mismos sobre la hipotenusa ;

Y el cuadrado de la hipotenusa es al cuadrado de un cateto como la hipotenusa es á la proyección del cateto.

En efecto, se tiene idénticamente :

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{am}{an} = \frac{m}{n} \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{aa}{am} = \frac{a}{m}.$$

3. — CUADRADO DE UN LADO.

280. Teorema. — En un triángulo cualquiera, el cuadrado del lado opuesto á un ángulo agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos dos

veces el producto del segundo por la proyección del tercero sobre el segundo.

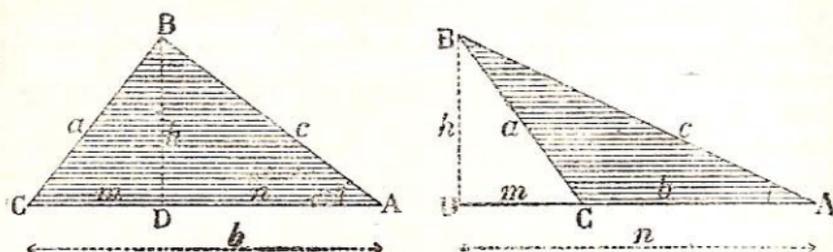


FIG. 173.

Siendo agudo el ángulo considerado A, se tiene :

	$a^2 = h^2 + m^2$
por ser	$h^2 = c^2 - n^2$
y	$m^2 = (b - n)^2 = b^2 + n^2 - 2bn$
resulta	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn.$

281. Teorema. — En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más dos veces el producto del segundo lado por la proyección del tercero sobre el segundo.

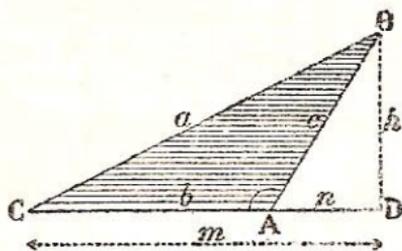


FIG. 174.

Siendo obtuso el ángulo considerado A, se tiene:

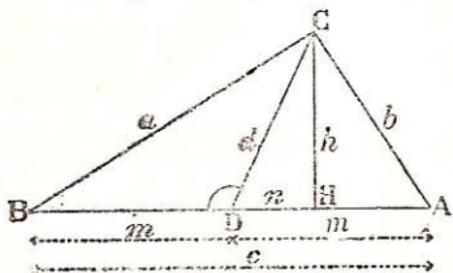
	$a^2 = h^2 + m^2$
por ser	$h^2 = c^2 - n^2$
y	$m^2 = (b + n)^2 = b^2 + n^2 + 2bn$
resulta :	$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn.$

282. Escolio. — Un triángulo es acutángulo, rectángulo ú obtusángulo, según que el cuadrado del lado mayor es inferior, igual, ó superior á la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

4. — SUMA Ó DIFERENCIA DE LOS CUADRADOS DE LOS LADOS.

283. Teorema. — *La suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera de un triángulo es igual á dos veces el cuadrado de la mediana del tercer lado, más dos veces el cuadrado de la mitad de este mismo lado.*

Sea ABC un triángulo cualquiera, y CD ó d la mediana del lado AB.



Tracemos la altura CH. Los ángulos en D son el uno obtuso y el otro agudo; se tiene por tanto (n^o 281, 280.)

En el triángulo CDB

$$a^2 = d^2 + m^2 + 2mn$$

En el triángulo CDA

$$b^2 = d^2 + m^2 - 2mn$$

De donde, sumando,

$$a^2 + b^2 = 2d^2 + 2m^2$$

De ahí se saca

$$d^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - m^2.$$

284. Escolio. — *El cuadrado de una mediana es igual á la semisuma de los cuadrados de los dos lados adyacentes, menos el cuadrado de la mitad del tercer lado.*

$$\text{Se escribe también: } d^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

285. Teorema. — *La diferencia de los cuadrados de los lados de un triángulo es igual al doble producto del tercer lado por la proyección de la mediana correspondiente sobre este lado.*

En efecto, tenemos (n^o 280 y 281.)

$$a^2 = d^2 + m^2 + 2mn$$

$$b^2 = d^2 + m^2 - 2mn$$

de donde

$$a^2 - b^2 = 4mn = 2 \times 2m \times n.$$

5. — PROPIEDAD DE LAS BISECTRICES.

286. Teorema. — *En todo triángulo, la bisectriz de*

un ángulo interno ó externo divide el lado opuesto en partes proporcionales á los otros dos lados.

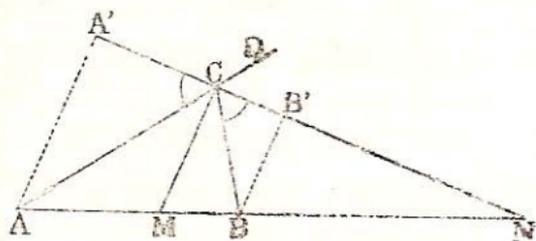


FIG. 176.

Sea el triángulo ABC, CM la bisectriz interior del ángulo C, y CN la bisectriz del ángulo exterior DCB. Bajemos las perpendiculares AA' y BB' a NC, estas perpendiculares son paralelas á la bisectriz MC y dan (n° 257.)

a NC, estas perpendiculares son paralelas á la bisectriz MC y dan (n° 257.)

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA'}{CB'}. \quad (1)$$

1° Los triángulos rectángulos CAA' y CBB' son semejantes, porque tienen los ángulos en C iguales, por tener complementos iguales; y nos dan

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CA'}{CB'} = \frac{AA'}{BB'}. \quad (2)$$

Luego, según (1), tenemos

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB}. \quad (3)$$

2° Los triángulos semejantes BB'N y AA'N (n° 261.)

nos dan
$$\frac{NA}{NB} = \frac{AA'}{BB'}$$

ó, según (2)
$$\frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB}$$

Observación. — Los cuatro puntos ABMN forman una división armónica, porque $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$.

287. Recíproca. — Si se tiene la proporción $\frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB}$, la recta CN es bisectriz del ángulo exterior BCD.

Porque, en la prolongación de AB, no existe más que un punto cuyas distancias á los dos puntos A y B estén entre sí en la relación de CA á CB (n° 252), y la bisectriz del ángulo exterior BCD pasa por este punto (n° 286).

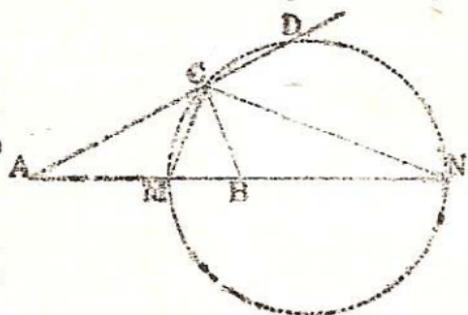


Fig. 177.

288. Escolio. — Si se traza dos bisectrices que partan de un mismo vértice C, la una interior CM y la otra exterior CN, se tiene:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}, \text{ de donde, alternando medios } \frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN}.$$

Así las distancias del punto M á los puntos A y B son entre sí como las distancias del punto N á los mismos puntos A y B.

Igualmente las distancias del punto A á los puntos M y N son entre sí como las distancias del punto B á los mismos puntos M y N.

§ IV. — Relaciones métricas en el círculo.

1. — POTENCIA DE UN PUNTO CON RELACIÓN Á UN CÍRCULO.

289. Teorema. — Cuando dos cuerdas se cortan, el producto de los dos segmentos de una es igual al producto de los dos segmentos de la otra.

Sean AB y CD dos cuerdas que se cortan en O. Tracemos las rectas AC y BD.

Los triángulos AOC y BOD tienen los ángulos A y D iguales, por tener la misma medida; $\frac{1}{2} BC$; $B = C$ por la misma razón; luego estos triángu-

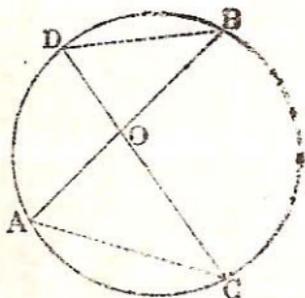


Fig. 178.

los son semejantes (n° 153), y dan la proporción

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$$

de donde $OA \times OB = OC \times OD$.

290. Recíproca. — Cuando en dos rectas AB y DC que se cortan, se tienen los productos iguales

$$OA \times OB = OC \times OD$$

los cuatro puntos A, B, C, D pertenecen á una misma circunferencia.

Porque haciendo pasar una circunferencia por tres de estos puntos A, B, C, y llamando D' el punto de intersección de la circunferencia y de la recta COD se tendría:

$OA \times OB = OC \times OD'$; pero $OA \times OB = OC \times OD$ luego OD' debe ser igual á OD, y la circunferencia pasa por el punto D.

291. Teorema. — Si dos secantes parten de un mismo punto fuera de un círculo, el producto de la primera secante por su parte externa es igual al producto de la segunda por su parte externa.

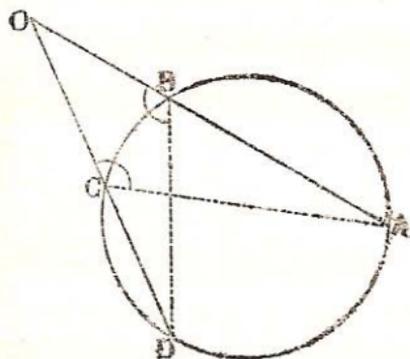


Fig. 179.

Sean las dos secantes OA y OD.

Tracemos las rectas AC y CD.

Los triángulos AOC y BOD tienen el ángulo O común, y los ángulos A y D iguales por tener una misma medida $1/2$ BC; luego son seme-

jantes y dan la proporción:

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB} \text{ de donde } OA \times OB = OC \times OD.$$

Recíproca. — Cuando, sobre 2 rectas que se cortan, se tiene $OA \times OB = OC \times OD$, los cuatro puntos A, B, C, D, pertenecen á una misma circunferencia.

292. Teorema. — *Si desde un punto exterior de un círculo parten una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre toda la secante y su parte externa.*

Sean OD y OA las dos líneas consideradas. Tracemos las rectas DB y DA.

Los triángulos ODA y OBD tienen el ángulo O común, y los ángulos A y D iguales por tener por medida la mitad del mismo arco BD (n^{os} 244, 209); luego estos triángulos son semejantes y dan la proporción.

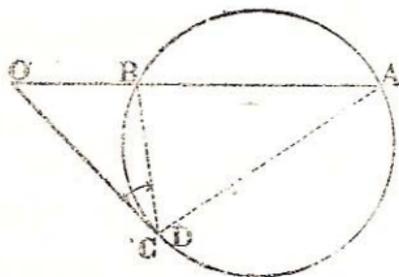


FIG. 150.

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OD}{OB}.$$

293. Corolario. — *Si una tangente y una secante parten de un mismo punto exterior á un círculo, el cuadrado de la tangente es igual al producto de toda la secante por su parte externa*

Porque la proposición anterior da $OD^2 = OA \times OB$.

294. Escolios. — I. Este teorema puede deducirse como límite del teorema anterior; porque la tangente es una secante cuyos dos puntos de intersección C y D se acercan indefinidamente, y cuya parte externa OC es igual á la secante entera OD.

II. Cuando se tiene: $OD^2 = OA \times OB$, la circunferencia que pasa por los tres puntos A, B, D es tangente á la recta OD.

III. Los tres teoremas anteriores pueden reunirse en un solo enunciado: *Si desde un punto tomado en el plano de un círculo, se traza á este círculo una secante cualquiera, el producto de las distancias del punto fijo á los dos puntos de intersección es constante, cualquiera que sea la dirección de la secante.*

295. Definición. — *Con relación á un círculo, la potencia de un punto A es el producto constante $AD \times AE$ de*

terminado por una secante cualquiera trazada por este punto.

1° Representando AO por d y el radio por r , la relación $AD \times AE = \overline{AF}^2 = AB \times AC$ puede escribirse:

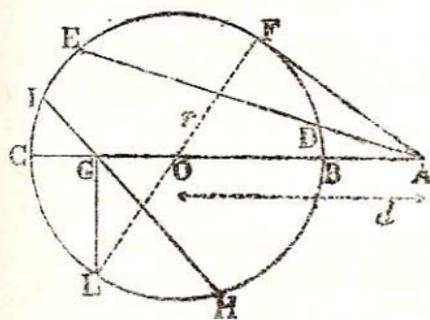


FIG. 181.

$$(d + r)(d - r) = d^2 - r^2.$$

Cuando el punto es exterior, los segmentos AD, AE de la secante están en la misma dirección, la potencia P es positiva; la fórmula $P = d^2 - r^2$ conduce a esta conse-

cuencia; porque d es mayor que r .

2° Cuando el punto G está en el interior, los segmentos GI, GH están en sentido contrario; la potencia se considera como negativa; por otra parte

$$GI \times GH = \overline{GL}^2 = \overline{OL}^2 - \overline{OG}^2$$

pero $OL = r$; OG se representa por d ; luego en valor absoluto

$$GI \times GH = r^2 - d^2$$

y como en este caso la potencia debe ser considerada como negativa, se puede escribir de una manera general:

$$P = d^2 - r^2.$$

3° Para un punto M en la circunferencia, la potencia es nula.

2. — TRIÁNGULO INSCRITO.

296. Teorema. — El producto $CA \times CB$ de dos lados de un triángulo es igual al producto $CM \times CN$ de dos rectas que forman ángulos iguales con los lados CA y CB; estando limitada una de las rectas en la base del triángulo, y la otra en la circunferencia del círculo circunscrito a este triángulo.

Los ángulos iguales deben estar ambos en el interior del triángulo (fig. 182), ó ambos al exterior.

Sean las rectas CM, CN tales que el ángulo $ACN = BCM$ (fig. 182);

los dos triángulos ACN y BCM son semejantes, por ser equiángulos; en efecto, el ángulo $N = CBM$ y el ángulo $ACN = BCM$

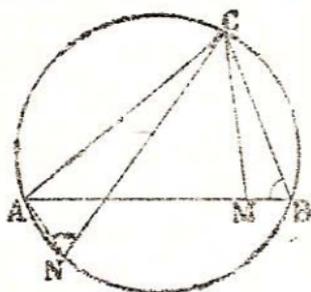


Fig. 182.

luego

$$\frac{CA}{CM} = \frac{CN}{CB}$$

de donde

$$CA \times CB = CM \times CN.$$

297. Teorema. — *El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de los segmentos determinados sobre el tercer lado por la bisectriz del ángulo opuesto, más el cuadrado de esta bisectriz.*

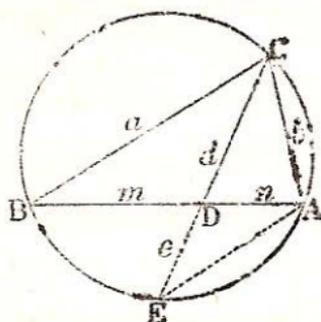


Fig. 183.

Sea ABC el triángulo dado, CD la bisectriz; vamos á demostrar que se tiene:

$$ab = mn + d^2.$$

Para esto, tracemos el círculo circunscrito, prolonguemos CD y tracemos AE.

Por formar la bisectriz ángulos iguales con los dos lados, según el teorema anterior, tenemos

$$ab = d \times (d + e)$$

ó

$$ab = d^2 + de$$

y por ser
resulta

$$de = mn$$

(n° 289)

$$ab = d^2 + mn.$$

298. Observación. — El teorema puede enunciarse como sigue: *El cuadrado de una bisectriz es igual al producto de los lados adyacentes, menos el producto de los segmentos del tercer lado; porque la fórmula obtenida da $d^2 = ab - mn$.*

299. Teorema. — *El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de los segmentos determinados sobre el tercer lado por la bisectriz exterior del ángulo opuesto, menos el cuadrado de esta bisectriz.*

Sea CD la bisectriz del ángulo externo ACH ; la cual determina dos segmentos subtractivos DB y DA .

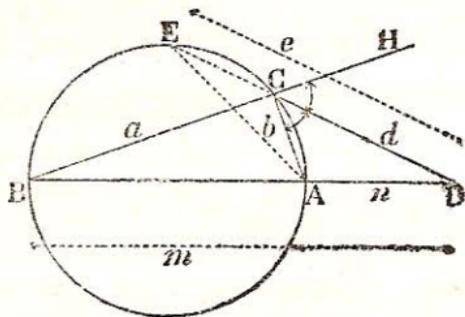


Fig. 184.

Como esta bisectriz forma con los lados ángulos iguales, tenemos (n° 296):

$$ab = d(e - d)$$

de donde $ab = de - d^2$.

A causa de las secantes DB y DE , el producto de puede reemplazarse por su igual mn (n° 294), y se tiene:

$$ab = mn - d^2.$$

300. Observación. — Para calcular la longitud de la bisectriz exterior, se emplearía la fórmula:

$$d^2 = mn - ab.$$

301. Teorema. — *El producto de dos lados cualesquiera de un triángulo es igual al producto de la altura relativa al tercer lado por el diámetro del círculo circunscrito.*

Sea ABC un triángulo cualquiera, CN ó h una de las alturas, y CM ó $2R$ el diámetro del círculo circunscrito. Vamos á demostrar que $ab = 2Rh$.

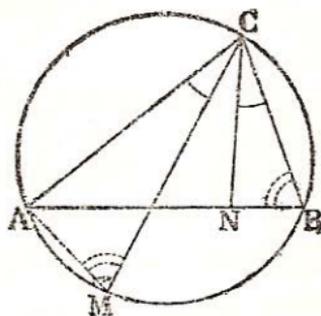


Fig. 185.

Tracemos MA ; el ángulo MAC es recto, y los ángulos AMC y ABC son iguales (n° 212); luego los ángulos ACM y NCB también son iguales, y según el n° 297, tenemos

$$ab = 2R \cdot h.$$

CAPÍTULO II

LUGARES GEOMÉTRICOS

1. — PUNTO MÓVIL CON RELACIÓN Á DOS PUNTOS FIJOS

302. Lugar I. — *Hallar el lugar de los puntos cuyas distancias á dos puntos dados están en una relación constante $\frac{m}{n}$.*

1º Es preciso determinar la naturaleza y la posición de la línea que contiene todos los puntos que gozan de la propiedad enunciada.

Sean A y B los dos puntos dados, y sea C un punto cualquiera del lugar buscado, de modo que se tenga

$$\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}.$$

Las bisectrices de los ángulos BCA y BCD determinan los puntos M y N que dan (nº 286):

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = \frac{m}{n} \quad \frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}.$$

Sobre la dirección AB, los puntos M y N son los únicos cuyas distancias á los puntos fijos A y B están en la relación dada $\frac{m}{n}$; y como el ángulo MCN de las dos bisectrices es recto (nº 57), *el punto C pertenece á la circunferencia descrita sobre MN como diámetro.*

2º Falta demostrar que, para cualquier punto de esta circunferencia, la relación de las distancias á los dos puntos A y B es igual á $\frac{m}{n}$.

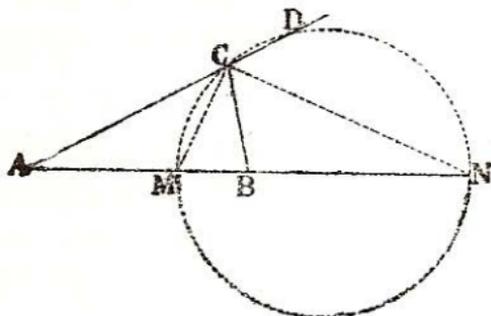


Fig. 186.

Notemos primeramente que las razones iguales ya en contradas $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$ dan, alternando medios,

$$\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN}.$$

Consideremos un punto cualquiera B de la circunferencia descrita sobre

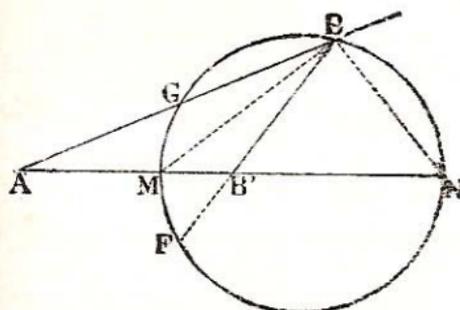


FIG. 187

MN; tracemos BA, BM, BN; tomemos el arco MF igual á MG, y tracemos BF, que corte á MN en un punto cualquiera B'.

En el triángulo ABB', la recta BM es bisectriz del ángulo B, y su perpendicular BN es bisectriz del

ángulo externo suplementario. Se tiene pues (n° 286):

$$\frac{AM}{AN} = \frac{B'M}{B'N}$$

y por no haber, entre M y N, más que un solo punto cuyas distancias á los puntos M y N estén en la relación de AM á AN, el punto B' tiene, sobre MN, la misma posición que el punto B de la figura anterior (fig. 186).

Así se tiene $\frac{BA}{BB'} = \frac{MA}{MB'} = \frac{m}{n}.$

303. Lugar II. — *El lugar de los puntos tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos (A, B) sea constante (K^2) es una circunferencia cuyo centro es el punto medio (M) del segmento (AB) que une los dos puntos fijos.*

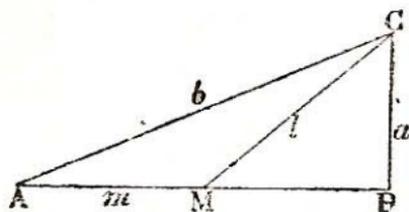


FIG. 188.

Sea C un punto del lugar. En el triángulo ABC, tenemos

$$\begin{array}{r}
 a^2 + b^2 = 2m^2 + 2l^2 \quad (\text{n}^\circ 283) \\
 \text{ó} \quad 2m^2 + 2l^2 = k^2 \quad (1) \\
 \text{ó} \quad 2l^2 = k^2 - 2m^2 \quad (2)
 \end{array}$$

Luego l es una constante, y el lugar es una circunferencia de radio l y de centro M .

Discusión. — De (2), se saca

$$l = \sqrt{\frac{k^2 - 2m^2}{2}}$$

para que exista l , se necesita $k^2 - 2m^2 > 0$.

304. Lugar III. — *El lugar de los puntos tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á dos puntos fijos A y B sea una constante K^2 es una recta perpendicular á AB .*

Sea C un punto del lugar. En el triángulo ABC , tenemos

$$\begin{array}{r}
 a^2 - b^2 = 2cm \\
 \text{ó} \quad 2cm = k^2 \\
 \text{sea} \quad m = \frac{k^2}{2c}
 \end{array}$$

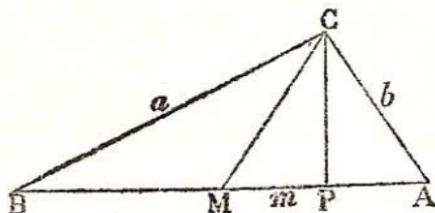


FIG. 189

Luego, la distancia m es constante, y C pertenece á una perpendicular levantada en P sobre AB .

2. — EJE RADICAL.

305. Teorema. — *El lugar de los puntos de igual potencia con relación á dos circunferencias es una perpendicular á la recta de los centros.*

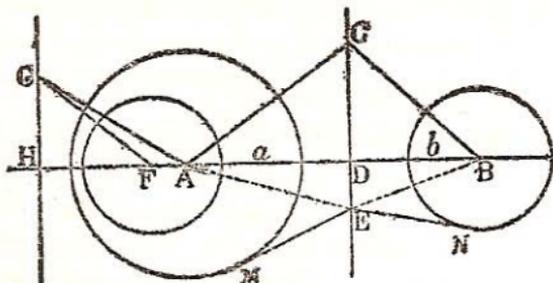


FIG. 190.

Este lugar se llama eje radical de las dos circunferencias.

Sean las circunferencias A y B de radios a y b , y C

un punto de igual potencia con relación á estas circunferencias.

Desde el punto C bajemos la perpendicular CD sobre la recta de los centros; se necesita probar que CD es el eje radical de las dos circunferencias.

En efecto, haciendo $AC = d$ y $BC = d_1$, puesto que C es un punto de igual potencia, se tiene:

$$\begin{aligned} d^2 - a^2 &= d_1^2 - b^2 \\ \text{ó} \quad d^2 - d_1^2 &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

El punto C es tal que la diferencia de los cuadrados de sus distancias á los puntos fijos A y B sea constante; luego (n° 304), el lugar de C es la perpendicular CD.

306. Observaciones. — I. El eje radical está más cerca del centro del círculo menor que del mayor; porque con $a > b$,

la relación
da

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 &= a^2 - b^2 \\ \overline{AD} &> \overline{DB}. \end{aligned}$$

II. Cuando dos círculos se cortan, la cuerda común es el eje radical; porque los dos puntos de intersección tienen

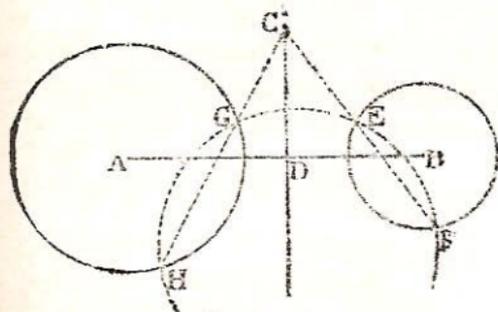


FIG. 191.

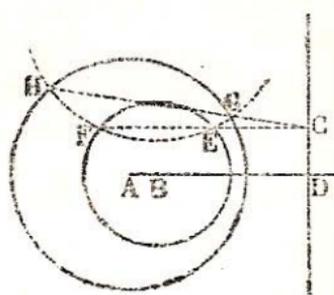


FIG. 192.

una potencia nula con relación á cada círculo (n° 295.)

Cuando dos círculos son tangentes, el eje radical pasa por el punto de contacto: es la tangente común en este punto.

III. Para dos círculos interiores, tales como A y F (fig. 190), el eje radical GH es exterior; porque si encontrara uno de los círculos, el punto de intersección tendría una potencia nula con relación á una de las

circunferencias sin tenerla con relación á la otra, lo que es imposible. Por otra parte, el eje GH está situado del lado del centro del círculo menor; porque se debe tener $AH > FH$.

307. Problema. — *Determinar el eje radical de dos circunferencias dadas.*

1º Si las circunferencias se cortan, se traza la cuerda común;

2º Si son tangentes, se traza la tangente común;

3º Cuando las dos circunferencias no tienen ningún punto común (fig. 191, 192), se les corta por una tercera circunferencia: las cuerdas comunes FEC, HGC determinan un punto C de igual potencia; porque $CE \times CF = CG \times CH$; luego C pertenece al eje radical pedido (nº 305).

Basta entonces bajar la perpendicular CD sobre la recta de los centros.

308. Teorema. — *El eje radical de dos círculos es el lugar de los puntos de donde se puede trazar á estos círculos tangentes iguales.*

Se tiene en efecto:

$$\overline{AE}^2 - a^2 = \overline{BE}^2 - b^2 \quad (\text{nº } 305)$$

luego $\overline{EM}^2 = \overline{EN}^2$.

309. Teorema. — *Los ejes radicales de tres círculos, considerados de dos en dos, concurren en un mismo punto.*

Sean los tres círculos A, B, C, y sea O el punto de concurso de los ejes LO y MO.

El punto O, por pertenecer á OL, tiene una potencia igual con relación á los círculos A y B (nº 305), y por pertenecer á MO, tiene una potencia igual con relación á los círculos B y C, luego tiene una potencia igual con relación á los círculos A y C, y pertenece á su eje radical; así los tres ejes se cortan en el mismo punto.

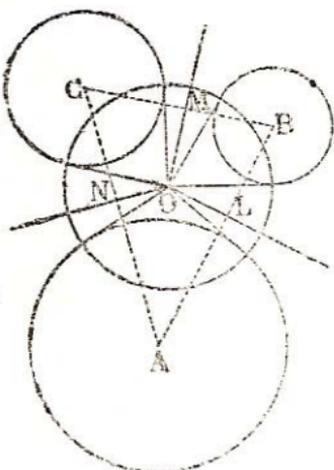


FIG. 193.

310. Observaciones. — I. El punto O se llama centro radical de los tres círculos.

Las tangentes trazadas desde este punto á los tres círculos son iguales entre sí. El punto O es el centro de una circunferencia que corta ortogonalmente las tres circunferencias dadas.

II. Cuando tres circunferencias se cortan de dos en dos, las tres cuerdas comunes concurren en el mismo punto.

III. Cuando tres circunferencias son tangentes de dos en dos, las tres tangentes trazadas por los puntos de contacto concurren en el mismo punto; porque estas rectas son los ejes radicales de las tres circunferencias.

IV. Cuando los tres centros A, B, C están en línea recta, los tres ejes radicales son paralelos; así el teorema es todavía cierto, aun en este caso límite, pero el punto de concurso está en el infinito.

CAPITULO III

PROBLEMAS CON RELACIÓN Á LOS SEGMENTOS PROPORCIONALES

§ I. — Construcción de los segmentos.

311. Problema. — *Dividir una recta dada AB en partes proporcionales á longitudes dadas m, n, r , ó á números dados 12, 8, 10, por ejemplo.*

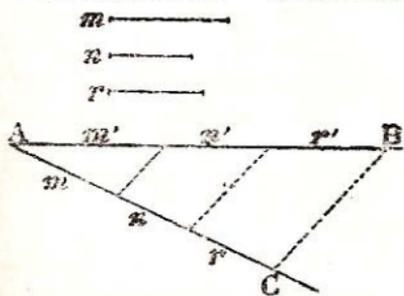


FIG. 194.

Se traza una recta AC que forme con AB un ángulo cualquiera; sobre esta recta AC , se llevan consecutivamente las longitudes dadas m, n, r ; se traza CB , luego, unas

rectas paralelas a CB por los diversos puntos de división

Las longitudes m' , n' , son entre sí como las longitudes m , n , r (n° 257).

Si lo que se da son números, se llevan sobre AC longitudes proporcionales á estos números, por ejemplo 12, 8, 10 milímetros.

312. Problema. — *Por un punto O dado en un ángulo cualquiera A trazar una recta que quede dividida por este punto en una relación dada, $\frac{3}{2}$ por ejemplo.*

Se traza OB paralela á uno de los lados del ángulo, AC por ejemplo; se divide AB en 3 partes iguales; se llevan 2 de estas partes de B á D, y se traza DOC, que es la recta pedida.

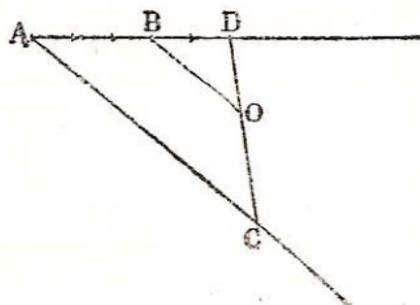


Fig. 195.

Porque las paralelas BO y AC dan la proporción

$$\frac{AB}{BD} = \frac{CO}{OD}; \text{ como } \frac{AB}{BD} = \frac{3}{2}, \text{ se tiene } \frac{CO}{OD} = \frac{3}{2}.$$

313. Problema. — *Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas a, b, c.*

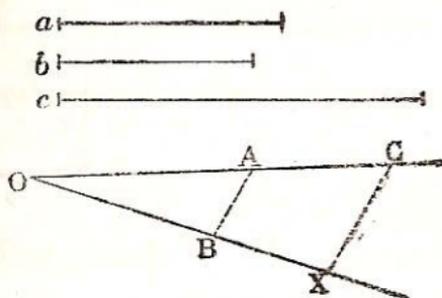


Fig. 196.

Se traza un ángulo cualquiera O sobre cuyos lados se llevan OA igual con a, OB igual á b, OC igual á c; se traza AB, en seguida CX paralela á AB. La recta OX ó x es la cuarta proporcional pedida;

porque se tiene (n° 258):

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OX} \text{ ó } \frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

314. Observaciones. — I. Se puede también resolver

este problema disponiendo b y c como dos segmentos de una cuerda, y a y x como los segmentos de otra cuerda que corta á la primera (n° 289).

II. Se puede también utilizar la propiedad de las secantes que parten de un mismo punto: sobre uno de los lados de un ángulo cualquiera, se llevan las líneas c y b como secante entera y parte externa; sobre el otro lado, se lleva la línea a ; la circunferencia descrita por los tres puntos marcados determina la cuarta proporcional (n° 294).

III. Si se pide una *tercera proporcional á dos rectas dadas* a y b , se busca una cuarta proporcional á las rectas a , b , b , de manera que se obtenga la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}.$$

Se puede también disponer la construcción de manera que a y c sean los dos segmentos de un diámetro, y b una perpendicular á este diámetro (n° 275).

315. Problema. — Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas a y b .

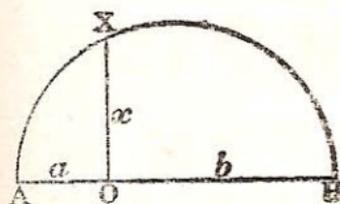


Fig. 197.

1º procedimiento. — Se traza una recta indefinida AB , sobre la cual se lleva $OA = a$, y $OB = b$; sobre AB como diámetro, se traza una semicircunferencia, y se levanta la perpendicular OX , que es la línea buscada.

Porque se tiene (n° 275):

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OB} \text{ ó } \frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

2º procedimiento. — Se llevan, una sobre otra, las dos longitudes OA y OB , ó a y b ; sobre OB como diámetro se traza una semicircunferencia; se levanta la perpendicular AX , y se traza la cuerda OX , que será la línea pedida

Porque se tiene (n° 258):

$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OB} \quad \text{ó} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

3º Procedimiento (fig 198). — Habiendo llevado la una sobre la otra las dos longitudes OA y OB, se traza sobre AB una semicircunferencia, á la cual se tira la tangente OD, que es la recta pedida.

Se tiene en efecto (nº 263):

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OD}{OB} \quad \text{ó} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

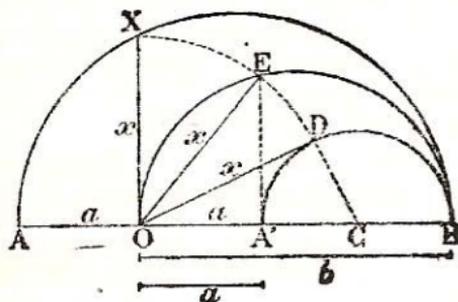


FIG. 199.

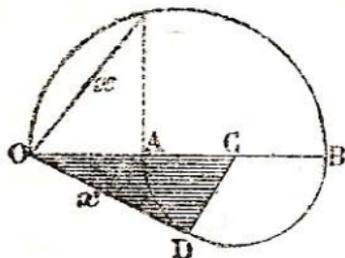


FIG. 198.

316. Verificaci6n. — Para reunir los tres procedimientos en una misma figura, se toma $OA = OA' = a$ y $OB = b$. Los tres puntos D, E, X deben pertenecer á un mismo arco, cuyo centro sea O.

§ II. — Aplicaciones.

317. Problema. — *Dividir una recta dada en media y extrema raz6n.*

Se dice que una recta queda dividida en media y extrema raz6n cuando la parte mayor es media proporcional entre toda la recta y su parte menor.

Sea AB la recta dada; se construye el triángulo rectángulo ABC, tomando BC igual á la mitad de AB; desde el punto C como centro se traza el arco

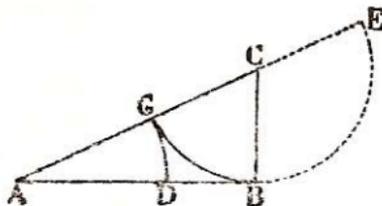


FIG. 200.

GBE, y desde el punto A el arco GD. El punto D divide á la recta AB en media y extrema razón, de modo que se tiene

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB}.$$

En efecto, prolonguemos la recta AC hasta su encuentro en E, con el arco GBE. La tangente AB y la secante AE dan (n° 293) :

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AG} \text{ de donde } \frac{AE - AB}{AB} = \frac{AB - AG}{AG}$$

Como por construcción, $AB = GE$, se tiene $AE - AB$ igual á AG ó AD ; y $AB - AG$ igual á DB . Y se tiene

pues:
$$\frac{AD}{AB} = \frac{DB}{AD} \text{ de donde } \frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB}.$$

318. Problema. — *Expresar la longitud de la media razón en función de la recta dada.*

Representemos AB por a , AG ó AD por x ; conforme á la construcción,

$$CG = BC = \frac{1}{2} a.$$

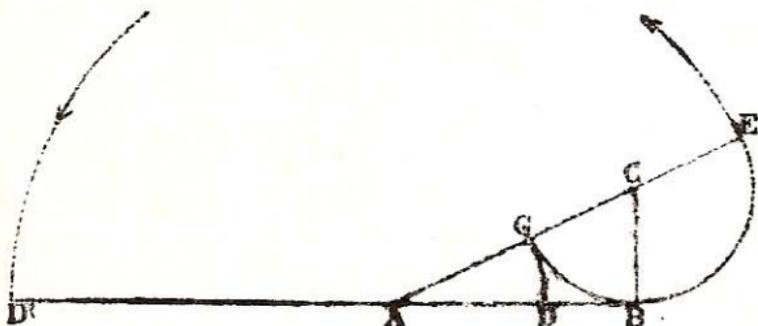


FIG. 201.

El triángulo rectángulo ABC da

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \\ \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 &= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \end{aligned}$$

de donde $x + \frac{a}{2} = \pm \frac{a}{2} \sqrt{5}$ y $x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{5}$

$$x = \frac{a}{2} (-1 \pm \sqrt{5}).$$

Efectuando los cálculos, se encuentran para x los dos valores :

$$a (0,618\dots)$$

$$a (-1,618\dots)$$

Luego AD es igual aproximadamente á los 0,618 de a .

El otro valor $a (-1,618\dots)$ ó $-1,618 a$, indica que existe otro punto que satisface la condición, y cuya distancia al punto A debe tomarse en sentido inverso de AD, es decir, á la izquierda del punto A; esta distancia está representada por la secante AE; si se lleva AE sobre AD', se tendrá

$$\frac{AB}{AD'} = \frac{AD}{D'B}.$$

En efecto, la figura da $\frac{AB}{AE} = \frac{AG}{AB} = \frac{AB + AG}{AE + AB}$.

Como $AB + AG$ es igual á AE ó AD' y $AE + AB$ igual á $D'B$, se tiene :

$$\frac{AB}{AD'} = \frac{AD}{D'B}.$$

319. Problema.—
Describir una circunferencia que pase por dos puntos dados A y B, y que sea tangente á una recta dada CD.

El centro F debe encontrarse á la vez sobre la perpendicular FF' trazada por la mitad de la cuerda AB y, sobre la perpendicular DF tirada á la tangente por el punto de contacto. La tangente CD es media proporcional entre las longitudes CA y CB, que se conoce.

Se puede por lo tanto trazar BAC, buscar CD medio

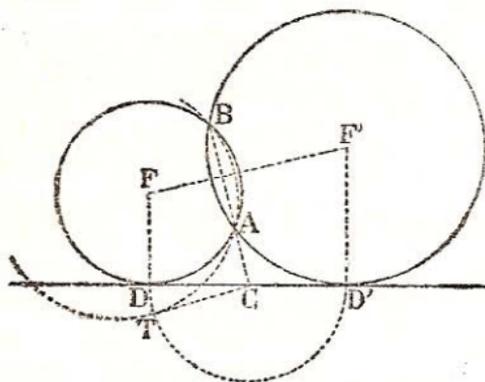


FIG. 302.

geométrico entre CA y CB (n° 297), trazar las perpendiculares FF' y DF, y describir, desde el punto F, la circunferencia pedida.

Esta circunferencia es tangente á CD (n° 294).

La distancia CD podría llevarse de C á D', lo cual daría una segunda solución.

Para obtener la media proporcional, basta hacer pasar por A y B, una circunferencia que corte á la recta dada y tirar la tangente CT.

320. Discusión. — Por estar la circunferencia tangente á una recta toda de un mismo lado de esta recta :

1° Si A y B están del mismo lado de CD, hay dos soluciones ;

2° Si uno de los puntos pertenece á la recta, es el punto de contacto, y sólo hay una solución ;

3° Si A y B están del uno y del otro lado de CD, no hay ninguna solución.

321. Problema. — *Describir una circunferencia que pase por dos puntos dados A y B, y que sea tangente á una circunferencia dada O.*

Sea AMEB la circunferencia que se quiere obtener

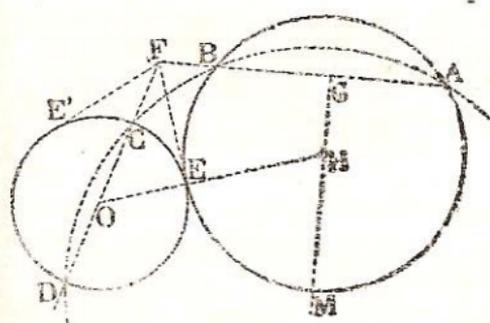


FIG. 203.

El centro se encuentra sobre una recta GH perpendicular á la mitad de AB.

Prolonguemos AB hasta que encuentre EF, tangente común á las dos circunferencias; tracemos al círculo O una se-

cante cualquiera FCD.

Se tiene $FC \times FD = \overline{EF}^2 = FA \times FB$; luego los puntos A, B, C, D están sobre una misma circunferencia (n° 293), luego el centro está sobre GH. Se puede; pues, describir á voluntad una circunferencia secante ABCD, trazar las secantes ABF y DCF, y en seguida FE tangente al círculo O; la recta OEH, que une el punto de contacto E con el centro O, determina el

centro de la circunferencia pedida, porque la circunferencia que pasa por los tres puntos A, B, E será tangente á FE, en el punto E (nº 265, III), y por consiguiente tangente á la circunferencia dada CDE.

La segunda tangente, que podría llevarse de F á E', daría una segunda solución.

322. Discusión. — Una circunferencia tangente á otra circunferencia es exterior ó interior á esta, luego :

1º Si A y B son ambos exteriores ó interiores al círculo dado, hay dos soluciones ;

2º Si uno de los puntos pertenece á la circunferencia, es el punto de contacto, y sólo hay una solución.

3º Si uno de los puntos es interior y el otro exterior, no hay ninguna solución.

CAPÍTULO IV

HOMOTECIA

323. Definición. — Dos figuras ABC ; $A_1B_1C_1$, son homotéticas cuando se corresponden punto á punto, de tal modo que dos puntos, A y A_1 , que se corresponden estén en una recta que pasa por un punto fijo O, y que los segmentos OA_1 y OA queden en una razón constante $\frac{OA_1}{OA} = K$.

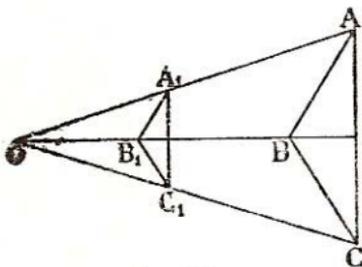


Fig. 204.

El punto O se llama centro de homotecia ; los puntos que se corresponden se llaman puntos homólogos, y la razón K es la razón de homotecia.

324. Problema. — Construir la figura homotética de una figura dada ABC , conocido el centro de homotecia O y K la razón de homotecia.

Se unen los puntos de la figura con el punto, y se dividen los segmentos de recta así obtenidos en la razón

razón $\frac{K}{1}$.

325. Propiedades. — I. *La figura homotética de un segmento de recta es un segmento de recta.*

Sea la recta AB , y el punto C del segmento; y $A_1B_1C_1$ los puntos homólogos de ABC . $A_1B_1C_1$ están en línea recta; en efecto, por definición, tenemos $\frac{OA_1}{OC_1} = \frac{OA}{OC}$, y A_1C_1 es paralela á AB .

También, tenemos $\frac{OC_1}{OB_1} = \frac{OC}{OB}$, y C_1B_1 es paralela á AB ; luego, A_1C_1 y C_1B_1 son dos paralelas á AB que salen del punto C_1 , por consiguiente se confunden.

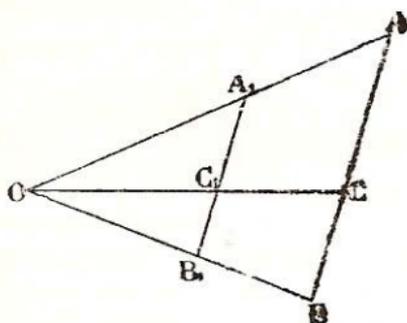


Fig. 206.

Los segmentos de recta que unen dos puntos homólogos se llaman **segmentos homólogos**.

II. *Los segmentos homólogos son paralelos y en la razón de homotecia.*

Sean los segmentos AC y A_1C_1 ; ya sabemos que son paralelos; y tenemos

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{OA_1}{OA} = K.$$

326. Consecuencias. — I. *La figura homotética de un ángulo es un ángulo igual; en efecto, los dos ángulos tienen sus lados directamente paralelos.*

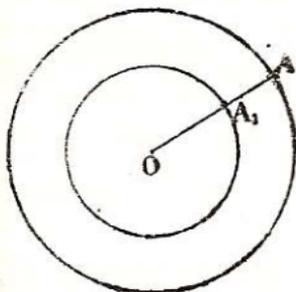


Fig. 206.

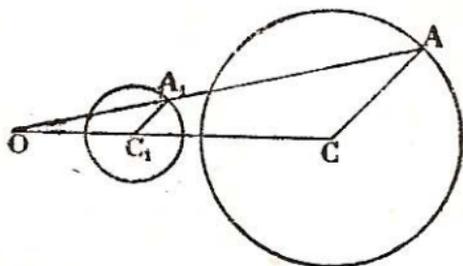


Fig. 207.

II. *Los triángulos homotéticos son semejantes; porque*

tienen sus ángulos homólogos iguales y sus lados homólogos proporcionales.

III. *Dos polígonos homotéticos pueden descomponerse en el mismo número de triángulos semejantes, y dispuestos del mismo modo.*

IV. *La figura homotética de una circunferencia es una circunferencia.*

Es evidente cuando el centro de la curva se confunde con el centro de homotecia. En efecto,

$$\frac{OA_1}{OA} = K \text{ ó } OA_1 = K \cdot OA, \text{ y } OA_1 \text{ es una constante.}$$

Si el centro de la circunferencia es C y O es el centro de homotecia, considerando el homólogo C_1 de C, y un punto A_1 , homólogo de A, se tiene

$$\frac{A_1C_1}{AC} = K.$$

$$\text{ó } A_1C_1 = K \cdot AC.$$

A_1C_1 es una constante, y la figura homotética es una circunferencia de centro C_1 y de radio $K \times AC$.

CAPÍTULO V

SIMILITUD

§ I. — Generalidades.

327. Definición. — *Dos figuras son semejantes cuando cada una de ellas es igual á una de las figuras homotéticas de la otra.*

Se puede decir también que dos figuras son semejantes, cuando se les puede dar la posición de dos figuras homotéticas.

Los elementos homólogos son los que se corresponden cuando las dos figuras están en homotecia. La razón de homotecia se llama razón de similitud.

328. Triángulos semejantes. — La definición particular de los triángulos semejantes es conforme con la nueva definición. En efecto, se puede hacer que, en dos triángulos semejantes $AB'C'$ y ABC , dos ángulos homólogos coincidan. Entonces los lados AB' y AC' toman las direcciones de sus homólogos AB y AC , y los terceros lados son paralelos.

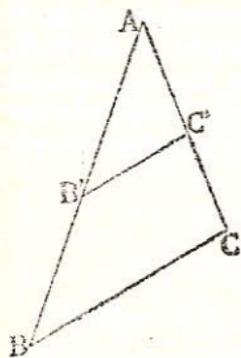


FIG. 208.

Se tiene $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = K$.

Los dos triángulos son homotéticos; A es el centro de homotecia, y K la razón de homotecia.

329. Propiedades de las figuras semejantes. — Se deducen de las propiedades métricas de las figuras homotéticas, así :

La figura semejante de una recta es una recta.

La figura semejante de un ángulo es un ángulo igual.

La figura semejante de un polígono es un polígono.

La figura semejante de una circunferencia es una circunferencia.

§ II. — Polígonos semejantes.

330. Definición. — *Dos polígonos son semejantes cuando cada uno de ellos es igual a uno de los homotéticos del otro.*

331. Teorema. — 1° *Dos polígonos semejantes tienen sus ángulos homólogos iguales, y sus lados homólogos proporcionales.*

2° *Dos polígonos semejantes pueden descomponerse en un mismo número de triángulos semejantes y dispuestos del mismo modo.*

En efecto, el segundo polígono puede coincidir con un homotético del primero; y este homotético goza de las propiedades indicadas.

332. Recíproca. — 1° *Dos polígonos que tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales son semejantes.*

Sean los polígonos $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$, equiángulos entre sí, y tales que

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1A_1}{DA} = K.$$

Tomando un centro O cualquiera, construyamos el polígono $A'B'C'D'$, homotético de $ABCD$, y en la razón K , $A'B'C'D'$ es igual á $A_1B_1C_1D_1$. En efecto, los ángulos de estos dos polígonos son respectivamente iguales, por ser respectivamente iguales á los de $ABCD$; y, por otra parte,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = K.$$

de donde

$$A'B' = A_1B_1; B'C' = B_1C_1; C'D' = C_1D_1; D'A' = D_1A_1.$$

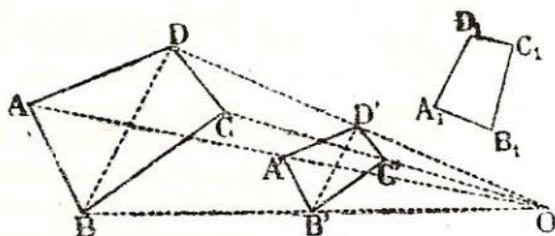


Fig. 209.

y, según el n° 155, $A'B'C'D'$ y $A_1B_1C_1D_1$ son iguales; luego $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ son semejantes.

2° *Dos polígonos que pueden descomponerse en triángulos respectivamente semejantes y dispuestos del mismo modo son semejantes.*

Sean los polígonos $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$, y K la razón de similitud de los triángulos. Construyamos $A'B'C'D'$ como en el caso anterior.

Los lados homólogos de los triángulos de $A'B'C'D'$ y de $A_1B_1C_1D_1$, son iguales, como lo hemos visto en el caso anterior; sus ángulos homólogos son iguales también; luego $A'B'C'D'$ y $A_1B_1C_1D_1$ son iguales por ser formados de un mismo número de triángulos respectivamente iguales y dispuestos del mismo modo; (n° 157); luego $ABCD$ y $A_1B_1C_1D_1$ son semejantes.

Corolario. — *Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como dos lados homólogos, o como dos líneas homólogas cualesquiera.*

Siendo semejantes los polígonos P y P', se tiene

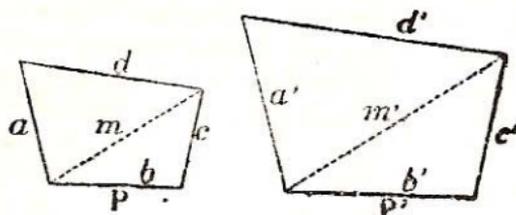


Fig. 210.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

de donde, haciendo la suma de los numeradores y la de los denominadores,

$$\frac{a + b + c + d}{a' + b' + c' + d'} = \frac{a}{a'} \dots = \frac{m}{m'}$$

CAPÍTULO VI

POLÍGONOS REGULARES

§ I. — Polígonos regulares convexos.

333. **Definiciones.** — Polígono regular es el que tiene todos sus lados y sus ángulos iguales.

El triángulo equilátero y el cuadrado son polígonos regulares.

Un polígono es **inscrito** cuando todos sus vértices están sobre una misma circunferencia, y **circunscrito**, cuando todos sus lados son tangentes á una misma circunferencia.

Una circunferencia es **circunscrita** á un polígono cuando pasa por todos los vértices; y es **inscrita** cuando es tangente á todos los lados.

Línea quebrada regular es una línea formada de varias cuerdas iguales tiradas

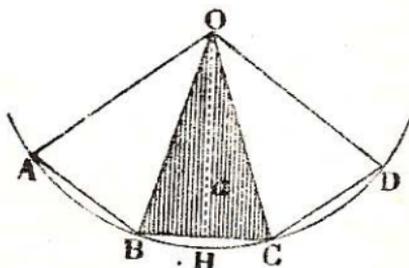


Fig. 211

sobre un mismo arco de círculo. — Ejemplo : la línea ABCD (fig. 214).

Sector poligonal regular es la figura comprendida entre una línea quebrada regular y los radios tirados á sus extremidades. — Ejemplo : la figura OABCD.

Se llama centro de un polígono regular inscrito el centro del círculo circunscrito á este polígono.

Se llama centro de figura un punto que divide en dos partes iguales á todas las rectas que se pueden trazar por este punto, y cuyos extremos pertenecen al perímetro de la figura considerada.

El centro de un círculo es un centro de figura ; lo mismo sucede con el punto de concurso de las diagonales en un paralelogramo, lo mismo que con el centro de un polígono regular de un número par de lados.

Se llama radio de un polígono regular inscrito el radio del círculo circunscrito á este polígono, y apotema la distancia del centro á cada uno de los lados, la cual es el radio del círculo inscrito.

334. Teorema. — Cuando una circunferencia está dividida en un número cualquiera de partes iguales, las cuerdas que unen consecutivamente los puntos de división forman un polígono regular inscrito.

Sea, por ejemplo, una circunferencia dividida en 5 partes iguales, en los puntos A, B, C, D, E. Siendo iguales los arcos AB, BC, CD..., las cuerdas que los subtienden serán iguales (n° 176). Por otra parte, cada uno de los ángulos ABC... es inscrito, y abraza las $\frac{3}{5}$ partes de la circunferencia, luego todos son iguales, y el polígono inscrito es regular.

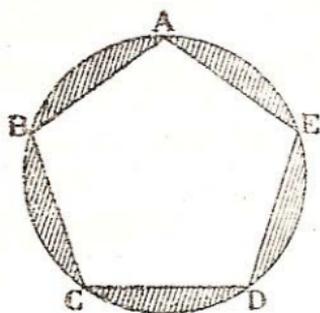


FIG. 212.

335. Teorema. — Cuando una circunferencia está dividida en un número cualquiera de partes iguales, las tangentes tiradas por los puntos de división forman un polígono regular circunscrito.

Sea, por ejemplo, una circunferencia dividida en

5 partes iguales, y sea $FGHIK$ el polígono circunscrito formado por las tangentes tiradas por los puntos de división. Las cuerdas AB, BC, CD, \dots , son iguales como subtendentes de arcos iguales.

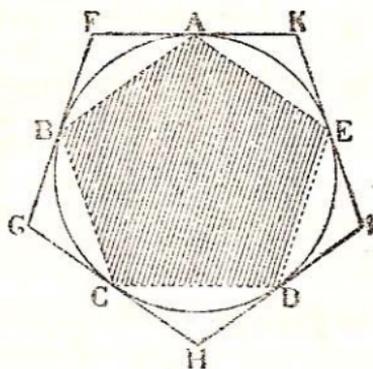


Fig. 213.

En los triángulos ABF, BCG, CDH, \dots , los ángulos en A, B, C, \dots , son iguales por ser ángulos del segmento que comprenden arcos iguales (nº 209); así estos triángulos son iguales por tener un lado igual adyacente á ángulos iguales; y además, cada uno de estos triángulos es isósceles.

De donde resulta la igualdad de los ángulos F, G, H, I, K , y la de los lados $AF, FB, BG, GC, CH, \dots$. Se tiene por consiguiente

$$FG = GH = HI = IK = KF.$$

Luego el polígono $FGHIK$ es regular; puesto que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos también iguales.

336. Escolio. — El problema de la construcción de los polígonos regulares tiene relación con el problema de la división de la circunferencia en partes iguales, y se puede circunscribir á la circunferencia tantos polígonos regulares como se puede inscribir.

337. Teorema. — *A todo polígono regular se puede circunscribir una circunferencia.*

Sea $ABCDE$ un polígono regular. Hagamos pasar una circunferencia por los tres vértices A, B, C ; vamos á demostrar que esta circunferencia pasa también por los otros vértices.

Tracemos OA y OD , en seguida OH perpendicular á la cuerda BC , y suponga-

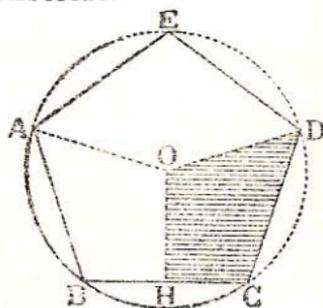


Fig. 214.

mos que el cuadrilátero $OHBA$ gira alrededor de OH para aplicarse sobre el cuadrilátero $OHCD$.

El punto H es la mitad de la cuerda BC (nº 121); así es que los ángulos rectos en H coinciden, lo mismo que HB con HC , el ángulo B con C , BA con CD , y por consiguiente OA con OD .

Luego la circunferencia que pasa por los tres vértices A, B, C , pasa también por el vértice D . Se demostraría del mismo modo que esta circunferencia pasa por E .

338. Teorema. — *En todo polígono regular, se puede inscribir una circunferencia.*

Sea $ABCDE$ un polígono regular. Describamos la circunferencia circunscrita (nº 337), y tracemos desde el centro O , las perpendiculares OF, OG, OH .

Los lados AB, BC, CD, \dots , son cuerdas iguales, y por lo mismo igualmente distantes del centro (nº 187); por tanto, los perpendiculares OF, OG, OH, \dots , son iguales, la circunferencia descrita con OF como radio pasa por los puntos G, H, I, \dots , y los lados AB, BC, CD, \dots , son tangentes á esta circunferencia, por ser perpendiculares á la extremidad de los radios OF, OG, OH, \dots .

Luego esta circunferencia está inscrita al polígono.

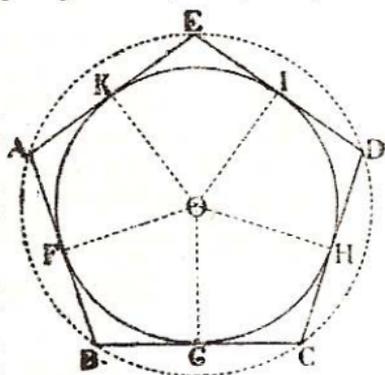


FIG. 215.

§ II. — Polígonos estrellados.

339. Definiciones. — *Se llama polígono estrellado el polígono cuyos ángulos son alternativamente salientes y entrantes, y cuyos lados pertenecen á una línea quebrada continua y cerrada, haciéndose todas las quebraduras en un mismo sentido.*

Ejemplo : La figura ABCDE, es un *pentágono estrellado*, porque la línea quebrada ABCDEA está formada de cinco elementos.

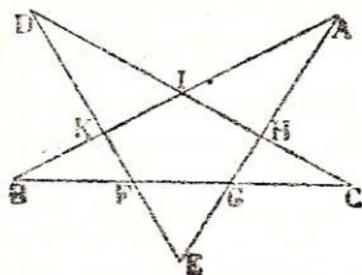


FIG. 216.

Un *polígono estrellado* es regular cuando los ángulos A, B, C... son iguales entre sí y los lados AB, BC, CD... son iguales.

340. **Construcción.** — Para obtener un polígono regular estrellado de n lados, se divide una circunferencia en n partes iguales, y se unen los puntos de división de dos en dos, de tres en tres, de m en m .

Se obtiene un polígono estrellado de n lados, cuando se vuelve al punto de partida después de haber encontrado todos los puntos de división.

Ejemplo : Sea una circunferencia dividida en cinco partes iguales. Uniendo los puntos de dos en dos, se obtiene el *pentágono estrellado*.

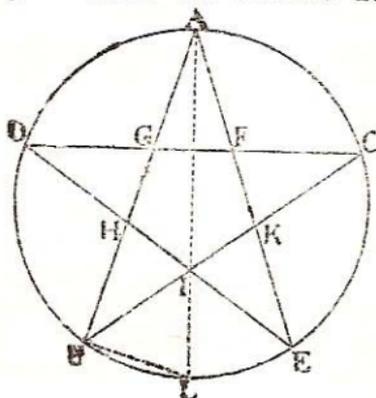


FIG. 217.

Para obtener el *decágono estrellado*, se divide la circunferencia en diez partes iguales y se unen los puntos de tres en tres.

341. **Observación.** — En el pentágono, unir los puntos de dos en dos equivale también a unirlos de tres en tres, es decir de $(5 - 2)$ en $(5 - 2)$.

En el decágono, unir los puntos de tres en tres equivale también a unirlos de siete en siete, es decir de $(10 - 3)$ en $(10 - 3)$.

De una manera general, unir los puntos de m en m equivale a unirlos de $(n - m)$ en $(n - m)$.

342. **Teorema.** — Se pueden obtener tantos polígonos estrellados de n vértices como números hay,

diversos de la unidad, menores que $\frac{n}{2}$ y primos con el número n .

1º Basta considerar los números m menores que $\frac{n}{2}$, porque unir los puntos de m en m equivale á unirlos de $(n - m)$ en $(n - m)$.

2º Debe excluirse la unidad; porque, uniendo los puntos consecutivos, se obtiene el polígono convexo.

3º Siendo m primo con n , se necesitarán n lados para volver al punto de partida, y se encontrará así cada punto de división

343. Aplicaciones. —

$n = 3$, $n = 4$ no dan ningún polígono estrellado.

$n = 5$ da un pentágono estrellado, porque m puede ser igual á 2.

$n = 6$ no da nada, porque 2 y 3 son submúltiplos de 6

$n = 7$ da dos eptágonos estrellados, porque m puede ser igual á 2 y 3.

$n = 8$ da un octógono estrellado, para $m = 3$.

$n = 9$ da dos eneágonos estrellados, para $m = 2$ y 4.

$n = 10$ da un decágono estrellado, para $m = 3$.

$n = 12$ da un dodecágono estrellado, para $m = 5$.

$n = 15$ da tres pentadecágonos estrellados, para $m = 2$, 4 y 7.

$n = 30$ da tres polígonos estrellados, para $m = 7$, 11 y 13.

§ III. — Polígonos regulares inscritos.

344. Problema. — *Inscribir un cuadrado en un círculo dado.*

Se trazan dos diámetros AC y BD perpendiculares entre sí; la circunferencia queda dividida en cuatro partes iguales, y el polígono ABCD es un cuadrilátero regular, es decir un cuadrado, inscrito en el círculo dado

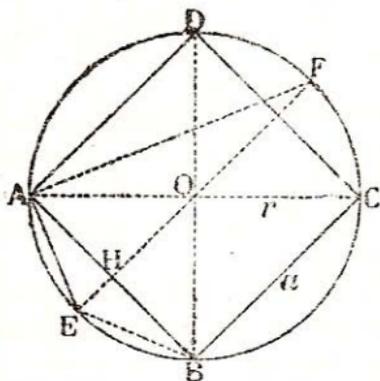


FIG. 218.

345. Escolios. — I. Se puede subdividir los arcos AB, BC... en 2, 4, 8, 16... partes iguales, y por consiguiente inscribir los polígonos regulares de 8, 16, 32, ó 2^2 , 2^3 , 2^4 , y en general 2^n lados, es decir cualquier polígono regular que tenga un número de lados indicado por una potencia de 2.

II. Se puede circunscribir el cuadrado y cualquier polígono regular de un número de lados expresado por 2^n .

III. *Expresión del lado del cuadrado en función del radio.* El triángulo rectángulo AOB da $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 = 2r^2$; de donde

$$AB = r\sqrt{2} = r(1.41421\dots)$$

IV. *Expresión de la diagonal del cuadrado en función del lado.*

El triángulo ABC da $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ ó $d^2 = 2a^2$, de donde $d = a\sqrt{2}$.

V. *Expresión del lado del octógono regular en función del radio.*

Sea E el punto medio del arco AB; AE es el lado del octógono regular. Tracemos el diámetro EF y la cuerda AF. El triángulo rectángulo EAF da :

$$\overline{AE}^2 = EF \times EH$$

por ser $EF = 2r$; $EH = r - HO$

y además $\overline{HO}^2 = \frac{r^2}{2}$, $HO = \frac{r}{\sqrt{2}}$, se tiene $EH = r - \frac{r}{\sqrt{2}}$
 $= r - \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

luego $\overline{AE}^2 = 2r \left(r - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) = 2r \left(\frac{2r - r\sqrt{2}}{2} \right)$

$$\overline{AE}^2 = r^2(2 - \sqrt{2}) \text{ de donde } AE = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

346. Teorema. — *El lado del exágono regular inscrito es igual al radio del círculo circunscrito.*

Sea ABCDEF un exágono regular inscrito; tracemos los radios OA y OB. Basta probar que el triángulo AOB es equilátero

El ángulo AOB es igual al $\frac{1}{6}$ de 4 rectos, es decir al $\frac{1}{6}$ de 360° ó sea 60° ; luego los otros dos ángulos suman 120° (nº 97); cada uno de ellos vale 60° , y el triángulo AOB es equilátero.

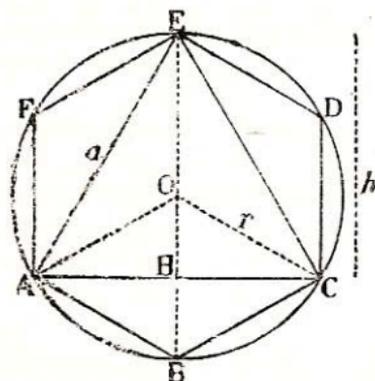


FIG. 219.

347. Corolarios. — 1º Para inscribir en un círculo dado un exágono regular, se lleva el radio seis veces como cuerda, y se unen los puntos consecutivos;

2º Si se unen los puntos de dos en dos, se obtiene el triángulo equilátero inscrito ACE;

3º Subdividiendo los arcos AB, BC, CD... en 2, 4, 8, 16... partes iguales, se pueden construir los polígonos regulares de 12, 24, 48... lados;

4º Se puede inscribir y circunscribir al círculo cualquier polígono regular de un número de lados representado por 3×2^n .

348. Escolio. — I. *Expresión del lado del triángulo equilátero inscrito en función del radio.*

El triángulo BAE, rectángulo en A (nº 212, 2º) da

$$\overline{AE}^2 = \overline{BE}^2 - \overline{AB}^2 = (2r)^2 - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2.$$

Luego $AE = r\sqrt{3} = r(1,732\ 05\dots)$.

II. *El apotema del triángulo equilátero inscrito es igual a la mitad del radio:*

$$OH = \frac{OB}{2} = \frac{r}{2}, \text{ porque la figura ABCO es un rombo.}$$

III. *La altura del triángulo equilátero inscrito es igual al triple del apotema:*

$$EH \text{ ó } h = EO + OH = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}.$$

IV. *La altura del triángulo equilátero en función del lado AE ó a del triángulo se encuentra por la fórmula*

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

porque

$$\overline{EH}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{AH}^2$$

$$\text{ó } h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}; h = \frac{a}{2}\sqrt{3}; \text{ó } h = a (0,866\dots)$$

V. El lado a en función de la altura se encuentra por la fórmula:

$$a = \frac{2}{3} h \sqrt{3};$$

$$\text{porque } \frac{3a^2}{4} = h^2 \text{ de donde } a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} h \sqrt{3}.$$

$$\text{ó } a = h (1,1547).$$

349. Teorema. — *El lado del decágono regular inscrito es igual al segmento mayor del radio dividido en media y extrema razón.*

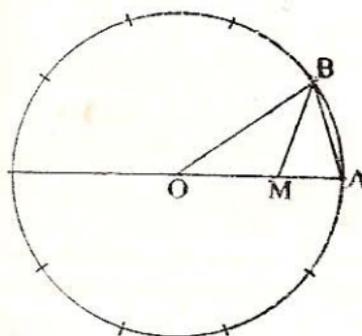


FIG. 220.

Sea AB el lado del decágono regular inscrito. Tracemos los radios OA y OB, y la bisectriz BM del ángulo ABO.

En el triángulo isósceles AOB, el ángulo O es igual a $\frac{1}{10}$ de cuatro ángulos rectos, ó 36° ; luego los otros dos ángulos A y B valen cada uno 72° , y cada mitad del ángulo B vale 36° ; por consiguiente el triángulo

OBM es isósceles, y $BM = OM$.

El ángulo $ABM = 36^\circ$, el ángulo $A = 72^\circ$, luego el suplemento de su suma, el ángulo $AMB = 72^\circ$ y el triángulo ABM es isósceles, y se tiene $AB = BM = OM$.

En el triángulo ABO, la bisectriz BM da (n° 236):

$$\frac{BO}{BA} = \frac{MO}{MA} \quad \text{ó} \quad \frac{OA}{OM} = \frac{OM}{MA}.$$

Así es que el punto M divide al radio OA en media y extrema razón (n° 316), y el segmento mayor OM es igual a AB, que es lo que se quería demostrar.

350. Escolios. — I. Uniendo los vértices de dos en dos, se obtiene el pentágono regular inscrito.

II. Subdividiendo los arcos AB, BC, CD... en 2, 4, 8, 16... partes iguales, se obtienen los polígonos regulares de 20, 40, 80... lados. En esta serie de polígonos, el número de lados tiene por expresión general 5×2^n .

III. El lado del decágono regular inscrito tiene por expresión (n° 347).

$$\frac{r}{2} (-1 + \sqrt{5}) \text{ ó } r (0,61803\dots)$$

351. Problema. — *Inscribir en un círculo dado un pentadecágono regular, ó polígono regular de 15 lados.*

Sean AB el lado del exágono regular inscrito (n° 345), y AC el lado del decágono (n° 348).

El arco $BC = ACB - AC = 60^\circ - 36^\circ$, ó sea 24° , es decir $1/15$ de la circunferencia. Así, la cuerda BC es el lado del pentadecágono regular inscrito.

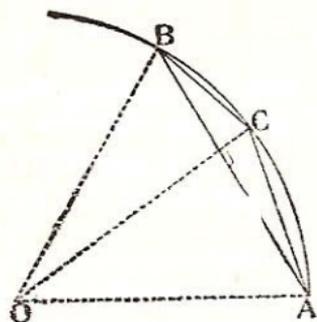


FIG. 221.

352. Escolio. — Subdividiendo los arcos en 2, 4, 8... partes iguales, se obtienen los polígonos regulares de 30, 60, 120... lados. Estos números tienen por expresión general $5 \times 3 \times 2^n$.

353. Teorema. — *El lado del pentágono regular inscrito es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son los lados del exágono y del decágono inscritos en el mismo círculo.*

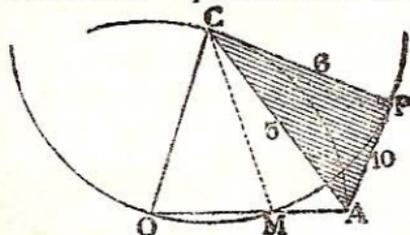


FIG. 222.

Sea OM el lado del decágono regular inscrito en el círculo C, prolonguemos OM, y desde el punto O, con OC por radio, tracemos el arco CA; tiremos al círculo C la tangente AP, y el radio de contacto CP.

Siendo OM el lado del decágono regular, y siendo OA igual al radio CO , OM es media proporcional entre OA y AM (n° 348); y como lo mismo sucede con la tangente AP (n° 293), se infiere que $AP = OM$, lado del decágono.

En el triángulo OCM , el ángulo C es igual á 36° ; luego los dos ángulos O y M valen juntos 144° , y cada uno de ellos vale 72° , ó sea $\frac{1}{5}$ de 4 rectos.

Y como OC y AO son radios, AC es igual al lado del pentágono regular inscrito.

Luego el radio, el lado del decágono y el lado del pentágono regular inscrito pueden formar un triángulo rectángulo APC .

Este triángulo da:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2.$$

354. *Escolio.* — *Expresión del lado del pentágono regular inscrito, en función del radio.*

Se tiene $\overline{CP}^2 = r^2$; además (n° 349):

$$AP = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1) \text{ de donde } \overline{AP}^2 = \frac{r^2}{4} (6 - 2\sqrt{5})$$

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{CP}^2 + \overline{AP}^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} (6 - 2\sqrt{5}) \\ &= \frac{4r^2}{4} + \frac{r^2}{4} (6 - 2\sqrt{5}) = \frac{r^2}{4} (10 - 2\sqrt{5}). \end{aligned}$$

$$\text{Luego } AC = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = r (1,47557\dots).$$

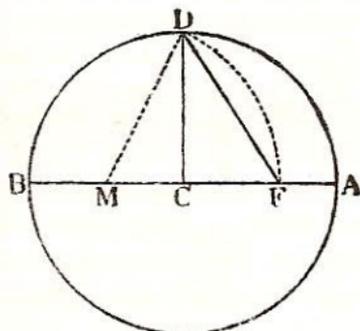


FIG. 223.

355. *Problema.* — *Construir el lado del decágono y el del pentágono regulares.*

El valor $\frac{r}{2} (-1 + \sqrt{5})$ del segmento mayor de una recta dividida en media y extrema razón, conduce á la construcción siguiente:

Se traza un radio CD perpendicular al diámetro AB .

Desde el punto M , medio de BC como centro, y con el radio MD , se traza el arco DE .

Desde el punto M , medio de BC como centro, y con el radio MD , se traza el arco DE .

De esta manera se encuentra CE por lado del decágono, y por consiguiente DE por lado del pentágono (n° 352).

En efecto :

$$\overline{MD}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{MD}^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 = \frac{5r^2}{4}$$

$$ME = MD = \frac{r}{2} \sqrt{5}$$

$$CE = ME - \frac{r}{2} = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2} \sqrt{5}$$

$$CE = \frac{r}{2} (-1 + \sqrt{5}).$$

§ IV. — Problemas.

1. — POLÍGONOS SEMEJANTES.

356. Problema I. — *Construir un polígono semejante á un polígono dado P, y tal que la razón de similitud sea K.*

Se toma un centro O cualquiera, y se construye el homotético de P en una razón K.

357. Problema II. — *Construir sobre una recta a' un polígono semejante á un polígono dado P.*

Sea a el lado homólogo de a' en el polígono dado. Se toma un centro O cualquiera y se construye el homotético de P en una razón $\frac{a'}{a}$.

2. — RELACIONES ENTRE LOS POLÍGONOS INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS.

358. Problema. — *Conociendo el radio del círculo y el lado del polígono regular inscrito, calcular el lado del polígono circunscrito semejante.*

Sea AB ó a el lado dado, y r el radio OA ú OB. Por

el punto C, medio del arco ACB, tiremos la tangente

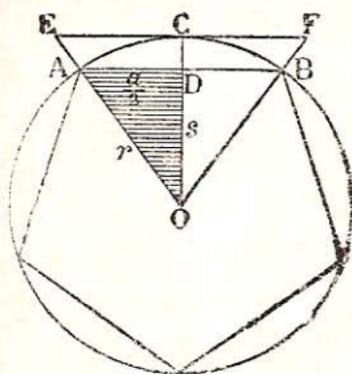


Fig. 224.

EF, limitada por las prolongaciones de los radios OA y OB. El radio OC es perpendicular á la tangente EF y á la cuerda AB (n^o 194); así, estas dos rectas AB y EF son paralelas, y la recta EF ó a' es el lado que es preciso calcular.

Los triángulos EFO y ABO, por ser semejantes dan

$$\frac{a'}{a} = \frac{r}{s} \text{ de donde } a' = \frac{ar}{s}.$$

Por ser $s^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}(4r^2 - a^2)$ resulta $s =$

$$\frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2}.$$

$$\text{Luego } a' = \frac{ar}{\frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2}} = \frac{2ar}{\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

Si se supone el radio r igual á la unidad, esta fórmula se convierte en

$$a' = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

359. Escelto. — La solución anterior es general; y se aplica aún en el caso en que la cuerda AB no pertenezca á un polígono regular. Sucede lo mismo en la cuestión siguiente (n^o 358).

3. — RELACIÓN ENTRE DOS POLÍGONOS INSCRITOS.

360. Problema. — Conociendo el lado de un polígono regular inscrito y el radio del círculo circunscrito, calcular el lado del polígono regular inscrito de un número doble de lados.

Sean AB ó a el lado dado, y r el radio del círculo. Si se traza el diámetro CG perpendicular á la cuerda AB,

AC ó a' será el lado pedido. Se necesita expresar a' en función de a y de r .

El cuadrado de la cuerda AC es igual á su proyección CD sobre el diámetro, multiplicada por el diámetro CG (nº 277):

$$a'^2 = 2ri = 2r(r-s) = 2r^2 - 2rs$$

de donde $a' = \sqrt{2r^2 - 2rs}$.

El triángulo rectángulo ADO da:

$$s^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4r^2 - a^2}{4}$$

de donde $s = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2}$

Substituyendo este valor de s en la expresión de a' , se obtiene:

$$a' = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}$$

Si se supone el radio r igual á la unidad, esta fórmula se convierte en

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$$

4. — RELACIÓN ENTRE 2 POLÍGONOS ISOPERÍMETROS

361. Teorema. — *Conociendo el apotema y el radio de un polígono regular cualquiera, se puede calcular el apotema y el radio del polígono regular isoperímetro de un número doble de lados.*

Sean OH y OA el apotema y el radio dados. Describamos con OA la circunferencia circunscrita al polígono considerado, cuyo lado es AB, AOB es el ángulo en el centro de este polígono.

Prolonguemos el apotema HO hasta G; tracemos

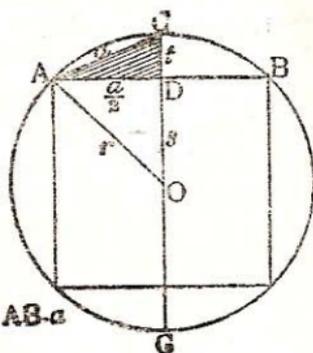


FIG. 225.

GA y GB, OD perpendicular á GA, y por último, DE paralela á AB. El punto D es el punto medio de la cuerda AG; así el triángulo GDE, semejante á GAB, tiene todas sus dimensiones de la mitad de sus homólogos en GAB; luego $DE = 1/2 AB$, y $GF = 1/2 GH$; además, el ángulo inscrito AGB es la mitad del ángulo en el centro AOB.

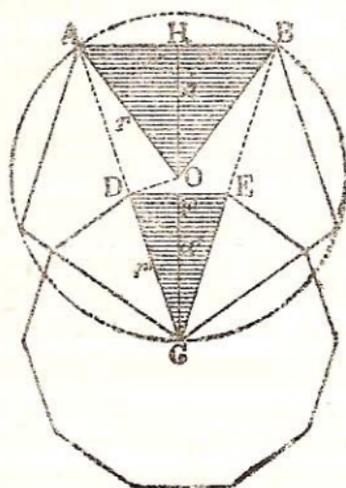


Fig. 226.

Así es que DE es el lado del polígono pedido; y DGE es el ángulo en el centro de este polígono; GF ó a' es su apotema y GD ó r' es el radio.

Vamos á expresar a' y r'

en función de a y de r .

1° Se tiene $GF = 1/2 GH = 1/2 (OH + OG)$

$$\text{ó} \quad a' = \frac{a + r}{2}. \quad (4)$$

Luego el nuevo apotema es un medio aritmético entre el apotema y el radio del polígono anterior

2° En el triángulo rectángulo ODG, se tiene $\overline{GD}^2 = GF \times GO$, ó $r'^2 = a'r$; de donde

$$r' = \sqrt{a'r}. \quad (2)$$

Luego el nuevo radio es un medio geométrico entre el nuevo apotema y el radio anterior.

362. Escolio. — La inspección de la figura hace ver que el radio va disminuyendo y que el apotema va aumentando.

En efecto, la perpendicular DG es menor que la oblicua OG, luego

$$DG < OG, \text{ así } r' < r$$

$$GF = 1/2 GH = FH$$

luego

$$GF > OH \text{ ó } a' > a$$

Las fórmulas (1) y (2) conducen al mismo resultado :
Así, por ser $a < r$, la fórmula (1) da :

$$a' > a; \text{ y } a' < r.$$

Como (2) el producto $a'r$ es $< r^2$.

$$r' < r.$$

CAPÍTULO VII

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA.

363. Definición. — *La longitud de la circunferencia es el límite del perímetro de un polígono regular inscrito, cuando se duplica indefinidamente el número de sus lados.*

El teorema siguiente establece que este límite existe y es una cantidad determinada.

364. Teorema. — *Cuando se duplica indefinidamente el número de los lados de dos polígonos semejantes, inscrito y circunscrito, sus perímetros tienen como límite común la longitud de la circunferencia.*

Sea n el número de los lados, p el perímetro del polígono inscrito, p' el perímetro del polígono circunscrito.

Cuando n crece, p aumenta, permaneciendo constantemente menor que la circunferencia; vamos á demostrar que $p' - p$ tiende hacia *zero*.

Sean CI y $C'I'$ los lados de dos polígonos regulares semejantes, el uno inscrito y el otro circunscrito; sean OA y OA' los apotemas, n el número de los lados, y r el radio del círculo.

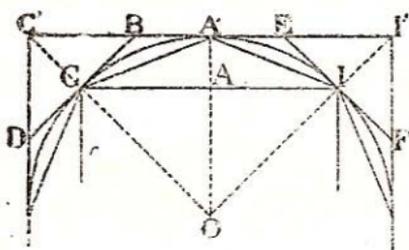


FIG. 227.

Se tiene $\frac{p}{p'} = \frac{OA'}{OA}$ de donde $\frac{p' - p}{p'} = \frac{AA'}{OA'}$ de donde

$$p' - p = \frac{p'}{r} \times AA'.$$

Como $AA' < CA' < \text{arco } CA' \text{ ó } \frac{\text{circ.}}{2n}$, resulta

$$p' - p < \frac{p'}{r} \times \frac{\text{circ.}}{2n}.$$

Si n crece indefinidamente, la razón $\frac{\text{circ.}}{2n}$ tiende hacia cero; sucede lo mismo con $p' - p$, luego, p y p' tienden hacia un mismo valor; y estando la circunferencia siempre comprendida entre p y p' es su límite común.

365. Teorema. — *Dos circunferencias cualesquiera son entre sí como sus radios ó como sus diámetros.*

En efecto, dos circunferencias cualesquiera C y C' , son

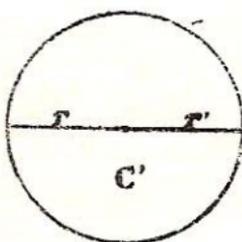
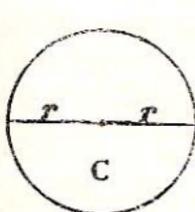


FIG. 233.

los límites hacia los cuales tienden los perímetros de los polígonos regulares semejantes inscritos, cuando el número de los lados aumenta indefinidamente.

Por grande que sea el número de los lados, los perímetros de estos polígonos son siempre entre sí como sus radios; esta propiedad es aún cierta al límite, es decir para las dos circunferencias; y se tiene:

$$\frac{C}{C'} = \frac{r}{r'} = \frac{2r \text{ ó } d}{2r' \text{ ó } d'}.$$

365 bis. Corolarios. — *La relación de la circunferencia al diámetro es constante.*

Porque la igualdad $\frac{C}{C'} = \frac{2r}{2r'}$ da $\frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'}$.

Esta relación constante es igual á

3,141592653...

Se representa ordinariamente por la letra griega (pi) y se escribe ; $\frac{C}{2r} = \pi$.

366. Teorema. — La longitud de la circunferencia es igual al diámetro multiplicado por π .

En efecto, la igualdad (n° 365 bis) $\frac{C}{2r} = \pi$.

$$la \quad C = 2\pi r.$$

367. Corolarios. — 1° El diámetro es igual á la circunferencia dividida por π , ó multiplicada por su inversa $\frac{1}{\pi}$.

$$2r = \frac{C}{\pi} \text{ ó } 2r = C \times \frac{1}{\pi}.$$

La inversa $\frac{1}{\pi} = 0,318309886\dots$

2° La longitud l de un arco de n grados se encuentra por la fórmula :

$$l = \pi r \times \frac{n}{180}$$

porque el arco de un grado es igual á $\frac{2\pi r}{360}$ ó $\frac{\pi r}{180}$, luego el arco de n grados será $\frac{\pi r n}{180}$.

§ II. — Cálculo de π .

1. — MÉTODO DE LOS PERÍMETROS (ARQUÍMEDES).

368. — Si en la fórmula (n° 366) $\pi = \frac{C}{2r}$ se supone $r = 1$ se tendrá $\pi = \frac{C}{2}$.

Por consiguiente, calculando el valor aproximado de la semicircunferencia, se tendrá un valor aproximado del número π . A este fin, se parte de la fórmula

$$a' = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} \quad (\text{n° 360}).$$

Supongamos que a representa el lado del cuadrado inscrito; su valor es $\sqrt{2}$, y su cuadrado $a^2 = 2$; así a' , lado del octógono, que representaremos por a_2 ó a_2^3 es

$$a_2^3 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Supongamos ahora que a represente el lado del octógono: a' será el lado del polígono de 16 lados, y se tendrá:

$$\begin{aligned} a_{16} \text{ ó } a_2^4 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2 + \sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Igualmente se obtendría a_{32} ó:

$$a_2^5 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

y así sucesivamente.

Observemos que, siendo k el número de los radicales de la fórmula, el número de los lados está expresado por una potencia de 2 cuyo exponente es igual á $k + 1$.

Se tiene, pues, en general

$$a_2^{k+1} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$$

Si se multiplica el valor del lado por 2^{k+1} , número de los lados, se tiene el *perímetro* del polígono; y considerando la circunferencia como el *límite* de los perímetros de los polígonos regulares en los cuales el número de los lados crece indefinidamente, se tiene:

$$C = \lim 2^{k+1} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}}$$

Para obtener π , basta dividir los dos miembros por 2, lo que se verifica, en el segundo miembro, disminuyendo el exponente una unidad; se tiene pues

$$\pi = \frac{C}{2} = \lim 2^k \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

teniendo siempre el segundo miembro k radicales superpuestos.

He aquí la serie de resultados que se obtienen por este método.

(Radio $r = 1$; semicircunferencia $\pi r = \pi$).

Número de los dos	Semiperímetros
4	2,828 427 1
8	3,061 467 4
16	3,121 415 1
32	3,136 548 5
64	3,140 331 1
128	3,141 277 2
256	3,141 513 8
512	3,141 572 9
1.024	3,141 587 7
2.048	3,141 591 4
4.096	3,141 592 3
8.192	3,141 592 5
16.384	3,141 592 6
32.768	3,141 592 6... = π

2. — MÉTODO DE LOS ISOPERÍMETROS.

369. Teorema. — *El radio de un círculo es el límite común hacia el cual tienden los radios y las apotemas de los polígonos regulares, isoperímetros con este círculo, cuando el número de lados aumenta indefinidamente.*

Sea r el radio del círculo considerado, cuya circunferencia será $2\pi r$; sean AB el lado de un polígono de perímetro p igual á $2\pi r$, OA y OD el radio y el apotema de este polígono. Tracemos las circunferencias inscrita y circunscrita.

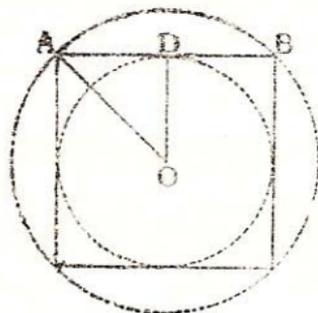


FIG. 229.

Estando el perímetro p ó $2\pi r$ comprendido entre las circunferencias que acabamos de trazar, se tiene:

$$2\pi \times OA > 2\pi r > 2\pi \times OD$$

de donde

$$OA > r > OD$$

El triángulo AOD da $OA - OD < AD$ ó $\frac{p}{2n}$.

Siendo el perímetro p constante, si n crece indefinidamente, $p/2n$ puede llegar á ser tan pequeño como se quiera; así la diferencia entre el radio y el apotema tiende hacia *cero*.

Estando siempre el radio r comprendido entre el radio y el apotema del polígono es su límite común.

El teorema anterior puede aplicarse al cálculo del número π por el método llamado de los isoperímetros.

En efecto, si en la fórmula $\pi = \frac{C}{2r}$, se supone á la circunferencia C un valor determinado; y se calcula el valor aproximado del radio de esta circunferencia, se tendrá un valor aproximado de π , dividiendo C por $2r$.

Supongamos $C = 4$; resulta $\pi = \frac{4}{2r} = \frac{2}{r}$.

Consideremos primeramente el cuadrado que tiene 4 metros de perímetro; su radio es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y su apotema $\frac{1}{2}$. Si llamamos r'' y a'' el radio y el apotema de uno cualquiera de los polígonos interiores, se tendrá siempre:

$$r'' > r > a'' \text{ y por consiguiente } \frac{2}{r''} < \frac{2}{r} < \frac{2}{a''}$$

$$\frac{2}{r''} < \pi < \frac{2}{a''}$$

Las cifras comunes á las cantidades $\frac{2}{r''}$ y $\frac{2}{a''}$ serán pues cifras exactas del número π ; y si se quiere π con seis cifras exactas, bastará calcular r'' y a'' con siete cifras. Por otra parte, se ha demostrado que el radio y el apotema tienden hacia el mismo límite.

He aquí la serie de resultados que se obtienen por este método.

(Perímetro constante : 4^m, Polígono de partida :
el cuadrado.)

Número de lados	Apotemas	Radios
4	0,500 000 0	0,707 106 8
8	0,603 533 4	0,653 281 5
16	0,628 417 4	0,640 728 9
32	0,634 573 1	0,637 643 5
64	0,636 108 3	0,636 875 4
128	0,636 491 9	0,636 683 6
256	0,636 587 8	0,636 635 7
512	0,636 611 7	0,636 623 7
1.024	0,636 617 7	0,636 620 7
2.048	0,636 619 2	0,636 619 9
4.096	0,636 619 5	0,636 619 7
8.192	0,636 619 6	0,636 619 6

$$\pi = \frac{2}{0,639 619 6} = 3,144 593.$$

LIBRO IV

SUPERFICIES

§ I. — Valuación de las superficies.

1. — DEFINICIONES.

370. Para valuar las superficies se comparan con la superficie elegida como *unidad de medida*, la cual es generalmente el *metro cuadrado*.

Se llama *área de una figura* el número que expresa la relación de esta figura con la *unidad de superficie*.

A menudo, la palabras de *área* y *superficie* se emplean indistintamente; no obstante, el *área* es propiamente

el número que expresa la extensión de la superficie.

Dos superficies son iguales cuando pueden coincidir.

Dos superficies son equivalentes cuando tienen la misma extensión, la misma área, sin tener la misma forma.

2. — ÁREA DEL RECTÁNGULO.

371. Definición. — *La base y la altura de un rectángulo se llaman sus dimensiones.*

372. Teorema. — *Dos rectángulos de la misma altura son entre sí como sus bases.*

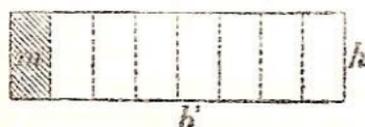
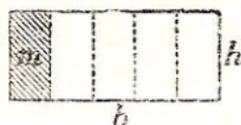


FIG. 230.

Sean S y S' dos rectángulos de la misma altura h , y cuyas bases son b y b' . Vamos á demostrar que se tiene $\frac{S}{S'} = \frac{b}{b'}$.

1° Consideremos primeramente el caso en que las bases son conmensurables, es decir, tienen una medida común, contenida, por

ejemplo, 5 veces en b , y 8 veces en b' , se tiene :

$$\frac{b}{b'} = \frac{5}{8}.$$

Si, por los puntos de división, se trazan perpendiculares á las bases, los dos rectángulos se encuentran divididos respectivamente, el uno en 5 y el otro en 8 rectángulos, todos iguales por sobreponibles. Se tiene pues

$$\frac{S}{S'} = \frac{5}{8} \text{ y por consiguiente } \frac{S}{S'} = \frac{b}{b'};$$

2° Si las bases son inconmensurables, llevemos el rectángulo menor $CDEF$ sobre el mayor $CDGH$, y dividamos CH en un número cualquiera n de partes iguales. El punto F se encuentra entre dos puntos de división.

por ejemplo entre el m^o , y el punto siguiente, marcado $m+1$.

$$\text{Se tiene pues } \frac{m}{n} < \frac{CF}{CH} < \frac{m+1}{n}.$$

Si por los puntos de división, se trazan perpendiculares á las bases, el rectángulo CE es mayor que m de estos rectángulos parciales y menor que $m+1$ de estos mismos rectángulos.

Se tiene pues

$$\frac{m}{n} < \frac{CDEF}{CDGH} < \frac{m+1}{n}.$$

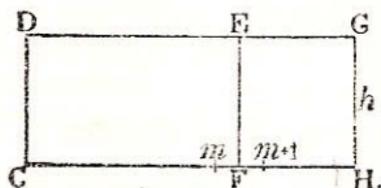


FIG. 231.

En ambos casos, las razones extremas difieren $1/n$; por consiguiente, si se divide CH en un número muy grande de partes iguales, pudiendo la diferencia $1/n$ llegar á ser menor que cualquier número, tiende hacia *cero*; y en todos casos se tiene la proporción

$$\frac{CDEF}{CDGH} = \frac{CF}{CH} \text{ ó } \frac{S}{S'} = \frac{b}{b'}.$$

373. Corolario. — *Los rectángulos de la misma base son entre sí como las alturas.* Porque se puede tomar la dimensión común por altura, lo que conduce al caso anterior.

374. Teorema. — *Los rectángulos cualesquiera S y S' son entre sí como los productos bh y b'h' de las bases por las alturas.*

Concibamos un tercer rectángulo S'' que tenga por dimensiones b y h' , es decir la base del primero y la altura del segundo.

$$\text{Se tiene } \frac{S}{S'} = \frac{h}{h'} \text{ y } \frac{S''}{S'} = \frac{b}{b'}.$$

De donde, multiplicando miembro á miembro:

$$\frac{SS''}{S'S'} = \frac{bh}{b'h'} \text{ ó } \frac{S}{S'} = \frac{bh}{b'h'}$$

375. Teorema. — *El área de un rectángulo S es igual al producto bh de su base por su altura, si se toma por unidad de superficie el cuadrado C construido sobre la unidad de longitud.*

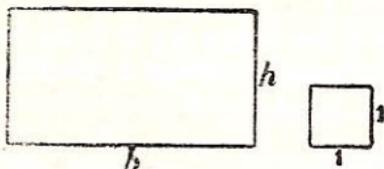


FIG. 232.

Se tiene en efecto, $\frac{S}{C} = \frac{b \times h}{1 \times 1}$

$$\frac{S}{1} = \frac{b}{1} \times \frac{h}{1} \text{ luego } S = bh.$$

3 — ÁREA DE UN PARALELOGRAMO.

376. Teorema. — *El área de un paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.*

Sea el paralelogramo ABCD.

Demostremos que es equivalente al rectángulo ABEF, que tiene la misma base b y la misma altura h .

Los triángulos rectángulos ADF y BCE son iguales por tener iguales la hipotenusa y uno de los catetos (n° 121). Así la figura total menos el triángulo AFD, equivale

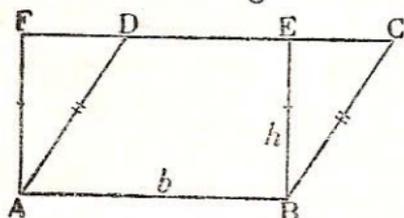


FIG. 233.

á la misma figura total menos el triángulo BCE; es decir, que el paralelogramo es igual al producto de la base b por la altura h .

377. Corolarios. — 1° *Dos paralelogramos de la misma base y de la misma altura son equivalentes;*

2° *Dos paralelogramos cualesquiera son entre sí como los productos de las bases por las alturas;*

3° *Dos paralelogramos de la misma base son entre sí como las alturas, y dos paralelogramos de la misma altura son entre sí como las bases.*

378. Escolios. — I. En un paralelogramo se toma por

base un lado cualquiera; y la *altura* es la distancia de la base al lado opuesto.

Las alturas h y k , relativas á los lados a y b tomados por bases, son inversamente proporcionales á estos lados, porque $ah = bk$,

de donde
$$\frac{h}{k} = \frac{b}{a}.$$

II. Lo mismo que para el rectángulo, el área del paralelogramo se encuentra por medio de la fórmula: $S = bh$.

4. — ÁREA DEL TRIÁNGULO.

379. Teorema. — *El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de la base por la altura.*

Sea el triángulo ABC.

Construyamos el paralelogramo ABEC de la misma base b y de la misma altura h que el triángulo dado.

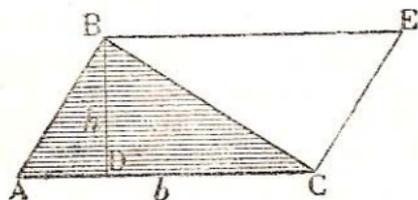


FIG. 234.

Los dos triángulos ABC y BCE son iguales por tener sus lados respectivamente iguales (n.º 116); luego el área del triángulo

ABC es igual á la mitad del área del paralelogramo AE, y por consiguiente á la mitad del producto de la base b por la altura h .

380. Corolarios. — 1.º *Un triángulo cualquiera es la mitad del rectángulo de la misma base y de igual altura:*

1.º *Dos triángulos de la misma base y de igual altura son equivalentes;*

3.º *El vértice de un triángulo puede moverse paralelamente á la base sin que el área se altere;*

4.º *Dos triángulos cualesquiera son entre sí como los productos de las bases por las alturas;*

5.º *Dos triángulos de la misma base son entre sí como las alturas, y dos triángulos de la misma altura son entre sí como las bases.*

381. Escollo. — La fórmula del área del triángulo es

$$S = \frac{bh}{2}.$$

5. — ÁREA DEL TRAPECIO.

382. Teorema. — *El área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases por la altura.*

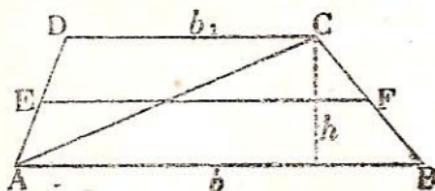


FIG. 235.

El trapecio ABCD queda dividido por la diagonal AC en dos triángulos cuya altura común es h, la altura

del trapecio, y cuyas bases son b y b1, las bases del trapecio.

El área es

$$S = \frac{bh}{2} + \frac{b_1h}{2} = \frac{b + b_1}{2} \times h.$$

383. Corolario. — Como $\frac{b + b_1}{2} = EF$ (nº 143), se puede decir que *el área de un trapecio es igual al producto $EF \times h$, de la base media por la altura.*

6. — ÁREA DE UN POLÍGONO CUALQUIERA.

384. 1º Descomposición en triángulos

— Se puede descomponer el polígono en triángulos y valuar después cada triángulo.

2º Descomposición en triángulos y trapecios rectángulos.

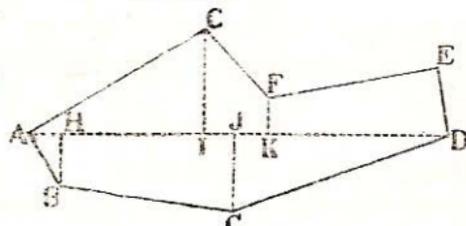


FIG. 236.

Se traza una diagonal AD; y las perpendiculares BH, GI, CJ, FK descomponen el polígono en triángulos y trapecios rectángulos, cuyas áreas se sabe valuar.

7. -- ÁREA DE UN POLÍGONO REGULAR.

385. Teorema. — *El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por el apotema.*

Sea $ABCDE$ un polígono regular cualquiera; sea a el apotema, c el lado, y n el número de lados. El perímetro $2p$ será igual a cn .

Si se trazan los radios OA, OB, OC, \dots , el polígono queda descompuesto en n triángulos que tienen cada uno el lado c por base y el apotema a por altura. En consecuencia, el área del

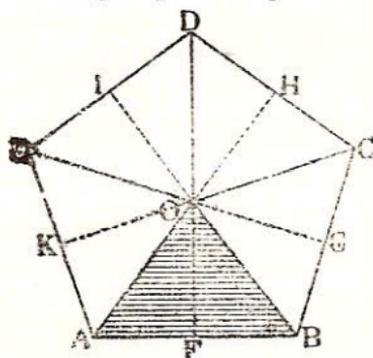


Fig. 237.

polígono será n veces $\frac{1}{2}ac$ ó $\frac{1}{2}a \times cn$, ó $\frac{1}{2}a \times 2p$ ó ap .

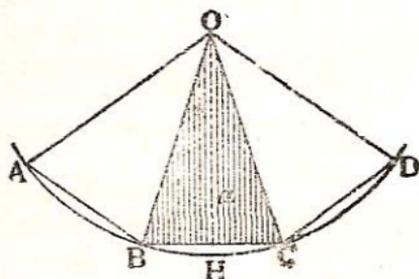


Fig. 238.

386. Escolios. — I.

$S = ap$.

II. *El área de un sector poligonal regular es igual a la mitad del producto de la línea poligonal por el apotema.*

8. — ÁREA DE UN CÍRCULO.

387. Teorema. — *El área de un círculo es igual a la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*

En efecto, el círculo es el límite hacia el cual tiende el polígono regular inscrito cuyo número de lados aumenta indefinidamente; el apotema se acerca al radio del círculo, y el perímetro a la circunferencia.

Como por grande que sea el número de lados del polígono inscrito, se tiene siempre por área del polígono,

la mitad del producto del perímetro por el apotema; se puede pues decir, pasando al límite: *el área del círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*

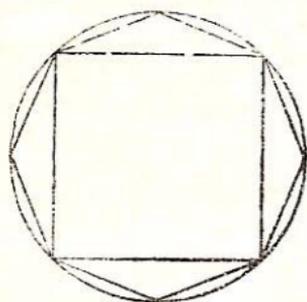


FIG. 239.

383. Escolios. — I. *El área de un círculo es igual al cuadrado del radio multiplicado por el número π .*

En efecto, teniendo la circunferencia por expresión $2\pi r$ ó πd (nº 366), el área del

círculo es:

En función del radio $2\pi r \times \frac{1}{2}r$ ó $S = \pi r^2$.

Y en función del diámetro $\pi d \times \frac{1}{4}d$ ó $S = \frac{1}{4}\pi d^2$.

II. *El área de un círculo es igual al número inverso de π , multiplicado por el cuadrado de la semicircunferencia.*

En efecto, si se representa por C la circunferencia, se tiene (nº 367):

$$d = \frac{C}{\pi} \text{ luego el área } \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times \frac{C^2}{\pi^2}; = \frac{C^2}{4\pi}; S = \frac{1}{\pi} \left(\frac{C}{2}\right)^2$$

El número inverso de π , ó $\frac{1}{\pi} = 0,31831\dots$

389. Teorema. — *El área de un sector circular es igual á la mitad del producto del arco por el radio.*

En efecto, el sector circular es el límite del sector poligonal regular inscrito, cuyo número de lados aumenta indefinidamente.

Luego debe multiplicarse el arco por la mitad del radio.

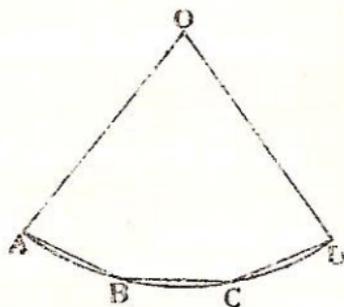


FIG. 240.

390. Escolio. — Sea n el número de grados del arco

de un sector; siendo el área del círculo πr^2 , el área del sector de un grado será $\frac{\pi r^2}{360}$, y la del sector considerado será $\frac{\pi r^2 n}{360}$.

$$S = \pi r^2 \times \frac{n}{360}.$$

391. Teorema. — *El área de un segmento circular es igual á la mitad del producto del radio por el exceso del arco del segmento sobre la mitad de la cuerda que corresponde al arco doble.*

Sea el segmento DEF; bajemos una perpendicular DH sobre uno de los radios, esta línea DH, ó h , es la mitad de la cuerda DG que subtiende un arco doble de DEF; representando por l , la longitud del arco DEF, se obtiene:

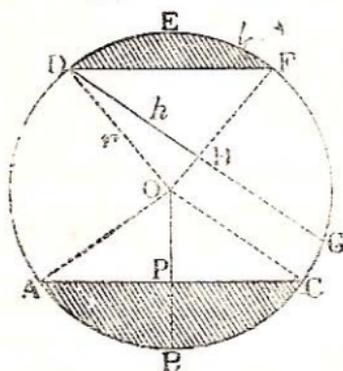


FIG. 241.

$$S = \frac{lr - hr}{2} \quad \text{ó} \quad S = \frac{r(l - h)}{2}.$$

CAPÍTULO II

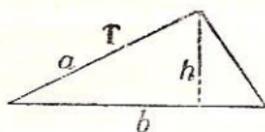
RELACIONES MÉTRICAS ENTRE LAS ÁREAS

§ I. — Razón de las áreas semejantes.

392. Teorema. — *Dos triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de los lados ó de las líneas homólogas.*

Sean T y T', dos triángulos semejantes.

Tracemos las alturas homólogas h y h' .



$$\frac{T}{T'} = \frac{\frac{1}{2}bh}{\frac{1}{2}b'h'} = \frac{bh}{b'h'}$$

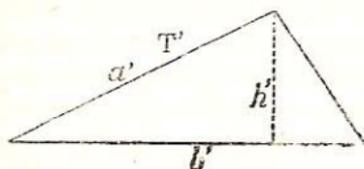


FIG. 242.

Como todas las dimensiones homólogas están en una misma relación (n.º 260); se tiene:

$$\frac{b}{b'} = \frac{a}{a'} \text{ y } \frac{h}{h'} = \frac{a}{a'}$$

Multiplicando miembro á miembro estas dos últimas igualdades, se obtiene:

$$\frac{bh}{b'h'} = \frac{a^2}{a'^2}; \text{ de donde } \frac{T}{T'} = \frac{a^2}{a'^2}$$

393. Teorema. — Dos polígonos semejantes son entre sí como los cuadrados de las líneas homólogas.

Sean P y P' dos polígonos semejantes. Descomponiéndolos en triángulos semejantes, estos triángulos son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos; se tiene:

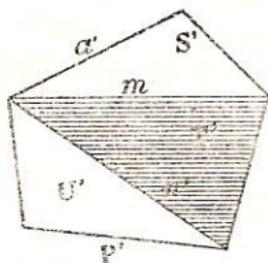
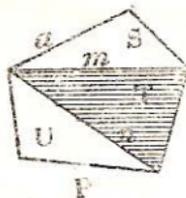


FIG. 243.

$$\frac{S}{S'} = \frac{a^2}{a'^2}; \quad \frac{T}{T'} = \frac{m^2}{m'^2} = \frac{n^2}{n'^2}; \quad \frac{U}{U'} = \frac{n^2}{n'^2}$$

pero

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{m^2}{m'^2} = \frac{n^2}{n'^2}$$

luego

$$\frac{S}{S'} = \frac{T}{T'} = \frac{U}{U'}$$

Como, cuando se tienen varias razones iguales, la suma de los numeradores dividida por la suma de los denominadores da una razón igual á las razones consideradas, se tiene :

$$\frac{S + T + U}{S' + T' + U'} = \frac{P}{P'} = \frac{S}{S'} = \dots = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{m^2}{m'^2}$$

394. Corolarios. — I. Dos polígonos regulares de un mismo número de lados son entre sí como los cuadrados de los radios ó como los cuadrados de las apotemas porque son semejantes por descomponerse en triángulos respectivamente semejantes.

II. Dos círculos cualesquiera son entre sí como los cuadrados de los radios, ó como los cuadrados de los diámetros. En efecto, pudiéndose aplicar á los círculos las propiedades de los polígonos, se tiene, representando por S y S' las superficies de los círculos cuyos radios son r y r' , y los diámetros d y d' :

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi r^2}{\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2} \quad \frac{S}{S'} = \frac{1/4 \pi d^2}{1/4 \pi d'^2} = \frac{d^2}{d'^2}$$

395. Teorema. — Dos triángulos que tienen un ángulo igual son entre sí como los productos de los lados que forman el ángulo igual.

Sean ABC y ADF dos triángulos que tienen un ángulo en A común. Tracemos CF .

Los triángulos ACB y ACF , considerando que tienen sus bases sobre AF , tienen igual altura, y dan (nº 340, 5º) :

$$\frac{ABC}{ACF} = \frac{AB}{AF}$$

Del mismo modo, los triángulos ACF y ADF , considerando que tienen sus bases sobre AD , tienen igual altura, y dan :

$$\frac{ACF}{ADF} = \frac{AC}{AD}$$

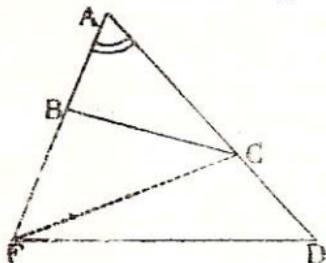


FIG. 244.

Multiplicando miembro á miembro las dos igualdades, se tiene :

$$\frac{ABC \times ACF}{ACF \times ADF} = \frac{AB \times AC}{AF \times AD}$$

ó simplemente
$$\frac{ABC}{ADF} = \frac{AB \times AC}{AF \times AD}$$

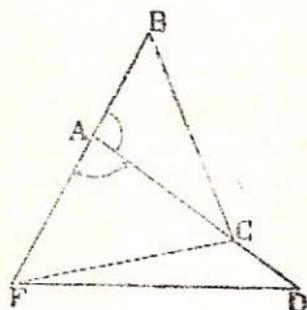


Fig. 245.

396. Escollo. — *Los dos triángulos gozan de la misma propiedad si los ángulos considerados son suplementarios.*

Se tiene :
$$\frac{ACB}{ACF} = \frac{AB}{AF}$$

$$\frac{AFC}{AFD} = \frac{AC}{AD}$$

de donde
$$\frac{ACB}{ADF} = \frac{AB \times AC}{AF \times AD}$$

§ II. — Relaciones entre las áreas expresadas por identidades de segundo grado.

397. Teorema. — *El cuadrado construido sobre la suma de dos rectas es igual á la suma de los cuadrados construidos sobre estas dos rectas, más dos veces el rectángulo construido con estas mismas rectas.*

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Sean CD y DE, ó a y b , dos rectas cualesquiera, y CF el cuadrado construido sobre la suma de estas líneas. Formemos en el interior el cuadrado M que tenga a por lado, y prolonguemos los lados más allá de G.

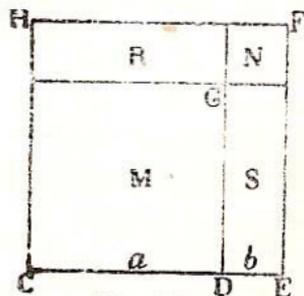


Fig. 246.

La figura total comprende cuatro partes, á saber : los cuadrados M y N, que tienen por lados las longi-

tudes a y b , y los rectángulos R y S , que tienen por dimensiones estas mismas longitudes.

398. Teorema. — *El cuadrado construido sobre la diferencia de dos rectas es igual á la suma de los cuadrados construidos sobre estas dos rectas, menos dos veces el rectángulo construido con estas mismas rectas (n.º 246):* $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

Sean CD y DE , ó a y b , dos rectas cualesquiera, y CF ó M el cuadrado construido.

Construyamos el cuadrado CG , cuyo lado es a , y el cuadrado HI , cuyo lado es b , prolonguemos EF . La figura total es la suma de dos cuadrados CG y HI , sea $a^2 + b^2$; si se quitan los dos rectángulos R y S , cuyas dimensiones son a y b , queda el cuadrado M .

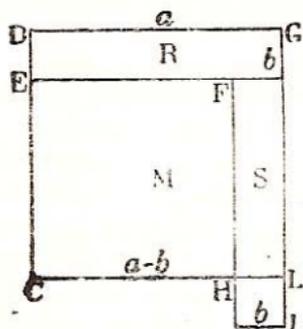


FIG. 247.

399. Teorema. — *El rectángulo construido sobre la suma y la diferencia de dos rectas es igual á la diferencia de los cuadrados construidos sobre estas mismas rectas.*

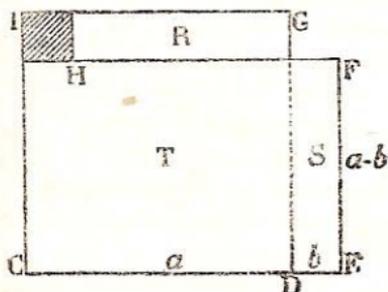


FIG. 248.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Sean CD y DE , ó a y b dos rectas cualesquiera, y CF el rectángulo construido sobre su suma y su diferencia.

Construyamos el cuadrado CG cuyo lado es a , y el cuadrado HI , cuyo lado es b .

Los rectángulos R y S tienen ambos por dimensiones $a - b$ y b . Si, del cuadrado CG se resta el cuadrado IH , y si se supone R colocado en S , se tiene el rectángulo CF .

400. **Teorema de Pitágoras.** — *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*

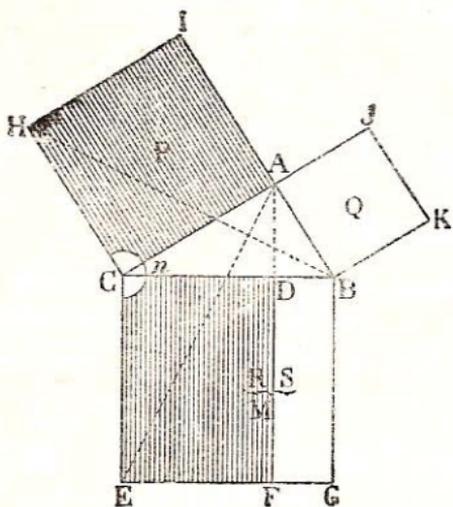


FIG. 249.

Sea el triángulo rectángulo ABC; y sean P, Q, M, los cuadrados construidos sobre los lados. Tracemos ADF perpendicular á CB; y también BH y AE, y consideremos los dos triángulos ACE, y BCH.

En ambos, el ángulo C se compone del ángulo n aumentado de un ángulo recto, los lados CA y CE del primer triángulo son respectivamente

iguales á los lados CH y CB del segundo, como lados de los cuadrados P y M. Luego, estos triángulos son iguales.

El primer triángulo ACE es la mitad del rectángulo CEFD ó R, que tiene la misma base CE y la misma altura CD; el segundo triángulo BCH es la mitad del cuadrado P, que tiene la misma base CH y la misma altura CA.

Luego el rectángulo R y el cuadrado P son equivalentes, por tener mitades iguales. Del mismo modo se podría demostrar que el rectángulo S es equivalente al cuadrado Q; luego $R + S = M = P + Q$.

CAPÍTULO III

PROBLEMAS CON RELACIÓN Á LAS ÁREAS

§ I. — Área de un triángulo.

401. Problema I. — *Área del triángulo equilátero en función del lado.*

Sea el triángulo equilátero ABC.
El triángulo rectángulo ADC da

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$$

$$\text{ó } h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 =$$

$$a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Luego } h = \frac{a}{2} \sqrt{3}. \quad (1)$$

El área es igual

$$\frac{a}{2} \times h = \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

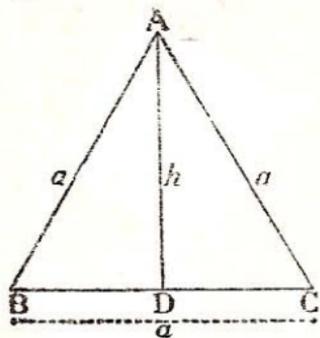


FIG. 250.

$$\text{ó por último } S = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}. \quad (2)$$

402. Problema II. — Área en función del radio del círculo circunscrito.

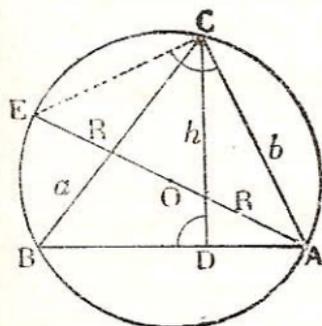


FIG. 251

Sea ABC un triángulo cualquiera, CD o h su altura, y AE o $2R$, el diámetro del círculo circunscrito.

Ya se sabe que

$$ab = 2R h \text{ (n.º 301).}$$

Multipliquemos los dos miembros por c

$$2R hc = abc$$

Pero hc es el doble del área o $2S$, luego

$$2R \times 2S = abc$$

de donde

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

403. Problema III. — Área en función del radio del círculo inscrito.

Representando los tres lados de un triángulo por

a, b, c su semisuma por p , el radio del círculo inscrito por r , y la superficie de triángulo por S , se tiene :

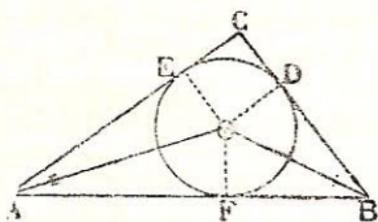


FIG. 252.

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

$$S = \frac{a+b+c}{2} \times r = pr$$

de donde $S = rp$.

404. Problema IV — Área en función del radio de uno de los círculos ex-inscritos.

Se tiene $S = ABI' + ACI' - BCI'$.

$$\text{ó } S = \frac{cr'}{2} + \frac{br'}{2} - \frac{ar'}{2}$$

$$\text{ó } S = \frac{r'}{2}(c+b-a).$$

Haciendo $a+b+c=2p$ se tiene

$$b+c-a = 2p - 2a = \frac{2(p-a)}$$

y $S = r'(p-a).$

Del mismo modo se tendría :

$$S = r''(p-b)$$

$$S = r'''(p-c)$$

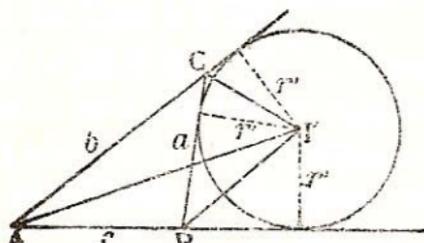


FIG. 253.

405. Problema V. — Hallar las relaciones que existen entre los lados de un triángulo, y los segmentos determinados sobre estos lados por los puntos de contacto de los círculos inscrito y ex-inscritos

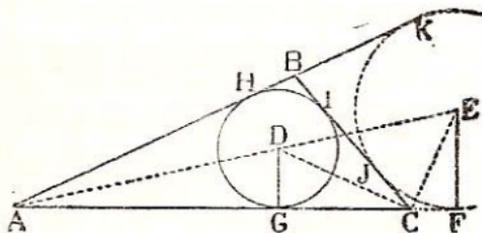


FIG. 254.

entre los lados de un triángulo, y los segmentos determinados sobre estos lados por los puntos de contacto de los círculos inscrito y ex-inscritos

Sea ABC un triángulo cualquiera.

Prolonguemos los lados AB y AC , y describamos el círculo inscrito D , y el círculo ex-inscrito E .

Sean a, b, c los tres lados del triángulo, p su semisuma.

Los puntos de contacto del círculo inscrito determinan seis segmentos iguales de dos en dos, por ser tangentes que parten de un mismo punto :

$$AG = AH; \quad BH = BI; \quad CI = CG$$

por consiguiente $2AG + 2BH + 2CI = a + b + c = 2p$

luego $AG = p - (CI + BI) = p - a$

igualmente $BH = p - (AG + CG) = p - b$

$$CG = p - (AH + BH) = p - c.$$

Considerando las tangentes iguales AF, AK el círculo ex-inscrito se tiene :

$$2AK = 2AF = AC + AB + CF + BK$$

pero $CF + BK = CJ + BJ = a$

luego $2AK = 2AF = a + b + c = 2p$

de donde $AK = AF = p$

por consiguiente $CF = p - b$ y $BK = p - c$

406. Observación. — Se tiene :

$$BH = BI = CF = CJ = p - b$$

igualmente, $CG = CI = BJ = BK = p - c$

$$GF = HK = a.$$

407. Problema VI. — *Área de un triángulo, en función de los tres lados.*

Sean r el radio DG del círculo inscrito, r' el radio EF del círculo ex-inscrito (fig. 254).

Se sabe que se tiene :

$$AF = p, \quad AG = p - a, \quad CF = BH = p - b, \quad CG = p - c.$$

Ya se sabe también que

$$S = pr \quad (\text{n}^\circ 403)$$

$$y \quad S = (p - a) r' \quad (\text{n}^\circ 404)$$

de donde

$$S^2 = p(p - a) rr'.$$

Los triángulos GDC, CEF son semejantes por tener sus lados respectivamente perpendiculares. Luego :

$$\frac{DG}{CG} = \frac{CF}{EF} \text{ ó } \frac{r}{p-c} = \frac{p-b}{r'}$$

de donde $rr' = (p-b)(p-c)$

luego

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

y

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

408. Problema VII. — Área de un triángulo, en función de r, r', r'', r''' .

Multiplicando ordenadamente las cuatro fórmulas

$$\begin{aligned} S &= pr \\ S &= (p-a)r' \\ S &= (p-b)r'' \\ S &= (p-c)r''' \end{aligned}$$

tenemos $S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)rr'r''r'''$

y, como $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

$$S^4 = S^2 rr'r''r'''$$

ó $S^2 = rr'r''r'''$

y $S = \sqrt{rr'r''r'''}$.

409. Problema VIII. — Conociendo los tres lados a, b, c de un triángulo, calcular R radio del círculo circunscrito, r , radio del círculo inscrito, y r', r'', r''' , radios de los círculos ex-inscritos.

Tenemos $S = \frac{abc}{4R}$ (n° 402) de donde $R = \frac{abc}{4S}$

$$r = \frac{S}{p} \quad (\text{n° } 403)$$

$$r' = \frac{S}{p-a} \quad (\text{n° } 404)$$

$$r'' = \frac{S}{p-b} \quad (\text{n° } 404)$$

$$r^n = \frac{S}{p-c} \quad (\text{n}^\circ 404)$$

y sustituyendo á S por su valor $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ tenemos

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$r' = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r'' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-b}}$$

$$r''' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

§ II. — Problemas gráficos.

410. Problema I. — *Transformar un polígono dado P en un triángulo equivalente.*

Tracemos la diagonal CE y reemplacemos el triángulo CDE por un triángulo equivalente que tenga su base sobre la prolongación de FE. Con este fin, tracemos DD' paralela a la diagonal CE, y transportemos el vértice D á D'. El triángulo CDE ha quedado reemplazado por el triángulo equivalente CD'E (nº 380, 2º y 3º), y el polígono tiene un lado menos.

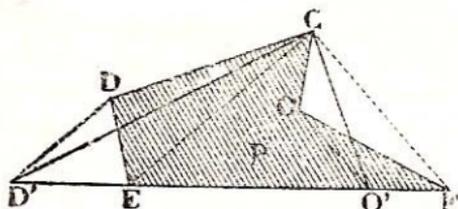


Fig. 255.

Se repite esta operación hasta que el polígono no tenga más que tres lados.

En el caso de un ángulo entrante O, después de haber trazado la diagonal CF y su paralela OO', se reemplaza el triángulo OFO' por su equivalente OCO'.

411. Problema II. — Sobre una recta dada m , construir un rectángulo equivalente á un rectángulo dado ab

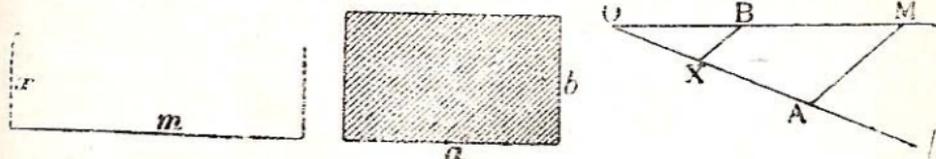


FIG. 256.

Llamemos x la dimensión desconocida. Se debe tener $mx = ab$; de donde, dividiendo por x y por a ,

$$\frac{m}{a} = \frac{b}{x}.$$

La altura desconocida x es pues una cuarta proporcional á las tres rectas m , a , b (nº 314).

Si la figura dada fuera un cuadrado a^2 , se debería tener $mx = a^2$, de donde $\frac{m}{a} = \frac{a}{x}$; sería preciso entonces buscar una tercera proporcional á las dos rectas m y a .

412. Problema III. — Construir un cuadrado equivalente á una figura dada P .

1º Si la figura dada es un rectángulo ab , el lado x del cuadrado equivalente debe ser tal que se tenga $x^2 = ab$, ó $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

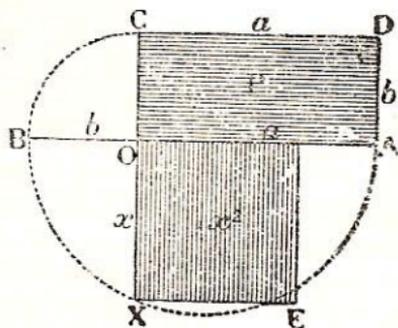


FIG. 257.

Basta, por consiguiente, buscar una media proporcional entre las dos dimensiones a y b (nº 315);

2º Cualquiera que sea la figura dada, siempre es preciso buscar una media proporcional entre

entre las dos líneas cuyo producto da el área de la figura, á saber:

Para un *paralelogramo*, entre la base y la altura;

Para un *triángulo*, entre la base y la mitad de la altura, ó bien entre la altura y la mitad de la base ;

Para un *trapezio*, entre la altura y la base media ;

Para un *polígono regular* ó para un *polígono circunscrito*, entre el apotema y el semiperímetro ;

Para un *polígono cualquiera*, entre la base y la mitad de la altura del triángulo equivalente.

Para un *circulo*, entre el radio y la *semicircunferencia* rectificada.

413. Cuadratura. — *Hacer la cuadratura de una figura, es encontrar el lado del cuadrado equivalente á esta figura.*

Cualquiera que sea la superficie plana dada, el problema se reduce al anterior : *es necesario encontrar una media proporcional entre las dos dimensiones cuyo producto corresponde á la superficie dada.*

414. Problema IV. — *Construir un rectángulo, conociendo su superficie y la suma de sus lados.*

Sean a^2 el cuadrado que representa la superficie

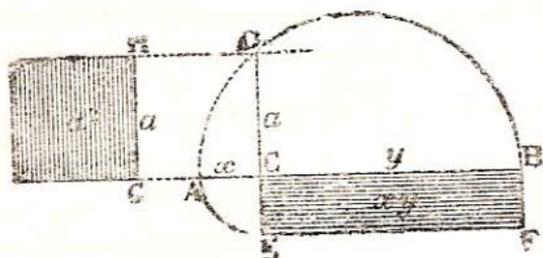


Fig. 258.

dada y AB la suma de los lados adyacentes del rectángulo.

Sobre esta recta AB, se traza una *semicircunferencia* ; se levanta en un punto cualquiera de esta recta una *perpendicular* GH igual al lado del cuadrado dado, se traza en seguida HD paralela á AB, y DC perpendicular á AB.

El punto C determina las dos dimensiones CA y CB, ó x é y ; porque se tiene (nº 275) :

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{y} \text{ de donde } xy = a^2.$$

415. Problema V. — Construir un rectángulo, conociendo su superficie a^2 y la diferencia AB de sus lados.

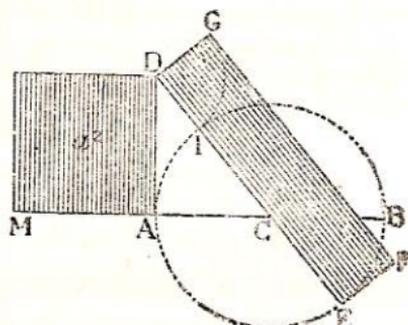


Fig. 259.

Se prolonga el lado MA del cuadrado dado, una longitud igual a la línea dada AB; sobre AB como diámetro, se describe una circunferencia; por el punto D y por el centro, se traza la secante DCE, que será la base del rectángulo

pedido; la parte exterior DI será la altura; porque se tiene $AD^2 = DE \times EF$.

416. Problema VI. — Hallar dos rectas que sean entre sí como dos rectángulos dados ab y cd .

Es evidente que una de las dos líneas puede tomarse a voluntad; elijamos a por la primera recta.

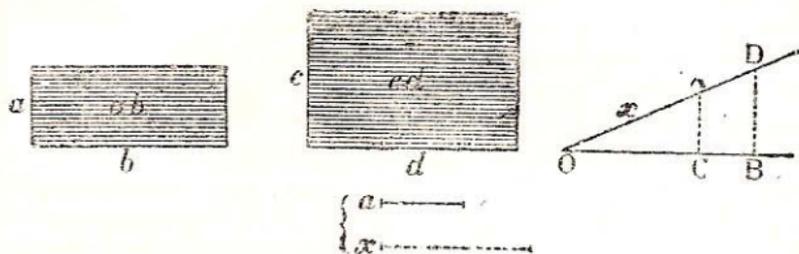


Fig. 260.

Es preciso que se tenga $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{x}$ ó, multiplicando por d , y dividiendo por a

$$\frac{b}{c} = \frac{d}{x}.$$

Así, la segunda línea pedida será una cuarta proporcional a las tres líneas b , c , d .

417. Problema VII. — Hallar dos rectas que sean entre sí como dos cuadrados dados a^2 y b^2 .

La solución, indicada ya para dos rectángulos (nº 416) es aplicable al caso de dos cuadrados.

Pero se resuelve el problema de una manera más

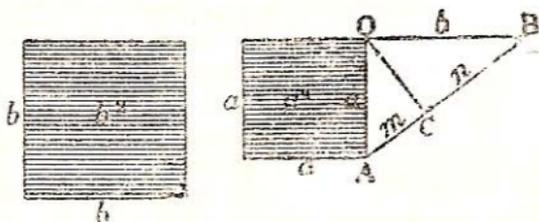


Fig. 261.

directa, disponiendo en ángulo recto los lados a y b , y trazando la hipotenusa AB , y la altura OC . Los segmentos m y n son entre sí como los cuadrados a^2 y b^2 (nº 279).

418. Problema VIII. — *Construir un cuadrado que sea con un cuadrado dado a^2 en la relación de dos líneas dadas ó de dos números dados m y n .*

Sobre una misma recta MN , se llevan las longitudes CM y CN iguales á las rectas dadas ó proporcionales á los números m y n ; sobre MN como diámetro, se

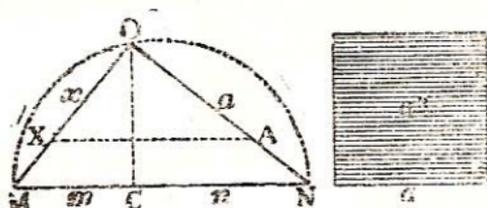


Fig. 262.

describe una semicircunferencia; se levanta CO perpendicular á MN , luego se trazan OM y ON . Se lleva OA igual al lado del cuadrado dado, y se traza AX paralela á MN . La longitud OX es el lado del cuadrado pedido.

Se tiene en efecto :

$$\frac{OX}{OA} = \frac{OM}{ON} \text{ de donde } \frac{OX^2}{OA^2} = \frac{OM^2}{ON^2} = \frac{m}{n}.$$

419. Observaciones. — I. La misma construcción se aplica al problema general : *Construir una figura semejante á una figura dada, y que sea con esta en una*

relación dada. Porque las figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de las dimensiones homólogas.

11. Esta construcción sirve también para encontrar una línea que sea con una línea dada n en la relación de dos cuadrados dados x^2 y a^2 .

Sobre los lados de un ángulo recto O (fig. 262), se llevan los lados OX y OA de los cuadrados dados; se traza AX , luego su paralela MN , de manera que se tenga CN igual á la línea dada n ; el segmento CM es la línea pedida.

420. Problema IX. — Construir un cuadrado igual á la suma ó la diferencia de dos cuadrados dados.

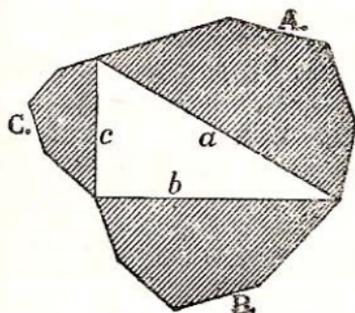


FIG. 263.

1º Sean b^2 y c^2 los cuadrados cuya suma se quiere tener.

Se construye un triángulo rectángulo que tenga b y c por catetos, la hipotenusa x es el lado del cuadrado igual á la suma de los cuadrados dados; porque $x^2 = b^2 + c^2$.

2º Sean a^2 y b^2 los cuadrados cuya diferencia se

quiere tener.

Se construye un triángulo rectángulo que tenga a por hipotenusa, y b por uno de los catetos; el otro cateto y es el lado del cuadrado igual á la diferencia de los cuadrados dados; porque

$$y^2 = a^2 - b^2.$$

421. Observación. — La misma construcción se aplica al problema general:

Dadas dos figuras semejantes, B , C , construir una tercera figura semejante á las dos primeras, é igual á su suma ó á su diferencia. Porque las figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de las dimensiones homólogas.

Se tiene, por ejemplo . $A = B + C$.

422. Problema X. — Por una paralela á uno de los

lados de un triángulo determinar un nuevo triángulo que sea en una relación dada con el triángulo dado.

Sea el triángulo ABC ó T , y FG la paralela pedida

Supongamos que el triángulo parcial T' debe ser por ejemplo, los $\frac{2}{5}$ del triángulo dado.

Sobre el lado AC se describe una semicircunferencia; por el punto D , tomado á los $\frac{2}{5}$ de AC , se traza DE perpendicular á AC ; desde el punto A , se describe el arco EF , y se traza FG paralela á BC .

El triángulo AFG es los $\frac{2}{5}$ de ABC , porque se tiene :

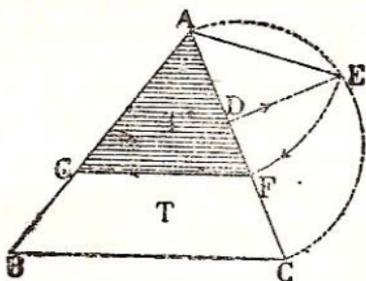


Fig. 264.

$$\frac{T'}{T} = \frac{AF^2 \text{ ó } AE^2}{AC^2} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5}$$

LIBRO V

LA RECTA Y EL PLANO EN EL ESPACIO

CAPÍTULO I

POSICIONES RELATIVAS DE LAS RECTAS Y DE LOS PLANOS

§ I. — Generalidades.

423. Determinación del plano. — Un plano está determinado :

- 1º Por tres puntos que no pertenecen á la misma recta.
- 2º Por dos rectas que se cortan;

- 3° *Por una recta y un punto exterior á esta recta ;*
 4° *Por dos rectas paralelas.*

424. *Generación del plano. — Un plano puede ser engendrado por una recta que se mueve :*

1° *Resbalando sobre dos rectas que se cortan, ó sobre dos paralelas ;*

2° *Pasando por un punto fijo y resbalando sobre una recta fija ;*

3° *Permaneciendo perpendicular á una recta fija, en un punto fijo, y girando alrededor de esta línea.*

Se puede concebir una infinidad de planos que pasen por un punto dado en el espacio, ó por dos puntos, ó por una recta : una puerta que gira sobre sus goznes puede ocupar una infinidad de posiciones.

§ II. — Rectas y planos paralelos.

1. — RECTAS PARALELAS.

425. *Definición. — Dos rectas son paralelas cuando pertenecen al mismo plano y no tienen ningún punto común.*

Consecuencia. — Por un punto dado en el espacio, se puede trazar una paralela á una recta dada, y sólo una ; porque el punto y la recta determinan un plano.

426. *Posiciones relativas de dos rectas. Considerando dos rectas, se puede tomar una de estas rectas y un punto de la segunda ; así se determina un plano, dos casos son posibles :*

1° *La segunda recta pertenece a este plano : entonces las dos rectas son concurrentes o paralelas.*

2° *La segunda recta no pertenece a este plano : se dice que las dos rectas no están en el mismo plano.*

2. — RECTA Y PLANO PARALELOS.

427. *Definición, — Una recta y un plano son paralelos cuando no tienen ningún punto común.*

La existencia de la recta paralela á un plano se establece por el teorema siguiente.

428. Teorema. — *Toda paralela á una recta de un plano es paralela á este plano.*

Sea AB paralela á la recta CD situada en el plano M .

Tracemos el plano AD de las dos paralelas. La recta AB prolongada no podría encontrar el plano M sin encontrar su paralela CD , lo que es imposible.

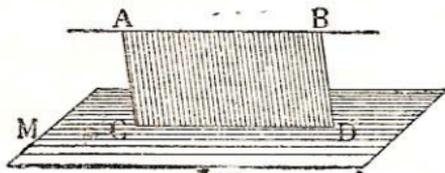


Fig. 265.

429. Teorema. — *Si una recta y un plano son paralelos, todo plano trazado por la recta y que corte al primer plano, tendrá su intersección paralela á la recta dada.*

Sea AB paralela al plano M (fig. 265) y sea AD un plano cualquiera trazado por AB y que encuentra el plano M según CD . Vamos á demostrar que las rectas AB y CD son paralelas.

Estas líneas están en un mismo plano AD ; y AB no podría encontrar CD sin encontrar á la vez el plano M , lo que es imposible conforme á la hipótesis.

430. Teorema. — *Dados una recta y un plano paralelos, si se traza una paralela á la recta por un punto cualquiera del plano, la línea así trazada está situada en el plano.*

Sea AB paralela al plano M , y sea C un punto cualquiera de este plano.

Tracemos el plano ABC ; la intersección CD de los dos planos es paralela á AB (nº 429); como por el punto C , no puede haber más que una paralela á AB (nº 425), la recta trazada por el punto C paralelamente á AB está contenida por completo en el plano M .

431. Teorema. — *Toda recta paralela á dos planos que se cortan, lo es también á su intersección.*

Sea la recta AB paralela á cada uno de los planos M y N . Vamos á demostrar que la intersección CD es paralela á AB .

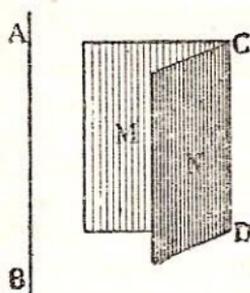


Fig. 266.

Si por un punto cualquiera C tomado sobre la intersección de los dos planos se traza una paralela á AB , esta recta se encuentra contenida por completo en el plano M (n° 430); y por completo también en el plano N : por lo mismo se confunde con la intersección CD .

432. Escolio. — Cuando dos planos M y N trazados por dos rectas paralelas se encuentran, su intersección EF es paralela á estas dos rectas AB y CD .

Siendo las dos rectas AB y CD paralelas, cada una de ellas es paralela al plano trazado por la otra (n° 428); así la recta AB es paralela al plano N , luego el plano M trazado por AB corta al otro plano según una recta EF paralela á AB (n° 429).

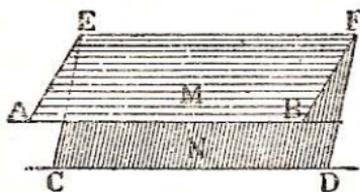


Fig. 267

Por la misma razón CD es paralela á EF .

433. Posiciones relativas de una recta y de un plano :

1° La recta puede estar en el plano.

2° Si la recta no está en el plano :

ó es paralela á una recta del plano, y paralela al plano.

ó no es paralela á ninguna recta del plano ; entonces es secante, y tiene con el plano un punto común.

3. — PLANOS PARALELOS.

434. Definición. — Dos planos paralelos son dos planos que no tienen ningún punto común.

El teorema siguiente establece la existencia de tales planos.

435. Teorema. — *Para que dos planos sean paralelos, se necesita y basta que uno de ellos contenga dos rectas concurrentes paralelas al otro plano.*

1° La condición es suficiente.

Dos rectas concurrentes (AB, AC) paralelas á un plano (Q) determinan un segundo plano (P) paralelo al primero.

En efecto, si los planos P y Q se cortasen, su intersección cortaría á lo menos una de las rectas AB ó AC, y una de estas rectas cortaría al plano Q, lo que es imposible.

2° La condición es necesaria,

Si dos planos (P, Q) son paralelos, toda recta (AB) del primero es paralela al segundo.

En efecto, el plano Q no puede cortar la recta AB sin cortar el plano P, lo que es imposible.

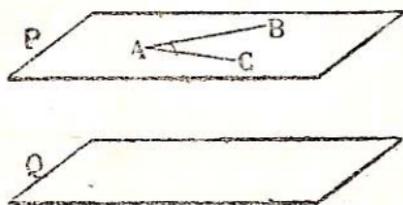


FIG. 268.

436. Corolario. — *Si dos planos paralelos son cortados por un tercer plano, las intersecciones son paralelas.*

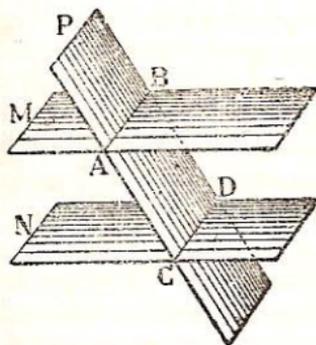


FIG. 269.

Sean M y N dos planos paralelos cortados por un tercer plano P; vamos á demostrar que las intersecciones AB y CD son paralelas.

Estas rectas AB y CD están en un mismo plano P, y además, pertenecen á los dos planos M y N que se han dado paralelos; por lo tanto no pueden encontrarse.

437. Lugar geométrico. — *El lugar de las paralelas trazadas por un punto (A) á un plano (P) es el plano (Q) paralelo al plano dado (P) y que pasa por el punto (A).*

En efecto :

1° Toda recta trazada por A en el plano Q es paralela á P.

2° Toda paralela á P, trazada por A, pertenece á Q,

438. Posiciones relativas de dos planos.

Para conocer estas posiciones, se traza en el primer plano dos rectas concurrentes :

1° Estas rectas pertenecen al segundo plano : los planos coinciden.

2° Estas rectas son paralelas al segundo plano : los planos son paralelos.

3° Una recta á lo menos corta el segundo plano : los dos planos son secantes.

Luego, dos planos pueden ser : confundidos, paralelos ó secantes.

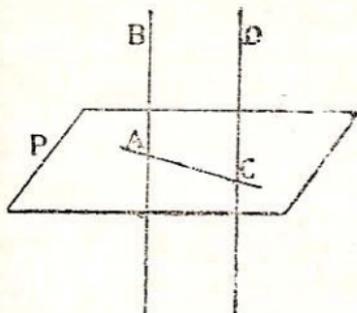


FIG. 270.

439. Teorema. — Si dos rectas (AB, CD) son paralelas, todo plano (P) que corta á una de ellas (AB), corta á la otra (CD).

El plano de las dos paralelas corta al plano P según una recta AC. Esta recta no puede ser paralela á CD, porque no es paralela á AB; luego, corta á CD en un punto C, en el cual CD corta el plano P.

440. Teorema. — Dos rectas (A, B) paralelas á una tercera (C) son paralelas entre sí.

En efecto :

1° Estas rectas no tienen ningún punto común ; si no por este punto pasarían dos paralelas á un misma recta, lo que es imposible ;

2° Estas rectas pertenecen á un mismo plano. En efecto, el plano que pasa por A y un punto de B no puede cortar á esta recta B ; si no, cortaría su paralela C (n° 439); y cortando á C, cortaría á su paralela A, lo que, por hipótesis, no se verifica.

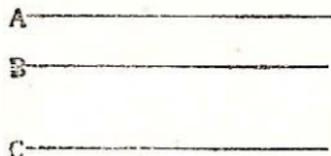


FIG. 271.

4. SEGMENTOS RECTILÍNEOS ENTRE PLANOS RECTILÍNEOS.

441. Teorema. — *Dos rectas paralelas comprendidas entre dos planos paralelos son iguales.*

Sean AB y CD dos rectas paralelas comprendidas entre los planos paralelos M y N .

Estas dos rectas determinan un plano AD , cuyas intersecciones AC y BD con los otros dos planos son paralelas (nº 436); la figura $ABCD$ es pues un paralelogramo (nº 133), y se tiene $AB = CD$.

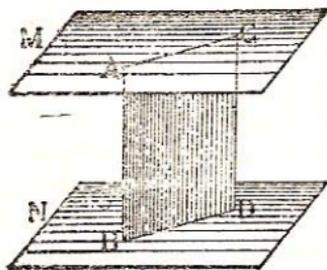


FIG. 272.

442. Teorema. — *Tres planos paralelos interceptan sobre dos rectas cualesquiera segmentos proporcionales.*

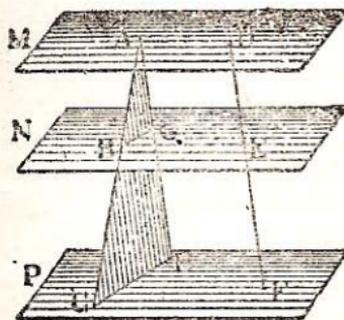


FIG. 273.

Sean AC y DF las rectas dadas; si se tira AH paralela á DF , se tiene (nº 441): $AG = DE$, $GH = EF$.

Como en el triángulo ACH , las líneas BG y CH son paralelas por ser intersecciones de dos planos paralelos N y P por un tercer plano ACH (nº 436); se tiene (nº 257):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GH} \text{ ó } \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

§ III. — Ángulo de las rectas.

443. Definición. — *El ángulo de dos rectas que no se cortan es el ángulo formado por dos rectas concurrentes respectivamente paralelas á las dos rectas dadas.*

Para justificar esta definición es preciso demostrar que este ángulo no depende del punto de intersección

de las dos últimas rectas. Es el objeto del teorema siguiente.

444. Teorema. — *Dos ángulos cuyos lados son respectivamente paralelos, son iguales d suplementarios, y sus planos son paralelos.*

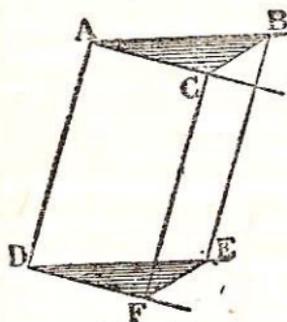


Fig. 274.

1° Sean A y D dos ángulos cuyos lados son paralelos.

Tomenos sobre estos lados longitudes iguales AB y DE, AC y DF.

Siendo las rectas AB y DE iguales y paralelas, el cuadrilátero AE es un paralelogramo, y AD es igual y paralela á BE.

Así las rectas BE y CF, iguales y paralelas á AD, son iguales y paralelas entre sí (n° 410), el cuadrilátero CE es un paralelogramo, y $BC = EF$.

Desde luego, los triángulos ABC y DEF son iguales por tener sus lados respectivamente iguales, y el ángulo A de uno es igual al ángulo D del otro, que es lo que se quería demostrar.

Si con el ángulo D, se tomara un ángulo obtuso en A, los dos ángulos considerados serían suplementarios.

2° Sea M el plano determinado por los lados de ángulo A; por el punto D, vértice del segundo ángulo, tracemos un plano N paralelo al plano M, y, por consiguiente á las rectas AB y AC.



Fig. 275.

Siendo la recta DE, paralela á AB, estará contenida por completo en el plano N paralelo á AB (n° 430); del mismo modo, siendo la recta DF, paralela á AC, estará contenida por completo en el plano N paralelo á AC. Por lo tanto el plano N, trazado paralelamente al plano M, no es otro que el plano determinado por los lados del ángulo D.

§ IV. — Recta y plano perpendiculares.

1. — RECTA PERPENDICULAR Á UN PLANO.

445. Definiciones. — 1. Una recta es perpendicular á un plano cuando es perpendicular á todas las rectas que se pueden trazar por su pie en dicho plano.

El plano es entonces perpendicular á la recta.

Una oblicua á un plano es una recta que encuentra á este plano sin serle perpendicular.

446. Teorema. — Toda recta perpendicular á otras dos rectas trazadas por su pie en un plano, es perpendicular á dicho plano.

Sea AP perpendicular á PB y PC. Vamos á demostrar que la recta AP es también perpendicular á cualquiera otra recta PD trazada por su pie en el plano M.

Prolonguemos AP una longitud PA' igual á PA; en el plano M, tracemos una recta BDC, que encuentre á las tres rectas trazadas por el punto P, y unamos los puntos A y A' con los puntos B, C, D.

Siendo BP perpendicular en la mitad de AA', se tiene (n° 107) : $BA = BA'$.

De la misma manera, $CA = CA'$, y los dos triángulos BCA y BCA' son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; luego los ángulos en B son iguales.

Así los dos triángulos BDA y BDA' son iguales por tener igual un ángulo en B formado por lados respectivamente iguales; y en consecuencia $DA = DA'$.

Luego el triángulo ADA' es isósceles, la mediana DP es perpendicular á la base AA', y la recta AP es perpendicular á PD.

447. Corolario. — Por toda recta perpendicular á otra

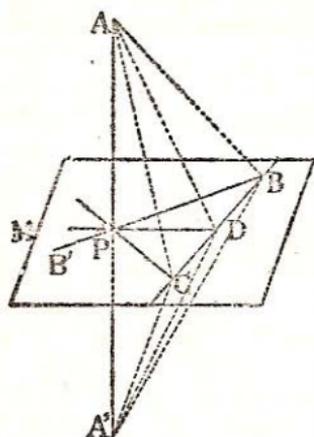


FIG. 276.

recta puede pasar un plano perpendicular á la segunda recta.

En efecto, basta trazar una recta perpendicular á la segunda recta, en un punto de la primera. Estas dos rectas determinan un plano perpendicular á la segunda recta.

2. — PLANO PERPENDICULAR Á UNA RECTA.

448. Teorema. — *Por un punto dado, se puede trazar un plano perpendicular á una recta dada, y no se puede trazar más que uno.*

1° Si el punto dado P está sobre la recta AA' (fig. 277), se trazan por este punto, y en direcciones diferentes, dos perpendiculares PB y PC á la recta AA' . Esta recta AA' es perpendicular al plano M determinado por las dos rectas PB y PC , y el plano M es, á su vez, perpendicular á la recta AA' .

Este plano es el único que se puede trazar perpendi-

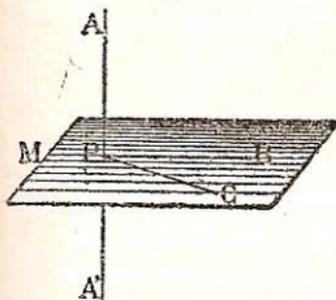


FIG. 277

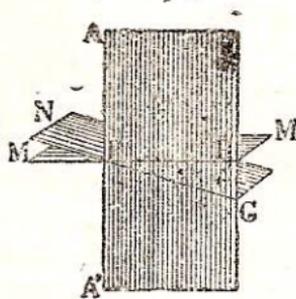


FIG. 278.

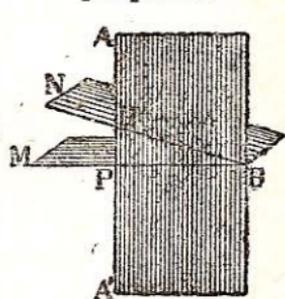


FIG. 279.

cularmente á AA' por el punto P ; porque si se supone un segundo plano NG (fig. 278), se podría trazar por AA' un plano cualquiera AG , cuyas intersecciones PB y PG con los planos M y N serían perpendiculares á AA' , lo que es imposible (n° 63).

2° Supongamos que el punto esté situado fuera de la recta, y sea B este punto (fig. 279). Tracemos BP perpendicular á AA' ; luego, en otra dirección, PC perpendicular á AA' . Esta recta AA' es perpendicular al plano M determinado por PB y PC , y el plano M es, á su vez, perpendicular á la recta AA' .

Este plano es el único que se puede trazar perpendicularmente á AA' por el punto B ; porque si se supone un segundo plano BN (fig. 279), se podría trazar por AA' un plano cualquiera AB , cuyas intersecciones BP y BH con los planos M y N serían perpendiculares á AA' , lo que es imposible.

449. Lugar geométrico. — *El lugar geométrico de las perpendiculares trazadas en todos sentidos, en un mismo punto de una recta dada, es un plano perpendicular á esta recta.*

Sea MN un plano trazado por el punto P perpendicular á la recta AA' .

Si se supone que una recta trazada por el punto P perpendicularmente á AA' quedase fuera del plano MN , en PC por ejemplo, se podría trazar, por las rectas AA' y PC , el plano AD , cuya intersección con MN sería una recta PB diferente de PC .

Como AP , perpendicular al plano MN , lo es también á la recta PB situada en este plano, habría pues, en un mismo plano AD , dos perpendiculares PB y PC en un mismo punto P de la recta AA' , lo que es imposible.

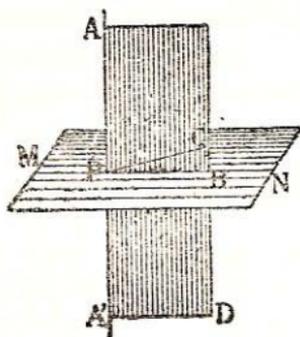


FIG. 280.

3. — RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES.

450. Teorema. — *Desde un punto A tomado fuera de un plano M , se puede bajar una perpendicular sobre dicho plano.*

En el plano M se puede trazar una recta cualquiera BC , y en el plano ABC , se puede bajar una perpendicular AD sobre BC , luego en el plano M , se puede levantar DE perpendicular á BD , y en el plano ADE , bajar la perpendicular AP sobre DE .

La recta AP , así trazada, es perpendicular al plano dado. Para probarlo, basta establecer que AP es per-

perpendicular á una línea cualquiera PB, trazada por su pie en el plano M.

Prolonguemos AP de una cantidad PA' igual á PA y unamos los puntos A, A' con el punto B y tracemos A'D.

Siendo DP perpendicular á la mitad de AA', se tiene $DA' = DA$; pero por construcción la recta BD es perpendicular á DA y á DE, luego lo es al plano ADA', y por consiguiente á la recta DA'.

Los dos triángulos rectángulos ADB, A'DB tienen un ángulo recto comprendido entre dos lados respectivamente iguales, luego $AB = A'B$; luego el triángulo ABA' es isósceles, y la recta BP que une el vértice con la mitad de la base es perpendicular á esta base; luego, siendo AP perpendicular á PD y á PB, es perpendicular al plano.

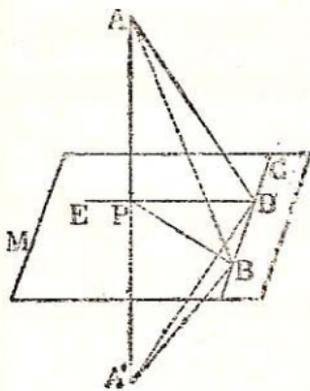


FIG. 281.

b) Por un punto P tomado sobre un plano M se puede levantar una perpendicular á este plano.

Después de haber trazado una recta cualquiera BC en el plano M, se puede bajar la perpendicular PD sobre BC, y por el punto D, en un plano cualquiera trazado por BC, levantar una perpendicular DA sobre la recta BC; por último, en el plano PDA levantar una recta PA perpendicular á PD; la recta PA es perpendicular al plano.

En efecto, prolongando AP de una cantidad $PA' = AP$ la recta PD se encuentra perpendicular á la mitad de AA', luego $AD = DA'$; pero BD es perpendicular al plano ADP, es decir al plano ADA', y por consiguiente $AB = BA'$, luego AP es perpendicular á PB

451 Teorema. — Si dos rectas son paralelas, todo plano perpendicular á una de ellas lo es igualmente á la otra.

Sean AB y DE dos rectas paralelas, y sea M un plano perpendicular á AB.

Tracemos, en el plano M, y por los puntos B y E dos paralelas cualesquiera BC y EF

Los ángulos B y E son iguales por tener sus lados respectivamente paralelos (n° 444); y puesto que por hipótesis, el ángulo B es recto, el ángulo E también lo será.

Siendo la recta DE perpendicular á cualquiera otra recta trazada por su pie en el plano M, es perpendicular á este plano, y recíprocamente, el plano M es perpendicular á DE.

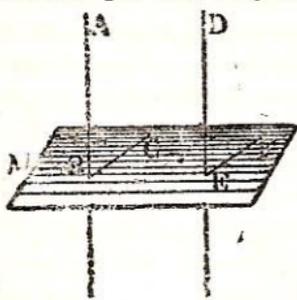


FIG. 282.

452. Teorema. — *Dos rectas perpendiculares á un mismo plano son paralelas entre sí.*

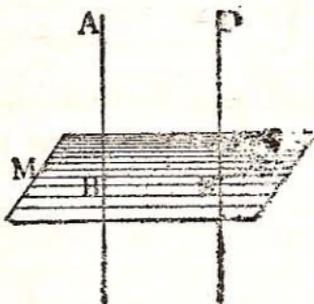


FIG. 283.

Sean las dos rectas AB y DE perpendiculares al plano M.

Si por el punto E se traza una paralela á AB, esta recta es, como AB, perpendicular al plano M (n° 451), y se confunde, por consiguiente con ED, puesto que por el punto E no puede haber más que una

perpendicular al plano M (n° 450); por lo tanto DE es paralela á AB.

453. Teorema. — *Si dos planos son paralelos, toda recta perpendicular á uno de ellos lo es igualmente al otro.*

Sean M y N dos planos paralelos, y sea AB una perpendicular al plano M. Probemos que AB es perpendicular á cualquier recta DF trazada por su pie en el plano N.

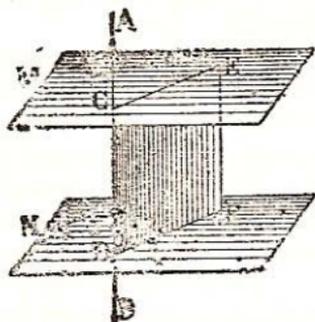


FIG. 284.

Por las rectas AB y DF, tracemos el plano CF; las

intersecciones CE y DF son paralelas (n° 436); la recta AB , perpendicular al plano M , lo es también á CE , y, por consiguiente, la recta DF es perpendicular á AB .

El mismo razonamiento se puede repetir para cualquiera otra posición de la recta DF , luego; AB es perpendicular al plano N que es lo que se quería demostrar.

454. Corolario. — *Las perpendiculares comprendidas entre dos planos paralelos son iguales, y miden la distancia de los dos planos.*

455. Teorema. — *Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos.*

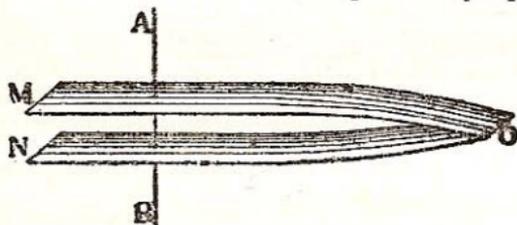


FIG. 285.

Sean M y N dos planos perpendiculares á la recta AB . Si estos dos planos se encontraran, habría,

por un mismo punto O , tomado sobre su intersección, dos planos distintos OM y ON perpendiculares á una misma recta AB ; lo que es imposible (n° 448).

456. Teorema. — *Una recta (CD) y un plano (P) perpendiculares á una misma recta (AB) son paralelos entre sí.*

En efecto, por CD puede pasar un plano Q perpendicular á AB (n° 447); y por consiguiente paralelo á P . La recta CD será paralela á P por pertenecer á un plano paralelo á P .

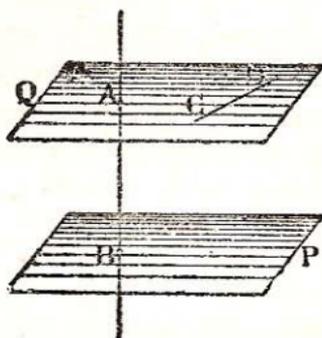


FIG. 286.

4. — PERPENDICULARES Y OBLICUAS.

457. Teorema. — *Si desde un punto tomado fuera de un plano, se ban á este y plano una perpendicular varias oblicuas :*

- 1° La perpendicular es menor que cualquiera oblicua ;
 2° Las oblicuas cuyos pies se separan igualmente del pie de la perpendicular son iguales ;
 3° De dos oblicuas, la mayor es aquella cuyo pié se separa más del pie de la perpendicular.

1° Sea AP una perpendicular, y AB una oblicua ; AP, perpendicular al plano M, lo es también á la recta PB trazada por su pie en este plano (n° 446) ; luego el triángulo APB es rectángulo en P, y el lado AP es menor que la hipotenusa AB...

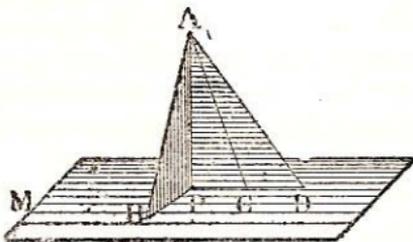


Fig. 287.

2° Sean las oblicuas AB y AC tales que se tenga $PB = PC$; los triángulos APB y APC son iguales por tener igual un ángulo en P formado por lados respectivamente iguales, luego $AB = AC$...

3° Sean dos oblicuas AB y AD tales que se tenga $PB < PD$; si se toma PC igual á PB, la oblicua AC es igual a AB ; pero, en la figura plana APD, la oblicua AC es menor que AD ; se tiene pues $AB < AD$.

458. Corolarios. — 1° La línea más corta posible de un punto á un plano es la perpendicular á este plano ; esta línea representa la distancia del punto al plano.

2° Si dos oblicuas que parten de un mismo punto fuera de un plano son iguales, sus pies están equidistantes del pie de la perpendicular ; y por consiguiente, el lugar de los pies B, C..., de las oblicuas iguales es la circunferencia descrita desde el punto P como centro, con la distancia PB por radio.

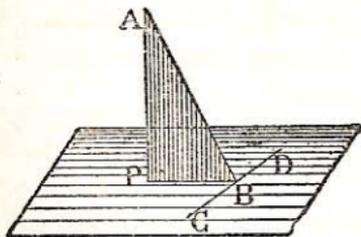


Fig. 288.

3° Si dos oblicuas que parten de un mismo punto fuera de un plano son desiguales, el pie de la más larga está más distante del pie de la perpendicular.

459. Teorema de las tres perpendiculares. — Si desde el pie de una perpendicular á un plano, se baja una per-

perpendicular á una recta cualquiera de este plano, la recta que une un punto cualquiera de la primera recta con el punto de concurso de las otras dos es perpendicular á la recta del plano.

Sea AP perpendicular al plano M, y sea PB perpendicular á la recta CD situada sobre este plano. Vamos á demostrar que una recta tal como AB que une el punto B con un punto cualquiera de AP es perpendicular á CD.

En efecto, CD es perpendicular á BP y á AP (nº 446); luego es perpendicular al plano APB, y á la recta AB, que pertenece á este plano.

§ V. — Ángulo de dos planos.

1. — ÁNGULOS DIEDROS.

460. Definición. — *Llámanse ángulo diedro á la abertura comprendida entre dos semiplanos que salen de la misma recta.*

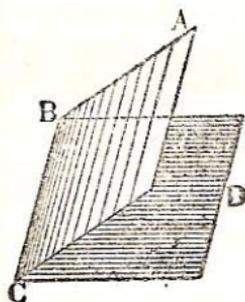


FIG. 289.

Los semiplanos son las caras del diedro, y su intersección es la arista.

Un diedro se designa por las letras de su arista.

461. Igualdad. — *Dos diedros son iguales cuando pueden coincidir.*

462. Diedros adyacentes. — *Llámanse diedros adyacentes dos diedros que tienen la misma arista y están de una y otra parte de una cara común.*

463. Adición de los diedros. — *Sumar dos diedros es darles la posición de dos diedros adyacentes, la suma es el diedro formado por las caras no comunes.*

464. Divisibilidad de los diedros. — *Un diedro es divisible en cualquier número de partes iguales.*

Llámanse plano bisector de un diedro el plano que lo divide en dos partes iguales.

465. Diedro recto. — Un semiplano que parte de una recta de un plano forma con éste dos diedros adyacentes. *Llámanse diedro recto á cada uno de estos diedros cuando son iguales.*

Es evidente que todos los diedros rectos son iguales.

Se divide el diedro recto en 90 partes; cada una es un diedro de un grado. Este se divide como el grado que sirve para medir los ángulos planos.

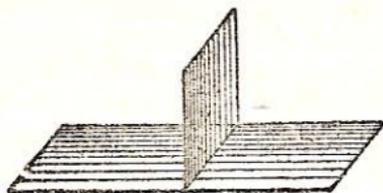


FIG. 290.

466. Diedro agudo. — *Un diedro agudo es un diedro menor que un recto.*

467. Diedro obtuso. — *Un diedro obtuso es un diedro mayor que un recto.*

468. Diedros complementarios y suplementarios. — *Dos diedros son complementarios cuando tienen por suma un diedro recto; son suplementarios cuando su suma es igual á dos diedros rectos.*

469. Diedros opuestos por el vértice. — *Diedros opuestos por el vértice son aquellos que tienen la misma arista y cuyas caras son respectivamente en un mismo plano.*

470. Planos perpendiculares. — *Un plano es perpendicular á otro plano cuando forma con este dos diedros adyacentes iguales. Basta también que forme con él un diedro recto.*

2. — ÁNGULO PLANO DE UN ÁNGULO DIEDRO.

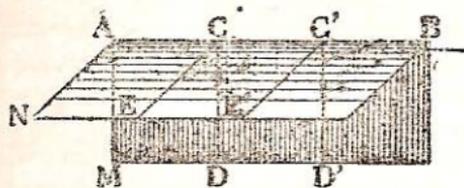


FIG. 291.

471. Definición — *Ángulo plano de un diedro es el ángulo formado por las perpendiculares levantadas en cada cara, desde un mismo punto de la arista.*

Sean CD en el plano M , CE en el plano N , y ambas

perpendiculares a AB , el ángulo DCE es el ángulo plano del diedro.

Se pueden trazar las perpendiculares por un punto cualquiera de la arista del diedro, porque los ángulos DCE , $D'C'E'$ son iguales por tener sus lados paralelos y vueltos en el mismo sentido.

472. Teorema. — *Dos diedros iguales tienen ángulos planos iguales.*

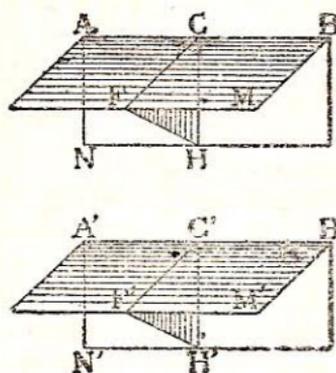


Fig. 399

Sean AB y $A'B'$ dos diedros iguales, y C , C' sus ángulos planos.

Coloquemos el diedro AB sobre su igual $A'B'$, de manera que la arista AB coincida con $A'B'$, y el punto C con C' . Las rectas CF y $C'F'$ coinciden por estar en un mismo plano, y ser perpendiculares en un mismo punto de la recta $A'B'$; sucediendo lo mismo con las rectas CH y $C'H'$. Luego los ángulos C y C' son iguales.

473 Recíproca. — *Dos diedros que tienen ángulos planos iguales, son iguales.*

Sean AB y $A'B'$ dos diedros que tienen sus ángulos planos C y C' iguales. Estos ángulos planos determinan planos perpendiculares a las aristas AB y $A'B'$.

Coloquemos la primera figura sobre la segunda, de manera que el plano AM quede sobre $A'M'$, la arista AB sobre $A'B'$, y el punto C sobre C' . Los dos planos FCH y $F'C'H'$ coinciden, por ser perpendiculares en un mismo punto de la recta $A'B'$; por lo tanto CF se confunde con $C'F'$ y CH con $C'H'$; los planos ABN y $A'B'N'$ coinciden, puesto que pasan por las mismas rectas $A'B'$ y $C'H'$, y los diedros son iguales.

474. Teorema. — *La relación de dos ángulos diedros es la misma que la de sus ángulos planos.*

Sean M y N dos diedros cualesquiera, ABC y DEF sus ángulos planos.

Admitamos que estos ángulos planos tengan una

medida común que esté contenida por ejemplo, 3 veces exactamente en el primero, y 5 veces en el segundo; estos ángulos son entre sí como los números 3 y 5, y se tiene:

$$\frac{\text{ángulo ABC}}{\text{ángulo DEF}} = \frac{3}{5}$$

Hagamos pasar planos por las aristas BM y EN y por las líneas de división de los dos ángulos planos; siendo iguales los ángulos planos parciales, determinan diedros iguales (nº 473); pero el ángulo M contiene 3 de estos diedros iguales, y el ángulo N contiene 5; luego se tiene:

$$\frac{M}{N} = \frac{3}{5} \text{ y por consiguiente } \frac{M}{N} = \frac{\text{ángulo ABC}}{\text{ángulo DEF}}$$

Siendo aplicable esta demostración por pequeña que sea la medida común á los dos ángulos planos, el teorema es cierto en todos los casos.

475. Teorema. — *El ángulo plano de un diedro recto es recto.*

Sean los dos diedros rectos QAFP y CEFD

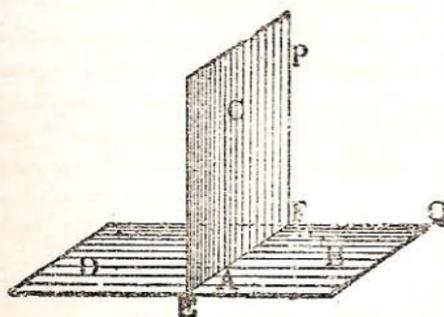


Fig. 294.

Sus ángulos planos son BAC y CAD; son iguales (nº 472); y AD, perpendicular á EF en el plano Q, está directamente opuesta á AB, perpendicular á la misma recta EF en el mismo plano Q; luego (nº 55), los dos ángulos BAC y CAD son rectos.

Consecuencia. — *La medida de un diedro es igual á*

la medida de su ángulo plano, porque la razón de estas medidas es constante (n° 446) é igual á uno.

3. — PLANOS PERPENDICULARES.

476 Teorema — Si una recta y un plano son perpendiculares, todo plano trazado por la recta es perpendicular al primer plano.

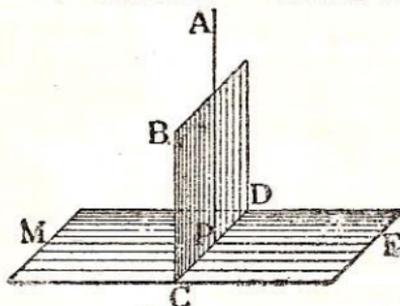


Fig. 295.

Sea AP perpendicular al plano M, y sea BD un plano cualquiera trazado por AP. Tracemos en el plano M la recta PE perpendicular á CD.

La recta AP es perpendicular á las dos rectas

CD y PE (n° 446); por lo tanto el ángulo APE, que es el ángulo de los dos planos es recto, y los dos planos son perpendiculares el uno al otro.

477 Corolario. — Para trazar por una recta AB, un plano perpendicular á un plano dado M, se baja desde un punto cualquiera A de la recta,

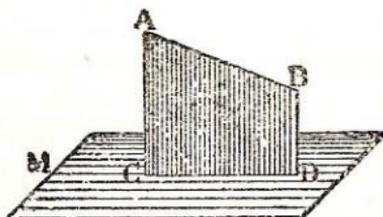


Fig. 296.

una perpendicular AC al plano dado; el plano BC, determinado por estas dos rectas, es perpendicular al plano M.

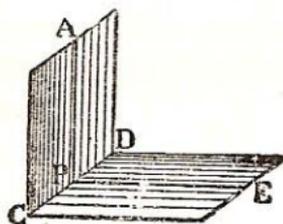


Fig. 297.

478. Teorema — Si dos planos son perpendiculares, toda recta trazada en uno de ellos perpendicularmente á su intersección es perpendicular al otro plano.

Sean CA y CE dos planos perpendiculares, y sea AP perpendicular á la intersección CD.

En el plano CDE, tracemos PE perpendicular á CD.

Siendo recto el diedro, su ángulo plano APE también lo será, luego AP es perpendicular á las dos rectas CD y PE, y por consiguiente, á su plano CE.

479. Teorema. — *Si dos planos son perpendiculares, y por un punto del primero se traza una recta perpendicular al segundo, estará contenida por completo en el primer plano.*

Sean M y N dos planos perpendiculares entre sí, y sea A un punto cualquiera del primero.

Si, en el plano M, se traza AP perpendicular á la intersección CD, esta recta AP es perpendicular al plano N; ahora bien, desde el punto A, no se puede trazar más que una perpendicular al plano N; luego la perpendicular bajada del punto A sobre el plano N se confunde con AP.

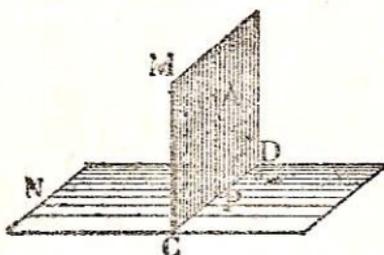


FIG. 293.

480. Escolio. — *Todo plano perpendicular á una recta situada en un plano es perpendicular á este plano.*

Sea el plano AD perpendicular á la recta PE (fig. 297).

Si en el plano AD se traza AP perpendicular á la intersección CD, la recta PE perpendicular al plano AD es perpendicular á PA (n.º 446); luego el ángulo plano APE que mide el diedro es recto, y los dos planos son perpendiculares entre sí.

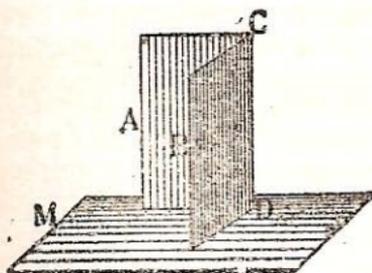


FIG. 298.

481. Teorema. — *Si dos planos que se cortan son perpendiculares á un tercero, su intersección también será perpendicular al tercer plano.*

En efecto, si desde un punto cualquiera de la intersección de los dos primeros planos A y B, se baja una perpendicular al tercero M, dicha perpendicular debe

encontrarse enteramente contenida en el plano A y del mismo modo en el plano B (n° 419); y se confundirá por consiguiente con la intersección de los dos planos.

482. Escolios. — I. *Todo plano M perpendicular á la intersección CD de otros dos planos, es perpendicular á cada uno de ellos.*

Porque este plano M es perpendicular á una recta CD contenida en cada uno de los otros dos planos (n° 480).

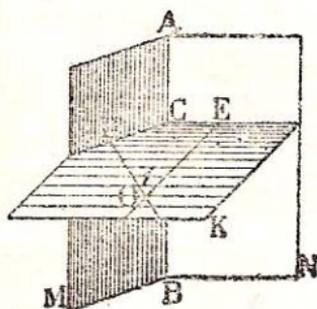


Fig. 300.

II. *Si los lados OD y OE de un ángulo plano son perpendiculares á las caras de un diedro AB, el ángulo plano y el diedro son iguales, ó suplementarios.*

En efecto, si se traza el plano ODEK de las dos rectas, este plano es perpendicular á cada uno de los planos M y N (n° 476), y por consiguiente á su intersección (n° 481); así el ángulo DCE es el ángulo plano del diedro; y los ángulos i y C, por tener sus lados perpendiculares, son iguales ó suplementarios.

§ VI. — Proyección de una figura.

483. Definiciones. — *Proyección de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular bajada desde dicho punto sobre el plano.*

484. *Proyección de una figura cualquiera sobre un plano es el conjunto de las proyecciones de los diferentes puntos de dicha figura sobre el plano*

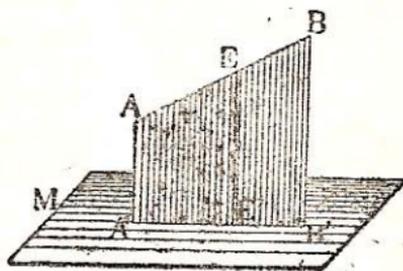


Fig. 301

485. Teorema. — *La proyección de una recta sobre un plano es una línea recta*

Sea AB una recta que se quiere proyectar sobre el plano M . Por la recta AB , tracemos un plano AB' perpendicular al plano M .

Si se proyecta sobre el plano M un punto cualquiera E de la recta, la línea proyectante EE' está contenida por completo en el plano AB' perpendicular al plano M (n° 479), así es que la proyección E' del punto E está sobre la recta $A'B'$.

Todos los otros puntos de AB se proyectan del mismo modo sobre la recta $A'B'$ que es la intersección de los dos planos.

§ VII. — Ángulo de una recta y de un plano.

486. Definición. — *Se llama ángulo de una recta y un plano el ángulo que forma dicha recta con su proyección sobre el plano.*

Este ángulo se encuentra prolongando la recta hasta el plano, ó bien trazando por un punto cualquiera de la recta una paralela á su proyección.

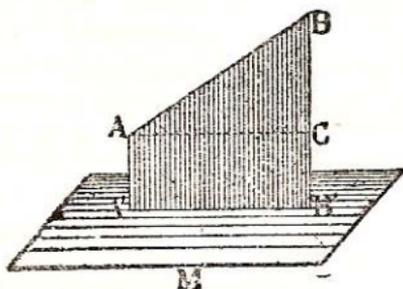


FIG. 302

487. Teorema. — *El ángulo que forma una recta con su proyección sobre un plano es menor que el ángulo que forma con cualquiera otra recta trazada por su pie en este plano.*

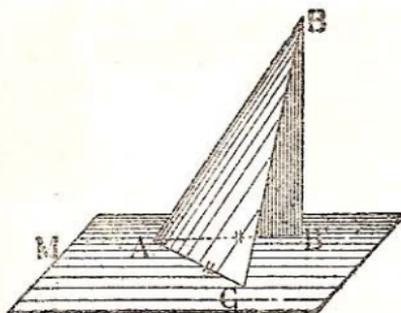


FIG. 303.

Sea AB una recta cualquiera, AB' su proyección sobre el plano M , y AC otra recta trazada en el plano. Vamos á demostrar que el ángulo BAB' es menor que BAC .

Llevemos la longitud AB' sobre AC , y tracemos la

recta BC. La línea BB' es perpendicular al plano M, luego BC es oblicua; por consiguiente $BB' < BC$; los dos triángulos ABB' y BAC tienen dos lados respectivamente iguales, y el tercero $BB' < BC$, luego el ángulo BAB' es menor que BAC (n° 119).

488. Teorema. — Si una recta se mueve sobre una de las caras de un diedro, el ángulo que forma con su proyección sobre la otra cara es máximo, cuando esta recta es perpendicular á la intersección de los dos planos.

Sea el diedro MDEN, y sean AB y AD dos posiciones de la recta móvil, la primera, perpendicular a la intersección DE, y la segunda en una posición cualquiera. Si se traza AC perpendicular al plano N, las rectas CB y CD son las proyecciones de AB y AD. Se trata de demostrar que el ángulo ABC es mayor que ADC.

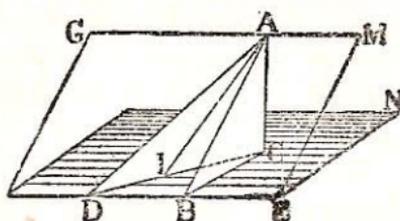


FIG. 304.

Siendo las rectas AC y AB perpendiculares, una al plano N, y la otra á la recta DE de este plano, resulta (n° 459) que CB es perpendicular á DE; se tiene pues $CB < CD$.

Llevemos sobre CD una longitud CI igual á CB, y tracemos AI. Los dos triángulos rectángulos ACB y AIC son iguales por tener en el punto C un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales; luego el ángulo ABC es igual con AIC.

Ahora bien, el ángulo AIC, exterior al triángulo AID, es igual á la suma de los dos interiores no adyacentes; por consiguiente, el ángulo ADC es menor que AIC ó ABC.

489. Escolios. — I. El ángulo de dos planos es el ángulo máximo que puede formar uno de ellos con una recta móvil del otro plano.

II. Línea de inclinación de un plano es una recta de este plano perpendicular á las horizontales del plano.

Si DE es una horizontal, la perpendicular AB es la línea de inclinación del plano BM.

§ VIII — Distancia entre dos rectas.

490. Teorema. — *Á dos rectas cualesquiera en el espacio, se les puede trazar una perpendicular común, y una solamente; y esta perpendicular es la más corta distancia de las dos rectas.*

Sean AB y CD dos rectas que no están en un mismo plano.

Por CD tracemos el plano M paralelo á AB , y proyectemos AB sobre este plano.

Desde el punto C donde la proyección de AB encuentra á CD , levantemos la perpendicular CA al plano M .

Vamos á demostrar que esta recta es una perpendicular común á las dos rectas dadas y que es la única posible.

1° La recta CA perpendicular al plano M es perpendicular á las rectas CD, CE que pasan por su pie en este plano (n° 445); también es perpendicular á AB , puesto que esta línea es paralela á CE .

2° AC es la única perpendicular común, porque otra recta GH que supusiéramos perpendicular á AB y á CD , sería también perpendicular á HI paralela á AB , y, por consiguiente al plano M ; como GF , paralela á AC , ya es perpendicular al plano M , habría pues dos perpendiculares al plano M , desde un mismo punto G , lo que es imposible...

3° Se tiene $AC = GF$, y $GF < GH$ (n° 370); la recta AC es pues menor que cualquiera otra recta trazada de AB á CD .

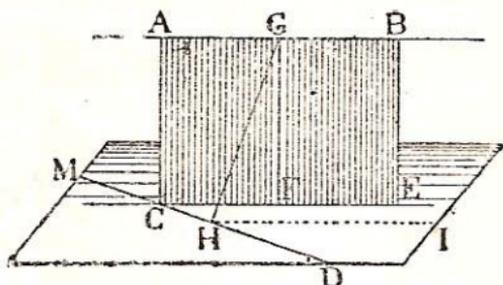


FIG. 305.

CAPÍTULO II

SIMETRÍA EN EL ESPACIO

1. — SIMETRÍA CON RELACIÓN Á UN EJE.

491. Definición. — *Dos puntos son simétricos con relación á una recta, cuando esta línea es perpendicular á la mitad de la recta que une los dos puntos. La recta se llama eje de simetría.*

492. — *Dos figuras son simétricas con relación á un eje, cuando cada punto de la primera tiene su simétrico en la segunda, y recíprocamente.*

493. Teorema. — *Dos figuras simétricas con relación á un eje son sobreponibles.*

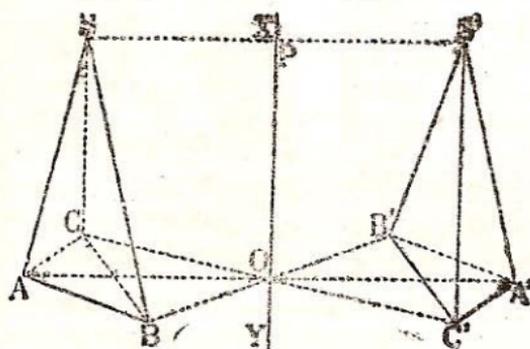


FIG. 303.

Sean SABC y S'A'B'C' dos poliedros simétricos con relación al eje XY.

Si se hace girar la figura SABC una semi-revolución alrededor del eje XY, los puntos S, A, B, C, vienen á colocarse respectivamente en S', A', B', C', porque $OB = OB'$, $OC = OC'$, etc, y las dos figuras coinciden.

494. Observación. — Siendo iguales dos figuras simétricas con relación á un eje, no hay que ocuparse más de la simetría con relación á un eje.

2. — SIMETRÍA CON RELACIÓN Á UN CENTRO Ó Á UN PLANO

495. Definiciones. — *Dos puntos son simétricos con relación á un centro cuando este punto es el medio del segmento rectilíneo que une los otros dos.*

Dos puntos son simétricos con relación á un plano cuando el plano es perpendicular á la mitad del segmento rectilíneo que une los dos puntos.

Dos figuras son simétricas con relación á un centro ó á un plano cuando cada punto de la primera tiene su simétrico en la segunda, y recíprocamente.

496. Teorema. — Si dos figuras son simétricas con relación á un plano, se pueden colocar de tal manera que sean simétricas con relación á un centro tomado arbitrariamente en dicho plano.

Sean las dos figuras F y F' simétricas con relación al plano MN , O un punto cualquiera tomado sobre este plano, y F'' la figura simétrica de F con relación al punto O .

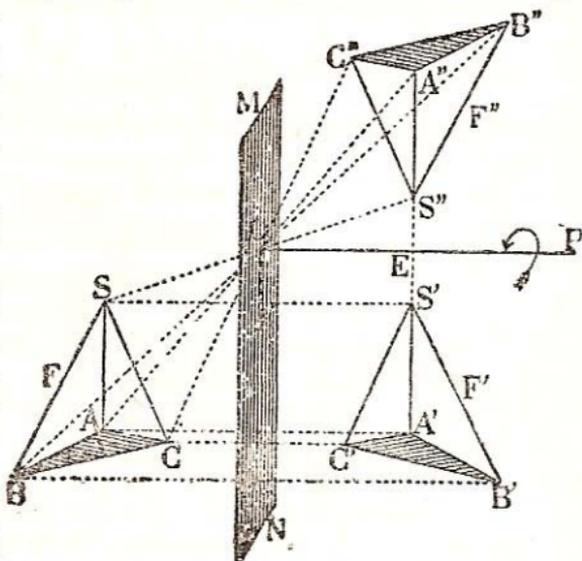


Fig. 307.

Tracemos OP perpendicular al plano MN ; unamos los puntos homólogos de las dos figuras F y F' , y del mismo modo los puntos homólogos de las dos figuras F y F'' ; finalmente, tracemos OS y $S'S''$.

Las rectas OP y SS'' son paralelas por ser perpendiculares al mismo plano MN , luego la recta OP está en el plano del triángulo $SS''S'$, y como el punto O es el medio de SS'' , el punto E es igualmente el medio de $S'S''$ (n.º 127).

Por otra parte, en el triángulo $SS''S'$, la recta OS es paralela al lado $S'S''$, porque une los medios de los otros dos lados: luego OP , perpendicular á OS , es igualmente perpendicular á $S'S''$, y los dos puntos S y S'' son simétricos con relación al eje OP .

Del mismo modo se demostraría, con relación á este eje OP , la simetría de los puntos A' y A'' , B' y B'' , C' y C'' ..., y por consiguiente la simetría de las dos figuras F' y F'' .

Luego, por una semi-revolución alrededor del eje OP , la figura F' vendría á coincidir con F'' .

497. Recíproca. — Si dos figuras son simétricas con relación á un centro, se pueden colocar de tal manera que sean simétricas con relación á un plano cualquiera trazado por este punto.

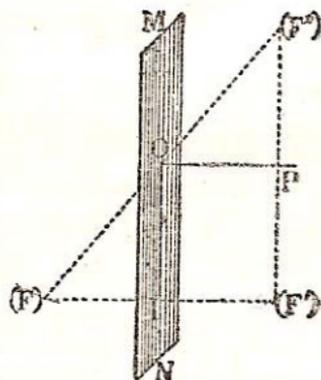


Fig. 308.

Sean las dos figuras F y F'' simétricas con relación al centro O , MN un plano cualquiera trazado por este punto y F' la figura simétrica de F con relación al plano MN .

Si se traza el eje OP perpendicular al plano M , se demostrará absolutamente, como en el teorema directo, que las dos figuras F' y F'' son simétricas con relación al eje OP . Luego, por una semi-revolución alrededor del eje OP , la figura F'' vendrá á coincidir con F' .

498. Corolario. — Si, para una figura dada F , se consideran dos figuras simétricas, la una F' con relación á un plano, y la otra F'' con relación á un centro, tomado en este plano, estos dos simétricos F' y F'' son superponibles.

499. Teorema de Bravais. — Dos figuras simétricas de una misma figura con relación á centros diferentes ó á planos diferentes son iguales.

1º Sean A y B dos figuras simétricas de C , la primera con relación al centro O , y la segunda con relación al centro O' .

Por los dos puntos O y O' , tracemos un plano cualquiera MN . La figura A puede ser transportada á A' , de manera que sea simétrica de C con relación al plano MN trazado por el punto O (nº 497); de esta

posición A' , la figura puede ser transportada á B , de manera que sea simétrica de C con relación al centro O' (n° 496); y entonces las dos figuras A y B coinciden.

2° Sean A y B dos figuras simétricas de C , la primera con relación al plano M , y la segunda con relación al

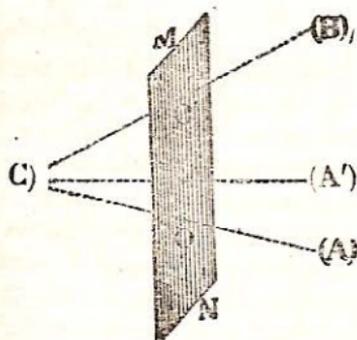


Fig. 309.

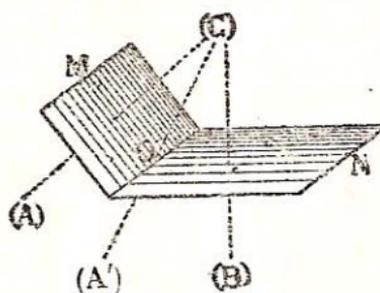


Fig. 310.

plano N . Consideremos un punto cualquiera O de la intersección de los dos planos.

La figura A puede ser transportada á A' , de manera que sea simétrica de C con relación al punto O (n° 496); de esta posición A' la figura puede ser transportada á B , de manera que sea simétrica de C con relación al plano N (n° 497), y entonces las dos figuras A y B coinciden.

500. Escolio. — Si no se atiende más que á la forma de las figuras toda propiedad demostrada en la simetría con relación á un punto se encuentra por ese hecho establecida en la simetría con relación á un plano. Esta observación permite elegir el género de simetría que se quiera, para la demostración de cada propiedad, y en cada género tal centro ó tal plano de simetría que facilite la demostración.

501. Teorema. — *La figura simétrica de un segmento rectilíneo es un segmento igual.*

Consideremos la simetría con relación á un centro. Sea AB una recta cualquiera (fig. 311), O el centro de simetría, A' y B' los puntos simétricos de A y B .

Tracemos la recta $A'B'$. Siendo los puntos A y A' simétricos, se tiene $OA = OA'$; del mismo modo OB

$= OB'$, y los triángulos OAB y $OA'B'$ son iguales por tener en O un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales; luego el lado AB es igual á $A'B'$, y estas rectas son paralelas, por ser iguales los ángulos OAB y $OA'B'$ (n° 73).

Sea EE' una secante cualquiera trazada por el centro de simetría: los triángulos OAE y $OA'E'$ son iguales por tener un lado igual (OA, OA') adyacente á ángulos respectivamente iguales, luego $OE = OE'$ y los dos puntos E y E' son simétricos; así las rectas AB y $A'B$ son simétricas, puesto que cada punto de una tiene su simétrico sobre la otra.

502. Escolio. — *Dos rectas simétricas con relación á un centro son paralelas.*

503. Teorema. — *Una figura plana cualquiera tiene por simétrica otra figura plana igual á la primera.*

1° Sea ABC un ángulo cualquiera, O un centro de simetría, $A'B'$ y $B'C'$ las rectas simétricas de AB y de BC .

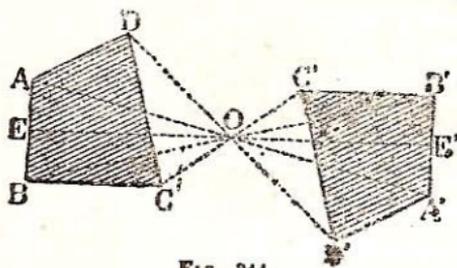


FIG. 311.

Los ángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales por tener sus lados respectivamente paralelos (n° 502) y dirigidos en sentido contrario.

2° Sea el polígono plano $ABCD$, y sea O el centro de simetría.

Si se toman los puntos A', B', C', D' , simétricos de A, B, C, D , los dos polígonos $ACBD$, y $A'B'C'D'$ tienen los lados respectivamente iguales y paralelos; los ángulos son respectivamente iguales, por lo tanto, *estos polígonos son iguales.*

Una recta cualquiera BD que se trazara en el primer polígono, tendría por simétrica la recta $B'D'$ trazada en el segundo; así cada punto de la primera figura tiene su simétrico en la segunda, y recíprocamente.

504. Escolio. — *Dos figuras planas simétricas con rela-*

ción á un centro son paralelas, cuando el centro no está en su plano

505. Teorema. — *Un ángulo diedro tiene por simétrico otro ángulo diedro igual al primero.*

En efecto, si se considera la simetría con relación a un centro O , cada plano del diedro AB tiene por simétrico un plano que le es paralelo (nº 304), y por tanto los dos diedros AB y $A'B'$ son iguales.

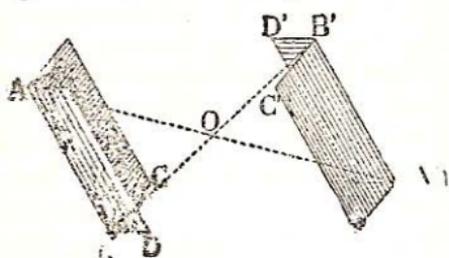


FIG. 312.

506. Escolio. — Dos figuras planas simétricas son sobreponibles; sucede lo mismo con dos ángulos diedros simétricos.

CAPÍTULO III

ÁNGULOS SÓLIDOS Ó POLIEDROS

§ I. — Generalidades.

507. Definiciones. — *Se llama ángulo sólido ó ángulo poliedro la figura formada por varios ángulos planos de un mismo vértice, y que de dos en dos tienen un lado común.*

El vértice común es el vértice del ángulo sólido; los ángulos planos se llaman caras: cada lado común tiene dos caras y una arista del ángulo sólido.

Un ángulo sólido es convexo cuando la sección plana que corta á todas las aristas es un polígono convexo.

Si se prolongan más allá del vértice todas las aristas de un ángulo sólido, se obtiene un nuevo ángulo sólido simétrico del primero.

En dos ángulos sólidos opuestos por el vértice, las caras son respectivamente iguales por ser ángulos

planos opuestos por el vértice, y los diedros son respectivamente iguales por ser opuestos por la arista.

Dos ángulos sólidos opuestos por el vértice se llaman iguales por simetría, porque tienen todos sus elementos respectivamente iguales; pero no pueden coincidir por la disposición inversa de estos mismos elementos.

§ II. — Triedros.

508. Definición. — Se llama triedro el ángulo sólido de tres caras. En el triedro se consideran seis elementos, á saber : tres caras y tres diedros. Los diedros pueden designarse por las aristas SA, SB, SC, ó simplemente A, B, C, y las caras respectivamente opuestas, por las mismas letras minúsculas *a*, *b*, *c*.

509. Teorema. — Toda cara de un triedro es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.

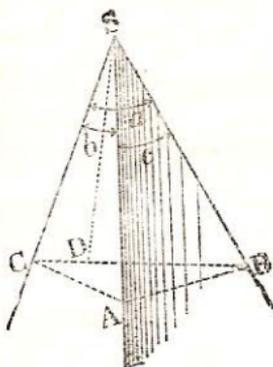


FIG. 313.

Sea el ángulo triedro S, y sean *a*, *b*, *c*, las tres caras, siendo *a* la mayor.

1° Construyamos sobre BSC el ángulo BSD igual á BSA ó *c*.

Tracemos BC arbitrariamente; llevemos la longitud SD de S á A, y tracemos el plano ABDC.

Los triángulos BSA y BSD son iguales por tener en S un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales; luego $BD = BA$. Por otra parte se tiene :

$$BC < BA + AC$$

Restando BD al primer miembro y BA al segundo, se tiene :

$$DC < AC.$$

Y entonces los dos triángulos CSD y CSA tienen dos lados respectivamente iguales, y el tercer lado $CD < CA$; luego el ángulo CSD es menor que CSA; y si

se agregan por una y otra parte los ángulos iguales DSB y ASB, queda

$$BSC < CSA + ASB \text{ ó } a < b + c.$$

Por lo tanto la cara mayor es menor que la suma de las otras dos. La propiedad es evidente para cada una de las otras dos caras.

2º La desigualdad anterior puede escribirse $b + c > a$ de donde, restando b á los dos miembros $c > a - b$ y si se resta c , se tiene $b > a - c$.

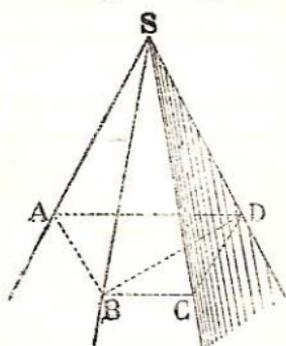


FIG. 314.

Escolio. — En un ángulo sólido cualquiera, cada cara es menor que la suma de las otras caras. Porque el ángulo sólido considerado puede decomponerse en triedros, tales como SABD y SBCD; en el primero, la cara ASD es $< ASB + BSD$; en el segundo, la cara BSD es $< BSC + CSD$; se tiene pues, con mayor razón:

$$ASD < ASB + BSC + CSD.$$

510. Teorema. — La suma de las caras de todo ángulo sólido convexo es menor que cuatro ángulos rectos.

Sea S un ángulo sólido de 5 caras; cortémosle por un plano cualquiera ACD.

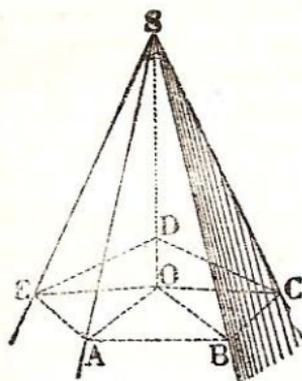


FIG. 315.

Uniéndolo los vértices A, B, C, D, E con un punto interior cualquiera O, se descompone el pentágono en 5 triángulos, cuyos ángulos suman 10 rectos. La suma de los ángulos de los 5 triángulos laterales ASB, BSC, etc., es igual á 10 rectos.

En el ángulo triedro A, la cara inferior EAB es menor que la suma de las caras laterales

EAS, SAB; lo mismo sucede con los ángulos triedros B, C, D, E.

Siendo la suma de los ángulos inferiores EAB, ABC, etc., menor que la suma de los ángulos laterales SAE, SAB, etc., por compensación la suma de los ángulos en O, que vale 4 rectos, será mayor que la suma de los ángulos en S.

§ III. — Triedros suplementarios.

511. Definición. — Llámase triedros suplementarios dos triedros tales que las caras del uno sean los suplementos de los diedros del otro, y recíprocamente.

El teorema siguiente nos demostrará la existencia de los triedros suplementarios.

512. Teorema. — Si por el vértice de un triedro, se lleva a cada cara, una perpendicular situada del mismo lado que la arista opuesta, se forma un triedro suplementario del primero.

Sean a, b, c , las caras del primer triedro $SABC$. Se traza SA' perpendicular al plano a ; SB' perpendicular a b y SC' perpendicular a c .

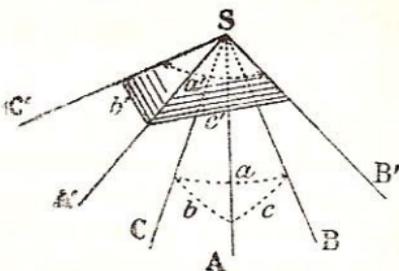


FIG. 315 bis.

Las rectas SA' y SB' siendo perpendiculares a los planos a y b , su ángulo c' es el suplemento del diedro SC (nº 482): por la misma razón a' es el suplemento de A y b' el suplemento de B .

Recíprocamente, SB , que pertenece al plano a , es perpendicular a SA' (449). Pero SB pertenece también al plano c , luego, es perpendicular a SB' (449), y siendo perpendicular a SC' y SA' , es perpendicular al plano b' (446). Del mismo modo, se verá que SA es perpendicular a a' y SC perpendicular a c' .

De allí resulta que $SABC$ es también el triedro suplementario de $SA'B'C'$, y que

$$A + a' = 2 \text{ rectos.}$$

$$B + b' = 2 \text{ r.}$$

$$C + c' = 2 \text{ r.}$$

513. Teorema. — En todo triedro, la suma de los ángulos diedros es mayor que 2 rectos y menor que 6 rectos.

Sea el triedro $SABC$. Consideremos el triedro suplementario $SA'B'C'$, cuyas caras son a' , b' , c' .

Se tiene (512)

$$A + a' = 2 r.$$

$$B + b' = 2 r.$$

$$C + c' = 2 r.$$

y $(A + B + C) + (a' + b' + c') = 6 r.$
de donde

$$A + B + C = 6 \text{ rectos} - (a' + b' + c').$$

Pero la suma $a' + b' + c'$ está comprendida entre 0 y 4 rectos (510); luego $A + B + C$ quedará comprendida entre 2 y 6 rectos.

§ IV. — Igualdad de los triedros.

CONSIDERAREMOS TRES CASOS DE IGUALDAD DE LOS TRIEDROS

514. Primer Caso. — *Dos triedros son iguales cuando tienen una cara igual adyacente a diedros respectivamente iguales y dispuestos semejantemente.*

Sean los dos triedros S y S' que tienen la cara BSC

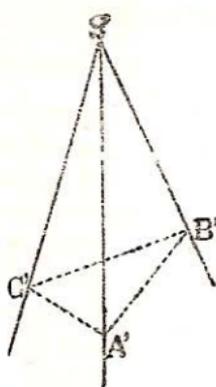
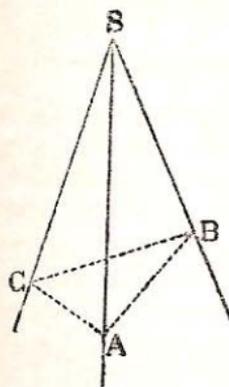


Fig. 318

igual a $B'S'C'$, el diedro SB igual a $S'B'$, y el diedro SC igual a $S'C'$.

Coloquemos la cara BSC sobre su igual $B'S'C'$. Siendo el diedro SB igual a $S'B'$, el plano SBA coincide con $S'B'A'$, y del mismo modo SCA con $S'C'A'$; luego los dos triedros son iguales.

515. Segundo Caso. — *Dos triedros son iguales cuando tienen un diedro igual formado por dos caras respectivamente iguales, y dispuestas semejantemente.*

Sean los dos triedros S y S' , que tienen el diedro SA igual a $S'A'$, la cara ASB igual a $A'S'B'$, y la cara ASC igual a $A'S'C'$.

El diedro SA puede coincidir con su igual S'A', de manera que el punto S quede en S'. Entonces la cara ASB coincide con su igual A'S'B', e igualmente ASC con A'S'C'. Los dos triedros son por lo tanto iguales.

516. Tercer Caso. — *Dos triedros son iguales cuando tienen las caras respectivamente iguales y dispuestas en el mismo orden.*

Llevemos longitudes iguales sobre todas las aristas, y, por los puntos obtenidos tracemos los planos M y M' sobre los cuales bajamos las perpendiculares SI, S'I', y trazamos AI y A'I'.

Siendo las caras de los dos triedros respectivamente iguales, los triángulos

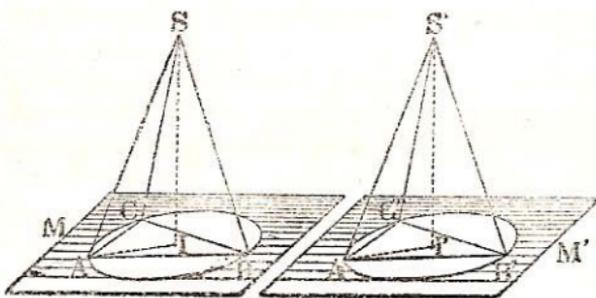


FIG. 317.

laterales de la primera figura son iguales a los de la segunda; luego $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, y las circunferencias circunscritas a los dos triángulos iguales ABC y A'B'C' son iguales.

Con relación al plano M, las rectas SA, SB, SC, siendo oblicuas iguales, los pies de estas líneas están equidistantes del pie de la perpendicular SI, y el punto I es el centro de la circunferencia CAB (nº 371, 2º). Otro tanto sucede con el triedro S'.

Los dos triángulos rectángulos SAI y S'A'I' son iguales por tener igual la hipotenusa y uno de los catetos igual; luego $SI = S'I'$.

Supongamos ahora la primera figura colocada sobre la segunda, el plano M sobre M', y el triángulo ABC sobre su igual A'B'C'. Las circunferencias coinciden, y los centros I e I'; las perpendiculares IS y e I'S', los vértices coinciden: así, los triedros son iguales.

Escollo. — Los tres casos de igualdad de los triedros que acaban de demostrarse presentan una analogía completa con los casos de igualdad de los triángulos (nº 114, 115, 116).

LIBRO VI

POLIEDROS

CAPITULO I

PROPIEDADES DE LOS POLIEDROS

§ I. — Definiciones.

517. Definiciones. — *Se llama poliedro un sólido completamente limitado por planos.*

En un poliedro hay que considerar los vértices, las aristas, las diagonales, las caras, los ángulos diedros, los ángulos sólidos, la superficie y el volumen.

Las caras del poliedro son los polígonos formados por las intersecciones de los planos que limitan el sólido; las aristas son los lados de estos mismos polígonos, cada arista es común á dos caras; los ángulos del poliedro son los ángulos sólidos formados por tres caras, ó un número mayor, que se reune en un mismo punto; los vértices del poliedro son los vértices de los ángulos sólidos, y se llama diagonal toda recta que une dos vértices no situados en la misma cara.

El más sencillo de los poliedros es el tetraedro ó poliedro de 4 caras; el hexaedro tiene 6 caras, el octaedro 8, el dodecaedro 12, el icosaedro 20. Un poliedro puede tener un número cualquiera de caras; pero este número nunca es menor que 4.

Un poliedro es convexo cuando el sólido queda por completo de un mismo lado de una cara cualquiera prolongada.

No estudiaremos más que los poliedros convexos.

§ II. — El prisma.

518. Definiciones. — *Se llama prisma el poliedro*

comprendido entre dos polígonos iguales y paralelos, y cuyas caras laterales son paralelogramos.

Los dos polígonos iguales y paralelos son las bases del prisma; las caras laterales son tantas como el número de lados de las bases.

Un prisma es **recto** ú **oblicuo** según que sus aristas laterales son perpendiculares ú oblicuas á las bases.

Todas las aristas laterales de un prisma son iguales, por ser paralelas comprendidas entre planos paralelos.

En un prisma recto, las caras laterales son rectángulos.

Un prisma es **triangular**, **cuadrangular**, **pentagonal**, etc., según que la base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

Prisma regular es un prisma recto cuya base es un polígono regular.

Altura de un prisma es la distancia de las dos bases. En un prisma recto, cada arista lateral es igual á la altura.

Trezo de prisma es la porción de prisma comprendida entre la base y una sección no paralela á la base, y que corta además á todas las aristas laterales.

519. Teorema. — *Las secciones hechas en un prisma por planos paralelos son polígonos iguales.*

Sea AB un prisma cualquiera, y sean R y S secciones paralelas entre sí.

Las rectas CD y HI son paralelas, por ser las intersecciones de dos planos paralelos R y S por uno tercero, DH; luego el cuadrilátero CDIH es un paralelogramo, y CD es igual á HI.

Del mismo modo, DE es igual y paralela á IK, EF á KL, etc., y los dos polígonos tienen sus lados respectivamente iguales; sus ángulos son iguales dos á dos porque tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido; luego estos dos polígonos son iguales.

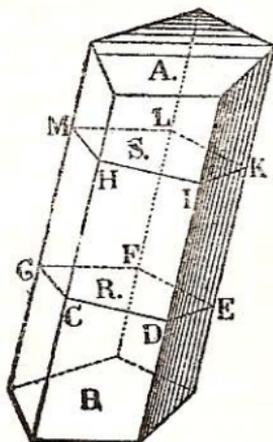


FIG. 318.

520. Definición. — Se llama sección recta de un prisma toda sección hecha perpendicularmente á las aristas laterales.

521. Corolarios. — 1º Todas las secciones rectas de un prisma son paralelas é iguales (fig. 319).

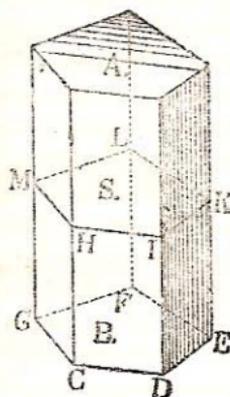


Fig. 319.

El teorema es cierto, aun para las secciones hechas más allá de las bases del prisma, cuando se prolongan las aristas laterales.

2º Toda sección paralela á la base de un prisma es igual á esta base (fig. 319). Así $HIKLM = CDEFG$.

522. Descomposición de un prisma en prismas triangulares.

— Los planos que pasan por una arista AA' y por cada una de las aristas no adyacentes descomponen el prisma en prismas triangulares.

En efecto, en los poliedros parciales, las aristas laterales son paralelas entre sí, y las bases también.

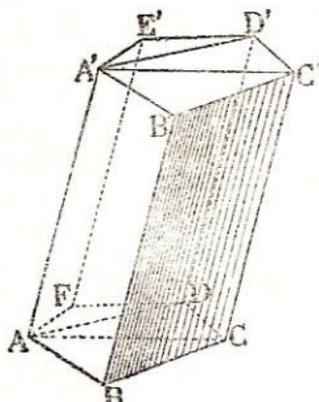


Fig. 320.

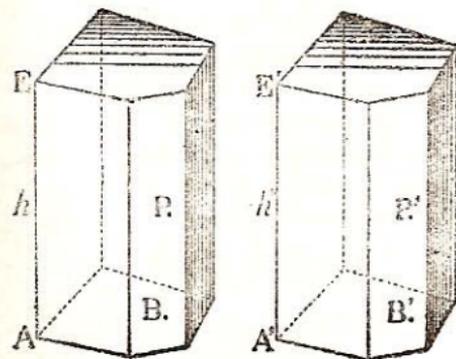


Fig. 321.

1. — PRISMAS IGUALES.

523. Teorema. — Dos prismas rectos de igual base y altura son iguales.

Sean P y P' dos prismas rectos que tienen bases iguales B y B' y la misma altura h .

Si se lleva la figura P sobre P' , las bases B y B'

coinciden, puesto que son polígonos iguales. Las aristas AE y A'E' coinciden por ser dos perpendiculares iguales trazadas en un mismo punto de un plano, lo mismo sucede con las otras aristas laterales. Así las bases superiores coinciden, y por consiguiente también los dos prismas.

524. Teorema. — *Dos prismas cualesquiera son iguales cuando las tres caras de un ángulo sólido son iguales y dispuestas en el mismo orden.*

Fácilmente se ve que la coincidencia de las tres caras de los ángulos A y A' (fig. 325) tiene como consecuencia la coincidencia de los dos prismas.

2. — ÁREA DEL PRISMA.

525. Definición. — *Superficie lateral de un prisma es el conjunto de las superficies de los paralelogramos laterales. — La superficie total es igual á la superficie lateral más la de las bases.*

526. Teorema. — *La superficie lateral de un prisma es igual al producto del perímetro de la sección recta por una arista lateral.*

Las aristas laterales son perpendiculares á la sección recta, y, por consiguiente, á los lados de esta sección (nº 446).

Como cada cara lateral es un paralelogramo, que tiene por base la arista del prisma, y por altura uno de los lados de la sección recta, la superficie lateral se obtiene multiplicando el perímetro de la sección recta por la arista. — Luego...

Escolios. — I. La superficie total se compone de la superficie lateral más la de las bases.

II. Cuando el prisma es recto, se obtiene la superficie lateral multiplicando el perímetro de la base por la altura.

§ III. — Paralelepípedo

527. Definición. — Paralelepípedo es el prisma cuyas bases son paralelogramos.

Paralelepípedo rectángulo es un prisma recto cuyas bases son rectángulos.

Cubo es un paralelepípedo rectángulo cuyas caras todas son cuadrados. Se le llama también exaedro regular.

Dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son las longitudes de las tres aristas que salen de un mismo vértice.

528. Teorema. — Las caras opuestas de un paralelepípedo son iguales y paralelas.

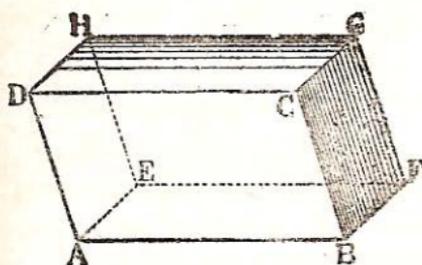


FIG. 322.

Sea AG un paralelepípedo cualquiera, y sean AH y BG dos caras opuestas.

Siendo paralelogramos todas las caras del sólido, las rectas AD y BC son iguales y paralelas, lo mismo que las rectas AE y BF.

Así los ángulos DAE y CBF son iguales, y sus planos son paralelos (nº 444). Los paralelogramos AH y BG, que tienen un ángulo igual formado por lados respectivamente iguales, son iguales, porque podrían coincidir.

529. Corolario. — En todo paralelepípedo, se pueden tomar por bases dos caras opuestas cualesquiera.

530. Teorema. — Toda sección plana que encuentra cuatro aristas paralelas de un paralelepípedo es un paralelogramo.

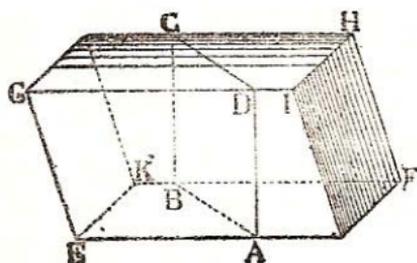


FIG. 323.

Sea ABCD una sección hecha en el paralelepípedo

GF. Las rectas AB y CD son paralelas, por ser las intersecciones del plano secante con los planos paralelos EF y GH (n° 436); igualmente, las rectas AD y BC son paralelas, por ser las intersecciones del plano secante con los planos paralelos EI y KH. Por tanto, la figura ABCD es un paralelogramo.

531. Teorema. — *Las diagonales de un paralelepípedo se cortan en su mitad.*

Sea el paralelepípedo AG. Tracemos un plano por dos aristas opuestas BF y DH. Siendo estas dos líneas iguales y paralelas, el cuadrilátero BFHD es un paralelogramo (n° 139), y las diagonales BH y DF se cortan en sus mitades.

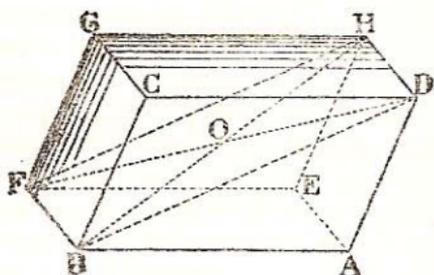


FIG. 324.

Cortándose dos diagonales cualesquiera en sus mitades, todas las diagonales pasan por un mismo punto, que es el medio de cada una de ellas.

Escolio. — El punto común á las cuatro diagonales de un paralelepípedo es el centro de figura de este paralelepípedo. Se ve fácilmente que es un centro de simetría, es decir que este punto es el punto medio común de todas las rectas que se puedan trazar en el paralelepípedo por este mismo punto.

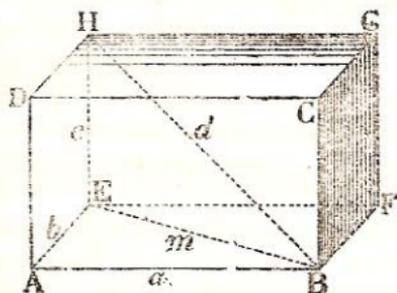


FIG. 315.

532. Teorema. — *En un paralelepípedo rectángulo, el cuadrado de la diagonal es igual á la suma de los cuadrados de las tres dimensiones.*

Sea AG un paralelepípedo rectángulo que tenga por dimensiones a, b, c , y sea d una de las diagonales.

El triángulo BEH es rectángulo en E, y el triángulo ABE es rectángulo en A. Se tiene pues :

$$d^2 = m^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Si se tratase de un cubo se tendría :

$$d^2 = 3 a^2 \text{ de donde } d = a \sqrt{3} = a (1,732 \dots)$$

§ IV. — La pirámide.

1. — DEFINICIONES.

533. *Pirámide es un poliedro que tiene por base un polígono cualquiera, y por caras laterales triángulos que tienen un vértice común.*

Este punto es el vértice de la pirámide.

La altura de una pirámide es la perpendicular bajada del vértice sobre el plano de la base.

Una pirámide es triángular, cuadrangular, pentagonal, etc., según que la base es un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

La pirámide triangular es un tetraedro (n° 428). En una pirámide triangular se puede tomar por base una cara cualquiera.

Una pirámide es regular cuando la base es un polígono regular, y la altura cae en el centro de este polígono.

En una pirámide regular, todas las aristas laterales son iguales; las caras laterales son triángulos isósceles iguales; la altura de cada uno de estos triángulos se llama apotema de la pirámide; apotema que no debe confundirse con el apotema de la base.

534. *Tronco de pirámide es la porción de pirámide comprendida entre la base y una sección que corta todas las aristas laterales.*

Si la sección es paralela á la base, se tiene un tronco de pirámide de bases paralelas, cuya altura es la distancia de las dos bases.

Tronco piramidal regular es la porción de pirámide regular comprendida entre la base y una sección paralela á esta base. Las caras laterales son trapecios isósceles iguales; la altura de cada uno de estos trapecios se llama apotema del tronco.

2. — SECCIONES PARALELAS A LA BASE.

535. Teorema. — *Si una pirámide es cortada por un plano paralelo á la base :*

1° *Las aristas laterales y la altura quedan divididas en una misma relación ;*

2° *La sección y la base son dos polígonos semejantes ;*

3° *Las áreas de estos polígonos son entre sí como los cuadrados de sus distancias al vértice de la pirámide.*

Sean *P* una pirámide cualquiera, *EG* una sección paralela á la base *AC* ; tracemos la altura *SIH* y las rectas *EI* y *AH* en el plano de la sección y en el de la base.

1° Las rectas *FG* y *BC* son paralelas, por ser las intersecciones de dos planos paralelos *EG* y *AC* con un tercer plano *SBC* ; y lo mismo sucede con las líneas *AB* y *EF*, *AD* y *EL*, *CD* y *GL*.

Luego el triángulo *SEF* es semejante á *SAB*, *SFG* á *SBC*, etc. ; del mismo modo *SEI* es semejante á *SAH*, por ser *EI* paralela á *AH*. Y como todos estos triángulos tienen lados comunes de dos en dos se tiene :

$$\frac{SF}{SB} = \frac{SG}{SC} = \frac{SL}{SD} = \frac{SE}{SA} = \frac{SI}{SH}.$$

2° Siendo una misma la razón de semejanza para todos estos triángulos, se tiene también $\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = \frac{GL}{CD} = \frac{EL}{AD}$; así los dos polígonos *EG* y *AC* tienen sus lados en una misma relación ; además sus ángulos son respectivamente iguales por tener sus lados paralelos (n° 391) ; luego la sección *EG* es semejante á la base *AC*.

3° La semejanza de los triángulos que tienen el

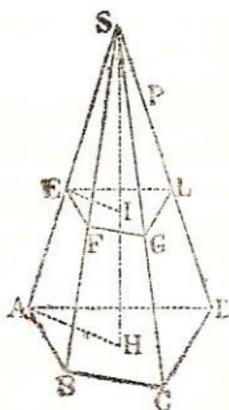


FIG. 326.

punto S por vértice común, da la relación $\frac{EF}{AB} = \frac{SE}{SA}$
 $= \frac{SI}{SH}$; de donde, elevando al cuadrado :

$$\frac{EF^2}{AB^2} = \frac{SE^2}{SA^2} = \frac{SI^2}{SH^2}$$

Por otra parte, siendo semejantes los dos polígonos EG y AC, se tiene :

$$\frac{\text{Polígono EG}}{\text{Polígono AC}} = \frac{EF^2}{AB^2} = \frac{SE^2}{SA^2} = \frac{SI^2}{SH^2}$$

Por lo tanto, las áreas de los dos polígonos EG y AC son entre sí como los cuadrados de sus distancias al vértice S.

536. Corolario. — *Todo plano que corta en una misma relación a tres aristas laterales de una pirámide es paralelo a su base.*

537. Teorema. — *Si dos pirámides tienen igual altura, las secciones hechas á igual distancia de los vértices,*

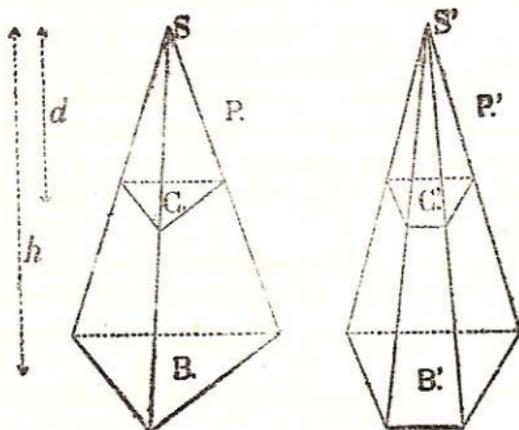


FIG. 327.

paralelamente á las bases, son entre sí como las mismas bases.

Sean P y P' dos pirámides que tengan la misma altura h, y bases cualesquiera B y B'; sean C y C' sec-

ciones hechas paralelamente á las bases, á una misma distancia d del vértice. Se tiene (n° 534) :

$$\frac{C}{B} = \frac{d^3}{h^3} \quad \frac{C'}{B'} = \frac{d^3}{h^3}$$

así :

$$\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'} \quad \text{y} \quad \frac{C}{C'} = \frac{B}{B'}$$

538. Corolario. — *Si dos pirámides tienen igual altura y bases equivalentes, las secciones hechas á igual distancia de los vértices, paralelamente á las bases son equivalentes.*

3. — PIRÁMIDES IGUALES.

539. Teorema. — *Dos tetraedros son iguales cuando tienen un diedro igual comprendido entre dos caras respectivamente iguales, y semejantemente dispuestas.*

Sean los dos tetraedros T y T' que tienen el diedro AC igual al diedro $A'C'$, la cara ACB igual con $A'C'B'$, y la cara ACD igual con $A'C'D'$

Coloquemos la primera figura sobre la segunda, de manera que la cara

ACB coincida con su igual $A'C'B'$; por ser el diedro AC igual con $A'C'$, la cara ACD toma la posición $A'C'D'$, y estas dos caras coinciden, y como todos los vértices coinciden, los tetraedros serán iguales.

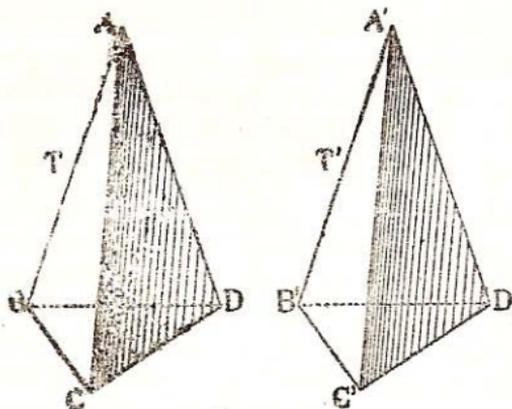


FIG. 328.

540. Escolias. — 1. De una manera análoga se demostrarían los otros casos de igualdad, á saber :

Dos tetraedros son iguales cuando tienen una cara igual adyacente á diedros respectivamente iguales y semejantemente dispuestos; la superposición se hace directamente como en el caso anterior.

Dos tetraedros son iguales cuando tienen tres caras respectivamente iguales y dispuestas de la misma manera; la igualdad de las tres caras trae consigo la igualdad de los diedros comprendidos, lo que permite la superposición.

II. Dos poliedros iguales pueden descomponerse en un mismo número de tetraedros respectivamente iguales y semejantemente dispuestos.

4. — ÁREA DE LA PIRÁMIDE.

541. Teorema. — *La superficie lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto del perímetro de la base por el apotema de la pirámide :*

$$S = \frac{1}{2} pl.$$

Porque todas las caras laterales son triángulos isósceles iguales, que tienen por altura el apotema de la pirámide, y por bases los diversos lados de la base de la pirámide

542. Escolios. — I. La superficie total de una pirámide se compone de la superficie lateral más la de la base.

II. *La superficie lateral de un tronco de pirámide regular es igual al producto de la semisuma de los perímetros de las bases, por el apotema del tronco; porque esta superficie se compone de trapecios iguales, que tienen todos por altura el apotema del tronco, y por bases los diversos lados de las bases del tronco.*

III. La superficie total del tronco de pirámide se compone de la superficie lateral más la de las dos bases.

§ V. — Poliedros cualesquiera.

543. Descomposición de un poliedro en tetraedros. — Basta unir uno de los vértices á todos los demas.

Se obtiene así unas pirámides, que después pueden descomponerse en tetraedros, por unos planos que pasan por dos aristas.

544. Poliedros iguales.

Dos poliedros son iguales :

1º *Cuando tienen todos sus ángulos sólidos respectivamente iguales, y sus caras también, y dispuestos en el mismo orden.*

2º *Cuando pueden descomponerse en el mismo número de tetraedros respectivamente iguales y dispuestos en el mismo orden.*

Es evidente que, en ambos casos, pueden coincidir.

§ VI. — Poliedros regulares.

545. Definición. — *Se llama poliedro regular el poliedro en que todas las caras son polígonos regulares iguales entre sí, y en que todos los ángulos sólidos son iguales.*



FIG. 329.

546. — Hay cinco poliedros regulares convexos, á saber :

El tetraedro, formado por cuatro triángulos equiláteros, agrupados de tres en tres.

El exaedro ó cubo, formado por seis cuadrados agrupados de tres en tres.

El octaedro, formado por ocho triángulos equiláteros de cuatro en cuatro.

El dodecaedro, formado por doce pentágonos regulares agrupados de tres en tres.

El icosaedro, formado por veinte triángulos equiláteros agrupados de cinco en cinco.

547. Teorema. — *No puede haber más que cinco poliedros regulares convexos.*

Para poder formar un ángulo sólido convexo, es necesario que la suma de las caras sea menor que cuatro rectos. Con el ángulo de 60 grados del triángulo equilátero, no se pueden formar más que tres ángulos sólidos convexos, porque seis veces 60° dan cuatro rectos. El cuadrado y el pentágono regular convexo no dan cada uno más que un solo ángulo sólido. Valiendo el ángulo del exágono regular convexo 120° , no se puede formar ángulo sólido, porque tres veces 120° dan cuatro rectos.

No puede por consiguiente haber más que cinco poliedros regulares convexos.

CAPÍTULO II

VOLUMEN DE LOS POLIEDROS

§ I. — Medida de los volúmenes

548. Definiciones. — *Se llama volumen de un cuerpo la porción de espacio que ocupa; la palabra volumen designa igualmente el número que expresa la relación de este sólido con la unidad de volumen.*

La unidad principal de los volúmenes es el *metro cúbico*.

Dos sólidos son iguales cuando pueden coincidir.

Dos sólidos son equivalentes cuando tienen el mismo volumen sin poder coincidir.

Para que dos poliedros coincidan, basta que coincidan sus vértices, porque en este caso las aristas y las caras coincidirán también.

§ II. — Volumen del prisma.

1. — LEMA FUNDAMENTAL.

549. Teorema. — *Todo prisma oblicuo es equivalente*

al prisma recto que tiene por base la sección recta del primero y por altura su arista lateral.

Sea $ABCD, A'B'C'D'$ un prisma oblicuo de base cualquiera.

Cuando se toman longitudes iguales $AL, A'L'$, y se trazan los planos $LMNP, L'M'N'P'$ perpendicularmente á las aristas, se obtiene un prisma recto cuya altura LL' es igual á la arista AA' del primero.

Para probar que los dos prismas son equivalentes, basta demostrar que los dos trozos prismáticos rectos $LMNP, ABCD$ y $L'M'N'P', A'B'C'D'$ son iguales entre sí, porque el sólido $ABCD, L'M'N'P'$ es común á los dos prismas.

Las aristas del prisma recto son iguales entre sí é iguales á las aristas del prisma oblicuo, porque $MM' = LL'$ por ser paralelas comprendidas entre planos paralelos.

Luego $MM' = LL' = AA' = BB'$; quitando la parte común BM' , se tiene

$$MB = M'B'$$

del mismo modo $NC = N'C'$ y $PD = P'D'$.

Las secciones rectas son iguales por ser secciones paralelas de un mismo prisma.

Coloquemos los dos sólidos uno sobre otro, haciendo coincidir los polígonos iguales $L'M'N'P'$ y $LMNP$; la recta $L'A'$, perpendicular á la sección é igual á LA , coincide con esta línea. Así el vértice A' cae en el punto A , B' en B , C' en C , etc. Los dos trozos son pues iguales; luego el prisma recto es equivalente al oblicuo.

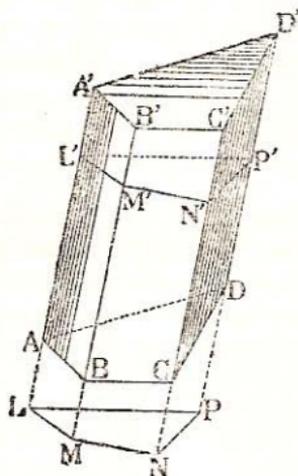


FIG. 330.

2. — VOLUMEN DE PARALELEPÍPEDO RECTANGULO.

550. Teorema. — Los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos de la misma base son entre sí como las alturas de estos paralelepípedos.

Sean P y P' dos paralelepípedos rectángulos que tienen la misma base B , y cuyas alturas son h y h' .

Vamos á demostrar que se tiene $\frac{P}{P'} = \frac{h}{h'}$.

1º Consideramos primeramente el caso en que las alturas sean **conmensurables**, es decir que tengan una medida común contenida, por ejemplo, 3 veces en h y 5 veces en h' ; se tiene :

$$\frac{h}{h'} = \frac{3}{5}$$

Si, por los puntos de división, se trazan planos paralelos á las bases, los dos sólidos quedan divididos respectivamente, el uno en 3 y el otro en 5 paralelepípedos rectángulos, todos iguales por ser sobreponibles; se tiene pues :

$$\frac{P}{P'} = \frac{3}{5} \text{ y en consecuencia } \frac{P}{P'} = \frac{h}{h'}$$

2º Si las alturas son **incomensurables**, llevemos el paralelepípedo P sobre el grande P' , y dividamos h' en un número cualquiera n de partes iguales. El punto F se encuentra entre dos puntos de división, por ejemplo entre el m^o y el punto siguiente, marcado por $m+1$.

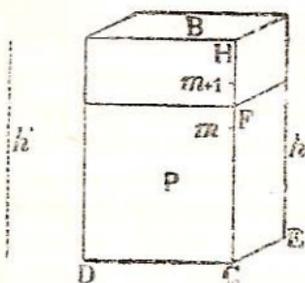


Fig. 331.

Se tiene pues $\frac{m}{n} < \frac{CF}{CH} < \frac{m+1}{n}$

Si, por los puntos de división, se trazan planos paralelos á las bases, el paralelepípedo P' queda dividido en n paralelepípedos iguales por ser sobreponibles, y el paralelepípedo P es mayor que m de estos paralelepípedos parciales, y menor que $m+1$ de estos mismos paralelepípedos.

Se tiene pues $\frac{m}{n} < \frac{P}{P'} < \frac{m+1}{n}$ ó $< \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$.

En ambos casos, las razones extremas difieren $1/n$; por consiguiente, si se divide CH en un gran número de partes iguales, la diferencia $1/n$ pudiendo llegar á ser tan pequeña como se quiera, tenderá hacia cero; y en todos casos se tiene la proporción.

$$\frac{P}{P'} = \frac{CF}{CH} \text{ ó } \frac{P}{P'} = \frac{h}{h'}$$

551. Teorema. — Dos paralelepípedos rectángulos P y P' de la misma altura h son entre sí como sus bases B y B'.

Sean a y b, a' y b' las dimensiones de las bases; concibamos un tercer paralelepípedo rectángulo P'' que tenga por dimensiones a y b'.

Se tiene
$$\frac{P}{P''} = \frac{b}{b'} \text{ y } \frac{P''}{P'} = \frac{a}{a'}$$

De donde
$$\frac{PP''}{P''P'} = \frac{ab}{a'b'} \text{ ó } \frac{P}{P'} = \frac{B}{B'}$$

552. Teorema. — Dos paralelepípedos rectángulos P y P' son entre sí como los productos de las bases B y B' por las alturas h y h'.

Concibamos un tercer paralelepípedo rectángulo P'' que tenga B por base y h' por altura. Se tiene :

$$\frac{P}{P''} = \frac{h}{h'} \text{ y } \frac{P''}{P'} = \frac{B}{B'}, \text{ de donde } \frac{PP''}{P''P'} = \frac{Bh}{B'h'} \text{ ó } \frac{P}{P'} = \frac{Bh}{B'h'}$$

553. Escolio. — Dos paralelepípedos rectángulos son entre sí como los productos de sus tres dimensiones. Porque, si se reemplazan B y B' por sus valores ab y a'b', se tiene :

$$\frac{P}{P'} = \frac{abh}{a'b'h'}$$

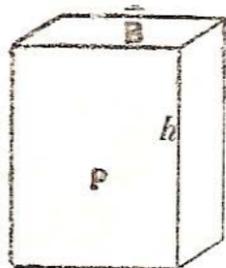


FIG. 332

554. Teorema. — El volumen de un paralelepípedo rectángulo P es igual al producto de su base B por su altura h, si se toman por unidades de volumen y de superficie el

cubo y el cuadrado construidos sobre la unidad de longitud

Se tiene en efecto $\frac{P}{1} = \frac{B \times h}{1 \times 1}$.

$$\text{ó } \frac{P}{1} = \frac{B}{1} \times \frac{h}{1} \text{ luego } P = Bh.$$

3. -- VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO RECTO.

555. Teorema. — *El volumen de un paralelepípedo recto es igual al producto de su base por su altura.*

Sea BH un paralelepípedo recto que tenga por base un paralelogramo cualquiera ABCD

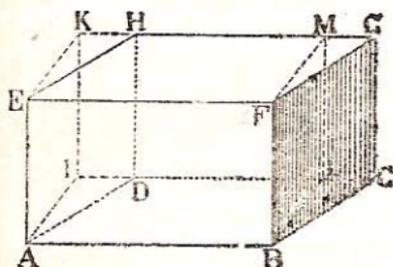


Fig. 335.

Tracemos los planos AK y BM perpendiculares á las caras paralelas AF y DG. Los triángulos ADI y BCL son iguales porque tienen un ángulo A igual á B formado por lados respectivamente iguales; luego los prismas rectos ADIK y BCLM son iguales.

Por lo tanto, el paralelepípedo ABCDHE es equivalente al paralelepípedo rectángulo ABLIK, que tiene la misma altura y una base equivalente; luego tanto en uno como en otro, *el volumen es igual al producto de la base por la altura.*

556. Escolio. — *Dos paralelepípedos que tienen bases equivalentes e igual altura son equivalentes.*

4. -- VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO CUALQUIERA.

557. Teorema. — *El volumen de un paralelepípedo cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Sea ABCDFEGL un paralelepípedo cualquiera.

Por los extremos A y D de una misma arista, tracemos los planos AB'F'L' y DC'E'G' perpendiculares á AD. El prisma dado es equivalente al prisma recto que tuviera por base AB'F'L' y por altura AD.

Los volúmenes de los dos prismas son pues iguales. Ahora bien si, en el paralelogramo de la sección recta, bajamos una perpendicular AH sobre B'F', esta recta AH será perpendicular al plano B'CE'F'.

La superficie de la sección recta A'B'F'L' queda determinada por $B'F' \times AH$.

El volumen del prisma recto, y por consiguiente, el del prisma oblicuo es pues :

$$B'F' \times AH \times AD.$$

Pero la recta B'F' de la sección recta es perpendicular á B'C'; por otra parte el paralelogramo BCEF es equivalente al rectángulo B'CE'F', porque estas dos figuras son respectivamente iguales á las bases superiores, equivalentes, ADGL y ADG'L'; luego $B'F' \times AD$ ó $B'F' \times BC$ expresa la superficie de la base BCEF del prisma oblicuo, cuya altura es AH.

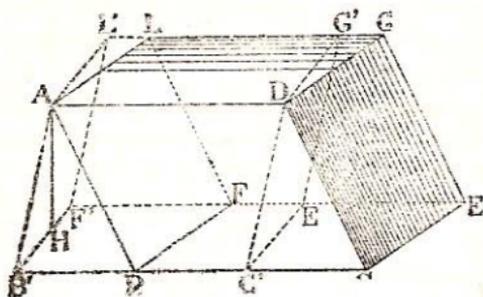


FIG. 334.

5. — VOLUMEN DEL PRISMA.

558. Teorema. — *El plano trazado por las aristas opuestas de un paralelepípedo divide á este sólido en dos prismas triangulares equivalentes.*

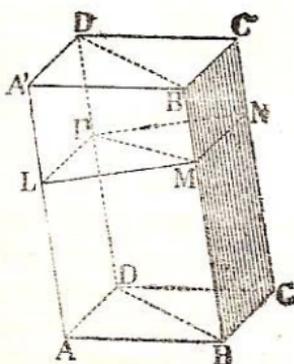


FIG. 335.

Sea ABCD, A'B'C'D' un paralelepípedo oblicuo, y B'BDD' el plano diagonal considerado.

Tracemos la sección recta LMNP.

Este paralelogramo está dividido en dos triángulos iguales por el plano diagonal.

Ahora bien, el prisma triangular oblicuo que tiene el triángulo

ABD por una de sus bases, y AA' por arista es equivalente al prisma recto que tuviera LMP por base y AA' por altura (n° 549).

Del mismo modo, el prisma que tiene BCD por una de sus bases es equivalente al prisma recto que tuviera MNP por base y CC' por altura.

Pero los dos prismas rectos son iguales, por tener bases iguales y la misma altura (n° 522); luego los dos prismas triangulares oblicuos son equivalentes entre sí.

559. Teorema. — *El volumen de un prisma cualquiera tiene por medida el producto de su base por su altura.*

1° Prisma triangular.

Sea el prisma triangular que tiene por bases ABC y DEF.

Prolonguemos el plano de estas bases; por la arista BE, tracemos un plano paralelo á la cara ACFD, y por la arista CF un plano paralelo á la cara ABED. Sea FH la perpendicular bajada del punto F sobre el plano de la base inferior.

Formamos así un paralelepípedo doble del prisma dado, que tiene la misma altura y una base ABIC doble de ABC (n° 558).

Como el volumen del paralelepípedo está expresado por $ABIC \times FH$, el volumen del prisma triangular que es la mitad se expresará por

$$\frac{ABIC}{2} \text{ ó } ABC \times FH, \text{ luego}$$

$$V = Bh.$$

2° Prisma de base cualquiera.

Sea un prisma que tenga por base el polígono ABCDEF, y GH ó h por altura.

Descompongamos la base en triángulos, y tracemos

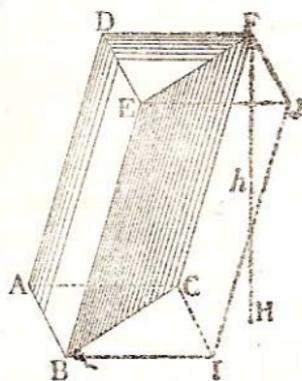


Fig. 336.

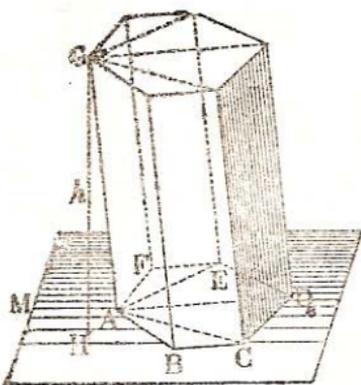


Fig. 337.

planos por la arista AG y cada diagonal AC, AD, AE.

El prisma dado queda descompuesto en prismas triangulares de igual altura. El volumen total quedará expresado por

$$ABC \times h + ACD \times h + ADE \times h + AEF \times h.$$

Sacando la altura como factor común, se tiene

$$V = ABCDEF \times GH \text{ ó } V = Bh.$$

560. Corolarios. — 1º *Dos prismas de igual altura y de bases equivalentes son equivalentes*; porque los volúmenes están expresados por los productos de números respectivamente iguales;

2º *Dos prismas cualesquiera son entre sí como los productos de las bases por las alturas*;

3º *Dos prismas de bases equivalentes son entre sí como las alturas, y dos prismas de igual altura entre sí como las bases.*

561. Teorema. — *El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la sección recta por una arista lateral.*

Sea AC un prisma oblicuo cualquiera. Prolonguemos las aristas laterales abajo de la base AB; partiendo de un punto E tomado á voluntad sobre una de las aristas, tomemos una longitud EH igual á la arista lateral AD, y por los puntos E y H, tracemos los planos EF y HG perpendiculares á las aristas laterales.

El prisma oblicuo ABCD es equivalente al prisma recto EFGH (nº 548), y, tanto para uno como para el otro, el volumen es igual á la sección recta EF multiplicada por EH ó AD.

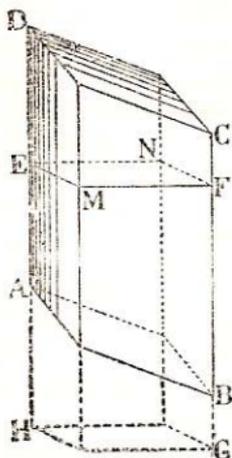


Fig. 338.

562. Corolario. — *En un prisma cualquiera el producto de la base por la altura es igual al producto de la sección recta por la arista lateral.*

De donde se sigue que *la sección recta es á la base como la altura es á la arista lateral.*

§ III. — Volumen de la pirámide.

1. — VOLUMEN.

563. Lema. — *La pirámide triangular ABCD es el límite hacia el cual tiende la suma de los prismas inscritos, cuando se divide la arista AD en un número más y más grande de partes iguales.*

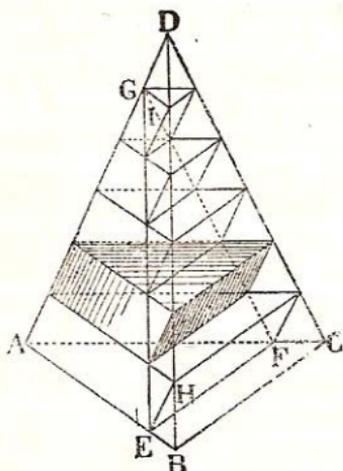


FIG. 339.

El plano EFG, trazado por EF, paralelamente á la cara BCD, contiene las aristas homólogas á EF, en la base inferior de los prismas inscritos, porque la arista AD ha sido dividida en partes iguales.

La suma de los prismas es menor que la pirámide ABCD, y mayor que la pirámide AEFB.

Ahora bien, la diferencia de las dos pirámides disminuye cuando la magnitud EB decrece; en el límite, cuando se divide AD en una infinidad de partes iguales, BE se aproxima á cero; por consiguiente la diferencia de las dos pirámides se aproxima también á cero, y el límite de la suma de los prismas inscritos es la pirámide.

564. Teorema. — *Dos pirámides de igual altura y de bases equivalentes son equivalentes.*

Sean las dos pirámides P y P' que tienen la misma altura h , y bases equivalentes B y B'.

Supongamos estas dos pirámides cortadas por un mismo número de planos paralelos á las bases, y equidistantes entre sí. Todas las secciones así determinadas son equivalentes de dos en dos (nº 538).

Tomemos dos secciones correspondientes m y m' como bases de dos prismas M y M' que tienen las aristas laterales paralelas á SA y S'A', y la altura igual á la distancia de los planos secantes. Estos dos prismas son

equivalentes por tener igual altura y bases equivalentes (n° 560); y lo mismo sucede con todos los prismas análogos que se pueden formar en los dos sólidos.

Así la suma de los prismas formados en P es igual á

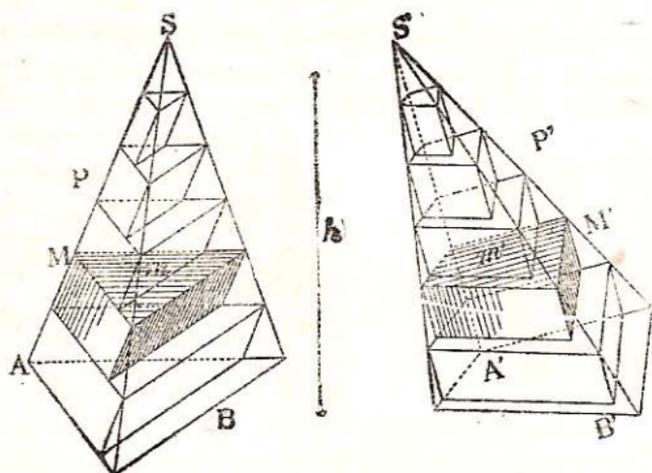


FIG. 340.

la suma de los prismas formados en P', y esto es cierto cualquiera que sea el número de los planos secantes.

Ahora bien, si el número de estos planos aumenta indefinidamente, el conjunto de los prismas formados en P tiene por *límite* el volumen de esta primera pirámide, y el conjunto de los prismas formados en P' tiene por *límite* el volumen de esta segunda pirámide.

Siendo las dos sumas de prismas constantemente iguales entre sí durante su variación, sus límites P y P' también son iguales

565. Corolarios. — 1° El *vertice* de una pirámide puede moverse en un plano paralelo á la base sin que el volumen se altere;

2° Dos trozos de pirámides de igual altura y de bases respectivamente equivalentes son equivalentes.

En efecto, si SB y S'B' son

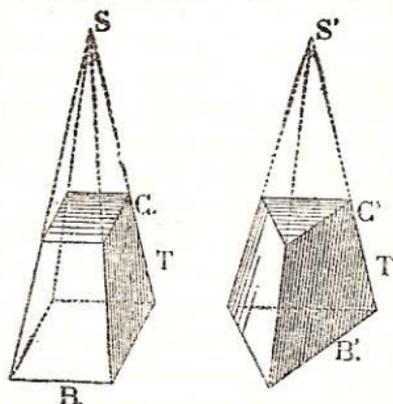


FIG. 341.

dos pirámides de igual altura y de bases equivalentes B y B' , las secciones C y C' hechas á alturas iguales son equivalentes (nº 538); las pirámides totales SB y $S'B'$ siendo equivalentes, así como las pirámides parciales SC y $S'C'$ lo mismo sucede con los trozos T y T' .

566. Teorema. — *Cualquier prisma triangular puede descomponerse en tres pirámides equivalentes.*

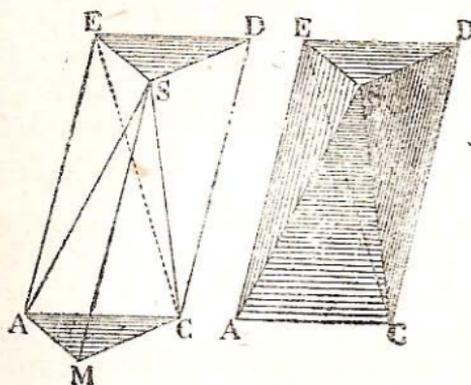


FIG. 342.

Sea $AMCDES$ un prisma triangular cualquiera. Tracemos los planos ASC y ESC .

Las dos pirámides $SAMC$ y $CDES$ son equivalentes, por tener bases iguales AMC y ESD é igual altura, que es la del prisma.

En la segunda pirámide $CDES$, se puede tomar por vértice el punto S ; las dos pirámides $SCDE$ y $SACE$ son equivalentes porque tienen por altura común la distancia del punto S al plano AD , y por bases las mitades del paralelogramo $ACDE$.

567. Corolario. — *Toda pirámide triangular es el tercio del prisma de igual base y altura.*

568. Teorema. — *El volumen de una pirámide cualquiera es igual á la tercera parte del producto de su base por su altura.*

1º Siendo una pirámide triangular la tercera parte del prisma de igual base y altura, su volumen será igual á la tercera parte del producto de la base por la altura;

2º Una pirámide cualquiera $SABCDE$ puede descomponerse en pirámides triangulares de igual altura, y cuyas bases reunidas formen la base de la pirámide total. Por tanto el volumen total es igual al tercio

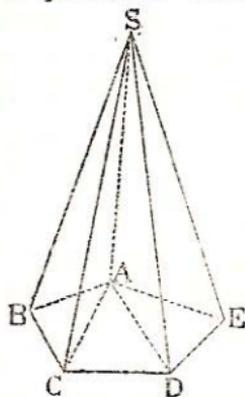


FIG. 343.

de la altura común, multiplicado por la suma de las bases, es decir por la base de la pirámide considerada

$$569. \text{ Escolios. — I. — } V = \frac{1}{3} Bh \text{ ó } \frac{Bh}{3}.$$

II. Dos pirámides cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.

III. Dos pirámides de igual altura son entre sí como sus bases, y dos pirámides de bases equivalentes son entre sí como sus alturas.

2. — APLICACIONES.

570. Problema. — Expresar el volumen del tetraedro regular en función de su arista.

Sea SABC un tetraedro regular, SH la altura, y ASD una sección hecha en el sólido por la altura SH y por el punto A. Se tiene:

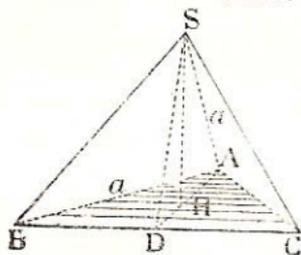


FIG. 344.

$$\text{Volumen } SABC = \frac{1}{3} \text{superficie } ABC \times SH = \frac{1}{3} BD \times AD \times SH.$$

Vamos á buscar los valores de BD, AD y SH en función de la arista a .

$$BD = \frac{1}{2} a$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \quad \overline{AD} = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$\overline{AH} = \frac{2}{3} \overline{AD} = \frac{2}{3} \times \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3} \quad \overline{AH}^2 = \frac{3a^2}{9} = \frac{a^2}{3}$$

$$\overline{SH}^2 = \overline{SA}^2 - \overline{AH}^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$SH = a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

El volumen buscado es pues:

$$\frac{1}{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \sqrt{3} \times a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ ó } \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}.$$

571. Teorema. — *Dos tetraedros que tienen un ángulo sólido igual son entre sí como los productos de las aristas que comprenden este ángulo*

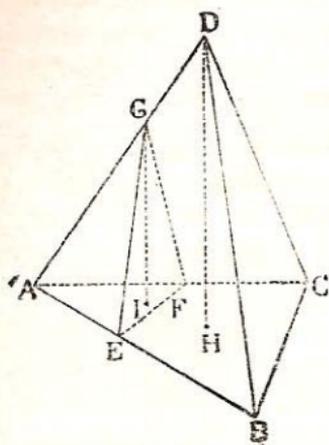


Fig. 345.

Sean ABCD ó T y AEF ó T' dos tetraedros que tienen el mismo ángulo sólido A.

Bajemos las alturas GI, DH.

Dos tetraedros son entre sí como los productos de las bases por las alturas (nº 369); luego

$$\frac{T}{T'} = \frac{BAC \times DH}{AEF \times GI}.$$

Pero las bases tienen un ángulo común, luego son entre sí en la relación de los productos de los lados que comprenden este ángulo (nº 395). Por otra parte, las alturas están en la misma relación que AD y AG, porque los triángulos ADH y AGI, son semejantes:

luego
$$\frac{T}{T'} = \frac{AB \times AC \times AD}{AE \times AF \times AG}.$$

§ IV. — Volumen de un poliedro cualquiera.

572. Método general — Se descompone el poliedro en varias pirámides cuyos volúmenes se valúan y se suman después.

§ V. — Volumen del trozo de pirámide.

573. Teorema. — *Un trozo de pirámide de bases paralelas es equivalente á la suma de tres pirámides de la misma altura que el trozo, y cuyas bases respectivas son las dos bases del trozo y su media geométrica.*

1. — TROZO TRIANGULAR.

Sea el trozo AMCDES.

Trazando los planos ASC y en seguida CSE, se descompone el trozo en tres pirámides que se pueden representar por P, P' y P". La pirámide P ó SAMC

tiene por volumen $\frac{Bh}{3}$; la pirámide P' ó CDES tiene por volumen $\frac{B'h}{3}$. Comparemos la pirámide P" ó SCAE

con cada una de las dos primeras. Considerando las pirámides P' y P" con sus vértices en el punto S, los volúmenes serán entre sí como las bases CDE y CAE; como estos triángulos tienen la misma altura, están en la relación de DE á CA; por tanto:

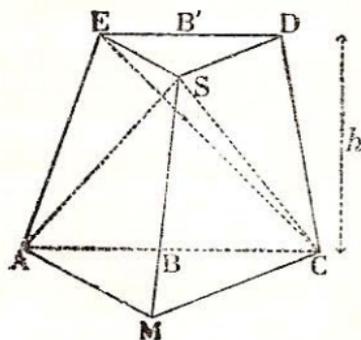


FIG. 346.

$$\frac{P'}{P''} = \frac{DE}{CA}. \quad (1)$$

Para comparar P" con P', se puede tomar E por vértice de la primera y M por vértice de la segunda; entonces las dos pirámides tienen la misma base CAS luego son proporcionales á las perpendiculares bajadas de los puntos E y M sobre la base CAS (nº 569, III): como estas perpendiculares están en la misma relación que los lados homólogos SD y MC, es decir en la relación de DE á CA, se tiene;

$$\frac{P''}{P} = \frac{DE}{CA}. \quad (2)$$

Las proporciones (1) y (2) tienen una razón común, por tanto:

$$\frac{P'}{P''} = \frac{P'}{P}, \text{ de donde } P''^2 = P \times P' \text{ ó } P'' = \sqrt{P \times P'}.$$

Así es que la tercera pirámide es media proporcio-

nal á las otras dos, luego su volumen V'' se expresará por:

$$V'' = \sqrt{\frac{Bh}{3} \times \frac{B'h}{3}} \text{ ó } V'' = \frac{h}{3} \sqrt{B \times B'}$$

$$\text{Volumen del trozo} = \frac{h}{3} (B + B' + \sqrt{B \times B'})$$

2. — TROZO DE PIRÁMIDE CUALQUIERA.

Un trozo cualquiera siendo equivalente al trozo triangular de misma altura y de bases respectivamente equivalentes, todavía se puede aplicar el teorema.

574. Método algebraico. — Sea a la altura de la pirámide total, h la altura del trozo, a' la altura de la pirámide quitada.

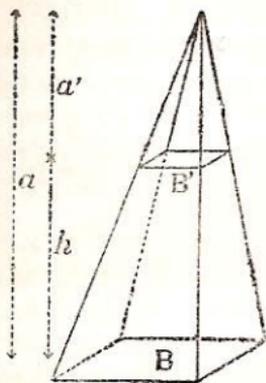


FIG. 347.

El volumen del trozo es la diferencia de las dos pirámides:

$$V = \frac{1}{3} Ba - \frac{1}{3} B'a' = \frac{1}{3} [Ba - B'a'] \quad (1)$$

$$\text{Pero, se tiene } \frac{a}{\sqrt{B}} = \frac{a'}{\sqrt{B'}}$$

$$= \frac{a - a'}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} = \frac{h}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$$

(n.º 535)

$$\text{de donde } a = \frac{h \sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} \text{ y } a' = \frac{h \sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$$

$$\text{y sustituyendo en (1) } V = \frac{1}{3} \left[\frac{Bh\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} - \frac{B'h\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} \right]$$

$$\text{ó } V = \frac{h}{3} \frac{B\sqrt{B} - B'\sqrt{B'}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}, \text{ sea, efectuando la división}$$

$$V = \frac{h}{3} [B + B' + \sqrt{BB'}] \quad (2)$$

575. Corolario. — Siendo $K = \frac{a'}{a}$, se tiene $\frac{B'}{B} = K^2$;
 $B' = K^2B$, $\sqrt{BB'} = \sqrt{BK^2B} = KB$ y la fórmula (2) toma la
 forma $V = \frac{Bh}{3} [1 + K + K^2]$.

Esta última fórmula se llama fórmula de Leonardo de Pisa.

§ VI. — Volumen del trozo de prisma.

576. Un trozo de prisma triangular es equivalente á la suma de tres pirámides que tengan por base común una de las bases del trozo, y por vértices los vértices de la otra base.

Sea el trozo de prisma $AMCDES$. Trace-
 mos los planos ASC y ESC . El sólido total
 queda dividido en tres pirámides triangu-
 lares: $SAMC$, $SCDE$
 y $SACE$.

La primera pirámi-
 de $SAMC$ tiene B por
 base y el punto S
 por vértice.

En la segunda pirá-
 mide $SCDE$, se puede transportar el vértice á M , en
 seguida el vértice E á A (n° 565), y entonces esta pirá-
 mide tiene por base AMC y por vértice el punto D .

En la tercera pirámide $SACE$, basta transportar el
 vértice S á M , y la pirámide tiene entonces por base
 AMC ó B , y por vértice el punto E .

577. Escolios. — I. Para obtener la altura de cada pi-
 rámi-
 de, basta bajar perpendiculares de los vértices D ,
 E , S sobre la base AMC .

Cuando el trozo es recto, las aristas mismas m , n , p ,
 son las alturas de las pirámides; entonces:

$$V = B \times \frac{m + n + p}{3}$$

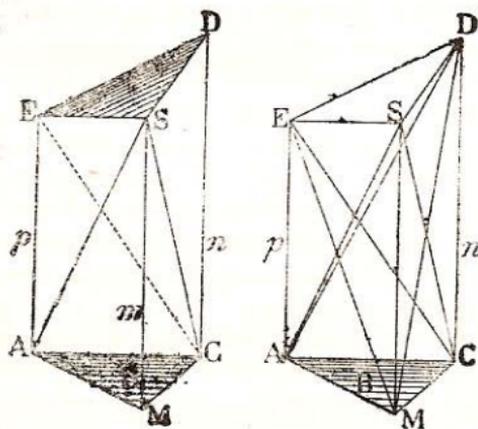


Fig. 348.

En las aplicaciones se reduce un trozo de prisma oblicuo al caso del trozo recto, procediendo como sigue:

II. Si el trozo triangular AB no tiene sus aristas laterales perpendiculares á una de las bases, se hace una sección recta S que divide al sólido en dos trozos de prismas rectos V y V' , de los que cada uno es equivalente á tres

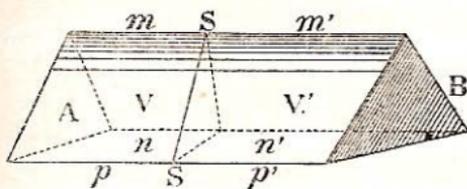


FIG. 349.

pirámides que tienen S por base, y las aristas laterales por alturas.

Las dos pirámides que tienen S por base, y por alturas respectivas m y m' , equivalen juntamente á una pirámide que tiene S por base, y por altura $m + m'$; y lo mismo sucede con las otras pirámides.

III. *El volumen de un trozo de prisma triangular es igual al producto de la sección recta por el medio aritmético de las tres aristas laterales.*

CAPÍTULO III

HOMOTECÍA EN EL ESPACIO

578. Definición. — Las definiciones dadas en el capítulo V del libro III pueden aplicarse sin modificación á las figuras en el espacio.

579. Propiedades. — I. *La figura homotética de un segmento de recta es un segmento de recta.*

El segmento y el centro de homotecia determinan un plano en el cual vale la demostración del n.º 325.

II. *Dos segmentos homólogos son paralelos y en la razón de homotecia.* Demostración del n.º 325.

III. *La figura homotética de un plano es un plano paralelo al primero.*

En efecto, si el segmento AB engendra un plano, su homólogo queda siempre paralelo á este plano y engendra un plano paralelo.

580 Consecuencias. —

I. *La figura homotética de un ángulo es un ángulo igual.*

II. *La figura homotética de un diedro es un diedro igual.*

III. *Dos poliedros homotéticos tienen sus diedros homólogos semejantes; pero dispuestos en el mismo orden, ó en orden inverso.*

IV. *Dos poliedros homotéticos pueden descomponerse en tetraedros que tienen respectivamente sus diedros iguales y sus caras semejantes.*

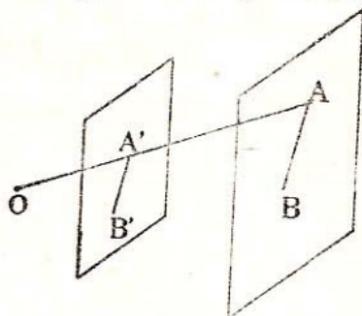


Fig. 350.

CAPÍTULO IV

SIMILITUD DE LOS POLIEDROS

581. **Definición.** — Poliedros semejantes son aquellos que pueden ser colocados en homotecia, ó tales que uno es igual á uno de los homotéticos del otro.

Los elementos homólogos son los que se corresponden cuando las figuras están en homotecia.

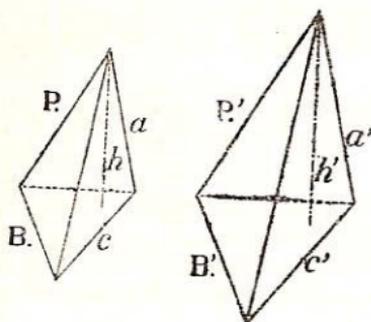
La razón de homotecia se llama razón de similitud.

582. **Propiedades.** — 1. *Dos poliedros semejantes tienen sus diedros homólogos iguales y sus caras homólogas semejantes; porque las dos figuras tienen estas propiedades cuando están en homotecia.*

2. *Dos poliedros semejantes pueden descomponerse en tetraedros respectivamente semejantes y dispuestos del mismo modo; porque se puede efectuar esta descomposición cuando las dos figuras están en homotecia.*

583. **Teorema.** — *Los volúmenes de dos poliedros semejantes son entre sí como los cubos de sus dimensiones homólogas.*

1º *Dos tetraedros semejantes.* Sean dos tetraedros semejantes P y P'; sus volúmenes respectivos están expresados por



$$\frac{1}{3} Bh \text{ y } \frac{1}{3} B'h'.$$

$$\text{luego } \frac{P}{P'} = \frac{\frac{1}{3} Bh}{\frac{1}{3} B'h'} = \frac{Bh}{B'h'}.$$

FIG. 351.

Pero las bases B y B' son entre sí como los cuadrados de las líneas homólogas (nº 393); y en los dos sólidos todas las líneas homólogas están en una misma relación (nº 579);

$$\text{luego } \frac{B}{B'} = \frac{c^2}{c'^2} = \frac{a^2}{a'^2}$$

$$\text{y } \frac{h}{h'} = \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}.$$

de donde, multiplicando miembro á miembro, se encuentra :

$$\frac{Bh}{B'h'} = \frac{c^3}{c'^3} = \frac{a^3}{a'^3}$$

$$\text{luego } \frac{3P}{3P'} = \frac{P}{P'} = \frac{c^3}{c'^3} = \frac{a^3}{a'^3}.$$

2º *Dos poliedros cualesquiera semejantes.* Sean dos poliedros semejantes cualesquiera P y P'; A, B, C, ... A', B', C', ... los tetraedros semejantes que forman estos poliedros, y finalmente, m y m' dos aristas homólogas cualesquiera.

Todas las aristas homólogas están en la relación de m á m' (nº 579), y las pirámides parciales son entre sí en la relación de m³ á m'³; por tanto se tiene :

$$\frac{P}{P'} = \frac{A + B + C \dots}{A' + B' + C' \dots} = \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \dots = \frac{m^3}{m'^3}.$$

584. Teorema. — *Todo plano paralelo á la base de una pirámide determina una nueva pirámide semejante á la primera.*

Sea P una pirámide cualquiera, y sea EG una sección paralela á la base AC . Se trata de demostrar que las dos pirámides $SEFGL$ y $SABCD$ son semejantes.

En efecto, las dos figuras son homotéticas con relación al centro S .

585. Escolio. — Si se suponen las aristas prolongadas indefinidamente, el teorema es cierto cualquiera que sea la posición del plano secante; si este plano se traza más allá del vértice, los elementos de las dos pirámides dispuestas en un orden inverso, son simétricos con relación al vértice.

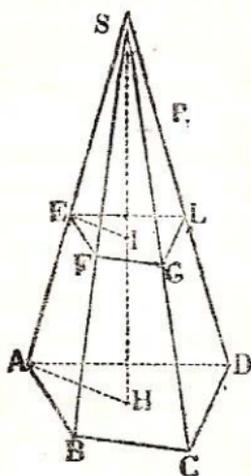


FIG. 352.

586. Teorema. — *Dos tetraedros son semejantes cuando tienen un diedro igual formado por caras respectivamente semejantes, y semejantemente dispuestas.*

Sean los dos tetraedros T y T' que tienen el diedro AB igual al diedro EF , la cara ABD semejante á EFH , y la cara ABC semejante á EFG . Tomemos la longitud EI igual á AB , y tracemos el plano IKL paralelo á FGH . El tetraedro T'' así determinado es semejante á T' (n° 584), y basta probar la igualdad de los dos tetraedros T y T'' .

Los triángulos ABD y EIL , semejantes cada uno al triángulo EFH , son semejantes entre sí; y como el lado AB es igual á EI , estos dos triángulos son iguales. Del mismo modo el triángulo $ABC = EIK$.

Así es que los dos tetraedros T y T'' son iguales por tener un diedro igual formado por caras respectiva-

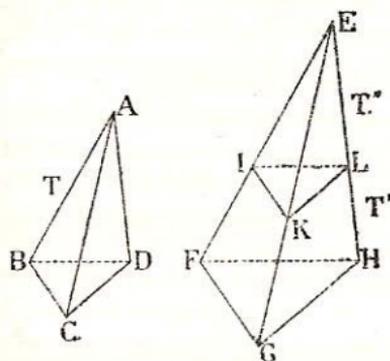


FIG. 353.

mentos iguales (n° 540), y el tetraedro T es semejante á T' , que es lo que se quería demostrar.

587. Escolio. — De una manera análoga se demostrarían los otros casos de semejanza, á saber :

Dos tetraedros son semejantes cuando tienen una cara semejante adyacente á diedros respectivamente iguales y semejantemente dispuestos ;

Dos tetraedros son semejantes cuando tienen tres caras respectivamente semejantes, y semejantemente dispuestas.

588. Primer caso de similitud de los poliedros. — Dos

poliedros (P y P') son semejantes cuando sus ángulos sólidos son respectivamente iguales y sus caras homólogas son semejantes y dispuestas en el mismo orden.

Sea K la razón de similitud. Tomando un centro O cualquiera, podemos construir el poliedro P'' , homotético de P , y en la razón K . P'' es igual P' , por tener los ángulos sólidos iguales y las caras iguales, y dispuestas en el mismo orden ; (n° 544).

Luego P' es semejante á P .

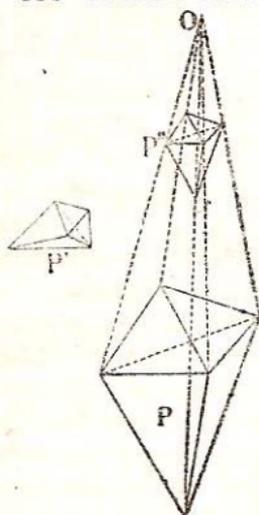


FIG. 354.

589. Segundo caso. — Dos poliedros (P y P') son semejantes cuando pueden descomponerse en el mismo

número de tetraedros respectivamente semejantes y dispuestos en el mismo orden.

Construyendo P'' como en el caso anterior, se ve que P'' y P' son iguales, por ser formados del mismo número de tetraedros respectivamente iguales y dispuestos en el mismo orden.

Luego P y P' son semejantes.

LIBRO VII

LOS TRES CUERPOS REDONDOS

PRELIMINARES.

590. Se llama **sólido de revolución** el cuerpo engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje situado en el mismo plano, y que no corta á la figura generatriz.

Se llama **superficie de revolución** la superficie engendrada por una línea que gira alrededor de un eje.

La figura que gira se llama **figura generatriz**; cada uno de sus puntos describe una circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje y cuyo centro está sobre el eje.

Un sólido de revolución es **simétrico** con relación á su eje.

Los sólidos de revolución más importantes son : el cilindro, el cono y la esfera ; estos son los tres cuerpos redondos.

CAPÍTULO I

EL CILINDRO

§ I. — Cilindro de revolución.

1. — DEFINICIÓN.

591. **Definición.** — Se llama **cilindro de revolución** o cilindro circular recto, el sólido engendrado por la revo-

ucción completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.



Fig. 355.

El lado h alrededor del cual gira el rectángulo generador es á la vez *eje* y *altura*.

El lado l opuesto al eje se llama *generatriz* ó *lado* del cilindro; durante el movimiento, este lado engendra la *superficie lateral* del cilindro.

Los otros dos lados del rectángulo generador son los *radios* del cilindro, y engendran los dos círculos que sirven de bases al sólido. Estas bases son *perpendiculares* al eje.

Un trozo de cilindro es la porción de cilindro comprendida entre la base y una sección no paralela á esta base.

592. Observación. — *El cilindro de revolución es el límite del prisma regular en el cual el número de caras aumenta indefinidamente; y puede también considerarse como un prisma regular de una infinidad de caras.*

De ahí resulta que *se pueden aplicar al cilindro las propiedades del prisma regular.*

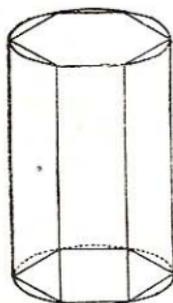


Fig. 356.

2. — SUPERFICIE.

593 Teorema. — *La superficie lateral de un cilindro de revolución es igual al producto de la circunferencia de la base por la altura del cilindro.*

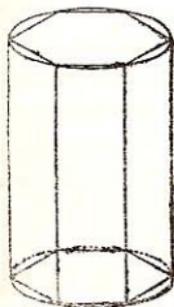


Fig. 357.

La superficie lateral del cilindro de revolución es el límite de la superficie lateral de un prisma inscrito cuyo número de caras aumenta indefinidamente, lo mismo que la circunferencia de la base es el límite del polígono regular inscrito (nº 364); luego la superficie lateral se obtiene multipli-

cando la circunferencia por la altura del cilindro:

$$S_1 = 2 \pi r h.$$

594. **Escolio.** — I. La superficie total del cilindro de revolución se compone de las dos bases y de la superficie lateral.

$$S_t = 2 \pi r^2 + 2 \pi r h \text{ ó } S_t = 2 \pi r (r + h).$$

II. Dos cilindros son semejantes cuando los rectángulos generadores son semejantes. En dos cilindros semejantes, la razón de las superficies homólogas es igual al cuadrado de la razón de similitud.

En efecto, $\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'} = \frac{r + h}{r' + h'} = K$

y $\frac{S}{S'} = \frac{2 \pi r^2 (r + h)}{2 \pi r'^2 (r' + h')} = \frac{r}{r'} \times \frac{r + h}{r' + h'} = K^3.$

3. — VOLUMEN.

595. **Teorema.** — El volumen de un cilindro de revolución es igual al producto de su base por su altura.

El cilindro es el límite del prisma inscrito (nº 592), luego el volumen del cilindro se obtiene multiplicando la base por la altura:

$$V = \pi r^2 h.$$

596. **Corolario.** — La razón de los volúmenes de dos cilindros semejantes es igual al cubo de la razón de similitud.

En efecto, $\frac{r}{r'} = \frac{h}{h'} = K.$

y $\frac{V}{V'} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r'^2 h'} = \frac{r^2}{r'^2} \frac{h}{h'} = K^2 \cdot K = K^3.$

4. — TROZO DE CILINDRO DE REVOLUCIÓN.

597. **Teorema.** — En un trozo de cilindro de revolución,

la superficie lateral es igual al producto de la circunferencia de la base por el eje del trozo.

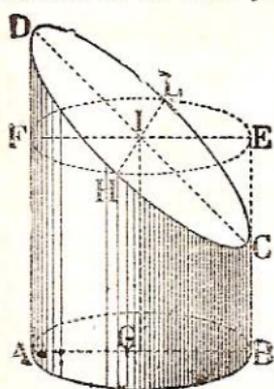


Fig. 358.

Sea el trozo cilíndrico ABCD. Por el punto I, extremidad superior del eje, concibamos el plano EF paralelo á la base AB, y prolonguemos la superficie lateral en HCEL hasta encontrar este plano.

Hagamos girar el sólido HLFD al rededor de HL, hasta que el semicírculo HLF coincida con HLE; el triángulo rectángulo IFD coincidirá con IEC; los diedros opuestos por la arista HL coincidirán así como los dos sólidos. LIIFD y HLEC.

De ahí resulta que el trozo dado es equivalente, tanto por la superficie lateral como por el volumen, á un cilindro que tuviera el círculo AB por base y el eje GI por altura.....

598. Escolio. — El eje GI de un trozo de cilindro de revolución es igual á la semisuma de dos generatrices diametralmente opuestas.

599. Teorema. — El volumen de un trozo de cilindro de revolución es igual al producto de la base por el eje.

Porque este sólido equivale al cilindro recto que, con la misma base, tuviera el eje por altura [véase la demostración relativa á la superficie lateral (nº 597)].

600. Escolios. — Un cilindro de revolución EC puede ser truncado por las dos extremidades.

I. Su volumen es igual a la sección recta AB multiplicada por el eje HK. Porque una de las partes tiene por volumen el círculo AB multiplicado por IK, y la otra, el mismo círculo multiplicado por IH.

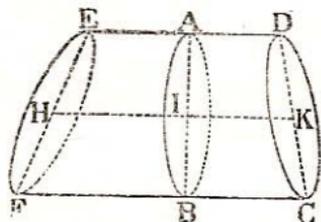


Fig. 359.

II. El eje HK es igual á la semisuma de dos generatrices diametralmente opuestas;

porque en el plano que contiene estas tres líneas, las generatrices son las bases de un trapecio, y el eje la base media.

§ II. — Cilindro cualquiera.

601. En general, se llama superficie cilíndrica cualquier superficie engendrada por una recta indefinida AE que se mueve en el espacio, permaneciendo siempre paralela á sí misma.

Un cilindro cualquiera es el sólido comprendido entre dos planos paralelos, y terminado lateralmente por una superficie cilíndrica cerrada. Se le puede considerar como un prisma cualquiera de una infinidad de caras.

En un cilindro cualquiera se llama sección recta toda sección hecha perpendicularmente á la generatriz.

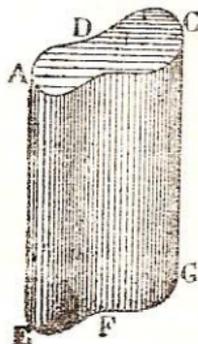


FIG. 360.

602. Si las generatrices de un cilindro son cortadas por planos paralelos, las secciones obtenidas son iguales entre sí.

Cualquier sección paralela á la base del cilindro es igual á esta base.

603. Superficie. — La superficie lateral de un cilindro cualquiera se obtiene multiplicando el perímetro de la sección recta por la generatriz del cilindro.

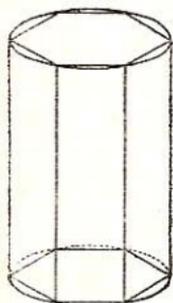


FIG. 361.

Porque esta superficie es el límite de la superficie de un prisma inscrito; como para el prisma es preciso multiplicar el perímetro de la sección recta por la arista, para el cilindro se multiplicará el perímetro de la sección recta por la generatriz del cilindro.

604. Volumen. — El volumen de un cilindro cualquiera se obtiene multiplicando la base por la altura.

El volumen del cilindro es igual también al producto de la sección recta por la generatriz.

Dos cilindros cualesquiera son entre sí como los productos de las bases por las alturas.

Dos cilindros de igual altura son entre sí como sus bases.

Dos cilindros de igual base son entre sí como sus alturas.

CAPÍTULO II

EL CONO

§ I. — El cono de revolución.

1. — DEFINICIONES.

605. *Se llama cono de revolución el sólido engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos.*

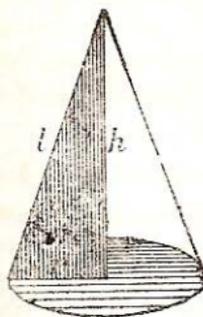


FIG. 362.

El lado h , alrededor del cual gira el triángulo rectángulo generador, es á la vez el *eje* y la *altura* del cono.

La hipotenusa l es la *generatriz* ó el lado del cono; durante el movimiento este lado

engendra la *superficie lateral* del cono.

El otro lado r del triángulo generador es el *radio* del cono; engendra el *círculo* que sirve de base al sólido. La base es perpendicular al eje.

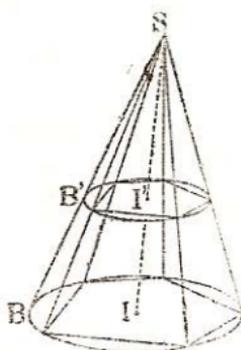


FIG. 363.

El cono de revolución es el límite de la pirámide regu-

lar cuyo número de caras laterales aumenta indefinidamente.

606. — Trozo de cono de revolución de bases paralelas es la porción de cono de revolución comprendida entre la base y una sección paralela á la misma base.

El trozo de cono de revolución de bases paralelas puede considerarse engendrado por el trapecio rectángulo ABCD que gira alrededor del lado DC, perpendicular á las bases. DC es la altura, y AB la generatriz

El trozo de cono de revolución de bases paralelas es el límite hacia el cual tiende el trozo de pirámide regular cuando el número de caras laterales aumenta indefinidamente; y puede considerarse como un trozo de pirámide regular de una infinidad de caras.

De ahí resulta que se pueden aplicar al trozo de revolución las propiedades del trozo de pirámide regular.

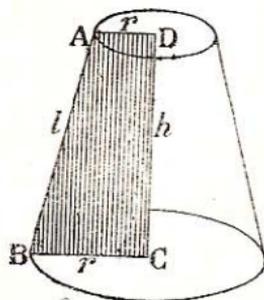


FIG. 364.

2. — SUPERFICIE.

607. Teorema. — La superficie lateral de un cono de revolución es igual á la mitad del producto de la circunferencia de la base por la generatriz.

La superficie lateral del cono es el límite de la superficie lateral de la pirámide inscrita cuyo número de caras crece indefinidamente (nº 605); luego debe multiplicarse el semiperímetro de la base por la generatriz:

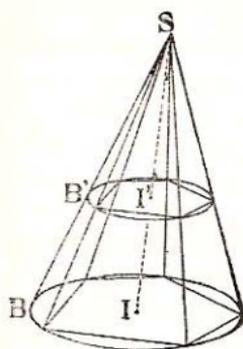


FIG. 365.

$$S_1 = \frac{2 \pi r l}{2} = \pi r l.$$

608. Escolio. — I. La superficie total se compone de la base y de la superficie lateral:

$$S_t = \pi r^2 + \pi r l = \pi r (r + l)$$

II. En dos conos semejantes la razón de las áreas homólogas es igual al cuadrado de la razón de similitud.

Los conos son semejantes cuando los triángulos generadores lo son, es decir cuando :

$$\frac{r}{r'} = \frac{l}{l'} = \frac{r+l}{r'+l'} = K.$$

La razón de las áreas es :

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi r (r+l)}{\pi r' (r'+l')} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{r+l}{r'+l'} = K^2.$$

3. — VOLUMEN.

609. Teorema. — *El volumen del cono de revolución es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

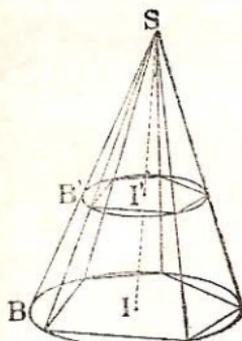


FIG. 366

El cono es el límite de una pirámide inscrita cuyo número de caras crece indefinidamente (n° 605); luego el volumen se obtiene multiplicando la base por el tercio de la altura :

$$V = \pi r^2 \times \frac{h}{3} \quad \text{ó} \quad \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

610. Escolio. — I. *El volumen de un cono cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

II. *En dos conos semejantes, la razón de los volúmenes es igual al cubo de la razón de similitud.*

En efecto :

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} \pi r^2 h}{\frac{1}{3} \pi r'^2 h'} = \frac{r^2 h}{r'^2 h'} = K^3.$$

III. *Un cono cualquiera es el tercio del cilindro de igual base y de igual altura.*

En efecto, sea el rectángulo ABCD que gira alrededor del eje AB.

El cilindro engendrado por este rectángulo tiene por volumen $\pi \overline{BC}^2 \times AB$.

El cono engendrado por el triángulo ABC tiene por volumen $\pi \overline{BC}^2 \times \frac{AB}{3}$.

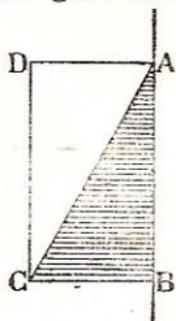


Fig. 367.

4. — TROZO DE CONO DE REVOLUCIÓN.

611. Teorema. — La superficie lateral de un trozo de cono de revolución es igual al

producto de la semisuma de las circunferencias de las bases por la generatriz.

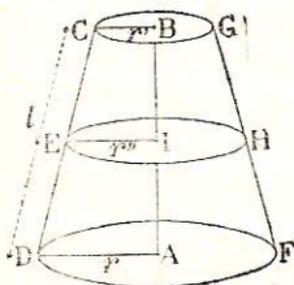


Fig. 368.

La superficie lateral del trozo de cono es el límite de la superficie lateral de un trozo de pirámide inscrito cuyo número de caras crece indefinidamente (n° 606); luego es preciso multiplicar la semisuma de los perímetros de las bases por la generatriz:

$$S_1 = \frac{2\pi r + 2\pi r'}{2} \times l \text{ ó } S_1 = \pi(r + r')l.$$

612. Escolio. — I. La superficie lateral de un trozo de cono de revolución es igual al producto de la circunferencia mediana por la generatriz.

Porque la semisuma de las circunferencias de las bases es igual á la circunferencia equidistante de estas mismas bases; se le puede llamar circunferencia mediana.

Designando por r'' el radio de la circunferencia mediana, se tiene: $S_1 = 2\pi r''l$.

II. La superficie total del trozo de cono de revolución se compone de las dos bases y de la superficie lateral (fig. 368):

$$S_1 = \pi r^2 + \pi r'^2 + \pi(r + r')l.$$

ó

$$S_1 = \pi(r^2 + r'^2 + 2r''l).$$

613. Teorema de Arquímedes. — *Un trozo de cono de revolución es equivalente á la suma de tres conos de igual altura que el trozo, y que tienen respectivamente por bases las dos bases del trozo y su media geométrica.*

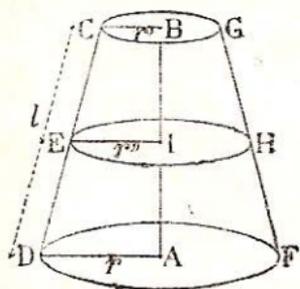


Fig. 369.

Porque se pueden aplicar las propiedades del trozo de pirámide al trozo de cono que es su límite.

614. Escolio. — Sean r y r' los radios de las bases de un trozo de cono de revolución y h su altura; las bases tienen por expresión πr^2 y $\pi r'^2$; su media geométrica es $\sqrt{\pi r^2 \times \pi r'^2}$ ó $\pi r r'$, por lo tanto se tiene :

$$V = (\pi r^2 + \pi r'^2 + \pi r r') \frac{h}{3}$$

$$\text{ó} \quad V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + r'^2 + r r').$$

615. Método algebraico. — Se puede buscar directamente el volumen del trozo de cono, considerando este sólido como la diferencia de dos conos.

Sean r, r' , los radios y d, d' las alturas de los dos conos; finalmente $d - d' = h$.

$$V = \frac{\pi}{3} (r^2 d - r'^2 d') \quad (1)$$

basta expresar d y d' en función de r, r' y h ; ahora bien

$$\frac{d}{r} = \frac{d'}{r'} = \frac{d - d'}{r - r'} = \frac{h}{r - r'}$$

luego $d = \frac{hr}{r - r'}$ y $d' = \frac{hr'}{r - r'}$

así es que: $V = \frac{\pi h}{3} \left(\frac{r^3 - r'^3}{r - r'} \right)$

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + r r' + r'^2).$$

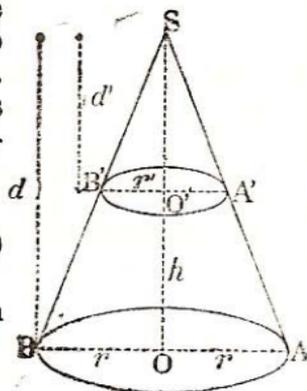


Fig. 370.

§ II. — Cono cualquiera.

616. — Se llama superficie cónica cualquier superficie engendrada por una recta indefinida AA' que se mueve en el espacio, pasando siempre por un mismo punto S .

La superficie cónica se compone de dos partes, ó mantos, opuestos por el vértice.

Un cono cualquiera es el sólido comprendido entre una superficie cónica cerrada y un plano que corta á todas las generatrices.

Se le puede considerar como una pirámide cualquiera de una infinidad de caras.

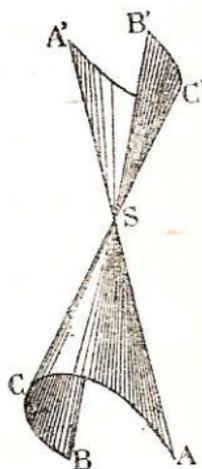


FIG. 374.

CAPÍTULO III

LA ESFERA

§ I. — Generalidades.

617. Definiciones. — La esfera es un sólido limitado por una superficie cuyos puntos todos están equidistantes de un punto interior llamado centro.

De otro modo: la esfera es el sólido engendrado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro.

En la rotación, la semicircunferencia engendra la superficie de la esfera.

El centro, el radio, el diámetro del semicírculo generador, son también el centro, el radio y el diámetro de la esfera.

Cualquier recta trazada por el centro de la esfera y terminada á uno y otro lado de su superficie, es un diámetro.

1. — CÍRCULOS TRAZADOS EN LA ESFERA.

618. Teorema. — *Cualquier sección plana de una esfera es un círculo.*

Sea MN un plano cualquiera que corte la esfera de centro O. Tracemos la recta OI perpendicular al plano secante; los radios OA, OB, OC, en diversos puntos de la intersección del plano M con la superficie de la esfera, y las rectas IA, IB, IC.

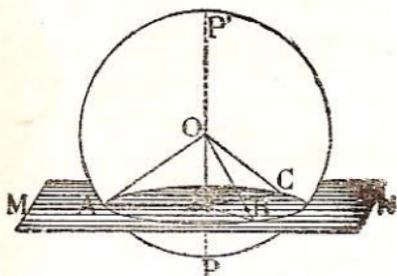


FIG. 372.

Siendo los radios OA, OB, OC oblicuas iguales, se tiene $IA = IB = IC$ (n.º 457, 2.º); así es que el punto I está equidistante de todos los puntos de la línea ABC; luego esta línea es una circunferencia, y la sección un círculo.

619. Escolias. — I. **Círculo máximo** es una sección cuyo plano pasa por el centro de la esfera, y **círculo menor** es una sección cuyo plano no pasa por el centro de la esfera.

Todos los círculos máximos de una misma esfera son iguales.

II. Se llaman **polos** de un círculo de la esfera las extremidades del diámetro perpendicular á este círculo. Los puntos P y P' son los polos del círculo ABCI.

Cada polo de un círculo está equidistante de los diferentes puntos de la circunferencia de dicho círculo, y la distancia común es la distancia polar de esta circunferencia.

III. Para describir arcos sobre la superficie de una esfera, se emplea un compás de piernas curvas.

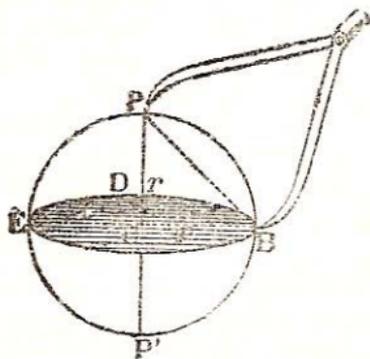


FIG. 373.

Desde un mismo polo, se pueden describir una infinidad de círculos, todos ellos paralelos por ser perpendiculares á la línea de los polos.

IV. Para describir, sobre una esfera, un arco de círculo máximo, es preciso tomar una distancia polar igual á la cuerda de un cuadrante; es decir, una distancia igual á $r\sqrt{2}$.

2. — PLANO TANGENTE Á LA ESFERA.

620. Definición. — *Un plano es tangente á una esfera, cuando no tiene más que un punto común con ella.*

621. Teorema. — *Todo plano perpendicular en la extremidad de un radio de una esfera es tangente a esta esfera.*

Sea MN un plano perpendicular en la extremidad del radio OI (fig. 374).

Siendo el plano MN perpendicular en la extremidad del radio OI, este radio es también perpendicular al plano MN; cualquiera otra recta OK es oblicua, y por consiguiente mayor que OI. El plano MN no tiene pues más que el punto I común con la esfera; luego es tangente a dicha esfera.

622. Recíproca. — *Todo plano tangente á una esfera es perpendicular al radio que termina en el punto de contacto.*

Sea MN un plano tangente á la esfera O, y sea OI el radio trazado por el punto de contacto.

Siendo el punto I el único punto común al plano y á la esfera, la distancia OK es mayor que OI; luego OI es perpendicular á este plano por ser la recta más corta que se puede bajar del punto O al plano.

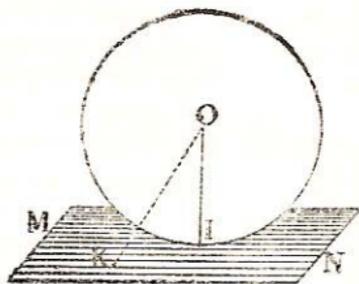


Fig. 374.

623. Escolios. — I. *Por un punto dado sobre la esfera, no se puede trazar más que un solo plano tangente;*

II. Por un punto dado fuera de la esfera, se pueden trazar una infinidad de planos tangentes á dicha esfera.

3. — POSICIONES RELATIVAS DE DOS ESFERAS.

624. Definiciones. — *Dos esferas son secantes cuando sus superficies tienen varios puntos comunes.*

Dos esferas son tangentes cuando sus superficies no tienen más que un punto común. Dos esferas pueden ser tangentes exterior ó interiormente.

625. Teorema. — *La intersección de dos esferas es un círculo, y la línea de los centros es perpendicular al plano de este círculo, y pasa por su centro.*

Sean A y B los círculos generadores de dos esferas, siendo EF el eje de revolución.

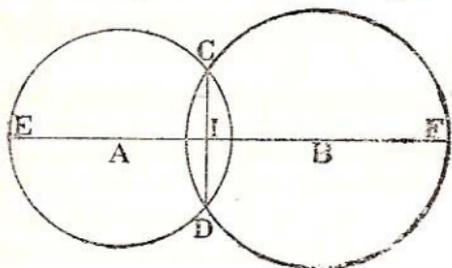


Fig. 375.

La línea de los centros es eje de simetría de la figura.

Luego, cuando la figura gira, la recta CI engendra un círculo, y el punto C una circunferencia que es

la intersección de las dos esferas.

Luego, las posiciones relativas de dos esferas son idénticas á las posiciones relativas de dos circunferencias.

Siendo d la distancia de los centros, y r y r' los radios:

- 1° $d > r + r'$, las esferas son exteriores;
- 2° $d = r + r'$, las esferas son tangentes exteriormente;
- 3° $r - r' < d < r + r'$, las esferas son secantes;
- 4° $d = r - r'$, las esferas son tangentes interiormente;
- 5° $0 < d < r - r'$, las esferas son interiores;
- 6° $d = 0$, las esferas son concéntricas.

§ II. — Problemas con relacion á la esfera.

626. Problema. — *Hallar el radio de una esfera dada.*

1.º medio. — Desde un punto P, tomado como polo,

se describe un círculo cualquiera ABC, sobre el cual se marcan arbitrariamente tres puntos C, D, E.

Con las distancias CD, CE, DE, que se toman por medio del compás esférico, se construye un triángulo igual á CDE, y se circunscribe un círculo á este triángulo.

El círculo así obtenido es igual al círculo menor ADBC, y su radio es igual á IB.

Se puede entonces reproducir el triángulo PBP' rectángulo en B, porque se conoce la altura BI y el lado BP. La hipotenusa PP' es el diámetro de la esfera.

2º medio. — Desde dos puntos cualesquiera A y B, tomados como polos, se describen sobre la esfera arcos que determinan tres puntos, C, D, E, cada uno de ellos equidistante de los dos puntos A y B.

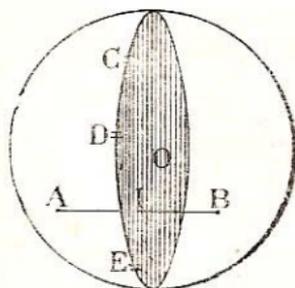


FIG. 377.

Estos tres puntos determinan un plano perpendicular á la mitad de la cuerda AB; y siendo este plano el lugar de los puntos equidistantes de A y de B, pasa necesariamente por el centro y corta á la esfera según un círculo máximo.

Desde luego basta medir las distancias CD, CE, DE, y construir un triángulo con estas tres distancias; el radio del círculo circunscrito á este triángulo será el radio de la esfera.

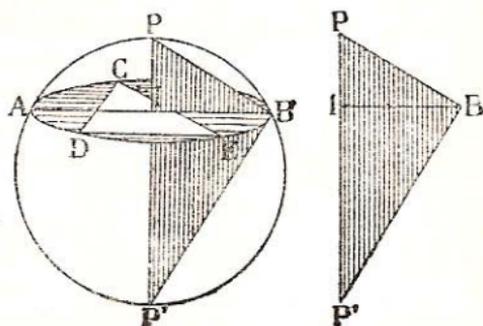


FIG. 376.

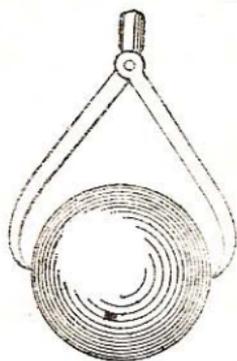


FIG. 378.

627. Escolio. — En la práctica, se encuentra el diámetro de una esfera con ayuda del compás de espesor. Ó

bien se coloca la esfera entre dos planos paralelos. cuya distancia se mide.

628. Teorema. — Por cuatro puntos, que no están en un mismo plano, pasa una esfera, y sólo una.

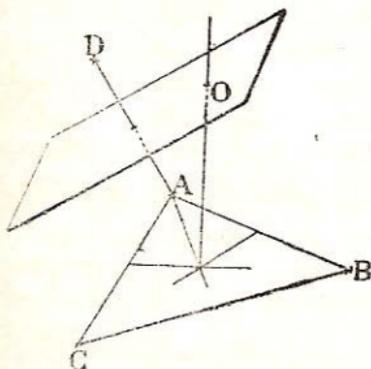


FIG. 379.

El lugar de los puntos equidistantes de A, B, C es el eje del círculo que pasa por estos tres puntos; el lugar de los puntos equidistantes de A y D es el plano perpendicular en la mitad del segmento AD. Este plano corta el eje anterior en un punto O que es el centro de la esfera.

§ III. — Homotecia de las esferas.

629. Teorema. — La figura homotética de una esfera es una esfera

El teorema es intuitivo si el centro de homotecia es el centro de la esfera.

Si el centro de homotecia O es diferente del centro C de la esfera, considerando un punto M de la esfera, su homólogo M', y C' el homólogo de C, siempre se tiene $\frac{M'C'}{MC} = K$, ó $M'C' = Kr$.

M'C' es constante, y M' pertenece á una esfera cuyo centro es C'.

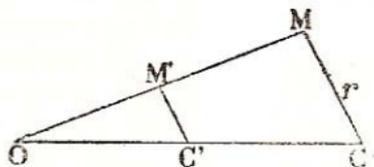


FIG. 380.

630. Corolario. — Dos esferas cualesquiera son dos figuras semejantes.

§ IV. — Superficie de la esfera.

631. **Definiciones.** — *La superficie de la esfera es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al centro es constante é igual al radio.*

Zona es la parte de la superficie de la esfera comprendida entre dos planos paralelos.

Altura de la zona es la distancia de los planos paralelos que determinan la zona

Se distingue la zona de dos bases y la zona de una base ó casquete esférico.

La zona no tiene más que una base cuando uno de los planos es tangente á la esfera.

Se llama *huso* la parte de la superficie de la esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que tienen un diámetro común.

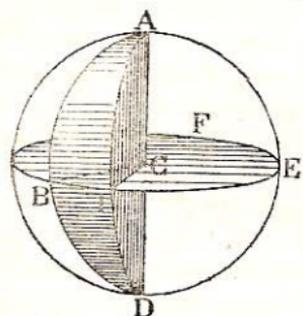


FIG. 382.

El ángulo de un huso es el ángulo diedro formado por los planos de los círculos máximos que forman el huso.

Un huso se designa por su ángulo; ejemplo, el huso BCI ó el huso A.

El ángulo de dos arcos de círculos máximos es igual al ángulo diedro formado por los planos de estos círculos.

El ángulo de un huso se mide por el arco de círculo máximo descrito desde uno de los vértices del huso como polo, y comprendido entre los dos arcos; así el arco BI es la medida del huso A.

632. **Teorema.** — *Cuando una recta y un eje están en un mismo plano, la superficie engendrada por la recta al girar al rededor del eje se obtiene multiplicando la proyección de la recta sobre el eje, por la circunferencia que tuviera por radio la perpendicular levantada en la mitad de la generatriz y terminada en el eje.*

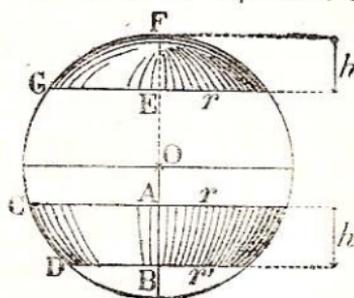


FIG. 381.

Se supone que toda la recta está de un mismo lado del eje.

I. Sea una recta AB que no encuentra al eje DC y no le es paralela.

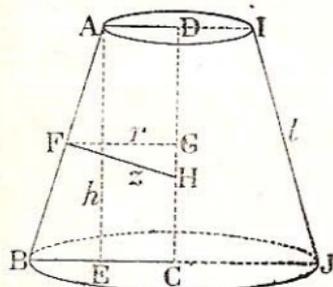


Fig. 383.

La superficie engendrada es la superficie lateral de un trozo de cono que tiene AB por generatriz y su proyección DC por altura.

Superficie igual a $2\pi FG \times AB$ ó $2\pi rl$ (n° 612).

Es preciso transformar esta expresión.

Sea FH la perpendicular levantada por la mitad de AB , y AE una línea igual y paralela á la altura. Los triángulos rectángulos AEB , FGH son semejantes, porque sus lados son respectivamente perpendiculares (n° 268), luego

$$\frac{AB}{FH} = \frac{AE}{FG} \text{ ó } \frac{l}{z} = \frac{h}{r}.$$

Por lo tanto

$$lr = zh$$

de donde

$$2\pi rl = 2\pi zh; \text{ luego } S = 2\pi zh.$$

II. La recta AB encuentra al eje (fig. 384).

La superficie engendrada es la superficie lateral de un cono. Se tiene como anteriormente:

$$\begin{aligned} \text{Superficie} &= 2\pi CD \times AB \\ &= 2\pi CG \times AF = 2\pi rh. \end{aligned}$$

III. La recta AB es paralela al eje (fig. 385).

La superficie engendrada es la superficie lateral de un cilindro; la generatriz AB se proyecta en

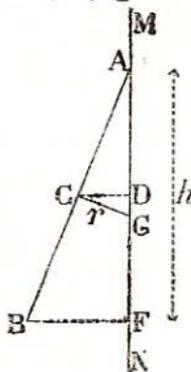


Fig. 384.

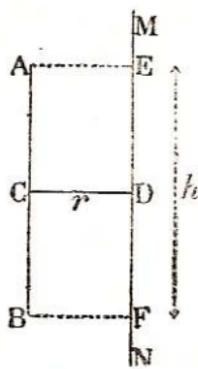


Fig. 385.

verda era magnitud sobre el eje; la perpendicular CD es igual al radio del cilindro, luego

$$\text{Superficie} = 2 \pi rh.$$

633. Teorema de Arquímedes. — *Si una línea poligonal regular gira alrededor de un eje situado en su plano y que pase por su centro:*

La superficie engendrada es igual al producto de la circunferencia que tuviera por radio el apotema de la línea quebrada, por la proyección de esta misma línea quebrada sobre el eje.

Sea ABCD la línea quebrada regular móvil, O su centro, OI su apotema, y MN el eje de revolución.

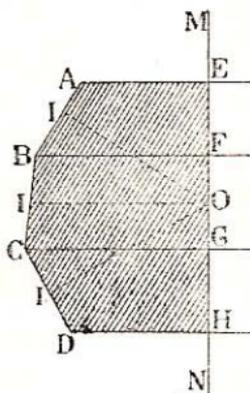


FIG. 386.

En la rotación, el trapecio rectángulo AEFB describe un trozo de cono, que tiene por superficie lateral la circunferencia $OI \times EF$, es decir $2\pi OI \times EF$ (n' 632); del mismo modo la superficie engendrada por BC es igual a $2\pi OI \times FG$, y la superficie engendrada por CD es igual a $2\pi OI \times GH$.

Luego la superficie engendrada por la línea ABCD tiene por expresión:

$$2 \pi OI (EF + FG + GH) \text{ ó } S = 2 \pi OI \times EH.$$

634. Teorema. — *El área de una zona es igual al producto de la circunferencia de la esfera, por la altura de la zona*

En efecto, la zona ABCD está engendrada por la revolución del arco AIB alrededor del diámetro MN.

Ahora bien, este arco AIB es el límite hacia el cual tiende la línea poligonal regular cuyo número de lados aumenta indefinidamente; y el apotema de esta línea poligonal tiende hacia

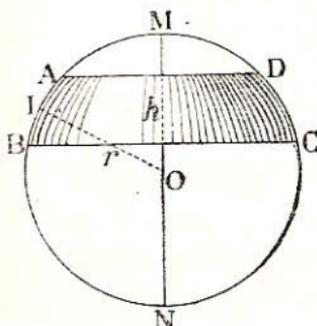


FIG. 387.

el radio de la esfera.

Se puede por tanto decir, aplicando al límite lo que es constantemente cierto para la variable (nº 634), que *el área de la zona es igual al producto de la circunferencia de la esfera, por la altura de la zona.*

635. Escollos. — I. El área de la zona tiene por fórmula $2 \pi rh$; de donde se sigue que *una zona cualquiera es equivalente á la superficie lateral de un cilindro que tuviera la misma altura que la zona, y el mismo radio que la esfera.*

II. *En una misma esfera, ó en esferas iguales, las zonas de igual altura son equivalentes, y dos zonas cualesquiera son entre sí como sus alturas.*

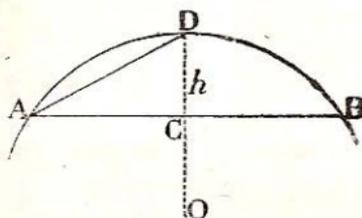


Fig. 388.

III. *El área de un casquete esférico es igual al área del círculo que tuviera por radio la cuerda del arco generador. Se tiene*

en efecto (nº 277):

$$\overline{AD}^2 = 2r \times CD = 2rh$$

de donde $\pi \overline{AD}^2 = 2 \pi rh$, área del casquete

así es que

$$S = \pi \overline{AD}^2.$$

636. Teorema. — *El área de la esfera es igual al producto de su circunferencia por su diámetro.*

Porque el arco AD que engendra la zona ABCD (fig. 388) puede crecer sin que la fórmula de la superficie engendrada deje de ser aplicable. Si pues este arco llega á ser igual á MBN, la zona engendrada es la superficie entera de la esfera, y su altura igual al diámetro MN.

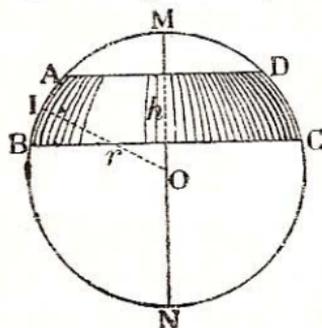


Fig. 389

637. Escollos. — I. *La superficie de una esfera es igual á cuatro veces el área de un círculo máximo; porque estando expresado el diámetro de una esfera por $2r$, y la*

circunferencia por $2\pi r$, el área de la esfera tiene por expresión $4\pi r^2$.

Si se llama d el diámetro, la circunferencia es πd , y el área de la esfera πd^2 ; es decir el área de un círculo que tuviera por radio el diámetro de la esfera.

$$\text{Así} \quad S = 4\pi r^2 \text{ ó } S = \pi d^2$$

II. *Las superficies de dos esferas cualesquiera son entre sí como los cuadrados de los radios ó de los diámetros.* Porque se tiene:

$$\frac{S}{S'} = \frac{4\pi r^2}{4\pi r'^2} = \frac{r^2}{r'^2} \text{ lo mismo que } \frac{S}{S'} = \frac{\pi d^2}{\pi d'^2} = \frac{d^2}{d'^2}.$$

III. *La superficie de la esfera es igual á la superficie lateral del cilindro circunscrito.* Porque estas dos superficies se expresan igualmente por πd^2 ó por $4\pi r^2$.

La superficie total del cilindro circunscrito á la esfera es igual á 6 veces la de un círculo máximo.

638. **Teorema.** — *El área de un huso es á la superficie de la esfera como el ángulo de este huso es á cuatro rectos.*

En efecto, si la superficie de la esfera se dividiera en 360 husos iguales, el círculo máximo BEF perpendicular al diámetro AD quedaría dividido en 360 arcos de un grado, y la superficie dada AIDBA contendría tantos husos de un grado como grados contuviera el arco BI; sucediendo lo mismo para las subdivisiones más pequeñas que el grado.

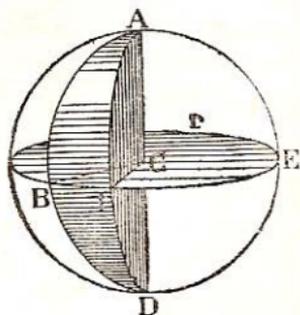


FIG. 390.

639. **Escolio.** — Siendo el área de la esfera $4\pi r^2$ ó πd^2 , el área del huso de n grados será:

$$S = \frac{4\pi r^2 n}{360} \text{ ó } S = \frac{\pi d^2 n}{360}.$$

§ V. — Volumen de la esfera.

640. Definiciones. — Se llama *sector esférico* el volumen engendrado por un sector circular, que gira alrededor de un diámetro situado en su plano.

El arco del sector circular engendra una zona de una ó de dos bases.

El sector esférico está limitado por una zona esférica y por una ó dos superficies cónicas.

Cuña esférica es el volumen de la parte de esfera comprendida entre dos semicírculos máximos.

La *cuña* está limitada por un huso y por dos semicírculos máximos.

El ángulo de una cuña esférica es el ángulo diedro formado por los dos semicírculos máximos.

Segmento esférico es el volumen de la parte de esfera comprendida entre una zona y sus bases.

El *segmento de dos bases* está limitado por dos círculos paralelos llamados bases del segmento y por una zona de dos bases.

El *segmento esférico de una base* está limitado por un círculo y un casquete.

En el segmento de una base uno de los planos es tangente á la esfera.

La *altura* del segmento es la distancia de los dos planos paralelos.

641. Teorema. — Si un triángulo gira alrededor de un eje trazado en su plano por uno de los vértices :

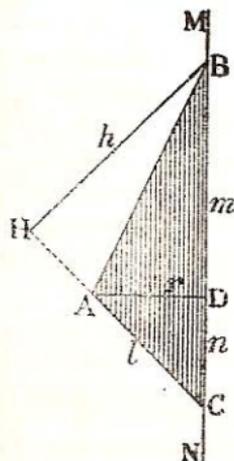


Fig. 391.

El volumen engendrado es igual al tercio del producto de la superficie que describe el lado opuesto al vértice fijo, por la altura que corresponde á este vértice.

1° Consideremos primeramente el caso en que el eje se confunda con uno de los lados del triángulo que gira ABC. Sean h la altura trazada del punto B, AD ó r una perpendicular al eje de rotación, y $BC = a$.

El volumen engendrado por el triángulo ABC es la suma de los

conos engendrados por los triángulos rectángulos ADB y ADC; resulta pues la expresión:

$$V = 1/3 \pi r^2 m + 1/3 \pi r^2 n = 1/3 \pi r^2 (m + n) = 1/3 \pi r^2 a.$$

Esta fórmula puede escribirse $1/3 \pi rra$; pero el producto ra de los dos últimos factores expresa el doble de la superficie del triángulo, y puede ser reemplazada por lh , lo que da para el volumen:

$$V = 1/3 \pi r l h \text{ ó } V = 1/3 h \times \pi r l.$$

Ahora bien $\pi r l$ expresa la superficie lateral del cono inferior (nº 607), es decir la superficie engendrada por el lado AC ó l . Así es

el volumen engendrado por el triángulo ABC es igual al tercio del producto de la superficie que describe el lado opuesto al vértice por la altura que corresponde á este vértice.

2º Si el triángulo que gira ABC no tiene más que un vértice B común con el eje, el volumen será la diferencia de los volúmenes engendrados por los triángulos BAD y BCD.

El primero de estos volúmenes es igual á $1/3 h$ multiplicado por la superficie que describe AD, y el segundo

$1/3 h$ multiplicado por la superficie que describe CD.

Luego, para la diferencia de los dos volúmenes se tendrá $1/3 h$ multiplicado por superficie AD menos superficie CD, ó $1/3 h \times$ superficie AC.

Luego $V = 1/3$ superficie AC $\times h$.

3º El triángulo ABC tiene el lado AC paralelo al eje.

Se sabe que el volumen engendrado por el triángulo BAR que gira alrededor de BN es los $2/3$ del cilindro engendrado por el rectángulo BRAF ó $2/3 \pi h^2 \times BF$.

Del mismo modo, el volumen engendrado por el trián-

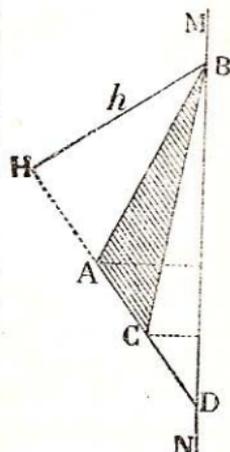


FIG. 392.

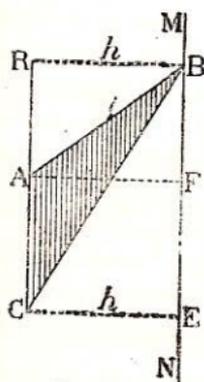


FIG. 393.

gulo $BRC = \frac{2}{3} \pi h^2 BE$; luego el volumen engendrado por ABC, igual á la diferencia de los dos primeros, es igual á $\frac{2}{3} \pi h^2 FE$.

Se puede escribir: $V = \frac{1}{3} h \times 2 \pi h \times EF$
 ó $V = \frac{1}{3} h \times \text{superficie AC}$, ó $V = \frac{1}{3} \text{superficie AC} \times h$.

642. Teorema. — Si un sector poligonal regular gira alrededor de un eje trazado en su plano por su centro:

El volumen engendrado es igual al tercio del producto de la superficie que describe la línea poligonal, por el apotema.

Sea OABD un sector poligonal regular que gira alrededor del eje MN. Se tiene (n° 641):

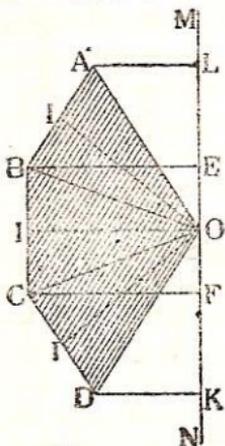


Fig. 394.

Volumen AOB = $\frac{1}{3}$ sup. AB \times OI
 Volumen BOC = $\frac{1}{3}$ sup. BC \times OI
 Volumen COD = $\frac{1}{3}$ sup. CD \times OI
 Volumen total = $\frac{1}{3}$ sup. ABCD \times OI.

643. Escolios. — I. Si un triángulo isósceles gira alrededor de un eje trazado en su plano por su vértice, el volumen engendrado es los $\frac{2}{3}$ del cilindro que tuviera por radio la altura del triángulo, y por altura la proyección de la base sobre el eje.

En efecto, para el triángulo isósceles AOB, se tiene (n° 633):

$$\text{Sup. AB} = \text{circ. OI} \times \text{EL} = 2 \pi \text{OI} \times \text{EL}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego Vol. AOB} &= \frac{1}{3} \text{OI} \times 2 \pi \text{OI} \times \text{EL} \\ &= \frac{2}{3} \pi \text{OI}^2 \times \text{EL}. \end{aligned}$$

II. Si un sector poligonal regular gira alrededor de un eje trazado por su centro y en el plano de este eje:

El volumen engendrado equivale á los $\frac{2}{3}$ del cilindro que tuviera por radio el apotema del sector, y por altura la proyección de la línea poligonal sobre el eje.

En efecto, la superficie descrita por ABCD es igual á circunf. $OI \times KL$, ó $2\pi OI \times KL$; así el volumen engendrado por el sector OABCD es igual á $2\pi OI \times \frac{1}{3} OI \times KL$ ó $\frac{2}{3} \pi OI^2 \times KL$.

Se encuentra igualmente, considerando los triángulos isósceles AOB, BOC, COD (fig. 394)

$$V = \frac{2}{3} \pi OI^2 (EL + EF + FK) = \frac{2}{3} \pi OI^2 \times KL.$$

644. Teorema. — *El volumen de un sector esférico es igual al tercio del producto de la zona correspondiente á este sector, por el radio.*

En efecto, el sector circular AOB es el límite hacia el cual tiende el sector poligonal regular inscrito cuyo número de lados aumenta indefinidamente; la línea poligonal tiende hacia el arco AIB, y el apotema tiende hacia el radio OI de la esfera.

Como se puede aplicar al límite lo que es constantemente cierto para la variable (n° 642), queda demostrado lo que se quería.

645. Escolios. — I. *El sector esférico es los $\frac{2}{3}$ del cilindro que tiene por radio el radio de la esfera, y por altura la altura de la zona correspondiente.* Porque la zona engendrada por el arco AIB tiene por expresión $2\pi rh$ (636), y para el sector.

$$V = \frac{1}{3} r \times 2\pi rh \quad \text{ó} \quad V = \frac{2}{3} \pi r^2 h.$$

II. *Dos sectores esféricos de una misma esfera ó de esferas iguales son entre sí como las alturas de las zonas correspondientes.*

646. Teorema. — *El volumen de la esfera es igual al tercio del producto de su superficie por el radio.*

Porque, en el sector circular AOB (fig. 399), el ángulo de los dos radios OA y OB puede crecer sin que la fórmula del volumen engendrado (n° 644) deje de

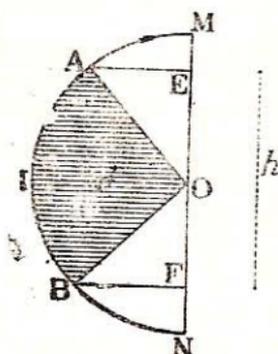


FIG. 390.

ser aplicable. Si pues el radio OA llega hasta OM, y el radio OB hasta ON, el volumen engendrado llega á ser la superficie total de la esfera, luego :

$$V = 4 \pi r^2 \times \frac{1}{3} r \quad \text{ó} \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

647. Escolios. — I. Siendo $4 \pi r^2$ la superficie de la esfera, el volumen es $4 \pi r^2 \times \frac{1}{3} r$ ó $\frac{4}{3} \pi r^3$.

Si se representa por d el diámetro, se tiene $r = \frac{d}{2}$, $r^3 = \frac{d^3}{8}$, y el volumen de la esfera es $\frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8}$ ó $\frac{1}{6} \pi d^3$

II. Dos esferas cualesquiera son entre sí como los cubos de los radios ó de los diámetros ; porque :

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi r'^3} = \frac{r^3}{r'^3} \quad \text{lo mismo que} \quad \frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{6} \pi d^3}{\frac{1}{6} \pi d'^3} = \frac{d^3}{d'^3}.$$

III. En dos sólidos cualesquiera circunscritos á una misma esfera ó á esferas iguales, la relación de los volúmenes es la misma que la relación de las superficies. Porque se tiene entonces, representando por S y S' las superficies de estos dos sólidos :

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3} S r}{\frac{1}{3} S' r} = \frac{S}{S'}$$

648. Teorema. — Una cuña esférica es á la esfera entera como el ángulo de esta cuña es á cuatro rectos.

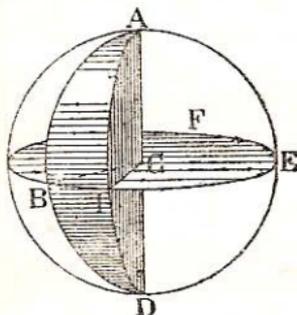


FIG. 396.

Si el volumen de la esfera se dividiera en 360 cuñas iguales, el círculo máximo BEF perpendicular al diámetro AD quedaría dividido en 360 arcos de un grado.

La cuña comprendida entre los semicírculos ABD, AID contendría tantas cuñas de un grado como arcos de un grado contiene el arco BI.

649. Escolio. — Estando expresado el volumen de la esfera por

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{ó} \quad V = 1/6 \pi d^3$$

El volumen de una cuña de n grados se expresará por

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \times \frac{n}{360} \quad \text{ó} \quad V = 1/6 \pi d^3 \times \frac{n}{360}$$

Se puede escribir :

$$V = \pi r^3 \times \frac{n}{270} \quad \text{ó} \quad V = \pi d^3 \times \frac{n}{2160}$$

650. Teorema. — Si un segmento circular gira alrededor de un diámetro exterior á este segmento

El volumen engendrado es el sexto del producto del círculo que tuviera por radio la cuerda del segmento, por la proyección de esta misma cuerda sobre el eje de revolución.

Sea el segmento ABK , que gira al rededor del diámetro MN . Tracemos los radios OA y OB , luego OI perpendicular á la cuerda AB , y finalmente AE y BF perpendiculares al eje MN .

El segmento ABK es la diferencia entre el sector circular $AOBK$ y el triángulo AOB . El volumen engendrado será pues (n^{os} 645 y 642) :

$$\frac{2}{3} \pi r^2 h - \frac{2}{3} \pi OI^2 \times h \quad \text{ó} \quad \frac{2}{3} \pi h (r^2 - OI^2)$$

$$\text{ó} \quad \frac{2}{3} \pi AI^2 \times h \quad \text{ó} \quad \frac{2}{3} \pi \times \frac{1}{4} \overline{AB}^2 \times h$$

luego
$$V = 1/6 \pi \times \overline{AB}^2 \times h.$$

651. Escolios. — I. Si la cuerda AB es paralela al eje, se tiene $AB = h$, y el volumen engendrado es $1/6 \pi h^2 \times h$ ó $1/6 \pi h^3$. Luego si un segmento circular gira alrededor del diámetro paralelo á la cuerda del segmento, el volumen engendrado es equivalente á la esfera que tuviera esta cuerda por diámetro.

652 Teorema. — Volumen del segmento. — El volumen de un segmento esférico es igual á la esfera que

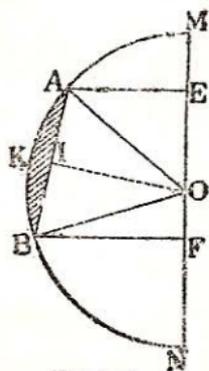


FIG. 297.

tuviera por diámetro la altura del segmento, más el cilindro de igual altura que tuviera por base la semisuma de las bases del segmento.

Se distingue el segmento de dos bases y el segmento de una base

1º Segmento de dos bases. — El segmento esférico engendrado por la figura AEFBK se compone del volumen engendrado por el segmento circular ABK y del trozo de cono engendrado por AEFB.

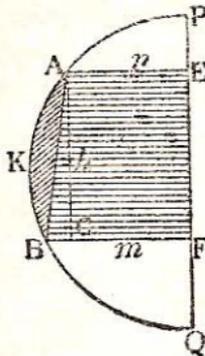


Fig. 398.

El primero de estos volúmenes es igual (nº 651):

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \pi \times \overline{AB}^2 \times h &= \frac{1}{6} \pi h (\overline{AG}^2 + \overline{BG}^2) \\ &= \frac{1}{6} \pi h [h^2 + (m - n)^2] \\ &= \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{3} \pi h (m^2 + n^2 - 2mn). \end{aligned}$$

Volumen del trozo de cono (nº 614):

$$\frac{1}{3} \pi h (m^2 + n^2 + mn)$$

ó bien $\frac{1}{6} \pi h (2m^2 + 2n^2 + 2mn)$.

Volumen total: $\frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{6} \pi h (3m^2 + 3n^2)$

ó $V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} (\pi m^2 + \pi n^2) h$.

2º Segmento de una base. — El volumen de un segmento esférico de una base es igual al volumen de la esfera inscrita, más la mitad del cilindro de la misma base y de igual altura.

El segmento de una base no es más que un caso particular del segmento de dos bases; uno de los radios, n por ejemplo, llega á ser nulo; la fórmula se simplifica y se obtiene:

$$V = \frac{4}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi m^2 h.$$

653. Escolios. — I. En el segmento de dos bases, si la altura h llega á ser igual al diámetro d , las bases πm^2 y πn^2 son nulas, y el volumen del segmento se convierte en $\frac{1}{6} \pi d^3$, volumen de la esfera.

En el segmento de una base, si la altura h llega á ser igual al radio r , se tiene también $m = r$; entonces

$V = 1/6 \pi r^3 + 1/3 \pi r^3 = 2/3 \pi r^3$, volumen del hemisferio; de donde resulta $4/3 \pi r^3$ para el *volumen de la esfera*.

II. Cuando se representa el radio de la esfera por R y los radios de las bases de los segmentos por r y r' se tienen las fórmulas :

esfera
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (1)$$

segmento de 2 bases
$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{\pi r^3 + \pi r'^3}{2} \times h \quad (2)$$

segmento de una base
$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi r^3 h. \quad (3)$$

III. Se puede expresar el volumen del segmento de una base, en función del radio de la esfera y de la altura h . Así es que

$$r^2 \text{ ó } \overline{AB}^2 = NA \times AM \text{ ó } r^2 = h(2R - h).$$

Reemplazando r^2 por este valor, la fórmula (3) queda :

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi h^2 (2R - h)$$

$$V = \frac{1}{6} \pi h^3 + \pi h^2 R - \frac{1}{2} \pi h^3 = \pi h^2 R - \frac{1}{3} \pi h^3$$

así
$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) \text{ ó } V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h). \quad (4)$$

§ VI. — Relaciones métricas entre los cuerpos redondos.

654. Teorema de Arquímedes. — *El volumen de la esfera es los 2/3 del volumen del cilindro circunscrito, y la superficie de la esfera es los 2/3 de la superficie total de este mismo cilindro.*

En efecto, el volumen del cilindro circunscrito á la esfera es igual á $\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$.

Se tiene pues

$$\frac{\text{Esfera}}{\text{Cilindro}} = \frac{4/3 \pi r^3}{2 \pi r^3} = \frac{4/3}{2} = \frac{2}{3}$$

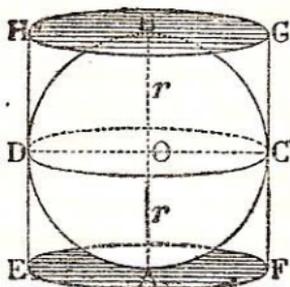


Fig. 339.

La superficie total de este cilindro es igual á

$$2 \pi r \times 2r + 2 \times \pi r^2 = 4 \pi r^2 + 2 \pi r^2 = 6 \pi r^2.$$

Igualmente se tiene :

$$\frac{\text{Sup. esfera}}{\text{Sup. cilindro}} = \frac{4 \pi r^2}{6 \pi r^2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

655. 1.^o Teorema de los tres cuerpos redondos — *Da dos una esfera, un cilindro circunscrito á esta esfera, y un cono de dos mantos inscrito al cilindro,*

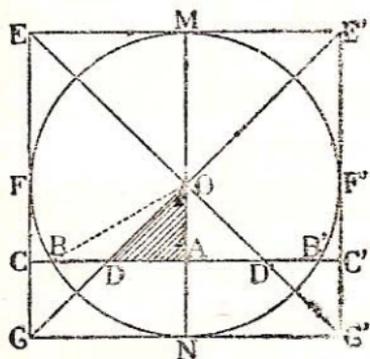


Fig. 400.

Si se traza un plano cualquiera perpendicular al eje, la sección de la esfera es igual á la diferencia de las secciones del cilindro y del cono.

Sean MNF, MNGE, OME y ONG, las figuras generatrices de los tres sólidos, y sea AC la recta generatriz de la sección. Basta probar que

$$\pi \times \overline{AB}^2 = \pi \times \overline{AC}^2 - \pi \times \overline{AD}^2.$$

El triángulo ONG es isósceles, lo mismo que OAD ; así OA = AD ; por otra parte, AC es igual al radio de la esfera. El triángulo rectángulo OAB da $\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OA}^2$, ó substituyendo líneas iguales, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$, y multiplicando por π :

$$\pi \times \overline{AB}^2 = \pi \times \overline{AC}^2 - \pi \times \overline{AD}^2,$$

que es lo que se quería demostrar.

656 2.^o Teorema de los tres cuerpos redondos. — *Dados una esfera, un cilindro circunscrito á esta esfera, y un cono de dos mantos inscrito al cilindro,*

Si se trazan dos planos cualesquiera perpendiculares al eje común de las tres figuras, el segmento esférico comprendido entre estos dos planos es igual á la diferencia de los segmentos cilíndrico y cónico correspondientes.

Sean MNF, MNGE, OME, y ONG, las figuras generatrices de los tres sólidos, y sean AC y KH las rectas generatrices de los dos planos secantes considerados.

Se puede concebir la altura AK dividida en un número indefinidamente creciente de partes iguales, luego planos trazados por los puntos de división perpendicularmente al eje, y finalmente cilindros construidos de un plano al otro sobre las secciones correspondientes de los tres sólidos. Llamemos d la distancia de los planos secantes.

En cada uno de estos planos la sección de la esfera es igual á la diferencia de las secciones del cilindro mayor y del cono (n° 656); por ejemplo

$$\pi \times \overline{AB}^2 = \pi \times \overline{AC}^2 - \pi \times \overline{AD}^2$$

de donde

$$\pi \times \overline{AB}^2 \times d = \pi \times \overline{AC}^2 \times d - \pi \times \overline{AD}^2 \times d.$$

Y lo mismo sucede con las otras partes de la figura.

Así, entre dos secciones inmediatas, el cilindro elemental que tiene por base la sección de la esfera es igual á la diferencia de los cilindros que tienen por bases las secciones correspondientes del cilindro mayor y del cono.

Luego la suma de los cilindros establecidos sobre las secciones de la esfera es igual á la parte correspondiente del cilindro total, menos la suma de los cilindros establecidos sobre las secciones del cono.

Y siendo esta relación cierta cualquiera que sea el número de planos secantes, es igualmente cierta para: los límites.

Así el segmento esférico es igual á la diferencia de los segmentos cilíndrico y cónico correspondientes.

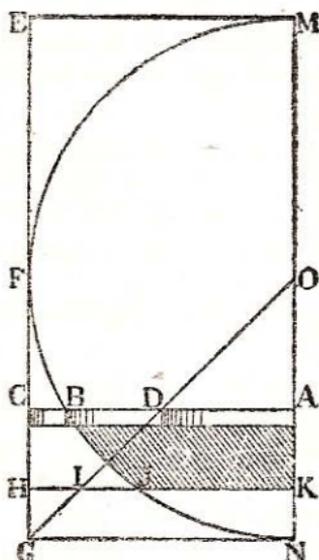


FIG. 401.

657. Escolios. — I. *Un hemisferio es igual á la diferencia entre el cilindro circunscrito y el cono inscrito*

sea $V = \pi r^2 \times r - 1/3 \pi r^2 \times r$ ó $V = 2/3 \pi r^3$.

I. *El volumen de la esfera es igual al volumen del cono de dos mantos inscrito al cilindro*

Sea $\pi r^2 \times 2r - 2 \times 1/3 \pi r^2 \times r$ ó $2 \pi r^3 - 2/3 \pi r^3$ ó finalmente $4/3 \pi r^3$.

Y esta manera de llegar al volumen de la esfera es independiente de la teoría de los triángulos giratorios (nº 641, etc.).

III. La diferencia de los volúmenes del cilindro y del cono de dos mantos no es otra cosa que el volumen engendrado por el triángulo EOG.

Así el semicírculo MNF y el triángulo EOG engendran volúmenes equivalentes; los segmentos correspondientes de estos volúmenes son equivalentes, así como las secciones rectas correspondientes de estos mismos volúmenes

658. Complemento del teorema de Arquímedes. — El teorema de los tres cuerpos redondos completa el teorema de Arquímedes (nº 654); así, dos planos paralelos al círculo de la base del cilindro circunscrito determinan un segmento esférico, un cilindro y un trozo de cono:

1º *La zona esférica es equivalente á la superficie lateral del cilindro parcial;*

2º *Cada base del segmento esférico es igual á la base del cilindro, menos la base correspondiente del cono.*

LIBRO VIII

CURVAS USUALES

PRELIMINARES.

659. *Se llama eje de una curva una recta con respecto á la cual los puntos de la curva son simétricos de dos en dos.*

Por consiguiente, el eje divide en dos partes iguales á las cuerdas que le son perpendiculares, y por una rotación de 180° alrededor del eje se puede traer una de las dos partes de la curva á coincidir con la otra.

Se llama *vértice* el punto en que un eje encuentra á la curva.

El centro de una curva es un punto con respecto al cual los puntos de la curva son simétricos de dos en dos.

El centro divide en dos partes iguales las cuerdas que pasan por este punto.

Una tangente á una curva es el límite MT de las posiciones que toma una secante MM' girando al rededor de uno de los puntos de intersección, de tal manera que el segundo punto M' se aproxime indefinidamente al primero.

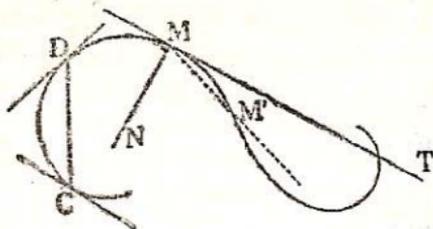


FIG. 402.

Una normal es la perpendicular MN levantada á la tangente, en el punto de contacto.

Cuerda de los contactos es la recta CD que une los puntos de contacto de dos tangentes.

660. Una curva plana es convexa cuando no puede ser cortada más que en dos puntos por una recta.

Cuando los dos puntos de intersección se aproximan indefinidamente, la recta llega á ser tangente, y todos sus puntos excepto el punto de contacto, están fuera de la curva; por consiguiente, cuando una curva es *convexa*, todas las tangentes son exteriores á la curva, ó por lo menos cada una de ellas deja de un mismo lado la rama á la cual es tangente: así para la elipse y la parábola, toda la curva está de un mismo lado de cada tangente; para la hipérbola, la tangente pasa entre las dos ramas de la curva, pero cada rama está de un mismo lado de la tangente.

CAPÍTULO I

LA ELIPSE

§ I. — Definiciones.

661. Definiciones. — Elipse es una curva plana, tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos situados en su plano es constante.

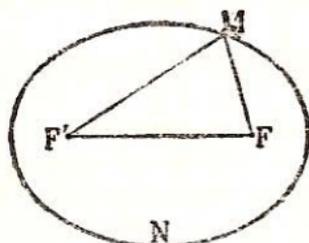


Fig. 403.

Los puntos fijos se llaman focos.

Se llaman radios vectores las rectas que unen un punto cualquiera de la curva con los dos focos.

Sea AA' una longitud constante, F y F' dos puntos fijos; si, por cada punto de la curva MN , se tiene $MF + MF' = AA'$, esta curva es una *elipse*. La suma constante se representa por $2a$.

La distancia FF' de los focos se llama distancia focal, y se representa por $2c$.

Para que el triángulo MFF' sea posible, es necesario que se tenga:

$$FF' < MF + MF', \text{ es decir } 2c < 2a.$$

662. Trazo de la elipse. — I. Para describir la elipse por movimiento continuo, conociendo los focos y la suma constante de los radios vectores, se fija en cada foco una de las extremidades de un hilo que tenga $2a$ de longitud; en seguida por medio de un lápiz ó de un punzón, se estira el hilo en todos sentidos haciendo resbalar la punta del lápiz ó punzón sobre el plano.

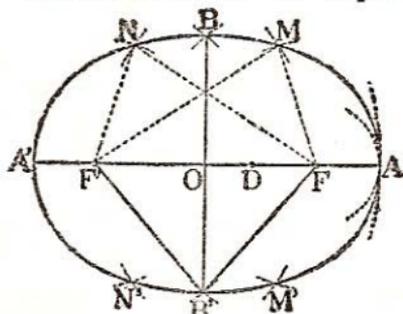


Fig. 404.

II. Se puede trazar la elipse por puntos, conociendo

los focos y $2a$. Partiendo del medio O de la distancia focal, tomemos $OA = OA' = a$. Sea D un punto cualquiera tomado entre los focos y sobre AA' ; con AD y DA' , cuya suma es igual á $2a$, describamos dos circunferencias, una del punto F como centro, y la otra del punto F' ; los puntos de intersección pertenecen á la elipse.

663. Observaciones. — 1° Para que las dos circunferencias se corten, es necesario que se tenga $FF' > DA' - DA$ ó $FF' > DA - DA'$.

Esta diferencia de los dos radios es igual á $2 OD$; de donde se infiere que el punto D debe permanecer entre F y F' .

2° Cuando el punto D está en F , la diferencia de los radios es igual á FF' , y las circunferencias descritas de los centros F y F' son tangentes en A ó en A' .

3° Cuando el punto D está en O , los radios son iguales, y determinan los puntos B y B' que pertenecen á la perpendicular levantada sobre el medio de FF' .

4° El radio máximo es $F'A = a + c$, y el radio mínimo es $FA = a - c$. Los dos trazos demuestran que la curva está limitada en todos sentidos; la elipse es pues una curva cerrada.

INTERIOR Y EXTERIOR DE LA ELIPSE.

664. Teorema. — Cuando un punto es interior á la elipse, la suma de sus distancias á los dos focos es menor que $2a$; cuando el punto es exterior, esta misma suma es mayor que $2a$.

1° Unamos con los focos un punto interior cualquiera C ; prolonguemos $F'C$ hasta M , y tracemos MF ; tenemos:

$$CF + CF' < MF + MF' \text{ ó } < 2a.$$

2° Unamos con los focos un punto exterior cualquiera D , y tracemos FN ; tenemos:

$$DF + DF' > NF + NF' \text{ ó } > 2a.$$

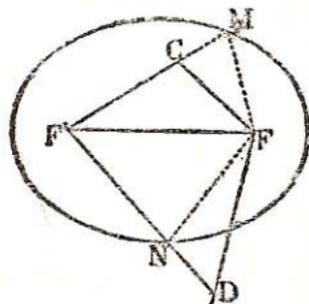


FIG. 405.

665. Corolarios. — Según que la suma de las distancias de un punto á los dos focos es superior, inferior ó igual á $2a$, el punto es exterior ó interior á la elipse, ó pertenece á esta curva; y la elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de las distancias á dos puntos fijos es constante.

SIMETRÍA DE LA ELIPSE.

666. Teorema. — La elipse tiene por ejes la recta que

pasa por los focos, y la perpendicular levantada en el medio de la recta que une los focos; y tiene por centro el punto de intersección de los ejes.

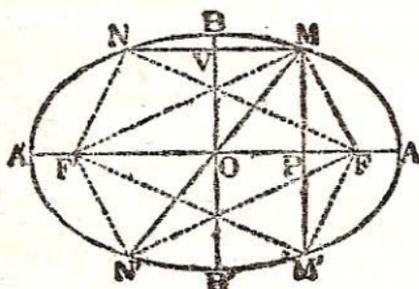


Fig. 406.

Sea M un punto cualquiera de la elipse. Prolonguemos las perpendiculares MP y MV, y la línea MO; y tomemos

$PM' = PM$, $VN = VM$, $ON' = OM$; determinaremos así los puntos simétricos de M con relación á AA', á BB' y al punto O; basta probar que estos puntos pertenecen á la curva:

1° FF' es perpendicular al medio de MM'; luego $MF = M'F$, y $MF' = M'F'$; de donde

$M'F + M'F' = MF + MF' = 2a$; luego M' es un punto de la elipse (n° 661).

2° Los trapecios rectángulos OFMV y OF'NV son sobreponibles, porque sus bases son iguales; luego $MF = NF'$, y los ángulos en F y F' son iguales. Los triángulos FF'M y FF'N son iguales por tener un ángulo igual formado por lados iguales; luego $NF = MF'$, y puesto que $NF' = MF$, se tiene:

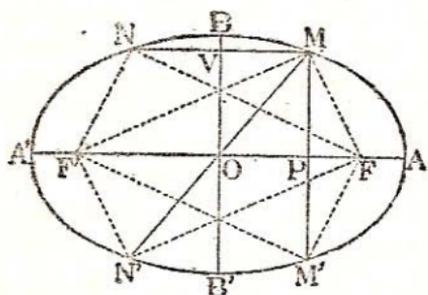


Fig. 407.

$NF + NF' = MF + ME' = 2a$; luego el punto N pertenece á la elipse.

3° Por cortarse las rectas MN' y FF' en sus mitades la figura $MFNF'$ es un paralelogramo, y se tiene:

$$NF + NF' = MF + MF' = 2a$$

por lo tanto el punto N' pertenece á la curva.

Luego AA' y BB' son los ejes, y su punto de intersección O es el centro de la curva.

667. Ejes, vértices. — La perpendicular levantada por la mitad de FF' encuentra á la curva en los puntos B y B' , equidistantes de los focos; la longitud $BO = OB'$ se representa por b ; y como $BF = a$, se tiene $b < a$. La recta AA' o $2a$ es el eje mayor de la elipse; BB' o $2b$, es el eje menor. El triángulo rectángulo BOF conduce a la relación $a^2 = b^2 + c^2$.

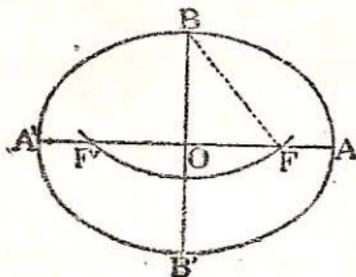


FIG. 408

La relación $\frac{c}{a}$ se llama excentricidad de la elipse, y varía de 0 á 1. Cuando $b = a$, la excentricidad es nula, y la elipse es un círculo. Cuando b es nula, la excentricidad $\frac{c}{a} = 1$, y la elipse se reduce al eje mayor.

La elipse tiene cuatro vértices; A, A', B, B' .

Para determinar los focos, conociendo los ejes, es necesario describir un arco de círculo desde el punto B como centro con a por radio; la intersección de este arco con AA' da á conocer F y F' .

§ II. — Círculo director.

668. Definición. — *El círculo director es un círculo cuyo centro está en uno de los focos, y cuyo radio es $2a$, el eje mayor de la elipse.*

Hay dos círculos directores, uno relativo á cada foco.

669. Propiedad del círculo director. — Cada punto M de la elipse equidista del círculo director relativo a un foco F' y del otro foco F .

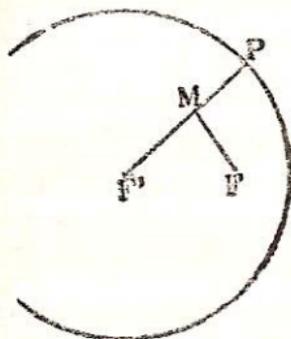


Fig. 409.

En efecto, por definición

$$F'M + MF = 2a$$

y también

$$F'M + MP = 2a.$$

Luego $MF = MP$.

670. Consecuencia. — La elipse es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una circunferencia y de un punto interior a esta circunferencia.

671. Problema. — Encontrar los puntos de intersección de una recta AB con una elipse, conociendo los focos F y F' y el círculo director (F') de esta elipse.

Sea M un punto de intersección; por pertenecer este punto a la elipse, se tiene

$$MF = MP.$$

Si se considera el simétrico F_1 de F con relación a la recta AB , se tiene también

$$MF_1 = MF = MP.$$

Luego, M es el centro de una circunferencia que pasa por los puntos F y F_1 , y es tangente al círculo director (F').

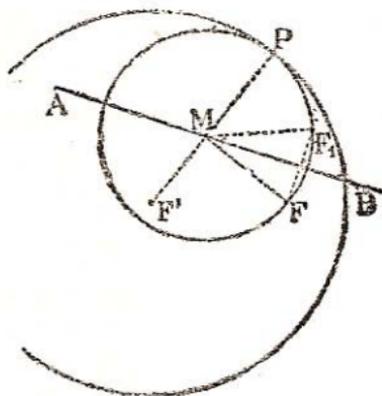


Fig. 410

Hay que encontrar este centro.

Es un problema ya resuelto (n° 321).

Se sabe que

1° Si F_1 es interior al círculo director, existen dos círculos, sea dos puntos de intersección;

2° Si F_1 pertenece al círculo director, sólo hay un círculo, y sólo un punto de intersección. En este caso, la recta es tangente;

3° Si F_1 es exterior al círculo director, no hay círculos, ni tampoco puntos de intersección.

672. Consecuencias. — I. Una recta no puede encontrar una elipse en más de dos puntos, la elipse es una curva convexa.

II El punto simétrico de un foco (F) con relación á una tangente pertenece al círculo director relativo al otro foco (F').

El círculo director es el lugar geométrico de estos puntos

§ III. — Tangentes.

673. Propiedad de la tangente. — La tangente á la elipse forma unos ángulos iguales con los radios vectores del punto de contacto.

En efecto, según la discusión del problema anterior, F_1 el simétrico de F ; luego los ángulos F_1MP y FMP son iguales; pero

$$AMF' = PMF_1$$

y $AMF' = PMF$

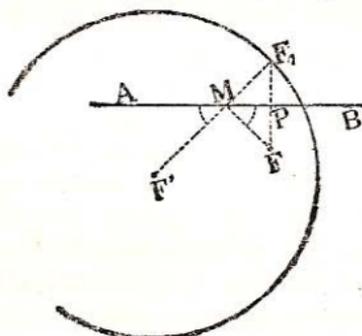


Fig. 411

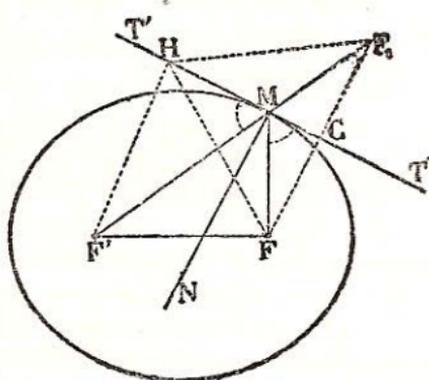


Fig. 412

674. Consecuencia — La normal MN es bisectriz del ángulo de los radios vectores del punto de contacto; porque los ángulos que forma con MF y MF' tienen por complemento los ángulos iguales que la tangente forma con los mismos radios

TRAZO DE LAS TANGENTES.

675. Problema. — *Trazar una tangente á la elipse, por un punto tomado sobre la curva.*

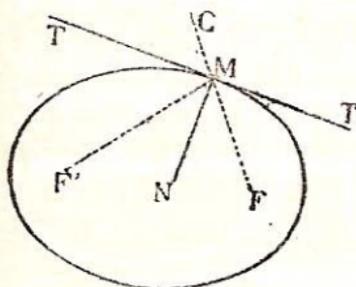


FIG. 413.

Sea M el punto dado sobre la curva. Tracemos los radios vectores del punto de contacto; prolonguemos FM y tracemos la bisectriz del ángulo exterior $F'MC$; esta bisectriz es tangente; porque los ángulos $F'MT$ y FMT' son iguales (n.º 673).

676. Escolio. — Para encontrar la normal en un punto M dado sobre la curva, basta trazar la bisectriz del ángulo FMF' de los dos radios vectores.

677. Problema. — *Trazar una tangente á la elipse, por un punto dado fuera de la curva.*

Sea P el punto exterior dado, y CD el círculo director relativo al foco F' ; la circunferencia descrita con el radio PF corta el círculo director en los puntos C y D ; unamos estos puntos con el foco F ; las perpendiculares levantadas en el medio de FC y FD son tangentes (n.º 672), y pasan por el punto P , centro de los arcos CF y FD ; las rectas $F'C$ y $F'D$ dan á conocer los puntos de contacto.

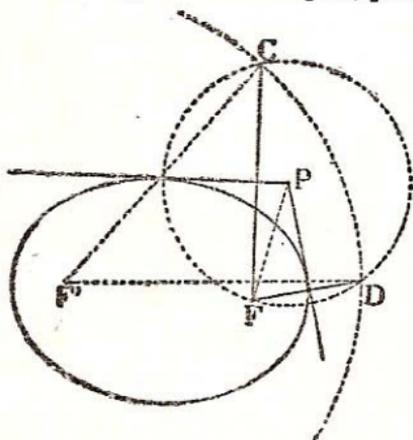


FIG. 414.

678. Escolio. — Por un punto interior no hay tangente posible; por un punto tomado sobre la curva hay una, y por un punto exterior hay dos.

679. Problema. — *Trazar á la elipse una tangente paralela á una recta dada.*

Describamos el círculo director relativo al foco F' ; y por el otro foco F , tracemos la perpendicular EG sobre la recta dada xy .

Las perpendiculares MT y NV levantadas á la mitad de las rectas FE y FG son tangentes (n° 672), y los radios $F'E$ y $F'G$ determinan los puntos de contacto.

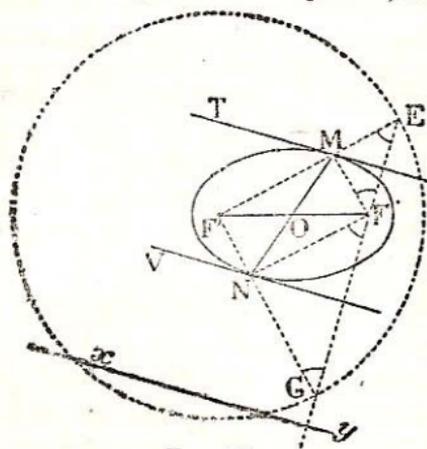


FIG. 415.

680. Escolios. — I. *La cuerda de los contactos MN pasa por el centro de la elipse.* En efecto, siendo las tangentes perpendiculares á la mitad de FE y de FG , y siendo la línea $F'G$ igual á $F'E$, los tres triángulos EMF , $EF'G$ y FNG son isósceles, y todos sus ángulos agudos son iguales; luego las líneas NF y $F'M$ son paralelas; igualmente lo son MF y $F'N$; luego la figura $MFNF'$ es un paralelogramo, y la diagonal MN , *cuerda de los contactos* (n° 660), pasa por el punto O , medio de la otra diagonal.

II. Las soluciones dadas para los diversos problemas de las tangentes no exigen que se trace la curva: basta que se conozcan los focos y $2a$.

§ IV. — Elipse considerada como proyección de un círculo.

681. Teorema. — *La proyección de un círculo sobre un plano es una elipse* (Demostración debida á M. Courcelles).

Tomemos un plano que pase por el centro O ; sea AA' la intersección del círculo y del plano sobre el cual se proyecta.

Por el centro O tracemos el plano DOB perpendicular á AA' ; por un punto cualquiera N del círculo,

tracemos también el plano NPM perpendicular al diámetro AA', y en estos dos planos bajemos desde los puntos D y N las perpendiculares DB y NM sobre el plano de proyección.

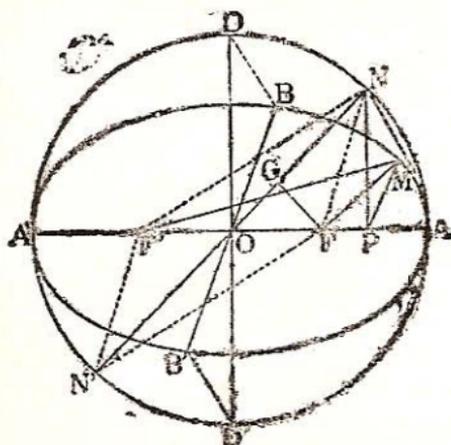


Fig. 416.

Los puntos B y M pertenecen á la curva; DO, BO, NP, MP, son perpendiculares á la intersección AA', puesto que este diámetro es perpendicular á los planos DOB, NPM. Llevemos la magnitud DB de O á F y á F', unamos M, proyección de un punto cualquiera de la

circunferencia, con los puntos F y F'; basta probar que $MF + MF'$ es una suma constante.

Bajemos del punto F la perpendicular FG sobre el diámetro NN' y tracemos NF. La línea NM es perpendicular á las rectas MP, MF, MF' que pasan por su pie M y están en el plano de proyección. Los triángulos rectángulos DBO y NMP son semejantes, porque tienen sus lados respectivamente paralelos.

Por consiguiente se tiene :

$$\frac{NM}{DB} = \frac{NP}{DO} \text{ de donde } NM = \frac{DB \times NP}{DO}. \quad (1)$$

El doble del área del triángulo ONF está expresado por

$$FG \times ON \text{ ó por } OF \times NP$$

luego $FG \times ON = OF \times NP$

$$\text{de donde } FG = \frac{OF \times NP}{ON}. \quad (2)$$

Pero los segundos miembros de las igualdades (1) y (2) tienen el mismo valor, porque $DB = OF$ por construcción y $DO = ON$, luego $MN = FG$.

Los triángulos rectángulos NMF y NGF son iguales por tener la hipotenusa común y uno de los catetos, $NM = FG$; luego $MF = NG$.

En el paralelogramo $NFN'F'$ el lado $F'N = FN'$; los triángulos rectángulos NMF' y FGN' son iguales, porque $NM = FG$, y la hipotenusa $F'N = FN'$; luego $MF' = GN'$.

Así es que $MF + MF' = NG + GN' = AA'$, cantidad constante.

La curva es pues una elipse que tiene F y F' por focos, AA' por eje mayor y BB' por eje menor. El eje menor es la proyección del diámetro DD' perpendicular á la intersección AA' de los planos.

682. Definición. — El círculo principal es un círculo concéntrico á la elipse y cuyo diámetro es el eje mayor. Se puede considerar como el abatimiento sobre el plano de la elipse del círculo cuya proyección es la misma elipse.

683. Propiedades del Círculo principal. — 1º El círculo principal es el lugar geométrico de las proyecciones de los focos sobre las tangentes. (Teorema de la Hire).

Sean una tangente cualquiera MT , y el círculo director descrito desde el foco F' ; tracemos OC . Tenemos $FC = 1/2 FF_1$; $OF = 1/2 FF'$; luego OC que une los me-

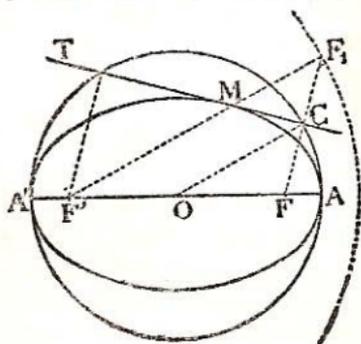


Fig. 417.

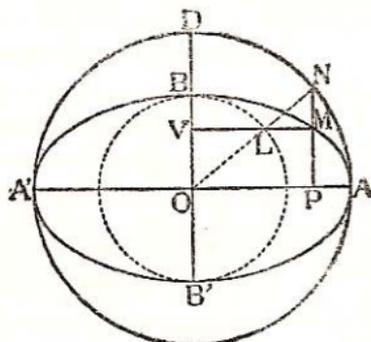


Fig. 418.

dios de los lados FF' y FF_1 , igual á $1/2 F'F_1 = a$; así es que el lugar del punto C es el círculo principal de la elipse.

2º Las ordenadas de la elipse están con las ordenadas correspondientes del círculo principal en una relación constante.

En efecto, si, en la figura anterior, se hace girar el plano del círculo alrededor de AA' hasta que coincida con el plano de la elipse, las ordenadas correspondientes PM y PN , perpendicu-

lares al diámetro AA' , toman la misma dirección, y se tienen siempre :

$$\frac{PM}{PN} = \frac{OB}{OD} = \frac{b}{a}, \text{ razón constante.}$$

3° Con respecto á la elipse y al círculo principal :

1° Las secantes cuyos puntos de intersección tienen igual abscisa se cortan sobre el eje mayor ;

2° Las tangentes cuyos puntos de contacto tienen igual abscisa se cortan también sobre el eje mayor.

1° Consideremos las secantes GG' y CC' , cuyos puntos de intersección tienen la misma abscisa ; se tiene.

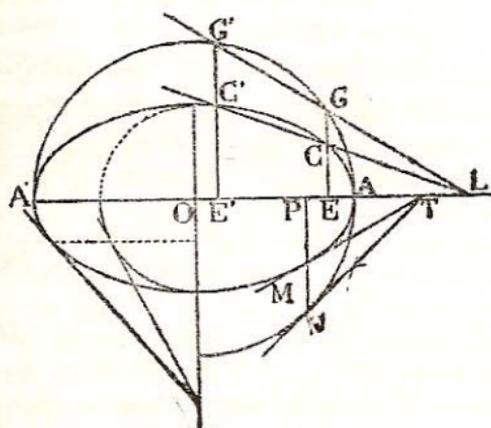


Fig. 413.

$$\frac{CE}{GE} = \frac{b}{a} = \frac{C'E'}{G'E'}$$

luego las paralelas GE y $G'E'$ están divididas en partes proporcionales ; y en virtud de un teorema conocido (n° 274) las rectas GG' , CC y EE'

concurren en un mismo punto.

2° Las ordenadas GE y $G'E'$ pueden acercarse indefinidamente ; en el límite, los puntos G y G' se confunden, lo mismo que C y C' , y se obtienen tangentes ; luego las tangentes MT y NT cuyos puntos de contacto tienen la misma abscisa OP cortan al eje mayor en el mismo punto.

684. Escolio. — Se prueba de una manera análoga que, con respecto á la elipse y al círculo del eje menor, las tangentes cuyos puntos de contacto tienen la misma ordenada OV se cortan sobre el eje menor.

685. Problema. — Trazar la elipse por medio de círculos descritos sobre los ejes.

Después de haber descrito los círculos, tracemos un radio cualquiera ON ; la ordenada del punto N y la abscisa prolongada del punto L dan un punto M de la curva; porque se tiene (n° 683):

$$\frac{MP}{NP} = \frac{OL}{ON} = \frac{b}{a}.$$

Comúnmente se divide el círculo principal en partes iguales.

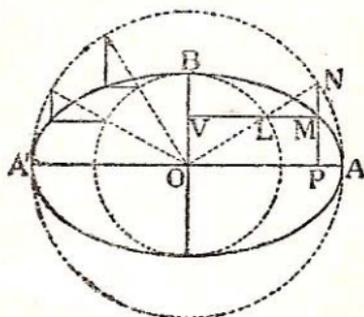


Fig. 420.

688. Problema. — Sin construir la curva, hallar los puntos de intersección de una recta con una elipse cuyos ejes se conocen.

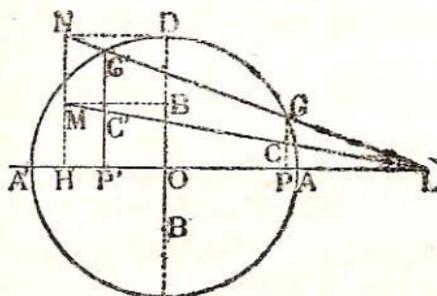


Fig. 421.

Sean LM , AA' BB' la recta y los ejes dados. Describamos el círculo principal, tracemos BM y DN paralelas a AA' , y por el punto M , la ordenada NH .

Tracemos LN , en seguida las ordenadas PG y $G'P'$; los puntos C y C' son los puntos buscados. Porque se tiene:

$$\frac{CP}{GP} = \frac{C'P'}{G'P'} = \frac{MH}{NH} = \frac{b}{a}.$$

§ V. — Área de la elipse.

687. Teorema. — El área de la elipse es igual al producto de los semi-ejes por el número constante π .

Consideremos unas ordenadas equidistantes. Por los puntos C y M , tracemos paralelas a AA' . La elipse es el límite de la suma de los rectángulos análogos a

MPVN, y el círculo es el límite de la suma de los rec-

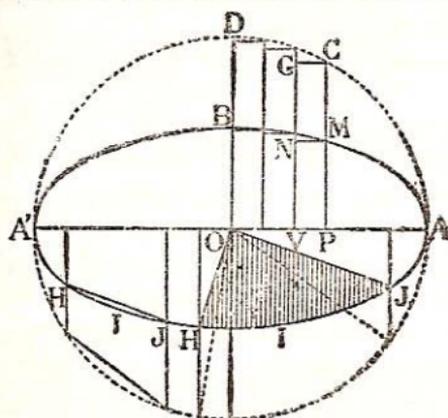


Fig. 422.

tángulos análogos á CPVG. Como los dos rectángulos tienen la misma altura VP están en la relación de sus bases MP y CP, ó $\frac{b}{a}$

Lo mismo pasa con los límites hacia los cuales tienden las sumas de estos rectángulos.

Por lo tanto

$$\frac{\text{Elipse}}{\text{círculo}} = \frac{b}{a}; \text{elipse} = \text{círculo} \times \frac{b}{a} = \pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab$$

688. Corolarios. — 1º Para valuar una área limitada por un arco de elipse, por ejemplo el segmento HIJ ó el sector OHIJ, es preciso valuar el área correspondiente en el círculo principal y multiplicar este valor por la relación $\frac{b}{a}$.

2º La elipse πab es media proporcional entre los círculos πa^2 y πb^2 descritos sobre los ejes, porque $\sqrt{\pi a^2 \times \pi b^2} = \pi ab$.

CAPÍTULO II

LA HIPÉRBOLA

§ I. — Definiciones.

689 Definiciones. — La hipérbola es una figura plana a la que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos situados en su plano es constante.

Los puntos fijos se llaman focos.

Se llaman radios vectores las rectas que unen un punto cualquiera de la curva con los dos focos.

Sean AA' una longitud constante, F y F' dos puntos fijos; si por cada punto M ó N de la curva se tiene:

$$MF' - MF = AA',$$

$$\text{ó } NF - NF' = AA'$$

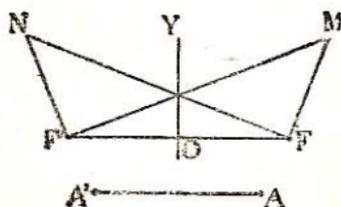


FIG. 423.

la curva es una hipérbola.

La *diferencia constante* AA' se representa por $2a$.

La distancia FF' de los focos se llama distancia focal y se representa por $2c$. Para que los triángulos MFF y NFF' sean posibles, se debe tener:

$FF' > MF' - MF$ y $FF' > NF - NF'$, es decir $2c > 2a$.

690. Trazado de la hipérbola. — I. Para describir la hipérbola por movimiento continuo, conociendo los focos y $2a$,

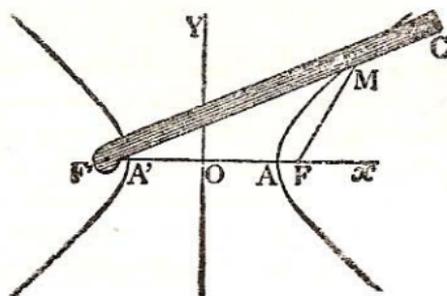


FIG. 424.

se toma una regla más larga que la distancia focal, y un hilo igual a la longitud de la regla disminuída $2a$; se fijan las extremidades de este hilo en C (sobre la regla), y en F . Si se

tiende el hilo á lo largo de la regla, haciendo girar la extremidad de esta última alrededor de F' , la punta que traza describirá una parte de la curva, porque se tiene siempre:

$$MF' - MF = 2a.$$

Fijando el hilo en F' , y colocando la regla en F , se obtiene una segunda parte de la curva, situada á la izquierda de la perpendicular OY .

II. Se puede trazar la hipérbola por puntos cuando

se conocen los focos y $2a$. Partiendo de la mitad O de la distancia focal, tomemos

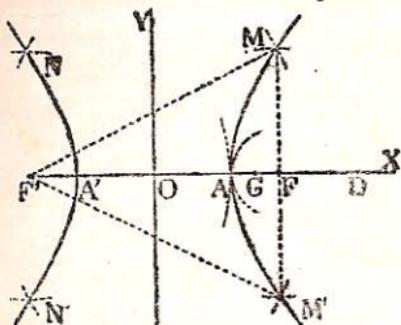


Fig. 425.

$$OA = OA' = a.$$

Sea D un punto cualquiera tomado sobre AA' , pero más allá de los focos; con radios DA y DA' cuya diferencia sea igual a $2a$, describamos dos circunferencias una

del punto F como centro, y la otra del punto F' .

Los puntos de intersección pertenecen á la hipérbola.

691. Observaciones. — 1° Para que las dos circunferencias, se corten, se necesita que $FF' < DA + DA'$. Esta suma de los dos radios es igual á $2 \times OD$; de donde se sigue que el punto D nunca debe tomarse entre F y F' ;

2° Cuando el punto D está en F , la suma de los radios es igual á FF' , y las circunferencias descritas desde los centros F y F' son tangentes en A ó en A' ;

3° Los menores radios que se pueden utilizar para un mismo punto tienen por longitud $c + a$ y $c - a$;

4° Siendo la perpendicular OY levantada en el medio de FF' , el lugar de los puntos igualmente lejanos de los focos, no puede encontrar á la curva; en el trazo continuo, basta que la regla y el hilo tengan por diferencia $2a$, pero nada limita su longitud; igualmente, en el trazo por punto, los radios de las circunferencias secantes pueden crecer indefinidamente. Luego la hipérbola está compuesta de dos partes separadas, y las ramas de la curva se extienden indefinidamente arriba y abajo de ox .

692. Interior y exterior de la hipérbola. — Para cualquier punto interior á la hipérbola, la diferencia de las distancias á los focos es mayor que $2a$; para cualquier punto exterior, esta misma diferencia es menor que $2a$.

Un punto es interior cuando está en una de las dos

regiones del plano en que se encuentran los focos, y exterior cuando está entre las dos partes separadas de la curva.

1° Unamos el punto interior C á los dos focos, y tracemos MF.

Se tiene:

$$CF < CM + MF$$

luego

$$CF' - CF > CF' - (CM + MF)$$

ó

$$CF' - CF > MF' - MF$$

luego

$$CF' - CF > 2a.$$

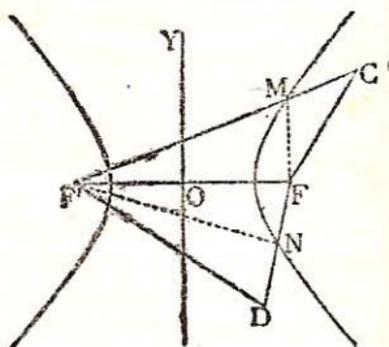


Fig. 426.

2° Unamos el punto exterior D con los dos focos, y tracemos F'N.

Se tiene:

$$F'D < NF' + ND$$

luego

$$F'D - DF < NF' + ND - DF$$

ó $F'D - DF < NF' - NF$, luego $F'D - DF < 2a$.

693. Escolio. — Según que la diferencia de las distancias de un punto á los dos focos es superior, inferior, ó igual á $2a$, el punto es interior ó exterior á la hipérbola, ó pertenece á esta curva; y la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias á dos puntos fijos es constante.

694. Simetría en la hipérbola. — La hipérbola tiene por ejes la recta que pasa por los focos, y la perpendicular levantada á la mitad de la recta que une estos mismos focos. Tiene por centro el punto de concurso de los ejes.

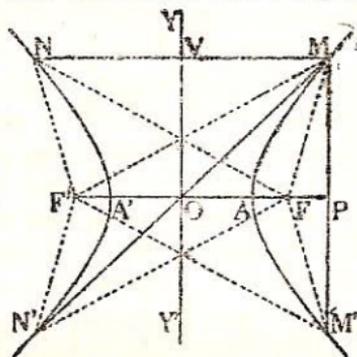


Fig. 427.

Sea M un punto cualquiera de la hipérbola. Prolonguemos las perpendiculares MP y MV, y la línea MO; tomemos $PM' = PM$, $VN = VM$, $ON' = OM$; M', N y N' son

puntos simétricos de M con relación á AA', á BB' y al punto O; basta probar que estos puntos M', N y N' pertenecen á la curva:

1° FF' es perpendicular á la mitad de MM';

luego $M'F = MF$, y $M'F' = MF'$,

de donde $M'F' - M'F = MF' - MF = 2a$.

2° Los trapecios rectángulos OFMV y OF'NV son sobreponibles, porque sus bases son iguales; luego $NF' = MF$, y los ángulos en F y F' son iguales. Los triángulos FF'N y FF'M son iguales por tener un ángulo igual comprendido entre lados iguales; luego $NF = MF'$ y puesto que $NF' = MF$, se tiene: $NF - NF' = MF' - MF = 2a$; luego N pertenece á la hipérbola.

3° Las rectas MN' y FF' se cortan en su mitad, la figura MFN'F' es pues un paralelogramo, y la diferencia de dos lados adyacentes es igual á la diferencia de los otros dos lados;

así $N'F - N'F' = MF' - MF = 2a$.

Luego AA' y la perpendicular YY' son los ejes, y su intersección es el centro de la curva.

695. Ejes, vértices. — I. Cuando una curva tiene dos

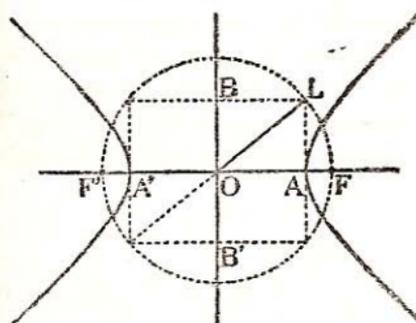


Fig. 428.

ejes, su intersección es el centro de la curva.

AA' se llama eje transverso de la hipérbola, el otro eje no encuentra á la curva, y se llama eje no transverso.

Cuando se levanta una perpendicular al eje transverso en el punto A, y desde el centro, con el radio OF igual á c, se corta esta perpendicular en L; la longitud AL, llevada de O á B y á B', se considera, por analogía con lo que tiene lugar en la elipse, como la longitud del eje no transverso. El triángulo rectángulo AOL conduce á la relación:

$$\overline{LO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AL}^2 \text{ ó } c^2 = a^2 + b^2.$$

II. La razón $\frac{c}{a}$ se llama *excentricidad* de la hipérbola.

La hipérbola equilátera es aquella en la cual los dos ejes son iguales; en este caso $c^2 = 2a^2$ y $c = a\sqrt{2}$.

La hipérbola tiene dos vértices: A y A'.

§ II. — Círculo director.

696. Definición. — *El círculo director es un círculo cuyo centro está en uno de los focos y cuyo radio es 2 a, el eje transverso.*

Hay dos círculos directores, uno relativo á cada foco.

697. Propiedad del círculo director. — *Cada punto M) de la hipérbola es equidistante de un círculo director relativo á un foco (F') y del otro foco (F).*

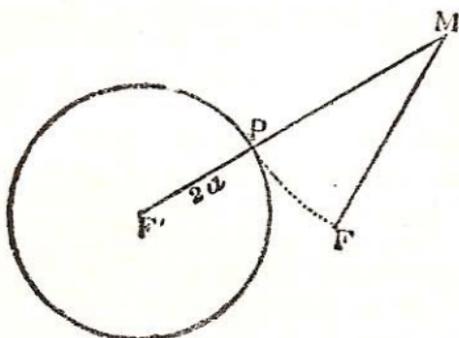


FIG. 429.

En efecto

$$MF = MF' - 2a$$

$$MP = MF' - 2a$$

luego

$$MF = MP.$$

698. Consecuencia. — *La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un círculo y de un punto exterior á este círculo.*

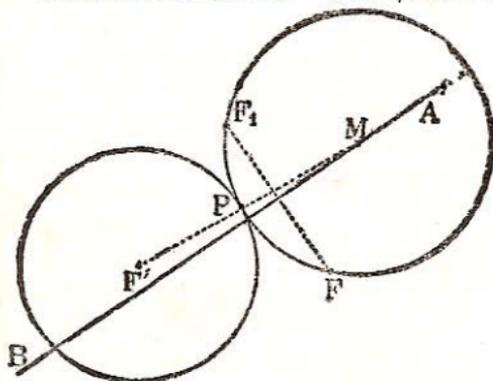


FIG. 430.

699. Problema. — *Encontrar los puntos de intersección de una recta (AB) con una hipérbola, conociendo los focos F y F' y un círculo director F'*

Sea M uno de los puntos de intersección, y F₁ el simétrico de P con relación á AB.

Como en el capítulo de la elipse (n° 674) el punto M es el centro de un círculo tangente al círculo director y que pase por F y F_1 .

Discusión. — 1° Si F_1 es exterior al círculo director, hay dos puntos de intersección;

2° Si F_1 pertenece al círculo director, sólo hay un punto de intersección. La recta AB es tangente;

3° Si F_1 es interior al círculo director, no hay ningún punto de intersección.

700. Consecuencias. — I. Una recta no puede encontrar una hipérbola en más de dos puntos; una hipérbola es una curva convexa.

II. El punto simétrico de un foco (F) con relación á una tangente pertenece al círculo director relativo al otro foco. Este círculo es el lugar geométrico de estos puntos

§ III. — Tangentes.

701. Propiedad de la tangente. — La tangente forma dos ángulos iguales con los radios vectores del punto de contacto.

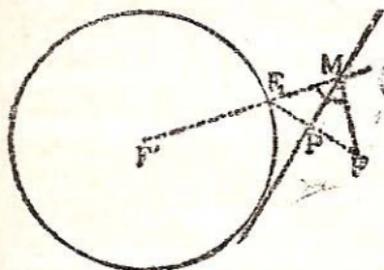


Fig. 431.

En efecto, según la discusión del problema anterior (n° 699), F_1 es el simétrico de F y los ángulos FMP y PMF_1 son iguales.

702. Corolarios. — 1° La

normal MN es bisectriz del ángulo exterior formado por los radios vectores del punto de contacto, porque es perpendicular á la bisectriz interior.

2° Se puede utilizar el círculo director para construir la hipérbola; se une F con un punto cualquiera F_1 del círculo director; la mediatriz de FF_1 es la tangente, y el punto de contacto está en la recta $F'F_1$.

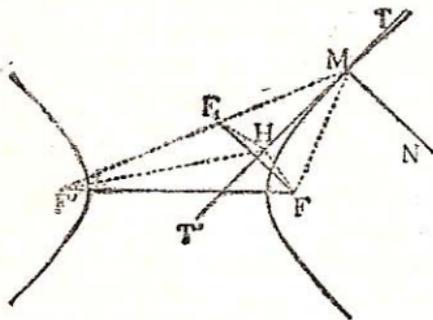


Fig. 432

TRAZADO DE LAS TANGENTES

703. Problema. — *Trazar una tangente á la hipérbola por un punto tomado sobre la curva.*

Sea M el punto dado sobre la curva ; basta trazar la bisectriz MT de los radios vectores del punto de contacto.

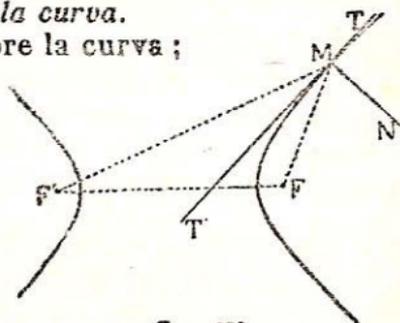


Fig. 433.

704. Problema. — *Trazar una tangente á la hipérbola por un punto dado fuera de la curva.*

Sea P el punto exterior dado, y CD el círculo direc-

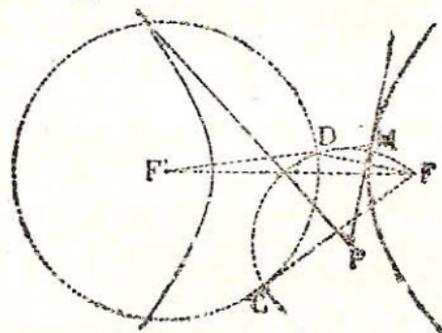


Fig. 434.

tor relativo al foco F' ; la circunferencia descrita con el radio PF corta el círculo director en dos puntos C y D ; unamos estos puntos al foco F ; las perpendiculares levantadas en el medio de FC y de FD son tangentes (n° 699), y pasan por el punto P , centro de los arcos CF

y FD ; la recta $F'DM$ da á conocer el punto de contacto.

671. Por un punto interior, no hay tangente posible; por un punto tomado sobre la curva, hay una; y por un punto exterior, hay dos.

705. Problema. — *Trazar á la hipérbola una tangente paralela á una recta dada.*

Describamos el círculo director relativo al foco F' , y por el otro foco F , tracemos la perpendicular FEG sobre la recta dada xy .

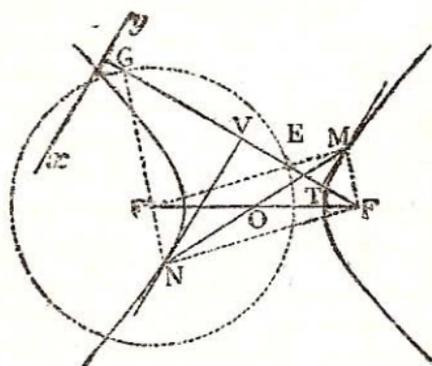


Fig. 435.

Las perpendiculares MT y NV , levantadas á la mitad de las rectas FE y FG , son tangentes (n° 699), y los radios $F'E$ y $F'G$ determinan los puntos de contacto.

§ IV. — Asíntotas de la Hipérbola.

706. Definición. — Llámase asíntotas de la hipérbola las tangentes cuyo punto de contacto está infinitamente lejano del vértice de la curva.

707. Teorema. — La hipérbola tiene dos asíntotas, y estas líneas pasan por el centro de la curva.

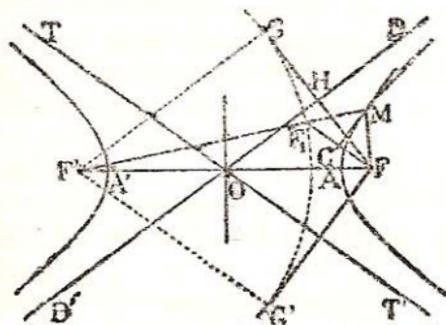


Fig. 436.

La recta FF' , que une el foco F con un punto cualquiera del círculo director relativo á F' puede llegar á ser tangente á este círculo; sea FG esta posición particular.

La perpendicular HD , levantada en la mitad

de esta recta, está tangente á la hipérbola (n° 699), y el punto de contacto está determinado por la prolongación del radio $F'G$; pero las rectas HD y $F'G$, perpendiculares á FG , son paralelas; luego el punto de contacto está infinitamente lejano del vértice A , y la línea HD es asíntota de la rama AM .

Además, esta línea DH es paralela á $F'G$, base del triángulo $F'GF$, y está trazada por el punto H , medio de FG ; luego pasa por el punto O , medio del tercer lado FF' .

Á causa de la simetría de los puntos de la curva con relación al centro, la línea DOD' es asíntota de la parte inferior de la rama de la izquierda; y la tangente FG' da una nueva asíntota TOT' .

708. Escolios. — I. Los ejes son las bisectrices de los ángulos formados por las asíntotas.

En efecto, las rectas DOD' y TOT' forman ángulos iguales con FF' , porque los ángulos $FF'G$ y $FF'G'$ son iguales.

II. El ángulo HOF es el menor ángulo que puede hacer una tangente con FF' .

III. Las tangentes á la rama de la derecha se cortan dos á dos en el ángulo DOT', y las tangentes á las dos ramas se cortan en el ángulo DOT ó en D'OT'.

709 Teorema. — Las asíntotas siguen la dirección de las diagonales del rectángulo construido sobre los dos ejes.

En el vértice, levantemos una perpendicular AL, limitada á la asíntota; los triángulos rectángulos HOF y AOL son iguales, porque tienen un ángulo agudo común, y $OH = \frac{1}{2} F'G = a = OA$, luego $OL = OF = c$; por consiguiente $AL = b$, valor del semi-eje no transverso.

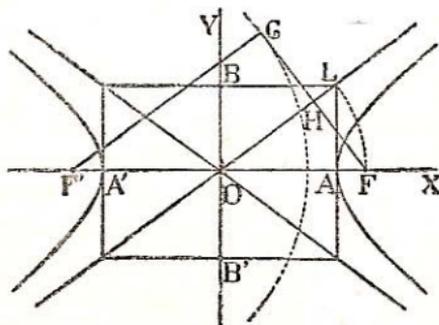


FIG. 437

710. Corolarios. — 1º La distancia FH del foco á la asíntota es igual á b.

2º Las asíntotas de la hipérbola equilátera se cortan en ángulo recto; porque $a = b$, y el rectángulo de los ejes viene á ser un cuadrado.

711. Teorema. — El lugar de las proyecciones de los focos sobre las tangentes á la hipérbola es el círculo descrito sobre el eje transverso como diámetro

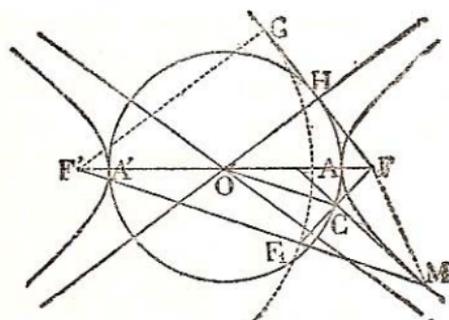


FIG. 438

Supongamos una tangente cualquiera MC, y el círculo director descrito del foco F'; tracemos OC. Los triángulos FOC y

$FF'F_1$ son semejantes y dan $\frac{OC}{F'F_1} = \frac{OF}{FF'} = \frac{1}{2}$ ó $CO = \frac{F_1F'}{2} = a$. Luego C pertenece al círculo cuyo diámetro es AA'.

CAPÍTULO III

LA PARÁBOLA

§ I. — Definiciones.

712. Definiciones. — La parábola es una curva plana en la que cada punto está igualmente lejano de una recta y de un punto fijo dados en su plano.

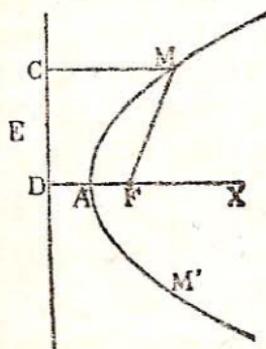


Fig. 439.

El punto fijo se llama foco.

La recta dada se llama directriz.

Se llama radio vector la recta que une el foco con un punto cualquiera de la curva.

Sean F un punto fijo, y CD una recta fija; si, por cada punto de la curva MAM' , se tiene $MF = MC$, la curva es una parábola.

El punto A , medio de la perpendicular FD , pertenece á la curva

La parábola no puede extenderse del lado de la directriz opuesta al foco; porque cualquier punto E , tomado de este lado, está más cercano de la directriz que del foco.

La distancia FD del foco á la directriz se llama parámetro, y se representa por p .

713. Trazo de la parábola. — I. Para describir la parábola por movimiento continuo, conociendo la directriz y el foco, se coloca uno de los lados del ángulo recto de una escuadra contra la directriz; un hilo igual al otro lado del ángulo recto está fijo, por sus extremidades, al vértice G de la escuadra, y al foco F ; si se hace resbalar la escuadra á lo largo de la directriz, la punta para trazar, que tiende el hilo aplicándolo contra CG , describe una parte de la parábola, porque tiene constantemente:

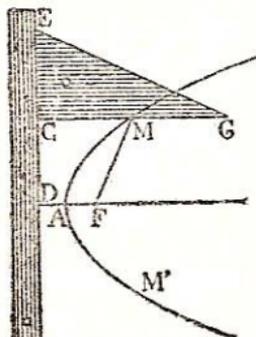


Fig. 440.

$$MF = MC$$

II. Se puede trazar la parábola por puntos, conociendo la directriz y el foco. Desde el foco, bajemos la perpendicular FD sobre la directriz, y tomemos el medio A del parámetro FD ; tracemos una recta cualquiera MM' , paralela á la directriz, y desde el foco F como centro, con un radio igual á la distancia DG de la directriz á su paralela, describamos una circunferencia; los puntos de intersección de esta circunferencia y de la recta MM' pertenecen á la parábola.

714. Observaciones. — 1° Para que la circunferencia corte á la paralela MM' se necesita tener $GD > GF$; de donde se sigue que el punto G debe siempre estar más allá de A con respecto á la directriz.

2° Cuando el punto G está en A , la circunferencia es tangente á la paralela; porque $AF = AD$, y el contacto se verifica en el punto A .

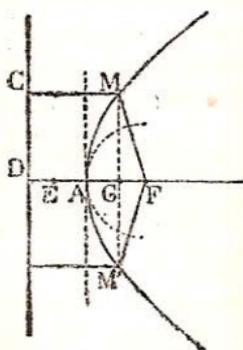


FIG. 441.

715. Escolio. — En el trazo continuo, se necesita que el hilo y el lado de la escuadra tengan longitudes iguales; pero nada limita estas longitudes. En el trazo por puntos, la paralela, siempre situada del lado del foco, puede alejarse indefinidamente de la directriz; luego *la parábola es una curva completamente situada en la región del plano en que se encuentra el foco; es continua, y se extiende indefinidamente á partir del punto A en el sentido de AM y de AM' .*

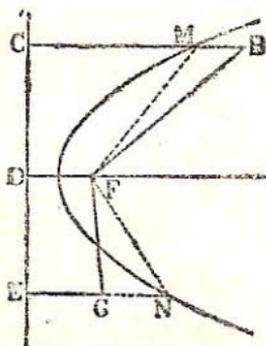


FIG. 442.

716. Interior y exterior. — *Cualquier punto interior á la parábola está más cercano del foco que de la directriz, y cualquier punto exterior está más lejano.*

1° Desde el punto interior B , bajemos BC perpendicular á la directriz, y unamos el foco á los puntos M y B . Se tiene:

$BF < BM + MF$ ó $BF < BM + MC$
ó finalmente $BF < BC$.

2º Desde el punto exterior G, tracemos la perpendicular GE, y unamos el foco á los puntos N y G. Se tiene :

$$GF > NF - NG, \text{ ó } GF > NE - NG, \text{ ó finalmente } GF > GE.$$

717 Escolio. — Según que la distancia de un punto al foco es inferior ó superior, ó igual á la distancia de este mismo punto á la directriz, este punto es interior ó exterior á la parábola, ó pertenece á esta curva, así es que la parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta y de un punto dados.

718. Simetría en la parábola. Teorema. — La parábola tiene por eje la perpendicular bajada del foco sobre la directriz.

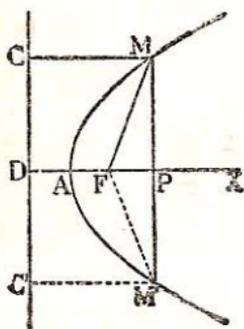


Fig. 443.

Sea M un punto cualquiera de la parábola: bajemos la perpendicular MP, y tomemos $PM' = PM$. Probemos que M', simétrico del punto dado, pertenece á la curva. Con este objeto, tracemos MF, MC, M'F, M'C', distancias de los puntos M y M' al foco y á la directriz. Puesto que FP es perpendicular á la directriz, y á MM' en su medio P, se tiene: $FM' = FM$, $M'C' = MC$; luego $M'F = M'C'$, y el punto M' pertenece á la parábola (nº 712).

Luego la perpendicular FD es un eje (nº 610).

719 Escolio. — El punto A es el único vértice de la curva. La parábola no tiene centro.

720. Problema. — Encontrar los puntos de intersección de una parábola con una recta dada.

Sea M uno de los puntos de intersección. Se tiene $MF = MP$, por pertenecer M á la parábola; siendo F_1 el simétrico de F con relación á AB, también $MF_1 = MF = MP$.

M es el centro de un círculo tangente á la directriz y que pasa por F y F_1 .

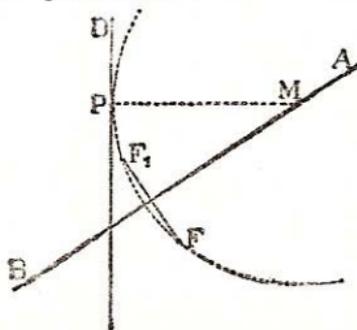


Fig. 444.

Hay que encontrar este centro.

Es un problema ya resuelto (nº 319).

Discusión. — 1º Si F_1 está en el semiplano que contiene F , hay dos soluciones, y dos puntos de intersección.

2º Si F_1 está en la directriz, sólo hay un punto de intersección; la recta AB es tangente.

3º Si F_1 está en el semiplano opuesto al que contiene F no hay ningún punto de intersección.

721. Consecuencias. — I. Una recta no puede cortar una parábola en más de dos puntos: la parábola es una curva convexa.

II. El punto simétrico del foco con relación á una tangente pertenece á la directriz, que es el lugar geométrico de estos puntos.

§ II. — Tangentes.

722. Propiedad de la tangente. — La tangente forma unos ángulos iguales con el radio vector del punto de contacto y la paralela al eje que pasa por este punto.

En efecto, según la discusión del problema anterior, F_1 es el simétrico de F con relación á AB ; luego los ángulos FMP y PMF_1 son iguales.

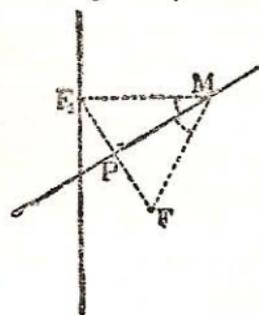


FIG. 445.

723. Consecuencias. — La normal MN es bisectriz del ángulo formado por el radio vector del punto de contacto y por la paralela al eje trazada por este mismo punto; porque los ángulos que forma con MF y MC tienen por complementos los ángulos iguales que la tangente forma con estas mismas líneas.

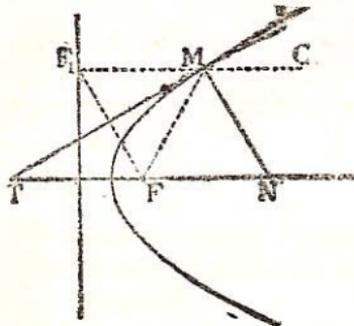


FIG. 446.

724. Teorema. — El lugar de las proyecciones del foco

sobre las tangentes á la parábola es la tangente al vértice.

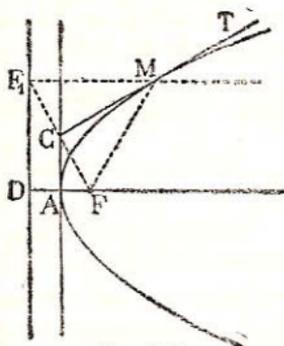


Fig. 447.

Bajemos del foco la perpendicular FCF_1 sobre una tangente cualquiera MT ; el punto F de la directriz es el simétrico del foco (n° 721), luego $FC = CF_1$; pero $FA = AD$; luego la recta AC es paralela á la directriz; ésta es la tangente al vértice.

725. Definiciones. — En la parábola, se llama *subtangente* la proyección sobre el eje de la parte de una tangente comprendida entre el punto de contacto y el punto en que la tangente corta al eje.

La *subnormal* es la proyección sobre el eje de la parte de una normal comprendida entre el punto de contacto y el punto en que esta normal corta al eje.

726. Teorema. — 1° La subtangente queda dividida en dos partes iguales por el vértice de la curva;

2° La subnormal es constante, é igual al parámetro.

1° El triángulo MFT es isósceles (n° 722). La proyección del foco sobre la tangente divide MT en dos partes iguales; pero la tangente al vértice es paralela a la ordenada MP ; luego $AP = AT$.

2° Los triángulos rectángulos F_1DF y MPN son iguales, porque $F_1D = MP$, y las hipotenusas son paralelas; luego $PN = FD$ y la *subnormal* es igual á la distancia del foco á la directriz, es decir al *parámetro* (n° 708).

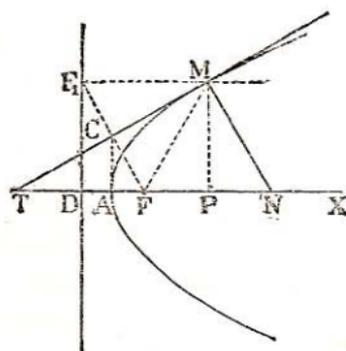


Fig. 448.

TRAZADO DE LAS TANGENTES

727. Problema — Trazar una tangente á la parábola por un punto tomado sobre la curva.

Sea M el punto dado sobre la curva.

1.^o *medio*. Proyectemos M sobre la directriz, unamos M al foco, tracemos la bisectriz del ángulo FMF_1 , y levantemos una perpendicular en la mitad de FF_1 .

2.^o *medio*. Tomemos $FT = FM$, y tracemos TM (n.^o 726).

3.^o *medio*. Cuando no se conoce el foco, se toma $AT = AP$ (n.^o 726); se levanta la perpendicular PM y se une T con M .

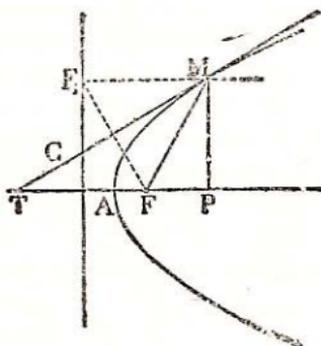


Fig. 449.

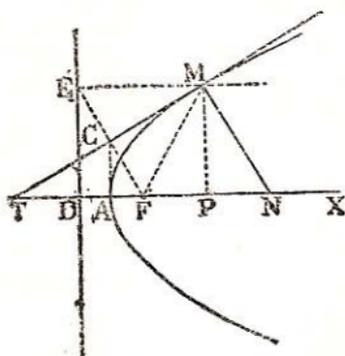


Fig. 450.

4.^o *medio* (fig. 450). Siendo la subnormal constante é igual á p , es decir á la distancia del foco á la directriz (n.^o 726) se toma $PN = FD$, se traza la normal NM y una perpendicular MT á esta normal.

728. Problema. — *Trazar una tangente á la parábola por un punto dado fuera de la curva.*

Sea P el punto exterior dado; desde este punto como centro, con la distancia PF por radio, describamos una circunferencia; la cual corta á la directriz en dos puntos. La perpendicular levantada en la mitad de BF es tangente (n.^o 721), y pasa por el punto P , centro del arco BF ; la paralela al eje da el punto de contacto M .

Hay una segunda tangente PN .

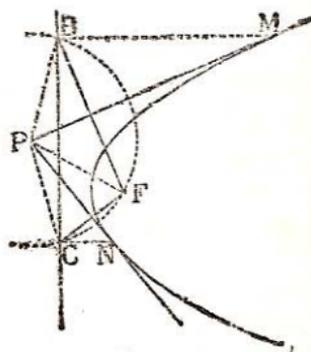


Fig. 451.

729. Problema. — *Trazar á la parábola una tangente paralela á una recta dada.*

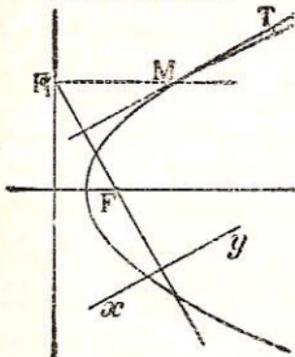


FIG. 452.

Bajemos del foco una perpendicular á la recta dada xy ; la perpendicular levantada en la mitad de FF_1 , es tangente á la parábola (nº 721), y además es paralela á xy .

§ III. — Área de la parábola.

730. Lema. — *La paralela al eje, trazada por el punto de concurso de dos tangentes á la parábola, pasa por la mitad de la cuerda de los contactos.*

Sean las dos tangentes PM y PN . Proyectemos los tres puntos M , P , N , sobre la directriz, y probemos que HP pasa por la mitad de MN , cuerda de los contactos.

Siendo PM perpendicular á la mitad de BF (nº 717), las distancias PB y PF son iguales; del mismo modo $PF = PE$; luego $PB = PE$; por ser isósceles el triángulo BPE , la perpendicular PH cae en la mitad de la base, y las paralelas equidistantes EN , HP , BM , dividen á la secante MN en dos partes iguales.

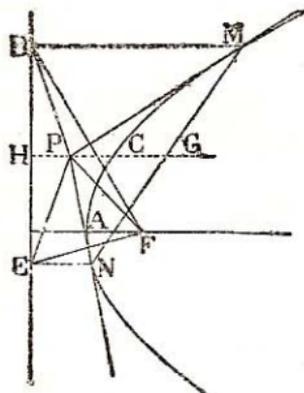


FIG. 453.

731. Corolarios. — 1º *Las tangentes PM y PN consideradas desde el punto de concurso hasta los puntos de contacto tienen proyecciones iguales sobre la directriz, porque se tiene $HE = HB$.*

2º *La recta PG que une el punto de concurso de las tangentes con la mitad de la cuerda de los contactos es paralela al eje.*

732. Teorema. — *El área del segmento parabólico limitado por la curva y por una perpendicular al eje, es los $\frac{2}{3}$ del rectángulo que tiene por dimensiones la cuerda*

considerada y la parte del eje comprendida entre esta cuerda y el vértice.

Sea el segmento MAN. Tracemos tangentes en los puntos M, M', M''; MT y M'T' se cortan en el punto B; la paralela al eje trazada por B pasa por la mitad de la cuerda de los contactos (n° 730); por consiguiente, la perpendicular DE es la semisuma de las ordenadas de los puntos M y M', y también es igual a la altura del triángulo TBT'; por otra parte el vértice de la parábola divide a la subtangente en dos partes iguales (n° 726).

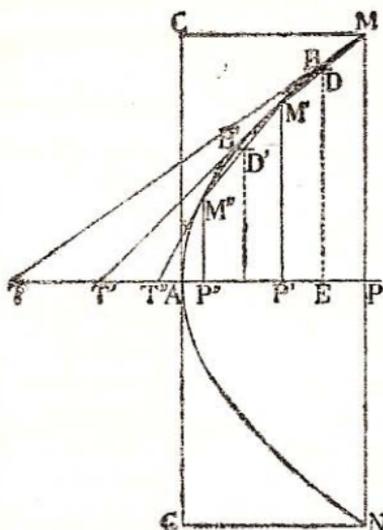


FIG. 454.

Así es que $AT = AP$, $AT' = AP'$;
luego $TT' = PP'$.

El área del triángulo es igual a $1/2 TT' \times DE$; el área del trapecio $MPM'P' = PP' \times DE$; y puesto que $TT' = PP'$, el área del trapecio es el doble de la del triángulo. Del mismo modo, la superficie $M'P'M''P = 2$ veces $T'B'T''$.

Si los puntos de contacto se multiplican indefinidamente, la suma de los trapecios tiende hacia la superficie comprendida entre el eje, el arco y la ordenada MP, y la suma de los triángulos hacia la superficie limitada por MT, el eje y la curva; luego la superficie parabólica $MAP = 2$ veces MAT, es igual a los $2/3$ de la suma MTP, y puesto que $AT = AP$, la superficie del triángulo PMT es igual a la superficie del rectángulo ACMP.

Se obtiene el mismo resultado para la parte inferior del segmento :

luego $\text{área MAN} = 2/3 AP \times MN$.

Representando la abscisa AP por x , la ordenada MP por y ,
se escribe $\text{área MAP} = 2/3 xy$.

§ IV. — Relaciones entre la elipse, la hipérbola y la parábola.

733. — Se ha podido notar muchas semejanzas entre las propiedades de la *elipse*, del *círculo director*, del *círculo principal*, por una parte, y de la *parábola*, la *directriz* y la *tangente en el vértice*, por otra parte. Se explican estas semejanzas por los Teoremas siguientes.

734. Teorema. — *La parábola es el límite hacia el cual tiende una elipse en la cual un vértice y el foco inmediato permanecen fijos, mientras que el eje mayor crece indefinidamente.*

Describamos el círculo director relativo al foco F' ; para un punto cualquiera M de la elipse se tiene :

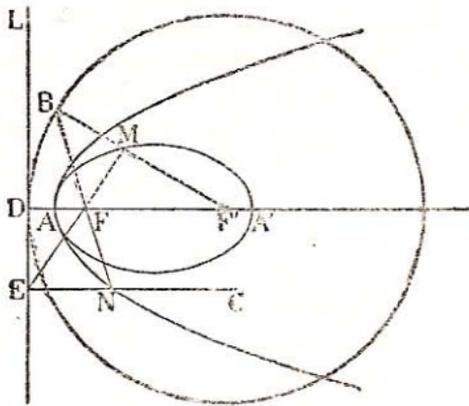


FIG. 435.

$MB = MF$. Permaneciendo fijos los puntos D , A y F , el foco F' se aleja más y más cuando el eje mayor aumenta; la perpendicular DL es el límite hacia el cual tiende el círculo director que le es tangente en el punto D , la recta MB , normal al círculo, tiende a ser paralela al eje, o perpendicular a DL , se tiene siempre $NE = NF$. La figura límite es la parábola AN ; A es el vértice, F el foco, y DL la directriz.

Se ve que, cuando la elipse se transforma así en parábola, el círculo director tiene como límite la direc-

triz y el círculo principal tiene como límite la tangente en el vértice.

734 bis. Teoremas de Dandelin. Primero. — *La sección de un cono de revolución por un plano que corta todas las generatrices es una elipse.*

Sea el cono S , y el plano P , que corta el cono según una curva que se quiere determinar.

Consideremos las esferas inscritas en el cono, y tangentes a este plano, en los puntos F y F' .

Sea M un punto de la sección.

Tracemos la generatriz SM .

La distancia MF es igual a MI ;

La distancia MF' es igual a MI' ;

y tenemos $MF + MF' = H'$, longitud constante.

El lugar de M es una elipse, cuyos focos son los puntos F y F' .

Se podría demostrar el teorema por un cilindro, del mismo modo.

Segundo. — *La sección de un cono de revolución por un plano paralelo a una de las generatrices es una parábola.*

Sea el cono S y el plano P .

Consideremos la esfera inscrita en el cono y tangente al plano P en el punto F .

Sea M un punto de la sección.

Se tiene $MF = MI$

Considerando la intersección del plano P con el del círculo,

tenemos $MI = PD = ME$

y $MF = ME$.

Luego, el lugar es una parábola.

Tercero. — *La sección de un cono de revolución por un plano que corta los dos mantos es una hipérbola.*

Sea el cono S .

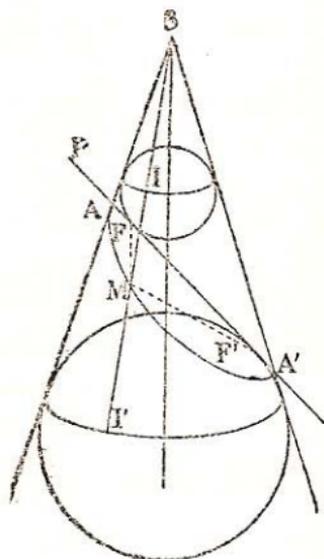


FIG. 455a.

Considerando las esferas inscritas, como en los teoremas anteriores tendremos

$$\begin{aligned} MF' &= MF'_1 \\ MF &= MF_1 \\ MF' - MF &= MF'_1 - MF_1 = F_1F'_1 \end{aligned}$$

longitud constante.

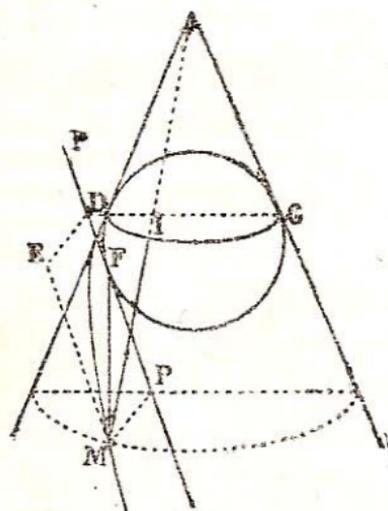


Fig. 455b.

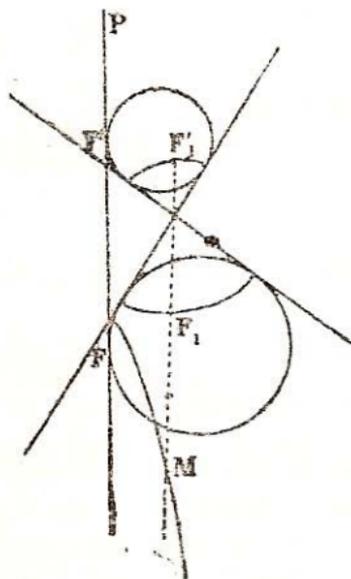


Fig. 455c.

Luego, el lugar pedido es una hipérbola cuyos focos son los puntos F y F' .

Observación. — Estos teoremas se relacionan directamente con el anterior; en efecto, si el plano que corta todas las generatrices del cono se mueve al rededor del punto A hasta hacerse paralelo a SA' , la elipse se va alargando y al fin se transforma en parábola; si el plano gira un poco más en el mismo sentido, corta los dos mantos, y la sección es una hipérbola.

CAPÍTULO IV

HELICE

735. Definiciones. — Hélice es la curva formada sobre un cilindro recto por uno de los lados de un ángulo que

ce enrolla sobre este cilindro, aplicándose el otro sobre la circunferencia de la base.

Se llama espira la parte de la hélice que corresponde á una vuelta completa.

Sea r el radio del cilindro; tomemos $OB = BC = 2\pi r$.

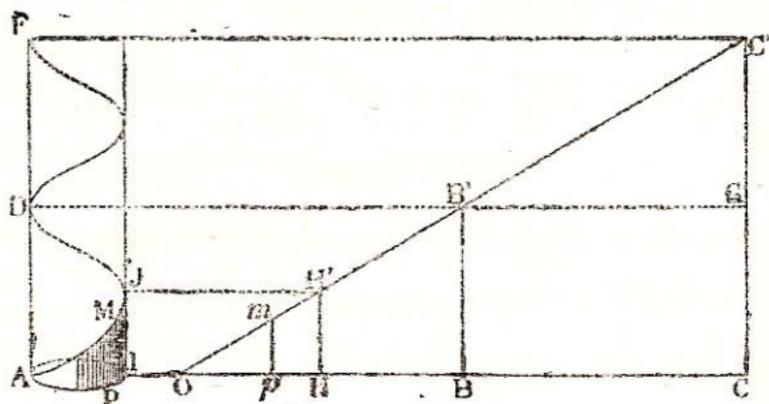


Fig. 456.

Si el ángulo COC' está enrollado sobre el cilindro á partir del punto A , el punto B' caerá en D , y C' en F . Se tiene $GC' = GC$; luego $DF = DA$; esta distancia se llama paso de la hélice.

La ordenada de un punto M de la hélice es la distancia MP medida sobre la generatriz.

La abscisa curvilínea de un punto M de la hélice es el arco AP que corresponde á la parte AM de la hélice que se considera.

736. Teorema. — *La ordenada y la abscisa curvilínea de un punto cualquiera de la hélice están entre si en una relación constante.*

Sea *avn* el desarrollo de la superficie curva $APVN$, de suerte que se tenga:

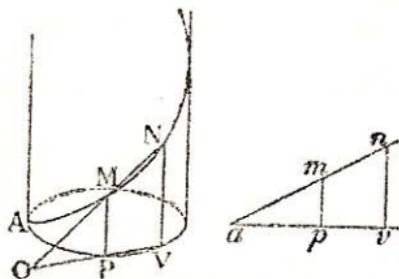


Fig. 457.

$ap = \text{arco } AP$ y $mp = MP$,
 $av = \text{arco } AV$ y $nv = NV$.

Se tendrán las razones iguales :

$$\frac{MP}{\text{arco AP}} = \frac{mp}{ap}$$

$$\frac{NV}{\text{arco AV}} = \frac{nv}{av};$$

pero $\frac{mp}{ap} = \frac{nv}{av}$, luego $\frac{MP}{\text{arco AP}} = \frac{NV}{\text{arco AV}}$.

La relación constante ó $\frac{MP}{\text{arco AP}}$ es igual á la tangente trigonométrica $\frac{mp}{ap}$ del ángulo enrollado.

737. Teorema. — *La sub-tangente es igual á la abscisa curvilinea del punto considerado.*

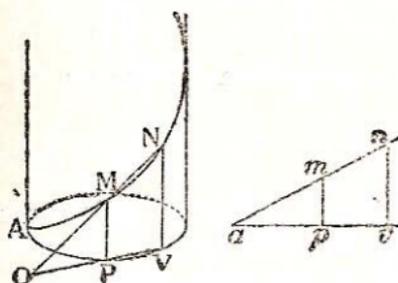


Fig. 458

La subtangente es la proyección, sobre el plano de la base del cilindro, de la parte de la tangente comprendida entre el punto de contacto y el punto en que encuentra al plano de la base.

Tomemos dos puntos M y N poco distantes el uno del otro; hagamos pasar un plano por las generatrices correspondientes.

La secante NMO tiene por proyección VPO, y se tiene :

$$\frac{OV}{OP} = \frac{VN}{PM}; \text{ pero } \frac{VN}{PM} = \frac{vn}{pm} = \frac{av}{ap},$$

luego $\frac{OV}{OP} = \frac{av}{ap}$; de donde $\frac{OV - OP}{av - ap} = \frac{OP}{ap}$ ó $\frac{PV}{pv} = \frac{OP}{ap}$;

pero $pv = \text{arco PV}$, $ap = \text{arco AP}$; luego $\frac{PV}{\text{arco PV}} = \frac{OP}{\text{arco AP}}$.

Como cuando M y N se acercan indefinidamente, la relación $\frac{PV}{\text{arco PV}}$ tiende hacia la unidad, lo mismo

sucede con la relación $\frac{OP}{\text{arco AP}}$; por tanto cuando la recta MNO es tangente al punto M, la subtangente OP es igual al arco AP.

738. Problema. — Por un punto de la hélice, trazar una tangente á la curva.

Sea M el punto dado, y P su proyección sobre la tangente á la circunferencia; tomemos $PO = \text{arco AP}$ (nº 737), y unamos M al punto O. Esta recta OM es la tangente.

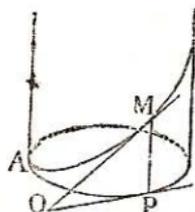


Fig. 459

739. Teorema. — Las tangentes á la hélice encuentran al plano de la base bajo un ángulo constante (fig. 460).

Se tiene siempre : $\text{Tangente del ángulo } O = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{\text{arco AP}}$; como esta relación es constante (nº 736), queda demostrado lo que se quería.

740. Escolio. — Las tangentes encuentran á las generatrices bajo un ángulo constante, y este ángulo es el complemento del que forma una tangente cualquiera con el plano de la base.

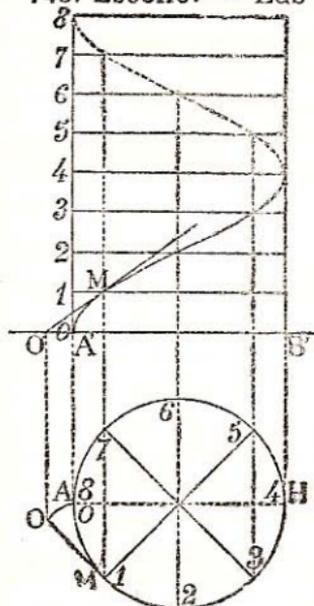


Fig. 460.

741. Problema. — 1º Trazar la proyección de una hélice sobre un plano paralelo al eje del cilindro; 2º trazar la tangente en un punto de la curva obtenida.

La ordenada y la abscisa curvilínea de cada punto de la curva están en una relación constante (nº 736); esta relación es además igual á la relación entre el paso de la hélice y la circunferencia del cilindro; luego, para obtener rápidamente las coordenadas correspondientes se puede proceder como sigue :

pendientes se puede proceder como sigue :

1° Dividir la circunferencia de la base y el *paso* de la hélice en un mismo número de partes iguales; por los puntos de división tomados sobre la generatriz trazar perpendiculares al eje, y, por los puntos de la circunferencia, paralelas á este mismo eje; las intersecciones de las líneas del mismo lado pertenecen á la hélice, basta unir las por una línea continua;

2° Sea M' el punto dado; se traza la tangente al punto M de la proyección horizontal; en seguida se toma $MO = \text{arco } MA$; el punto O así determinado es la *huella horizontal* de la tangente á la hélice, es decir el punto en que esta tangente encuentra al plano de la base (n° 737).

Este punto O se proyecta pues verticalmente en O' sobre $A'B'$; la recta que une O' con M' es la proyección vertical de la tangente á la hélice, y es tangente á la proyección vertical de esta hélice.

NOTA CON RELACIÓN AL TEOREMA DE GULDIN

742. — En las Colecciones matemáticas de Pappus, geómetra griego del IV siglo, se encuentra, para la valuación de las superficies y de los sólidos de revolución, una fórmula que ha sido repetida y demostrada, en el XVII siglo, por el P. Guldín.

Para exponer esta cuestión, debemos recordar aquí una noción tomada de la mecánica, sobre los centros de gravedad de las figuras.

743. Definición. — Se llama centro de las medianas distancias de varios puntos de un plano, un punto tal que su distancia á una recta cualquiera del plano sea la mediana aritmética de las distancias de los otros puntos á esta misma recta.

744. Teorema. — Para un sistema cualquiera de puntos dados, sobre un plano, hay un centro de las medianas distancias.

Sean A, B, C, D , cuatro puntos cualesquiera de un plano, y MN una recta cualquiera trazada en este plano

Los puntos dados pueden ser considerados como los vértices de un polígono $A B C D$; los medios de los lados son los vértices de un segundo polígono $E F K I$; los medios de los lados de este último son los vértices de un nuevo polígono, y así del mismo modo indefinidamente. Estos polígonos sucesivos son más y más pequeños, y sus vértices tienden á confundirse en cierto punto O .

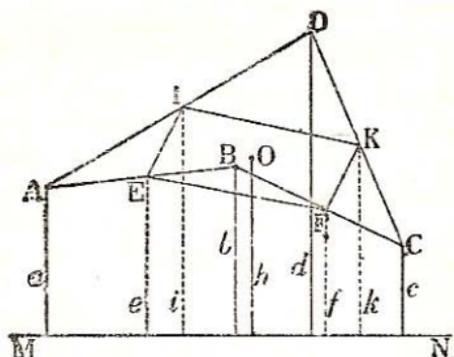


FIG. 461.

Vamos á probar que este punto es el *centro de las medianas distancias* de los puntos dados.

Desde los puntos A, B, C, D, E, F, \dots bajemos sobre la recta $M N$ las perpendiculares a, b, c, d, e, f, \dots Estas perpendiculares ú ordenadas determinan trapezios que dan :

$$e = \frac{1}{2}(a + b); f = \frac{1}{2}(b + c); k = \frac{1}{2}(c + d); i = \frac{1}{2}(d + a).$$

Sumando miembro á miembro y reduciendo, se obtiene

$$e + f + k + i = a + b + c + d.$$

Por lo tanto la suma de las cuatro ordenadas del primer polígono es igual á la suma de las cuatro ordenadas del segundo; y se probaría del mismo modo que esta suma es constante cuando se pasa á un tercer polígono, después á un cuarto, y así sucesivamente.

Y puesto que los cuatro vértices tienden á confundirse en un mismo punto O , las cuatro ordenadas tienden á llegar á ser iguales á h ; se tiene pues $4h = a + b + c + d$, y $h = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$, que es lo que se quería demostrar.

Si se trata de n puntos se encontrará del mismo modo $nh = a + b + c + d + \dots$ y $h = \frac{1}{n}(a + b + c + \dots)$

745. Definición. — El centro de las distancias medias de todos los puntos de una superficie plana se llama

centro de gravedad de la superficie; se puede designar este punto por G.

746. Ejemplos. I. Líneas. — 1° Por motivo de simetría el centro de gravedad de un segmento de recta es el punto medio de este segmento;

2° Por el mismo motivo, en todas las figuras planas que tienen un centro de simetría, el centro de gravedad de perímetro coincide con este centro de figura: V. gr. el paralelogramo, el círculo, un polígono regular teniendo un número par de lados;

3° Si se considera una línea poligonal regular, el centro de gravedad está en el eje de simetría Ol , y á una distancia r del centro tal que $r = a \times \frac{p}{L}$, siendo a el apotema de la línea, p la proyección de la línea sobre el eje de rotación, y L la longitud de la línea.

En efecto, sea r la distancia. Se tiene

$$3r = a + 2m;$$

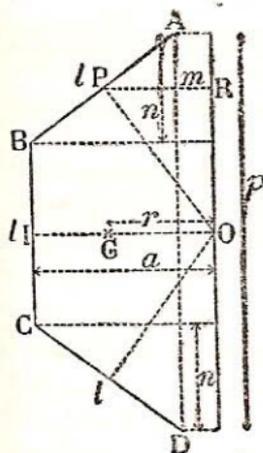


Fig. 462.

pero, los triángulos semejantes POR y ABE dan

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{l}$$

$$m = \frac{an}{l},$$

de donde

$$3r = a + \frac{2an}{l} = \frac{a}{l} [l + 2n],$$

$$\text{ó } r \times 3l = a(l + 2n),$$

$$\text{ó } r \times L = ap,$$

$$\text{sea } r = a \frac{p}{L}.$$

Aplicación. — La semicircunferencia puede considerarse como límite de una línea poligonal, y se tiene

$$r = a \times \frac{\frac{2}{\pi} a}{\pi a} = \frac{2}{\pi} a.$$

II. Superficies. 1° Por motivo de simetría, el centro de

gravedad de la superficie de un triángulo debe pertenecer á cada mediana; luego estará en su punto de intersección.

2º Por el mismo motivo, en las figuras planas que tienen un centro de simetría, el centro de gravedad de la superficie se confunde con este centro.

3º Si se considera un sector poligonal regular, su centro de gravedad será el centro de gravedad de los puntos A, B, C, etc., centros de gravedad de los triángulos que forman el sector.

4º Un sector circular es el límite del sector poligonal anterior cuando se hacen infinitamente pequeños los triángulos. Entonces los centros de gravedad de estos triángulos forman un arco cuyo radio es $\frac{2}{3} a$ siendo a el radio del sector; y la distancia del centro de gravedad á O será

$$r_1 = \frac{2}{3} a \frac{p}{L}.$$

Aplicación. — El centro de gravedad de la semicircunferencia estará á una distancia

$$r_1 = \frac{2}{3} a \frac{2a}{\pi a} = \frac{4a}{3\pi}.$$

747. Teorema de Guldin. — I. La superficie engendrada por una línea plana que gira alrededor de un eje situado en su plano, tiene por medida el producto de la longitud de esta línea por la circunferencia que describe su centro de gravedad.

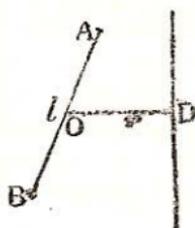


Fig. 464.

1º El enunciado conviene cuando la línea es un segmento de recta; en efecto, su centro de gravedad es el punto medio, y el área del trozo de cono engendrado es $2\pi r \times l$.

2º El enunciado conviene cuando la línea es una línea

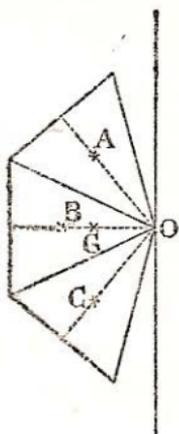


Fig. 463.

quebrada regular. En efecto, los varios trozos de cono engendrados tienen como área

$$S = 2\pi rl + 2\pi r_1 l + 2\pi r_2 l \\ = l \times 2\pi (r + r_1 + r_2).$$

Pero $r + r_1 + r_2 = 3R$, siendo R la distancia del centro de gravedad; y $S = l \times 2\pi \times 3R = 3l \times 2\pi R$, sea la longitud de la línea por la circunferencia descrita por el centro de gravedad.

3º El enunciado conviene por una línea cualquiera.



FIG. 465.

Dividamos esta línea en n partes iguales, siendo n un número que crece

indefinidamente; llamemos v la longitud de cada parte; por todos los puntos medios de estas partes, y por el punto g , tracemos al eje perpendiculares ú ordenadas $a, b, c, \dots h$.

Cada elemento v describe una superficie que se puede considerar como la superficie lateral de un trozo de cono.

Las áreas respectivas son $v \times 2\pi a, v \times 2\pi b, v \times 2\pi c, v \times 2\pi d, \dots (n^\circ 611)$; y el área total es

$$2\pi v (a + b + c + \dots + y + z).$$

Como la suma de las n ordenadas a, b, c, d, \dots es igual á n veces la ordenada h del centro de gravedad de la línea ACIJ; se tiene pues para la expresión de la superficie buscada $2\pi v \times nh$ ó $2\pi h \times nv$, ó finalmente $ACIJ \times 2\pi h$, es decir el producto de la línea generatriz, por la circunferencia que describe su centro de gravedad.

Aplicación. — La esfera es engendrada por una semicircunferencia; tendrá como superficie

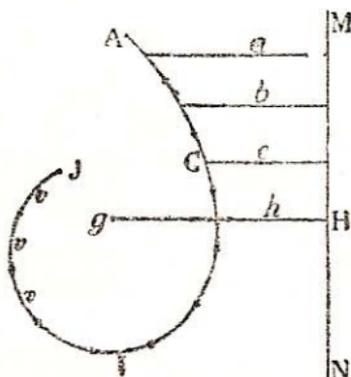


FIG. 466.

$$2a \times 2\pi \times \frac{2a}{\pi} = 4\pi a^2$$

743. Teorema II. — *El volumen engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje situado en su plano es igual al producto del área de esta superficie por la circunferencia descrita por el centro de gravedad.*



FIG. 467.

I. Caso particular. — *Volumen engendrado por un rectángulo que gira alrededor de un eje paralelo á uno de sus lados.*

Este volumen es la diferencia de dos cilindros; se tiene

$$V = \pi b_1^2 a - \pi b^2 a = \pi a [b_1^2 - b^2]$$

$$\text{ó} \quad \pi a (b_1 - b) (b_1 + b);$$

$$\text{pero} \quad a (b_1 - b) = S$$

área del rectángulo,

y $b_1 + b = 2r$, siendo r el radio de la circunferencia descrita por el centro de gravedad.

$$\text{Luego} \quad V = \pi S \times 2r = S \times 2\pi r.$$

II. Caso general. — *El volumen de un cuerpo de revolución es igual al producto de la superficie plana generatriz, por la circunferencia que describe el centro de gravedad de esta superficie.*

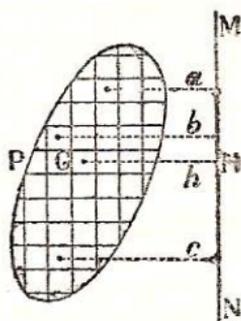


FIG. 468.

Sea la figura plana P completamente situada de un mismo lado del eje de revolución MN, y sea G el centro de gravedad de la superficie.

Tracemos sobre esta figura y paralelamente al eje líneas equidistantes que supondremos multiplicadas indefinidamente, por ejemplo duplicándolas á cada nueva construcción.

y crucemos estas líneas por un segundo haz perpendicular al primero, con la misma distancia v entre las líneas.

La figura P queda así descompuesta en n pequeños cuadrados que tienen v por lado, y hay además hacia

el perímetro, partes no cuadradas cuya suma tiende hacia cero.

Llamamos h la distancia del eje al centro de gravedad G , y a, b, c, d, \dots , las distancias respectivas del eje á los medios de los pequeños cuadrados de la figura.

Cada uno de estos cuadrados engendra un anillo cilíndrico cuyo volumen es igual al cuadrado generador multiplicado por la circunferencia que describe el punto medio de este mismo cuadrado. Los volúmenes respectivos son pues $v^2 \times 2\pi a$, $v^2 \times 2\pi b$, $v^2 \times 2\pi c$, $v^2 \times 2\pi d, \dots$, y el volumen total es $2\pi v^2 (a + b + c + d + \dots)$.

Por otra parte, la suma de las n perpendiculares ú ordenadas a, b, c, d, \dots es igual á n veces la ordenada h del centro de gravedad de la figura (nº 744); luego el volumen buscado es igual á $2\pi v^2 \times nh = nv^2 \times 2\pi h$, ó finalmente $P \times 2\pi h$, es decir *el producto de la superficie generatriz por la circunferencia que describe su centro de gravedad*.

749. Corolario. — El toro ó anillo es el volumen engendrado por un círculo que hace una revolución completa alrededor de un eje situado en su plano. Si r es el radio del círculo, y d la distancia de su centro al eje, se tiene :

$$\text{Superficie del toro} = 2\pi r \times 2\pi d = 4\pi^2 rd.$$

$$\text{Volumen del toro} = \pi r^2 \times 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d.$$

Aplicación. — El volumen de la esfera es

$$\frac{\pi a^3}{2} \times 2\pi \times \frac{4a}{3\pi} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

750. Escolio general. — Toda revolución parcial de n grados da un huso que es los $\frac{n}{360}$ de la figura entera.

El teorema de Guldin es aplicable á todas las superficies y á todos los volúmenes de revolución ya estudiados. Por ejemplo :

El área del círculo ó del sector es igual al producto del radio descriptor por la circunferencia ó por el arco que describe su medio;

El área de la corona circular ó de su sector es igual

al producto de la recta generatriz por la circunferencia ó por el arco que describe su medio;

La superficie lateral de un cilindro, de un cono, de un trozo de cono ó de un huso de estos tres cuerpos, es igual al producto de la recta generatriz por la circunferencia ó por el arco que describe su medio;

El volumen de un cilindro, de un cono, de un trozo de cono o de una cuña de estos tres cuerpos, es igual al producto de la superficie generatriz por la circunferencia o por el arco que describe su centro de gravedad;

El volumen de un anillo cilíndrico, o de su cuña, es igual al producto del rectángulo generador por la circunferencia ó por el arco que describe su centro;

El área de la zona esférica, ó de su huso, es igual al producto del arco generador por la circunferencia ó por el arco que describe su centro de gravedad;

El área de la esfera, ó de su huso, es igual al producto de la semicircunferencia generatriz por la circunferencia ó por el arco que describe su centro de gravedad;

El volumen del sector esférico, ó de su cuña, es igual al producto del sector plano generador por la circunferencia ó por el arco que describe su centro de gravedad;

El volumen del segmento esférico, ó de su cuña, es igual al producto del semi-segmento generador por la circunferencia ó por el arco que describe su centro de gravedad;

El volumen de la esfera, ó de su cuña esférica, es igual al producto del semi-círculo generador por la circunferencia ó por el arco que describe su centro de gravedad.

EJERCICIOS PROPUESTOS

LIBROS I y II.

1. — Conociendo los ángulos A, B, C de un triángulo: $A = 83^{\circ}30'$, $B = 56^{\circ}30'$, $C = 40^{\circ}$, — calcular el ángulo formado por 2 alturas.

2. — Mismo triángulo; calcular el ángulo formado por dos bisectrices interiores.

3. — Mismo triángulo; calcular el ángulo formado por dos bisectrices exteriores.

4. — Mismo triángulo; calcular el ángulo formado por una altura y una bisectriz interior.

5. — Mismo triángulo; calcular el ángulo formado por una altura y una bisectriz exterior.

6. — Dadas dos rectas paralelas, se toma en una un punto A y en la otra un punto B. Se toma otro punto C, en el segmento AB; se llevan después en las paralelas, de un mismo lado de AB, un segmento $AD = AC$, y otro, $BE = BC$. Siendo α el ángulo CAD, calcular el ángulo DCE. Examinar si el resultado depende de α .

7. — Construir un triángulo, conociendo dos lados b y c y la altura h relativa al tercer lado.

8. — Construir un triángulo isósceles, conociendo la altura h , y uno de los lados iguales b .

9. — Construir un triángulo isósceles, conociendo la altura h , y el ángulo en el vértice A.

10. — Construir un triángulo isósceles conociendo la altura h y un ángulo en la base B.

11. — Construir un triángulo isósceles, conociendo la base a y el ángulo opuesto A.

12. — Construir un triángulo isósceles, conociendo la base a y un ángulo adyacente B.

13. — Construir un triángulo isósceles, conociendo la base a y el perímetro $2p$.

14. — Construir un triángulo, conociendo el perímetro $2p$ y los ángulos A, B, C.

15. — Construir un triángulo isósceles, conociendo el perímetro $2p$ y la altura h .

16. — En un papel cuya cara es blanca y cuya vuelta es negra, falta un pedazo triangular. Se corta en el mismo papel un triángulo igual, pero al revés. ¿Se puede utilizar para tapar el otro?

17. — Construir un triángulo cualquiera, conociendo los puntos medios de los lados.

18. — Construir un triángulo conociendo un lado y el ortocentro.

19. — Construir un triángulo equilátero, conociendo la altura h .

20. — Trazar, por un punto A, una recta equidistante de dos puntos dados B y C.

21. — Trazar una recta equidistante de tres puntos dados.

22. — Construir un triángulo, conociendo la base a , el ángulo B, y la suma $b + c = l$ de los otros dos lados.

23. — Construir un triángulo, conociendo la base a , el ángulo B, y la diferencia $c - b = d$ de los otros dos lados.

24. — Construir un triángulo rectángulo, conociendo el ángulo B, y la diferencia $b - c = d$ de los catetos.

25. — Construir un triángulo rectángulo, conociendo el ángulo B y la suma $b + c = l$ de los catetos.

26. — Construir un triángulo rectángulo, conociendo un cateto b , y la suma $a + c = l$ de la hipotenusa y del otro cateto.

27. Construir un triángulo rectángulo, conociendo un cateto b , y la diferencia $a - c = d$ de la hipotenusa y del otro cateto.

28. — Construir un triángulo rectángulo, conociendo el ángulo B y la altura h .

29. — Construir un triángulo, conociendo la base a , el ángulo B y la mediana l relativa á la base.

30. — Encontrar, sobre una recta, un punto equidistante de dos puntos dados.

31. — Encontrar un punto que sea el vértice común de dos triángulos isósceles cuyas bases son dos segmentos dados.

32. — Encontrar un punto tal que, si se lo une con los extremos de dos segmentos iguales dados, se obtiene dos triángulos iguales.

33. — Construir un cuadrilátero, conociendo los cuatro lados y una diagonal.

34. — Construir un cuadrilátero, conociendo tres lados y las diagonales.

35. — Construir un cuadrilátero, conociendo tres lados, una diagonal y el ángulo que forman entre sí las diagonales.

36. — Trazar un segmento cuyos extremos estén en dos segmentos dados, que sea igual á un segmento dado, y paralelo á una recta dada.

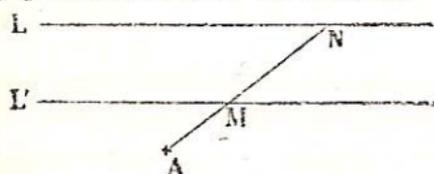


Fig. 469.

37. — Dado el punto A y las rectas L y L', trazar AN de modo que MN tenga una longitud l.

38. — Trazar el menor camino entre A y B, sabiendo que CD debe ser paralelo á la recta MN.

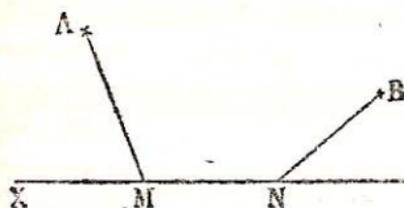


Fig. 471.

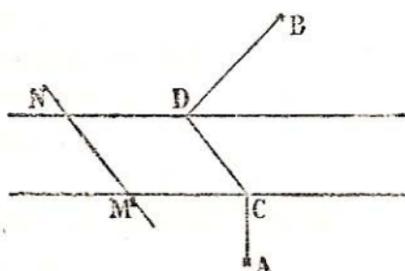


Fig. 470.

39. — Se dan los puntos A y B y la recta XX' ; MN debe tener una longitud determinada. Trazar

el camino más corto AMNB.

40. — Construir un trapecio, conociendo los cuatro lados.

41. — Construir un trapecio, conociendo las bases y los ángulos en la base.

42. — ¿Cuál es el polígono que tiene 170 diagonales?

43. — ¿Cuál es el polígono convexo que tiene tantas diagonales como lados?

44. — Trazar el menor camino de A á B, debiendo el camino tocar los lados del ángulo O.

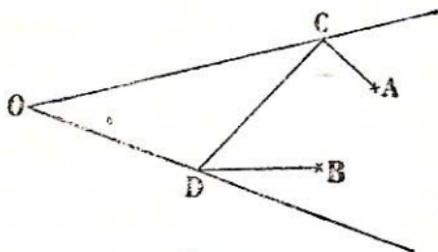


FIG. 472.

45. — Una recta Δ pasa entre dos circunferencias. Trazar un segmento perpendicular á Δ , cuyos extremos estén en las circunferencias, y cuyo punto medio esté en Δ .

46. — Construir un cuadrado ABCD, sabiendo que A y C están en una recta L, B en otra recta M y D en un círculo O.

47. — Construir un cuadrilátero cuyos lados son a, b, c, d , sabiendo que la diagonal entre a y d es bisectriz.

48. — Se une el vértice A de un triángulo ABC á un punto D de la base. Encontrar sobre AD un punto tal que los segmentos DB y DC se vean bajo el mismo ángulo.

49. — Por un punto dado trazar un segmento cuyos extremos estén en una recta dada y en un círculo dado, y tal que el punto dado sea su punto medio.

50. — Trazar una circunferencia que pase á una distancia d de tres puntos dados.

51. — Trazar una circunferencia equidistante de tres puntos dados y tal que su radio sea r .

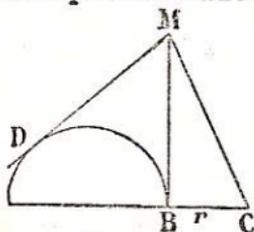


FIG. 473.

52. — Trazar una circunferencia equidistante de cuatro puntos dados.

53. — Siendo BC igual al radio del círculo, y MB la tangente en B, demostrar que $DMC = 3 \cdot BMC$.

54. — Construir un círculo cuyo

radio se conoce, y que sea tangente á los dos lados de un ángulo dado.

55. — Construir un círculo de radio dado, tangente á un círculo y á una recta.

56. — Construir un círculo de radio dado, y tangente á otros dos círculos conocidos.

57. — Construir un círculo tangente á una recta dada en un punto dado, y á otro círculo.

58. — Construir un círculo tangente á un círculo dado en un punto dado y á una recta.

59. — Construir un triángulo isósceles, conociendo la base a y el radio r del círculo inscrito.

60. — Construir un triángulo, conociendo un lado, la suma de los otros dos, y la altura relativa á uno de estos.

61. — Dados dos puntos por centros, describir dos circunferencias tangentes exteriormente, y tales que la diferencia de sus radios sea un segmento a .

62. — Dados los dos centros, describir dos círculos tangentes interiormente y tales que la suma de sus radios sea l .

63. — Construir un triángulo, conociendo la base a y las alturas h_1 y h_2 relativas á los otros dos lados.

64. — Inscribir un círculo en un cuadrilátero que tiene dos lados consecutivos iguales, así como los otros dos.

65. — Trazar en un círculo una cuerda cuya longitud se conoce, y tal que una cuerda ya trazada la divida en dos partes iguales.

66. — Trazar una recta equidistante de dos puntos dados, conociendo su distancia á un tercer punto.

67. — Encontrar sobre una recta ó sobre una circunferencia un punto tal que las tangentes á una circunferencia que salen de este punto, tengan una longitud dada.

68. — En un círculo trazar una cuerda tal que la diferencia de los arcos que determina en la circunferencia sea igual á cierto arco dado.

69. — Dadas dos rectas paralelas, describir una circunferencia tangente á una de ellas y que corte en la otra un segmento dado.

70. — Describir una circunferencia que pase por dos puntos dados y cuya cuerda común con una circunferencia dada sea paralela á una recta dada.

71. — Describir una circunferencia tangente á dos circunferencias concéntricas dadas y que pase por un punto dado entre las dos.

72. — Lugar del punto simétrico de un punto A con relación á todas las rectas que pasan por un punto fijo O.

73. — Lugar de los centros de las circunferencias que tienen un radio dado y pasan por un punto dado.

74. — Lugar de los centros de las circunferencias tangentes en un punto dado á una circunferencia dada.

75. — Lugar de los centros de las circunferencias que tienen un radio dado y son tangentes á una circunferencia dada.

76. — Lugar de los centros de las circunferencias tangentes á dos circunferencias concéntricas dadas.

77. — Lugar de los centros de las circunferencias cuyo radio es r , y que tienen con una circunferencia dada una cuerda común cuya longitud es l .

78. — Lugar de los puntos medios de las cuerdas de un círculo tales que su longitud sea l .

79. — Lugar de los puntos tales que las tangentes que salen de uno de estos puntos á una circunferencia dada formen un ángulo dado.

LIBRO III

80. — Construir un triángulo, conociendo la base y las medianas relativas á los otros dos lados.

81. — Construir un triángulo, conociendo dos medianas y un lado adyacente.

82. — Construir un triángulo, conociendo dos lados y la mediana relativa á uno de ellos.

83. — Una recta paralela á un lado de un triángulo determina sobre un segundo lado dos segmentos de 18 y 7 metros. ¿Cuáles son los segmentos determinados en el otro lado, cuya longitud es 30 metros?

84. — Dos lados de un triángulo tienen 158 y 176 metros; á partir del vértice común, se lleva 120 metros sobre el primero. ¿Qué longitud se necesita llevar sobre el segundo, para que la recta que une los puntos obtenidos sea paralela al tercer lado?

85. — Los lados de un triángulo tienen por longitudes $AB = 18$, $AC = 27$, $BC = 36$ metros; se trazan á este último lado las paralelas x é y que determinan sobre el primer lado desde el vértice A tres segmentos iguales á 8, 6, y 4 metros. Calcular los segmentos determinados sobre AC y las longitudes de las paralelas.

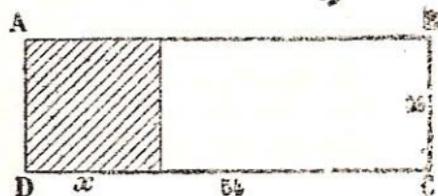


Fig. 474.

86. — Las dimensiones de un rectángulo son 54 y 36 metros. Determinar la altura de un rectángulo semejante al rectángulo dado, y cuya

base es 36 metros.

87. — Se tiene un rectángulo cuyos lados son 30 y 20 metros; encontrar las dimensiones de un segundo rectángulo semejante al primero y cuyo perímetro sea 360 metros.

88. — En el triángulo ABC se traza MN paralela á la base; determinar x para que el perímetro del triángulo AMN sea igual al perímetro del trapecio MNCB.

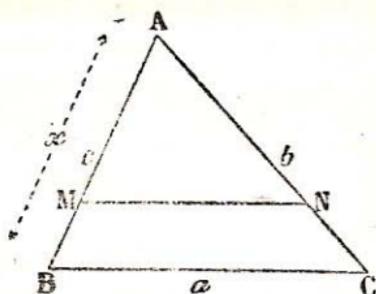


FIG. 475.

89. — En el lado OA del

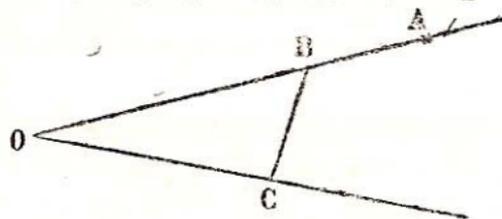


FIG. 476.

ángulo O, encontrar un punto B equidistante de A y del lado OC.

90. — Por un punto M de un triángulo ABC se trazan dos paralelas z é y á los otros dos lados; determinar x para que $z + y = m + n$.

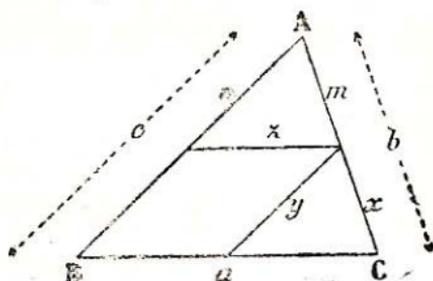


FIG. 477.

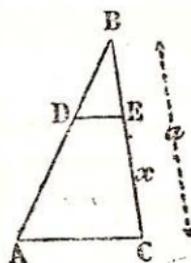


FIG. 478.

91. — En el triángulo isósceles BAC se traza DE paralela á la base. Determinar x para que $DE = EC - BE$.

92. — Se da un punto A, dos paralelas L y L', y el punto B en L. Trazar AN de modo que $BN = BM$.

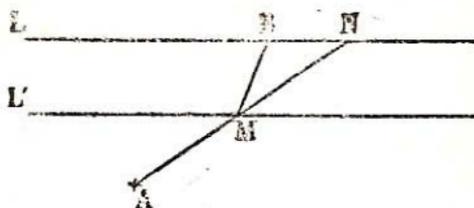


FIG. 479.

93. — Construir un triángulo rectángulo, conociendo la mediana y la altura relativas á la hipotenusa.

94. — El segmento AB mide 23 cm., el segmento AM, 15 cm. ¿Cuál es el segmento AN tal que

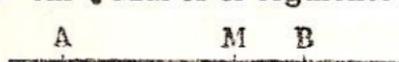


Fig. 480.

$$\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}?$$

Construirlo gráficamente.

95. — Construir un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa, y sabiendo que la bisectriz del ángulo recto divide esta hipotenusa en dos segmentos proporcionales á 3 y 5.

96. — Construir un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa a y la diferencia $b - c = d$ de los catetos.

97. — Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa a y la suma $b + c$ de los catetos.

98. — Construir un triángulo, conociendo dos lados b y c y la bisectriz d del ángulo que forman.

99. — Construir un triángulo, conociendo el ángulo A , el perímetro $2p$ y la altura h relativa al vértice A .

100. — Calcular los catetos b y c de un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa a , y sabiendo que b es medio proporcional entre a y c .

101. — Encontrar las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 metros, sabiendo que es semejante á un segundo rectángulo cuyos lados son 36 y 48 metros.

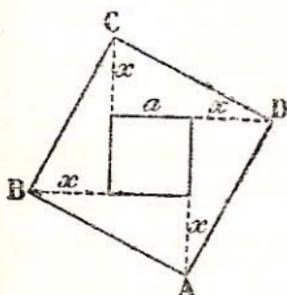


Fig. 481.

102. — Se prolongan los lados de un cuadrado, en el mismo sentido, de una longitud x ;

1° Demostrar que la figura ABCD es un cuadrado.

2° Calcular $l = AB$.

3° Determinar x para que $l = 2a$.

103. — ¿A qué altura una escalera de 5 metros toca una pared, si el pie de la escalera dista 2 metros de la pared?

104. — Encontrar los tres lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que estos lados son tres números enteros consecutivos.

105. — Se da en un triángulo rectángulo, la hipotenusa a y la suma d de la altura con los catetos. Se quiere determinar la altura y los dos catetos.

Aplicación : $a = 25$, $d = 47$.

106. — Demostrar que, en un triángulo rectángulo, el inverso del cuadrado de la altura es igual á la suma de los inversos de los cuadrados de los catetos.

107. — Sobre un cuadrado ABCE descansa un triángulo equilátero CDE. Calcular la longitud AD.

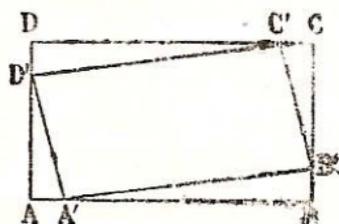


Fig. 483.

108. — Se da un rectángulo cuyas dimensiones son a y b . Se toman los segmentos $AA' = CC' = x$, y , $BB' = DD'$

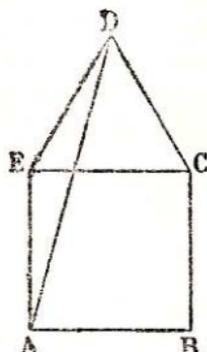


Fig. 482.

$= y$. Determinar x é y para que $A'B'C'D'$ sea un rectángulo.

109. — En el triángulo rectángulo cuyos lados son 3 y 4 y 5 metros, calcular la mediana relativa al lado 4 metros.

110. — En el centro de un estanque cuadrado cuyo lado tiene 22 pies de largo brota un bambú cuya parte emergida tiene 5 pies. Si se inclina el bambú, el vértice viene á coincidir con el punto medio de un lado. Calcular la profundidad del agua.

111. — Los tres lados de un triángulo son 18 y 16 y 9 metros. Determinar una longitud x tal que, si se la quita á cada lado el triángulo que queda es rectángulo.

412. -- La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 30 metros; uno de los segmentos determinados por la altura es 20 metros. Calcular la altura y los catetos.

413. -- La base de un triángulo rectángulo es 63 metros y su altura $5\frac{1}{2}$ metros. Se inscribe en este triángulo un rectángulo cuyo perímetro es 116 metros. ¿Cuáles son sus dimensiones?

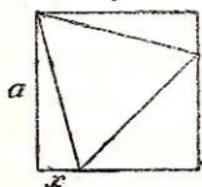


FIG. 484.

414. -- Inscribir en un cuadrado de lado a un triángulo equilátero tal que uno de sus vértices esté en uno de los vértices del cuadrado.

415. -- El radio del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es r , y la hipotenusa a . Se traza la altura, y se inscriben en los triángulos formados dos círculos de radios r_1 , y r_2 . Demostrar que $ar = br_1 + cr_2$.

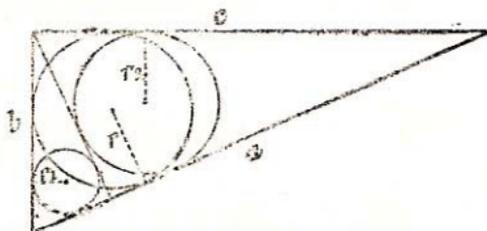


FIG. 485.

416. -- En un rombo la suma de las diagonales es 70 metros y el radio del círculo inscrito es 12 metros. Calcular las diagonales y el lado.

417. -- Calcular las diagonales de un rombo, conociendo el lado a y el radio r del círculo inscrito.

418. -- Los tres lados de un triángulo son 25, 50, 51 metros. Calcular las proyecciones de los dos primeros sobre el tercero. Calcular también la altura relativa al tercer lado.

419. -- Dos lados de un triángulo tienen 17 y 21 metros, la proyección del tercer sobre el segundo es 11 metros. Calcular el tercer lado, y la altura relativa al segundo.

420. -- Calcular los lados de un triángulo cuyas medianas son a , b , c .

121. — Dos lados consecutivos de un paralelogramo tienen 17 y 33 metros; una diagonal tiene 43 metros. Calcular la otra diagonal,

122. — Las diagonales de un paralelogramo tienen 25 y 40 metros y uno de los lados 18 metros. Calcular el perímetro.

123. — Los lados de un cuadrilátero tienen 20, 30, 35 y 8 metros, y las diagonales 25 y 36 metros. Calcular la longitud de la recta que une los puntos medios de las diagonales.

124. — Los cuatro lados de un cuadrilátero tienen 15, 18, 20, 23 metros, una de las diagonales tiene 30 metros y la recta que une los puntos medios de las diagonales tiene 4, 5 metros. Calcular la otra diagonal.

125. — Calcular la división de un metro en media y extrema razón.

126. — Los tres lados de un triángulo son 18, 30 y 36 metros. Calcular los segmentos determinados en cada lado por la bisectriz del ángulo opuesto.

127. — Los tres lados de un triángulo son 85, 63 y 49 metros. Calcular de cuánto se necesita prolongar el mayor lado para llegar al pie de la bisectriz del ángulo exterior.

128. — Los tres lados de un triángulo tienen 12, 18 y 20 metros. Calcular:

1° Las medianas;

2° Los segmentos determinados en los lados por las bisectrices;

3° Las bisectrices.

129. — Dos lados de un triángulo son 30 metros y 36 metros. La diferencia de los segmentos determinados sobre el tercer lado por la bisectriz es 12 metros. ¿Cuál es el tercer lado?

130. — Conociendo, en un triángulo rectángulo, los dos segmentos p y q determinados sobre la hipotenusa por la bisectriz del ángulo recto, valuar por medio de fórmulas, tan sencillas como sea posible:

1° Los tres lados del triángulo.

2° La altura bajada desde el vértice del ángulo recto, la bisectriz de este ángulo.

131. — Calcular las longitudes de las bisectrices interiores de los tres ángulos de un triángulo rectángulo, en función de los lados del ángulo recto.

132. — Si dos circunferencias se cortan, las tangentes á las dos, que salen de cualquier punto de los prolongamientos de la cuerda común, son iguales.



FIG. 486.

133. — En un círculo cuyo radio es 10 centímetros, se trazan dos diámetros rectangulares AC y BD, y la cuerda BC. Siendo M el punto medio de esta cuerda calcular AM.

134. — Calcular la distancia al centro de una cuerda de 2 m 72, en un círculo cuyo radio es 3 m. 65.

135. — En un círculo de 15 metros de radio, dos cuerdas que se cortan dan por producto de sus segmentos respectivos 200 metros. Encontrar la distancia de su punto de intersección al centro.

136. — Dos cuerdas se cortan en un círculo, la longitud de una es 22 metros, los segmentos de la otra tienen 12 metros y 8 metros. ¿Cuáles son los segmentos de la primera?

137. — Se tiene un círculo de tres metros de radio; determinar sobre una tangente á este círculo un punto P tal que la parte exterior de la normal tirada desde este punto al círculo sea igual á la mitad de AP.

138. — Se tiene un círculo de 15 metros de radio; desde un punto tomado á 25 metros del centro, se tira una tangente á este círculo: encontrar la longitud de esta tangente.

139. — En el plano de un círculo de radio R se toma un punto á una distancia d del centro, se tira por este punto una secante tal que la cuerda determinada por el

círculo tenga una longitud $2c$. ¿Cuáles son los segmentos de la secante?

140. — El diámetro de un círculo tiene 32 m. 50; se lo prolonga de 4 m. 50. Calcular la longitud de la tangente tirada desde el punto obtenido.

141. — Dos secantes salen de un mismo punto; una mide 23 metros y su parte exterior tiene 13 metros, la parte exterior de la segunda tiene 17 metros. Calcular su parte interior.

142. — En un círculo de 8 metros de radio, se traza un diámetro y por uno de sus extremos, una cuerda de 12 metros. Calcular su proyección sobre el diámetro.

143. — Una tangente y una secante salen de un mismo punto, la tangente mide 18 metros, la parte interior de la secante tiene 23 metros. Calcular su parte exterior.

144. — El diámetro de un círculo tiene 25 m. 40. Calcular la longitud de la cual se necesita prolongarlo para que la tangente trazada del punto obtenido tenga 12 metros.

145. — Calcular la perpendicular bajada de un punto de la circunferencia sobre el diámetro, en el cual determina 2 segmentos de 2 y 8 metros.

146. — Se da el semicírculo de radio r y el punto A. Trazar la secante DA tal que arco $CD = 3 \times$ arco BE.

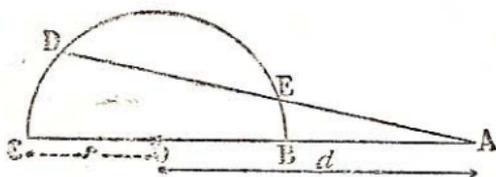


Fig. 437.

147. — En un círculo cuyo radio es 2 m. 25, se da una cuerda de 3 metros. Calcular la cuerda que subtende el arco mitad, y la cuerda que subtende el arco doble.

148. — Un arco tiene una cuerda de 35 centímetros y una flecha de 7 centímetros. Determinar gráficamente su radio y calcularlo.

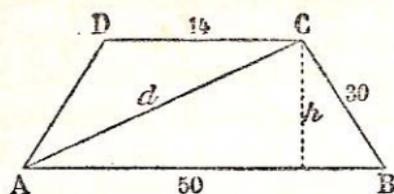


Fig. 488.

449. — Se da el trapezio isósceles ABCD; $AB = 50$ centímetros, $CD = 14$ centímetros; $AD = BC = 30$ centímetros. Calcular h y d . Mostrar que el ángulo ACB es recto.

450. — En un trapezio isósceles circunscrito, las bases son b y a .

Calcular la longitud MN de la recta que une los puntos de contacto.

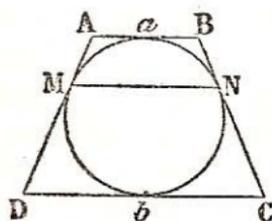


Fig. 489.

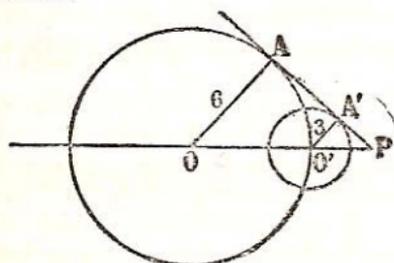


Fig. 490.

451. — Se dan dos círculos cuyos radios son 6 y 3. El menor tiene su centro en la circunferencia del mayor.

1.º Calcular AA' y OP .

2.º Siendo 6 el radio

mayor, determinar el menor para que $AA' = 4$.

452. — Lugar de los vértices de los triángulos que tienen una base fija BC y una mediana constante BM.

453. — Lugar de los centros de los círculos de radio dado, tangentes á una recta dada.

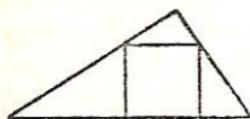


Fig. 491.

454. — Inscribir un cuadrado en un triángulo dado.

455. — Lugar de los puntos medios de los segmentos trazados desde un punto:

1.º A una recta;

2.º A una circunferencia.

456. — Lugar de los puntos que dividen en una razón dada, los segmentos trazados de un punto á una circunferencia.

157. — En un triángulo inscribir otro triángulo cuyos lados sean paralelos á tres rectas dadas.

158. — Trazar una secante desde un punto P á un círculo o tal que la parte exterior sea: 1° igual á la parte interior; 2° sea la mitad; etc.

159. — Inscribir en un segmento circular un rectángulo semejante á un rectángulo dado.

160. — Inscribir un cuadrado en un sector circular dado.

161. — Inscribir en un círculo un triángulo semejante á un triángulo dado.

162. — Demostrar que el radio del círculo que pasa por los tres puntos medios de los lados de un triángulo es igual á la mitad del radio del círculo circunscrito.

163. — En un semi-círculo, inscribir un cuadrilátero semejante á un cuadrilátero dado, y que tenga dos vértices en el diámetro y los otros dos en la circunferencia.

164. — Por un punto A cuya distancia al centro de un círculo es d trazar una secante tal que $AM = MP$. El radio del círculo es r .

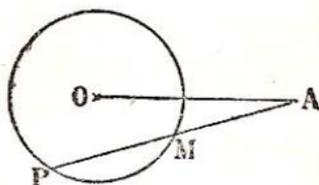


FIG. 492.

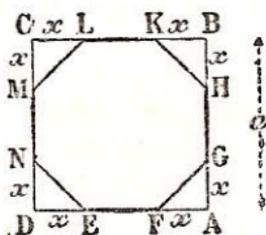


FIG. 493.

165. — Se da el cuadrado ABCD. Determinar x para que el octógono EFGHJKLMN sea regular.

166. — ¿Cuál es el lado de un cuadrado, si la suma del lado y de la diagonal es 12 m. 07105?

167. — ¿Cuál es el lado de un cuadrado, si la diferencia entre la diagonal y el lado es 414 m. 21?

168. — Calcular el lado y el apotema del octógono regular en función del radio.

169. — Calcular el lado y el apotema del polígono regular de 16 lados en función del radio.

170. — Calcular el lado y el apotema del polígono regular de 32 lados en función del radio.

171. — Calcular el lado y el apotema del polígono regular de 12 lados en función del radio.

172. — Calcular el lado y el apotema del polígono regular de 20 lados en función del radio.

173. — En un exágono regular el radio es 1 metro y el apotema 0 m. 866025. Calcular el radio y el apotema de los polígonos, isoperímetros de 12, 24, 48, 96 lados, y deducir un valor aproximado de π .

174. — Se da una semicircunferencia de radio 1; en B se traza la tangente BC de longitud 1; se unen A y C; B y D y se prolonga BD hasta E. Calcular el perímetro del triángulo ADE. Compararlo con la longitud de la semicircunferencia.

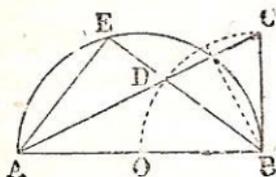


FIG. 494.

175. — Calcular el lado del pentágono inscrito en un círculo de un metro de radio. Calcular su apotema.

176. — Un estanque tiene la forma de un rectángulo acabado en dos semicírculos cuyos diámetros son iguales a la anchura del estanque. La longitud total es 55 metros y la anchura 10 metros. La parte central es un cuadrado de 15 metros de lado, cuyo centro coincide con el centro del rectángulo, y cuyos lados son paralelos a los de éste. Encontrar el perímetro del estanque.

177. — Calcular la medida, en grados ordinarios y en grados centesimales del arco cuya longitud es igual al radio.

178. — Calcular la longitud de un arco de $40^{\circ}30'$ en una circunferencia de 14 m. 25 de radio.

179. — Calcular la longitud de un arco de $40^{\circ}30'$ en la misma circunferencia.

180. — Calcular el radio de la circunferencia cuya longitud es un metro.

181. — Sobre la recta AB, como diámetro, se traza una semicircunferencia. Se divide después AB en n partes, y sobre cada parte como diámetro se traza una semicircunferencia. Comparar las longitudes AMB y ACD...B.

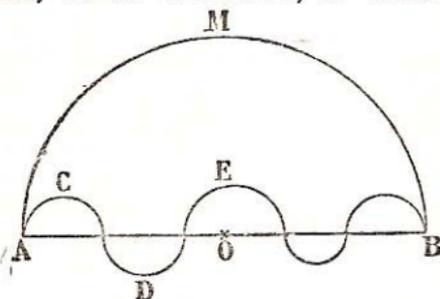


FIG. 495.

182. — Longitud de una espiral de dos centros después de 2 vueltas. Distancia de los centros = 2 centímetros.

183. — Longitud de una espiral de 4 centros después de una vuelta completa. La distancia de 2 centros consecutivos es 2 centímetros.

184. — Longitud de una espiral de 5 centros, después de una vuelta completa. La distancia entre 2 centros es 2 centímetros.

185. — Dado un círculo ¿cuántos círculos iguales á éste se necesitan para rodearlo completamente?

186. — Se da un círculo cuyo radio es $r = 2$ m. Determinar el radio x de otros círculos iguales entre sí, tangentes exteriormente entre sí y al círculo dado, y tales que, con 8 de ellos, se pueda rodear completamente el círculo dado.

187. — Dado un círculo y dos puntos A y B en un diámetro, encontrar un punto P en la circunferencia tal que los segmentos AP y BP formen con la tangente en P unos ángulos iguales.

188. — Inscribir en un círculo un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por dos puntos dados.

189. — Los puntos medios de los lados de un triángulo rectángulo y uno de los pies de las alturas son los vértices de un trapecio isósceles.

LIBRO IV

190. — El perímetro de un rectángulo es 160 metros. La longitud es 3 veces mayor que la altura. Calcular el área.

191. — Los $\frac{2}{5}$ de la superficie de un rectángulo son equivalentes á un cuadrado de 2 m. 40 de lado. La base del rectángulo es 4 m. 50. Calcular la altura.

192. — Calcular los lados de un rectángulo sabiendo que si se agregan 3 metros a la altura y si se quita otro tanto a la longitud, la superficie no se altera; pero si se agregan 5 metros a la altura y si se quitan 3 a la longitud la superficie aumenta de 16 m².

193. — El área de un rectángulo es 5.383 m² 50 y su perímetro es 365 metros. Calcular las dimensiones.

194. — Calcular las dimensiones de un rectángulo tal que la diferencia de las dimensiones sea 1 metro, y el área 1 m².

195. — Calcular las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su diferencia es 84 metros y la diferencia de sus cuadrados 18.480 metros.

196. — Las dimensiones de un rectángulo son proporcionales á 2 y 5; el área es 422 m² 5. Calcular las dimensiones.

197. — Un rectángulo cuya área es 1.700 m² tiene una diferencia de 43 metros entre sus dimensiones. Calcular estas dimensiones.

198. — Calcular las dimensiones de un rectángulo conociendo su diagonal 17 metros y su superficie 120 m².

199. — Se piden las dimensiones de un rectángulo que tenga 3.200 m² de superficie, sabiendo que la longitud mide 14 metros más que la altura. Generalizar.

200. — Los tres lados de un rectángulo triángulo son entre sí como los números 3, 4 y 5; se pregunta la

longitud de sus lados sabiendo que la superficie del triángulo mide 24 m^2 .

201. — Encontrar los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que el lado medio es igual á la semisuma de los otros dos y que el número que expresa su superficie es el mismo que el que expresa su perímetro.

202. — Calcular los catetos de un triángulo rectángulo conociendo la superficie 54 m^2 y la hipotenusa de 15 metros.

203. — Calcular los catetos de un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa 25 y la diferencia 17 de los catetos.

204. — Calcular los catetos de un triángulo rectángulo conociendo la superficie 20 m^2 y la diferencia 39 de los cuadrados de los catetos.

205. — La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 25 metros; la suma de los catetos con la altura 47 metros; calcular los catetos.

206. — Calcular los catetos de un triángulo rectángulo conociendo la altura relativa á la hipotenusa 12 metros, y la suma 35 metros, de los catetos.

207. — El perímetro de un triángulo rectángulo siendo 36 metros y la superficie 54 m^2 , calcular los catetos.

208. — Calcular la superficie de un triángulo rectángulo, conociendo el perímetro 132 metros y la suma 6.050 de los cuadrados de los tres lados.

209. — Calcular los catetos de un triángulo rectángulo conociendo el perímetro 60 metros y la altura 12 metros bajada sobre la hipotenusa.

210. — En un triángulo rectángulo cuyo perímetro es 40 metros, la diferencia de los catetos es 7 metros; calcular la superficie de dicho triángulo.

211. — Calcular la superficie de un triángulo rectángulo conociendo el exceso 20 de la hipotenusa sobre la

diferencia de los catetos y la altura 12 que cae sobre la hipotenusa.

212. — ¿Cuál es la altura de un triángulo rectángulo conociendo los segmentos 3 y 7 que la bisectriz de ángulo recto determina en la hipotenusa?

213. Encontrar la expresión del área de un triángulo isósceles cuyo perímetro es $2p$.

214. — Calcular el área de un triángulo cuyos lados son 120 metros, 93 metros, 75 metros.

215. — Los lados de un triángulo son tres números enteros consecutivos y su superficie 84 metros. Encontrar los tres lados.

216. — En un triángulo en que uno de los lados AB está representado por 2, determinar á qué distancia del vértice A se debe trazar una paralela al lado opuesto á este vértice para que el triángulo quede dividido en dos partes equivalentes.

217. — Los tres lados de un triángulo son 20, 30, 40 metros. Calcular la altura que cae sobre el mayor lado y los segmentos que determina en este lado.

218. — Calcular el área de un triángulo cuyas alturas son 12, 15, 20 metros.

219. — En un triángulo cuya base es b y cuya altura es a , se traza una paralela á la base tal que el triángulo que determina sea media proporcional entre el triángulo total y el trapecio que queda. Calcular su distancia al vértice.

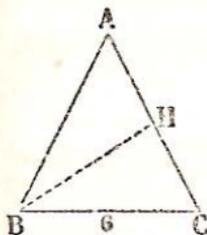


FIG. 498.

220. — En un triángulo isósceles, la base es 6 y la altura relativa á uno de los lados iguales es 4. Calcular el área.

221. — Los tres lados de un triángulo son 15, 20, 23 metros.

- 1º Decir si el ángulo opuesto al mayor lado es recto, agudo ú obtuso.
- 2º Calcular la altura relativa al lado 15 metros.
- 3º Calcular el área del triángulo.

222. — Los tres lados de un triángulo tienen 20, 17, 12 metros. Calcular el área de un triángulo cuyos lados son las alturas del triángulo anterior.

223. — Calcular el área de un triángulo cuyos lados son las bisectrices del triángulo anterior (n° 222).

224. — Calcular el área de un triángulo cuyos lados son las medianas del triángulo anterior (n° 222).

225. — Calcular el área de un triángulo cuyos lados son las distancias del centro del círculo circunscrito a los lados del triángulo anterior (n° 222).

226. — Calcular el lado de un cuadrado equivalente a un rectángulo cuyas dimensiones son 2,25 y 0,80.

227. — Dos cuadrados tienen 3 y 4 metros de lado. Calcular el lado del cuadrado equivalente a su suma, y el del cuadrado equivalente a su diferencia.

228. — Las superficies de dos cuadrados suman 8.621 m^2 ; el producto de sus diagonales es 8.540 : encontrar los lados de estos cuadrados.

229. — La gran diagonal de un rombo tiene 1m.90 y la pequeña es igual al lado. Calcular el área.

230. — Determinar x para que la razón de las áreas AMD y ABCM sea $1/2$.

231. — Dividir un cuadrado en tres partes equivalentes por dos paralelas a una diagonal.

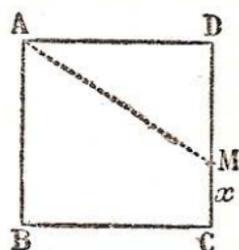


FIG. 497.

232. — El área de un trapecio es 144 m^2 ; la altura es 8 metros, y la recta que une los puntos medios de las diagonales tiene 2 metros. Calcular las bases.

233. En un trapecio isósceles, la base mayor tiene 120 metros. Los lados no paralelos tienen 54 metros y forman con esta base unos ángulos de 60° . Calcular el área.

234. — En un trapecio rectángulo, la base menor

tiene 6 metros ; el lado

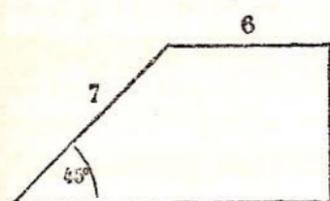


FIG. 498.

no perpendicular á las bases tiene 7 metros y forma con la base mayor un ángulo de 45° . Calcular el área.

235. — La base menor de un trapezio es los $\frac{3}{7}$ de la mayor, y la altura es los $\frac{15}{16}$ de la diferencia de las bases. La superficie es $28 \text{ m}^2 83$. Calcular

las bases y la altura.

236. — En un trapezio rectángulo, la pequeña base es igual á la altura, y la base mayor es igual á dos veces esta altura. Siendo el perímetro $2.707 \text{ m. } 105 : 4^\circ$ Calcular los lados ; 2° Calcular el área.

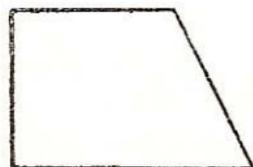


FIG. 499.

237. — Las bases de un trapezio son 36 metros y 48 metros. Calcular la longitud de una paralela á las bases que divide el trapezio en partes proporcionales á 3 y 5.

238. — La altura de un trapezio es 420 metros y las bases 240 y 360 metros. Determinar á qué distancia de la pequeña base se debe trazar una paralela á las bases para que el área del trapezio así formado sea $\frac{1}{7}$ del área total.

239. — Se divide la altura h de un trapezio en tres partes iguales y se trazan paralelas á las bases. Calcular el área de cada parte. Las bases son b y b' .

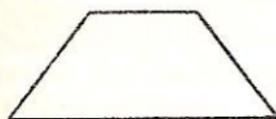


FIG. 500.

240. — En un trapezio isósceles, las bases son 40 y 100 metros, y los otros lados 50 metros. Calcular : 1° El área del trapezio ; 2° El área del triángulo á fuera del trapezio, prolongando los

lados no paralelos.

241. — Se considera un trapezio ABCD. La base CD tiene 64 metros y la otra 28 metros. Sobre CD está un punto P, que dista 14 metros del vértice D. Deter-

minar en AB un punto M tal que la recta PM divida el trapecio en dos partes equivalentes.

242. — Dado un trapecio, calcular la longitud de la paralela á la base que lo divide en media y extrema razón.

243. — En el trapecio $ABCD$, el área del triángulo AOB es 50 m^2 , el área OCD es 18 m^2 . Calcular el área del trapecio.

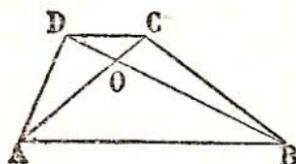


FIG. 501.

244. — La suma de las diagonales de un rombo es 168 metros, y el radio del círculo inscrito es 28,80. Calcular las diagonales y la superficie.

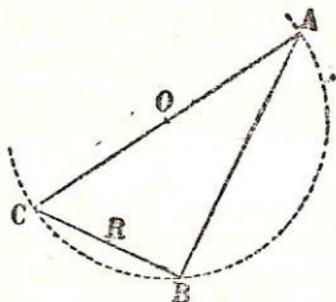


FIG. 502.

245. — Los lados de un triángulo inscrito en un círculo son el radio del círculo y el lado del triángulo equilátero inscrito. Calcular el área del triángulo.

246. — En un trapecio isósceles circunscrito á un círculo, el perímetro es 82 y la

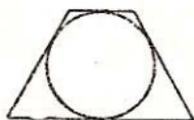


FIG. 503.

superficie 410 m^2 . Calcular los lados del trapecio y el diámetro del círculo.

247. — Circunscribir á un círculo de radio r un rombo cuya área sea $4 S$. Calcular las diagonales.

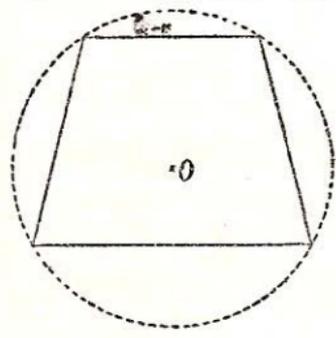


FIG. 504.

248. — Los lados de un triángulo son 12, 16, 20 metros. Calcular: 1° El área; 2° el radio r del círculo inscrito; 3° el radio del círculo circunscrito; 4° los radios de los círculos ex-inscritos.

249. — Las bases de un trapecio inscrito son el radio y el lado del triángulo equilátero. La superficie es 746 m^2 41. Calcular el radio.

250. — Calcular el lado del cuadrado inscrito en un círculo cuya circunferencia tiene un metro de longitud.

251. — Calcular el área del círculo inscrito en un triángulo equilátero cuya área es 1 m^2 .

252. — En un círculo cuyo diámetro es 25 metros inscribir un rectángulo que tenga 17 metros de diferencia entre sus dos dimensiones.

253. — Calcular el área del cuadrado inscrito en un círculo cuya área es 1 m^2 .

254. — Calcular los catetos de un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa 50 metros y el radio 10 metros del círculo inscrito.

255. — Encontrar los lados de un trapecio isósceles circunscrito á un círculo de radio R , sabiendo que su perímetro es $2p$.

256. — Un sólido está limitado por un rectángulo, dos triángulos y dos trapecios. Las dimensiones del rectángulo son 12 metros y 8 m. 50; las bases de los trapecios son 12 metros y 8 metros; su altura es 4 m. 70; los triángulos tienen una altura igual á la de los trapecios, y su base es 8 m. 50. Calcular el área total.

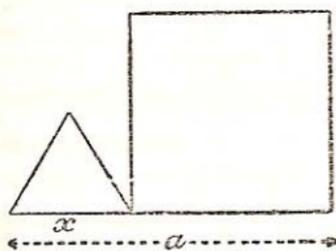


Fig. 505.

257. — Se da un segmento de recta a . En este segmento se señala una longitud x que es el lado de un triángulo equilátero. Se construye un cuadrado cuyo lado es lo restante del segmento. Determinar x para que el área total sea m^2 . Mínimo de m^2 .

258. — Un estanque tiene la forma de un rectángulo de 44 metros de longitud y 8 metros de anchura. La parte central es un exágono de 8 metros de lado. Calcular el área total.

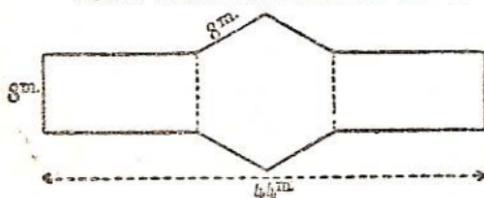


Fig. 506.

259. — En un exágono regular se une los puntos medios de cuatro lados opuestos dos á dos. Comparar la superficie del rectángulo obtenido con la del exágono.

260. — En un círculo cuyo

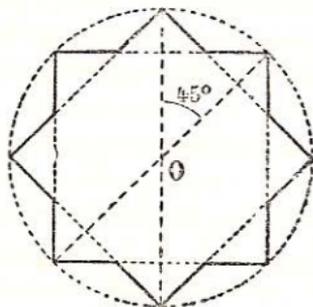


FIG. 508.

el área formada por las partes comunes y no comunes de estos cuadrados.

261. — El lado de un exágono regular es 9 metros. Calcular el lado de otro exágono regular cuya área es los $\frac{4}{9}$ del área del primero.

262. — Calcular el área de un exágono regular cuyo lado es 1 metro.

263. — Sobre cada lado de un exágono regular se construye, un cuadrado á fuera del exágono; y se une los vértices de los cuadrados consecutivos. Calcular el área total, siendo a el lado del exágono.

264. — Calcular el lado de un estanque exagonal regular cuya área es 100 m^2 .

265. — Los lados de dos exágonos regulares son $a = 45$ y $a' = 9$. ¿Cuál es el lado del exágono regular cuya superficie es igual á la diferencia de los otros dos?

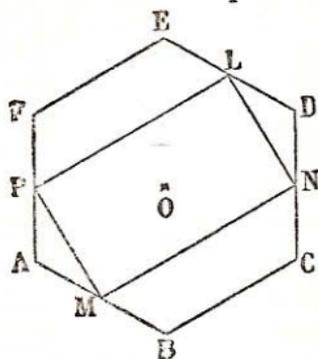


FIG. 507.

diámetro es 4 metros, se inscribe dos cuadrados cuyas diagonales forman entre sí unos ángulos de 45° . Calcular

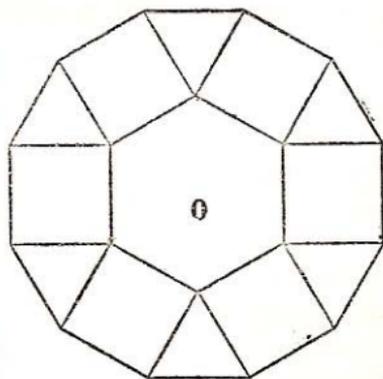


FIG. 509.

266. — Calcular el área de un octógono regular en función del radio r .

267. — Calcular el lado de un octógono regular cuya área es 4 m^2 .

268. — Los lados de tres octógonos regulares son $a = 3$ metros $a' = 6$ metros y $a'' = 9$ metros. ¿Cuál es el lado del octógono regular cuya superficie es igual á la suma de los otros tres?

269. — En un cuadrado cuyo lado es a se une los medios de los cuatro lados y se forma otro cuadrado cuyos medios se une también para formar un nuevo cuadrado y así sucesivamente: encontrar el límite de la suma de las áreas de todos los cuadrados así formados.

270. — ¿Qué límite se obtendría haciendo las mismas construcciones en un triángulo equilátero cuyo lado es a ? ¿Cuál sería el límite de la suma de las áreas de los círculos inscritos y de los círculos circunscritos á estos triángulos?

271. — Calcular el área de un pentágono en función del lado a .

272. — Calcular el área de un estanque circular cuyo perímetro es 42 metros.

273. — Calcular el área de un círculo cuya circunferencia es 4 metro.

274. — Calcular la circunferencia de un círculo cuya área es 4 m^2 .

275. — Calcular el área de un círculo cuyo diámetro es 55 metros.

276. — La cuerda de un arco es $12 \text{ m. } 50$ y la sagita $2 \text{ m. } 75$. Calcular la superficie del círculo.

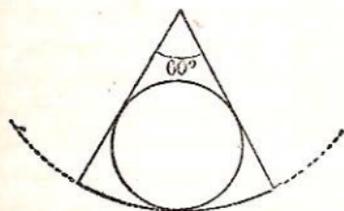


Fig. 510.

277. — Calcular el radio de un sector de 18° cuya área es 48 metros.

278. — Calcular el área del círculo inscrito en un sector circular de 60° cuyo radio es 10 metros.

279. — Calcular la medida en grados de un sector cuya área es 12 m^2 y cuyo radio es 4 m . 60. Emplear los grados sexagesimales y los grados centesimales.

280. — En un círculo cuyo radio es 1 metro , se considera un sector de 60° . Se lo quiere transformar en un triángulo cuya altura sea 1 metro . Calcular la base de ese triángulo.

281. — Dado un círculo cuyo radio es 1 metro , calcular el radio de un círculo concéntrico que divide a este círculo en dos partes equivalentes.

282. — Mismo problema. El círculo concéntrico divide al otro en media y extrema razón.

283. — En un círculo de radio R se inscribe un cuadrado, en este cuadrado se inscribe un círculo, en este otro cuadrado y así indefinidamente. Se quiere saber: 1° El límite de la suma de las áreas de los círculos; 2° el límite de las sumas de las áreas de los cuadrados.

284. — Calcular el área de la corona comprendida entre dos círculos cuyos radios son 6 y 10 metros.

285. — La superficie de una corona circular es 1 m^2 ; la distancia de las circunferencias es 0 m . 25. Calcular los radios de las dos circunferencias.

286. — Un estanque tiene la forma de un rectángulo cuya longitud es 40 metros

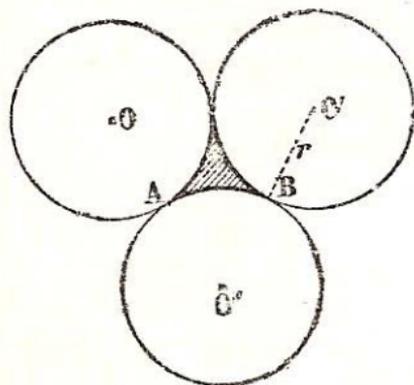


FIG. 512.

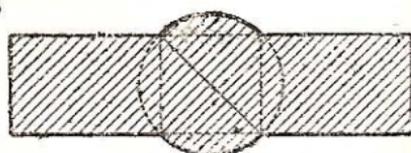


FIG. 511.

y cuya anchura es 10 metros. La parte central es un círculo cuyo centro coincide con el centro del rectángulo, y circunscrito a un cuadrado de 10 metros de lado. Calcular el área del estanque.

287. — Tres círculos de mismo radio r son tangentes dos a dos. Calcular el área de la parte central.

288. — En un círculo de radio r , dos cuerdas paralelas son iguales, la una al radio, la otra, al lado del cuadrado inscrito. Calcular el área de la parte del círculo comprendida entre estas cuerdas.

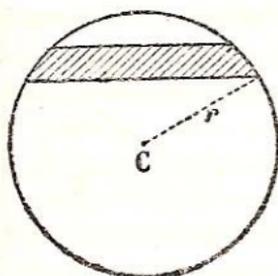


Fig. 513.

289. — Dos circunferencias tangentes exteriormente tienen 12 metros y 4 metros de radio. Área comprendida entre las circunferencias y una tangente común.

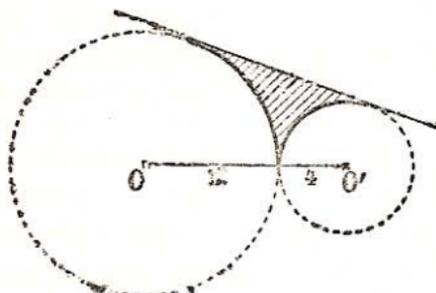


Fig. 514.

290. — Se da un punto A á una distancia r de un círculo de radio r . Por este punto se traza una tangente AM en la cual se señala $MD = r$. Por el punto D se traza una tangente DG . Calcular:

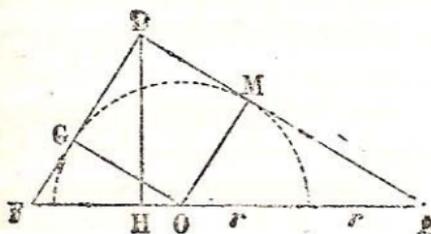


Fig. 515.

- 1° El área $DGOM$.
- 2° El área ADH , siendo DH perpendicular a OA .

3° El área OMA .

4° El área ADG .

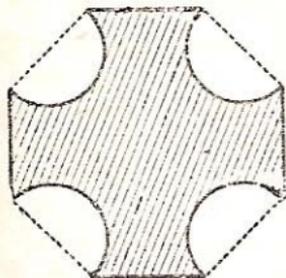


Fig. 517.

291. — Siendo a el lado del cuadrado $OABC$, y OA y OB los radios de los arcos CA y BD , calcular el área de la parte sombreada.

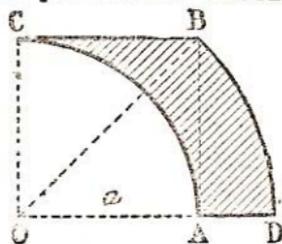


Fig. 516.

292. — El radio del círculo es 1 metro, y el octágono es regular (fig. 517). Calcular el área de la cruz formada.

293. — El lado del triángulo equilátero es $2a$; calcular el área de la parte sombreada (fig. 519).

294. — Calcular esta área; el radio del círculo circunscrito al triángulo ABC es 2 metros

295. — El ángulo de 2 tan-

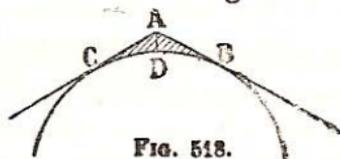


Fig. 518.

gentes es 120° , y la distancia entre su punto de intersección y el círculo es 77 m. 35. Calcular: 1° el radio del círculo;

2° el arco BDC; 3° el área ACDB.

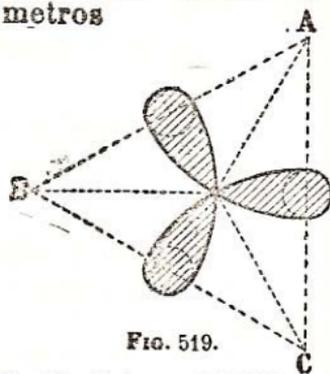


Fig. 519.

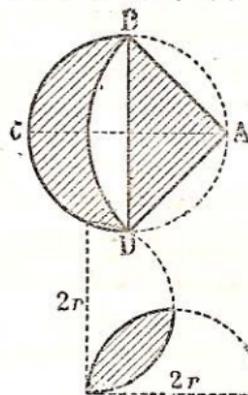


Fig. 520.

296. — El radio del círculo siendo a , calcular y comparar las dos áreas.

297. — Encontrar el área de la parte común a los dos semicírculos.

298. — El radio del círculo siendo a , calcular el área de la parte sombreada (fig. 521).

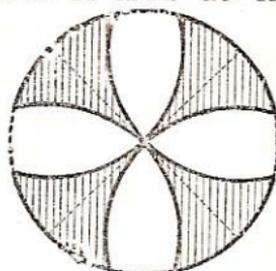


Fig. 521.

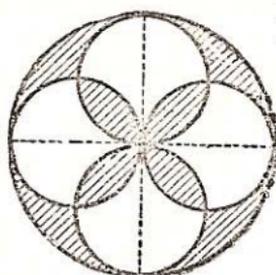


Fig. 522.

299. — El radio del círculo es a ; calcular el área de la parte sombreada (fig. 523).

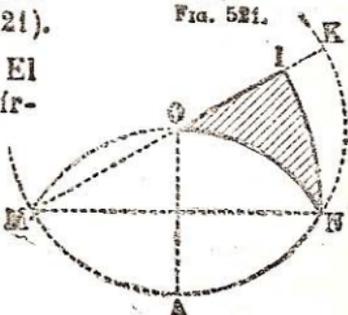


Fig. 523.

300. — Con un radio AO se traza el arco MON; se traza la recta MK, y con un radio MN el arco NI; calcular el área ONI (fig. 523).

301. — Transformar un triángulo en otro isósceles teniendo un ángulo común con el triángulo dado.

302. — Transformar un triángulo en otro semejante á un triángulo dado.

303. — Por un punto dado en la base de un triángulo trazar una recta que lo divida en dos partes equivalentes.

304. — Trazar una recta paralela á una recta dada y que divida un triángulo dado en dos partes equivalentes.

305. — Por un punto tomado en uno de los lados de un cuadrilátero trazar una recta que lo divida en dos partes equivalentes.

306. — Dividir un triángulo en 3 partes equivalentes por unas perpendiculares á uno de los lados.

307. — Dividir una corona en dos partes equivalentes por una circunferencia concéntrica

308. — Dividir un cuadrado en 3 partes equivalentes por dos cuadrados concéntricos.

309. — Dividir un círculo en tres partes equivalentes por dos círculos concéntricos.

310. — Transformar un cuadrado en un triángulo equilátero equivalente.

LIBROS V y VI

311. — Calcular la superficie total de un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son 8, 7, 4 metros

312. — La superficie total de un aljibe (4 paredes y fondo) es 223 mc. 56; las dimensiones son proporcionales á $4\frac{1}{2}$, 4, 3, siendo la profundidad la menor dimensión. Valuar la capacidad.

313. — El volumen exterior de una caja es 6 decímetros cúbicos, 480; su longitud es 30 centímetros; su altura es igual á los $\frac{2}{3}$ de su anchura. Calcular la superficie total.

314. — La diagonal de un paralelepípedo rectángulo es 14 m. 50; las dimensiones son proporcionales á 3, 6, 7. Calcular el volumen.

315. — La superficie de una caja es 3 m². 60; su longitud es el doble de su anchura, y las caras extremas son dos cuadrados iguales. Calcular su volumen.

316. — Un paralelepípedo rectángulo tiene un decímetro de altura y 6 dmc. de superficie total; la longitud es doble de la anchura. Calcular el volumen.

317. — Una tabla de madera cuya densidad es 0,80 tiene la forma de un paralelepípedo cuyas dimensiones son 3 metros, 1 metro, 0 m. 20. Si se la pone en flotación sobre el agua, calcular el espesor de la parte que emerge.

318. — La altura de un prisma recto es de 10 centímetros; cada base es un rectángulo en el que uno de los lados es doble del otro; la superficie total es 256 cm². Calcular: 1° las dimensiones y la superficie de cada base; 2° la superficie de cada cara lateral.

319. — La suma de las doce aristas de un paralelepípedo rectángulo es 48 metros; la suma de los cuadrados de las tres dimensiones es 50; la base mide 12 m² de superficie. Calcular las tres dimensiones.

320. — Calcular las aristas de un paralelepípedo rectángulo, conociendo la superficie total 180 m², la diagonal de la base 10 metros y la suma 17 de las tres dimensiones.

321. — Calcular el volumen de un paralelepípedo rectángulo, sabiendo: 1° que las tres aristas que concurren en un mismo vértice están en progresión aritmética; 2° que la suma de estas aristas es 18 m.; 3° que la superficie total del paralelepípedo es de 208 m².

322. — Dado un paralelepípedo rectángulo, calcular las aristas que concurren en un mismo vértice, sabiendo: 1° que están en progresión aritmética; 2° que la superficie total es igual á 94 m².; 3° que la suma de todas las aristas es 48 m.

323. — Calcular las aristas de un paralelepípedo del que se conoce la diagonal y la superficie total, sabiendo que forman una progresión aritmética.

324. — Calcular las aristas de un paralelepípedo, conociendo su suma a , la longitud de la diagonal d y sabiendo que una de las aristas es media proporcional entre las otras dos.

325. — Dadas la superficie y la diagonal de un paralelepípedo rectángulo, calcular sus dimensiones, sabiendo que están en progresión geométrica.

326. — Calcular las aristas de un paralelepípedo rectángulo, conociendo la suma $2a^2$ de las áreas de sus caras, la suma l de las longitudes de las aristas y la relación h de dos de éstas. ¿Cuántos paralelepípedos satisfacen la cuestión, y en qué caso el problema es imposible?

327. — Se dan las tres dimensiones a , b , c , de un paralelepípedo rectángulo y se quiere encontrar una cantidad x tal que el paralelepípedo rectángulo que tenga por dimensiones $a + x$, $b + x$, $c + x$ tenga una superficie dada $2s$.

328. — Construir un prisma recto que tenga por base un triángulo equilátero, conociendo su superficie total S y la suma P de sus nuevas aristas.

329. — Calcular las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo, cuyo volumen es 13.824 metros cúbicos, y tal que la suma de sus dimensiones sea 74 metros, y que una de las dimensiones sea media proporcional entre las otras dos.

330. — Un prisma tiene como base un octógono regular cuyo radio es 8 centímetros. Su altura es igual al lado del cuadrado inscrito en el círculo circunscrito á la base. Calcular : 1° el volumen ; 2° la superficie lateral.

331. — Un prisma oblicuo tiene como base un triángulo rectángulo ABC cuyos catetos $AC = 24$ centímetros, $BC = 32$ centímetros. La arista que sale de A tiene 85 centímetros de longitud, y se proyecta sobre el plano de la base según la dirección AC . Su proyección tiene

como longitud 40 centímetros. Calcular : 1° el volumen; 2° el área de la sección recta.

332. — Calcular la superficie lateral de un prisma octogonal regular cuyo lado de la base es 3 metros, y cuya altura es 5 metros.

333. — Un prisma tiene por base un trapecio cuyas bases son 10 y 30 metros y cuya altura es 40 metros. Calcular la altura de este prisma, siendo el prisma equivalente á un paralelepípedo rectángulo, cuyas dimensiones son 130, 65, y 6 metros.

334. — Un estanque cuya profundidad es 0 m. 75 tiene la forma de un prisma recto. La base es un octógono regular de 6 metros de lado. Calcular la capacidad del estanque.

335. — Un prisma recto tiene por base un trapecio isósceles cuyas bases son 20 centímetros y 8 centímetros, y cuyos lados no paralelos son 12 centímetros. Calcular el área de la sección plana cuyo plano forma con el de la base un ángulo de 60° y pasa por la base mayor del trapecio.

336. — Un terreno tiene la forma de un triángulo equilátero cuyo lado es de 120 metros. Al rededor y en el interior se cava un foso cuya profundidad es de 3 metros y tal que los lados del triángulo interior sólo tengan 116 metros. La tierra sacada se esparce sobre todo el triángulo interior. Calcular su altura.

337. — Calcular la superficie total y el volumen de un prisma cuya base es un exágono regular, inscrito en un círculo de 4 metros de radio, y cuya altura es igual al diámetro de este círculo.

338. — Un prisma recto exagonal regular tiene una altura de un decímetro y una superficie total de 3 decímetros. Este prisma es de estaño (densidad 7,29). Calcular el volumen y el peso del sólido.

339. — Calcular el volumen de un tetraedro regular cuya arista es 2 decímetros.

340. — Calcular la arista de un tetraedro regular cuyo volumen es de 1 decímetro cúbico.

341. — Calcular la altura de un tetraedro regular cuya superficie total es 4 mc.

342. — Conociendo los tres lados a , b , c , de la base de un tetraedro cuyo ángulo sólido opuesto es un triedro trirectángulo, se quieren calcular las otras tres aristas y el volumen del tetraedro.

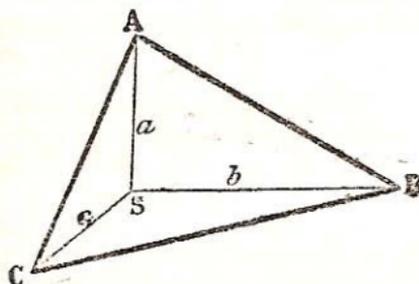


Fig. 524.

343. — En tres rectas perpendiculares se señalan las longitudes $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$:

1° Calcular el área de ABC.

2° Calcular el volumen SABC.

3° Calcular la distancia de S al plano ABC, suponiendo $b = c = a$.

344. — Las aristas de un tetraedro son 10, 12, 15, 12, 15, 20 metros. Calcular su volumen.

345. — Se da en un plano un triángulo rectángulo cuyos catetos son $AB = 3$ metros y $AC = 4$ metros. Se levantan sobre el plano de este triángulo las perpendiculares $AS = 9$ metros, $BE = 4$ metros, $CF = 3$ metros. Calcular: 1° el volumen SAEF; 2° el área total de este tetraedro; 3° su altura relativa al vértice S.

346. — En un tetraedro SABC, la base ABC y la cara SBC son dos triángulos equiláteros cuyo lado es 6 metros. La arista SA es igual a 4 metros. Calcular: 1° la superficie total; 2° el volumen.

347. — Sobre las tres aristas de un triedro trirectángulo se toman tres longitudes $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, y se traza un triángulo ABC. Encontrar: 1° la expresión del área de este triángulo; 2° la distancia $OD = d$ del punto O al plano ABC; 3° lo que deben ser c y b cuando se conozcan a y d para que el triángulo ABC tenga una superficie dada.

348. — Sobre las aristas de un triedro trirectángulo en O se toma $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$. Calcular:

1° el volumen de la pirámide OABC y la razón de este volumen al volumen de un cubo cuya arista es a ; 2° la superficie total de la pirámide.

349. — Un tetraedro regular tiene por arista 2 metros. Un plano pasa por una de las aristas y por el punto medio de la arista opuesta. Calcular el área de la sección.

350. — El lado de un cuadrado ABCD es $\sqrt{2}$ centímetros; se levanta en A al plano ABCD una perpendicular $AE = 6$ centímetros; y en C otra perpendicular $CF = 9$ centímetros. Calcular el volumen del tetraedro EBDF.

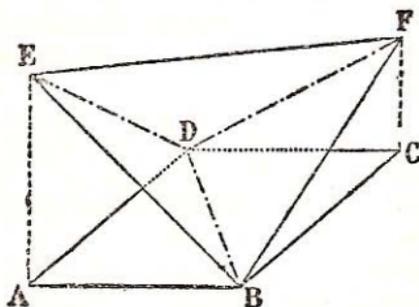


Fig. 52f

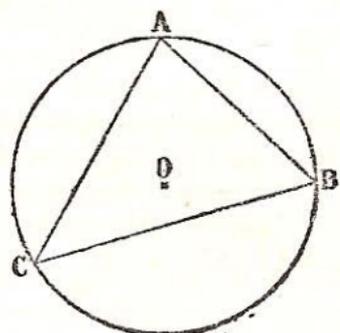


Fig. 52e

351. — En un círculo cuyo radio es R se inscribe el triángulo ABC. El arco $AB = 90^\circ$ y $AC = 120^\circ$. Este triángulo es la base de una pirámide cuya altura es $3R - AC$. Calcular su volumen.

352. — Una pirámide regular triangular tiene por altura el radio del círculo circunscrito a la base. A una distancia del vértice igual al radio del círculo inscrito pasa una sección paralela a la base. Calcular el volumen del trozo de pirámide en función del radio del círculo circunscrito a la base.

353. — Una pirámide tiene una base cuadrada cuyo radio es 4 metros. Las aristas forman con la base unos ángulos de 60° . Calcular : 1° la altura ; 2° el volumen ; 3° la superficie total.

354. — El volumen de una pirámide hexagonal regular es 20.886 cm^3 ; la altura es igual al lado del trián-

gulo equilátero inscrito en el círculo circunscrito á la base. Calcular el radio de esta base.

355. — Un pirámide regular tiene por base un octógono inscrito en un círculo de 15 centímetros de radio. La arista es igual al diámetro de este círculo. Calcular el volumen de la pirámide,

356. — Calcular á qué distancia del vértice de una pirámide cuya altura es a debe pasar un plano paralelo á la base para que las dos partes sean: 1° equivalentes, 2° en la razón $8/19$.

357. — Una pirámide cuya altura es 12 centímetros tiene por base un rombo tal que una de las diagonales sea los $3/4$ de la otra. El volumen es 96 centímetros cúbicos. Calcular las diagonales.

358. — En una pirámide triangular regular, la super-

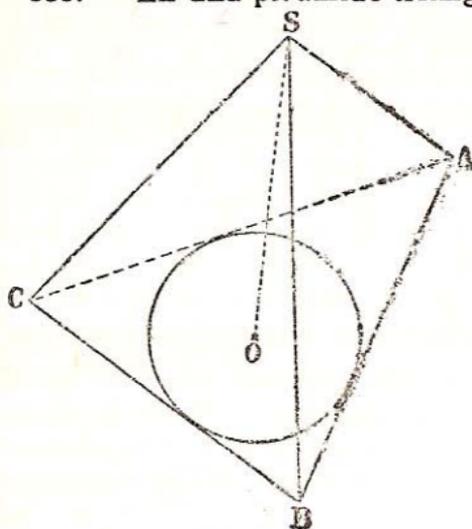


FIG. 527.

ficie lateral es igual á 5 veces la superficie de la base. Calcular el volumen: el lado de la base es 3 metros.

359. — En una pirámide $SABC$, el pie de la altura coincide con el centro de círculo inscrito en la base. Por otra parte $AB = 120$ m., $AC = 111$ m., $BC = 39$ m., $SA = 4\sqrt{1217}$. Calcular el volumen.

360. — Calcular el volumen de la gran pirámide de Cheóps en Egipto, cuya base es un cuadrado de 230 metros de largo, y cuyas caras son triángulos equiláteros.

361. — Una pirámide cuya altura es 0 m. 36 tiene por base un exágono regular cuyo lado es 0 m. 12. Calcular á qué distancia del vértice está una sección paralela á la base y cuya superficie es 1 dm². 2° Calcular á qué

distancia del vértice está una sección tal que el trozo determinado tenga un volumen de 2 decímetros cúbicos.

362. — Una pirámide regular cuya altura es 20 centímetros tiene por base un cuadrado cuyo lado es 10 centímetros. Se corta por un plano paralelo á la base y sobre la sección se construye un prisma recto cuya base superior pasa por el vértice de la pirámide. Determinar la distancia de la sección al vértice para que el prisma sea equivalente al trozo de pirámide que queda.

363. — Una pirámide tiene por base un rectángulo. La cúspide se proyecta en el centro de la base. Se da la altura h de la pirámide; su superficie lateral $2S$ y la diagonal $2a$ del rectángulo de la base. Determinar las dimensiones $2x$, $2y$, de este rectángulo.

364. — Las dos bases de un trozo de pirámide tienen 8 m^2 y 2 m^2 . Calcular el lado de la base de un prisma equivalente que tenga la misma altura y una base cuadrada.

365. — Un monolito cuya densidad es 2,75 tiene la forma de un trozo de pirámide cuya altura es 21 m. 60. Las bases son dos cuadrados cuyos lados son 2 m. 42 y 1 m. 54. Calcular su peso.

366. — Un trozo de pirámide tiene como volumen 1 decímetro cúbico, su altura es 15 centímetros; una de las bases es un cuadrado cuyo lado es 6 centímetros. Calcular el lado de la otra base.

367. — Un trozo de pirámide tiene por bases dos triángulos equiláteros cuyos lados son 12 centímetros y 7 centímetros. El volumen es 1 decímetro cúbico. Calcular la altura.

368. — Siendo B y b las bases de un tronco de pirámide, calcular el área de la sección hecha á igual distancia de las bases.

369. — Sea el volumen V y la altura h de un tronco de pirámide exagonal regular cuya base inferior tiene por lado a ; calcular el lado x de la base superior.

370. — Un sólido está limitado por dos rectángulos

cuyos planos son paralelos y cuyas dimensiones son 4 metros por 1,50 y 3 metros por 0,50. Las demás caras son trapecios. La distancia de los rectángulos es 0 m.60. Calcular el volumen.

371. — Un sólido está limitado por un rectángulo cuyas dimensiones son 30 centímetros y 20 centímetros y por 4 planos inclinados á 45° sobre el plano del rectángulo. Calcular: 1° el área total, 2° el volumen.

372. — Un depósito tiene una profundidad de 1 m. 50. La base es rectangular, y sus dimensiones son 4 metros y 2 m. 50. Las caras laterales están inclinadas á 45° sobre el plano de esta base. Calcular la capacidad.

373. — Un trozo de pirámide tiene una base inferior cuya superficie es 2 mc. 25 y una altura de 2 m. 40. La razón de similitud de las bases es $2/5$: 1° Calcular el volumen; 2° Calcular las alturas de las pirámides cuya diferencia es el trozo.

374. — Un trozo de prisma tiene por base un triángulo isósceles cuyos lados iguales de longitud a , forman un ángulo de 120° . Dos aristas tienen como longitud b . Determinar la tercera, sabiendo que la cara superior es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es paralela á la base.

375. — Se considera un exágono regular ABCDEF de

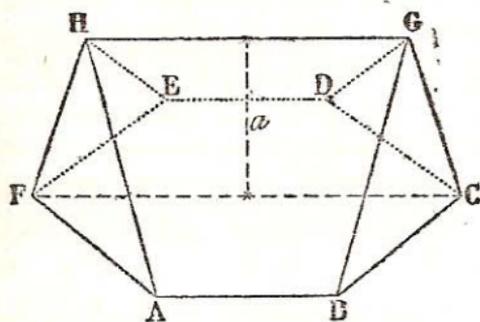


FIG. 528.

lado a y una recta HG, cuya distancia al plano del exágono es a , y que se proyecta sobre este plano según CF, la proyección del punto medio de HG coincidiendo con el centro del exágono. Se une BCD con G y AFE con H. Calcular

la superficie total y el volumen del sólido obtenido.

376. — Calcular la diagonal de un cubo cuyo lado es de 2 metros.

377. — Calcular la diagonal de un cubo cuya superficie total es 4 m^2 .

378. — La densidad del plomo siendo $11,35$, calcular la arista de un cubo de plomo cuyo peso es 1 kilogramo

379. — Se corta un tetraedro regular en un cubo cuya arista es a . Calcular: 1° El volumen de este tetraedro;

2° Su altura;

3° Su superficie total.

Determinar la arista del cubo suponiendo que el volumen del

tetraedro sea $\frac{m^3}{3}$.

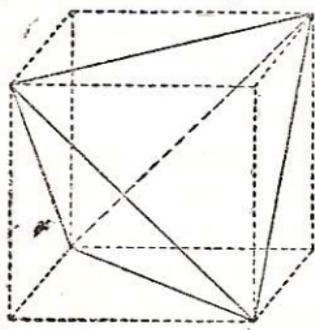


FIG. 529.

380. — Se da un cubo cuya arista es 2 metros. Se unen los puntos medios de dos aristas consecutivas, y se quita en cada vértice el tetraedro formado. Calcular la superficie y el volumen del sólido que queda.

381. — Calcular el volumen del octaedro regular conociendo su lado a .

382. — Se da un cubo cuya arista es de 10 centímetros. Se unen los centros de las caras consecutivas. Superficie total y volumen del octaedro formado.

383. — Un dodecaedro regular tiene por arista $0 \text{ m. } 12$. Calcular la arista de otro dodecaedro regular cuyo volumen es doble de éste.

LIBRO VII

384. — Calcular la altura de un cilindro cuya base mide 16 dm^2 y cuya superficie lateral es de 60 dm^2 .

385. — Un cilindro tiene por diámetro $0 \text{ m. } 503$; la altura es igual al diámetro. Calcular la superficie lateral y el volumen.

386. — Calcular el radio de un cilindro cuya altura mide 25 centímetros, y cuya superficie total es 25 dm^2 .

387. — El diámetro de un cilindro y su altura son proporcionales á 3 y 5; la superficie lateral es 83 dm². Calcular las dimensiones.

388. — Calcular el diámetro de un cilindro cuya superficie total es de 1 mc.; siendo la altura igual al diámetro.

389. — Un cilindro tiene 1 m. 25 de circunferencia, y la sección meridiana mide 1 m² 44. Calcular el volumen.

390. — Un cilindro macizo de hierro (densidad 7,788) pesa 120 kilogramos y su altura es 3 metros. Calcular su diámetro.

391. — Un gramo de mercurio (densidad 13,596), introducido en un tubo capilar, ocupa una longitud de 13 cm. 7. Calcular el diámetro del tubo.

392. — Calcular el volumen de la mampostería de un pozo que tiene 9 m. 50 de profundidad y 1 m. 10 de diámetro interior. El espesor de la pared es 0 m. 45.

393. — Calcular el peso de un tubo de plomo cuya longitud es 1.000 metros; el diámetro exterior es 7 cm; el espesor 4 milímetros. La densidad del plomo es 11,35.

394. — Se quiere hacer un depósito cilíndrico cuya altura sea igual al diámetro, y cuya capacidad sea 1 m³. Calcular la superficie de la hoja de hierro batido necesaria para la superficie lateral y el fondo.

395. — La capacidad de un depósito cilíndrico es 10 litros; la superficie lateral es 18 dm². Calcular el radio.

396. — Un cono tiene 87 milímetros de diámetro y 1 decímetro de altura. Calcular su superficie total.

397. — La base de un cono mide 42 milímetros de diámetro, y la superficie total es 2 dm². Calcular la altura.

398. — La generatriz de un cono es 14 centímetros, y la superficie de la base es 80 cm². Calcular la altura.

399. — Calcular las dimensiones de un cono circular recto de 1 dm. cúbico cuya altura es igual al diámetro.

400. — Se quiere construir un cono de lata, cuya capacidad sea de 2 litros, y tal que la altura sea el doble del diámetro. Calcular el radio y el ángulo del sector que se debe cortar.

401. — Calcular el volumen de un cono cuya sección meridiana es un triángulo equilátero de 1 m².

402. — La superficie total de un cono es 3 mc. 48, y el triángulo rectángulo generador es isósceles. Calcular el volumen.

403. — El diámetro de un cono es los $\frac{3}{5}$ de su altura; la superficie lateral es 83 dm². Calcular las dimensiones.

404. — Un vaso circular ha sido construido con un sector circular de 90° y de 60 centímetros de radio. Calcular su capacidad.

405. — Calcular la superficie total y el volumen de un cono, sabiendo: 1° que el volumen es igual al producto de la superficie total por $\frac{1}{6}$ del radio; 2° que el perímetro del triángulo generador es 3 metros.

406. — La generatriz de un cono es 345 milímetros; la superficie lateral desarrollada forma un sector de 54°. Calcular el radio de la base.

407. — La generatriz de un cono es 345 milímetros; y el desarrollo de la superficie forma un sector de 54°. Calcular la altura.

408. — La altura de un cono es 9 m. La suma de la generatriz y del radio es 20 m. 25. Calcular: 1° el volumen; 2° el ángulo del sector formado por el desarrollo de la superficie lateral

409. — Un cono circular recto tiene por altura 3 decímetros y como radio 1 decímetro. Calcular el ángulo del sector obtenido por el desarrollo de la superficie lateral de este cono.

410. — Se da un sector circular cuyo ángulo es 70° y

cuya superficie es 21 dmc. 99 12. Calcular : 1° el radio del sector, 2° el radio el cono formado con este sector; 3° el radio de una esfera cuyo volumen sea equivalente al del cono.

411. — La altura de un cono circular recto es 33 metros y su radio 9 metros. Se quita la parte comprendida entre dos semiplanos que salen del eje y forman un diedro de 54°. Calcular el volumen y la superficie total del sólido que queda.

412. — En un cono recto cuya altura es a y cuyo radio es r , inscribir un cilindro cuya superficie lateral sea m m². Examinar cuáles son los valores posibles de m .

413. — Se da un cono recto cuya altura es a y cuyo radio es r . Inscibir en este cono un cilindro cuya superficie total sea igual á la de la base del cono.

414. — Un cono recto cuya altura es 20 centímetros tiene como radio 10 centímetros. Una esfera cuyo radio es 4 centímetros es introducida en el interior del cono hasta que sea tangente. Calcular el volumen comprendido entre el vértice del cono y la esfera.

415. — En un cono cuya altura es 7 centímetros, se hace una sección paralela á la base, á 3 centímetros del vértice. Calcular la razón entre la superficie de esta sección y la de la base.

416. — Un cono circular recto tiene 0 m. 20 de altura y 387 cm. cúbicos de volumen. Calcular á qué distancia del vértice se debe hacer una sección paralela á la base para que el volumen del cono parcial sea 95 cm. cúbicos.

417. — Un cono de madera (densidad 0,671) tiene 0 m. 143 de altura y 0 m. 093 de diámetro. Está en el agua, la punta abajo. Calcular la altura y el diámetro del pequeño cono sumergido.

418. — Un vaso cónico tiene 12 centímetros de diámetro, y 1/2 litro de capacidad. Se lo llena con pesos iguales de agua y de mercurio (densidad, 13,596). Calcular el espesor de cada capa líquida.

419. — Un vaso cónico tiene 15 centímetros de profundidad y 6 centímetros de diámetro. Se vierte en él tres capas de 5 cm. de espesor de mercurio (densidad 13,596), de agua y de aceite (densidad 0,915). Calcular los pesos de los tres líquidos.

420. — La altura de un cono circular recto es $2a$ y su radio es a . En el interior se coloca un cono que tiene la misma base, y cuya altura es a . Por el vértice de este cono pasa un plano paralelo á la base, y cuya intersección con el primer cono es la base de un tercer cono semejante al segundo; y así sucesivamente. Encontrar la suma de los volúmenes de todos estos conos.

421. — La altura de un cono es 4, y su radio es 3. Cortarlo por un plano paralelo á la base, y tal que la superficie total del pequeño cono formado sea igual á la superficie lateral del cono dado.

422. — Un trozo de cilindro tiene como radio 9 centímetros. Las aristas extremas tienen 17 cm. 50 y 29 cm. 50. Calcular la superficie lateral y el volumen.

423. — Calcular la superficie total de un trozo de cono circular recto cuyos diámetros son 48 milímetros y 30 milímetros, y cuya altura es 72 milímetros.

424. — Los diámetros de las bases de un trozo de cono son 130 milímetros y 227 milímetros; el apotema es 9 centímetros. Calcular el volumen.

425. — Se quiere construir un tronco de cono de 1 m^2 de superficie total. El diámetro de una base debe ser igual á la altura, y el de la otra base igual á la mitad de la altura. Calcular el volumen.

426. — Se da un cono de radio 4 y de altura 3. Cortarlo por un plano paralelo á la base, y de modo que la superficie del círculo de sección sea equivalente á la superficie lateral del tronco de cono determinado.

427. — Un depósito tiene la forma de un tronco de cono cuya altura es 1 m. 50. El radio en el fondo es 0 m. 60 y en la parte superior 1 m. 30. Calcular la

altura á la que se eleva el liquido, si se vierte 2 metros cúbicos de agua.

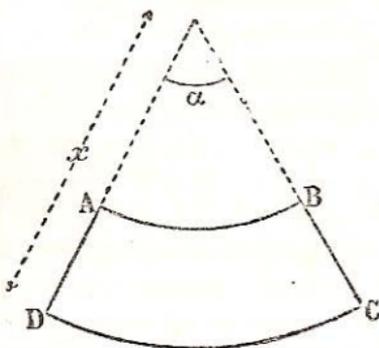


FIG. 530.

428. — Determinar el ángulo α y el radio x de un sector tal que el tronco de cono formado por la parte ABCD tenga como radios de base 0 m. 12 y 0 m. 18; y una generatriz de 0 m. 18.

429. — Los diámetros de las bases de un tronco de cono miden 22 centímetros y 4 centímetros. Calcular el diámetro de un cilindro

que tiene la misma altura y un volumen equivalente.

430. — Una torre circular está construída de modo que el espesor de la pared es doble en la base de lo que es en el vértice. El diámetro interior es 2 metros; el volumen de las piedras es igual al volumen interior. Calcular el espesor de la pared á la base.

431. — Un cilindro cuyo radio es 0 m. 05 y un cono cuyo radio es 0 m. 08 descansan sobre un mismo plano. La altura común es 20 centímetros. Calcular la altura á la cual debe pasar un plano paralelo á las bases, y tal que los dos volúmenes inferiores sean equivalentes.

432. — Un tronco de cono y un cilindro tienen una base común cuyo radio es 1 m. 75; tienen la misma altura 2 m. 80. Sus volúmenes son proporcionales á $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{5}$. Calcular el radio de la segunda base del tronco.

433. — Un tronco de cono y un cilindro tienen una altura común de 15 centímetros; la base inferior tiene un diámetro de 10 centímetros en ambos cuerpos. Calcular el diámetro de la base superior del tronco para que su volumen sea los $\frac{3}{5}$ del volumen del cilindro.

434. — La altura de un tronco de cono es 12 centímetros. Los diámetros de las bases son 8 centímetros y 5 centímetros. Se quiere tomar dos planos paralelos

á las bases, de modo que la superficie lateral sea dividida en partes proporcionales á 6, 4, 3, desde la base mayor. Calcular las distancias de los planos.

435. — Un depósito tiene la forma de un tronco de cono. El fondo mide 1 metro de diámetro; ya contiene una capa de agua de 0 m. 63 de espesor; el diámetro en la superficie del líquido es 1 m. 42. Calcular de cuánto subirá el nivel del agua, si cae en el depósito un cubo de piedra de 0 m. 40 de lado.

436. — Se da un cono recto de 8 decímetros de altura, cortado por un plano paralelo á la base, y que dista del vértice 3 decímetros. Se inscribe en el tronco que resulta un tronco de pirámide exagonal regular. El radio de su pequeña base es 1 dm. 20. Calcular el volumen de este tronco de pirámide.

437. — Un frasco se considera como formado de dos troncos de cono y de un cilindro cuyas alturas son 12 centímetros, 4 centímetros y 7 centímetros, y cuyas circunferencias son 37 centímetros, 32 centímetros 13 centímetros. Calcular la capacidad del frasco.

438. — Los radios de las bases de un tronco de cono miden 12 centímetros y 8 centímetros. Su generatriz, 5 centímetros. Calcular el radio de la esfera circunscrita.

439. — Para determinar el radio de una esfera, se traza en esta esfera, desde un punto P como polo, con un compás esférico, una circunferencia cuyo radio es 15 centímetros. Se toma después, en esta circunferencia, tres puntos A, B, C, tales que $AB = 14$ cm. 4; $BC = 19$ cm. 2; $CA = 24$ centímetros. Calcular el radio de esta esfera, su superficie y su volumen.

440. — Cuatro esferas, cuyo radio es 0 m. 15, forman una pila triangular. Calcular la altura total de la pila.

441. — Calcular el diámetro de una esfera cuya superficie es 1 m^2 .

442. — La diferencia entre las áreas de dos esferas es 3 m^2 9424. Sus radios son proporcionales á 5 y 3.

1° Calcular sus radios; 2° Calcular el radio de una esfera cuya superficie sea igual á la suma de las dos superficies de las dos esferas dadas.

443. — Calcular el volumen de una esfera circunscrita á un cubo de 1 decímetro de lado.

444. — El volumen de una esfera es 2.261 m. cúbicos 952. Calcular su radio.

445. — Calcular el diámetro de una esfera de hierro colado de 1.200 gramos, siendo 7,207 la densidad del hierro colado.

446. — El diámetro de la luna es los 0,273 del de la Tierra. Calcular la relación de los volúmenes de los dos astros.

447. — Calcular el volumen de una esfera cuya superficie es igual á la de un cubo de 25 centímetros de lado.

448. — El semicírculo generador de una esfera tiene un diámetro de 40 centímetros; en este semicírculo, se traza una cuerda de 0 m. 20 paralela al eje. Calcular la superficie engendrada por esta cuerda.

449. — Una zona de 1 dm² pertenece á una esfera de 13 centímetros de radio; una de las bases dista 5 centímetros del centro. Calcular la superficie de la segunda base.

450. — Con tres masas iguales de plomo se forma una esfera, un cilindro y un cono. El diámetro común de los tres cuerpos es 1 decímetro. Calcular las alturas.

451. — Se da una esfera cuyo radio es 1 metro, el cilindro y el cono equilátero circunscritos á esta esfera. Comparar las superficies y los volúmenes de los tres cuerpos.

452. — Se da una esfera cuyo radio es 80 centímetros. Se le quita un casquete cuya altura es 20 centímetros, y se le sustituye por un cilindro de misma base y misma altura. Calcular el volumen total del cilindro así formado.

453. — Un cilindro circular recto cuya altura es 2 me-

tros y cuyo radio es 1 metro se completa en sus dos bases por el casquete correspondiente de la esfera circunscrita. Calcular el volumen formado y la superficie total.

454. — Se dan dos esferas tangentes exteriormente y cuyos radios son 1 decímetro y 3 decímetros. Calcular la superficie total y el volumen del cono recto circunscrito á las dos esferas.

455. — Sobre un círculo mayor de una esfera como base, se construye un cono recto equivalente á la mitad de la esfera. Calcular el radio del segundo círculo de intersección; r es el radio de la esfera.

456. — Se da una esfera de radio r . Determinar la altura de una zona de una base, tal que la superficie de esta zona, aumentada de la superficie de la base, sea igual á los $7/16$ de la superficie de la esfera.

457. — Calcular el volumen de un menisco convergente tal que $AB = 20$ centímetros, $CD = 1$ centímetro; $DE = 3$ centímetros.

458. — Calcular el volumen de un segmento de una base, en una esfera de 9 centímetros de radio, siendo el espesor del segmento 4 centímetros.

459. — En una esfera de 12 centímetros de diámetro se considera un segmento de una base cuya superficie total es de 4 dm^2 . Calcular el espesor del segmento.

460. — Un cono circunscrito á una esfera de 8 centímetros de radio tiene una superficie total de 50 dm^2 . Calcular sus dimensiones.

461. — Se conocen las longitudes siguientes, referidas al meridiano de París: Guadalajara, $105^\circ 40' 42''$; Mexico: $101^\circ 28' 7''$; Puebla: $100^\circ 32' 34''$. Encontrar las longitudes de las mismas ciudades, referidas al meridiano de México.

462. — Calcular la medida en grados de un huso cuya superficie es los $3/16$ de la superficie de la esfera.



FIG. 531.

463. — Una esfera tiene una circunferencia de 1 metro. Calcular la medida de un huso de esta esfera cuya superficie es 4 dmc.
464. — Seda un tetraedro regular cuya arista es 30 centímetros. Calcular el radio de la esfera inscrita y el radio de la esfera circunscrita.
465. — Calcular el radio de la esfera inscrita y de la esfera circunscrita á un octaedro regular cuya arista es de 20 centímetros.
466. — Un octaedro regular tiene una superficie de 1 mc. Calcular la superficie de la esfera circunscrita.
467. — En una esfera cuyo radio es 20 centímetros, se inscribe un cubo; en este cubo, otra esfera, y así siempre. Calcular: 1° el límite de la suma de las esferas; 2° El límite de la suma de los cubos.
468. — Un cuerpo se compone de un cilindro terminado en cada extremo por un cono cuya base tiene el mismo diámetro que el cilindro. Estos conos son equiláteros; la altura del cilindro es el doble de su diámetro. Siendo la superficie total igual á 28 m², calcular el diámetro del cilindro y el volumen del cuerpo.
469. — Una caldera está formada por un cilindro abierto en una de sus bases y que se continúa en la otra por una semiesfera del mismo radio. La altura total es 0 m. 70, la superficie total es 32 dm². Calcular las dimensiones del cilindro.
470. — La circunferencia exterior, de la sección recta de una caldera es 3 m. 4416; la longitud de la parte cilíndrica es de 3 metros, y el espesor de 0 m. 0015. Se termina en dos hemisferios cuyo radio es igual al de la caldera. Calcular el volumen de esta caldera y su peso. Densidad del hierro 7,79.
471. — Una caldera está formada de un cilindro terminado por dos hemisferios del mismo radio que el cilindro. La razón de la longitud de este cilindro al radio es 4. Determinar la longitud total de la caldera, cuya capacidad debe ser 1.500 litros.

472. — Una pirámide triangular regular tiene una altura de 8 decímetros; el lado de la base es 4 decímetros. A una distancia de 2 decímetros del vértice, se la corta por un plano paralelo á la base, y se quita la pirámide así determinada. Calcular el radio de una esfera equivalente á esta pirámide.

473. — Determinar x para que la superficie engendrada por OT girando al rededor de OD sea los $\frac{3}{2}$ de la superficie engendrada por IT.

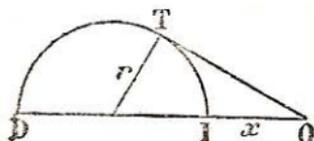


Fig. 532.

474. — Se traza sobre un terreno dos circunferencias concéntricas que distan de 3 metros; el diámetro de la circunferencia interior es 20 metros. Entre las dos circunferencias se cava un foso trapezoide de 1 m. 20 de profundidad, 3 metros de ancho en la superficie y 1 m. 50 en el fondo. La tierra quitada se dispone al exterior del foso en un terraplén trapezoide de 1 m. 50 de ancho en la parte superior, y 3 metros de ancho á la base. Calcular su altura. Se supone que la tierra ha vuelto á tomar su densidad primitiva.

475. — Se da un triángulo rectángulo cuyos lados son a , b , c . Siendo A, B, C los volúmenes engendrados por el triángulo girando al rededor de cada uno de estos lados, demostrar que existe la relación $\frac{1}{A^2} = \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2}$

476. — Un triángulo equilátero de lado a gira al rededor de su base. Calcular el volumen engendrado.

477. — Un exágono regular de lado a gira al rededor de uno de sus lados. Calcular el volumen engendrado.

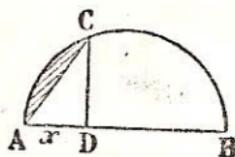


Fig. 533.

478. — En un semicírculo, el diámetro $AB = 4$ centímetros. Determinar x para que el volumen engendrado por la parte sombreada sea igual á 2 veces el volumen engendrado por el triángulo ADC, al girar al rededor de AB.

479. — El triángulo ABC, girando al rededor de AB, engendra un cono $AB = 4$ y $BC = 1,5$. Disminuir AB y aumentar BC de una misma cantidad tal que el volumen no cambie.



Fig. 534.

480. — La figura ABCDE, formada de un cuadrado ABCD, cuyo lado es d , y de un triángulo equilátero AED, gira al rededor de CD. Calcular la superficie y el volumen engendrados.

481. — Se prolonga el diámetro AB de un semicírculo de una longitud BP igual al radio r . Del punto P se traza una tangente PM al semicírculo. Calcular la superficie engendrada por la línea PMA girando al rededor de AP.

482. — Un rombo cuyo lado es a y tal que una diagonal sea $2b$ al rededor de una paralela á esta diagonal que pasa por un vértice. Calcular el volumen engendrado.

483. — El triángulo ABC, tal que $AB = 10$, $BC = 6$, $CA = 8$, gira al rededor de una perpendicular AX á AB. Calcular el volumen engendrado,

484. — Un triángulo isósceles, cuya altura es 10 centímetros y cuya base es 8 centímetros, gira al rededor de una perpendicular á la base levantada en uno de sus extremos. Calcular el volumen engendrado.

485. — En el triángulo rectángulo ABC, la hipotenusa $AB = 1$ metro; el ángulo $A = 30^\circ$. El triángulo gira al rededor de AB. Calcular: 1° la superficie engendrada por BC; 2° la superficie engendrada por AB; 3° el volumen engendrado por ABC.

486. — Determinar x para que los volúmenes engendrados por la superficie ABC y por el sector OCB, al girar al rededor de AO, sean equivalentes.

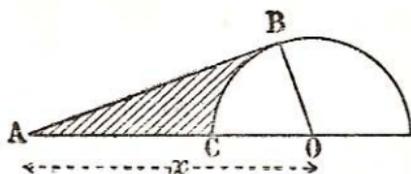


Fig. 535.

487. — Los dos triángulos isósceles ABC y EFD tienen por altura común $AE = 6$ decímetros; por otra parte $AD = 3$ decímetros, y $EB = 2$ decímetros. Los dos triángulos giran al rededor de AE . Calcular el volumen del sólido engendrado.

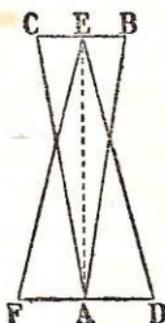


Fig. 536.

488. — En un rectángulo $ABCD$, la diagonal AC tiene de longitud $2a$, y forma con el lado AB un ángulo de 30° . El rectángulo gira al rededor de una paralela BX á CA . Calcular la superficie y el volumen engendrados.

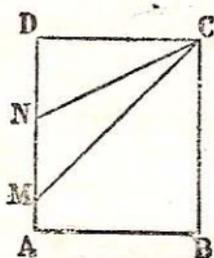


Fig. 537.

489. — Si $AB = 6$ y $BC = 8$, calcular AM y AN de tal modo que cuando el rectángulo $ABCD$ gira al rededor de BC , los volúmenes engendrados por $ABCM$, MNC , NCD sean iguales.

490. — Calcular el volumen engendrado por la mitad de un octógono regular que gira al rededor de una diagonal.

491. — Un trapecio cuyas bases son 9 metros y 21 metros, y cuyos otros lados son 7 metros y 41 metros, gira al rededor de la base menor. Calcular el volumen engendrado.

492. — Calcular el volumen engendrado por el cuadrilátero $ABCD$ girando al rededor de AD .

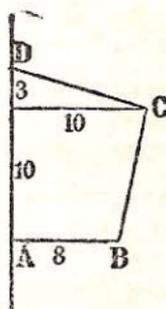


Fig. 538.

493. — En un triángulo ABC , la hipotenusa $AB = 1$ metro; el ángulo $CAB = 30^\circ$. Se traza el arco CE , cuyo centro es A , y cuyo

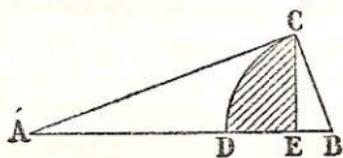


Fig. 539.

radio es AC ; se traza también el arco CD , haciendo centro en B . Calcular: 1° el área CDE ; 2° el volumen engendrado por CDE girando al rededor de DE .

494. — Un cono recto tiene 2 m. 60 de diámetro, y 3 m. 80 de generatriz. Calcular á qué distancia del vértice se debe cortar para que el volumen del trozo inferior sea 3 metros cúbicos.

LIBRO VIII

495. — Demostrar que los radios vectores de un punto de la elipse son proporcionales á sus proyecciones sobre una tangente; también son proporcionales á los cuadrados del eje menor y de la distancia de uno de los focos á la tangente.

496. — Lugar de los centros de los círculos tangentes á dos círculos fijos.

497. — Tres puntos fijos A, B, C, estando en una recta, se considera una circunferencia tangente en C á la recta, y las tangentes que salen de A y de B. Lugar de su punto de intersección.

498. — Dadas una base AB de un trapecio, la longitud de la otra, y la suma de los otros dos lados, encontrar: 1° el lugar de cada uno de los vértices C y D; 2° el lugar del punto de intersección de los lados no paralelos prolongados; 3° el lugar del punto de intersección de las diagonales.

499. — Mismo problema: se da la diferencia de los lados no paralelos.

500. — Dos elipses iguales tienen en cierto instante sus ejes mayores en la misma recta, y son tangentes. Una gira, sin resbalar, sobre la otra, que queda fija. Lugar de los focos de la elipse móvil.

501. — Demostrar que la cuerda de una elipse que es perpendicular al eje mayor, y pasa por el foco tiene por longitud $2 \frac{b^2}{a}$.

502. — En un punto cualquiera de la elipse, si x es la distancia del centro al pie de la perpendicular bajada del punto sobre el eje mayor, los radios vectores son $a + \frac{cx}{a}$ y $a - \frac{cx}{a}$.

503. — De todos los puntos de una circunferencia se bajan perpendiculares sobre una recta de su plano; lugar de los puntos medios de estas perpendiculares.

504. — Lugar de los puntos tales que la suma ó la diferencia de sus distancias á un punto fijo y á una recta fija es constante.

505. Demostrar que el ángulo de dos tangentes á la parábola es la mitad del ángulo que forman los radios vectores de los puntos de contacto.

506. — Lugar de los puntos equidistantes de una circunferencia y de una recta.

507. — Lugar de los centros de los círculos que pasan por un punto fijo y son tangentes á una recta dada.

508. — Lugar de los centros de los círculos que pasan por un punto fijo y son tangentes á una circunferencia fija.

509. Construir una elipse, conociendo:

1° Su centro, la longitud del eje mayor, y dos tangentes;

2° El eje mayor y una tangente.

510. — Construir una elipse, conociendo:

1° Un foco, una tangente, la longitud y la dirección del eje mayor;

2° $2a$, un foco, una tangente y su punto de contacto.

511. — Construir una elipse, conociendo:

1° $2c$, un foco, una tangente y su punto de contacto;

2° Un foco, dos tangentes y uno de los puntos de contacto.

512. Construir, una elipse, conociendo:

1° Un foco, una tangente y un vértice;

2° Un foco y tres tangentes.

513. — Construir una parábola, conociendo:

1° El eje, una tangente y su punto de contacto;

2° La directriz, una tangente y su punto de contacto.

514. — Construir una parábola, conociendo :

1° El foco, el eje y una tangente;

2° El foco y dos tangentes.

515. — Construir una parábola, conociendo :

1° La directriz y dos tangentes;

2° La tangente en el vértice y dos tangentes.

516. — Construir una parábola, conociendo :

1° El foco y dos puntos ;

2° La directriz y dos puntos.

517. — Construir una hipérbola, conociendo :

1° El centro, la longitud del eje transversal, y dos tangentes;

2° El eje transversal y una tangente.

518. Construir una hipérbola, conociendo :

1° Un foco, una tangente, la longitud y la dirección del eje transversal;

2° $2a$, un foco, una tangente y su punto de contacto.

519. — Construir una hipérbola, conociendo :

1° $2c$, un foco, una tangente y su punto de contacto;

2° Un foco, dos tangentes y uno de los puntos de contacto.

520. — Construir una hipérbola, conociendo :

1° Un foco, un vértice y una tangente;

2° Un foco y tres tangentes.

521. — Una hélice está sobre un cilindro cuyo radio es 3 decímetros; el paso de la hélice es 2 decímetros. Calcular la longitud del arco de hélice comprendido entre dos planos meridianos del cilindro cuyo diedro es $32^{\circ}50'$.

522. — Calcular el área de la superficie cilíndrica comprendida entre un arco de hélice, las ordenadas extremas y el plano de base.

523. — Calcular el área de la superficie cilíndrica com-

prendida entre dos arcos de hélice del mismo paso y las generatrices que limitan estos arcos.

524. — Calcular el área de la superficie cilíndrica comprendida entre dos arcos de hélice del mismo paso y dos hélices normales á las dos primeras.

PRINCIPALES FÓRMULAS DE LA GEOMETRÍA PLANA

Suma de los ángulos de un triángulo :

$$A + B + C = 2 \text{ rectos o } 180^\circ$$

Suma de los ángulos de un polígono :

$$2 \text{ rectos } (n - 2)$$

Ángulo interior de un polígono regular :

$$\frac{4}{n} [2 \text{ rect. } (n - 2)]$$

Ángulo en el centro de un polígono regular :

$$\frac{4 \text{ rectos}}{n}$$

Bisectriz de un ángulo de un triángulo :

$$\frac{m}{n} = \frac{b}{c}$$

El número π :

$$\pi = \frac{\text{cir.}}{\text{diám.}} = \frac{\text{semicirc.}}{\text{radio}} = 3,1415926$$

Circunferencia :

$$C = \pi d = 2 \pi r, \text{ diámetro} = C : \pi,$$

$$\text{radio} = C : 2 \pi = \frac{C}{2} : \pi$$

Semicircunferencia :

$$\frac{C}{2} = \frac{\pi d}{2} = \pi r, \text{ arco de } n \text{ grados} = \pi r n : 180$$

Cuadrado de una suma ó de una diferencia :

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 ab + b^2$$

Producto de una suma por una diferencia :

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Triángulo rectángulo altura $h^2 = mn$:

$$\text{lados} = a^2 = b^2 + c^2$$

Triángulo cualquiera, lados :

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bc$$

Mediana d de un triángulo :

$$a^2 + b^2 = 2d^2 + 2m^2 \quad \text{ó} \quad m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - d^2$$

Bisectriz e de un triángulo :

$$ab = e^2 + mn \quad \text{de donde} \quad e^2 = ab - mn$$

Altura de un triángulo, círculo circunscrito :

$$ab = 2rh \quad \text{de donde} \quad h = \frac{ab}{2r}$$

Cuerdas que se cruzan :

$$rs = mn$$

Secantes que parten de un mismo punto :

$$se = s'e'$$

Perpendicular á un diámetro :

$$d^2 = mn$$

La tangente y la secante :

$$t^2 = es$$

Media y extrema razón :

$$\frac{a}{m} = \frac{m}{n}, m^2 = an, m = 1/2a(\sqrt{5} - 1) = a(0,618)$$

Lado del cuadrado inscrito :

$$c = r\sqrt{2} = r(1,414)$$

Lado del triángulo equilátero inscrito :

$$c = r\sqrt{3} = r(1,732)$$

Lado del decágono regular inscrito :

$$c = 1/2r(\sqrt{5} - 1) = r(0,618)$$

Altura del triángulo equilátero :

$$h = 1/2 a \sqrt{3} = a (0,866)$$

Superficie del cuadrado :

$$S = a^2, \text{ diagonal: } d = a\sqrt{2}, \text{ perímetro: } 4a$$

Superficie del rectángulo :

$$S = ab, \text{ diagonal: } d = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ perímetro: } 2(a + b)$$

Superficie del triángulo :

$$S = 1/2 bh = 1/2 (a + b + c) r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Superficie del trapecio :

$$1/2 h (b + b') = hb''$$

Superficie del polígono regular ó de un polígono circunscrito :

$$S = 1/2 ap$$

Superficie del círculo :

$$S = 1/2 \text{ cir.} \times \text{radio} = \pi r^2 = 1/4 \pi d^2 = C^2 : 4\pi \\ = (1/2 C)^2 : \pi = (1/2 C)^2 (0,31831).$$

Superficie de un sector :

$$S = 1/2 \text{ arc.} \times \text{radio} = \frac{\pi r^2 n}{360}$$

Figuras semejantes :

$$\frac{S}{S'} = \frac{a^2}{a'^2}$$

Area de un sector de corona de anchura l :

$$S = \text{la curva media} \times l$$

PRINCIPALES FÓRMULAS DE LA GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

Caras de un triedro :

$$a < b + c; a > b - c$$

Suma de las caras de un ángulo sólido convexo

$$a + b + c + \dots < 4 \text{ rectos}$$

Suma de los ángulos de un triedro cualquiera ó de un triángulo esférico :

$$A + B + C > 2 \text{ rect. } A + B + C < 6 \text{ rectos}$$

Prisma ; superficie lateral :

$$S = ap$$

Paralelepípedo rectángulo, volumen :

$$V = abc ; \text{ superficie } S = 2(ab + ac + bc) ; \\ \text{ diagonal } d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cubo : volumen :

$$V = a^3 ; \text{ superficie } S = 6 a^2 ; \text{ diagonal } d = a \sqrt{3}$$

Prisma : volumen :

$$V = Bh = \text{arista lateral} \times \text{sección recta}$$

Trozo de prisma triangular :

$$V = 1/3 B (m + n + p)$$

Cilindro circular recto :

$$\text{Sup. lateral} = 2 \pi r h ; \text{ sup. total} = 2 \pi r (h + r) ; \\ \text{vol. } V = \pi r^2 h$$

Trozo de cilindro circular recto :

$$\text{Sup. lateral} = \text{circ.} \times \text{eje} ; \text{ volumen} = \text{base} \times \text{eje}$$

Pirámide regular :

$$\text{Sup. lateral } S = 1/2 pl ; \text{ pirámide cualquiera : } V = 1/3 Bh$$

Trozo de pirámide de bases paralelas :

$$\text{Sup. lateral} = 1/2 l (p + p')$$

Cono circular recto :

$$\text{Sup. lateral} = \pi r l ; \text{ sup. tot.} = \pi r (l + r), \\ \text{volumen } V = 1/3 \pi r^2 h$$

Cono cualquiera :

$$V = 1/3 Bh$$

Trozo de cono ó de pirámide de bases paralelas :

$$V = 1/3 h (B + B' + \sqrt{BB'})$$

Trozo de cono circular recto de bases paralelas :

$$V = 1/3 \pi h (r^2 + r'^2 + rr')$$

Trozo de cono circular recto de bases paralelas :

$$\text{Sup. lat. } S = \pi l (r + r') = 2 \pi r' l = 2 \pi z h$$

Línea poligonal regular siendo h la proyección sobre el eje, y a el apotema :

$$\text{Superficie engendrada} = 2 \pi a h$$

Sector poligonal regular :

$$\text{Volumen engendrado} = 2/3 \pi a^2 h$$

Zona : superficie :

$$2 \pi r h$$

Estera : superficie $S = 4 \pi r^2$; ó πa^2 ; huso de n grados :

$$\frac{4 \pi r^2 n}{360} \quad \text{ó} \quad \frac{\pi r^2 n}{90}$$

Esfera : volumen :

$$V = 4/3 \pi r^3 \quad \text{ó} \quad 1/6 \pi d^3$$

Sector esférico : volumen :

$$= \text{zona} \times 1/3 r = 2/3 \pi r^2 h$$

Segmento esférico de una base : volumen :

$$= 1/6 \pi h^3 + 1/2 B h$$

Segmento esférico de dos bases : volumen :

$$= 1/6 \pi h^3 + 1/2 h (B + B')$$

El mismo, llamando S la sección equidistante de las bases :

$$V = S h - 1/12 \pi h^3$$

Sólido circunscrito á una esfera : volumen :

$$= \text{superficie} \times 1/3 r$$

Teorema de los tres cuerpos redondos : segmento esférico = segmento cilíndrico menos segmento cónico.

FÓRMULAS SOBRE EL LIBRO VIII

Area de la elipse :

$$\pi ab$$

Area del segmento parabólico :

$$\frac{2}{3} MN \times AP.$$

Longitud del perímetro de la elipse, sean e la excentricidad, es decir el valor de la razón $\frac{c}{a}$, l la longitud del semiperímetro, se tiene :

$$l = \pi a \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} e \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} e^2 \right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} e^3 \right)^2 \dots \right]$$

$$\text{ó} \quad l = \pi a \left[1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 \dots \right]$$

$$\text{ó bien } l = \pi a (1 - 0,25 e^2 - 0,046875 e^4 - 0,019531 e^6 \dots)$$

Observacion. — Es útil recurrir á la tabla adjunta. Para conocer el número de la tabla que corresponde á una elipse dada, se divide el eje mayor por el eje menor; se toma entonces en la primera columna el número que iguala al cociente obtenido, se lee á la derecha la longitud correspondiente, se multiplica este valor por el eje menor, y el producto indica el perímetro de la elipse.

FÓRMULAS DE LA NOTA

Centro de gravedad. — c , representa la cuerda; s , el arco subtendido; p , la distancia de la cuerda al centro del círculo; Og , la distancia del centro de gravedad del arco al centro del círculo; OG , la distancia del centro de gravedad del sector ó del segmento al centro del círculo.

Arco de círculo :

$$Og = \frac{c^2}{s}$$

Semicircunferencia :

$$Og = \frac{2r}{\pi}$$

Sector circular :

$$OG = \frac{2}{3} \times \frac{cr}{s}$$

Semicirculo :

$$OG = \frac{4r}{3\pi}$$

Segmento circular :

$$OG = \frac{c^3}{6(rs - cp)}$$

Teoremas de Guldin. — Sea p , el perímetro de la figura generatriz; S , la superficie generatriz; d , la distancia del eje al centro de gravedad del perímetro ó de la superficie plana.

Superficie curva :

$$p \times 2\pi d$$

Volumen :

$$S \times 2\pi d$$

Superficie del toro :

$$2\pi r \times 2\pi d \text{ ó } 4\pi^2 rd$$

Volumen del toro :

$$\pi r^2 \times 2\pi d \text{ ó } 2\pi^2 r^2 d$$

Tabla para calcular el perímetro de las elipses.

$\frac{a}{b}$	Longitud	Diferencias	$\frac{a}{b}$	Longitud	Diferencias	$\frac{a}{b}$	Longitud	Diferencias
1,00	3,1416		1,3	3,6279		2,5	5,7506	
1,01	3,1575	159	1,4	3,7956	1677	2,6	5,9348	1842
1,02	3,1734	159	1,5	3,9657	1701	2,7	6,1199	1851
1,03	3,1892	158	1,6	4,1378	1721	2,8	6,3054	1855
1,04	3,2051	159	1,7	4,3117	1739	2,9	6,4916	1862
1,05	3,2210	159	1,8	4,4873	1756	3,0	6,6784	1868
1,06	3,2369	159	1,9	4,6645	1772	3,1	6,8658	1874
1,07	3,2528	159	2,0	4,8427	1782	3,2	7,0538	1880
1,08	3,2687	159	2,1	5,0222	1795	3,3	7,2442	1884
1,09	3,2846	159	2,2	5,2029	1807	3,4	7,4310	1888
1,10	3,3005	159	2,3	5,3846	1817	3,5	7,6202	1892
1,20	3,4627	1622	2,4	5,5672	1826	3,6	7,8098	1896
		1652			1834			

Números usuales para facilitar los cálculos.

	Valor	Loga- ritmo		Valor	Loga- ritmo
$\sqrt{2}$	1,4142	0,150 51	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7071	$\bar{1},849 49$
$\sqrt{3}$	1,7320	0,238 55	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0,5773	$\bar{1},761 45$
$\sqrt{5}$	2,2361	0,349 48	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	0,4472	$\bar{1},650 52$
$\sqrt{10}$	3,1623	0,500 00	$\frac{1}{\sqrt{10}}$	0,3162	$\bar{1},500 00$
$\sqrt[3]{2}$	1,2593	0,100 31	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	0,7937	$\bar{1},899 96$
$\sqrt[3]{3}$	1,4423	0,159 04	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	0,6933	$\bar{1},840 96$
π	3,1416	0,497 15	$\frac{1}{\pi}$	0,3183	$\bar{1},502 85$
2π	6,2832	0,798 18	$\frac{1}{2\pi}$	0,1591	$\bar{1},201 82$
3π	9,4248	0,947 27	$\frac{1}{3\pi}$	0,1061	$\bar{1},025 77$
4π	12,5664	1,098 20	$\frac{1}{4\pi}$	0,0796	$\bar{2},901 80$
$\frac{\pi}{2}$	1,5708	0,195 12	$\frac{2}{\pi}$	0,6366	$\bar{1},804 88$
$\frac{\pi}{3}$	1,0472	0,019 90	$\frac{3}{\pi}$	0,9549	$\bar{1},980 01$
$\frac{\pi}{4}$	0,7854	$\bar{1},895 98$	$\frac{4}{\pi}$	1,2732	0,104 92
$\frac{\pi}{180}$ arco de 1°	0,01745	$\bar{2},241 87$	$\frac{180}{\pi}$	57,296	1,758 13
$\frac{\pi}{19\ 800}$ arco de 1'	0,0002909	$\bar{4},463 72$	$\frac{10\ 800}{\pi}$	3437,7	3,536 28
$\frac{4}{3}\pi$	4,1888	0,622 07	$\frac{3}{4\pi}$	0,2380	$\bar{1},377 93$
π^2	9,8696	0,994 30	$\frac{1}{\pi^2}$	0,1013	$\bar{1},005 70$
$\sqrt{\pi}$	1,7724	0,248 56	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ó $\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,5642	$\bar{1},751 44$
$\sqrt{2\pi}$	2,5066	0,399 08	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	0,3989	$\bar{1},600 91$
$\sqrt{4\pi}$	3,5449	0,549 60	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$	0,2821	$\bar{1},450 40$
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4646	0,165 69	$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$ ó $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$	0,6898	$\bar{1},834 31$

Tabla de las cuerdas (de grado en grado)

Angulos	Cuerdas	Angulos	Cuerdas	Angulos	Cuerdas	Angulos	Cuerdas
1	0,017	46	0,782	91	1,427	136	1,8544
2	0,035	47	0,798	92	1,437	137	1,8608
3	0,052	48	0,814	93	1,451	138	1,8672
4	0,070	49	0,829	94	1,463	139	1,8733
5	0,087	50	0,845	95	1,475	140	1,8794
6	0,105	51	0,861	96	1,486	141	1,8853
7	0,122	52	0,877	97	1,498	142	1,8910
8	0,140	53	0,892	98	1,509	143	1,8966
9	0,157	54	0,908	99	1,521	144	1,9021
10	0,174	55	0,924	100	1,532	145	1,9074
11	0,192	56	0,939	101	1,543	146	1,9136
12	0,209	57	0,954	102	1,554	147	1,9176
13	0,226	58	0,970	103	1,565	148	1,9225
14	0,244	59	0,985	104	1,576	149	1,9273
15	0,261	60	1,000	105	1,587	150	1,9318
16	0,278	61	1,015	106	1,597	151	1,9363
17	0,296	62	1,030	107	1,608	152	1,9406
18	0,313	63	1,045	108	1,618	153	1,9447
19	0,330	64	1,060	109	1,628	154	1,9487
20	0,347	65	1,075	110	1,638	155	1,9526
21	0,365	66	1,089	111	1,648	156	1,9563
22	0,382	67	1,104	112	1,658	157	1,9598
23	0,399	68	1,118	113	1,668	158	1,9632
24	0,416	69	1,133	114	1,677	159	1,9665
25	0,433	70	1,147	115	1,686	160	1,9696
26	0,450	71	1,161	116	1,696	161	1,9726
27	0,467	72	1,176	117	1,705	162	1,9754
28	0,484	73	1,190	118	1,714	163	1,9780
29	0,501	74	1,204	119	1,723	164	1,9805
30	0,518	75	1,218	120	1,732	165	1,9829
31	0,535	76	1,231	121	1,741	166	1,9851
32	0,551	77	1,245	122	1,749	167	1,9871
33	0,568	78	1,259	123	1,758	168	1,9890
34	0,585	79	1,272	124	1,766	169	1,9908
35	0,601	80	1,286	125	1,774	170	1,9924
36	0,618	81	1,299	126	1,782	171	1,9938
37	0,635	82	1,312	127	1,790	172	1,9951
38	0,651	83	1,325	128	1,798	173	1,9963
39	0,668	84	1,338	129	1,805	174	1,9973
40	0,684	85	1,351	130	1,813	175	1,9981
41	0,700	86	1,364	131	1,820	176	1,9988
42	0,717	87	1,377	132	1,827	177	1,9993
43	0,733	88	1,389	133	1,834	178	1,9997
44	0,749	89	1,402	134	1,841	179	1,9999
45	0,765	90	1,414	135	1,848	180	2,0000

Tabla de las cuerdas (de 10' en 10')

G	0'	10'	20'	30'	40'	50'
0	0	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145
1	0,0175	0,0204	0,0233	0,0262	0,0291	0,0320
2	0,0349	0,0378	0,0407	0,0436	0,0465	0,0494
3	0,0523	0,0553	0,0582	0,0611	0,0640	0,0669
4	0,0698	0,0727	0,0756	0,0785	0,0814	0,0843
5	0,0872	0,0901	0,0931	0,0960	0,0989	0,1018
6	0,1047	0,1076	0,1105	0,1134	0,1163	0,1192
7	0,1221	0,1250	0,1279	0,1308	0,1337	0,1366
8	0,1395	0,1424	0,1453	0,1482	0,1511	0,1540
9	0,1569	0,1598	0,1627	0,1656	0,1685	0,1714
10	0,1743	0,1772	0,1801	0,1830	0,1859	0,1888
11	0,1917	0,1946	0,1975	0,2004	0,2033	0,2062
12	0,2091	0,2120	0,2148	0,2177	0,2206	0,2235
13	0,2264	0,2293	0,2322	0,2351	0,2380	0,2409
14	0,2437	0,2466	0,2495	0,2524	0,2553	0,2582
15	0,2611	0,2639	0,2668	0,2697	0,2726	0,2755
16	0,2783	0,2812	0,2841	0,2870	0,2899	0,2927
17	0,2956	0,2985	0,3014	0,3042	0,3071	0,3100
18	0,3129	0,3157	0,3186	0,3215	0,3244	0,3272
19	0,3301	0,3330	0,3358	0,3387	0,3416	0,3444
20	0,3473	0,3502	0,3530	0,3559	0,3587	0,3616
21	0,3645	0,3673	0,3702	0,3730	0,3759	0,3787
22	0,3816	0,3845	0,3873	0,3902	0,3930	0,3959
23	0,3987	0,4016	0,4044	0,4073	0,4101	0,4130
24	0,4158	0,4187	0,4215	0,4244	0,4272	0,4300
25	0,4329	0,4357	0,4386	0,4414	0,4442	0,4471
26	0,4499	0,4527	0,4556	0,4584	0,4612	0,4641
27	0,4669	0,4697	0,4725	0,4754	0,4782	0,4810
28	0,4838	0,4867	0,4895	0,4923	0,4951	0,4979
29	0,5008	0,5036	0,5064	0,5092	0,5120	0,5148
30	0,5176	0,5204	0,5233	0,5261	0,5289	0,5317
31	0,5345	0,5373	0,5401	0,5429	0,5457	0,5485
32	0,5513	0,5541	0,5569	0,5598	0,5625	0,5652
33	9,5680	0,5708	0,5736	0,5764	0,5792	0,5820
34	0,5847	0,5875	0,5903	0,5931	0,5959	0,5986
35	0,6014	0,6042	0,6070	0,6097	0,6125	0,6153
36	0,6180	0,6208	0,6236	0,6263	0,6291	0,6319
37	0,6346	0,6374	0,6401	0,6429	0,6456	0,6484
38	0,6511	0,6539	0,6566	0,6594	0,6621	0,6649
39	0,6676	0,6704	0,6731	0,6758	0,6786	0,6813
40	0,6840	0,6868	0,6895	0,6922	0,6950	0,6977
41	0,7004	0,7031	0,7059	0,7086	0,7113	0,7140
42	0,7167	0,7195	0,7222	0,7249	0,7276	0,7303
43	0,7330	0,7357	0,7384	0,7411	0,7438	0,7465
44	0,7492	0,7519	0,7546	0,7573	0,7600	0,7627

Tabla de las cuerdas (de 10' en 10')

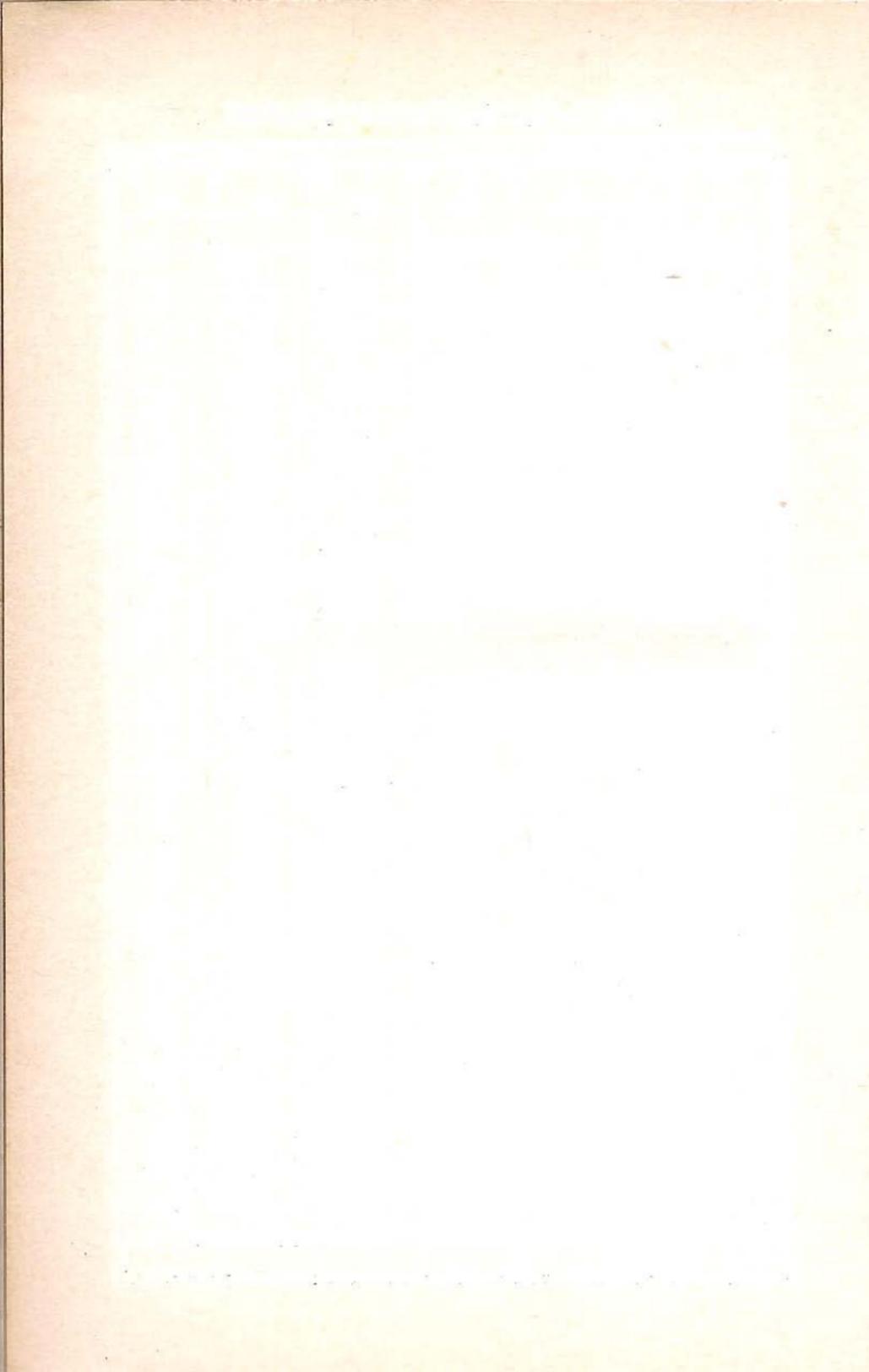
G	0'	10'	20'	30'	40'	50'
45	0,7654	0,7680	0,7707	0,7734	0,7761	0,7788
46	0,7815	0,7841	0,7868	0,7895	0,7922	0,7948
47	0,7975	0,8002	0,8028	0,8055	0,8082	0,8108
48	0,8135	0,8161	0,8188	0,8214	0,8241	0,8267
49	0,8294	0,8320	0,8347	0,8373	0,8400	0,8426
50	0,8452	0,8479	0,8505	0,8531	0,8558	0,8584
51	0,8610	0,8636	0,8663	0,8689	0,8715	0,8741
52	0,8767	0,8794	0,8820	0,8846	0,8872	0,8898
53	0,8924	0,8950	0,8976	0,9002	0,9028	0,9054
54	0,9080	0,9106	0,9632	0,9157	0,9183	0,9209
55	0,9235	0,9261	0,9287	0,9312	0,9338	0,9364
56	0,9389	0,9415	0,9441	0,9466	0,9492	0,9518
57	0,9543	0,9569	0,9594	0,9620	0,9645	0,9671
58	0,9696	0,9722	0,9747	0,9772	0,9798	0,9823
59	0,9848	0,9874	0,9899	0,9924	0,9950	0,9975
60	1,0000	1,0025	1,0050	1,0075	1,0101	1,0126
61	1,0151	1,0176	1,0201	1,0226	1,0251	1,0276
62	1,0301	1,0326	1,0351	1,0375	1,0400	1,0425
63	1,0450	1,0475	1,0500	1,0524	1,0549	1,0574
64	1,0598	1,0623	1,0648	1,0672	1,0697	1,0721
65	1,0746	1,0771	1,0795	1,0819	1,0844	1,0868
66	1,0893	1,0917	1,0941	1,0965	1,0990	1,1014
67	1,1039	1,1063	1,1087	1,1111	1,1136	1,1160
68	1,1184	1,1208	1,1232	1,1256	1,1280	1,1304
69	1,1328	1,1352	1,1376	1,1400	1,1424	1,1448
70	1,1472	1,1495	1,1519	1,1543	1,1567	1,1590
71	1,1624	1,1638	1,1661	1,1685	1,1709	1,1732
72	1,1756	1,1779	1,1803	1,1826	1,1850	1,1873
73	1,1896	1,1920	1,1943	1,1966	1,1990	1,2013
74	1,2036	1,2060	1,2083	1,2106	1,2129	1,2152
75	1,2175	1,2198	1,2221	1,2244	1,2267	1,2290
76	1,2313	1,2336	1,2359	1,2382	1,2405	1,2427
77	1,2450	1,2473	1,2496	1,2518	1,2541	1,2564
78	1,2586	1,2609	1,2632	1,2654	1,2677	1,2699
79	1,2722	1,2744	1,2766	1,2789	1,2811	1,2833
80	1,2856	1,2878	1,2900	1,2922	1,2947	1,2965
81	1,2989	1,3011	1,3033	1,3055	1,3077	1,3099
82	1,3121	1,3143	1,3165	1,3187	1,3209	1,3231
83	1,3252	1,3274	1,3296	1,3318	1,3339	1,3361
84	1,3383	1,3404	1,3426	1,3447	1,3469	1,3490
85	1,3512	1,3533	1,3555	1,3576	1,3597	1,3619
86	1,3640	1,3661	1,3682	1,3704	1,3725	1,3746
87	1,3767	1,3788	1,3809	1,3830	1,3851	1,3872
88	1,3893	1,3914	1,3935	1,3956	1,3977	1,3997
89	1,4018	1,4039	1,4060	1,4080	1,4101	1,4122

Tabla de las cuerdas (de 10' en 10').

G	0'	10'	20'	30'	40'	50'
90	1,4142	1,4165	1,4183	1,4204	1,4224	1,4245
91	1,4265	1,4285	1,4306	1,4326	1,4348	1,4367
92	1,4387	1,4407	1,4427	1,4447	1,4467	1,4487
93	1,4507	1,4527	1,4547	1,4567	1,4587	1,4607
94	1,4627	1,4647	1,4667	1,4686	1,4706	1,4726
95	1,4745	1,4765	1,4785	1,4804	1,4823	1,4843
96	1,4863	1,4882	1,4902	1,4921	1,4940	1,4960
97	1,4980	1,4998	1,5018	1,5037	1,5056	1,5075
98	1,5094	1,5113	1,5132	1,5151	1,5170	1,5182
99	1,5208	1,5227	1,5246	1,5265	1,5283	1,5304
100	1,5321	1,5340	1,5358	1,5377	1,5395	1,5415
101	1,5432	1,5451	1,5470	1,5488	1,5506	1,5524
102	1,5543	1,5561	1,5579	1,5598	1,5616	1,5632
103	1,5652	1,5670	1,5688	1,5706	1,5724	1,5749
104	1,5760	1,5778	1,5796	1,5814	1,5832	1,5849
105	1,5867	1,5885	1,5902	1,5920	1,5938	1,5955
106	1,5973	1,5990	1,6007	1,6025	1,6042	1,6060
107	1,6077	1,6094	1,6112	1,6129	1,6146	1,6163
108	1,6180	1,6197	1,6214	1,6231	1,6248	1,6265
109	1,6282	1,6299	1,6316	1,6333	1,6350	1,6366
110	1,6383	1,6400	1,6416	1,6433	1,6449	1,6466
111	1,6482	1,6499	1,6515	1,6536	1,6548	1,6564
112	1,6581	1,6597	1,6613	1,6629	1,6645	1,6662
113	1,6678	1,6694	1,6710	1,6726	1,6742	1,6758
114	1,6773	1,6789	1,6805	1,6820	1,6836	1,6852
115	1,6868	1,6883	1,6899	1,6915	1,6930	1,6945
116	1,6961	1,6976	1,6991	1,7007	1,7022	1,7038
117	1,7053	1,7068	1,7083	1,7098	1,7113	1,7128
118	1,7143	1,7158	1,7173	1,7188	1,7203	1,7218
119	1,7233	1,7247	1,7262	1,7277	1,7281	1,7306
120	1,7320	1,7335	1,7350	1,7364	1,7378	1,7393
121	1,7407	1,7421	1,7436	1,7450	1,7464	1,7478
122	1,7492	1,7506	1,7520	1,7534	1,7548	1,7562
123	1,7576	1,7590	1,7604	1,7618	1,7632	1,7646
124	1,7659	1,7673	1,7686	1,7700	1,7713	1,7728
125	1,7740	1,7754	1,7767	1,7780	1,7794	1,7807
126	1,7820	1,7833	1,7846	1,7860	1,7873	1,7886
127	1,7899	1,7912	1,7924	1,7937	1,7950	1,7963
128	1,7975	1,7989	1,8001	1,8013	1,8026	1,8039
129	1,8052	1,8064	1,8077	1,8090	1,8102	1,8114
130	1,8126	1,8138	1,8151	1,8163	1,8175	1,8187
131	1,8199	1,8211	1,8223	1,8235	1,8247	1,8259
132	1,8271	1,8283	1,8294	1,8306	1,8318	1,8330
133	1,8341	1,8353	1,8364	1,8374	1,8387	1,8399
134	1,8410	1,8421	1,8433	1,8444	1,8455	1,8466

Tabla de las cuerdas (de 10' en 10')

G	0'	10'	20'	30'	40'	50'
135	1,8478	1,8489	1,8500	1,8511	1,8522	1,8533
136	1,8544	1,8551	1,8565	1,8576	1,8587	1,8598
137	1,8608	1,8619	1,8630	1,8640	1,8651	1,8661
138	1,8672	1,8682	1,8692	1,8703	1,8713	1,8723
139	1,8733	1,8734	1,8754	1,8764	1,8774	1,8784
140	1,8794	1,8804	1,8814	1,8824	1,8833	1,8843
141	1,8853	1,8863	1,8872	1,8882	1,8891	1,8901
142	1,8910	1,8920	1,8929	1,8938	1,8948	1,8957
143	1,8966	1,8976	1,8985	1,8994	1,9003	1,9012
144	1,9021	1,9030	1,9039	1,9048	1,9057	1,9065
145	1,9074	1,9083	1,9091	1,9100	1,9109	1,9117
146	1,9126	1,9134	1,9143	1,9151	1,9160	1,9168
147	1,9176	1,9185	1,9193	1,9200	1,9209	1,9217
148	1,9225	1,9233	1,9241	1,9249	1,9257	1,9265
149	1,9273	1,9280	1,9288	1,9296	1,9303	1,9311
150	1,9318	1,9326	1,9334	1,9341	1,9348	1,9356
151	1,9363	1,9370	1,9377	1,9384	1,9391	1,9399
152	1,9406	1,9413	1,9420	1,9427	1,9434	1,9841
153	1,9447	1,9454	1,9461	1,9467	1,9474	1,9481
154	1,9487	1,9494	1,9501	1,9507	1,9513	1,9519
155	1,9526	1,9532	1,9538	1,9545	1,9551	1,9557
156	1,9563	1,9569	1,9575	1,9581	1,9547	1,9593
157	1,9598	1,9604	1,9610	1,9616	1,9621	1,9627
158	1,9632	1,9639	1,9644	1,9649	1,9654	1,9660
159	1,9665	1,9670	1,9676	1,9681	1,9686	1,9691
160	1,9696	1,9701	1,9706	1,9711	1,9716	1,9721
161	1,9726	1,9730	1,9735	1,9739	1,9744	1,9749
162	1,9754	1,9758	1,9763	1,9767	1,9772	1,9776
163	1,9780	1,9784	1,9789	1,9793	1,9797	1,9801
164	1,9805	1,9809	1,9813	1,9817	1,9821	1,9825
165	1,9829	1,9832	1,9836	1,9840	1,9844	1,9847
166	1,9851	1,9854	1,9858	1,9861	1,9865	1,9868
167	1,9871	1,9875	1,9878	1,9881	1,9884	1,9887
168	1,9890	1,9893	1,9896	1,9899	1,9902	1,9905
169	1,9908	1,9911	1,9913	1,9916	1,9919	1,9921
170	1,9924	1,9926	1,9929	1,9931	1,9934	1,9936
171	1,9938	1,9941	1,9943	1,9945	1,9947	1,9949
172	1,9951	1,9953	1,9955	1,9957	1,9959	1,9961
173	1,9963	1,9964	1,9966	1,9968	1,9969	1,9971
174	1,9973	1,9974	1,9975	1,9977	1,9978	1,9980
175	1,9981	1,9982	1,9983	1,9985	1,9986	1,9987
176	1,9988	1,9989	1,9990	1,9991	1,9992	1,9992
177	1,9993	1,9994	1,9994	1,9995	1,9996	1,9996
178	1,9997	1,9997	1,9998	1,9998	1,9999	1,9999
179	1,9999	1,9999	1,9999	1,9999	1,9999	1,9999
180	2,0000					



ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

§	I. — Definiciones preliminares	1
§	II. — Línea recta	4
§	III. — Superficie plana	6
§	IV. — Objeto y divisiones.	8

LIBRO PRIMERO

Los puntos y las rectas de un Plano.

CAPÍTULO	I. — Sistema de dos rectas.	8
§	I. — Angulos	8
	1. Medida.	8
	2. Ángulo \sphericalangle adyacentes suplementarios	12
	3. Ángulos opuestos al vértice	18
§	II. — Rectas perpendiculares	13
§	III. — Rectas paralelas	15
§	IV. — Ángulos cuyos lados son paralelos ó perpendiculares.	19
§	V. — Simetría	20
	1. Simetría con relación á un punto.	20
	2. Simetría con relación á una recta.	22
CAPÍTULO	II. — Triángulos	23
§	I. — Definiciones	23
§	II. — Propiedades fundamentales	25
	1. Relación entre los ángulos	25

	2. Correspondencia entre los ángulos y los lados	26
	3. Relaciones entre los lados	27
	4. Correspondencia entre los lados y sus proyecciones.	27
	5. Mediatriz de un segmento rectilíneo	29
	6. Simetría en el triángulo isósceles.	30
§	III. — Igualdad de los triángulos	31
	1. Triángulos cualesquiera	31
	2. Teoremas contrarios	33
	3. Triángulos rectángulos	34
§	IV. — Rectas notables en el plano de un triángulo	36
	1. Paralelas á los lados de un triángulo	36
	2. Mediatrices de un triángulo.	38
	3. Alturas de un triángulo	38
	4. Medianas de un triángulo	39
	5. Bisectrices de un triángulo	40
CAPÍTULO	III. — Cuadriláteros	40
§	I. — Definiciones	40
§	II. — Paralelogramos	41
§	III. — Trapecio.	45
§	IV. — Igualdad de los paralelogramos.	46
CAPÍTULO	IV. — Polígonos cualesquiera	47
§	I. — Definiciones	47
§	II. — Relaciones entre los ángulos.	48
§	III. — Relaciones entre los lados.	49
§	IV. — Igualdad de los polígonos	50

LIBRO II

La Circunferencia.

CAPÍTULO	I. — Circunferencia, centro, diámetro	51
CAPÍTULO	II. — Arcos.	53
§	I. — Medida	53
§	II. — Arcos y ángulos al centro	54
§	III. — Arcos y cuerdas.	57
CAPÍTULO	III. — Posiciones relativas de una circunferencia y de un punto.	60

CAPÍTULO	IV. — Posiciones relativas de una circunferencia y de una recta.	61
§	I. — Teoremas generales	61
§	II. — Secantes	62
§	III. — Tangentes	64
§	IV. — Diámetros	65
CAPÍTULO	V. — Posiciones relativas de dos circunferencias.	67
CAPÍTULO	VI. — Valuación de los ángulos	71
§	I. — Ángulo al centro	71
§	II. — Ángulos cuyo vértice está en la circunferencia.	72
§	III. — Ángulos cuyo vértice no está en la circunferencia	73
§	IV. — Aplicaciones	75
CAPÍTULO	VII. — Construcciones geométricas	76
§	I. — Instrumentos	76
§	II. — Problemas con relación á la recta y á los ángulos	77
	1. Recta	77
	2. Ángulos	80
	3. Triángulos	83
	4. Tangentes	87

LIBRO III

Las Figuras semejantes.

CAPÍTULO	I. — Relaciones numéricas entre los segmentos rectilíneos.	91
§	I. — División de un segmento	91
§	II. — Teoremas generales.	93
	1. Teorema de las rectas paralelas	93
	2. Teorema de Thalés	95
	3. Triángulos semejantes	96
	4. Teorema de las rectas concurrentes.	99
§	III. — Relaciones métricas en el triángulo.	101
	1. Medias proporcionales.	101
	2. Teorema de Pitágoras	104

	3. Cuadrado de un lado	104
	4. Suma ó diferencia de los cuadrados.	106
	5. Propiedad de las bisectrices	106
§	IV. — Relaciones métricas en el círculo	108
	1. Potencia de un punto	108
	2. Triángulo inscrito	111
CAPÍTULO	II. — Lugares geométricos.	114
	1. Punto móvil con relación á dos puntos fijos.	114
	2. Eje radical	116
CAPÍTULO	III. — Problemas con relación á los segmentos proporcionales.	119
§	I. — Construcción de los segmentos.	119
§	II. — Aplicaciones	122
CAPÍTULO	IV. — Homotecia	126
CAPÍTULO	V. — Similitud.	128
§	I. — Generalidades.	128
§	II. — Polígonos semejantes.	129
CAPÍTULO	VI. — Polígonos regulares	131
§	I. — Polígonos regulares convexos	131
§	II. — Polígonos regulares estrellados.	134
§	III. — Polígonos regulares inscritos.	136
§	IV. — Problemas	142
	1. Polígonos semejantes	142
	2. Relación entre dos polígonos, el uno inscrito y el otro circunscrito.	142
	3. Relación entre dos polígonos inscritos.	143
	4. Relación entre dos polígonos isoperímetros.	144
CAPÍTULO	VII. — Longitud de la circunferencia.	146

LIBRO IV

Superficies.

CAPÍTULO	I. — Valuación de las superficies.	152
	1. Definiciones.	152
	2. Rectángulo	153

	3. Paralelogramo	155
	4. Triángulo	156
	5. Trapecio	157
	6. Polígono cualquiera	157
	7. Polígono regular	158
	8. Círculo	158
CAPÍTULO	II. — Relaciones métricas entre las áreas.	160
§	I. — Razón de dos áreas semejantes . .	160
§	II. — Relaciones entre las áreas expresadas por identidades de segundo grado	163
CAPÍTULO	III. — Problemas con relación á las áreas	165
§	I. — Área de un triángulo	165
§	II. — Problemas gráficos	170

LIBRO V

La recta y el plano en el espacio.

CAPÍTULO	I. — Posiciones relativas de las rectas y de los planos	176
§	I. — Generalidades	176
§	II. — Rectas y planos paralelos	177
	1. Rectas paralelas	177
	2. Recta y plano paralelos	177
	3. Planos paralelos	179
	4. Segmentos rectilíneos entre planos paralelos	182
§	III. — Ángulo de dos rectas	182
§	IV. — Rectas y planos perpendiculares . .	184
	1. Recta perpendicular á un plano . .	184
	2. Plano perpendicular á una recta . .	185
	3. Rectas perpendiculares á varios planos	186
	4. Perpendiculares y oblicuas	189
§	V. — Ángulo de dos planos	191
	1. Ángulos diedros	191
	2. Ángulo plano de un diedro	192
	3. Planos perpendiculares	195
§	VI. — Proyecciones sobre un plano . . .	197
§	VII. — Ángulo de una recta y de un plano .	198
§	VIII. — Distancia de dos rectas	200

CAPÍTULO	II. — Simetría en el espacio.	201
	1. Simetría con relación á un eje. . .	201
	2. Simetría con relación á un centro ó á un plano.	201
CAPÍTULO	III. — Ángulos sólidos	206
§	I. — Generalidades.	206
§	II. — Triedros.	207
§	III. — Triedros suplementarios.	209
§	IV. — Igualdad de los triedros.	210

LIBRO VI

Los Poliedros.

CAPÍTULO	I. — Propiedades.	212
§	I. — Definiciones.	212
§	II. — El Prisma.	212
	1. Prismas iguales.	214
	2. Área del prisma.	215
§	III. — Paralelepípedo.	216
§	IV. — Pirámide.	218
	1. Definiciones.	218
	2. Secciones paralelas á la base. . .	219
	3. Pirámides iguales.	221
	4. Área de la pirámide.	222
§	V. — Poliedros cualesquiera.	222
§	VI. — Poliedros regulares.	223
CAPÍTULO	II. — Volumen de los poliedros.	224
§	I. — Medida.	224
§	II. — Volumen del prisma.	224
	1. Lema.	224
	2. Volumen del paralelepípedo rec- tángulo.	225
	3. Volumen del paralelepípedo recto. .	228
	4. Volumen de un paralelepípedo cualquiera.	228
	5. Volumen del prisma.	229
§	III. — Volumen de la pirámide.	232
§	IV. — Volumen de un poliedro cualquiera. .	236
§	V. — Volumen de un tronco de pirámide. .	236
§	VI. — Volumen del tronco de prisma. . .	239
CAPÍTULO	III. — Homotecia en el espacio.	240
CAPÍTULO	IV. — Similitud de los poliedros.	241

LIBRO VII

Los tres cuerpos redondos.

Preliminares	245
CAPÍTULO I. — El cilindro	245
§ I. — Cilindro circular	245
1. Definiciones	245
2. Superficie.	246
3. Volumen	247
4. Tronco de cilindro circular	247
§ II. — Cilindro cualquiera.	249
CAPÍTULO II. — El cono	250
§ I. — Cono de revolución	250
1. Definiciones	250
2. Superficie.	251
3. Volumen	252
4. Tronco de cono	253
§ II. — Cono cualquiera	255
CAPÍTULO III. — La esfera	255
§ I. — Generalidades	255
1. Círculos en la esfera.	256
2. Plano tangente.	257
3. Posiciones relativas.	258
§ II. — Problemas con relación á la esfera.	258
§ III. — Homotecia de dos esferas	260
§ IV. — Área de la esfera	261
§ V. — Volumen de la esfera	266
§ VI. — Relaciones métricas en los cuerpos redondos	273

LIBRO VIII

Las Curvas usuales.

Preliminares	276
CAPÍTULO I. — La elipse.	278
§ I. — Definiciones	278
§ II. — Círculo director	281
§ III. — Tangentes	283
§ IV. — Proyección de un círculo	285
§ V. — Área de la elipse	289

CAPÍTULO	II. — La hipérbola	290
§	I. — Definiciones	290
§	II. — Círculo director	295
§	III. — Tangentes	296
§	IV. — Asíntotas	298
CAPÍTULO	III. — La parábola.	300
§	I. — Definiciones	300
§	II. — Tangentes.	303
§	III. — Área de la parábola.	306
§	IV. — Relaciones entre la elipse, la parábola, y la hipérbola.	308
CAPÍTULO	IV. — La hélice	310
Nota con relación	al Teorema de Guldin.	314

Ejercicios propuestos.

LIBROS I y II	321
LIBRO III.	328
LIBRO IV.	340
LIBROS V y VI	352
LIBRO VII	361
LIBRO VIII	374
Principales fórmulas de la Geometría plana	377
Principales fórmulas de la Geometría en el espacio	379
Fórmulas sobre el Libro VIII.	382
Fórmulas de la Nota	382
Tabla para calcular el perímetro de las elipses	383
Números usuales para facilitar los cálculos	384
Fa bla de las cuerdas (de grado en grado)	385
Fa bla de las cuerdas (de 10' en 10')	386