G. M. Bruño

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

con sus

Resoluciones y Respuestas

Madrid. Bravo Murillo, 106

Barcelona	París
Cameros 8	Rue de Sévres 78

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

DE

Trigonometría

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

CONTENIDOS EN LOS

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

DE

G. M. BRUÑO

ADMINISTRACIÓN DE G. M. BRUÑO

MADRID
Bravo Murillo, 106.

BARCELONA
Cameros, 8.

Imprenta de Eduardo Arias, San Lorenzo, 5, Madrid.—1916.

EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

ADVERTENCIA. — Designamos los *cologaritmos* con el signo $\bar{L}$.

Encontrar los logaritmos de las razones trigonométricas propuestas:

1.	*Resp.*	$\bar{1},1102251$	**21.**	*Resp.*	$\bar{1},2624111$
2.	»	$\bar{1},9598436$	**22.**	»	$0,3272171$
3.	»	$\bar{1},4280361$	**23.**	»	$\bar{1},6010512$
4.	»	$\bar{1},7065751$	**24.**	»	$0,1329945$
5.	»	$\bar{1},6822232$	**25.**	»	$\bar{1},8004401$
6.	»	$\bar{1},8740104$	**26.**	»	$\bar{1},9596509$
7.	»	$\bar{1},7782084$	**27.**	»	$\bar{1},9698500$
8.	»	$\bar{1},7278210$	**28.**	»	$\bar{1},7838297$
9.	»	$\bar{1},8711512$	**29.**	»	$0,1461843$
10.	»	$\bar{1},5572142$	**30.**	»	$\bar{1},5841208$
11.	»	$\bar{1},8978008$	**31.**	»	$0,3423463$
12.	»	$\bar{1},9996520$	**32.**	»	$\bar{1},2052227$
13.	»	$\bar{1},9551963$	**33.**	»	$0,6242342$
14.	»	$\bar{1},9770952$	**34.**	»	$0,9589149$
15.	»	$\bar{1},9862085$	**35.**	»	$1,4070876$
16.	»	$\bar{1},4899675$	**36.**	»	$0,4526367$
17.	»	$\bar{1},9999059$	**37.**	»	$\bar{2},5593587$
18.	»	$\bar{2},6980841$	**38.**	»	$0,3995436$
19.	»	$\bar{3},5472875$	**39.**	»	$\bar{3},6627983$
20.	»	$\bar{2},2362952$	**40.**	»	$3,5654684$

Encontrar los logaritmos de:

41. $\text{sen } 164^\circ\, 27'\, 30''$.

Reduciendo al primer cuadrante, se tiene:

$$\text{sen } 164^\circ\, 27'\, 30'' = \text{sen } (180 - 164^\circ\, 27'\, 30'') = \text{sen } 15^\circ\, 32'\, 30'',$$

cuyo logaritmo es $\bar{1},4280360$.

42. $\cos 120^\circ\, 35'\, 10''$.

Se tiene como en el número anterior, y haciendo abstracción del signo:

$$\cos 120^\circ\, 35'\, 10'' = \cos (180^\circ - 120^\circ\, 35'\, 10'') = \cos 59^\circ\, 24'\, 50'',$$

cuyo logaritmo es $\bar{1},7065751$.

43. $\text{sen } 208^\circ\, 45'\, 23''$.

$$208^\circ\, 45'\, 23'' - 180^\circ = 28^\circ\, 45'\, 23''$$

$$\log \text{sen } 208^\circ\, 45'\, 23'' = \log \text{ sen } 28^\circ\, 45'\, 23'' = \bar{1},6822231.$$

44. $\cos 221^\circ\, 33'\, 59''$.

$$221^\circ\, 33'\, 59'' - 180 = 41^\circ\, 33'\, 59''.$$

Resp. $\bar{1},874\,0104$.

Encontrar los ángulos del primer cuadrante correspondientes á los logaritmos dados.

45.

$$\begin{aligned} \log \text{sen } x &= \bar{1},4088894 \\ \log \text{sen } 14^\circ\, 51' &= \bar{1},4087306 \\ \hline \text{diferencia logaritmica:} &\quad 1588 \end{aligned}$$

diferencia tabular: 4762; diferencia angular: $\dfrac{60 \times 1588}{4762} = 20''$.

Resp. $14^\circ\, 51'\, 20''$.

46.

$$\begin{aligned} \log \cos x &= \bar{1},8849065 \\ \log \cos 39^\circ\, 53' &= \bar{1},8849945 \\ \hline \text{diferencia logaritmica:} &\quad 880 \end{aligned}$$

diferencia tabular: 1056; diferencia angular: $\dfrac{60 \times 880}{1056} = 50$

Resp. $39^\circ\, 53'\, 50''$.

Nota. La solución de los problemas siguientes es idéntica á las dos anteriores, por cuyo motivo damos sólo las respuestas.

47.	*Resp*.	36° 37′ 40″	**56**.	*Resp*.	41° 11′ 13″,4
48.	»	58° 45′ 10″	**57**.	»	34° 30′ 19″
49.	»	3° 20′ 25″,5	**58**.	»	52° 21′ 1″,1
50.	»	4° 7′ 2″,7	**59**.	»	61° 12′ 13″,3
51.	»	4° 41′ 15″,4	**60**.	»	63° 10′ 56″,2
52.	»	15° 42′ 52″,7	**61**.	»	71° 7′ 42″,8
53.	»	13° 10′ 47″,1	**62**.	»	86° 45′ 9″,4
54.	»	28° 23′ 39″,6	**63**.	»	86° 23′ 11″,4
55.	»	21° 39′ 32″,8	**64**.	»	89° 33′ 18″,8

Encontrar los ángulos menores que 90° correspondientes á los logaritmos dados:

65.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} x &= \bar{1},8820134 \\ \log \operatorname{tg} 37^\circ 18' &= \bar{1},8818386 \end{aligned}$$

diferencia logarítmica: 1748

diferencia tabular: 2621; diferencia angular: $\frac{60 \times 1748}{2621} = 40''$.

Resp. 37° 18′ 40″.

66.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{cotg} x &= 1,0592624 \\ \log \operatorname{cotg} 4^\circ 59' &= 1,0595056 \end{aligned}$$

diferencia logarítmica: 2432

diferencia tabular: 14574; diferencia angular: $\frac{60 \times 2432}{14574} = 10''$.

Resp. 4° 59′ 10″.

Nota. Se procede de igual manera en los ejercicios cuyas respuestas van á continuación.

67.	*Resp*.	66° 26′ 10″	**76**.	*Resp*.	46° 38′ 51″,8
68.	»	56° 43′ 30″	**77**.	»	53° 2′ 10″,4
69.	»	11° 49′ 46″,4	**78**.	»	64° 29′ 51″,9
70.	»	23° 40′ 59″,4	**79**.	»	65° 43′ 2″,9
71.	»	24° 16′ 22″,1	**80**.	»	80° 15′ 42″,8
72.	»	36° 51′ 1″,4	**81**.	»	89° 4′ 7″,4
73.	»	36° 11′ 4″,8	**82**.	»	89° 33′ 18″,9
74.	»	41° 49′ 42″,3	**83**.	»	0° 24′ 20″,8
75.	»	44° 40′ 13″,7	**84**.	»	0° 3′ 38″,3

Parte primera

CAPÍTULO PRIMERO

103 (2). Dado $\operatorname{sen} a = \frac{4}{5}$, búsquense las otras líneas trigonométricas del arco a.

104 (3). Resuélvase el mismo problema, haciendo cosec $a = \sqrt{3}$.

105 (4). Búsquese el seno y el coseno de un arco cuya tangente es igual a $\frac{3}{4}$.

106 (5). Búsquense las líneas trigonométricas de los arcos de 120° y de 105°.

107 (7). Cuál es el valor de la expresión:

$$x = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ}.$$

108 (8). Dados sen $(A - B) = \frac{1}{2}$ y cos $(A + B) = \frac{1}{2}$, búsquese A y B.

109 (9). Calcúlese tg $(a + b)$, sabiendo que $\operatorname{tg} a = 1$ y $\operatorname{tg} b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

110 (10). $\operatorname{Sen} a = \frac{1}{4}$, $\cos b = \frac{3}{5}$; calcúlense sen $(a \pm b)$ y cos $(a \pm b)$.

111 (11). Conociendo $\operatorname{sen} a = \frac{4}{5}$, búsquense $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$ y $\operatorname{tg} 2a$.

112 (13). Sabiendo que $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcúlense sen 15°, cos 15° y tg 15°.

113 (14). Hállense sen 9° y cos 9°.

114 (15). Sabiendo que $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, búsquese tg 15°, y luego tg 7° 30′.

115 (16). Conociendo $\operatorname{tg} a = -\frac{24}{7}$, calcúlese $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ y dedúzcanse $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ y $\cos\frac{a}{2}$.

116 (17). $\cos a = 0{,}7$; calcúlese $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$.

Háganse calculables por logaritmos las expresiones:

117 (18). $\operatorname{sen} 34^\circ\, 24'\, 12'' + \operatorname{sen} 12^\circ\, 14'\, 28''$

118 (19). $\operatorname{sen} 25^\circ\, 36'\, 14'' + \operatorname{sen} 16^\circ\, 3'\, 46''$

119 (20). $\operatorname{sen} 32^\circ\, 8'\, 17'' - \operatorname{sen} 9^\circ\, 10'\, 25''$

120 (21). $\cos 45^\circ\, 17'\, 41'' + \cos 27^\circ\, 56'\, 4''$

121 (22). $\cos 6^\circ\, 12'\, 5'' - \cos 62^\circ\, 40'\, 32''$

122 (23). $\cos 20^\circ\, 0'\, 58'' - \operatorname{sen} 35^\circ\, 53'\, 8''$

123 (24). $\operatorname{tg} 18^\circ\, 24'\, 9'' + \operatorname{tg} 10^\circ\, 0'\, 42''$

124 (25). $\operatorname{cotg} 37^\circ\, 38'\, 49'' - \operatorname{cotg} 76^\circ\, 1'\, 59''$

125 (26). $\dfrac{\operatorname{sen} 63^\circ\, 34'\, 12'' + \operatorname{sen} 38^\circ\, 7'\, 45''}{\operatorname{sen} 63^\circ\, 34'\, 12'' - \operatorname{sen} 38^\circ\, 7'\, 45''}$

126 (27). $\dfrac{\operatorname{sen} 98^\circ\, 6'\, 35'' + \operatorname{sen} 25^\circ\, 32'\, 8''}{\operatorname{sen} 98^\circ\, 6'\, 35'' - \operatorname{sen} 25^\circ\, 32'\, 8''}$

Háganse calculables por logaritmos las expresiones:

127 (28). $1 + \operatorname{sen} 20^\circ\, 32'\, 44''$

128 (29). $1 - \operatorname{sen} 30^\circ\, 45'\, 17''$

129 (30). $1 + \cos 18^\circ\, 4'\, 50''$

130 (31). $1 - \cos 64^\circ\, 56'\, 48''$

131 (32). $1 + \operatorname{tg} 43^\circ\, 9'\, 6''$

132 (33). $1 - \operatorname{tg} 7^\circ\, 5'\, 8''$

133 (34). $1 - \operatorname{cotg} 76^\circ\, 31'\, 26''$

134 (35). $1 + \operatorname{cotg} 52^\circ\, 15'\, 24''$

135 (36). $\dfrac{1 - \operatorname{tg} 15^\circ\, 24'\, 35''}{1 + \operatorname{tg} 15^\circ\, 24'\, 35''}$

136 (37). $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 27^\circ\, 8'\, 15''}{1 - \operatorname{tg} 27^\circ\, 8'\, 15''}$

137 (204). Se sabe que el seno de un arco comprendido entre 90° y 180° tiene por valor 0,75825, se quiere conocer el coseno, la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante del mismo arco, afectando cada una de estas cantidades del signo conveniente.

138 (208). Busquénse las líneas trigonométricas del arco de 15°.

139 (209). Calcúlese sen a, conociendo $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$. Explíquese *à priori* por qué la fórmula no da más que un valor para seno a.

140 (210). Conociendo $\operatorname{tg} a = \frac{4}{3}$, búsquense $\operatorname{sen} a$, $\cos a$, $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$ y $\operatorname{tg} 2a$.

141 (211). Conociendo $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{tg} b = \frac{1}{3}$, calcúlese: 1.° $\operatorname{tg}(a+b)$, y 2.° $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$.

142 (212). Se da $\operatorname{sen} a = \frac{1}{3}$ y $\operatorname{sen} b = \frac{1}{2}$, siendo a y b menores que 90°. Búsquese $\operatorname{sen} 2(a+b)$.

143 (213). Conociendo $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = b$, hállese $\operatorname{sen} a$. Aplicación: $b = 2 - \sqrt{3}$.

144 (215). Conociendo $\operatorname{sen} a = b$, hállese $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$. Aplicación: $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

145 (216). Dado el ángulo x por la relación $\operatorname{sen} x = \frac{a-b}{a+b}$, determínese $\operatorname{tg}\left(45° - \frac{x}{2}\right)$.

146 (217). Conociendo $\cos 2a = \frac{1}{2}$, hállese $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

147 (218). Conociendo el ángulo a por la relación $\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3}$, calcúlese $\operatorname{tg} 3a$.

148 (219). La cotg de un ángulo es $1 + \sqrt{2}$. Calcúlese la secante del doble de este ángulo.

149 (221). Calcúlese $\operatorname{cosec} 2a$, sabiendo que $\operatorname{cotg} a = \frac{4}{3}$.

150 (222). Dado un arco $a = 17° \, 35' \, 44'',2$, calcúlese otro arco x tal que se tenga $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} a$.

151 (206). Búsquese el número de grados del arco cuya longitud es igual al seno de 30°.

152 (207). Calcular, por medio de la Trigonometría, la expresión $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

153 (228). Dados dos ángulos: $P = 23° 57' 19''$ y $Q = 21° 16' 46''$, calcúlese un tercer ángulo x, tal que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} P + \operatorname{sen} Q$.

154 (229). Calcular $\operatorname{sen} \frac{a}{2}$ sabiendo que $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4}$. ¿Cuántos valores se obtienen y cuál es la suma de sus cuadrados?

155 (230). Expresar $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$ y $\operatorname{tg} 2a$ en función de $\operatorname{tg} a$.

156 (231). Conociendo $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{2} - 1$, búsquense $\operatorname{sen} a$, $\cos a$ y $\operatorname{tg} a$.

CAPÍTULO II

Triángulos rectángulos.

Resolver los triángulos rectángulos con los datos siguientes:

1.er Caso.

157 (138). $\begin{cases} a = 230^{m} \\ B = 38° \end{cases}$

158 (139). $\begin{cases} a = 578^{m},25 \\ B = 38° \, 51' \, 23'' \end{cases}$

2.° Caso.

159 (140). $\begin{cases} b = 102^{m},40 \\ B = 55° \end{cases}$

160 (141). $\begin{cases} b = 5734^{m},25 \\ B = 37° \, 29' \, 12'' \end{cases}$

3.er Caso.

161 (142). $\begin{cases} a = 117^{m},80 \\ b = 48^{m} \end{cases}$

162 (143). $\begin{cases} a = 5678^{m},76 \\ b = 3456^{m},48 \end{cases}$

4.° Caso.

163 (144). $\begin{cases} b = 122^{m},40 \\ c = 130^{m} \end{cases}$

164 (145). $\begin{cases} b = 52^{m},34 \\ c = 28^{m},80 \end{cases}$

Resolver los triángulos rectángulos con los siguientes datos:

165 (146). $\begin{cases} a = 6542^m,84 \\ \dfrac{B}{C} = \dfrac{7}{9} \end{cases}$

166 (147). $\begin{cases} b = 48^m \\ B = 32^\circ\, 57' \end{cases}$

167 (148). $\begin{cases} a = 163^m,20 \\ B = 40^\circ\, 22' \end{cases}$

168 (149). $\begin{cases} a = 176^m \\ b = 160^m,50 \end{cases}$

169 (150). $\begin{cases} b = 141^m \\ c = 181^m,20 \end{cases}$

170 (151). $\begin{cases} b = 320^m \\ \dfrac{B}{C} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$

171 (152). $\begin{cases} b+c = 252^m,40 \\ b-c = 7^m,60 \end{cases}$

172 (153). $\begin{cases} a = 225^m \\ \dfrac{c}{b} = 0^m,75 \end{cases}$

173 (154). Resolver un triángulo rectángulo, conociendo

$$c = 120^m \qquad \text{y} \qquad \frac{b}{a} = 0{,}6.$$

174 (155). ¿Cuál es la altura de una torre que da 96^m de sombra, cuando el sol está elevado $52^\circ\, 30'$ sobre el horizonte?

175 (156). ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por un árbol de 15^m de altura, cuando el sol está elevado $37^\circ\, 30'$ sobre el horizonte?

176 (157). Determinar la altura del sol cuando la sombra de una varilla vertical expuesta al sol es igual a 2 veces $\frac{1}{2}$ la altura de la varilla.

177 (158). ¿Cuál es la altura del sol cuando la sombra de un objeto vertical es igual a una vez $\frac{1}{2}$ su altura?

178 (159). Hállese la longitud de una recta que forma un ángulo de $22^\circ\, 40'$ con su proyección, cuya longitud es de $16^m,64$.

179 (160). Un rectángulo tiene $120^m,40$ de base y $70^m,18$ de altura, ¿cuáles son los ángulos formados por la diagonal con los lados?

180 (161). La diagonal de un rectángulo mide $68^m,42$, el

ángulo que forma con la base mide 24° 18′. Se pide la superficie del rectángulo.

181 (162). Una cuerda que subtiende un arco de 82° está a 20^m del centro, ¿cuál es la longitud de esta cuerda?

182 (163). En un círculo de $8^m,35$ de radio, ¿cuál es la longitud de la cuerda de un arco de 17° 8′?

183 (164). ¿Cuál es, en un círculo de 72^m de radio: 1.°, el polígono regular inscrito, cuyo lado es igual a 25^m; 2.°, cuál es el perímetro de este polígono; 3.°, cuál sería el radio del círculo inscrito?

184 (165). Después de haber recorrido 80 kilómetros, hállase que se han caminado $43^{km},25$ más hacia el sur que hacia el este. ¿Que dirección se ha seguido?

185 (166). La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $4689^m,76$ y la altura $1830^m,24$. Resuélvase este triángulo.

186 (167). La perpendicular bajada del ángulo recto de un triángulo rectángulo determina sobre la hipotenusa dos segmentos $b' = 3596^m,32$ y $c' = 2465^m,15$. ¿Cuáles son los elementos de este triángulo?

187 (168). Resolver un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa $a = 1346^m,24$ y la diferencia de los catetos, $d = 824^m,746$.

188 (169). La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a $4320^m,42$, y el radio del círculo inscrito $r = 789^m,36$. Resúelvase este triángulo.

189 (170). La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es $6642^m,777$; resuélvase este triángulo, sabiendo que la hipotenusa mide $4765^m,35$.

Triángulos cualesquiera.

Resolver los triángulos cuyos datos son:

1.^er^ Caso.

190 (171) $\begin{cases} A = 32° 57' \\ B = 123° \\ a = 117^m,20 \end{cases}$

191 (172) $\begin{cases} A = 138° 31' \\ B = 33° 17' \\ c = 14^m,76 \end{cases}$

192 (174) $\left\{\begin{array}{l} A = 57^\circ\, 32'\, 7'',6 \\ B = 73^\circ\, 42'\, 50'' \\ a = 25432^m,46 \end{array}\right.$

193 (175) $\left\{\begin{array}{l} A = 84^\circ\, 53'\, 33'',8 \\ B = 47^\circ\, 17'\, 3'',8 \\ c = 56894^m,60 \end{array}\right.$

194 (173) $\left\{\begin{array}{l} A = 72^\circ\, 17' \\ B = 48^\circ\, 12' \\ c = 560^m,40 \end{array}\right.$

195 (176) $\left\{\begin{array}{l} B = 79^\circ\, 50'\, 39'' \\ C = 64^\circ\, 25'\, 48'' \\ a = 439^m,258 \end{array}\right.$

2.º Caso.

196 (177) $\left\{\begin{array}{l} a = 167^m \\ b = 145^m \\ C = 54^\circ \end{array}\right.$

197 (178) $\left\{\begin{array}{l} a = 203^m,20 \\ b = 245^m,40 \\ C = 72^\circ\, 10' \end{array}\right.$

198 (179) $\left\{\begin{array}{l} b = 61686^m,54 \\ c = 51956^m,90 \\ A = 24^\circ\, 26'\, 56'' \end{array}\right.$

199 (180) $\left\{\begin{array}{l} b = 1109^m,75 \\ c = 1489^m,62 \\ A = 47^\circ\, 9'\, 50'' \end{array}\right.$

3.er Caso.

200 (181) $\left\{\begin{array}{l} a = 75^m \\ b = 92^m \\ c = 107^m \end{array}\right.$

201 (182) $\left\{\begin{array}{l} a = 543^m,90 \\ b = 597^m,60 \\ c = 625^m,90 \end{array}\right.$

202 (183) $\left\{\begin{array}{l} a = 456^m,48 \\ b = 518^m,50 \\ c = 592^m,30 \end{array}\right.$

203 (184) $\left\{\begin{array}{l} a = 567^m,37 \\ b = 419^m,85 \\ c = 354^m,63 \end{array}\right.$

4.º Caso.

204 (185) $\left\{\begin{array}{l} a = 105^m \\ b = 110^m \\ A = 58^\circ \end{array}\right.$

205 (186) $\left\{\begin{array}{l} a = 85^m,40 \\ c = 38^m,85 \\ C = 15^\circ\, 25' \end{array}\right.$

206 (187) $\left\{\begin{array}{l} b = 53^m,60 \\ c = 35^m,20 \\ B = 71^\circ\, 15' \end{array}\right.$

207 (188) $\left\{\begin{array}{l} a = 65792^m,60 \\ b = 98045^m,60 \\ A = 27^\circ\, 51'\, 48'',6 \end{array}\right.$

Buscar los elementos desconocidos de los triángulos cuyos datos son:

208 (189). $\left\{\begin{array}{l} A = 123^\circ \\ a = 181^m,60 \\ b - c = 29^m,54 \end{array}\right.$

209 (190). $\left\{\begin{array}{l} A = 58^\circ \\ a = 105^m \\ b + c = 216^m,50. \end{array}\right.$

CAPÍTULO III

Cálculo de los elementos secundarios de los triángulos.

210 (507). La perpendicular bajada del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa, la divide en dos segmentos cuyas longitudes son $3^{m},643$ y $4^{m},928$; calcúlense los ángulos del triángulo.

211 (508). La bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo divide a la hipotenusa en dos segmentos cuyas longitudes son $4^{m},319$ y $5^{m},238$; calcúlense los ángulos de este triángulo.

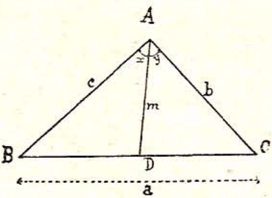
212 (509). Calcular los lados de un triángulo cuya superficie es de $10^{m.2}$ y cuyos ángulos miden respectivamente $178^{\circ}\ 30'\ 29''$, $1^{\circ}\ 0'\ 4''$ y $0^{\circ}\ 29'\ 27''$.

213 (510). Un triángulo rectángulo tiene una superficie de $81678^{m.2},3640$; uno de sus ángulos mide $38^{\circ}\ 51'\ 20''$; hállense los otros elementos de este triángulo.

214 (511). Uno de los ángulos de un triángulo mide $35^{\circ}\ 18'\ 46''$; los dos lados que lo forman miden 87^{m} y 72^{m}; se pide la superficie en áreas y centiáreas.

215 (512). Calcular la superficie de un triángulo isósceles de $176^{m},40$ de altura, siendo el ángulo del vértice de $47^{\circ}\ 24'\ 18''$.

216 (513). En un triángulo ABC, se tiene $a=60^{m}, b=40^{m}$, $c=42^{m}$; calcúlense la longitud de la mediana AD y los ángulos que forma con BC.



Núm. 216.

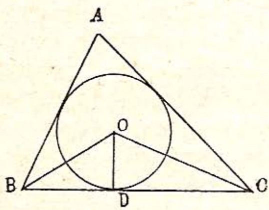
217 (514). Calcular el radio del círculo circunscrito a un triángulo cuyo lado $a = 354^{m},20$, y el ángulo opuesto a este lado $A = 55^{\circ}\ 49'\ 22''$.

218 (515). Calcular con 0",1 de aproximación, el ángulo del vértice de un triángulo isósceles cuya base es igual a $3452^m,634$, y la superficie igual a 5864372^{m^2}.

219 (516). Calcular la superficie de un triángulo, conociendo la altura $h = 4590^m,076$ y los ángulos α, β que forma esta altura con los dos lados adyacentes; a saber: $\alpha = 8^\circ$ y $\beta = 15^\circ$.

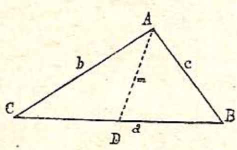
220 (517). Uno de los catetos c de un triángulo rectángulo tiene $34828^m,43$ y el ángulo agudo adyacente $B = 48^\circ\, 35'\, 27''$. ¿Cuánto es preciso aumentar este ángulo para que el otro cateto quede aumentado de 20^m?

221 (518). En un triángulo se conocen un lado $a = 3428^m,58$ y los dos ángulos adyacentes $B = 108^\circ\, 15'\, 27''$ y $C = 47^\circ\, 25'\, 47''$. Calcúlese la altura bajada del vértice A.



Núm. 222.

222 (519). Se da un lado de un triángulo, $a = 8424^m,572$ y los dos ángulos adyacentes $B = 64^\circ\, 45'\, 28'',6$ y $C = 42^\circ\, 25'\, 17''$, y se quiere saber: 1.º la distancia del centro del círculo inscrito al vértice B; 2.º el radio del círculo inscrito.



Núm. 223.

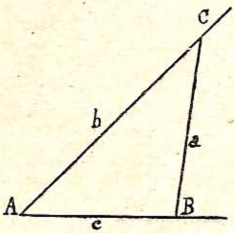
223 (520). En un triángulo se conoce el ángulo $B = 51^\circ\, 14'\, 37'',8$, el ángulo $C = 28^\circ\, 55'\, 35''$ y el lado $a = 4436^m,857$. Calcúlese el ángulo que forma el lado c con la mediana trazada del vértice A.

224 (521). Resolver un triángulo, conociendo el perímetro $2p = 1254^m,345$ y dos ángulos: $A = 98^\circ\, 35'\, 28'',6$; $B = 42^\circ\, 39'\, 18'',8$.

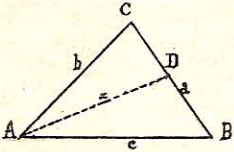
225 (522). Calcular los lados de un triángulo cuyo perímetro $2p = 1^m,20$, y cuyos ángulos A y B tienen respectivamente por valor $35^\circ\, 17'\, 15''$ y $62^\circ\, 43'\, 30''$.

226 (523). Dado un ángulo $A = 44^\circ\, 20'\, 12''$, por un punto B tomado sobre uno de sus lados, a una distancia $AB = 107^m$, se traza una recta BC tal que la superficie del triángulo

ABC sea de $6527^{m.2}$; se pide la longitud de la recta AC y el valor del ángulo ABC.



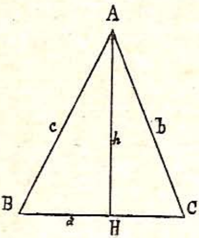
Núm. 226.



Núm. 228.

227 (524). Búsquese el radio del círculo circunscrito a un triángulo cuyos tres lados son respectivamente 249^m, 332^m y 415^m.

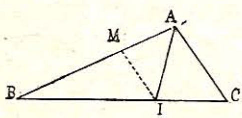
228 (525). En un triángulo BAC, se da el lado $AB = 23^m,215$, el lado $AC = 19^m,419$ y el ángulo $BAC = 46° 29' 37''$; se quiere saber la longitud de la bisectriz del ángulo A.



Núm. 229.

229 (526). En un triángulo ABC, el ángulo B es igual a $68° 26' 17''$, el ángulo C a $75° 8' 23''$ y la altura AH a $148^m,19$; se desea saber la longitud de los tres lados.

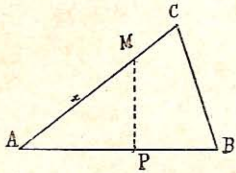
230 (527). Los tres lados de un triángulo ABC son respectivamente $AB = 1551^m$, $AC = 2068^m$, $BC = 2585^m$; hállese la longitud de la recta AD que une el vértice A con el punto medio de BC.



Núm. 231.

231 (528). En un triángulo ABC se conocen los tres lados, a saber: $BC = 6^m$ $AB = 5^m$, $AC = 2^m$. Se traza la bisectriz AI del ángulo A, y se quiere saber: 1.° las superficies de los dos triángulos ACI y ABI; 2.° la longitud de la recta IM paralela a CA, terminada en el lado AB.

232 (529). En un triángulo ABC se da $AC = 177^m,285$, $BC = 89^m,214$, el ángulo $C = 69^o\,10'\,12''$. Determínese el punto M, de tal manera, que la perpendicular MP divida el triángulo en dos partes equivalentes.



Núm. 232.

233 (530). Conociendo los tres lados de un triángulo: $a = 1402^m,448$, $b = 876^m,53$, $c = 1227^m,142$; calcúlense: 1.º los ángulos y la superficie; 2.º el área comprendida entre los círculos inscrito y circunscrito.

234 (531). Conociendo dos lados de un triángulo: $a = 4465^m,72$, $b = 983^m,45$ y el ángulo que forman $C = 75^o\,23'\,54''$; calcúlense los otros dos ángulos, el tercer lado, la superficie y el radio del círculo ex-inscrito comprendido en el ángulo C.

235 (576). En un cuadrilátero inscriptible, dos lados adyacentes tienen por longitud 3^m, y los otros dos lados 4^m. Calcúlese: 1.º la superficie; 2.º los radios de los círculos inscrito y circunscrito; 3.º las diagonales; 4.º las tangentes de los ángulos que forman las diagonales con los lados.

236 (577). Las diagonales de un cuadrilátero tienen respectivamente 295^m, 315^m y $314^m,159$, el ángulo que forman mide $89^o\,59'\,13''$. Se pide la superficie del cuadrilátero.

237 (578). Uno de los ángulos de un rombo circunscrito a un círculo de 68^m de radio es de $43^o\,24'\,37''$. Calcúlese, con un decímetro cuadrado de aproximación, la superficie de este rombo.

238 (579). Calcúlese, con $\frac{1}{10}$ de segundo de aproximación, los ángulos de un rombo cuyo perímetro mide $824^m,693$, sabiendo que una de las diagonales mide $92^m,355$.

239 (580). Resolver un paralelogramo conociendo una diagonal, la superficie y el perímetro.

240 (669). En un círculo de $3^m,45$ de radio, se quiere inscribir un polígono regular de 9 lados, ¿cuál será la longitud del lado?

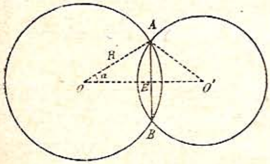
241 (670). En un círculo de $196^m,273$ de radio, ¿cuál será la graduación de un arco subtendido por una cuerda de $238^m,355$?

242 (671). En un círculo de 8^m de radio, se traza una cuercuerda que subtiende un arco de 62° 21'. ¿Cuál es la superficie del triángulo comprendido entre esta cuerda y los radios que tocan sus extremidades?

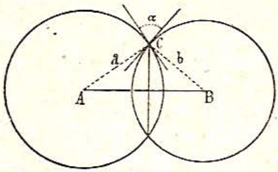
243 (672). Una torre tiene 50^m de circunferencia; las tangentes trazadas desde un punto exterior forman un ángulo de 18°. ¿Cuál es la distancia de este punto al centro?

244 (673). En el problema anterior, ¿cuál será el ángulo de las tangentes, si el punto exterior dista 150^m del centro?

245 (674). Se dan dos circunferencias secantes cuyos radios son R y r, y la distancia de los centros d. Calcúlese la cuerda común.



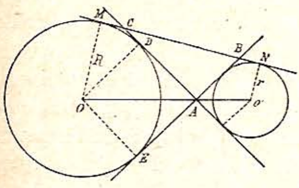
Núm. 245.



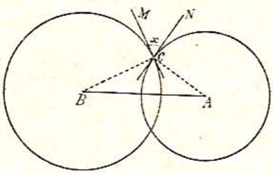
Núm. 246.

246 (675). Dos círculos de radio a y b se cortan bajo un ángulo α. Calcúlese la longitud de su cuerda común.

247 (676). Las tangentes interiores comunes a dos círculos de radios R y r se cortan en ángulo recto. Calcúlese la superficie del triángulo formado por estas líneas y la tangente común exterior.



Núm. 247.

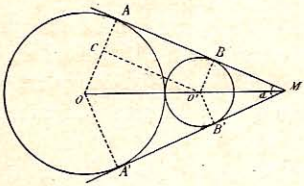


Núm. 248.

248 (677). Los radios de dos círculos son 1 y 2, la distancia de sus centros es $\sqrt{7}$; calcúlese, sin tablas, el coseno del án-

gulo formado por las tangentes a estos círculos en uno de sus puntos de intersección; hállense luego el *sen*, el *cos* y la *tg* de la mitad de este ángulo.

249 (678). Dos circunferencias de radios *a* y *b* son tangentes exteriormente. ¿Cuál es el valor del ángulo que forman las tangentes comunes exteriores AB y A′B′?



Núm. 249.

250 (686). Un dodecágono regular está inscrito en un círculo de radio R; calcúlense el lado, la apotema y la superficie de dicho polígono.

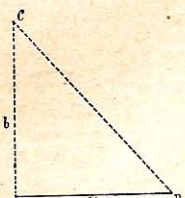
251 (687). Dado el lado *a* de un dodecágono regular, se quiere saber cuál es la longitud del semirradio del mismo polígono.

252 (688). Calcúlese el radio de una circunferencia, sabiendo que la superficie del octógono regular inscrito excede de una cantidad a^2 a la superficie del exágono regular inscrito.

CAPÍTULO IV

Aplicaciones al levantamiento de planos.

253 (191). El ángulo de elevación de la cúspide de una torre vertical es de 43° 15′ a 72^{m} de la torre, estando el ojo del observador a 1^{m},10 del suelo. ¿Cuál es la altura de la torre?

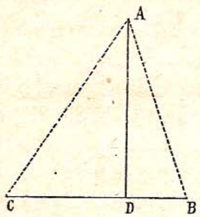


Núm. 255.

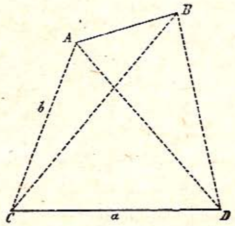
254 (192). El ángulo de elevación de la cúspide de una torre vertical, cuyo pie es inaccesible, es de 24° 36′; si el observador avanza de 32^{m} hacia la torre, el ángulo de elevación del vértice es de 40° 12′. ¿Cuál es la altura de la torre? La base de operación es horizontal, y el ojo del observador está a 1^{m},50 del suelo.

255 (193). Medir la distancia de un lugar A a otro C inaccesible. Se ha tomado una base AB perpendicular a AC, y de 80^m de largo. El ángulo formado en el punto B por los rayos visuales dirigidos a A y a C es igual a 48° 25′.

256 (194). Dos observadores C y B, que distan el uno del otro de 1750^m, miden al mismo instante las alturas angulares de un punto determinado de una nube. Este punto está en el plano vertical de la base de observación, y los ángulos



Núm. 256.

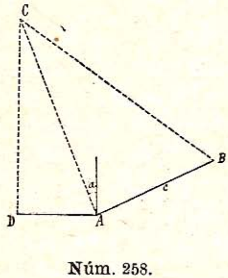


Núm. 257.

de elevación son de 72° y 84°. ¿Cuál es, en metros, la altura de la nube, admitiendo que los dos observadores tienen el mismo horizonte?

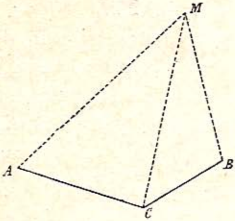
257 (195). Calcúlese la distancia de dos puntos inaccesibles A y B, conociendo una base $CD = 150^m$, el ángulo $BCD = 40°$; el ángulo $ACD = 69°$, el ángulo $ADC = 38° 30'$, y el ángulo $BCD = 70° 30'$.

258 (196). Determínese la altura de una montaña. La base de operación AB que se ha elegido tiene 225^m, los ángulos formados por esta base y los rayos visuales dirigidos a la cumbre de la montaña son $A = 52° 27' 18''$ y $B = 41° 19' 25''$; además, uno de estos rayos visuales AC hace con la vertical de la estación A un ángulo de 43° 19′ 12″.



Núm. 258.

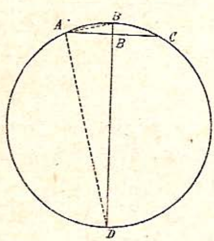
259 (197). Dados tres puntos A, B, C, en el mapa de un país, se quiere determinar la posición de un cuarto punto M, de donde las distancias $AC = 200^m$ y $BC = 170^m$ han sido vistas bajo ángulos conocidos $\alpha = 46° 17' 13'',2$ y $\beta = 30° 9'$. Admitiendo que los cuatro puntos están en el mismo plano, y que el ángulo $ACB = 140° 40' 8'',4$, calcúlese MC.



Núm. 259.

260 (198). Un observador, colocado a una altura de 120^m sobre el nivel del mar, halla que el rayo visual que concurre en el horizonte sensible, forma con la vertical un ángulo de 89° 39'. Se pregunta cuál sería, según este cálculo, el radio terrestre.

261 (199). Un arco $AC = 28° 35'$ gira alrededor de un diámetro BB' perpendicular a su cuerda. ¿Cuál es la superficie de la zona descrita, siendo el radio del círculo $5^m,43$?



Núm. 261.

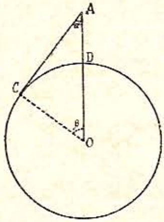
262 (200). Calcular el radio de una torre inaccesible, sabiendo que la base AB es de $17^m,5$ y los ángulos formados con esta base por los pares de tangentes a la torre son: en el punto A, $\alpha = 60°$, $\alpha' = 20°$, y en el punto B, $\beta = 75°$, $\beta' = 25°$.

263 (819). Un observador se encuentra a 56^m del pie de una torre de 35^m de altura. ¿Bajo qué ángulo ve esta torre, verificándose la observación a 1^m del suelo?

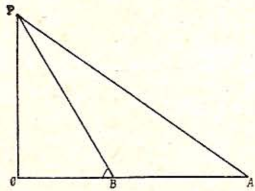
264 (820). Un objeto vertical de $1^m,75$ se ve bajo un ángulo de 1° 5'. ¿A qué distancia está dicho objeto?

265 (821). Dos observadores, que distan el uno del otro de 1875^m, miden al mismo instante las alturas angulares de un punto determinado de una nube. Este punto se encuentra en el plano vertical de la base de observación, y los ángulos de elevación miden 75° y 82°; se pregunta ¿cuál es la altura de la nube?

266 (822). Un observador está colocado en A sobre la cúspide de una montaña, y su vista se extiende hasta un punto C en el horizonte; calcúlese la altura de la montaña, en función del radio R de la tierra y del ángulo α que la visual AC forma con la vertical AO.



Núm. 266.

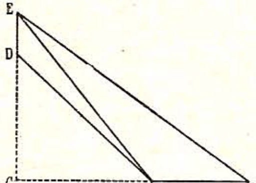


Núm. 267.

267 (823). Una persona B, colocada a la orilla de un río ve un árbol CP plantado en la ribera opuesta bajo un ángulo de 60°; si se aleja 40^{m}, el ángulo no mide más que 30°. ¿Cuál es la altura del árbol y el ancho del río?

268 (824). Un pararrayo de una longitud conocida a está colocado sobre un edificio; deteniéndose a una distancia d del pie del edificio, y a una altura h del suelo, se ha visto el pararrayo bajo un ángulo α. Calcúlese la altura de la punta del pararrayo sobre el suelo.

269 (825). Determinar el tamaño de una estatua DE colocada sobre un pedestal en el interior de un cercado, en el cual no se puede penetrar.

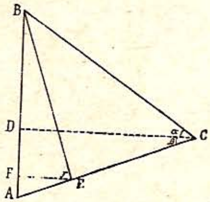


Núm. 269.

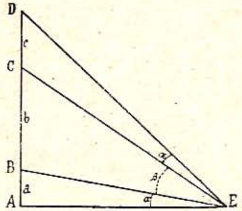
270 (826). Determinar la altura de una torre AB, situada al pie de un terreno regularmente inclinado: 1.°, cuando el pie es accesible; 2.°, cuando es inaccesible.

271 (827). Una columna que sostiene una estatua se eleva al borde de un río. Un observador, colocado sobre el otro

borde, ve bajo un mismo ángulo la estatua CD y el pedestal AB de la columna. Conociendo las alturas de las tres partes del monumento, calcúlese el ancho del río.

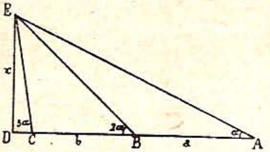


Núm. 270.

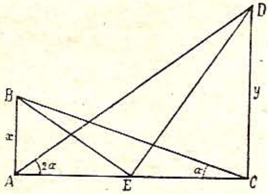


Núm. 271.

272 (828). Observando una torre desde tres puntos A, B, C situados sobre una misma recta que pasa por su pie, los ángulos de elevación son tales que el segundo y el tercero son, respectivamente, doble y triple del primero. Calcúlese la altura de la torre.



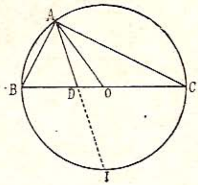
Núm. 272.



Núm. 273.

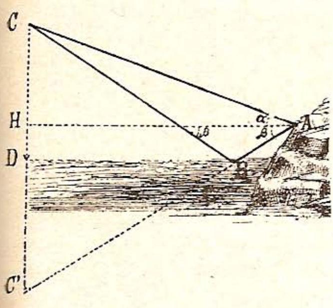
273 (829). Un mástil AB y una torre CD, separados por una distancia a, están a la orilla de un camino horizontal. Desde el pie del mástil se ha medido el ángulo de elevación de la torre, y desde el pie de la torre el ángulo de elevación del mástil; los dos ángulos hallados son 2α y α; colocándose a la mitad de la distancia a, los ángulos de elevación son complementarios. Calcúlense las alturas de la torre y del mástil.

274 (830). Tres puntos determinados B, O, C, están a distancias iguales sobre una misma recta, y desde un cuarto punto A se ve la longitud total BC bajo un ángulo recto. Conociendo la longitud AO y la bisectriz AD del ángulo BAC, determínese el punto A: 1.°, por el cálculo trigonométrico, y 2.°, por una construcción gráfica.

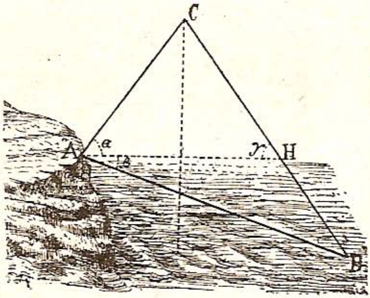


Núm. 274.

275 (831). Un observador, colocado en A, a orilla de un lago, a una altura h sobre el nivel del agua, halla que el ángulo de elevación de una nube C es α, y el ángulo de depresión de la imagen C′ reflejada por el agua es β. Calcúlese la altura de la nube.



Núm. 275.

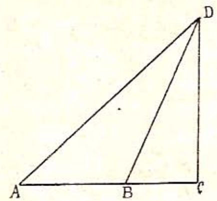


Núm. 276.

276 (832). Una persona colocada a mediodía en el punto A de una ribera escarpada, a una altura h sobre el nivel del mar, mide el ángulo de elevación α de una nube y el ángulo de depresión β de la sombra de la nube sobre el agua. En el momento de la observación, el sol está detrás de la persona, a una altura marcada por el ángulo de elevación γ. ¿Cuál es la altura de la nube?

277 (833). Un navío C, que se dirige hacia el norte, ve sobre una misma línea dos faros A y B en la dirección del oeste;

después de una hora de marcha, los faros aparecen el uno al sud-oeste y el otro al sud-sud-oeste. Sabiendo que la distan-



Núm. 277.

cia de los faros es de 8 kilómetros, calcúlese la velocidad del navío.

CAPÍTULO V

Cálculos logarítmicos.

278 (220). Calcular los valores de las expresiones:

1.° $\cos^2 18° \operatorname{sen}^2 36° - \cos 36° \operatorname{sen} 18°$;

2.° $\operatorname{sen}^2 24° - \operatorname{sen}^2 6°$.

279 (227). Calcular los ángulos x comprendidos entre 0° y 180° dados por la fórmula:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{a \operatorname{sen} \beta - b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta - b \operatorname{sen} \alpha}$$

$$a = 4627^{m},55 \qquad \alpha = 51° 57' 44''$$
$$b = 3944^{m},68 \qquad \beta = 63° 18' 27''.$$

280 (241). Hacer logarítmica la expresión:

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C$$

escrita para los elementos de un triángulo.

281 (242). Hacer calculable por logaritmos la suma:

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(a + b).$$

282 (243). Hacer calculable por logaritmos la suma:

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c + \operatorname{sen} d$$

sabiendo que

$$a + b + c + d = 2\pi.$$

283 (244). Hacer logaritmicas las expresiones:

1.º $$1 + \operatorname{sen} a + \cos a$$
2.º $$1 + \cos a + \cos 2a.$$

284 (245). Hacer calculable por logaritmos la expresión:

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c.$$

285 (246). Hacer calculables por logaritmos las dos expresiones:

$$\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a + c - b) + \cos(b + c - a)$$
$$\operatorname{sen}(b + c - a) + \operatorname{sen}(a + c - b) + \operatorname{sen}(a + b - c) - \operatorname{sen}(a + b + c)$$

286 (247). Hacer logaritmica la expresión:

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Parte segunda

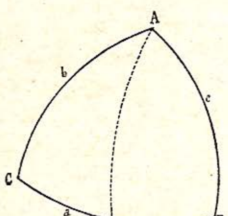
TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

CAPÍTULOS I Y II

Figuras esféricas.—Relaciones fundamentales.

1. En un triángulo esférico equilátero, se tiene

$$\cos A = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \cot a.$$



Núm. 2.

2. En un triángulo isósceles, se tiene $\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \frac{A}{2}$.

3. En el mismo triángulo, se tiene $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \operatorname{tg} b \cos B$.

4. En el mismo triángulo, se tiene $\cos b = \cot B \cot \frac{A}{2}$.

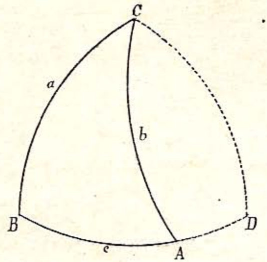
5. En el mismo triángulo, se tiene $\cos \frac{A}{2} = \cos \frac{a}{2} \operatorname{sen} B$.

6. En un triángulo esférico rectángulo, se tiene:

$$\operatorname{sen}(a - c) = \operatorname{tg} b \cos a \operatorname{tg} \frac{B}{2}.$$

7. En el mismo triángulo, $\operatorname{sen}(a - c) = \operatorname{sen} b \cos c \operatorname{tg} \frac{B}{2}$.

8. En el mismo triángulo, $\operatorname{tg}^2 \frac{b}{2} = \operatorname{tg} \frac{a+c}{2} \operatorname{tg} \frac{a-c}{2}$.



Núm. 6.

9. ¿Qué viene a ser la analogía de Neper, que da $\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}$ si $a + b = \pi$? Consecuencias.

10. Demostrar las analogías de Neper, valiéndose de las fórmulas fundamentales.

CAPÍTULO III

Resolver los triángulos rectángulos por medio de los elementos indicados.

11. Resolver un triángulo esférico rectángulo, conociendo:

			$a = 114^\circ 15'$;	$b = 46^\circ 18'$.
12.	—	—	$a = 125^\circ 12' 18''$;	$b = 53^\circ 15' 47''$.
13.	—	—	$a = 57^\circ 9' 48''$;	$b = 37^\circ 23' 19''$.
14.	—	—	$a = 52^\circ 12'$;	$B = 75^\circ 16'$.
15.	—	—	$a = 125^\circ 52' 10''$;	$B = 85^\circ 13' 45''$.
16.	—	—	$a = 110^\circ 8' 47''$;	$B = 51^\circ 42' 9''$.
17.	—	—	$b = 52^\circ 45'$;	$c = 71^\circ 15'$.

18. Mismo problema: $b = 98^\circ\, 16'\, 12''$; $c = 37^\circ\, 12'\, 30''$.

19. — — $b = 125^\circ\, 15'\, 42''$; $c = 133^\circ\, 9'\, 45''$.

20. — — $B = 53^\circ\, 12'$; $b = 48^\circ\, 30'$.

21. — — $B = 72^\circ\, 10'\, 50''$; $b = 65^\circ\, 10'\, 42''$.

22. — — $B = 110^\circ\, 36'\, 20''$; $b = 120^\circ\, 14'\, 50''$.

23. — — $b = 95^\circ\, 14'$; $C = 60^\circ\, 20'$.

24. — — $b = 122^\circ\, 25'\, 42''$; $C = 52^\circ\, 10'\, 3''$.

25. — — $b = 101^\circ\, 42'\, 51''$; $C = 46^\circ\, 15'\, 20''$.

26. — — $B = 74^\circ\, 12'$; $C = 60^\circ\, 15'$.

27. — — $B = 35^\circ\, 25'\, 4''$; $C = 65^\circ\, 15'\, 52''$.

28. — — $B = 85^\circ\, 4'\, 22''$; $C = 36^\circ\, 14'\, 51''$.

CAPÍTULO IV

Resolver un triángulo cualquiera por medio de los datos indicados.

Resolver un triángulo, conociendo:

29. $a = 103^\circ\, 15'$; $b = 98^\circ\, 36'$; $c = 67^\circ\, 40'$.

30. $a = 150^\circ\, 10'\, 5''$; $b = 110^\circ\, 20'\, 31''$; $c = 40^\circ\, 10'$.

31. $a = 85^\circ\, 3'\, 42''$; $b = 60^\circ\, 42'\, 50''$; $c = 35^\circ\, 10'\, 8''$.

32. $A = 113^\circ\, 2'$; $B = 82^\circ\, 30'$; $C = 116^\circ\, 20'$.

35. $A = 125^\circ\, 5'\, 8''$; $B = 160^\circ\, 3'\, 42''$; $C = 130^\circ\, 4'\, 15''$.

36. $A = 33^\circ\, 9'\, 50''$; $B = 78^\circ\, 42'\, 9''$; $C = 72^\circ\, 4'\, 15''$.

37. $a = 113^\circ\, 2'$; $b = 82^\circ\, 39'$; $C = 138^\circ\, 50'$.

38. $a = 120^\circ\, 4'\, 9''$; $b = 115^\circ\, 40'\, 18''$; $C = 120^\circ$.

39. $a = 110^\circ\, 9'\, 55''$; $b = 115^\circ\, 50'\, 19''$; $C = 100^\circ\, 40'\, 50''$.

40. $A = 85^\circ\, 4'$; $B = 75^\circ\, 15'$; $c = 80^\circ\, 40'$.

41. $A = 100^\circ\, 10'\, 20''$; $B = 30^\circ\, 4'\, 12''$; $c = 40^\circ\, 12'\, 25''$.

42. $A = 95^\circ\, 4'\, 18''$; $B = 85^\circ\, 42'\, 50''$; $c = 60^\circ\, 20'\, 30''$.

43. $a = 55^\circ\, 12'$; $b = 62^\circ\, 30'$; $A = 45^\circ\, 15'$.

44. $a = 36^\circ\, 18'\, 25''$; $b = 42^\circ\, 15'\, 22''$; $A = 50^\circ\, 40'\, 30''$.

45. $a = 33^\circ\, 19'\, 30''$; $b = 32^\circ\, 12'\, 15''$; $A = 20^\circ\, 12'\, 36''$.

46. $A = 144^\circ\, 48'$; $B = 117^\circ\, 30'$; $a = 154^\circ\, 45'$.

47. $A = 85^\circ\, 12'\, 15''$; $B = 80^\circ\, 18'\, 30''$; $a = 84^\circ\, 12'\, 35''$.

48. $A = 60^\circ\, 25'\, 32''$; $B = 56^\circ\, 15'\, 20''$; $a = 75^\circ\, 12'\, 15''$.

CAPÍTULOS V Y VI

Aplicaciones.

49. Búsquese el volumen de un tetraedro, cuyas aristas tienen 10 cm., 12 cm., 15 cm., las caras miden 90°, 60°, 45°.

50. Búsquese el volumen de un tetraedro regular, cuya arista es a.

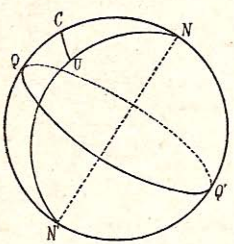
51. Búsquese el volumen de un paralelepípedo, cuyas aristas tienen 15 cm., 20 cm., 25 cm.; y las caras 90°, 60°, 60°.

52. Búsquese el volumen de un tetraedro, cuyas seis aristas tienen 10 cm., 12 cm., 15 cm., 12 cm., 20 cm., 18 cm.

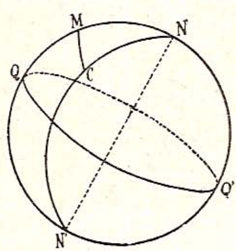
53. Búsquese el volumen de un octaedro regular.

54. Reducir al horizonte un ángulo de 52° 15′, siendo las inclinaciones de los lados sobre el plano horizontal de observación, 6° 12′ y 8° 20′.

55. Hállese la distancia entre dos pueblos C. y U., siendo las coordenadas de C.: longitud, 2′53″ O.; latitud, 19°25′17″ N.; y las de U.: longitud, 3° 1″ E.; latitud, 19° 12′ 21″ N.



Núm. 55.

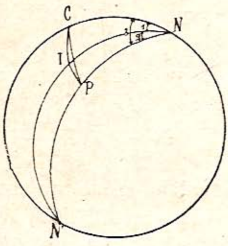


Núm. 56.

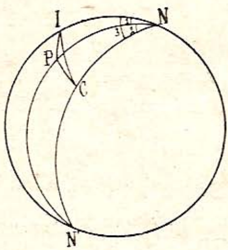
56. Hállese la distancia entre dos poblaciones C, cuya longitud es 8°43′7″ E., y la latitud, 18° 8′ 56″ N., y M., cuya longitud es 7° 17′ 14″ O., y la latitud, 23° 11′ 17″ N.

57. Hállese la distancia angular de dos montañas P., cuya longitud es 32′ 27″ E., y la latitud, 19° 1′ 17″, e I., cuya lon-

gitud es 29′ 3″ E., y la latitud, 19° 11′ 11″; las dos montañas son vistas desde la población C., cuya longitud es 2′ 53″ O., y la latitud, 19° 25′ 17″ N.



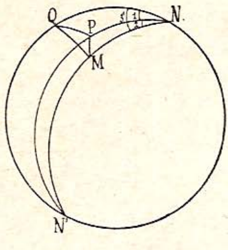
Núm. 57.



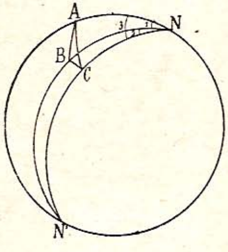
Núm. 58.

58. Calcúlese el exceso esférico del triángulo cuyos vértices son los puntos: P. (long., 32′ 37″ E.; lat., 19° 1′ 17″), I. (long., 29′ 3″ E.; lat., 19° 11′ 11″) y C. (long., 2° 5′ 16″ E.; lat., 19° 1′ 31″).

59. Calcúlese el exceso esférico del triángulo cuyos vértices son las poblaciones de P. (long., 55′ 53″ E.; lat., 19° 2′ 31″). Q. (long., 1° 15′ 16″ O., lat., 20° 35′ 36″), y M. (long., 1° 59′ 3″ E.; lat., 19° 42′ 12″).



Núm. 59.

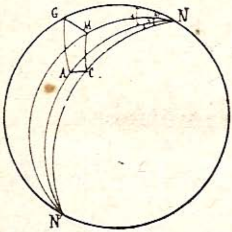


Núm. 60.

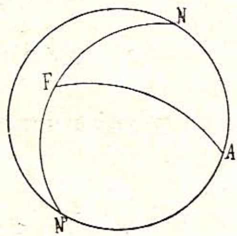
60. Calcúlese el exceso esférico del triángulo cuyos vértices son: C. (long. 0°.; lat.: 19° 26′ 1″) B. (long., 1° 15′ 16″ O.; lat., 20° 35′ 36″), y A. (long., 7° 17′ 14″ O.; lat., 23° 11′ 17″).

61. Calcular los lados y los ángulos de un cuadrilátero cuyos vértices son los puntos:

M. (long.: 1° 37′ 33″ E.; lat., 25° 52′ 32″);
C. (long.: 8° 43′ 7″ E.; lat., 18° 8′ 56″);
A. (long.: 46′ 24″ O.; lat., 16° 50′ 19″);
G. (long.: 11° 47′ 20″ O.; lat., 27° 55′ 53″).



Núm. 61.



Núm. 62.

62. Un barco sale de un puerto cuyas coordenadas geográficas son: long. 140°, lat., 19° N., con destino a otro situado por 46′ 2″ O. y 16° 50′ 19″. ¿Qué distancia habrá de recorrer, y qué ángulo ha de formar con el meridiano la dirección del barco a su salida?

Parte tercera

CAPÍTULOS I Y II

Funciones trigonométricas.

1 (6). Hállense todos los ángulos comprendidos entre 0 y 900° para los cuales se tenga $\operatorname{tg} a = 1$.

2 (205). ¿Cuáles son los ángulos comprendidos entre 0 y 1000° que tienen por coseno $+ 0{,}548$?

3 (214). En las fórmulas de sen $\frac{a}{2}$ y cos $\frac{a}{2}$ en función de sen a, ¿qué signos deberán darse a los radicales cuando se tenga $a = 2473°$?

4 (1). Reducir al primer cuadrante los arcos siguientes:

1.°	sen 105° 45′ 4″
2.°	sen 124° 3′ 12″
3.°	sen 223° 32′ 21″
4.°	sen 1413° 18′ 43″

5 (223). Siendo el coseno de un ángulo comprendido entre 90° y 180° igual a $-0{,}358$, calcúlese con 0,001 de aproximación, y sin hacer uso de los logaritmos, el coseno de la mitad de este ángulo.

6 (224). Dado coseno $a = 0{,}85742$, calcúlese sen $\frac{1}{2}a$ y cos $\frac{1}{2}a$.

7 (225). Siendo $\frac{1}{4}$ el seno de un ángulo, se piden los valores del seno y del coseno de la mitad de este ángulo.

8 (226). Calcúlese $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ y $\cos\frac{a}{2}$, sabiendo que $\operatorname{sen} a = -\frac{24}{25}$ y que el arco termina en el cuarto cuadrante.

CAPÍTULO III

Generalización de fórmulas.

9 (203). Calcúlese la tangente de un arco igual a la cuarta parte del cuadrante, sin recurrir al empleo de las tablas trigonométricas.

10 (236). Dada la expresión $\operatorname{tg}\alpha = (2+\sqrt{3})\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$, calcúlese $\operatorname{tg}\alpha$.

11 (237). Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\beta$ son las raices de la ecuación $x^2 + px + q = 0$, calcúlese en función de p y de q el valor de la expresión:

$$\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta) + p \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + q\cos^2(\alpha+\beta).$$

12 (290). Verifíquense las identidades:

1.º $$\operatorname{tg} a + \cot a = \frac{2}{\operatorname{sen} 2a},$$

2.º $$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} 2a}{1+\sec 2a}.$$

13 (291). Verifíquese la fórmula:

$$\sec 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a + 1}{\operatorname{cotg}^2 a - 1}.$$

14 (292). Verifíquense las identidades:

1.º $$\operatorname{tg} 2a = \frac{\cos a - \cos 3a}{\operatorname{sen} 3a - \operatorname{sen} a}$$

2.º $$\operatorname{tg} 3a = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\operatorname{sen} 4a - \operatorname{sen} 2a}.$$

15 (293). Verifíquense las identidades:

1.° $$\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\cos a - \cos b} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b)$$

2.° $$\frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos b - \cos a} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(a+b).$$

16 (294). Verifíquese la identidad:

$$\operatorname{sen} 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(45^\circ - a)}{1 + \operatorname{tg}^2(45^\circ - a)}.$$

17 (295). Verifíquense las identidades:

1.° $\operatorname{sen} 3a = 4 \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(60^\circ - a) \operatorname{sen}(60^\circ + a)$

2.° $\cos 3a = 4 \cos a \cos(60^\circ + a) \cos(60^\circ - a)$

3.° $\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(60^\circ + a) \operatorname{tg}(60^\circ - a).$

18 (296). Verifíquese la identidad:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a}.$$

19 (297). Verifíquense las identidades:

1.° $$\operatorname{tg} 2a + \sec 2a = \frac{\cos a + \operatorname{sen} a}{\cos a - \operatorname{sen} a}$$

2.° $$\operatorname{sen} 3a \operatorname{cosec} a - \cos 3a \sec a = 2.$$

20 (298). Verifíquense las igualdades siguientes:

1.° $\operatorname{sen}(a+b) \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$

2.° $\cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b.$

21 (299). Verifíquense las identidades:

1.° $(\cos a + \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b)^2 = 4 \cos^2 \frac{1}{2}(a-b)$

2.° $(\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(a-b).$

22 (300). Verifíquense las fórmulas:

1.º $\operatorname{sen} 5a = 5 \operatorname{sen} a - 20 \operatorname{sen}^3 a + 16 \operatorname{sen}^5 a$

2.º $\cos 5a = 16 \cos^5 a - 20 \cos^3 a + 5 \cos a$

3.º $\operatorname{sen} 6a = 2 \operatorname{sen} a (16 \cos^5 a - 16 \cos^3 a + 3 \cos a)$.

23 (301). Verifíquese la identidad:

$$\operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(b-c) + \operatorname{sen}(c-a) + 4 \operatorname{sen}\frac{a-b}{2} \operatorname{sen}\frac{b-c}{2} \operatorname{sen}\frac{c-a}{2} = 0.$$

24 (302). Verifíquense las identidades:

1.º $$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - \operatorname{sen}(a+b+c) = 4 \operatorname{sen}\frac{a+b}{2} \operatorname{sen}\frac{b+c}{2} \operatorname{sen}\frac{a+c}{2}.$$

2.º $$\cos a + \cos b + \cos c + \cos(a+b+c) = 4 \cos\frac{a+b}{2} \cos\frac{b+c}{2} \cos\frac{a+c}{2}.$$

25 (303). Verifíquense las identidades:

1.º $\operatorname{tg} a + 2 \operatorname{tg} 2a + 4 \operatorname{tg} 4a + 8 \operatorname{cotg} 8a = \operatorname{cotg} a$.

2.º $$\cos a + \cos 2a + \cos 3a = \frac{\cos 2a \operatorname{sen} \frac{3}{2} a}{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}.$$

3.º $\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a$.

26 (304). Verifíquese la identidad:

$$2 (\operatorname{sen}^4 a + \cos^4 a + \operatorname{sen}^2 a \cos^2 a)^2 = \operatorname{sen}^8 a + \cos^8 a + 1.$$

27 (305). Siendo el arco a igual a 60°, verifíquense las

igualdades:

1.° $$\operatorname{sen}\frac{a}{4}\operatorname{sen}\frac{5}{4}a=\frac{1}{4}.$$

2.° $$\operatorname{tg}\frac{a}{4}+\operatorname{tg}a=2.$$

28 (263). Calcúlese la suma de los n términos de las series:

$$\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen}(a+2h)+\cdots+\operatorname{sen}[a+(n-1)h]$$
$$\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\cdots+\cos[a+(n-1)h]$$

29 (264). Calcúlese la suma de los n términos de las series:

$$\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}2a+\operatorname{sen}3a+\ldots\ldots\operatorname{sen}na$$
$$\cos a+\cos 2a+\cos 3a+\ldots\ldots\cos na.$$

30 (265). Calcúlese la suma de los n términos de las series:

$$\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}3a+\operatorname{sen}5a+\ldots\ldots+\operatorname{sen}(2n-1)a$$
$$\cos a+\cos 3a+\cos 5a+\ldots\ldots+\cos(2n-1)a.$$

31 (266). Calcúlese la suma de los n términos de las series:

$$\operatorname{sen}a-\operatorname{sen}2a+\operatorname{sen}3a-\ldots\ldots\pm\operatorname{sen}na$$
$$\cos a-\cos 2a+\cos 3a-\ldots\ldots\pm\cos na.$$

32 (267). Calcúlese la suma de los n términos de la serie:

$$\operatorname{sen}^2a+\operatorname{sen}^2 2a+\operatorname{sen}^2 3a+\ldots\ldots+\operatorname{sen}^2 na.$$

33 (268). Calcúlese la suma de los n términos de las series:

$$\operatorname{sen}^3a+\operatorname{sen}^3 2a+\operatorname{sen}^3 3a+\ldots\ldots+\operatorname{sen}^3 na$$
$$\cos^3a+\cos^3 2a+\cos^3 3a+\ldots\ldots+\cos^3 na.$$

34 (269). Calcúlese la suma de los n términos de la serie:

$$\operatorname{sen}a\operatorname{sen}2a+\operatorname{sen}2a\operatorname{sen}3a+\operatorname{sen}3a\operatorname{sen}4a+\ldots\ldots$$

35 (270). Calcúlese la suma de los n términos de la serie:

$$\operatorname{tg}a+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{a}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{a}{2^n}.$$

36 (271). Calcúlese la suma de los n términos de la serie:

$$\sec a \sec 2a + \sec 2a \sec 3a + \sec 3a \sec 4a + \ldots\ldots$$

37 (272). Calcúlese la suma de los n términos de la serie:

$$\operatorname{cosec} a + \operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} 4a + \operatorname{cosec} 8a + \ldots\ldots \operatorname{cosec} 2^{n-1}a.$$

CAPÍTULO IV

Ecuaciones trigonométricas.

Ecuaciones con una incógnita.

38 (357). ¿Cuál es el menor ángulo positivo que satisfaga la ecuación: $\operatorname{tg} 2x = 3 \operatorname{tg} x$.

39 (358). Resuélvase la ecuación:

$$\operatorname{tg} x + 3 \cot x = 4.$$

40 (359). Resuélvase la ecuación:

$$\operatorname{tg} x + ab \operatorname{cotg} x = a + b.$$

41 (360). Resuélvase la ecuación:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = 1.$$

42 (361). Resuélvase la ecuación:

$$\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 7x.$$

43 (362). Resuélvase la ecuación:

$$\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} x = 0.$$

44 (363). Encuéntrense los valores de x comprendidos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ que satisfacen la ecuación:

$$\operatorname{sen} 2x = \cos (x + h).$$

45 (364). Encuéntrense los valores de x que satisfacen la

ecuación:

$$\operatorname{sen}(x+a)=\cos(3x+b).$$

46 (365). Encuéntrense los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$\operatorname{tg}2x+\operatorname{cotg}x=8\cos^2 x.$$

47 (366). Resuélvase la ecuación:

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}3x=0.$$

48 (367). Determínense los valores de x comprendidos entre 0 y 2π que satisfacen la ecuación:

$$\operatorname{sen}2x=\cos 3x.$$

49 (368). Resuélvase la ecuación:

$$2\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}(45^\circ-x).$$

50 (369). Resuélvase la ecuación:

$$2\operatorname{sen}x+3\cos x=3.$$

51 (370). Resuélvase la ecuación:

$$\cos x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

52 (371). Calcúlese el ángulo x determinado por la relación siguiente:

$$\operatorname{sen}(x+45^\circ)\operatorname{sen}(x+75^\circ)=\operatorname{sen}82^\circ.$$

53 (372). ¿Cuál es el arco cuyo coseno es igual a la cuerda?

54 (373). Determínese un ángulo tal que la suma de sus seis líneas trigonométricas sea igual a una cantidad dada m.

55 (374). Resuélvanse las ecuaciones:

1.° $\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen}x=1.$

2.° $\sqrt{3}\operatorname{sen}x+\cos x=2.$

3.° $\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}.$

56 (375). Resuélvase:

$$\operatorname{sen}(x - a) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a.$$

57 (376). Resuélvase:

$$\cos 2x = \cos x + 1.$$

58 (377). Resuélvase la ecuación:

$$\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x + 2 \cos x = m.$$

Se indicarán las condiciones de posibilidad del problema.

59 (378). Resuélvase:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = a$$

60 (379). Resuélvase:

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = m^2.$$

61 (380). Resuélvase:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} x} + \frac{a}{\cos x} = b.$$

62 (381). Encuéntrese el arco cuya cotangente es igual al coseno.

63 (382). Resuélvase:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(a - x) = m.$$

64 (383). Encuéntrese el seno y el coseno del ángulo x que satisface la ecuación:

$$\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 0.$$

Ecuaciones con varias incógnitas.

65 (411). Resuélvase el sistema de las dos ecuaciones siguientes:

$$\operatorname{sen} x = \cos 2y$$
$$\operatorname{sen} 2x = \cos y.$$

66 (412). Hállense dos ángulos conociendo la suma a de sus senos y la suma b de sus cosenos.

67 (413). Resuélvanse las ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y &= a \\ \operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y &= b. \end{aligned}$$

68 (414). Hállense los valores de $\operatorname{tg} x$ y de $\operatorname{tg} y$ que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y &= 1 \\ \operatorname{tg}(x+y) &= \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

y dedúzcanse los valores correspondientes del seno y del coseno.

69 (415). Calcúlense dos ángulos x e y tales que se tenga:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y &= a \\ \operatorname{tg}(x+y) &= b. \end{aligned} \qquad \text{Discusión.}$$

70 (416). Resuélvase el sistema de las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= a \\ \cos x \cos y &= b, \end{aligned}$$

encuéntrese, en particular, todos los valores de x y de y que satisfacen a estas dos ecuaciones cuando se hace:

$$a = \frac{1}{4}, \qquad b = \frac{3}{4}.$$

71 (417). Resuélvanse las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= \operatorname{sen} \alpha \\ \cos x + \cos y &= 1 + \cos \alpha. \end{aligned}$$

72 (418). Resuélvase el sistema de las dos ecuaciones:

$$2(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y) = 1 = 2 \operatorname{sen}(x+y).$$

73 (419). Elimínese x e y entre las tres ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$$
$$\cos x + \cos y = b$$
$$\cos(x - y) = c.$$

74 (420). Elimínese x e y entre las ecuaciones:

$$a^2 \cos^2 x - b^2 \cos^2 y = c^2$$
$$a \cos x + b \cos y = r$$
$$a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y.$$

75 (421). Determínese x e y en las ecuaciones:

$$x(1 + \operatorname{sen}^2 \alpha - \cos \alpha) - y \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha) = c(1 + \cos \alpha)$$
$$y(1 + \cos^2 \alpha) - x \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = c \operatorname{sen} \alpha$$

y elimínese α entre estas dos ecuaciones.

76 (422). Elimínese x entre las ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = m$$
$$\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = n.$$

77 (423). Elimínese α entre las ecuaciones:

$$x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\frac{\cos^2 \alpha}{b^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

78 (424). Elimínese x e y entre las ecuaciones:

$$a \operatorname{sen}^2 x + a' \cos^2 x = b$$
$$a \operatorname{sen}^2 y + a' \cos^2 y = b'$$
$$a \operatorname{tg} x = a' \operatorname{tg} y$$

y demuéstrese que

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}.$$

79 (425). Elimínese x e y entre las ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$$
$$\cos x + \cos y = b$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}.$$

80 (426). Elimínese x entre las ecuaciones:

$$(a - b)\operatorname{sen}(x + \alpha) = (a + b)\operatorname{sen}(x - \alpha)$$
$$a\operatorname{tg}\frac{x}{2} - b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = c.$$

CAPÍTULOS V Y VI

Fórmula de Moivre.—Aplicaciones.

81. Calcúlese $\cos 7a$ conociendo $\cos a$. Aplicación: $\cos a = \frac{3}{5}$.

82. Calcúlese $\cos 9a$, conociendo $\operatorname{tg} a$. Aplicación: $\operatorname{tg} a = \sqrt{3}$.

83. Calcúlese $\operatorname{sen}\frac{3a}{2}$, conociendo $\operatorname{sen} a$.

84. Calcúlese $\cos\frac{5\pi}{8}$.

85. Calcúlese $\cos 6a$, conociendo $\cos a$. Aplíquense los resultados obtenidos a la resolución de la ecuación:

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 = 2$$

y de la ecuación:

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 = 0.$$

86. Calcúlese $\sqrt[4]{-1}$.

87. Calcúlese $\sqrt[3]{i}$.

88. ¿Cuál es la suma de las tres raíces cúbicas de la unidad?

89. ¿Cuál es la suma de las cuatro raíces bicuadradas de la unidad?

90. ¿Cuál es la suma de las m raíces m^a de la unidad?

91. Calcúlese la suma de los cuadrados de las raíces cúbicas de la unidad.

92. ¿Cuál es la suma de la potencia n de las raíces m^a de la unidad?

1.°, caso de $n < m$; 2.°, caso de $n = m$.

93. Demuéstrese que $\Sigma\,(x + \alpha)^m = (mx^m + 1)$. El signo Σ significa que se reemplaza α por cada una de las raíces m^a de la unidad, elevando cada vez $x + \alpha$ a la potencia m, y sumando después todos los resultados.

94. Siendo α una de las raíces cúbicas de la unidad, demuéstrese que la expresión:

$$(x + \alpha)^3 + (x + \alpha^2)^3$$

es real. Partiendo de este resultado, resuélvase la ecuación:

$$2\,x^3 - 3\,x^2 - 3\,x + 2 = 0.$$

Cuadro de las principales fórmulas que se emplean en Trigonometría.

Trigonometría plana.

(1). $$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1.$$

(2). $$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}.$$

(3). $$\cot a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}.$$

(4). $$\sec a = \frac{1}{\cos a}.$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a}. \tag{5}$$

$$\cot a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}. \tag{6}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\cot a}. \tag{7}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a. \tag{8}$$

$$1 + \cot^2 a = \operatorname{cosec}^2 a. \tag{9}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a. \tag{10}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{11}$$

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a. \tag{12}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \tag{14}$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \tag{15}$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a. \tag{16}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a. \tag{17}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}. \tag{18}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}. \tag{19}$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}. \tag{20}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}. \tag{21}$$

$$1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}. \tag{22}$$

$$1 - \cos a = 2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}. \tag{23}$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1-\operatorname{sen} a}\right). \tag{24}$$

(25). $$\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a}\mp\sqrt{1-\operatorname{sen}a}\right).$$

(26). $$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg}a}.$$

(27). $$\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q).$$

(28). $$\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\cos\frac{1}{2}(p+q)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-q).$$

(29). $$\frac{\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q}{\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-q)}.$$

(30). $$\cos p+\cos q=2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q).$$

(31). $$\cos p-\cos q=-2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p+q)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-q).$$

(32). $$\operatorname{tg}a\pm\operatorname{tg}b=\frac{\operatorname{sen}(a\pm b)}{\cos a\cos b}.$$

(33). $$\cot a\pm\cot b=\frac{\operatorname{sen}(b\pm a)}{\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b}.$$

Fórmulas para la resolución de los triángulos rectángulos.

(34). $$\begin{cases} c=a\cos B=a\operatorname{sen}C \\ b=a\cos C=a\operatorname{sen}B. \end{cases}$$

(35). $$\begin{cases} c=b\ \operatorname{tg}C=b\cot B \\ b=c\ \operatorname{tg}B=c\cot C. \end{cases}$$

Fórmulas para la resolución de los triángulos cualesquiera.

(36). $$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}.$$

(37). $$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}=2R.$$

$$(38). \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{cases}$$

$$(39). \quad \begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A. \end{cases}$$

$$(40). \quad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

$$(41). \quad S = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C.$$

$$(42). \quad c = (a+b)\frac{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

$$(43). \quad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{p(p-c)}{ab}}. \end{cases}$$

$$(44). \quad \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}. \end{cases}$$

$$(45). \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{cases}$$

(46). $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

(47). $$2R = \frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}\,.$$

(48). $$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}\,.$$

(49). $$\begin{cases} r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\cot\frac{C}{2} = (p-c)\cot\frac{B}{2} \\ r_b = p\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\cot\frac{A}{2} = (p-a)\cot\frac{C}{2} \\ r_c = p\operatorname{tg}\frac{C}{2} = (p-a)\cot\frac{B}{2} = (p-b)\cot\frac{A}{2}\,. \end{cases}$$

(50). $$\begin{cases} h_a = \dfrac{a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \\ h_b = \dfrac{b \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} \\ h_c = \dfrac{c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}\,. \end{cases}$$

(51). $$2S = ah_a = bh_b = ch_c = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(52). $$\begin{cases} h_a = b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B \\ h_b = c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C \\ h_c = a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A\,. \end{cases}$$

(53). $$\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2};\ \beta = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2};\ \gamma = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}\,.$$

(54). $$\alpha' = \frac{2bc}{b-c}\operatorname{sen}\frac{A}{2};\ \beta' = \frac{2ac}{a-c}\operatorname{sen}\frac{B}{2};\ \gamma' = \frac{2ab}{a-b}\operatorname{sen}\frac{C}{2}\,.$$

(55). $$a = 2R \operatorname{sen} A; \quad b = 2R \operatorname{sen} B; \quad c = 2R \operatorname{sen} C;$$

(56). $$\begin{cases} h_a = 2R \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C; \\ h_b = 2R \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A; \\ h_c = 2R \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B. \end{cases}$$

(57). $$S = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

$$(58).\qquad \begin{cases} \alpha = 2\,\mathrm{R}\,\dfrac{\operatorname{sen} \mathrm{B} \operatorname{sen} \mathrm{C}}{\cos \frac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}}; \\[2ex] \beta = 2\,\mathrm{R}\,\dfrac{\operatorname{sen} \mathrm{C} \operatorname{sen} \mathrm{A}}{\cos \frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}}; \\[2ex] \gamma = 2\,\mathrm{R}\,\dfrac{\operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{B}}{\cos \frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2}}. \end{cases}$$

$$(59).\qquad \begin{cases} \alpha' = 2\,\mathrm{R}\,\dfrac{\operatorname{sen} \mathrm{B} \operatorname{sen} \mathrm{C}}{\operatorname{sen} \frac{\mathrm{C}-\mathrm{B}}{2}}; \\[2ex] \beta' = 2\,\mathrm{R}\,\dfrac{\operatorname{sen} \mathrm{C} \operatorname{sen} \mathrm{A}}{\operatorname{sen} \frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{2}}; \\[2ex] \gamma' = 2\,\mathrm{R}\,\dfrac{\operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen} \mathrm{B}}{\operatorname{sen} \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2}}. \end{cases}$$

$$(60).\qquad p = 4\,\mathrm{R} \cos \frac{\mathrm{A}}{2} \cos \frac{\mathrm{B}}{2} \cos \frac{\mathrm{C}}{2}.$$

$$(61).\qquad \begin{cases} p - a = 4\,\mathrm{R} \cos \frac{\mathrm{A}}{2} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{B}}{2} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{C}}{2}; \\[1ex] p - b = 4\,\mathrm{R} \cos \frac{\mathrm{B}}{2} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{A}}{2} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{C}}{2}; \\[1ex] p - c = 4\,\mathrm{R} \cos \frac{\mathrm{C}}{2} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{A}}{2} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{B}}{2}. \end{cases}$$

$$(62).\qquad r = 4\,\mathrm{R} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{A}}{2} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{B}}{2} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{C}}{2}.$$

$$(63).\qquad \begin{cases} r_a = 4\,\mathrm{R} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{A}}{2} \cos \frac{\mathrm{B}}{2} \cos \frac{\mathrm{C}}{2}; \\[1ex] r_b = 4\,\mathrm{R} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{B}}{2} \cos \frac{\mathrm{A}}{2} \cos \frac{\mathrm{C}}{2}; \\[1ex] r_c = 4\,\mathrm{R} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{C}}{2} \cos \frac{\mathrm{B}}{2} \cos \frac{\mathrm{A}}{2}. \end{cases}$$

Fórmulas en los cuadriláteros inscritos.

$$(64).\qquad \operatorname{sen} \frac{\mathrm{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}.$$

(65). $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}}.$$

(66). $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

(67). $$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

(68). $$\delta=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{bc+ad}}.$$

(69). $$\delta_1=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}.$$

(70). $$R=\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Trigonometría esférica.

(1). $$\begin{cases}\cos a=\cos b\cos c+\operatorname{sen} b\operatorname{sen} c\cos A\\ \cos b=\cos c\cos a+\operatorname{sen} c\operatorname{sen} a\cos B\\ \cos c=\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\cos C.\end{cases}$$

(2). $$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}.$$

(3). $$\begin{cases}\cot a\operatorname{sen} b=\cos b\cos C+\operatorname{sen} C\cot A\\ \cot a\operatorname{sen} c=\cos c\cos B+\operatorname{sen} B\cot A\\ \cot b\operatorname{sen} a=\cos a\cos C+\operatorname{sen} C\cot B\\ \cot b\operatorname{sen} c=\cos c\cos A+\operatorname{sen} A\cot B\\ \cot c\operatorname{sen} a=\cos a\cos B+\operatorname{sen} B\cot C\\ \cot c\operatorname{sen} b=\cos b\cos A+\operatorname{sen} A\cot C.\end{cases}$$

(4). $$\begin{cases}\cos A=-\cos B\cos C+\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos a\\ \cos B=-\cos C\cos A+\operatorname{sen} C\operatorname{sen} A\cos b\\ \cos C=-\cos A\cos B+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\cos c.\end{cases}$$

$$(5).\quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}} \\ \cos\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}} \\ \cos\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}\,. \end{aligned}\right.$$

$$(6).\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}} \\ \operatorname{sen}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}} \\ \operatorname{sen}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}\,. \end{aligned}\right.$$

$$(7).\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}} \\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-b)}} \\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a) \operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}}\,. \end{aligned}\right.$$

$$(8).\quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}} \\ \cos\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-C)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}} \\ \cos\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\cos(P-A)\cos(P-B)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}\,. \end{aligned}\right.$$

$$(9).\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P\,.\,\cos(P-A)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}} \\ \operatorname{sen}\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P\,.\,\cos(P-B)}{\operatorname{sen} A\,.\,\operatorname{sen} C}} \\ \operatorname{sen}\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P\,.\,\cos(P-C)}{\operatorname{sen} A\,.\,\operatorname{sen} B}}\,. \end{aligned}\right.$$

$$(10).\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{-\cos P\,.\,\cos(P-A)}{\cos(P-B)\,.\,\cos(P-C)}} \\ \operatorname{tg}\dfrac{b}{2}=\sqrt{\dfrac{-\cos P\,.\,\cos(P-B)}{\cos(P-A)\,.\,\cos(P-C)}} \\ \operatorname{tg}\dfrac{c}{2}=\sqrt{\dfrac{-\cos P\,.\,\cos(P-C)}{\cos(P-A)\,.\,\cos(P-B)}}. \end{cases}$$

$$(11).\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{c}{2}=\cos\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{C}{2} \\ \operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}\operatorname{sen}\dfrac{c}{2}=\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{C}{2} \\ \cos\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{c}{2}=\cos\dfrac{a-b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{C}{2} \\ \cos\dfrac{A-B}{2}\operatorname{sen}\dfrac{c}{2}=\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}. \end{cases}$$

$$(12).\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}=\cos\dfrac{a-b}{2}\cot\dfrac{C}{2} \\ \operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}=\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}\cot\dfrac{C}{2} \\ \operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{A-B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2} \\ \operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2}\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}=\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{c}{2}. \end{cases}$$

$$(13).\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2\dfrac{c}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2}\operatorname{tg}\dfrac{a-b}{2} \\ \operatorname{tg}^2\dfrac{b}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{a+c}{2}\operatorname{tg}\dfrac{a-c}{2}. \end{cases}$$

$$(14).\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)} \\ \operatorname{tg}^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{\operatorname{sen}(a-c)}{\operatorname{sen}(a+c)}. \end{cases}$$

$$(15).\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \dfrac{C}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}} \\[2ex] \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \dfrac{B}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}. \end{cases}$$

$$(16).\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{B-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+b}{2}} \\[2ex] \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{C-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C+c}{2}}. \end{cases}$$

$$(17).\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \dfrac{b}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}(C-c)}{\operatorname{sen}(C+c)} \\[2ex] \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \dfrac{c}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}(B-b)}{\operatorname{sen}(B+b)}. \end{cases}$$

$$(18).\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \dfrac{B}{2}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{C+c}{2} \,.\, \operatorname{tg}\dfrac{C-c}{2} \\[2ex] \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \dfrac{C}{2}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{B+b}{2} \operatorname{tg}\dfrac{B-b}{2}. \end{cases}$$

$$(19).\quad \left\{ \operatorname{tg}^2\frac{a}{2} = -\frac{\cos(B+C)}{\cos(B-C)}. \right.$$

$$(20).\quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2\dfrac{b}{2} = \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2} - 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{C-B}{2}\right)} \\[2ex] \operatorname{tg}^2\dfrac{c}{2} = \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{C+B}{2} - 45^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{B-C}{2}\right)}. \end{cases}$$

$$(21).\quad \operatorname{tg}^2\frac{S}{2} = \operatorname{tg}\frac{p}{2}\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}.$$

$$(22).\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}-S\right) &= \frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}}\operatorname{tg}\frac{A}{2} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}-S\right) &= \frac{\cos\frac{c+a}{2}}{\cos\frac{c-a}{2}}\operatorname{tg}\frac{B}{2} \\ \operatorname{tg}\left(\frac{C}{2}-S\right) &= \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\operatorname{tg}\frac{C}{2}. \end{aligned}\right.$$

$$(23).\quad \operatorname{sen} S = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$(24).\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} S \operatorname{sen}(A-S)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}} \\ \operatorname{sen}\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} S \operatorname{sen}(B-S)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}} \\ \operatorname{sen}\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} S \operatorname{sen}(C-S)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}. \end{aligned}\right.$$

$$(25).\quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-S)\operatorname{sen}(C-S)}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}} \\ \cos\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(A-S)\operatorname{sen}(C-S)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}} \\ \cos\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(B-S)\operatorname{sen}(A-S)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}}. \end{aligned}\right.$$

$$(26).\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} S \operatorname{sen}(A-S)}{\operatorname{sen}(B-S)\operatorname{sen}(C-S)}} \\ \operatorname{tg}\frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} S \operatorname{sen}(B-S)}{\operatorname{sen}(A-S)\operatorname{sen}(C-S)}} \\ \operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{\operatorname{sen} S \operatorname{sen}(C-S)}{\operatorname{sen}(A-S)\operatorname{sen}(B-S)}}. \end{aligned}\right.$$

(27). Seno de un triedro:

$$\omega = \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}\ .$$

(28). Volumen de un tetraedro:

$$\frac{ll'l''}{3\,!} \operatorname{sen} (\mathrm{O\,A\,B\,C}).$$

(29). Seno de un triedro:

$$\omega = 2 \sqrt{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} (p - a) \operatorname{sen} (p - b) \operatorname{sen} (p - c)}\ .$$

SOLUCIONES Y RESPUESTAS

DE LOS

Ejercicios de Trigonometría

SOLUCIONES Y RESPUESTAS

DE LOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

CONTENIDOS EN LOS

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

DE

G. M. BRUÑO

ADMINISTRACION DE G. M. BRUÑO

MADRID
Bravo Murillo, 106.

BARCELONA
Cameros, 8.

Imprenta de Eduardo Arias, San Lorenzo, 5, Madrid.—1915.

EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA

INTRODUCCIÓN

ADVERTENCIA. — Designamos los *cologaritmos* con el signo $\overline{\mathrm{L}}$.

Encontrar los logaritmos de las razones trigonométricas propuestas:

1.	*Resp.*	$\overline{1},1102251$	**21.**	*Resp.*	$\overline{1},2624111$
2.	»	$\overline{1},9598436$	**22.**	»	$0,3272171$
3.	»	$\overline{1},4280361$	**23.**	»	$\overline{1},6010512$
4.	»	$\overline{1},7065751$	**24.**	»	$0,1329945$
5.	»	$\overline{1},6822232$	**25.**	»	$\overline{1},8004401$
6.	»	$\overline{1},8740104$	**26.**	»	$\overline{1},9596509$
7.	»	$\overline{1},7782084$	**27.**	»	$\overline{1},9698500$
8.	»	$\overline{1},7278210$	**28.**	»	$\overline{1},7838297$
9.	»	$\overline{1},8711512$	**29.**	»	$0,1461843$
10.	»	$\overline{1},5572142$	**30.**	»	$\overline{1},5841208$
11.	»	$\overline{1},8978008$	**31.**	»	$0,3423463$
12.	»	$\overline{1},9996520$	**32.**	»	$\overline{1},2052227$
13.	»	$\overline{1},9551963$	**33.**	»	$0,6242342$
14.	»	$\overline{1},9770952$	**34.**	»	$0,9589149$
15.	»	$\overline{1},9862085$	**35.**	»	$1,4070876$
16.	»	$\overline{1},4899675$	**36.**	»	$0,4526367$
17.	»	$\overline{1},9999059$	**37.**	»	$\overline{2},5593587$
18.	»	$\overline{2},6980841$	**38.**	»	$0,3995436$
19.	»	$\overline{3},5472875$	**39.**	»	$\overline{3},6627983$
20.	»	$\overline{2},2362952$	**40.**	»	$3,5654684$

Encontrar los logaritmos de:

41. $\operatorname{sen} 164^\circ\, 27'\, 30''$.

Reduciendo al primer cuadrante, se tiene:

$$\operatorname{sen} 164^\circ\, 27'\, 30'' = \operatorname{sen}(180 - 164^\circ\, 27'\, 30'') = \operatorname{sen} 15^\circ\, 32'\, 30'',$$

cuyo logaritmo es $\overline{1},4280360$.

42. $\cos 120^\circ\, 35'\, 10''$.

Se tiene como en el número anterior, y haciendo abstracción del signo:

$$\cos 120^\circ\, 35'\, 10'' = \cos(180^\circ - 120^\circ\, 35'\, 10'') = \cos 59^\circ\, 24'\, 50'',$$

cuyo logaritmo es $\overline{1},7065751$.

43. $\operatorname{sen} 208^\circ\, 45'\, 23''$.

$$208^\circ\, 45'\, 23'' - 180^\circ = 28^\circ\, 45'\, 23''$$

$$\log \operatorname{sen} 208^\circ\, 45'\, 23'' = \log \operatorname{sen} 28^\circ\, 45'\, 23'' = \overline{1},6822231.$$

44. $\cos 221^\circ\, 33'\, 59''$.

$$221^\circ\, 33'\, 59'' - 180 = 41^\circ\, 33'\, 59''.$$

Resp. $\overline{1},874\,0104$.

Encontrar los ángulos del primer cuadrante correspondientes á los logaritmos dados.

45.

$$\log \operatorname{sen} x = \overline{1},4088894$$

$$\log \operatorname{sen} 14^\circ\, 51' = \overline{1},4087306$$

diferencia logaritmica: 1588

diferencia tabular: 4762; diferencia angular: $\dfrac{60 \times 1588}{4762} = 20''$.

Resp. $14^\circ\, 51'\, 20''$.

46.

$$\log \cos x = \overline{1},8849065$$

$$\log \cos 39^\circ\, 53' = \overline{1},8849945$$

diferencia logaritmica: 880

diferencia tabular: 1056; diferencia angular: $\dfrac{60 \times 880}{1056} = 50$

Resp. $39^\circ\, 53'\, 50''$.

NOTA. La solución de los problemas siguientes es idéntica á las dos anteriores, por cuyo motivo damos sólo las respuestas.

47.	*Resp*.	36° 37′ 40″	**56**.	*Resp*.	41° 11′ 13″,4
48.	»	58° 45′ 10″	**57**.	»	34° 30′ 19″
49.	»	3° 20′ 25″,5	**58**.	»	52° 21′ 1″,1
50.	»	4° 7′ 2″,7	**59**.	»	61° 12′ 13″,3
51.	»	4° 41′ 15″,4	**60**.	»	63° 10′ 56″,2
52.	»	15° 42′ 52″,7	**61**.	»	71° 7′ 42″,8
53.	»	13° 10′ 47″,1	**62**.	»	86° 45′ 9″,4
54.	»	28° 23′ 39″,6	**63**.	»	86° 23′ 11″,4
55.	»	21° 39′ 32″,8	**64**.	»	89° 33′ 18″,8

Encontrar los ángulos menores que 90° correspondientes á los logaritmos dados:

65.

$$\log \operatorname{tg} x = \bar{1},8820134$$
$$\log \operatorname{tg} 37^\circ 18' = \bar{1},8818386$$

diferencia logaritmica: 1748

diferencia tabular: 2621; diferencia angular: $\frac{60 \times 1748}{2621} = 40''$.

Resp. 37° 18′ 40″.

66.

$$\log \operatorname{cotg} x = 1,0592624$$
$$\log \operatorname{cotg} 4^\circ 59' = 1,0595056$$

diferencia logaritmica: 2432

diferencia tabular: 14574; diferencia angular: $\frac{60 \times 2432}{14574} = 10''$.

Resp. 4° 59′ 10″.

NOTA. Se procede de igual manera en los ejercicios cuyas respuestas van á continuación.

67.	*Resp*.	66° 26′ 10″	**76**.	*Resp*.	46° 38′ 51″,8
68.	»	56° 43′ 30″	**77**.	»	53° 2′ 10″,4
69.	»	11° 49′ 46″,4	**78**.	»	64° 29′ 51″,9
70.	»	23° 40′ 59″,4	**79**.	»	65° 43′ 2″,9
71.	»	24° 16′ 22″,1	**80**.	»	80° 15′ 42″,8
72.	»	36° 51′ 1″,4	**81**.	»	89° 4′ 7″,4
73.	»	36° 11′ 4″,8	**82**.	»	89° 33′ 18″,9
74.	»	41° 49′ 42″,3	**83**.	»	0° 24′ 20″,8
75.	»	44° 40′ 13″,7	**84**.	»	0° 3′ 38″,3

Valuar los menores arcos positivos que satisfacen á las ecuaciones propuestas:

85. $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ $\log 3 = 0{,}4771212$

$\log \operatorname{sen} x = \log 3 - \log 5$ $\log 5 = 0{,}69897$

$\log \operatorname{sen} x = \bar{1}{,}7781512$

Resp. $x = 36^\circ\, 52'\, 11'',6$.

86. $\operatorname{tg} x = 3$

$\log \operatorname{tg} x = \log 3 = 0{,}4771212.$

Resp. $x = 71^\circ\, 33'\, 54'',3$.

87. $\cos x = 0{,}7.$

$\log \cos x = \log 0{,}7 = \bar{1}{,}8450980.$

Resp. $x = 45^\circ\, 34'\, 28'',8$.

88. $\operatorname{cotg} x = \frac{2}{3}.$ $\log 2 = 0{,}30103$

$\log \operatorname{cotg} x = \log 2 - \log 3$ $\log 3 = 0{,}4771212$

$\log \operatorname{cotg} x = \bar{1}{,}8239088$

Resp. $x = 56^\circ\, 18'\, 35'',7$.

89. $\sec x = \frac{7}{3},$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$; luego $\cos x = \frac{3}{7}$ $\log 3 = 0{,}4771212$

$\log \cos x = \log 3 - \log 7$ $\log 7 = 0{,}8450980$

$\log \cos x = \bar{1}{,}6320232$

Resp. $x = 64^\circ\, 37'\, 23''$.

90. $\operatorname{tg} x = -\frac{17}{9}\cdot$

Sea y el suplemento de x; tenemos: $\operatorname{tg} y = -\operatorname{tg} x = \frac{17}{9}\cdot$

luego $\log \operatorname{tg} y = \log 17 - \log 9 = 0{,}2762064$

$y = 62^\circ\, 6'\, 9'',8;$ $180^\circ - 62^\circ\, 6'\, 9'',8 = 117^\circ\, 53'\, 50'',2.$

Resp. $x = 117^\circ\, 53'\, 50'',2$.

91. $$\operatorname{cotg} x = -\frac{5}{7}.$$

Sea y el suplemento de x; $\operatorname{cotg} y = -\operatorname{cotg} x = \frac{5}{7}$;

luego $\log \operatorname{cotg} y = \log 5 - \log 7 = \overline{1},85387196,$

$y = 54^\circ\, 27'\, 44'',4;\quad 180^\circ - 54^\circ\, 27'\, 44'',4 = 125^\circ\, 32'\, 15'',6.$

Resp. $x = 125^\circ\, 32'\, 15'',6.$

92. $$\operatorname{cosec} x - \frac{4}{3}.$$

Sea $y < 90^\circ$ tal que $\operatorname{cosec} y = \frac{4}{3}$;

$$\operatorname{cosec} y = \frac{1}{\operatorname{sen} y} = \frac{4}{3};\quad \operatorname{sen} y = \frac{3}{4},$$

$$\log \operatorname{sen} y = \log 3 - \log 4 = \log 0,75 = \overline{1},8750613,$$

$y = 48^\circ\, 35'\, 25''$; $\quad x = 180^\circ + 48^\circ\, 35'\, 25'' = 228^\circ\, 35'\, 25''.$

Resp. $x = 228^\circ\, 35'\, 25''.$

Valuar los arcos menores que el cuadrante que satisfacen á las siguientes ecuaciones:

93. $$\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} 12^\circ\, 24'\, 48'' + \cos 12^\circ\, 24'\, 48'',$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen} 12^\circ\, 24'\, 48'' + \cos 12^\circ\, 24'\, 48'' = \\ &= \operatorname{sen} 12^\circ\, 24'48'' + \operatorname{sen}(90^\circ - 12^\circ\, 24'\, 48'') = \\ &= \operatorname{sen} 12^\circ\, 24'\, 48'' + \operatorname{sen} 77^\circ\, 35'\, 12''. \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

resulta: $\operatorname{tg} x = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 32^\circ\, 35'\, 12'',$

$$\log \operatorname{tg} x = \log 2 + \log \operatorname{sen} 45^\circ + \log \cos 32^\circ\, 35'\, 12''.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= \phantom{\overline{1}}0,30103 \\ \log \operatorname{sen} 45^\circ &= \overline{1},8494850 \\ \log \cos 32^\circ\, 35'\, 12'' &= \overline{1},9256101 \\ \hline \log \operatorname{tg} x &= \phantom{\overline{1}}0,0761251 \end{aligned}$$

Resp. $x = 49^\circ\, 59'\, 45'',6.$

94. $$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 63^\circ 15' 16'' + \operatorname{cotg} 63^\circ 15' 16''$$

$$\operatorname{cotg} 63^\circ 15' 16'' = \operatorname{tg}(90^\circ - 63^\circ 15' 16'') = \operatorname{tg} 26^\circ 44' 44''.$$

La fórmula $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \dfrac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos a \cos b}$ da:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen}(63^\circ 15' 16'' + 26^\circ 44' 44'')}{\cos 63^\circ 15' 16'' \cos 26^\circ 44' 44''} =$$

$$= \frac{1}{\cos 63^\circ 15' 16'' \times \cos 26^\circ 44' 44''},$$

$$\log \operatorname{tg} x = \bar{\mathrm{L}} \cos 63^\circ 15' 16'' + \bar{\mathrm{L}} \cos 26^\circ 44' 44''$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{L}} \cos 63^\circ 15' 16'' &= 0{,}34675932 \\ \bar{\mathrm{L}} \cos 26^\circ 44' 44'' &= \underline{0{,}04914184} \\ \log \operatorname{tg} x &= 0{,}39590116 \end{aligned}$$

Resp. $x = 68^\circ 6' 20''$.

95. $$\operatorname{tg} x = 5 \operatorname{sen} x.$$

Puede escribirse: $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 5 \operatorname{sen} x$, y suprimiendo la solución $\operatorname{sen} x = 0$, de donde $x = 0^\circ$ resultará:

$$\frac{1}{\cos x} = 5; \qquad \cos x = \frac{1}{5};$$

$$\cos x = \bar{\mathrm{L}}\, 5 = \bar{1}{,}30143.$$

Resp. $x = 78^\circ 27' 47''$.

96. $$5 \operatorname{sen} x = 6 \cos^2 x.$$

Se puede escribir: $5 \operatorname{sen} x = 6(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 6 - 6 \operatorname{sen}^2 x$, esta ecuación ordenada y resuelta da:

$$6 \operatorname{sen}^2 x + 5 \operatorname{sen} x - 6 = 0;$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12}.$$

El primer valor sólo es admisible; luego $\operatorname{sen} x = \dfrac{2}{3}$.

Resp. $x = 41^\circ 48' 37'',1$.

97. $$\operatorname{tg} 2x = 5 \operatorname{tg} x$$

$\dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 5 \operatorname{tg} x$; y suprimiendo la solución $\operatorname{tg} x = 0$, de donde resultaria $x = 0$, se tiene:

$$\frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 5; \quad \text{ó sea} \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{3}{5},$$

luego $$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Resp. $x = 37^\circ\, 45'\, 40'',5$.

98. $$2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{cotg} x = 5.$$

La ecuación propuesta equivale á las siguientes:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{5}{2}$$

ó sea $$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{5}{2}.$$

Ordenando y resolviendo esta última se obtiene:

$$2 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 2 = 0; \qquad \operatorname{tg} x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}.$$

Las raices 2 y $\dfrac{1}{2}$ corresponden á los ángulos siguientes:

$$Resp. \begin{cases} x' = 63^\circ\, 26'\, 54'',2. \\ x'' = 26^\circ\, 33'\; \; 5'',8. \end{cases}$$

Nota. Adviértase que los ángulos encontrados son complementarios por tener sus tangentes inversas.

99. $$8 \operatorname{cotg}^2 x - \sec^2 x = 1.$$

Se sabe que: $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1.$

Sumando esta igualdad con la propuesta, tenemos:

$$8 \operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 2,$$

ó sea $$\frac{8}{\operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg}^2 x = 2.$$

Ordenando y resolviendo esta ecuación obtendremos:

$$\mathrm{tg}^4 x + 2\,\mathrm{tg}^2 x - 8 = 0; \qquad \mathrm{tg}\, x \sqrt{-1 \pm \sqrt{1+8}}\,.$$

La solución $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{-1+\sqrt{9}} = \sqrt{2}$ sólo es admisible.

Resp. $x = 54^\circ\, 44'\, 8'',2$.

100. $$\mathrm{sen}\, x + \cos x = \sec x.$$

Se puede escribir: $\mathrm{sen}\, x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$

y también: $$\mathrm{sen}\, x \cos x + \cos^2 x = 1,$$

$$\mathrm{sen}\, x \cos x = 1 - \cos^2 x = \mathrm{sen}^2 x,$$

$$\mathrm{sen}\, x \cos x - \mathrm{sen}^2 x = 0$$

$$\mathrm{sen}\, x (\cos x - \mathrm{sen}\, x) = 0$$

Las dos soluciones de esta ecuación son:

$\mathrm{sen}\, x = 0$ y $\cos x - \mathrm{sen}\, x = 0$; ó sea $\mathrm{sen}\, x = \cos x$.

Resp. $x' = 0$; $x'' = 45^\circ$.

CAPÍTULO PRIMERO.

103. De la fórmula $\mathrm{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, se deduce: $\cos a = \dfrac{3}{5}$

$$\mathrm{tg}\, a = \frac{\mathrm{sen}\, a}{\cos a}; \qquad \text{luego} \qquad \mathrm{tg}\, a = \frac{4}{3}$$

$$\mathrm{cotg}\, a = \frac{1}{\mathrm{tg}\, a}; \qquad \text{»} \qquad \mathrm{cotg}\, a = \frac{3}{4}$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}; \qquad \text{»} \qquad \sec a = \frac{5}{3}$$

$$\mathrm{cosec}\, a = \frac{1}{\mathrm{sen}\, a}; \qquad \text{»} \qquad \mathrm{cosec}\, a = \frac{5}{4}$$

104. Las mismas fórmulas dan:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad \cos a = \frac{\sqrt{6}}{3};$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \operatorname{cotg} a = \sqrt{2};$$

$$\sec a = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

105. Se puede obtener la solución por medio de las fórmulas.

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}} \text{ y } \cos a = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$$

(Véase ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA, núm. 53); pero se obtiene más sencillamente como sigue:

Si el seno fuera 3, el coseno sería 4 y el radio 5; por consiguiente: si el radio es 1, el seno será $\frac{3}{5}$ y el coseno $\frac{4}{5}$.

En general, si se tiene $\operatorname{tg} x = \frac{p}{q}$ se puede escribir:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{p}{q};$$

ó $$\frac{\operatorname{sen} x}{p} = \frac{\cos x}{q} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{p^2+q^2}};$$

de donde se deduce:

$$\operatorname{sen} x = \frac{p}{\pm\sqrt{p^2+q^2}} \quad \text{y} \quad \cos x = \frac{q}{\pm\sqrt{p^2+q^2}}.$$

106. *Encontrar las líneas trigonométricas de los arcos de 120° y de 105°:*

1.° Las líneas trigonométricas del arco de 120° tienen el mismo valor absoluto que las del arco de 60°, las cuales se deducen del valor conocido de

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

obteniendo los siguientes valores:

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}; \qquad \operatorname{cotg} 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sec 120^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \ \operatorname{cosec} 120^\circ = -2.$$

2.° Las líneas trigonométricas del arco de 105 se deducen de las líneas de los arcos de 60° y de 45°, puesto que $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$.

Se tiene, pues, $\operatorname{sen} 105^\circ = \operatorname{sen}(60^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4};$$

$$\operatorname{tg} 105^\circ = \frac{\operatorname{sen} 105^\circ}{\cos 105^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{-4} = -(2 + \sqrt{3});$$

$$\operatorname{cotg} 105^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 105^\circ} = \frac{1}{-(2 + \sqrt{3})} = -2 + \sqrt{3};$$

$$\sec 105^\circ = \frac{1}{\cos 105^\circ} = \frac{4}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = -(\sqrt{6} + \sqrt{2});$$

$$\operatorname{cosec} 105^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 105^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

107. $$x = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

108. $\operatorname{sen}(A-B)=\frac{1}{2}$; luego $A-B=30^\circ$;

$\cos(A+B)=\frac{1}{2}$; » $A+B=60^\circ$;

de donde se deduce: $2A=90^\circ$; $A=45^\circ$

$$B=60^\circ-45^\circ=15^\circ.$$

109. La fórmula $\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\,.\operatorname{tg}b}$ da:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}.$$

110. Reemplazando en las fórmulas conocidas:

$$\operatorname{sen}(a\pm b)=\operatorname{sen}a\cos b\pm\cos a\operatorname{sen}b$$

y
$$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$$

las razones trigonométricas por los valores

$$\operatorname{sen}a=\frac{1}{4},\quad \cos b=\frac{3}{5},$$

$$\cos a=\sqrt{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{4}\sqrt{15};\quad \operatorname{sen}b=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5},$$

resulta:

$$\operatorname{sen}(a\pm b)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}\pm\frac{1}{4}\sqrt{15}\,.\,\frac{4}{5}=\frac{3\pm4\sqrt{15}}{20};$$

$$\cos(a\pm b)=\frac{1}{4}\sqrt{15}\,.\,\frac{3}{5}\mp\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\sqrt{15}\mp4}{20}.$$

111. Las fórmulas fundamentales dan:

$$\cos a=\frac{3}{5};\quad \operatorname{tg}a=\frac{4}{3};$$

$$\operatorname{sen}2a=2\operatorname{sen}a\cos a=2\,.\,\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25};$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25};$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{8}{3} : \left(1 - \frac{16}{9}\right) =$$

$$= \frac{8}{3} : \left(\frac{-7}{9}\right) = \frac{8 \times 9}{3 \times (-7)} = -\frac{24}{7}.$$

112.

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2};$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Nota.—El arco de 15° tiene sus líneas trigonométricas positivas; se hace, pues, abstracción del doble signo de las fórmulas.

113. El seno de 18° es la mitad de la cuerda de 36°, ó sea del lado del decágono regular convexo, que es igual á

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

se tiene, pues, $\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1);$

de donde se deduce $\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Aplicando las fórmulas que dan $\operatorname{sen} \frac{a}{2}$ y $\cos \frac{a}{2}$ en función de sen a, resulta:

$$\operatorname{sen} 9^\circ = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1 + \operatorname{sen} 18^\circ} - \sqrt{1 - \operatorname{sen} 18^\circ}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}},$$

$$\cos 9^\circ = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\operatorname{sen} 18^\circ} + \sqrt{1-\operatorname{sen} 18^\circ}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}\,.$$

El seno de 9° es positivo y menor que su coseno, por cuyo motivo el signo del mayor término de las dos expresiones obtenidas es positivo, mientras que el segundo término es negativo para el seno y positivo para el coseno.

114. Reemplazando tg a por $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en la siguiente fórmula:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a},$$

obtenemos: $$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\frac{1}{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}\,.$$

Apliquemos de nuevo la misma fórmula:

$$\operatorname{tg} 7^\circ\, 30 = \frac{-1+\sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}}{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2.$$

En ambos casos se toma el radical con el signo positivo, por ser $\frac{a}{2}$ un ángulo del primer cuadrante.

115. La misma fórmula da:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = -\frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \frac{4}{3},$$

de lo cual se deduce, como en el problema núm. 105,

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \cos\frac{a}{2} = \pm\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2} = \pm\frac{3}{5} \quad \text{y} \quad \cos\frac{a}{2} = \pm\frac{4}{5}.$$

116. Se tiene:

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \pm\sqrt{\frac{0,3}{1,7}} = \pm\sqrt{\frac{3}{17}} = \pm\, 0,71.$$

Hacer calculables por logaritmos las siguientes expresiones:

117. La fórmula [27] da:

Resp. $2 \operatorname{sen} 23^\circ\, 19'\, 20'' \cos 11^\circ\, 4'\, 52''$.

118. Se obtiene del mismo modo:

Resp. $2 \operatorname{sen} 20^\circ\, 50' \cos 4^\circ\, 46'\, 14''$.

119. De la fórmula [28] resulta:

Resp. $2 \operatorname{sen} 11^\circ\, 28'\, 56'' \cos 20^\circ\, 39'\, 21''$.

120. Por la fórmula [30] se obtiene:

Resp. $2 \cos 36^\circ\, 36'\, 52'',5 \cos 8^\circ\, 40'\, 48'',5$.

121. De la fórmula [31] resulta:

Resp. $2 \operatorname{sen} 34^\circ\, 26'\, 18'',5 \operatorname{sen} 28^\circ\, 14'\, 13'',5$.

122. Se cambia $\cos 20^\circ\, 0'\, 58''$ por $\operatorname{sen} 69^\circ\, 59'\, 2''$ y se obtiene como en el núm. 119:

Resp. $2 \operatorname{sen} 17^\circ\, 2'\, 57'' \cos 52^\circ\, 56'\, 5''$.

123. Se aplica la fórmula [32].

Resp. $\dfrac{\operatorname{sen} 28^\circ\, 24'\, 51''}{\cos 18^\circ\, 24'\, 9'' \cos 10^\circ\, 0'\, 42''}$.

124. Se aplica la fórmula [33].

Resp. $\dfrac{\operatorname{sen} 38^\circ\, 23'\, 10''}{\operatorname{sen} 37^\circ\, 38'\, 49'' \operatorname{sen} 76^\circ\, 1'\, 59''}$.

125. Se aplica la fórmula [29].

Resp. $\dfrac{\operatorname{tg} 50^\circ\, 50'\, 58'',5}{\operatorname{tg} 12^\circ\, 43'\, 13'',5}$.

126. Se aplica la misma fórmula [29], invirtiendo sus términos.

Resp. $\dfrac{\operatorname{tg} 36^\circ\, 17'\, 13'',5}{\operatorname{tg} 61^\circ\, 48'\, 21'',5}$.

Hacer calculables por logaritmos las expresiones propuestas.

127. Se reemplaza 1 por sen 90° y se aplica la fórmula [27].

Resp. $2 \operatorname{sen} 55^\circ\, 16'\, 22'' \cos 34^\circ\, 43'\, 38''$.

128. Se reemplaza 1 por sen 90° y se aplica la fórmula [28].

Resp. $2 \operatorname{sen} 29^\circ\, 37'\, 21'',5 \cos 60^\circ\, 22'\, 38'',5$.

129. Se reemplaza 1 por cos 0° y se aplica la fórmula [30]. Se puede también aplicar la fórmula

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}.$$

Resp. $2 \cos^2 9^\circ\, 2'\, 25''$.

130. Del mismo modo, y aplicando las fórmulas [31] ó [23], se obtiene:

Resp. $2 \operatorname{sen}^2 32^\circ\, 28'\, 24''$.

131. $$\operatorname{tg} 45^\circ = 1;$$

luego $$1 + \operatorname{tg} 43^\circ\, 9'\, 6'' = \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 43^\circ\, 9'\, 6''.$$

Se aplica á esta última expresión la fórmula

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos a \,.\, \cos b} = \frac{\operatorname{sen} 88^\circ\, 9'\, 6''}{\frac{1}{2}\sqrt{2} \,.\, \cos b}.$$

Resp. $\dfrac{\sqrt{2} \operatorname{sen} 88^\circ\, 9'\, 6''}{\cos 43^\circ\, 9'\, 6''}$.

132. Del mismo modo se tiene:

$$1 - \operatorname{tg} 7^\circ\, 5'\, 8'' = \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 7^\circ\, 5'\, 8'' = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} 37^\circ\, 54'\, 52''}{\cos 7^\circ\, 5'\, 8''}.$$

Resp. $\dfrac{\sqrt{2} \operatorname{sen} 37^\circ\, 54'\, 52''}{\cos 7^\circ\, 5'\, 8''}$.

133. Se reemplaza 1 por cotg 45°, y la expresión propuesta equivale á cotg 45° — cotg 76° 31′ 26″.

Aplicando la fórmula [33] se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}(76^\circ\,31'\,26'' - 45^\circ)}{\operatorname{sen} 45^\circ \,.\, \operatorname{sen} 76^\circ\,31'\,26''} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} 31^\circ\,31'\,26''}{\operatorname{sen} 76^\circ\,31'\,26''}.$$

Resp. $\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen} 31^\circ\,31'\,26''}{\operatorname{sen} 76^\circ\,31'\,26''}$.

134. Como en el problema anterior, se reemplaza 1 por cotg 45°, y se obtiene, aplicando la fórmula [33],

$$\frac{\sqrt{2}\operatorname{sen} 97^\circ\,15'\,24''}{\operatorname{sen} 75^\circ\,15'\,24''}.$$

Resp. $\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen} 97^\circ\,15'\,24''}{\operatorname{sen} 75^\circ\,15'\,24''}$.

135. Se puede escribir:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}(45^\circ - a) =$$
$$= \operatorname{tg}(45^\circ - 15^\circ\,24'\,35'') = \operatorname{tg} 29^\circ\,35'\,25''.$$

Resp. tg 29° 35′ 25″.

136. Se tiene:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}(45^\circ + a) = \operatorname{tg}(45^\circ + 27^\circ\,8'\,15'') = \operatorname{tg} 72^\circ\,8'\,15''.$$

Resp. tg 72° 8′ 15″.

137. Puesto que el arco termina en el segundo cuadrante, sólo el seno y la cosecante son positivos; luego:

$$\operatorname{sen} x = +\,0{,}75825; \qquad \cos x = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = -\,0{,}652;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\,1{,}163; \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\,0\,860\cdot$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = -\,1{,}534; \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = +\,1{,}319.$$

138. Se puede considerar el arco de 15° como la diferencia entre los arcos de 45° y de 30°, ó como la mitad de este último arco.

Se obtiene, por el primer procedimiento:

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}; \qquad \operatorname{cotg} 15^\circ = 2 + \sqrt{3};$$

$$\sec 15^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}; \quad \operatorname{cosec} 15^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

139. Sea α uno de los arcos cuya tangente sea igual á la tangente dada. Todos los arcos que tienen esta misma tangente están comprendidos en la fórmula $K\pi + \alpha$, y los arcos cuyo seno se busca están comprendidos en la fórmula $2K\pi + 2\alpha$; los arcos de esta fórmula tienen el mismo extremo y, por consiguiente, el mismo seno que el arco 2α.

La fórmula $\operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ puede escribirse, dividiendo el segundo miembro por $\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}$, cuyo valor es igual á 1:

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}.$$

140. Se tiene:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{tg} a}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \pm \frac{4}{5};$$

$$\cos a = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} = \pm \frac{3}{5};$$

$$\operatorname{sen} 2a = \frac{2 \operatorname{sen} a \cos a}{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{24}{25};$$

$$\cos 2a = \frac{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = -\frac{7}{25};$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = -\frac{24}{7}.$$

141. Las fórmulas [14] y [15] dan:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = 1;$$

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = -1 + \sqrt{2}.$$

142. $$\cos a = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{8} = \frac{2}{3}\sqrt{2};$$

$$\cos b = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3};$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6};$$

$$\cos(a+b) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(a+b)} = \sqrt{1 - \frac{3+8+4\sqrt{6}}{36}} =$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{25 - 4\sqrt{6}};$$

$$\operatorname{sen} 2(a+b) = 2 \cdot \operatorname{sen}(a+b) \cos(a+b) =$$

$$2\,\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\sqrt{25 - 4\sqrt{6}}}{6}.$$

El radical doble $\sqrt{25 - 4\sqrt{6}}$ se transforma en $2\sqrt{6} - 1$, y luego, efectuando las operaciones, resulta:

$$\frac{1}{18}(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{6} - 1) = \frac{1}{18}(6\sqrt{2} + 8\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2}) =$$
$$= \frac{1}{18}(4\sqrt{2} + 7\sqrt{3}).$$

Resp. $\dfrac{4\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}$.

143. Se tiene: $\operatorname{sen} a = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{a}{2}} = \dfrac{2b}{1+b^2}$

Aplicación: $$\operatorname{sen} a = \frac{2(2-\sqrt{3})}{8-4\sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

luego $$a = 30^\circ \text{ y } \begin{cases} 2K\pi + 30^\circ \\ (2K+1)\pi - 30^\circ. \end{cases}$$

144. Sea $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2} = x$;

hay que resolver la ecuación: $\operatorname{sen} a = \dfrac{2x}{1+x^2}$;

ó $$\operatorname{sen} a \,.\, x^2 - 2x + \operatorname{sen} a = 0, \quad [1]$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}{\operatorname{sen} a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-b^2}}{b}.$$

Discusión.—Puesto que b representa un seno, $1 - b^2$ es positivo; hay, pues, dos raices reales, pudiendo admitirse ambas raices. La ecuación [1], en la que el producto de las raices es igual á $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a}$ ó 1, enseña que las raices son inversas.

145. Se puede escribir:

$$\frac{1-\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x} = \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) : \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right) = \frac{b}{a};$$

ó también: $$\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ - \dfrac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^\circ + \dfrac{x}{2}\right)} = \frac{b}{a}$$

y, puesto que $45^\circ - \dfrac{x}{2}$ y $45^\circ + \dfrac{x}{2}$ son complementarios,

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)};$$

luego $$\mathrm{tg}^2\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = \frac{b}{a};$$

por consiguiente, $$\mathrm{tg}\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

146. Multiplicando por $2\cos\frac{a}{2}$ los dos términos de la fórmula

$$\mathrm{tg}\,\frac{a}{2} = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$$

obtenemos: $$\mathrm{tg}\,\frac{a}{2} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\mathrm{sen}\,a}{1+\cos a},$$

y reemplazando en las fórmulas [20] y [19] $\frac{a}{2}$ por a, resulta:

$$\mathrm{sen}\,a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}; \quad \cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}},$$

cuyos valores, puestos en lugar de $\mathrm{sen}\,a$ y $\cos a$ en la expresión de $\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}$, dan:

$$\mathrm{tg}\,\frac{a}{2} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}}{1\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}},$$

y si $\cos 2a = \frac{1}{2}$; $\mathrm{tg}\,\frac{a}{2} = \frac{\pm 1}{2\pm\sqrt{3}}$.

Nota.—Se puede buscar *à priori* el número de las soluciones. Sea 2α uno de los arcos que tienen el seno dado; todos los arcos que admiten el mismo coseno están comprendidos en la fórmula

$2a = 2\mathrm{K}\pi \pm 2\alpha$; luego $\frac{a}{2} = \mathrm{K}\frac{\pi}{2} \pm \frac{\alpha}{2}$. Los arcos $\mathrm{K}\frac{\pi}{2}$ terminan en los puntos A, A′, B, B′ del circulo trigonométrico; por consiguiente los arcos $\mathrm{K}\frac{\pi}{2} \pm \frac{\alpha}{2}$ terminan en los extremos de cuatro diámetros; hay, pues, *cuatro tangentes* que satisfacen á la cuestión.

147. Se tiene:

$$\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}(a+2a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} 2a} = \frac{\operatorname{tg} a + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} a},$$

pero $$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} = \sqrt{3};$$

de donde se deduce que

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}^2 a + 2\operatorname{tg} a - \sqrt{3} = 0;$$

las raices son: $\operatorname{tg} a = -\sqrt{3}$ y $\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{3}}{3}$; estos valores, puestos en la expresión de $\operatorname{tg} 3a$, dan:

$$\operatorname{tg} 3a = \infty \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} 3a = 0.$$

NOTA.—Se podria, como en el problema anterior, encontrar *à priori* el número de soluciones; en efecto, si 2α es uno de los arcos correspondientes á la tangente dada, todos los arcos que admiten la misma tangente están comprendidos en la fórmula $2a = K\pi + 2\alpha$; de donde $3a = K\frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$; estos arcos terminan en los extremos de dos diámetros.

148. Se tiene: $\sec^2 2a = 1 + \operatorname{tg}^2 2a$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} = \frac{2\operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg}^2 a - 1}.$$

por consiguiente, $$\operatorname{tg}^2 2a = \frac{4\operatorname{cotg}^2 a}{(\operatorname{cotg}^2 a - 1)^2}$$

y $$\sec^2 2a = 1 + \frac{4\operatorname{cotg}^2 a}{(\operatorname{cotg}^2 a - 1)^2} = \left(\frac{\operatorname{cotg}^2 a + 1}{\operatorname{cotg}^2 a - 1}\right)^2.$$

Al extraer la raiz no se puede tomar el doble signo, porque á un valor determinado de $\operatorname{cotg} a$ corresponde para $\sec 2a$ un solo valor, que es

$$\sec 2a = \frac{\operatorname{cotg}^2 a + 1}{\operatorname{cotg}^2 a - 1}.$$

Si se reemplaza $\operatorname{cotg} a$ por $1+\sqrt{2}$, se obtiene:

$$\sec 2a = \frac{4+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

149. $$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} 2a} = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{2 \operatorname{sen} a \cos a}.$$

Dividiendo cada término del numerador por el denominador se obtiene:

$$\operatorname{cosec} a = \frac{\operatorname{sen} a}{2\cos a} + \frac{\cos a}{2\operatorname{sen} a} = \frac{1}{2\operatorname{cotg} a} + \frac{\operatorname{cotg} a}{2} =$$
$$= \frac{1+\operatorname{cotg}^2 a}{2\operatorname{cotg} a}.$$

Reemplazando $\operatorname{cotg} a$ por $\frac{4}{3}$ resulta: $\operatorname{cosec} a = \frac{25}{24}$.

Se puede ver *à priori* que hay una sola solución; en efecto, los arcos que tienen la cotangente dada están comprendidos en la fórmula $a = \mathrm{K}\pi + 2\alpha$, y sus dobles en la fórmula $2a = 2\mathrm{K}\pi + 2\alpha$; estos arcos tienen el mismo extremo y, por consiguiente, la misma cosecante.

150. $$\log \operatorname{sen} x = \log 2 + \log \operatorname{sen} a.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30103 \\ \log \operatorname{sen} a &= \bar{1}{,}4804336 \\ \hline \log \operatorname{sen} x &= \bar{1}{,}7814636; \qquad x = 37^\circ\, 11'\, 58'',62. \end{aligned}$$

Todos los arcos comprendidos en las dos fórmulas

$$2\mathrm{K}\pi + x \quad \text{y} \quad (2\mathrm{K}+1)\pi + x$$

satisfacen al problema.

151. Sea x el número de grados del arco mencionado; puesto que $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, tenemos la proporción:

$$\frac{360^\circ}{x^\circ} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}; \quad \text{de donde} \quad x = \frac{90^\circ}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \log 90^\circ &= 1{,}9542425 \\ \bar{\mathrm{L}}\pi &= \bar{1}{,}5028504 \\ \hline \log x &= 1{,}4570929; \qquad x = 28^\circ\, 42'\, 36''. \end{aligned}$$

152. Se tiene: $\sqrt{2} = 2 \operatorname{sen} 45^\circ$ y $\sqrt{3} = 2 \operatorname{sen} 60^\circ$;

luego

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 2 (\operatorname{sen} 45^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ) = 4 \operatorname{sen} 52^\circ\, 30' \cos 7^\circ\, 30'.$$

153. $\operatorname{sen} \mathrm{P} + \operatorname{sen} \mathrm{Q} = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \cos \frac{1}{2} (\mathrm{P} - \mathrm{Q})$;

$$\frac{1}{2} (\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = 22^\circ\, 37'\, 2'',5; \quad \frac{1}{2}(\mathrm{P} - \mathrm{Q}) = 1^\circ\, 20'\, 16'',5.$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30103 \\ \log \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\mathrm{P} + \mathrm{Q}) &= \bar{1}{,}5849811 \\ \log \cos \frac{1}{2} (\mathrm{P} - \mathrm{Q}) &= \bar{1}{,}9998816 \\ \hline \log \operatorname{sen} x &= \bar{1}{,}8858927. \end{aligned}$$

$$x = 50^\circ\, 15'\, 31'',83 \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2\mathrm{K}\pi + x. \\ (2\mathrm{K} + 1)\pi - x. \end{cases}$$

154. *1.ª Solución.* $\operatorname{tg} a = \frac{3}{4}$ da $\operatorname{sen} a = \pm \frac{3}{5}$

y $$\cos a = \pm \frac{4}{5};$$

de donde se deduce:

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{y} \quad \pm \frac{3}{10}.$$

2.ª Solución. Se tiene:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad -3;$$

luego $$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}} = \pm \frac{1}{10} \quad \text{y} \quad \pm \frac{3}{10}.$$

Se obtiene cuatro valores, que son los de $\operatorname{sen} \frac{a}{2}$ y de $\cos \frac{a}{2}$; pero la suma de los cuadrados del seno y del coseno de un arco siendo la unidad, la suma de los cuadrados de los cuatro valores obtenidos es 2, lo que se averigua fácilmente.

155. Se tiene, sucesivamente:

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a = \frac{2 \operatorname{sen} a \cos a}{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a};$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \frac{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a};$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

156. Las fórmulas del problema anterior dan, cambiando a en $\frac{a}{2}$:

$$\operatorname{sen} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos a = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{tg} a = 1.$$

CAPÍTULO II

Resolución de triángulos.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.—*Resolver los triángulos rectángulos con los elementos dados.*

1. CASO.

157. Datos. $\begin{cases} B = 38^\circ. \\ a = 230^{m}. \end{cases}$

$$C = 90^\circ - B = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ.$$

Fórmulas. $\begin{cases} b = a \operatorname{sen} B; & \log b = \log a + \log \operatorname{sen} B. \\ c = a \cos B; & \log c = \log a + \log \cos B. \end{cases}$

$\log a = 2{,}3617278$	$\log a = 2{,}3617278$
$\log \operatorname{sen} B = \bar{1}{,}7893420$	$\log \cos B = \bar{1}{,}8965321$
$\log b = 2{,}1510698$	$\log c = 2{,}2582599$
$b = 141^{m}{,}6021$	$c = 181^{m}{,}2424$

158. Datos. $\begin{cases} a = 578^{\text{m}},25. \\ \text{B} = 38^\circ\ 51'\ 23''. \end{cases}$

Se aplican las mismas fórmulas:

$$\text{C} = 90^\circ - 38^\circ\ 51'\ 23'' = 51^\circ\ 8'\ 37''.$$

$$b = a \operatorname{sen} \text{B}.$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2,7621156 \\ \log \operatorname{sen} \text{B} &= \bar{1},7975241 \\ \hline \log b &= 2,5596397 \\ b &= 362^{\text{m}},777 \end{aligned}$$

$$c = a \cos \text{B}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2,7621156 \\ \log \cos \text{B} &= \bar{1},8913818 \\ \hline \log c &= 2,6534974 \\ c &= 450^{\text{m}},295 \end{aligned}$$

La superficie $\text{S} = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} \text{B} \cos \text{B}$,

$$\begin{aligned} 2 \log a &= 5,5242312 \\ \log \operatorname{sen} \text{B} &= \bar{1},7975241 \\ \log \cos \text{B} &= \bar{1},8913818 \\ \bar{\text{L}}\, 2 &= \bar{1},69897 \\ \hline \log \text{S} &= 4,9121071 \\ \text{S} &= 81678^{\text{m.}^2},3474. \end{aligned}$$

2.º Caso.

159. Datos. $\begin{cases} b = 102^{\text{m}},40. \\ \text{B} = 55^\circ. \end{cases}$

$$\text{C} = 90^\circ - \text{B} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

Fórmulas. $\begin{cases} a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \text{B}}; & \log a = \log b + \bar{\text{L}} \operatorname{sen} \text{B}. \\ c = b \operatorname{cotg} \text{B}; & \log c = \log b + \log \operatorname{cotg} \text{B}. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \log b &= 2,0103 \\ \bar{\text{L}} \operatorname{sen} \text{B} &= 0,0866355 \\ \hline \log a &= 2,0969355 \\ a &= 125^{\text{m}},007 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 2,0103 \\ \log \operatorname{cotg} \text{B} &= \bar{1},8452268 \\ \hline \log a &= 1,8555268 \\ c &= 71^{\text{m}},7102 \end{aligned}$$

160. Datos. $\begin{cases} b = 5734^{\text{m}},25. \\ \text{B} = 37^\circ\ 29'\ 12''. \end{cases}$

Se aplican las mismas fórmulas:

$$C = 90^\circ - B = 90^\circ - 37^\circ\ 29'\ 12'' = 52^\circ\ 30'\ 48$$

$\log b = 3{,}7584766$	$\log b = 3{,}7584766$
$\bar{L}\,\mathrm{sen}\,B = 0{,}2156847$	$\log \mathrm{cotg}\,B = 0{,}1152288$
$\log a = 3{,}9741613$	$\log c = 3{,}8737054$
$a = 9422^{m},39$	$c = 7476^{m},62$

$$S = \frac{1}{2} b^2 \,\mathrm{cotg}\,B; \quad \log S = 7{,}3311520; \quad S = 21436410^{m^2}.$$

3.$^{\text{ER}}$ CASO.

161. Datos. $\begin{cases} a = 117^{m},80. \\ b = 48^{m}. \end{cases}$

Fórmulas. $\begin{cases} \mathrm{sen}\,B = \dfrac{b}{a}; \quad c = \sqrt{(a+b)(a-b)}; \\ a + b = 165^{m},80; \quad a - b = 69{,}80. \end{cases}$

$\log b = 1{,}6812412$	$\log(a+b) = 2{,}2195845$
$\bar{L}\,a = \bar{3},9288547$	$\log(a-b) = 1{,}8433554$
$\log \mathrm{sen}\,B = \bar{1},6100959$	$4{,}0629399$
$B = 24^\circ\ 2'\ 45'',6$	$\log c = 2{,}03146995$
$C = 65^\circ\ 57'\ 14'',4$	$c = 107^{m},58$

Empleando la fórmula $\mathrm{tg}\,\dfrac{c}{2} = \sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$ se tendría:

$$\begin{aligned} \log(a-b) &= 1{,}8433554 \\ \bar{L}(a+b) &= \bar{3},7804155 \\ &\overline{\ \bar{1},6242709\ } \end{aligned}$$

$$\log \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,C = \bar{1},8121354,$$

$$\frac{1}{2}\,C = 32^\circ\ 58'\ 37'',2,$$

$$C = 65^\circ\ 57'\ 14''4; \qquad B = 24^\circ\ 2'\ 45\ ,6.$$

162. Datos. $\begin{cases} a = 5678^{m},76 \\ b = 3456^{m},48. \end{cases}$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}; \quad c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}5386341 \\ \bar{L}\, a &= \bar{4}{,}2457465 \\ \hline \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}7843806; \end{aligned}$$

$$B = 37^\circ\, 29'\, 35'',76; \quad C = 52^\circ\, 30'\, 24'',24;$$

$$c = 4505^{m},6693.$$

4.° CASO.

163. DATOS. $\begin{cases} b = 122^{m},40 \\ c = 130^{m}. \end{cases}$

$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$	$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$
$\log b = 2{,}0877814$	$\log b = 2{,}0877814$
$\bar{L} c = \bar{3}{,}8860566$	$\bar{L} \operatorname{sen} B = 0{,}1639898$
$\log \operatorname{tg} B = \bar{1}{,}9738380.$	$\log a = 2{,}2517712.$

$$B = 43^\circ\, 16'\, 31''; \quad C = 46^\circ\, 43'\, 29''; \quad a = 178^{m},554.$$

164. Datos. $\begin{cases} b = 52^{m},34 \\ c = 28^{m},80. \end{cases}$

$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$	$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}.$
$\log b = 1{,}7188337$	$\log b = 1{,}7188337$
$\bar{L} c = \bar{2}{,}5406075$	$\bar{L} \operatorname{sen} B = 0{,}0574345$
$\log \operatorname{tg} B = 0{,}2594412$	$\log a = 1{,}7762682$

$$B = 61^\circ\, 10'\, 41'',8; \quad C = 28^\circ\, 49'\, 18'',2; \quad a = 59^{m},7404.$$

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}\, b c \\ \log b &= 1{,}7188337 \\ \log c &= 1{,}4593925 \\ \bar{L}\, 2 &= \bar{1}{,}69897 \\ \hline \log S &= 2{,}8771962 \end{aligned} \qquad S = 753^{m^2},6985.$$

165. Datos. $\begin{cases} a = 6542^{\mathrm{m}},84 \\ \dfrac{B}{C} = \dfrac{7}{9} \end{cases}$

$$\frac{B}{B+C} = \frac{7}{16}; \quad B = \frac{90^\circ \times 7}{16} = 39^\circ\, 22'\, 30''; \quad C = 50^\circ\, 37'\, 30'';$$

$$\begin{array}{rl|rl}
b = & a \operatorname{sen} B & c = & a \cos B \\
\log a = & 3,8157663 & \log a = & 3,8157663 \\
\log \operatorname{sen} B = & \bar{1},8023586 & \log \cos B = & \bar{1},8881854 \\
\hline
\log b = & 3,6181249 & \log c = & 3,7039517 \\
b = & 4150^{\mathrm{m}},7338 & c = & 5057^{\mathrm{m}},6835
\end{array}$$

166. Datos. $\begin{cases} b = 48^{\mathrm{m}}. \\ B = 32^\circ\, 57'. \end{cases}$

$$C = 90^\circ - 32^\circ\, 57' = 57^\circ\, 3';$$

$$\begin{array}{rl|rl}
a = & \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} & c = & b \operatorname{cotg} B \\
\log b = & 1,6812412 & \log b = & 1,6812412 \\
\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} B = & 0,2644754 & \log \operatorname{cotg} B = & 0,1883127 \\
\hline
\log a = & 1,9457166 & \log c = & 1,8695539 \\
a = & 88^{\mathrm{m}},25039 & c = & 74^{\mathrm{m}},05245
\end{array}$$

167. Datos. $\begin{cases} a = 163^{\mathrm{m}},20 \\ B = 40^\circ,22' \end{cases}$

$$C = 90^\circ - 40^\circ\, 22 = 49^\circ\, 38';$$

$$\begin{array}{rl|rl}
b = & a \operatorname{sen} B & c = & a \cos B \\
\log a = & 2,2127202 & \log a = & 2,2127202 \\
\log \operatorname{sen} B = & \bar{1},8113583 & \log \cos B = & \bar{1},8819067 \\
\hline
\log b = & 2,0240785 & \log c = & 2,0946269 \\
b = & 105^{\mathrm{m}},7008 & c = & 124^{\mathrm{m}},3346
\end{array}$$

168. Datos. $\begin{cases} a = 176^{\text{m}}. \\ b = 160^{\text{m}},50. \end{cases}$

$$a + b = 236^{\text{m}},50$$

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$\log(a-b) = 1,1903317$$
$$\log(a+b) = 2,5269851$$
$$3,7173168$$
$$\log c = 1,8586584$$
$$c = 72^{\text{m}},22015$$

$$a - b = 15^{\text{m}},50$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\mathrm{C} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

$$\log(a-b) = 1,1903317$$
$$\log(a+b) = 2,5269851$$
$$\bar{2},6633466$$
$$\log \operatorname{tg} {}^1/_2\,\mathrm{C} = \bar{1},3316733$$
$$\frac{\mathrm{C}}{2} = 12^\circ\, 6'\, 47'',37.$$

$$\mathrm{C} = 24^\circ\, 13'\, 34'',74.$$
$$\mathrm{B} = 65^\circ\, 46'\, 25'',26.$$

169. Datos. $\begin{cases} b = 141^{\text{m}}. \\ c = 181^{\text{m}},20. \end{cases}$

$$\operatorname{tg}\mathrm{B} = \frac{b}{c}$$

$$\log b = 2,1492191$$
$$\bar{\mathrm{L}}c = \bar{3},7418418$$
$$\log\operatorname{tg}\mathrm{B} = \bar{1},8910609$$
$$\mathrm{B} = 37^\circ\, 53'\, 17'',2$$
$$\mathrm{C} = 52^\circ\, 6'\, 42'',8$$

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen}\mathrm{B}}$$

$$\log b = 2,1492191$$
$$\bar{\mathrm{L}}\operatorname{sen}\mathrm{B} = 0,2117457$$
$$\log a = 2,3609648$$
$$a = 229^{\text{m}},596$$

170. Datos. $\begin{cases} b = 320^{\text{m}}. \\ \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = \dfrac{7}{5}. \end{cases}$

$\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} = \dfrac{7}{5}$, luego $\begin{cases} \mathrm{B} = 52^\circ\, 30'. \\ \mathrm{C} = 37^\circ\, 30'. \end{cases}$ *(Véase núm. 165).*

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen}\mathrm{B}}$$

$$\log b = 2,50515$$
$$\bar{\mathrm{L}}\operatorname{sen}\mathrm{B} = 0,1005333$$
$$\log a = 2,6056833$$
$$a = 403^{\text{m}},3511$$

$$c = b\operatorname{cotg}\mathrm{B}$$

$$\log b = 2,50515$$
$$\log\operatorname{cotg}\mathrm{B} = \bar{1},8849805$$
$$\log c = 2,3901305$$
$$c = 245^{\text{m}},54468$$

171. Datos. $\begin{cases} b + c = 252^{\text{m}},40. \\ b - c = 7^{\text{m}},60. \end{cases}$

$$b = \frac{252,40 + 7,60}{2} = 130^{\text{m}}; \quad c = \frac{252,40 - 7,60}{2} = 122^{\text{m}},40.$$

$\operatorname{tg} B = \dfrac{b}{c}.$	$a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}.$
$\log b = 2,1139434$	$\log b = 2,1139434$
$\overline{\text{L}}\, c = \overline{3},9122186$	$\overline{\text{L}} \operatorname{sen} B = 0,1378278$
$\log \operatorname{tg} B = 0,0261620$	$\log a = 2,2517712$
$B = 46^{\circ}\, 43'\, 28'',95$	$a = 178^{\text{m}},5546$
$C = 43^{\circ}\, 16'\, 31'',05$	

172. Datos. $\begin{cases} a = 225^{\text{m}}. \\ \dfrac{c}{b} = 0,75. \end{cases}$

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} = 0,75; \quad \log \operatorname{tg} C = \overline{1},8750613.$$

$$C = 36^{\circ}\, 52'\, 11'',64; \quad B = 53^{\circ}\, 7'\, 48'',36.$$

$b = a \operatorname{sen} B.$	$c = a \cos B.$
$\log a = 2,3521825$	$\log a = 2,3521825$
$\log \operatorname{sen} B = \overline{1},9030900$	$\log \cos B = \overline{1},7781747$
$\log b = 2,2552725$	$\log c = 2,1303552$
$b = 180^{\text{m}}.$	$c = 135^{\text{m}}.$

173. $\operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a} = 0,6;$ $\log \operatorname{sen} B = \overline{1},7781513.$

$$B = 36^{\circ}\, 52'\, 11'',64; \quad C = 53^{\circ}\, 7'\, 48''\, 36.$$

$b = c \operatorname{tg} B$	$\dfrac{b}{a} = 0,6.$
$\log c = 2,0791812$	$a = \dfrac{90}{0,6} = 150^{\text{m}}.$
$\log \operatorname{tg} B = \overline{1},8750613$	$S = \dfrac{1}{2}\, b\, c = 540^{\text{m}^2}$
$\log b = \overline{1},9542425$	$b = 90^{\text{m}}.$

174.

$$c = b \operatorname{tg} C$$

$$\begin{aligned} \log b &= 1{,}98227123 \\ \log \operatorname{tg} C &= 0{,}1150195 \\ \hline \log c &= 2{,}09729073 \end{aligned}$$

$$c = 125^{\mathrm{m}}{,}109$$

175.

$$b = c \operatorname{cotg} C$$

$$\begin{aligned} \log c &= 1{,}1760913 \\ \log \operatorname{cotg} C &= 0{,}1150195 \\ \hline \log b &= 1{,}2911108 \end{aligned}$$

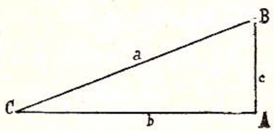
$$b = 19^{\mathrm{m}}{,}54838$$

176. La altura del sol es igual al ángulo C de un triángulo rectángulo BAC cuyo cateto b es igual á 2,5 c; se tiene, pues:

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} = \frac{1}{2{,}5};$$

$$\log \operatorname{tg} C = \overline{\mathrm{L}}\, 2{,}5 = \bar{1}{,}39794001;$$

$$C = 21^{\circ}\, 48'\, 5''{,}07.$$



177. *(La misma figura.)*

Se tiene del mismo modo:

$$\operatorname{tg} C = \frac{c}{b} = \frac{2}{3};$$

$$\log \operatorname{tg} C = \log 2 + \overline{\mathrm{L}}\, 3 = \bar{1}{,}823097;$$

$$C = 33^{\circ}\, 41'\, 24''{,}24.$$

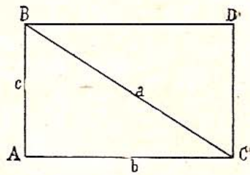
178. *(La misma figura.)*

$$a = \frac{b}{\cos c}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 1{,}2211533 \\ \overline{\mathrm{L}} \cos C &= 0{,}0349101 \\ \hline \log a &= 1{,}2560634 \end{aligned}$$

$$a = 18^{\mathrm{m}}{,}03281$$

179. $\dfrac{b}{c} = \operatorname{tg} B$



$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}0806265 \\ \log c &= 1{,}8462134 \\ \hline \log \operatorname{tg} B &= 0{,}2344131 \end{aligned}$$

$B = 59^\circ\, 45'\, 45''$; $C = 30^\circ\, 14'\, 15''$.

180. *(La misma figura).*

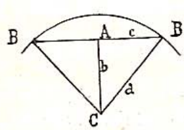
$$S = bc = a \cos C \,.\, a \operatorname{sen} C = a^2 \operatorname{sen} C \cos C = \frac{a^2}{2} \operatorname{sen} 2C.$$

$$\begin{aligned} 2 \log a &= 3{,}6703662 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}6143850 \\ \log \cos C &= \bar{1}{,}9597106 \\ \hline \log S &= 3{,}2444618 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 \log a &= 3{,}6703662 \\ \log \operatorname{sen} 2C &= \bar{1}{,}8751256 \\ \bar{L}\, 2 &= \bar{1}{,}69897 \\ \hline \log S &= 3{,}2444618 \end{aligned}$$

$$S = 1755^{m^2}{,}7465.$$

181. La cuerda BB' es el doble de AB.

$$c = b \operatorname{tg} C$$



$$\begin{aligned} \log b &= 1{,}30103 \\ \log \operatorname{tg} C &= \bar{1}{,}9391631 \\ \hline \log c &= 1{,}2401931 \\ c &= 17^{m}{,}38574, \\ BB' &= 34^{m}{,}77148. \end{aligned}$$

182. *(La misma figura.)*

$c = a \operatorname{sen} C$;

$$\begin{aligned} \log a &= 0{,}9216865 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}1730699 \\ \hline \log c &= 0{,}0947564 \end{aligned}$$

$c = 1^{m}{,}2438$; $BB' = 2^{m}{,}4876$.

183. *(La misma figura.)*

$$AB = 12^{m}{,}5; \qquad BC = 72^{m}.$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{a}; \quad C = 10^\circ; \quad c = \sqrt{(a+b)(a-b)} = 70^{m}{,}90.$$

Resp. 1.°, 18 lados; 2.°, 450^{m}; 3.°, $70^{m}{,}90$.

184. Sea CS la dirección del Sur y CE la del Este; se ha seguido una dirección intermedia CB = 80 km.; según el problema, resulta que $\quad CA - AB = 43^{km},25;$

luego,

$$\begin{aligned} b &= a \operatorname{sen} B. \\ c &= a \operatorname{sen} C. \end{aligned}$$

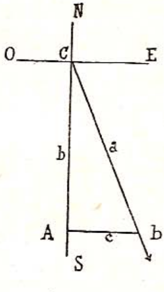
$$b - c = a\,(\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C) = 2a\,.\operatorname{sen}\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) =$$

$$= 2a \cos 45^\circ \operatorname{sen}\frac{B-C}{2};$$

de donde se deduce que

$$\operatorname{sen}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{2a\cos 45} = \frac{b-c}{2a\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b-c}{a\sqrt{2}} = \frac{43,25}{a\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \log 43,25 &= 1,6359861 \\ \overline{L}a &= \overline{2},09691 \\ \overline{L}\sqrt{2} &= \overline{1},8494850 \\ \hline \log\operatorname{sen}\frac{B-C}{2} &= \overline{1},5823811 \\ \frac{B-C}{2} &= 22^\circ\ 28'\ 29'',3 \\ \frac{B+C}{2} &= 45^\circ \\ \hline C &= 22^\circ\ 31'\ 30'',7 \end{aligned}$$



La dirección ha sido, pues, el SSE., poco más ó menos.

185. Se pueden escribir las siguientes relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

$$\frac{2ah = 2bc}{a^2 + 2ah = (b+c)^2}; \quad b + c = \sqrt{a(a+2h)};$$

$$a + 2h = 8350^m,24.$$

$$a^2 - 2ah = (b-c)^2; \quad b - c = \sqrt{a(a-2h)};$$

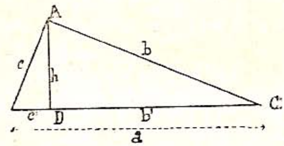
$$a - 2h = 1029^m,28.$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log a = & 3{,}6711506 & \log a = & 3{,}6711506 \\
\log(a+2h) = & 3{,}9216990 & \log(a-2h) = & 3{,}0125336 \\
\hline
 & 7{,}5928496 & = & 6{,}6836842 \\
\log(b+c) = & 3{,}7964248 & \log(b-c) = & 3{,}3418421
\end{array}$$

$$b + c = 6257^{\mathrm{m}},8143; \qquad b - c = 2197^{\mathrm{m}},061;$$

$$b = 4227^{\mathrm{m}},453; \qquad c = 2030^{\mathrm{m}},392;$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a}$$



$$\begin{array}{rl}
\log b = & 3{,}6260733 \\
\mathrm{L}a = & \bar{4}{,}3288548 \\
\hline
\log \operatorname{sen} B = & \bar{1}{,}9549281
\end{array}$$

$$B = 64^\circ\, 20'\, 44'',2; \qquad C = 25^\circ\, 39'\, 15'',8.$$

NOTA. El problema puede resolverse como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} c' = h \cos B \\ b' = h \cos C \end{array}\right\} b' + c' = a = h\,(\cos B + \cos C);$$

$$a = 2h \,.\, \cos\frac{B+C}{2} \,.\, \cos\frac{B-C}{2} = h\sqrt{2} \,.\, \cos\frac{B-C}{2};$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{a}{h\sqrt{2}};$$

de donde resultan los valores anteriormente obtenidos para B y C, y se saca fácilmente b y c.

186. *(La misma figura.)*

$$a = b' + c' = 6061^{\mathrm{m}},47;$$

$$h = \sqrt{b'c'};$$

$$\begin{array}{rl}
\log b' = & 3{,}5558583 \\
\log c' = & 3{,}3918333 \\
\hline
 & 6{,}9477016
\end{array}$$

$$\log h = 3{,}4738508$$

$$h = 2977^{\mathrm{m}},49$$

Se termina como en el problema anterior:

$a+2h=12016^{\text{m}},45$	$a-2h=106^{\text{m}},48$
$\log a=3,7825779$	$\log a=3,7825779$
$\log(a+2h)=4,0797764$	$\log(a-2h)=2,0272810$
$7,8623543$	$5,8098589$
$\log(b+c)=3,9311771$	$\log(b-c)=2,9049294$
$b+c=8534^{\text{m}},48$	$b-c=803^{\text{m}},395$
$b=4668^{\text{m}},937$	$c=3865^{\text{m}},542$

$$\operatorname{sen} B=\frac{b}{a};$$

$$\log\operatorname{sen} B=3,6692180+\bar{4},2174221=\bar{1},8866401$$

$$B=50^\circ\,22'\,39'',7 \qquad C=39^\circ\,37'\,30'',3$$

Nota. Se puede también escribir:

$$\left.\begin{aligned} c' &= h\operatorname{cotg} B=\frac{h}{\operatorname{tg} B}\\ b' &= h\operatorname{cotg} C=h\operatorname{tg} B\end{aligned}\right\}$$ Dividiendo ordenadamente resulta:

$$\frac{b'}{c'}=\operatorname{tg}^2 B \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} B\sqrt{\frac{b'}{c'}}.$$

Conociendo el ángulo B se termina fácilmente el problema.

187. Se obtiene, como en el número 184:

$$\operatorname{sen}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{a\sqrt{2}}=\frac{d}{a\sqrt{2}};$$

$$\begin{aligned} \log d &= 2,9163202\\ \bar{L}a &= \bar{4},8708775\\ \bar{L}\sqrt{2} &= \bar{1},8494850\\ \log\operatorname{sen}\frac{B-C}{2} &= 1,6366827.\end{aligned}$$

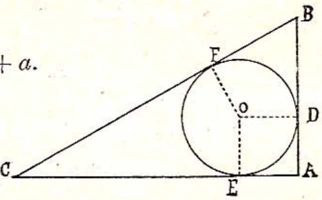
$$\begin{aligned}\frac{B-C}{2} &= 25^\circ\,40'\,13'',02\\ \frac{B+C}{2} &= 45^\circ\end{aligned}$$

$$B=70^\circ\,40'\,13'',62. \qquad C=19^\circ\,19'\,46'',38.$$

$b = a \operatorname{sen} B$	$c = a \operatorname{sen} C$
$\log a = 3{,}1291225$	$\log a = 3.1291225$
$\log \operatorname{sen} B = \bar{1}{,}9748018$	$\log \cos B = \bar{1}{,}5198295$
$\log b = 3{,}1291225$	$\log c = 2{,}6489520$
$b = 1270^{m}{,}353$	$c = 445^{m}{,}6069$

188. Se tiene:

$$AB = AD + BD = r + BF$$
$$AC = AE + CE = r + CF$$
$$AB + AC = 2r + BC = 2r + a.$$



Se puede escribir:

$$b = AC = a \operatorname{sen} B$$
$$c = AB = a \operatorname{sen} C$$

$$b + c = a(\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C) = 2a \operatorname{sen} \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} =$$

$$= a\sqrt{2} \cos \frac{B-C}{2}.$$

$$\cos \frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{a\sqrt{2}} = \frac{a+2r}{a\sqrt{2}}.$$

$$a + 2r = 5899{,}14^{m}$$
$$\log a + 2r = 3{,}7707887$$
$$\bar{L} a = \bar{4}{,}3644740$$
$$\bar{L} \sqrt{2} = \bar{1}{,}8494850$$

$$\log \cos \frac{B-C}{2} = \bar{1}{,}9847477$$

$$\frac{B-C}{2} = 15^{\circ}\, 5'\, 46'',32$$

$$\frac{B+C}{2} = 45^{\circ}$$

$$B = 60^{\circ}\, 5'\, 46'',32$$
$$C = 29^{\circ}\, 54'\, 13'',68$$

$b = a \operatorname{sen} B.$	$c = a \cos B.$
$\log a = 3{,}6355260$	$\log a = 3{,}6355260$
$\log \operatorname{sen} B = \bar{1}{,}9379508$	$\log \cos B = \bar{1}{,}6977044$
$\log b = 3{,}5734768$	$\log c = 3{,}3332304$
$b = 3745^{m}{,}215$	$\log c = 2153^{m}{,}925$

189. Se obtiene, como en el problema anterior:

$$\cos \frac{B - C}{2} = \frac{b + c}{a\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \log (b + c) &= 3{,}8223497 \\ \bar{L}\, a &= \bar{4}{,}3219052 \\ \bar{L} \sqrt{2} &= \bar{1}{,}8494850 \\ \hline \log \cos \frac{B - C}{2} &= \bar{1}{,}9937399 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{B - C}{2} &= 9^{\circ}\, 42'\, 17'',83 \\ \frac{B + C}{2} &= 45^{\circ} \\ \hline B &= 54^{\circ}\, 42'\, 17'',83 \qquad c = 35^{\circ}\, 17'\, 42'',17. \end{aligned}$$

$b = a \operatorname{sen} B$	$c = a \cos B$
$\log a = 3{,}6780948$	$\log a = 3{,}6780948$
$\log \operatorname{sen} B = \bar{1}{,}9117899$	$\log \cos B = \bar{1}{,}7607679$
$\log b = 3{,}5898847$	$\log c = 3{,}4398627$
$b = 3889^{m}{,}419$	$c = 2753^{m}358$

TRIÁNGULOS CUALESQUIERA.

1.ER CASO.

190. Datos. $\left\{ \begin{array}{l} A = 32^{\circ}\, 57'. \\ B = 123^{\circ}. \\ a = 117^{m}{,}20. \end{array} \right.$

$$C = 180^{\circ} - (A + B) = 24^{\circ}\, 3'.$$

Fórmulas. $\begin{cases} b = \dfrac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}. \\ c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}. \end{cases}$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log a = & 2{,}0689276 & \log a = & 2{,}0689276 \\
\log \operatorname{sen} B = & \bar{1}{,}9235914 & \log \operatorname{sen} C = & \bar{1}{,}6101635 \\
\bar{L} \operatorname{sen} A = & 0{,}2644754 & \bar{L} \operatorname{sen} A = & 0{,}2644754 \\
\hline
\log b = & 2{,}2569944 & \log c = & 1{,}9435665 \\
b = & 180^{m}{,}786 & c = & 87^{m}{,}814
\end{array}$$

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

$$\log S = 3{,}6350455; \qquad S = 4315^{m.^2}{,}623.$$

191. Datos. $\begin{cases} A = 138^\circ\, 31'. \\ B = 33^\circ\, 17'. \\ c = 14^{m}{,}76. \end{cases}$

$$C = 180^\circ - (A + B) = 8^\circ\, 12';$$

$$b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}; \qquad a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C};$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log c = & 1{,}1690864 & \log c = & 1{,}1690864 \\
\log \operatorname{sen} B = & \bar{1}{,}7393980 & \log \operatorname{sen} A = & \bar{1}{,}8211217 \\
\bar{L} \operatorname{sen} C = & 0{,}8457924 & \bar{L} \operatorname{sen} C = & 0{,}8457924 \\
\hline
\log b = & 1{,}7542768 & \log a = & 1{,}8360005 \\
b = & 56^{m}{,}79064 & a = & 68^{m}{,}54890
\end{array}$$

$$S = {}^1\!/_2\, c^2 \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}.$$

$$\begin{array}{rl}
\bar{L}\, 2 = & \bar{1}{,}69897 \\
2 \log c = & 2{,}3381738 \\
\log \operatorname{sen} A = & \bar{1}{,}8211217 \\
\log \operatorname{sen} B = & \bar{1}{,}7393980 \\
\bar{L} \operatorname{sen} C = & 0{,}8457924 \\
\hline
\log S = & 2{,}4434549 \\
S = & 277^{m^2}{,}6227
\end{array}$$

192. Datos. $\begin{cases} A = 57^\circ\, 32'\, 7'',6. \\ B = 73^\circ\, 42'\, 50''. \\ a = 25432^{m},46. \end{cases}$

$$C = 180^\circ - (A + B) = 48^\circ\, 45'\, 2'',4;$$

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \qquad\qquad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

$$\begin{array}{rl|rl} \log a = & 4,4053883 & \log a = & 4,4053883 \\ \log \operatorname{sen} B = & \bar{1},9822139 & \log \operatorname{sen} C = & \bar{1},8761297 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A = & 0,0737998 & \bar{L} \operatorname{sen} A = & 0,0737998 \\ \hline \log b = & 4,4614020 & \log c = & 4,3553178 \\ b = & 28933^{m},56 & c = & 22663^{m},02 \end{array}$$

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

$$\begin{array}{rl} \bar{L}\, 2 = & \bar{1},69897 \\ 2 \log a = & 8,8107766 \\ \log \operatorname{sen} B = & \bar{1},9822139 \\ \log \operatorname{sen} C = & \bar{1},8761297 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A = & 0,0737998 \\ \hline \log S = & 8,4418900 \\ S = & 276624000^{m^2} \end{array}$$

193. Datos. $\begin{cases} A = 84^\circ\, 53'\, 33'',8. \\ B = 47^\circ\, 17'\, 3'',8. \\ c = 56894^{m},60. \end{cases}$

$$C = 180^\circ - (A + B) = 47^\circ\, 48'\, 22'',4.$$

$$b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} \qquad\qquad a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C};$$

$$\begin{array}{rl|rl} \log c = & 4,7550711 & \log c = & 4,7550711 \\ \log \operatorname{sen} B = & \bar{1},8661277 & \log \operatorname{sen} A = & \bar{1},9982723 \\ \bar{L} \operatorname{sen} C = & 0,1302536 & \bar{L} \operatorname{sen} C = & 0,1302536 \\ \hline \log b = & 4,7514524 & \log a = & 4,8835970 \\ b = & 56422^{m},56 & a = & 76488^{m},65 \end{array}$$

$$S = \frac{1}{2} c^2 \frac{\text{sen A sen B}}{\text{sen C}};$$

$$\begin{aligned}
\bar{L}\,2 &= \bar{1},69897 \\
2 \log c &= 9,5101422 \\
\log \text{sen A} &= \bar{1},9982723 \\
\log \text{sen B} &= \bar{1},8661277 \\
\bar{L} \text{ sen C} &= 0,1302356 \\
\hline
\log S &= 9,\ 037478 \\
S &= 1598529411^{m^2}
\end{aligned}$$

194. Datos. $\begin{cases} A = 72^\circ\ 17'. \\ B = 48^\circ\ 12'. \\ c = 560^{m},40. \end{cases}$

$$C = 180^\circ - (A + B) = 59^\circ\ 31'.$$

$$b = \frac{c \text{ sen B}}{\text{sen C}}$$

$$\begin{aligned}
\log c &= 2,7484981 \\
\log \text{sen B} &= \bar{1},8724337 \\
\bar{L} \text{ sen C} &= 0,0646052 \\
\hline
\log b &= 2,6855370 \\
b &= 484^{m},7714
\end{aligned}$$

$$a = \frac{c \text{ sen A}}{\text{sen C}};$$

$$\begin{aligned}
\log c &= 2,7484981 \\
\log \text{sen A} &= \bar{1},9788983 \\
\bar{L} \text{ sen C} &= 0,0646052 \\
\hline
\log a &= 2,7920016 \\
a &= 619^{m},4434
\end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} c^2 \frac{\text{sen A sen B}}{\text{sen C}};$$

$$\begin{aligned}
\bar{L}\,2 &= \bar{1},69897 \\
2 \log c &= 5,4969962 \\
\log \text{sen A} &= \bar{1},9788983 \\
\log \text{sen B} &= \bar{1},8724337 \\
\bar{L} \text{ sen C} &= 0,0646052 \\
\hline
\log S &= 5,1119034 \\
S &= 129390^{m^2},80
\end{aligned}$$

195. Datos. $\begin{cases} B = 79^\circ\ 50'\ 39''. \\ C = 64^\circ\ 25'\ 48''. \\ a = 439^{m},258. \end{cases}$

$$A = 180^\circ - (B + C) = 35^\circ\ 43'\ 33''.$$

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}6427197 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}9931415 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 0{,}2336561 \\ \hline \log b &= 2{,}8695173 \\ b &= 740^{m}{,}4868 \end{aligned}$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}6427197 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}9552348 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 0{,}2336561 \\ \hline \log c &= 2{,}8316106 \\ c &= 678^{m}{,}5947 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

$$\begin{aligned} \bar{L}\, 2 &= \bar{1}{,}69897 \\ 2 \log a &= 5{,}2854394 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}9931415 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}9552348 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 0{,}2336551 \\ \hline \log S &= 5{,}1654418. \\ S &= 146703^{m^2}{,}95 \end{aligned}$$

2.º CASO.

196. Datos. $\begin{cases} a = 167^{m}. \\ b = 145^{m}. \\ c = 54^{m}. \end{cases}$

Cálculos auxiliares. $\begin{cases} a + b = 312 \text{ m.}; & a - b = 22 \text{ m.} \\ \dfrac{C}{2} = 27^{\circ}; & \dfrac{A+B}{2} = 63^{\circ}. \end{cases}$

Fórmulas. $\begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \dfrac{C}{2}; \quad c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}; \\ S = \dfrac{1}{2} ab \operatorname{sen} C. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \log (a - b) &= 1{,}3424227 \\ \bar{L}\, (a + b) &= \bar{3}{,}5058454 \\ \log \operatorname{cotg} \frac{C}{2} &= 0{,}2928341 \\ \hline \log \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \bar{1}{,}1411022 \end{aligned}$$

$$\frac{A-B}{2} = 7^\circ\,52'\,44'',66$$

$$\frac{A+B}{2} = 63^\circ$$

$$A = 70^\circ\,52'\,44'',66;\quad B = 55^\circ\,7'\,15'',34.$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2,2227165 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1},9079576 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 0,0246467 \\ \hline \log c &= 2,1553208 \\ c &= 142^{m},995 \\ \text{ó sea}\quad & 143^{m}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}\,2 &= \bar{1},69897 \\ \log a &= 2,2227165 \\ \log b &= 2,1613680 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1},9079576 \\ \hline \log S &= 3,9910121 \\ S &= 9795^{m^2},1722 \end{aligned}$$

197. Datos. $\begin{cases} a = 203^{m},20. \\ b = 245^{m},40. \\ C = 72^\circ\,10'. \end{cases}$

$$b + a = 448^{m},60;\quad b - a = 42,20^{m};\quad \frac{1}{2}\,C = 36^\circ\,5';$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-A}{2} = \frac{b-a}{b+a}\operatorname{cotg}\frac{C}{2};$$

$$\begin{aligned} \log(b-a) &= 1,6253125 \\ \bar{L}\,(b+a) &= \bar{3},3481407 \\ \log \operatorname{cotg}\frac{C}{2} &= 0,1374113 \\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{B-A}{2} &= \bar{1},1108645 \end{aligned}$$

$$\frac{B-A}{2} = 7^\circ\,21'\,18'',58$$

$$\frac{B+A}{2} = 53^\circ\,55'$$

$$\begin{aligned} B &= 61^\circ\,16'\,18'',58 \\ A &= 46^\circ\,33'\,41'',42 \end{aligned}$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}3079237 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}9786148 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 0{,}1389959 \\ \hline \log c &= 2{,}4255344 \\ c &= 266^{m}{,}40 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C;$$

$$\begin{aligned} \bar{L}\, 2 &= \bar{1}{,}69897 \\ \log a &= 2{,}3079237 \\ \log b &= 2{,}3898746 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}9786148 \\ \hline \log S &= 4{,}3753831 \\ S &= 23734^{m^2}{,}66 \end{aligned}$$

198. Datos. $\begin{cases} b = 61686^{m}{,}54. \\ c = 51956^{m}{,}90. \\ A = 24^{\circ}\, 26'\, 56''. \end{cases}$

$$b + c = 113643{,}44; \quad b - c = 9729{,}64; \quad \frac{A}{2} = 12^{\circ}\, 13'\, 28''.$$

$$\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

$$\begin{aligned} \log (b - c) &= 3{,}9880968 \\ \bar{L}\, (b + c) &= \bar{6}{,}9444557 \\ \log \operatorname{cotg} \frac{A}{2} &= 0{,}6642325 \\ \hline \log \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} &= \bar{1}{,}5967850 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{B - C}{2} &= 21^{\circ}\, 33'\, 47''{,}97 \\ \frac{B + C}{2} &= 77^{\circ}\, 46'\, 32'' \end{aligned} \quad \begin{cases} B = 99^{\circ}\, 20'\, 16''{,}97. \\ C = 56^{\circ}\, 12'\, 47''{,}03. \end{cases}$$

$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 4{,}7156433 \\ \log \operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}6168759 \\ \bar{L} \operatorname{sen} C &= 0{,}0803408 \\ \hline \log a &= 4{,}4128600 \\ a &= 25873^{m}{,}78 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$$

$$\begin{aligned} \bar{L}\, 2 &= \bar{1}{,}69897 \\ \log b &= 4{,}7901904 \\ \log c &= 4{,}7156433 \\ \log \operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}6168759 \\ \hline \log S &= 8{,}8216796 \\ S &= 663253500^{m^2} \end{aligned}$$

199. Datos. $\begin{cases} b = 1109{,}75^{\text{m}}. \\ c = 1489{,}62^{\text{m}}. \\ A = 47^\circ\ 9'\ 50''. \end{cases}$

$$c + b = 2599^{\text{m}},37; \quad c - b = 379^{\text{m}},87; \quad \frac{A}{2} = 23^\circ\ 34'\ 55'';$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{C-B}{2}\right) = \frac{c-b}{c+b}\operatorname{cotg}\frac{A}{2};$$

$$\begin{aligned} \log(c-b) &= 2{,}5796350 \\ \overline{L}(c+b) &= \bar{4}{,}5851319 \\ \log\operatorname{cotg}\frac{A}{2} &= 0{,}3600018 \\ \log\operatorname{tg}\frac{C-B}{2} &= \bar{1}{,}5247687 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{B-C}{2} &= 18^\circ\ 30'\ 35'',57 \\ \frac{B+C}{2} &= 66^\circ\ 25'\ 5'' \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} B &= 47^\circ\ 54'\ 29'',43. \\ C &= 84^\circ\ 55'\ 40'',57. \end{aligned}$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}0452252 \\ \log\operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}8652826 \\ \overline{L}\operatorname{sen} B &= 0{,}1295543 \\ \hline \log a &= 3{,}0400621 \\ a &= 1096^{\text{m}},635 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen} A$$

$$\begin{aligned} \overline{L}\,2 &= \bar{1}{,}69897 \\ \log b &= 3{,}0452252 \\ \log c &= 3{,}1730755 \\ \log\operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}8652826 \\ \hline \log S &= 5{,}7825533 \\ S &= 606112^{\text{m}^2},70 \end{aligned}$$

3.^er^ Caso.

200. Datos. $\begin{cases} a = 75^{\text{m}}. \\ b = 92^{\text{m}}. \\ c = 107^{\text{m}}. \end{cases}$

Fórmulas $\begin{cases} r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}; \quad \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a} \\ \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{r}{p-b}; \quad \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{p-c}; \ S = pr. \end{cases}$

Cálculos auxiliares.
$$\left\{\begin{array}{ll} p = 137; & \bar{\mathrm{L}}\, p = \bar{3},8632794 \\ p - a = 62; & \log(p-a) = 1,7923917 \\ p - b = 45; & \log(p-b) = 1,6532125 \\ p - c = 30; & \log(p-c) = 1,4771213 \end{array}\right.$$

$$2 \log r = 2,7860049$$
$$\log r = 1,3930024$$

$$\log r = 1,3930024$$
$$\bar{\mathrm{L}}\,(p-a) = \bar{2},2076083$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{\mathrm{A}}{2} = \bar{1},6006107$$
$$\frac{\mathrm{A}}{2} = 21^\circ\, 44'\, 8''$$
$$\mathrm{A} = 43^\circ\, 28'\, 16''$$

$$\log r = 1,3930024$$
$$\bar{\mathrm{L}}\,(p-b) = \bar{2},3467875$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{\mathrm{B}}{2} = 1,77899\,39$$
$$\frac{\mathrm{B}}{2} = 28^\circ\, 46'\, 44''$$
$$\mathrm{B} = 57^\circ\, 33'\, 28''.$$

$$\log r = 1,3930024$$
$$\bar{\mathrm{L}}\,(p-c) = \bar{2},5228787$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{\mathrm{C}}{2} = \bar{1},9158811$$
$$\frac{\mathrm{C}}{2} = 39^\circ\, 29'\, 8''$$
$$\mathrm{C} = 78^\circ\, 58'\, 16''$$

$$\log p = 2,1367206$$
$$\log r = 1,3930024$$
$$\log \mathrm{S} = 3,5297230$$
$$\mathrm{S} = 3386^{\mathrm{m}^2},2815$$

201. Datos.
$$\left\{\begin{array}{l} a = 543^{\mathrm{m}},90. \\ b = 597^{\mathrm{m}},60. \\ c = 695^{\mathrm{m}},90. \end{array}\right.$$

$$p = 883^{\mathrm{m}},70$$
$$p - a = 339,80$$
$$p - b = 286,10$$
$$p - c = 257,80$$

$$\bar{\mathrm{L}}\, p = \bar{3},0536951$$
$$\log(p-a) = 2,5312234$$
$$\log(p-b) = 2,4565179$$
$$\log(p-c) = 2,4112829$$
$$2 \log r = 4,4527193$$
$$\log r = 2,2263596$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mathrm{A}}{2} = \frac{r}{p-a}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{\mathrm{C}}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

$$\log r = 2{,}2263596$$
$$\bar{\mathrm{L}}\, p - a = \bar{3}{,}4687766$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \bar{1}{,}6951362$$
$$\frac{A}{2} = 26^\circ\, 21'\, 47'',8$$
$$A = 52^\circ\, 43'\, 35'',6$$

$$\log r = 2{,}2263596$$
$$\bar{\mathrm{L}}\, (p - c) = \bar{2}{,}5222787$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1{,}8150767$$
$$\frac{C}{2} = 33^\circ\, 9'\, 15'',9$$
$$C = 66^\circ\, 18'\, 31'',8$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{r}{p - b}.$$

$$\log r = 2{,}2263596$$
$$\bar{\mathrm{L}}\, (p - b) = \bar{3}{,}5434821$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 1{,}7698417$$
$$\frac{B}{2} = 30^\circ\, 28'\, 56'',3$$
$$B = 60^\circ\, 57'\, 52'',6$$

$$S = p\, r$$

$$\log r = 2{,}2263596$$
$$\log p = 2{,}9463049$$
$$\log S = 5{,}1726645$$
$$S = 148821^{m^2},10$$

202. Datos. $\begin{cases} a = 456^{m},48. \\ b = 518^{m},50. \\ c = 592^{m},30. \end{cases}$

$$p = 783^{m},6$$
$$p - a = 387{,}2$$
$$p - b = 265{,}1$$
$$p - c = 191{,}3$$

$$\bar{\mathrm{L}}\, p = \bar{3}{,}1059056$$
$$\log (p - a) = 2{,}5148133$$
$$\log (p - b) = 2{,}4234097$$
$$\log (p - c) = 2{,}2817150$$
$$\log 2r = 4{,}3258436$$
$$\log r = 2{,}1629218$$

$$\log r = 2{,}1629218$$
$$\bar{\mathrm{L}}\, (p - a) = \bar{3}{,}4851867$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \bar{1}{,}6481085$$
$$\frac{A}{2} = 23^\circ\, 58'\, 36'',26$$
$$A = 47^\circ\, 57'\, 12'',52$$

$$\log r = 2{,}1629218$$
$$\bar{\mathrm{L}}\, (p - b) = \bar{3}{,}5765903$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \bar{1}{,}7395121$$
$$\frac{B}{2} = 28^\circ 45'\, 48'',36$$
$$B = 57^\circ 31'\, 36'',72$$

$$\log r = 2{,}1629218$$
$$\overline{\mathrm{L}}\,(p-c) = \bar{3}{,}7182850$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \bar{1}{,}8812068$$
$$\frac{C}{2} = 37^\circ\, 15'\, 35'',38$$
$$C = 74^\circ\, 31'\, 10'',76$$

$$\log r = 2{,}1629218$$
$$\log p = 2{,}8940944$$
$$\log S = 5{,}0570162$$
$$S = 114029^{\mathrm{m}^2},23$$

203. Datos. $\begin{cases} a = 567^{\mathrm{m}},37. \\ b = 419^{\mathrm{m}},85. \\ c = 354^{\mathrm{m}},63. \end{cases}$

$$p = 670{,}925$$
$$p - a = 103{,}555$$
$$p - l = 251{,}075$$
$$p - c = 316{,}295$$

$$\overline{\mathrm{L}}\,p = \bar{3}{,}17332605$$
$$\log (p-a) = 2{,}01517105$$
$$\log (p-b) = 2{,}39980345$$
$$\log (p-c) = 2{,}50009235$$
$$\log 2r = 4{,}08839290$$
$$\log r = 2{,}04419645$$

$$\log r = 2{,}04419645$$
$$\overline{\mathrm{L}}\,(p-a) = \bar{3}{,}98482895$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 0{,}0290234$$
$$\frac{A}{2} = 46^\circ\, 54'\, 47'',6$$
$$A = 93^\circ\, 49'\, 35'',2$$

$$\log r = 2{,}04419645$$
$$\overline{\mathrm{L}}\,(p-b) = \bar{3}{,}60019655$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \bar{1}{,}64439300$$
$$\frac{B}{2} = 23^\circ\, 47'\, 42'',9$$
$$B = 47^\circ\, 35'\, 25'',8$$

$$\log r = 2{,}04419645$$
$$\overline{\mathrm{L}}\,(p-c) = \bar{3}{,}49990765$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \bar{1}{,}54410410$$
$$\frac{C}{2} = 19^\circ\, 17'\, 29'',5$$
$$C = 38^\circ\, 34'\, 59''$$

$$\log r = 2{,}04419645$$
$$\log p = 2{,}82667395$$
$$\log S = 4{,}87087040$$
$$S = 74275^{\mathrm{m}^2},76$$

4.° CASO.

204. Datos. $\begin{cases} a = 105^{m}. \\ b = 110^{m}. \\ A = 58°. \end{cases}$

Fórmulas. $\begin{cases} \operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{a} \\ c = 180° - (A + B) \\ c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}. \end{cases}$

Puesto que tenemos $A < 90°$ y $a < b$, el problema tiene dos soluciones:

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}04139269 \\ \log \operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}9284205 \\ \bar{L} a &= \bar{3}{,}97881069 \\ \hline \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}94862388 \end{aligned}$$

$B' = 62°\ 40'\ 36'',45$; $B'' = 117°\ 19'\ 23'',55$.
$C' = 59°\ 19'\ 23'',55$; $C'' = 4°\ 40'\ 36'',45$.

1.ª SOLUCIÓN.	2.ª SOLUCIÓN.
$\log a = 2{,}0211893$	$\log a = 2{,}0211893$
$\log \operatorname{sen} C' = \bar{1}{,}9345282$	$\log \operatorname{sen} C'' = \bar{2}{,}9113430$
$\bar{L} \operatorname{sen} A = 0{,}0715794$	$\bar{L} \operatorname{sen} A = 0{,}0715794$
$\log c' = 2{,}0272969$	$\log c'' = 1{,}0041117$
$c' = 106^{m},48$	$c'' = 10^{m},095$

$$S = \tfrac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} C.$$

$\bar{L} 2 = \bar{1}{,}69897$	$\bar{L} 2 = \bar{1}{,}69897$
$\log a = 2{,}0211893$	$\log a = 2{,}0211893$
$\log b = 2{,}0413927$	$\log b = 2{,}0413927$
$\log \operatorname{sen} C' = \bar{1}{,}9345282$	$\log \operatorname{sen} C'' = \bar{2}{,}9113430$
$\log S' = 3{,}6960802$	$\log S'' = 2{,}6728950$
$S' = 4966^{m^2},842$	$S'' = 470^{m^2},86$

205. Datos. $\begin{cases} a = 85^{\text{m}},40. \\ c = 38^{\text{m}},85. \\ C = 15^{\circ}\,25' \end{cases}$

Puesto que se tiene $C < 90^{\circ}$ y $c < a$, el problema tiene dos soluciones:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a \operatorname{sen} C}{c},$$

$$\begin{aligned} \log a &= 1,9314579 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1},4246147 \\ \bar{L}\, c &= \bar{2},4106090 \\ \hline \log \operatorname{sen} A &= \bar{1},7666816 \end{aligned}$$

$A' = 35^{\circ}\,45'\,28'',41$; $\quad A'' = 144^{\circ}\,14'\,31'',59$.

$B' = 128^{\circ}\,49'\,31''59$; $\quad B'' = 20^{\circ}\,20'\,28'',41$.

$$b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}.$$

1.ª Solución.

$$\begin{aligned} \log c &= 1,5893910 \\ \log \operatorname{sen} B' &= \bar{1},8915640 \\ \bar{L} \operatorname{sen} C &= 0,5753853 \\ \hline \log b' &= 2,0563403 \\ b' &= 113^{\text{m}},8520 \end{aligned}$$

2.ª Solución.

$$\begin{aligned} \log c &= 1,5893910 \\ \log \operatorname{sen} B'' &= \bar{1},5410927 \\ \bar{L} \operatorname{sen} C &= 0,5753853 \\ \hline \log b'' &= 1,7058690 \\ b'' &= 50^{\text{m}},801 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2} a c \operatorname{sen} B.$$

$$\begin{aligned} \bar{L}\, 2 &= \bar{1},69897 \\ \log a &= 1,9314579 \\ \log c' &= 1,5893910 \\ \log \operatorname{sen} B' &= \bar{1},8915640 \\ \hline \log S' &= 3,1113829 \\ S' &= 1292^{\text{m}^2},2583 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}\, 2 &= \bar{1},69897 \\ \log a &= 1,9314579 \\ \log c'' &= 1,5893910 \\ \log \operatorname{sen} B'' &= \bar{1},5410927 \\ \hline \log S'' &= 2,7609116 \\ S'' &= 576^{\text{m}^2},6490 \end{aligned}$$

206. Datos. $\begin{cases} b = 53^{\text{m}},60. \\ c = 35^{\text{m}},20. \\ B = 71^\circ\ 15'. \end{cases}$

Se tiene $b > c$; hay, pues, una sola solución:

$$\operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} B}{b}.$$

$$\begin{aligned} \log c &= 1{,}5465427 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}9763179 \\ \bar{L}\, b &= \bar{2}{,}2708352 \\ \hline \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}7936958 \end{aligned}$$

$$C = 38^\circ\ 27'\ 8'',71; \qquad A = 79^\circ\ 17'\ 51'',29.$$

$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C};$$

$$\begin{aligned} \log c &= 1{,}5465427 \\ \log \operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}9738001 \\ \bar{L} \operatorname{sen} C &= 0{,}2063042 \\ \hline \log a &= 1{,}7266470 \end{aligned}$$

$$a = 53^{\text{m}},29016$$

$$S = {}^1\!/_2\, bc \operatorname{sen} A;$$

$$\begin{aligned} \bar{L}\, 2 &= \bar{1}{,}69897 \\ \log b &= 1{,}7291648 \\ \log c &= 1{,}5465427 \\ \log \operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}9738001 \\ \hline \log S &= 2{,}9484776 \end{aligned}$$

$$S = 888^{\text{m}^2},1322$$

207. Datos. $\begin{cases} a = 65792^{\text{m}},60. \\ b = 98045^{\text{m}},60. \\ A = 28^\circ\ 51'\ 48'',6. \end{cases}$

Puesto que se tiene $a < b$, hay dos soluciones:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}.$$

$$\begin{aligned} \log b &= 4{,}9914281 \\ \log \operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}6836995 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= \bar{5}{,}1818229 \\ \hline \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}8569505 \end{aligned}$$

$$B' = 46^\circ\ 0'\ 8'',10; \qquad B'' = 133^\circ\ 59'\ 52'';$$

luego $\quad C' = 105^\circ\, 8'\, 3'',30; \quad C'' = 17^\circ\, 8'\, 19'',4;$

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B};$$

1.ª Solución.

$$\begin{aligned} \log b &= 4,9914281 \\ \log \operatorname{sen} C' &= \bar{1},9846698 \\ \bar{L} \operatorname{sen} B' &= 0,1430495 \\ \hline \log c' &= 5,1191474 \\ c' &= 131567^{m},12 \end{aligned}$$

2.ª Solución.

$$\begin{aligned} \log b &= 4,9914281 \\ \log \operatorname{sen} C'' &= \bar{1},4693597 \\ \bar{L} \operatorname{sen} B'' &= 0,1430495 \\ \hline \log c'' &= 4,6038373 \\ c'' &= 40164^{m},04 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} C.$$

$$\begin{aligned} \bar{L}\, 2 &= \bar{1},69897 \\ \log a &= 4,8181771 \\ \log b &= 4,9914281 \\ \log \operatorname{sen} C' &= \bar{1},9846698 \\ \hline \log S' &= 9,4932450 \\ S' &= 3113472000^{m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{L}\, 2 &= \bar{1},69897 \\ \log a &= 4,8181771 \\ \log b &= 4,9914281 \\ \log \operatorname{sen} C'' &= \bar{1},4693597 \\ \hline \log S'' &= 8,9779349 \\ S'' &= 950462700^{m^2} \end{aligned}$$

208. Datos. $\begin{cases} A = 123^\circ. \\ a = 181^{m},60. \\ b - c = 29^{m},54. \end{cases}$

De las razones iguales

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$

se deduce:
$$\frac{b-c}{\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A};$$

luego

$$\frac{b-c}{a} \quad \text{ó} \quad \frac{d}{a} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B-C) \cos \frac{1}{2}(B+C)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A},$$

y puesto que

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A = \cos\frac{1}{2}(B + C),$$

$$\frac{d}{a} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B - C)}{\cos\frac{1}{2}A}; \quad \operatorname{sen}\frac{1}{2}(B - C) = \frac{d}{a}\cos\frac{1}{2}A.$$

$$\begin{aligned} \log d &= 1{,}4704105 \\ \log\cos\frac{1}{2}A &= \bar{1}{,}6786629 \\ \bar{L}a &= \bar{3}{,}7408842 \\ \hline \log\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B - C) &= \bar{2}{,}8899576 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{2}(B - C) = 4^\circ\, 27' & B = 32^\circ\, 57' \\ \frac{1}{2}(B + C) = 28^\circ\, 30' & C = 24^\circ\, 3' \end{array}$$

(Para el resto del problema, véase el núm. 190, cuyos datos son idénticos.)

209. Datos. $\begin{cases} A = 58^\circ. \\ a = 105^{\mathrm{m}}. \\ b + c = 216^{\mathrm{m}},50. \end{cases}$

De las razones

$$\frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} = \frac{a}{\operatorname{sen}A}$$

se deduce, como en el problema anterior,

$$\cos\frac{1}{2}(B - C) = \frac{s\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}{a}.$$

$$\begin{aligned} \log s &= 2{,}3354579 \\ \log\operatorname{sen}\frac{A}{2} &= \bar{1}{,}6855712 \\ \bar{L}a &= \bar{3}{,}9788107 \\ \hline \log\cos\frac{1}{2}(B - C) &= \bar{1}{,}9998398 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}(B - C) = 1^\circ\, 34'$	$B = 62^\circ\, 34'$
$\frac{1}{2}(B + C) = 61^\circ$	$C = 59^\circ\, 26'$

Se termina el problema como en el primer caso, y se obtiene:

$$b = 110^{m}\,; \quad c = 106^{m},50; \quad S = 4967^{m^2},362.$$

CAPÍTULO III

Cálculo de los elementos secundarios de los triángulos.

210. Tenemos: $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$, ó sea $\operatorname{tg}^2 B = \frac{b^2}{c^2}$;

pero los cuadrados de los catetos son entre si, como las proyecciones de dichos catetos sobre la hipotenusa; de donde resulta, si representamos por b' y c' las proyecciones:

$$\operatorname{tg}^2 B = \frac{b^2}{c^2} = \frac{b'}{c'},$$

ó sea:

$$2 \log \operatorname{tg} B = \log b' - \log c'$$

$$\begin{aligned} \log b' &= 0,6926707 \\ \log c' &= 0,5614592 \\ \hline 2 \log \operatorname{tg} B &= 0,1312115 \\ \log \operatorname{tg} B &= 0,0656057 \end{aligned}$$

$$B = 49^\circ\, 18'\, 40'',54\,; \qquad C = 40^\circ\, 41'\, 19'',46.$$

211. Los catetos son proporcionales á los segmentos determinados sobre la hipotenusa por la bisectriz:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \frac{4,319}{5,238};$$

de donde $B = 39^\circ\,30'\,26'',4$; $C = 50^\circ\,29'\,33'',6$.

212. La superficie de los triángulos se obtiene por la siguiente fórmula (1.er caso).

$$S = \frac{1}{2}\, a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

de donde $a^2 = \dfrac{2S \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$;

de igual modo $b^2 = \dfrac{2S \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}$ y $c^2 = \dfrac{2S \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} A &= \bar{2},4155809 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{2},2423376 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{3},9328061 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 2S &= 1,3010300 \\ \log \operatorname{sen} A &= \bar{2},4155809 \\ \bar{L} \operatorname{sen} B &= 1,7576624 \\ \bar{L} \operatorname{sen} C &= 2,0671939 \\ \hline 2 \log a &= 3,5414672 \\ \log a &= 1,7707336 \\ a &= 58^{m},9839 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log 2S &= 1,3010300 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{2},2423376 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 1,5844191 \\ \bar{L} \operatorname{sen} C &= 2,0671939 \\ \hline 2 \log b &= 3,1949806 \\ \log b &= 1,5974903 \\ b &= 39^{m},581 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 2S &= 1,3010300 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{3},9328061 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 1,5844191 \\ \bar{L} \operatorname{sen} B &= 1,7576624 \\ \hline 2 \log c &= 2,5759176 \\ \log c &= 1,2879588 \\ c &= 19^{m},407 \end{aligned}$$

213. $C = 90^\circ - B = 51^\circ\,8'\,40''$.

De la fórmula $S = \dfrac{1}{2}\, a^2 \operatorname{sen} B \cos B$ se deduce:

$$a = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{S}}{\operatorname{sen} \mathrm{B} \cos \mathrm{B}}}$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30103 \\ \log \mathrm{S} &= 4{,}9121071 \\ \overline{\mathrm{L}} \operatorname{sen} \mathrm{B} &= 0{,}2024837 \\ \overline{\mathrm{L}} \cos \mathrm{B} &= 0{,}1086131 \\ \hline 2 \log a &= 5{,}5242339 \end{aligned}$$

$$\log a = 2{,}7621169; \quad a = 578^{\mathrm{m}}{,}25165;$$

$$b = a \operatorname{sen} \mathrm{B}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}7621169 \\ \log \operatorname{sen} \mathrm{B} &= \bar{1}{,}7975163 \\ \hline \log b &= 2{,}5596332 \\ b &= 362^{\mathrm{m}}{,}7715 \end{aligned}$$

$$c = a \cos \mathrm{B}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}7621169 \\ \log \cos \mathrm{B} &= \bar{1}{,}8913869 \\ \hline \log c &= 2{,}6535038 \\ c &= 450^{\mathrm{m}}{,}3019 \end{aligned}$$

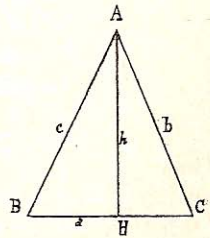
214. $$\mathrm{S} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \mathrm{C}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{L}}\, 2 &= 1{,}69897 \\ \log a &= 1{,}9395193 \\ \log b &= 1{,}8573325 \\ \log \operatorname{sen} \mathrm{C} &= \bar{1}{,}7619576 \\ \hline \log \mathrm{S} &= 3{,}2577794 \\ \mathrm{S} &= 1810^{\mathrm{m}^2}{,}4204 \end{aligned}$$

Resp. 18 áreas, 10 centiáreas 4204.

215. $$\mathrm{S} = \mathrm{AD} \,.\, \mathrm{CD} = 4h^2 \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{C} &= 23^\circ\, 42'\, 9'' \\ 2 \log h &= 4{,}4929972 \\ \log \operatorname{tg} \frac{\mathrm{C}}{2} &= \bar{1}{,}6424857 \\ \hline \log \mathrm{S} &= 4{,}1355829 \\ \mathrm{S} &= 13661^{\mathrm{m}^2}{,}012 \end{aligned}$$



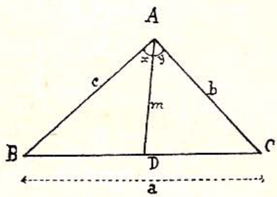
216. Las fórmulas del tercer caso de resolución de los triángulos cualesquiera permiten calcular el ángulo B.

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=\sqrt{\frac{11\times 29}{71\times 31}}=\sqrt{\frac{319}{2201}}$$

$$\log 319 = 2{,}5037907$$
$$\bar{L}\,2201 = \bar{4}{,}6573800$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\bar{1}{,}1611707$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\bar{1}{,}5805853$$



$$\frac{B}{2}=20^\circ\,50'\,30'',97; \qquad B=41^\circ\,41'\,1''94.$$

En el triángulo A B D tenemos la relación

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}D}=\frac{BD}{\operatorname{sen}x} \quad \text{ó} \quad \frac{AB-BD}{AB+BD}=\frac{\operatorname{sen}D-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}D+\operatorname{sen}x}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(D-x)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(D+x)}$$

ó también $$\frac{12}{72}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(D-x)}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}=\frac{1}{6}$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(D-x)=\frac{1}{6}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$$

$$\log\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=0{,}4194147$$
$$\bar{L}\,6=\bar{1}{,}2218487$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(D-x)=\bar{1}{,}6412634$$

$$\frac{1}{2}(D-x)=23^\circ\,38'\,35'',52 \qquad D=92^\circ\,48'\;\;4'',55$$

$$\frac{1}{2}(D+x)=69^\circ\;\;9'\,29'',63 \qquad ADC=87^\circ\,11'\,55'',45$$

$$AD=\frac{DC\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}x}=27^{m},964264.$$

217. $$\mathrm{R} = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \mathrm{A}}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}5492486 \\ \bar{\mathrm{L}}\, 2 &= \bar{1}{,}69897 \\ \bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} \mathrm{A} &= 0{,}0823349 \\ \hline \log \mathrm{R} &= 2{,}3305535 \end{aligned} \qquad \mathrm{R} = 214^{\mathrm{m}}{,}0591.$$

218. De la fórmula $\mathrm{S} = \frac{bh}{2}$ se deduce, reemplazando h por su valor $h = \frac{b}{2} \operatorname{cotg} \frac{\mathrm{B}}{2}$:

$$\mathrm{S} = \frac{b^2}{4} \operatorname{cotg} \frac{\mathrm{B}}{2}; \quad \text{de donde} \quad \operatorname{cotg} \frac{\mathrm{B}}{2} = \frac{4\mathrm{S}}{b^2};$$

$$\begin{aligned} \log 4 &= 0{,}60206 \\ \log \mathrm{S} &= 6{,}7682155 \\ 2\,\bar{\mathrm{L}} b &= \bar{8}{,}9236988 \\ \hline \log \operatorname{cotg} \frac{\mathrm{B}}{2} &= 0{,}2939743 \\ \frac{\mathrm{B}}{2} &= 26^{\circ}\, 56'\, 21'',1. \\ \mathrm{B} &= 53^{\circ}\, 52'\, 42'',2. \end{aligned}$$

219. La superficie total S es igual á la suma de las superficies $\frac{1}{2} h^2 \operatorname{tg} \alpha$ y $\frac{1}{2} h^2 \operatorname{tg} \beta$ de los triángulos parciales; luego

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} h^2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} h^2 \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} h^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) =$$

$$= \frac{h^2 \operatorname{sen} (\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta}.$$

$$\begin{aligned} 2 \log h &= 7{,}3236400 \\ \log \operatorname{sen} (\alpha + \beta) &= \bar{1}{,}5918780 \\ \bar{\mathrm{L}}\, 2 &= \bar{1}{,}6989700 \\ \bar{\mathrm{L}} \cos \alpha &= 0{,}0150562 \\ \bar{\mathrm{L}} \cos \beta &= 0{,}0042472 \\ \hline \log \mathrm{S} &= 6{,}6337914 \\ \mathrm{S} &= 4303199^{\mathrm{m}^2} \end{aligned}$$

220. Sea x la cantidad que deseamos calcular.

Tenemos: $b = c \operatorname{tg} \mathrm{B}$ y $b + 20 = c \operatorname{tg} (\mathrm{B} + x)$;

de donde resulta: $\operatorname{tg}(B + x) = \dfrac{b + 20}{c}$.

$\log c = 4{,}5419338$	$\log(b + 20) = 4{,}5967329$
$\log \operatorname{tg} B = 0{,}0545792$	$\bar{L}\, c = \bar{5}{,}4580662$
$\log b = 4{,}5965130$	$\log \operatorname{tg}(B + x) = 0{,}0547991$
$b = 39492{,}36$	$B + x = 48^\circ\ 36'\ 18'',8$
$b + 20 = 39512{,}36$	$x = 0^\circ\ 0'\ 51'',8$

221. Sea x la altura.

$$S = \frac{1}{2}\, a x \quad \text{y} \quad S = \frac{1}{2}\, a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

$$a x = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

$$x = \frac{a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

$$\begin{aligned} \log a &= 3{,}5351143 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}9775673 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}8671422 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 0{,}3854005 \\ \hline \log x &= 3{,}7652243 \\ x &= 5824^{\text{m}},04 \end{aligned}$$

222. En el triángulo OBC tenemos la relación:

$$\frac{OB}{\operatorname{sen} \frac{C}{2}} = \frac{BC}{\operatorname{sen} BOC}.$$

Pero

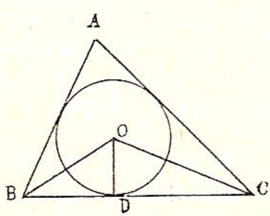
$$BOC = 180^\circ - \left(\frac{B + C}{2}\right);$$

luego

$$\operatorname{sen} BOC = \operatorname{sen} \frac{B + C}{2};$$

de donde resulta:

$$OB = a \frac{\operatorname{sen} \frac{C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{B + C}{2}}.$$



$$\frac{1}{2}\,B = 32^\circ\,22'\,44'',3 \qquad \log a = 3{,}9255478$$
$$\frac{1}{2}\,C = 21^\circ\,12'\,38'',5 \qquad \log \operatorname{sen}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}5584669$$
$$\frac{1}{2}\,(B+C) = 53^\circ\,35'\,22'',8 \qquad \bar{L}\operatorname{sen}\frac{B+C}{2} = 0{,}0943192$$
$$\log OB = 3{,}5783339$$
$$OB = 3787^{m},336$$

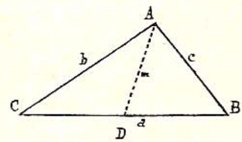
En el triángulo OBD tenemos:

$$OD = r = OB\operatorname{sen}\frac{B}{2}.$$

$$\log OB = 3{,}5783339$$
$$\log\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \bar{1}{,}7287732$$
$$\log r = 3{,}3071071$$
$$r = 2028^{m},183$$

223. Sean x é y las dos partes del ángulo A; tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} B} = \frac{\frac{1}{2}a}{m}; \quad \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} C} = \frac{\frac{1}{2}a}{m};$$



de donde $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} C}$;

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C}.$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-y)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)};$$

luego $\quad \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)}.$

Pero $\quad \dfrac{1}{2}(x+y) = \dfrac{1}{2}A \quad$ y $\quad \operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}(B+C) = \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}A$;

por consiguiente, $\quad \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tg}^2\dfrac{1}{2}A.\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(B-C).$

$$\frac{1}{2}A = 49^\circ\, 54'\, 53'',6; \qquad 2 \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} A = 0{,}1497534$$

$$\frac{1}{2}(B - C) = 11^\circ\, 9'\, 31'',4; \qquad \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B - C) = \bar{1}{,}2950319$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y) = \bar{1}{,}4447853$$

$$\frac{1}{2}(x - y) = 15^\circ\, 33'\, 40'',17$$

$$\frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}A = 49^\circ\, 54'\, 53'',6$$

$$x = 65^\circ\, 28'\, 33'',77$$

224. $C = 180^\circ - (A + B) = 38^\circ\, 45'\, 12'',6.$

De las siguientes fórmulas, relativas al tercer caso de resolución de los triángulos:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

se deduce, multiplicándolas dos á dos:

$$\frac{p-c}{p} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B,$$

$$\frac{p-b}{p} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} C,$$

$$\frac{p-a}{p} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C.$$

Resolviendo estas igualdades por logaritmos, se obtienen los valores de $(p-a)$, $(p-b)$ y $(p-c)$:

$$p = 627{,}1725; \quad \frac{1}{2} A = 49^\circ\, 17'\, 44'',3;$$

$$\frac{1}{2}B = 21^\circ 19' 39'',4 \qquad \frac{1}{2}C = 19^\circ 22' 36'',3$$

$$\begin{aligned} \log p &= 2,7973871 \\ \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}B &= \bar{1},5915532 \\ \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}C &= \bar{1},5461718 \\ \hline \log(p-a) &= 1,9351121 \\ p-a &= 86^{\mathrm{m}},1216 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log p &= 2,7973871 \\ \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}A &= 0,0653662 \\ \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}C &= \bar{1},5461718 \\ \hline \log(p-b) &= 2,4089251 \\ p-b &= 256^{\mathrm{m}},4042 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log p &= 2,7973871 \\ \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}A &= 0,0653662 \\ \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}B &= \bar{1},5915532 \\ \hline \log(p-c) &= 2,4543065 \\ p-c &= 284^{\mathrm{m}},2468 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 627^{\mathrm{m}},1725 - 86^{\mathrm{m}},1216 = \\ &= 541^{\mathrm{m}},0509 \\ b &= 627^{\mathrm{m}},1725 - 256^{\mathrm{m}},4042 = \\ &= 370^{\mathrm{m}},7683 \\ c &= 627^{\mathrm{m}},1725 - 284^{\mathrm{m}},2468 = \\ &= 342^{\mathrm{m}},9257 \end{aligned}$$

225. Este problema puede resolverse de la misma manera que el anterior; daremos, sin embargo, una solución diferente.

$$C = 180^\circ - (A + B) = 81^\circ 59' 15''.$$

Las razones iguales $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$ dan las siguientes:

$$\frac{2p}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Transformemos en producto el denominador

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C.$$

Puesto que $\qquad A = 180 - (B + C)$

resulta $\qquad \operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B + C)$

y dicho denominador puede escribirse:

$$\operatorname{sen}(B + C) + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2} + $$
$$+ 2\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

Y, poniendo $2\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}$ en factor común,

$$2\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right)=$$
$$=2\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\cdot 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Tenemos, pues,

$$\frac{2p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C};$$

$$\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{a}{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{b}{2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=$$
$$=\frac{c}{2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

Después de simplificar se obtiene:

$$a=\frac{p\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};\qquad b=\frac{p\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}};$$
$$c=\frac{p\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

$$p=0{,}60 \qquad \frac{A}{2}=17^\circ\,38'\,37'',5$$
$$\frac{B}{2}=31^\circ\,21'\,45'' \qquad \frac{C}{2}=40^\circ\,59'\,37'',5$$

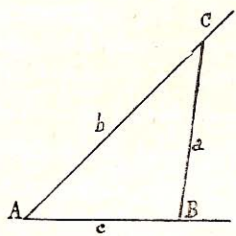
$$\begin{array}{rl|rl}
\log p = & \bar{1},7781513 & \log p = & \bar{1},7781513 \\
\log\operatorname{sen}\frac{B}{2} = & \bar{1},4815825 & \log\operatorname{sen}\frac{B}{2} = & \bar{1},7163798 \\
\bar{L}\cos\frac{B}{2} = & 0,0685972 & \bar{L}\cos\frac{A}{2} = & 0,0209255 \\
\bar{L}\cos\frac{C}{2} = & 0,1221789 & \bar{L}\cos\frac{C}{2} = & 0,1221789 \\
\hline
\log a = & \bar{1},4505099 & \log b = & \bar{1},6376355 \\
a = & 0,2821694 & b = & 0,4341457
\end{array}$$

$$\log p = \bar{1},7781513$$
$$\log \operatorname{sen} \frac{C}{2} = \bar{1},8168884$$
$$\bar{L} \cos \frac{A}{2} = 0,0209255$$
$$\bar{L} \cos \frac{B}{2} = 0,0685972$$
$$\log c = \bar{1},6845624$$
$$c = 0,4836848$$

226. La cuestión se reduce á calcular B y b en un triángulo conociendo A, c y S.

De $S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$ se deduce:

$$b = \frac{2S}{c \operatorname{sen} A}.$$



$$\log 2 = 0,30103$$
$$\log S = 3,8147136$$
$$\bar{L} c = \bar{3},9706162$$
$$\bar{L} \operatorname{sen} A = 0,1556017$$
$$\log b = 2,2419615$$
$$b = 174^{m},5667$$

El segundo caso de resolución de los triángulos da la fórmula
$$\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2};$$

$$b - c = 67,5667; \quad b + c = 281,5667;$$

$$\log (b - c) = 1,8297327$$
$$\bar{L} (b + c) = \bar{3},5504186$$
$$\log \operatorname{cotg} \frac{A}{2} = 0,3899280$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \bar{1},7700793$$

$$\frac{B - C}{2} = 30^\circ\, 29'\, 45''; \quad \frac{B + C}{2} = 67^\circ\, 49'\, 54'';$$

luego
$$B = 98^\circ\, 19'\, 39''.$$

227. Es de notar que los lados del triángulo propuesto son proporcionales á los números 3, 4 y 5; dicho triángulo es, pues, rectángulo, y el radio del círculo circunscrito es igual á la mitad de la hipotenusa, ó sea $207^m,50$.

Vamos á dar una solución general del problema.

De la fórmula conocida $abc = 4\,RS$ se deduce:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}};$$

$$p = 498; \qquad p - a = 249;$$

$$p - b = 166; \qquad p - c = 83.$$

CÁLCULO DEL DENOMINADOR.

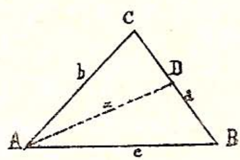
$$\begin{aligned} \log p &= 2{,}6972293 \\ \log(p-a) &= 2{,}3961993 \\ \log(p-b) &= 2{,}2201081 \\ \log(p-c) &= 1{,}9190781 \\ \hline 2\log \text{del radical} &= 9{,}2326148 \\ \log \text{del id.} &= 4{,}6163074 \\ \log 4 &= 0{,}60206 \\ \hline \log 4S &= 5{,}2183674 \end{aligned}$$

CÁLCULO DEL RADIO.

$$\begin{aligned} \log a &= 2{,}3961993 \\ \log b &= 2{,}5211381 \\ \log c &= 2{,}6180481 \\ \overline{L}4S &= \overline{6},7816326 \\ \log R &= 2{,}3170181 \\ R &= 207^m{,}50 \end{aligned}$$

228. Sea x la bisectriz del ángulo A.

Los triángulos A O B y A O C dan:



$$\overline{BO}^2 = x^2 + c^2 - 2cx\cos\frac{A}{2};$$

$$\overline{OC}^2 = x^2 + b^2 - 2bx\cos\frac{A}{2}.$$

Dividamos ordenadamente, teniendo en cuenta que

$$\frac{BO}{OC} = \frac{c}{b};$$

resulta:

$$\frac{\overline{BO}^2}{\overline{OC}^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{x^2 + c^2 - 2cx\cos\frac{A}{2}}{x^2 + b^2 - 2bx\cos\frac{A}{2}};$$

de donde se deduce, después de efectuar las simplificaciones:

$$(c+b)x = 2bc\cos\frac{A}{2};$$

$$x = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{c+b};$$

$$\frac{A}{2} = 23^\circ\,14'\,48'',5; \quad c+b = 42{,}634.$$

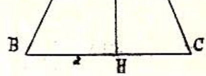
$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}30103\\
\log b &= 1{,}2882269\\
\log c &= 1{,}3657687\\
\log\cos\frac{A}{2} &= \bar{1}{,}9632273\\
\bar{L}(c+b) &= \bar{2}{,}3702439\\
\hline
\log x &= 1{,}2884968\\
x &= 19^{m}{,}43107
\end{aligned}$$

NOTA. Se podría obtener la fórmula

$$x = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

por el procedimiento señalado en nuestros ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA, libro del alum., núm. 119.

229. $A = 180^\circ - (B+C) = 36^\circ\,25'\,20''$.



Los triángulos rectángulos AHC y AHB dan:

$$h = b\,\mathrm{sen}\,C; \quad h = c\,\mathrm{sen}\,B;$$

por consiguiente,

$$b = \frac{h}{\mathrm{sen}\,C}; \quad c = \frac{h}{\mathrm{sen}\,B}.$$

$$\begin{aligned}
\log h &= 2{,}1708189\\
\bar{L}\,\mathrm{sen}\,C &= 0{,}0147738\\
\hline
\log b &= 2{,}1855297\\
b &= 153^{m}{,}31785
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log h &= 2{,}1708189\\
\bar{L}\,\mathrm{sen}\,B &= 0{,}0315065\\
\hline
\log b &= 2{,}2023254\\
c &= 159^{m}{,}3402
\end{aligned}$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}1855927 \\ \log \operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}7735897 \\ \bar{L} \operatorname{sen} B &= 0{,}0315065 \\ \hline \log a &= 1{,}9906889 \end{aligned}$$

$$a = 97^{\mathrm{m}},87887$$

230. La solución general de este problema ha sido dada en el problema núm. 216. El triángulo propuesto es rectángulo en A puesto que $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$; la mediana es igual á la mitad de la hipotenusa, ó sea $1292^{\mathrm{m}},50$.

231. La bisectriz AI da la relación

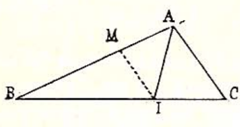
$$\frac{BI}{CI} = \frac{AB}{AC}; \quad \text{ó sea} \quad \frac{BI}{BC} = \frac{AB}{AB + AC};$$

$$BI = \frac{6 \times 5}{7} = \frac{30}{7}; \quad CI = \frac{12}{7}.$$

Asimismo se obtiene IM por la proporción

$$\frac{IM}{AC} = \frac{BI}{BC};$$

de donde $IM = \frac{10}{7}$.



Los dos triángulos ABI y ACI tienen la misma altura; sus superficies serán proporcionales á sus bases BI y CI; se dividirá, pues, la superficie total en partes proporcionales á

$$\frac{30}{7} \text{ y } \frac{12}{7};$$

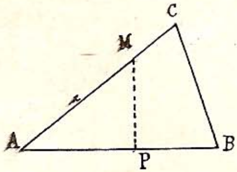
Superficie $ABC = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Superficie $ABI = 3^{\mathrm{m}^2}, 3455$.
Superficie $ACI = 1^{\mathrm{m}^2}, 3382$.

232. Sea s la superficie del triángulo AMP; éste tiene que ser la mitad de ABC;

luego $$s = \frac{1}{4} ab \operatorname{sen} C.$$

En el triángulo rectángulo AMP, tenemos:

$$s = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} A \cos A;$$



luego $$\frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} A \cos A = \frac{1}{4} ab \operatorname{sen} c;$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \frac{ab \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} A \cos A};$$

hay, pues, que calcular, **ante** todo, el ángulo A.

La resolución del **2.º caso** de los triángulos, da la fórmula:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - A) = \frac{b-a}{b+a} \operatorname{cotg} \frac{c}{2};$$

$b - a = 88{,}071$; $b + a = 266{,}499$

$\log (b - a) = 1{,}9448329$

$\bar{L} (b + a) = \bar{3}{,}5743043$

$\log \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C = 0{,}1614862$

$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (B - A) = \bar{1}{,}6806234$

$\frac{1}{2} (B - A) = 25^\circ\, 36'\, 33'',20$

$\frac{1}{2} (B + A) = 55^\circ\, 24'\, 54''$

$A = 29^\circ\, 48'\, 20'',80$

$\log a = 1{,}9504330$

$\log b = 2{,}2486719$

$\log \operatorname{sen} C = \bar{1}{,}9706442$

$\bar{L} 2 = \bar{1}{,}69897$

$\bar{L} \operatorname{sen} A = 0{,}3035899$

$\bar{L} \cos A = 0{,}0616228$

$2 \log x = 4{,}2339318$

$\log x = 2{,}1169659$

$x = 130^{m}{,}9079$

233. $p = 1753{,}06$

$p - a = 350{,}612$

$p - b = 876{,}53$

$p - c = 525{,}918$

$\bar{L} p = \bar{4}{,}7562032$

$\log p - a = 2{,}5448268$

$\log (p - b = 2{,}9427668$

$\log (p - c) = 2{,}7209180$

$2 \log r = 4{,}9647148$

$\log r = 2{,}4823574$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{r}{p - a} \qquad \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \frac{r}{p - b}$$

$$\begin{aligned} \log r &= 2{,}4823574 \\ \operatorname{colog}(p-a) &= \bar{3}{,}4551732 \\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}A &= \bar{1}{,}9375306 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}A = 40^\circ\,53'\,36'',22$$

$$A = 81^\circ\,47'\,12'',44$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C = \frac{r}{p-c}$$

$$\begin{aligned} \log r &= 2{,}4823574 \\ \bar{L}(p-c) &= \bar{3}{,}2790820 \\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}C &= \bar{1}{,}7614394 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}C = 30^\circ;\ C = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \log r &= 2{,}4823574 \\ \bar{L}(p-b) &= \bar{3}{,}0572332 \\ \hline \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}B &= \bar{1}{,}5395906 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}B = 19^\circ\ \ 6'\,23'',78$$

$$B = 38^\circ\,12'\,47'',56$$

$$S = pr$$

$$\begin{aligned} \log p &= 3{,}2437968 \\ \log r &= 2{,}4823574 \\ \hline \log S &= 5{,}7261542 \end{aligned}$$

$$S = 53^{\text{Ha}}\,22^{\text{a}}\,97^{\text{ca}}$$

La superficie comprendida entre los círculos circunscrito é inscrito de radios R y r, es igual á

$$\pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r).$$

De la fórmula $\quad \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$

se deduce $\quad R = \dfrac{c}{2\operatorname{sen} C} = \dfrac{c}{\sqrt{3}},$

luego $R = 708{,}491.$

Tenemos ya $\log r = 2{,}4823574$; de donde $r = 303{,}639$.

$$R + r = 1012{,}130; \qquad R - r = 404{,}852.$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0{,}4971498 \\ \log(R - r) &= 2{,}6072963 \\ \log(R + r) &= 3{,}0052363 \\ \hline \log S' &= 6{,}1096824 \end{aligned}$$

$$S' = 128^{\text{Ha}}\,73^{\text{a}}\,08^{\text{ca}}$$

234. $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C;$$

$$a+b=5549{,}17;\quad a-b=3582{,}27;\quad \frac{1}{2}C=37^\circ\,41'\,57''.$$

$$\begin{aligned}\log(a-b)&=3{,}5541483\\ \overline{L}(a+b)&=\overline{4},2557719\\ \log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C&=0{,}1118965\\ \hline \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)&=\overline{1},9218267\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(A-B)=39^\circ\,52'\,15'',537 \qquad A=92^\circ\,10'\,18'',537$$

$$\frac{1}{2}(A+B)=52^\circ\,18'\,3'' \qquad B=12^\circ\,25'\,47'',463$$

Las igualdades $\dfrac{a}{\operatorname{sen}A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen}B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen}C}$

dan: $$\frac{a+b}{c}=\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}=\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

y, puesto que $\dfrac{A+B}{2}$ es complemento de $\dfrac{C}{2}$, resulta:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2};\quad \text{de donde}\quad c=\frac{(a+b)\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}.$$

$$\begin{aligned}\log(a+b)&=3{,}7442281\\ \log\operatorname{sen}\frac{C}{2}&=\overline{1},7864075\\ \overline{L}\cos\frac{1}{2}(A-B)&=0{,}1149273\\ \hline \log c&=3{,}6455629\\ c&=4421^{m},43\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}C\\ \log a&=3{,}6595093\\ \log b&=2{,}9927523\\ \overline{L}2&=\overline{1},69897\\ \hline \log S&=6{,}3369732\end{aligned}$$

$$S=217^{Ha}\,25^{a}\,67^{ca}.$$

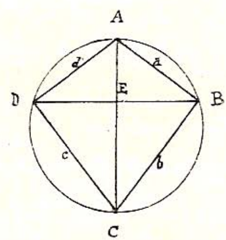
El radio del círculo ex inscrito en el ángulo C es igual á

$$\frac{S}{p-c};$$

$$p = 4985{,}30; \quad p - c = 563{,}87;$$

$$\begin{aligned} \log S &= 6{,}3369732 \\ \overline{\mathrm{L}}\,(p-c) &= \bar{3}{,}2488210 \\ \hline \log r &= 3{,}5857942 \\ r &= 3852^{\mathrm{m}}{,}96 \end{aligned}$$

235. 1.ᴱᴿ Método. — Todos los elementos por calcular pueden determinarse por medio de las fórmulas establecidas para el cuadrilátero inscriptible (Elementos de Trigonometría, por G. M. Bruño, núm. 127 y siguientes).



Tenemos:

$$p = 7; \quad p - a = p - d = 4;$$

$$p - c = p - b = 3.$$

1.° $$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{4 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 3} = 12.$$

2.° $$S = pr; \qquad \text{luego } r = \frac{S}{p} = \frac{12}{7}.$$

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{25 \,.\, 24 \,.\, 24}{4 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 3}} = \frac{5}{2}.$$

3.° $$BD = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} = \sqrt{\frac{24 \,.\, 24}{25}} = \frac{24}{5} = 4{,}80.$$

$$AC = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}} = \sqrt{\frac{25 \,.\, 24}{24}} = 5.$$

4.° Los triángulos ADC y ABC, cuyos lados son iguales á 3, 4 y 5, son rectángulos;

luego $\quad \operatorname{tg} \mathrm{DAC} = \frac{c}{d} = \frac{4}{3}; \qquad \operatorname{tg} \mathrm{DCA} = \frac{d}{c} = \frac{3}{4}.$

Se ve también en la figura que $\mathrm{ABD} = \mathrm{DCA}$ y que $\mathrm{CBD} = \mathrm{DCA}$.

2.° MÉTODO.—Siendo el cuadrilátero á la vez inscriptible (por hipótesis) y circunscriptible (puesto que $a + c = b + d$), la mayor diagonal AC lo divide en dos triángulos rectángulos iguales, cuyos catetos son 3 y 4; luego

$$\mathrm{AC} = 5; \quad \mathrm{BD} = 2\,\mathrm{DE}$$

$$\mathrm{EC} = \frac{\overline{\mathrm{DC}}^2}{\mathrm{AC}} = \frac{16}{5}; \qquad \mathrm{AE} = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5};$$

luego $\quad \mathrm{DE} = \sqrt{\mathrm{AE}\,.\,\mathrm{EC}} = \sqrt{\frac{16}{5} \times \frac{9}{5}} = \frac{12}{5};$

$$\mathrm{BD} = \frac{24}{5} = 4{,}80.$$

Las tangentes son $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$; la superficie es igual al duplo de ADC, ó sea $3 \times 4 = 12^{\mathrm{m}}$.

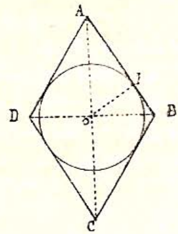
El radio del círculo circunscrito es igual á la mitad de la hipotenusa común, ó sea $\frac{5}{2}$ ..... etc.

236. Sean a y b las diagonales, y α el ángulo que forman; tenemos: $\quad \mathrm{S} = \frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} \alpha = ab \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$

$$\begin{aligned}
\log a &= 2{,}4702856\\
\log b &= 2{,}4971495\\
\log \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} &= \bar{1}{,}8494355\\
\log \cos \frac{\alpha}{2} &= \bar{1}{,}8495346\\
\hline
\log \mathrm{S} &= 4{,}6664052\\
\mathrm{S} &= 46387^{\mathrm{m}^2}{,}94
\end{aligned}$$

237. Sea a el lado del rombo y r el radio del círculo inscrito. La superficie total $S = 2ar$; la superficie del triángulo ACB, igual á $\frac{1}{2}ar$, puede escribirse $\frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen} A \cos A$; luego

$$a = \frac{r}{\operatorname{sen} A \cos A} \quad \text{y} \quad S = \frac{2r^2}{\operatorname{sen} A \cos A}.$$

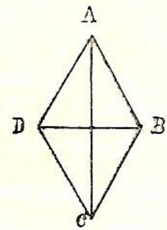


$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30103 \\ 2 \log r &= 3{,}6650178 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 0{,}4319980 \\ \bar{L} \cos A &= 0{,}0319378 \\ \hline \log S &= 4{,}4299836 \\ S &= 26914^{m^2}{,}32 \end{aligned}$$

238. Sea BD la diagonal cuya longitud es $92^{m},355$; se tiene:

$$BD = 2\,BA \operatorname{sen} \frac{1}{2} A;$$

de donde
$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \frac{BD}{2\,BA}.$$



2 BA es igual al semiperímetro.

$$\begin{aligned} \log BD &= 1{,}9654604 \\ \bar{L}\, 2\,BA &= \bar{3}{,}3753607 \\ \hline \log \operatorname{sen} \frac{1}{2} A &= \bar{1}{,}3408211 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} A = 12^\circ\, 39'\, 41'',28;$$

$$A = 25^\circ\, 19'\, 22'',5; \qquad B = 154^\circ\, 40'\, 37'',5.$$

239. La diagonal descompone al paralelogramo en dos triángulos iguales, de los que se conoce un lado, la suma de los otros dos y la superficie.

De la fórmula $S = pr$ se deduce el radio r del círculo inscrito, y A se calcula por medio de la fórmula

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p - a}.$$

El ángulo $B = 180^\circ - A$.

Los lados b y c se deducen de la analogía de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B_1} = \frac{c}{\operatorname{sen} C_1} = \frac{b+c}{\operatorname{sen} B_1 + \operatorname{sen} C_1};$$

de donde
$$\frac{a}{2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{b+c}{2 \operatorname{sen} \frac{B_1 + C_1}{2} \cos \frac{B_1 - C_1}{2}}.$$

Y después de simplificar, resulta:

$$\cos \frac{B_1 - C_1}{2} = \frac{(b+c)}{a} \operatorname{sen} \frac{A}{2}.$$

En esta fórmula B_1 y C_1 representan las partes de los ángulos B y C que la diagonal deja en un mismo triángulo, y cuya suma es igual á B.

Se pueden, pues, calcular dichos ángulos, y luego los lados b y c.

240. Sea AC el lado del polígono que se quiere calcular;

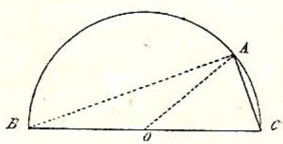
$$AOC = 40^\circ; \qquad \text{luego} \qquad ABC = 20^\circ$$

El triángulo ABC es rectángulo y da:

$a = 6^{m},90; \quad b = a \operatorname{sen} B.$

$$\begin{aligned} \log a &= 0{,}8388491 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}5340517 \\ \hline \log b &= 0{,}3729008 \end{aligned}$$

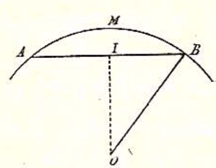
$AC = b = 2^{m},359939$



241. $$IB = \frac{AB}{2} = 119{,}1775;$$

$$\operatorname{sen} IOB = \frac{IB}{OB};$$

$$\begin{aligned} \log IB &= 2{,}0761942 \\ \log OB &= 2{,}2928605 \\ \hline \log \operatorname{sen} IOB &= \bar{1}{,}783337 \end{aligned}$$



$IOB = 37^\circ\, 23'\, 15''; \quad$ arco $AMB = 74^\circ\, 46'\, 30''$.

242. Llamando O el ángulo de los dos radios, tenemos:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{sen} O = 32 \operatorname{sen} 62^\circ 21';$$

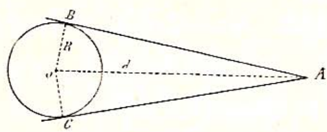
$$\begin{aligned} \log 32 &= 1{,}50514998 \\ \log \operatorname{sen} 62^\circ 21' &= \bar{1}{,}9473552 \\ \hline \log S &= 1{,}45248518 \\ S &= 28^{m^2}{,}3456 \end{aligned}$$

243. $$R = \frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi};$$

$$OA = \frac{OB}{\operatorname{sen} OAB} = \frac{R}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}};$$

luego $$d = \frac{25}{\pi \operatorname{sen} 9^\circ}.$$

$$\begin{aligned} \log 25 &= 1{,}39794001 \\ \bar{L}\pi &= \bar{1}{,}5028491 \\ \bar{L} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} &= 0{,}8056676 \\ \hline \log d &= 1{,}70645671 \end{aligned}$$



$$d = 50^m{,}8694 \quad \text{ó sea} \quad 50^m{,}87$$

244. $$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d} = \frac{25}{150\pi} = \frac{1}{6\pi}.$$

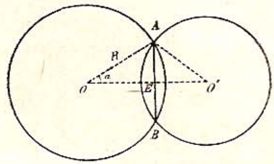
$$\begin{aligned} \bar{L}\, 6 &= 1{,}22184875 \\ \bar{L}\pi &= \bar{1}{,}5028491 \\ \hline \log \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} &= \bar{2}{,}72469785 \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha}{2} = 3^\circ 2' 12''; \quad \alpha = 6^\circ 4' 24''.$$

245. Sea $AB = 2x$ la cuerda común y α el ángulo AOO'; tenemos: $$AE = x = R \operatorname{sen} \alpha;$$

$$r^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \alpha; \quad \text{de donde} \quad \cos \alpha = \frac{R^2 + d^2 - r^2}{2Rd}.$$

Y poniendo este valor en lugar de $\cos\alpha$ en la expresión de x, tenemos:

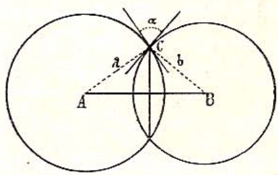


$$x = R\sqrt{1-\cos^2\alpha} =$$

$$= R\sqrt{1-\frac{(R^2-r^2+d^2)^2}{4R^2d^2}} =$$

$$= \frac{1}{2d}\sqrt{(R+d+r)(R+d-r)(r+R-d)(r-R+d)}\,.$$

246. Sean A y B los centros de los dos círculos y C uno de sus puntos comunes. El ángulo de los dos círculos es el ángulo α que forman sus tangentes en este punto; el ángulo ACB, cuyos lados son perpendiculares á los del ángulo α, y que es de especie diferente de éste, es igual á $\pi-\alpha$;



$$\overline{AB}^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\pi-\alpha) = a^2+b^2+2ab\cos\alpha.$$

Si se representa por x la cuerda común CD, la superficie del triángulo ABC es $\frac{x}{4}\,.\,AB = \frac{1}{2}\,ab \operatorname{sen} ACB$;

luego $$x = \frac{2ab \operatorname{sen} ACB}{AB} = \frac{2ab\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}.$$

247. Los dos círculos dados son ex inscritos con respecto al triángulo rectángulo ABC; en el triángulo OAD el ángulo $A = 45°$, luego $OD = AD$.

Representemos por p el semiperímetro del triángulo ABC;

$$AD = AE = p-c; \quad \text{de donde} \quad R = p-c;$$

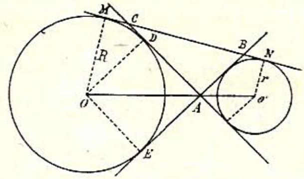
del mismo modo $r = O'F = AF = p-b$.

Si r' es el radio del círculo inscrito en el triángulo rectángulo ABC y S la superficie del mismo triángulo, tenemos:

$$r' = p-a.$$

Y multiplicando ambos miembros por p,

$$S = p r' = (p - a) p;$$



pero

$$S^2 = p (p - a) (p - b) (p - c).$$

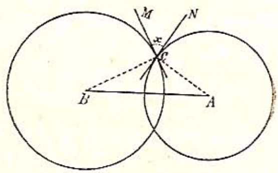
Dividiendo ordenadamente resulta:

$$S = (p - b)(p - c) = R r.$$

248. El ángulo x de las tangentes y el ángulo BCA formado por los radios trazados desde los centros á uno de sus puntos de intersección, son suplementarios por tener sus lados respectivamente perpendiculares, siendo el uno agudo y el otro obtuso.

En el triángulo ABC tenemos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\, AC \,.\, BC \,.\, \cos ACB;$$



de donde $\cos ACB =$

$$= \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\, AC \,.\, BC} = -\frac{1}{2};$$

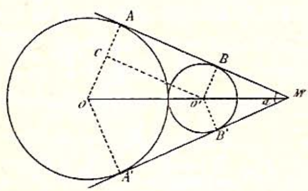
luego $ACB = 120°;$

$$x = 180° - 120° = 60°;$$

$$\frac{x}{2} = 30°;$$

$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}; \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

249. Sea x el ángulo que se quiere calcular.

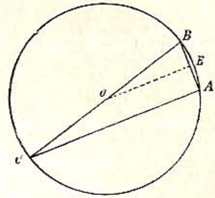


Si se traza O′C paralela á MA, el ángulo OO′C es igual á $\frac{x}{2}$; en el triángulo rectángulo OO′C se tiene:

$$OC = OO' \text{ sen } \frac{x}{2};$$

ó sea $\quad a - b = (a + b) \text{ sen } \frac{x}{2}; \quad$ luego $\quad \text{sen } \frac{x}{2} = \frac{a - b}{a + b}.$

250. Sea $AB = a$ el lado del dodecágono inscrito en el círculo de radio R; tracemos el diámetro BC y la cuerda AC; el ángulo ACB tiene por medida 15°; en el triángulo rectángulo BAC tenemos:



$$BA = BC \operatorname{sen} BCA;$$

y $\quad OE = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BC}{2} \cos BCA;$

ó sea $\quad a = 2R \operatorname{sen} 15°$

y $\quad r = R \cos 15°;$

$$a = R\sqrt{3 - \sqrt{2}} \ \textit{(Véase el problema núm. 112.)}$$

y $\quad r = \dfrac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{R}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ *(Idem íd.)*

$$S = pr = 6ar = 6R^2 . 2\operatorname{sen} 15° . \cos 15° = 6R^2 \operatorname{sen} 30° = 3R^2.$$

251. Esta perpendicular es la mitad del lado del pentágono regular inscrito: $x = \dfrac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Se podría también escribir:

$$x = a \operatorname{sen} 72° = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Si se considerase un decágono estrellado, se tendría:

$$y = a \operatorname{sen} 36° = \frac{a}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

252. Las superficies del octágono y del exágono inscritos en un círculo de radio R son:

$$S_8 = 4R^2 \operatorname{sen} 45° = 2R^2\sqrt{2};$$

$$S_6 = 3R^2 \operatorname{sen} 60° = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3};$$

luego $\quad R^2\left(2\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right) = a^2;$

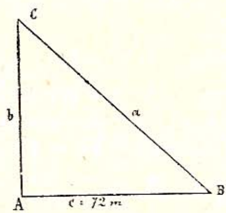
de donde $\quad R = \dfrac{a}{\sqrt{2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}}.$

CAPÍTULO IV

Aplicaciones al levantamiento de planos.

253. $b = c \operatorname{tg} B;$

$$\begin{aligned} \log c &= 1{,}8573325 \\ \log \operatorname{tg} B &= \bar{1}{,}9734539 \\ \hline \log b &= 67^{m}{,}73 \end{aligned}$$



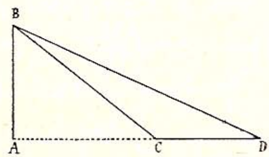
La altura de la torre es de $67{,}73 + 1{,}10 = 68^{m}{,}83$.

254. $CBD = 40^{\circ}\,12' - 24^{\circ}\,36' = 15^{\circ}\,36';$

$$BC = a = \frac{CD \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} CBD};$$

pero $AB = a \operatorname{sen} C;$

luego $AB = \dfrac{CD \operatorname{sen} D \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} CBD}.$



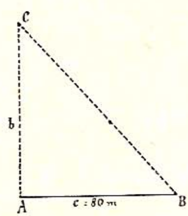
$$\begin{aligned} \log CD &= 1{,}5051500 \\ \log \operatorname{sen} D &= \bar{1}{,}6193864 \\ \log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}8098678 \\ \bar{L} \operatorname{sen} CBD &= 0{,}5703772 \\ \hline \log AB &= 1{,}5047814 \end{aligned}$$

$AB = 31{,}973$; añadiendo 1,50 resulta $33^{m}{,}473$.

255. $b = c \operatorname{tg} B$

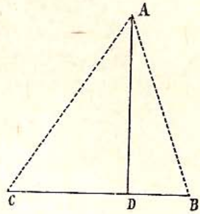
$$\begin{aligned} \log b &= 1{,}90309 \\ \log \operatorname{tg} B &= 0{,}0519190 \\ \hline \log b &= 1{,}9550090 \end{aligned}$$

$$AC = 90^{m}{,}15898$$



256. $AC = \frac{BC \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} BAC}$; pero $AD = AC \operatorname{sen} C$;

luego $AD = \frac{BC \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$.



$$\begin{aligned}
\log BC &= 3{,}2430380 \\
\log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}9976143 \\
\log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}9782063 \\
\bar{L} \operatorname{sen} A &= 0{,}3906867 \\
\hline
\log AD &= 3{,}6095453 \quad AD = 4070^{m}.
\end{aligned}$$

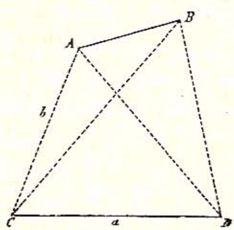
257. $$AC = b = \frac{CD \operatorname{sen} ADC}{\operatorname{sen} CAD};$$

$$\begin{aligned}
\log CD &= 2{,}1760913 \\
\log \operatorname{sen} ADC &= \bar{1}{,}7941496 \\
\bar{L} \operatorname{sen} CAD &= 0{,}0205805 \\
\hline
\log b &= 1{,}9908214 \quad b = 97^{m},908;
\end{aligned}$$

$$BC = a = \frac{CD \operatorname{sen} BDC}{\operatorname{sen} CBD};$$

$$\begin{aligned}
\log CD &= 2{,}1760913 \\
\log \operatorname{sen} BDC &= \bar{1}{,}9743466 \\
\bar{L} \operatorname{sen} CBD &= 0{,}0284124 \\
\hline
\log a &= 2{,}1788503 \quad a = 150^{m},956.
\end{aligned}$$

En el triángulo ABC conocemos ya dos lados AC y BC y el ángulo ACB, que es igual á $69° - 40° = 29°$.



En dicho triángulo tenémos la relación

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2};$$

$$a - b = 53{,}048 \qquad \log(a - b) = 1{,}7246772$$

$$a + b = 248{,}864 \qquad \bar{L}(a + b) = \bar{3}{,}6040379$$

$$\frac{C}{2} = 14° \, 30' \qquad \log \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = 0{,}5873419$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \bar{1}{,}9160570$$

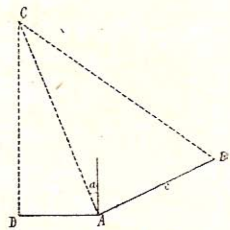
$$\frac{A - B}{2} = 39^\circ\, 29'\, 48'',92$$

$$\begin{aligned} A - B &= 78^\circ\, 59'\, 37''\, 84 \\ A + B &= 151^\circ \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= 114^\circ\, 59'\, 48'',92; \\ B &= 36^\circ\, 0'\, 11'',08. \end{aligned} \right.$$

$$AB = c = \frac{AC \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B};$$

$$\begin{aligned} \log AC &= 1,9908214 \\ \log \operatorname{sen} 29^\circ &= \bar{1},6855712 \\ \bar{L} \operatorname{sen} B &= 0,2307494 \\ \hline \log c &= 1,9071420\ ; \qquad c = 80^{m},75. \end{aligned}$$

258. $AC = b = \dfrac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C};$



pero $h = b \cos DCA = b \cos \alpha;$

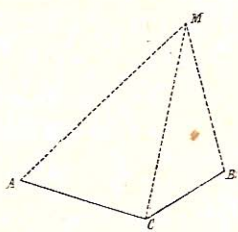
luego $h = \dfrac{c \operatorname{sen} B \cos \alpha}{\operatorname{sen} C};$

$$\begin{aligned} \log c &= 2,3521825 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{1},8197487 \\ \log \cos \alpha &= \bar{1},8618529 \\ \bar{L} \operatorname{sen} C &= 0,0009451 \\ \hline \log h &= 2,0347292\ ; \quad h = 108^{m},325. \end{aligned}$$

259. $x + y = 360 - (C + \alpha + \beta) = 142^\circ\, 53'\, 38'',4.$

Resolviendo el problema según el método señalado en nuestros ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA, libro del alumno, número 155, calcularemos el ángulo auxiliar φ determinado por la relación:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{b \operatorname{sen} \alpha};$$



$$\begin{aligned} \log a &= 2,30103 \\ \log \operatorname{sen} \beta &= \bar{1},8590244 \\ \bar{L}\, b &= \bar{3},7695521 \\ \bar{L} \operatorname{sen} \alpha &= 0,2990666 \\ \hline \log \operatorname{tg} \varphi &= 0,2286731 \\ \varphi &= 59^\circ\, 25'\, 55'',09. \end{aligned}$$

Y siendo $\varphi > 45^\circ$ la fórmula

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi)\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$$

se transforma en

$$\operatorname{tg}\frac{y-x}{2} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ)\operatorname{tg}\frac{x+y}{2};$$

$$\varphi - 45^\circ = 14^\circ\,25'\,55'',09;$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{142^\circ\,53'\,38'',4}{2} = 71^\circ\,26'\,49'',2.$$

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ) &= \bar{1},4105262\\
\log\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} &= 0,4741465\\
\hline
\log\operatorname{tg}\frac{y-x}{2} &= \bar{1},8846727
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{y-x}{2} &= 37^\circ\,28'\,49'',4\\
\frac{y+x}{2} &= 71^\circ\,26'\,49'',2
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
y &= 108^\circ\,55'\,38'',6\\
x &= 33^\circ\,57'\,59'',8
\end{aligned}$$

Se obtiene MC por la relación $\dfrac{\mathrm{MC}}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\alpha}$;

de donde $$\mathrm{MC} = \frac{a\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

$$\begin{aligned}
\log a &= 2,30103\\
\log\operatorname{sen} x &= \bar{1},7471862\\
\bar{\mathrm{L}}\operatorname{sen}\alpha &= 0,1409756\\
\hline
\log \mathrm{MC} &= 2,1891918\\
\mathrm{MC} &= 154^{\mathrm{m}},59
\end{aligned}$$

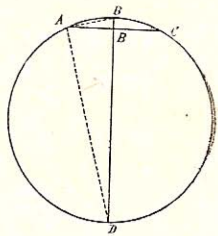
260. Véase ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA, núm. 158.

La fórmula $\mathrm{R} = \dfrac{h\cos\alpha}{2\operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}}$ dará el radio R haciendo en ella $\alpha = 90^\circ - 89^\circ\,39' = 21'$.

$$
\begin{aligned}
\log h &= 2{,}0791812\\
\log\cos\alpha &= \bar{1}{,}9999919\\
\bar{\mathrm{L}}\,2 &= \bar{1}{,}69897\\
2\,\bar{\mathrm{L}}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} &= 5{,}0301704\\
\hline
\log \mathrm{R} &= 6{,}8083135\\
\mathrm{R} &= 6431520^{\,\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

261. La superficie de la zona es igual á

$$S = 2\pi \mathrm{R} h;$$



$$h = \mathrm{AB}\operatorname{sen}\mathrm{BAE} = \mathrm{AB}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{4};$$

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BD}\operatorname{sen}\mathrm{ADB} = 2\mathrm{R}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{4};$$

luego $\qquad h = 2\,\mathrm{R}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{4}$

y $\qquad S = 4\pi\,\mathrm{R}^2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{4}.$

$$
\begin{aligned}
\log 4 &= 0{,}60206\\
\log\pi &= 0{,}4971499\\
2\log \mathrm{R} &= 1{,}4695996\\
2\log\frac{\alpha}{4} &= \bar{2}{,}1896077\\
\hline
\log S &= 0{,}7584172\\
S &= 5^{\mathrm{m}^2}{,}7334
\end{aligned}
$$

262. Véase Elementos de Trigonometría, núm. 157. En el citado problema se encuentra la fórmula

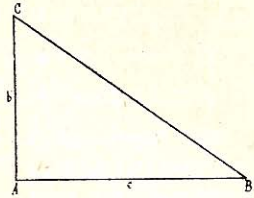
$$\mathrm{R} = \mathrm{AB}\,.\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\beta+\beta'}{2}\,.\operatorname{sen}\frac{\alpha-\alpha'}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\alpha'+\beta+\beta'}{2}}.$$

Reemplazando por los datos, resulta:

$$\mathrm{R} = 17{,}50\,.\operatorname{sen}50^{\circ}\operatorname{sen}20^{\circ}.$$

$$\log 17{,}50 = 1{,}2430380$$
$$\log \operatorname{sen} 20^\circ = \bar{1}{,}5340517$$
$$\log \operatorname{sen} 50^\circ = \bar{1}{,}8842540$$
$$\log \mathrm{R} = 0{,}6613437 \qquad \mathrm{R} = 4^{\mathrm{m}},585.$$

263. Teniendo en cuenta sólo el ángulo de elevación tenemos:



$$b = 35^{\mathrm{m}}; \quad c = 56^{\mathrm{m}}.$$

$$\operatorname{tg} \mathrm{B} = \frac{b}{c}$$

$$\log b = 1{,}5440680$$
$$\bar{\mathrm{L}}\, c = \bar{2}{,}2518120$$

$$\log \operatorname{tg} \mathrm{B} = \bar{1}{,}7958800 \qquad \mathrm{B} = 32^\circ\, 0'\, 19'',3$$

264. *(La misma figura).*

$$c = b \operatorname{cotg} \mathrm{B}$$
$$\log b = 0{,}2430380$$
$$\log \operatorname{cotg} \mathrm{B} = 1{,}7233088$$
$$\log c = 1{,}9663468$$
$$c = 92^{\mathrm{m}},54368.$$

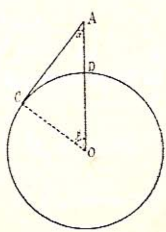
265. *(Véase el núm. 256).*

$$h = \mathrm{BC}\, \frac{\operatorname{sen} \mathrm{B} \operatorname{sen} \mathrm{C}}{\operatorname{sen} \mathrm{A}}.$$

$$\log \mathrm{BC} = 3{,}2730013$$
$$\log \operatorname{sen} \mathrm{B} = \bar{1}{,}9849438$$
$$\log \operatorname{sen} \mathrm{C} = \bar{1}{,}9957528$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} \mathrm{A} = 0{,}4081220$$

$$\log h = 3{,}6618199 \qquad h = 4590^{\mathrm{m}},076.$$

266. Sea AD la altura que hay que calcular, α el ángulo dado y β su complemento;



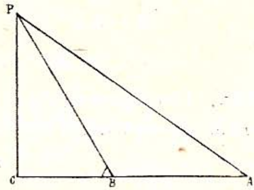
$$\mathrm{R} = \mathrm{OA} \cos \beta = (\mathrm{R} + x) \cos \beta;$$

de donde

$$x = \frac{\mathrm{R}\,(1 - \cos \beta)}{\cos \beta} = \frac{2\mathrm{R} \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}.$$

267. El ángulo $APB = 30^\circ$; luego $PB = AB = 40^m$.

La altura del árbol es igual á



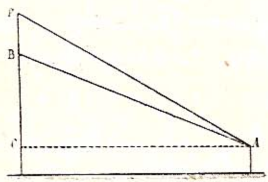
$$PC = PB \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{40\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 20\sqrt{3} = 34^m{,}64.$$

El ancho del rio es igual á

$$BC = PB \cos 60^\circ = 20^m.$$

268. Representemos por BP la altura del pararrayo, CB la altura del edificio, CP será la altura total sobre el plano horizontal que pasa por el punto A.



Si x é y son los ángulos PAC y BAC, tenemos:

$$x - y = \alpha;$$

$$d \operatorname{tg} x - d \operatorname{tg} y = a;$$

ó sea $$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos x \cos y} = \frac{a}{d}.$$

El denominador $\cos x \cos y$, multiplicado por 2 podrá reemplazarse por

$$\cos(x + y) + \cos(x - y)$$

ó sea por $$\cos(x + y) + \cos \alpha;$$

tenemos, pues,

$$\frac{a}{d} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\cos(x + y) + \cos \alpha},$$

de donde resulta:

$$\cos(x + y) = \frac{2d}{a} \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha.$$

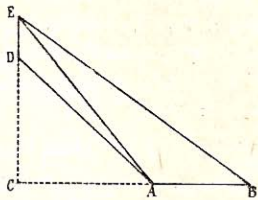
Si suponemos $\frac{2d}{a} = \operatorname{cotg} \varphi$ la expresión anterior es igual

á $$\cos(x + y) = \frac{\cos \varphi \,.\, \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \varphi} - \cos \alpha = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Conociendo $x + y$ é $x - y$ se deduce x é y, la altura del edificio $d\,\mathrm{tg}\,x$ sobre el plano horizontal AC y la altura total $h + d\,\mathrm{tg}\,x$.

269. Sea DE el tamaño de la estatua. Se toma una base de operaciones AB horizontal y en un mismo plano con DE.

Se mide en A las alturas angulares de los puntos D y E, y en B la altura angular del punto E.



$$AEB = EAC - EBC.$$

La relación

$$\frac{AE}{\mathrm{sen}\,ABE} = \frac{AB}{\mathrm{sen}\,AEB}$$

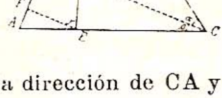
da $\quad AE = \dfrac{AB\,.\,\mathrm{sen}\,ABE}{\mathrm{sen}\,AEB}.$

El ángulo DAE es la diferencia de dos ángulos medidos directamente; se le conoce, pues, así como ADE, que es igual á un recto más CAD, y se deduce:

$$DE = \frac{AE\,\mathrm{sen}\,DAE}{\mathrm{sen}\,ADE}.$$

270. Sea $AB = h$ la altura de la torre.

1.° Tomando por base de observaciones la recta $AC = a$, se mide el ángulo de elevación α y el ángulo de depresión β, se tiene:



$$h = AD + DB = CD\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta);$$

$$CD = a\cos\beta;$$

luego

$$h = a\cos\beta\,(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta),$$

ó sea $\quad h = \dfrac{a\,\mathrm{sen}\,(\alpha + \beta)}{\cos\alpha}.$

2.° Se toma una base $CE = b$ en la dirección de CA y se miden los ángulos de elevación α y γ; el ángulo de depresión β es el mismo en E y en C.

En el triángulo ABE tenemos:

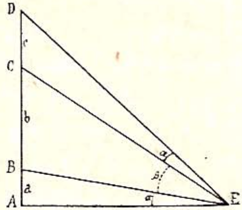
$$h = \frac{BE\,\mathrm{sen}\,(\beta + \gamma)}{\cos\beta};$$

y en el triángulo BEC:

$$BE = \frac{b \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\gamma - \alpha)};$$

de donde: $$h = \frac{b \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen}(\beta + \gamma)}{\operatorname{sen}(\gamma + \alpha) \cos \beta}.$$

271. Sea $AB = a$, $AC = b$ y $CD = c$ las alturas conocidas; α los ángulos iguales AEB y CED, β el ángulo AEC y $AE = x$ el ancho del río.



Se tienen las siguientes relaciones:

$$x = a \operatorname{cotg} \alpha; \quad x = b \operatorname{cotg} \beta;$$

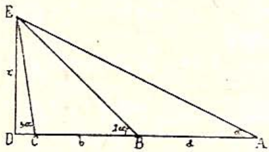
$$x = (b + c) \operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = $$
$$= (b + c) \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta - 1}{\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \beta}.$$

Resolviendo esta última ecuación, después de reemplazar en ella $\operatorname{cotg} \alpha$ por $\frac{x}{a}$ y $\operatorname{cotg} \beta$ por $\frac{x}{b}$ resulta:

$$x = \sqrt{\frac{(b + c) c a}{c - a}}.$$

272. Sea $AB = a$, $BC = b$, α el ángulo de elevación A y $DE = x$ la altura de la torre.

El ángulo EBD, exterior al triángulo ABE, siendo igual á 2α, dicho triángulo es isósceles; luego $BE = a$.



El triángulo BDE da la relación

$$x = BE \operatorname{sen} 2\alpha = a \operatorname{sen} 2\alpha \quad [1]$$

y el triángulo BCE:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 3 - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 + 2 \cos 2\alpha;$$

de donde

$$\cos 2\alpha = \frac{a - b}{2b}; \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 2\alpha = \frac{\sqrt{(a + b)(3b - a)}}{2b};$$

sustituyendo sen 2α por este valor en la igualdad [**1**], resulta:

$$x = \frac{a}{2b}\sqrt{(a+b)(3b-a)}.$$

La condición de posibilidad es: $a < 3b$.

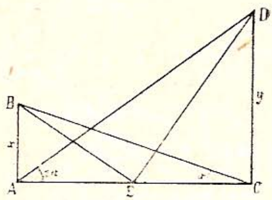
273. Sea $AB = x$ y $CD = y$ las alturas que se quiere calcular.

El triángulo BAC da: $x = a \operatorname{tg} \alpha$,

y el triángulo DAC: $y = a \operatorname{tg} 2\alpha$.

Los triángulos BAE y DEC son semejantes; luego

$$xy = \frac{a^2}{4}.$$



Reemplazando en esta igualdad x é y por los valores ya escritos, se tendrá:

$$a^2 \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a^2}{4};$$

ó sea $4 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = 1$;

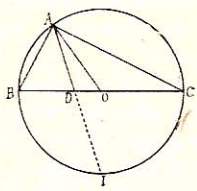
de donde $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ y $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4}$;

$$x = \frac{a}{3}; \quad y = \frac{3}{4}a.$$

274. La cuestión consiste en resolver y construir un triángulo rectángulo, conocidas la mediana y la bisectriz del ángulo recto. La hipotenusa $BC = 2AO = a$. Sea d la bisectriz.

1.° Los triángulos BAD y DAC dan:

$$BD = \frac{d \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} B} \quad \text{y} \quad CD = \frac{d \operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{sen} C};$$



de donde

$$a = CD + BD = \frac{d\sqrt{2}}{2 \operatorname{sen} C} + \frac{d\sqrt{2}}{2 \operatorname{sen} B} =$$

$$= \frac{d\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} C} + \frac{1}{\operatorname{sen} B}\right);$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{d} = \frac{1}{\operatorname{sen} C} + \frac{1}{\operatorname{sen} B}.$$

El problema se reduce á determinar dos ángulos conociendo su suma y la suma de sus cosecantes.

Pongamos, para abreviar, $\frac{a\sqrt{2}}{d} = m$, tenemos que resolver el sistema:

$$B + C = 90^\circ; \frac{1}{\operatorname{sen} B} + \frac{1}{\operatorname{sen} C} = m = \frac{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}.$$

Esto último se puede escribir:

$$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B + C) \cos \frac{1}{2}(B - C)}{\cos(B - C) - \cos(B + C)} = \frac{m}{2},$$

ó también

$$\frac{\sqrt{2} \cos \frac{1}{2}(B - C)}{\cos(B - C)} = \frac{m}{2}.$$

Y, reemplazando $\cos(B - C)$ por $2\cos^2 \frac{1}{2}(B - C) - 1$, se tiene la ecuación:

$$\frac{\sqrt{2} \cos \frac{1}{2}(B - C)}{2\cos^2 \frac{1}{2}(B - C) - 1} = \frac{m}{2};$$

$$m \cos^2 \frac{1}{2}(B - C) - \sqrt{2} \cos \frac{1}{2}(B - C) - \frac{m}{2} = 0;$$

de donde

$$\cos \frac{1}{2}(B - C) = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 2m^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{m}\left(1 \pm \sqrt{1 + m^2}\right).$$

Esta relación da $B - C$; y puesto que $B + C = 90^\circ$, resultan conocidos los ángulos B y C, y, por consiguiente, todos los elementos del triángulo ABC.

Se encuentra fácilmente la condición de posibilidad: $a > 2d$.

2.° Para determinar el punto A, tracemos, con la hipotenusa como diámetro, una circunferencia que será un primer lugar al que debe pertenecer el punto A.

El punto I siendo el punto medio del arco BIC, los ángulos CBI y BAI son iguales; los dos triángulos CBI y BAI son, pues, semejantes, y se deduce de esta semejanza:

$$\overline{BI}^2 = AI \times AD.$$

Por lo tanto, se conoce la diferencia d y el producto $\overline{BI}^2$ de los dos segmentos AI y AD, los cuales pueden determinarse por una construcción geométrica conocida; luego, desde el punto I como centro, y con un radio igual á AI, se trazará un arco que cortará la circunferencia en el punto A.

Si el ángulo A fuese diferente de 90°, el cálculo seria el mismo.

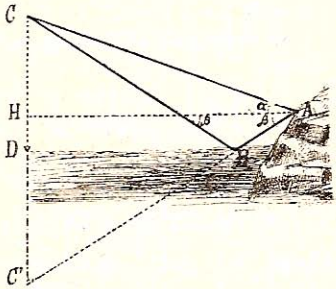
275. $$ACH = 90^\circ - \alpha;$$

$$BCD = 90^\circ - CBD = 90^\circ - C'BD = 90^\circ - \beta;$$

luego $$ACB = ACH - BCD = \beta - \alpha.$$

En el triángulo ABC tenemos la relación:

$$\frac{CB}{AB} = \frac{\text{sen}\,(\beta + \alpha)}{\text{sen}\,(\beta - \alpha)};$$



de donde

$$CB = AB \,.\, \frac{\text{sen}\,(\beta + \alpha)}{\text{sen}\,(\beta - \alpha)};$$

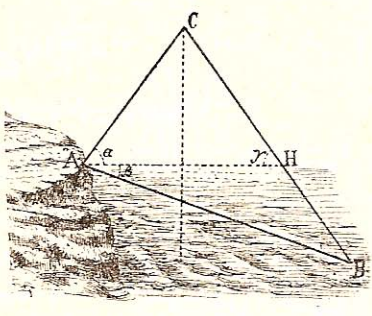
la altura $$CD = CB\,\text{sen}\,\beta$$

y $$AB = \frac{DH}{\text{sen}\,\beta} = \frac{h}{\text{sen}\,\beta};$$

luego $$CD = h\,\frac{\text{sen}\,(\beta + \alpha)}{\text{sen}\,(\beta - \alpha)}.$$

276. Sea C la nube, B su sombra sobre el mar; tenemos:

$$\frac{BC}{BA} = \frac{\text{sen}\,BAC}{\text{sen}\,BCA} =$$
$$= \frac{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}{\text{sen}\,(\pi - \alpha - \gamma)} =$$
$$= \frac{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}{\text{sen}\,(\alpha + \gamma)};$$



de donde

$$BC = BA \,.\, \frac{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}{\text{sen}\,(\alpha + \gamma)}.$$

La altura h del punto A sobre el nivel del mar es igual á

$$BA \, . \, \mathrm{sen}\, B; \quad \text{luego} \quad BA = \frac{h}{\mathrm{sen}\, B};$$

por tanto
$$BC = \frac{h}{\mathrm{sen}\, \beta} \cdot \frac{\mathrm{sen}\,(\alpha + \beta)}{\mathrm{sen}\,(\alpha + \gamma)}.$$

La altura de la nube es igual á $BC \,\mathrm{sen}\, \gamma$, ó sea

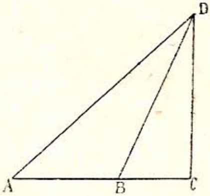
$$h \frac{\mathrm{sen}\, \gamma}{\mathrm{sen}\, \beta} \cdot \frac{\mathrm{sen}\,(\alpha + \beta)}{\mathrm{sen}\,(\alpha + \gamma)}.$$

277. Sea A y B los dos faros, C la posición primitiva del navío, y D su posición después de una hora de marcha.

$$ADC = 45^\circ \quad \text{y} \quad BDC = 22^\circ\, 30'.$$

La velocidad del navío es representada por CD.

El triángulo ADB da la relación:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{\mathrm{sen}\, 112^\circ\, 30'}{\mathrm{sen}\, 22^\circ\, 20'} =$$
$$= \frac{\mathrm{sen}\, 67^\circ\, 30'}{\mathrm{sen}\, 22^\circ\, 30'} = \frac{\cos 22^\circ\, 30'}{\mathrm{sen}\, 22^\circ\, 30'} =$$
$$= \cot 22^\circ\, 30' = \sqrt{2} + 1;$$

luego
$$AD = AB\,(\sqrt{2} + 1) = 8\,(\sqrt{2} + 1);$$

$$CD = AD \,\mathrm{sen}\, 45^\circ = 8\,(\sqrt{2} + 1)\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\,(2 + \sqrt{2}).$$

CAPÍTULO V

Cálculos logarítmicos.

278. 1.° Reemplazando las varias líneas por sus valores conocidos, resulta:

$$\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} \cdot \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} - \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

ó sea
$$\frac{5}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

2.° $\operatorname{sen}^2 24 - \operatorname{sen}^2 6^\circ = (\operatorname{sen} 24^\circ + \operatorname{sen} 6^\circ)(\operatorname{sen} 24^\circ - \operatorname{sen} 6^\circ) =$

$$= 2 \,.\, \operatorname{sen} 15^\circ \,.\, \cos 9^\circ \,.\, 2 \cos 15^\circ \,.\, \operatorname{sen} 9^\circ =$$

$$= 2 \operatorname{sen} 15^\circ \,.\, \cos 15^\circ \times 2 \operatorname{sen} 9^\circ \,.\, \cos 9^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ \,.\, \cos 18^\circ =$$

$$= \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1).$$

279. Dividiendo por $a \operatorname{sen} \beta$ los dos términos de la fracción propuesta, tenemos:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{1 - \dfrac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta}}{1 + \dfrac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta}}.$$

Y si representamos $\dfrac{b \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \beta}$ por $\operatorname{tg} \varphi$ resultará:

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} (45^\circ - \varphi);$$

de donde

$$2x = K\pi + 45 - \varphi; \qquad x = (4K + 1)\frac{\pi}{8} - \frac{\varphi}{2}.$$

Calculemos φ:

$$\begin{aligned} \log b &= 3{,}5960113 \\ \log \operatorname{sen} \alpha &= \bar{1}{,}8963113 \\ \bar{L}\, a &= \bar{4}{,}3346489 \\ \bar{L} \operatorname{sen} \beta &= 0{,}0489394 \\ \hline \log \operatorname{tg} \varphi &= \bar{1}{,}8759109 \\ \varphi &= 36^\circ\, 55'\, 24''. \end{aligned}$$

Dando á K los valores 0 y 1 tenemos:

$$x = 4^\circ\, 2'\, 18''$$

$$x = 94^\circ\, 2'\, 18''.$$

280. Poniendo en la expresión propuesta los valores conocidos:

$$a = 2 R \operatorname{sen} A; \qquad b = 2 R \operatorname{sen} B; \qquad c = 2 R \operatorname{sen} C;$$

se transformará en la siguiente:

$$2 R (\operatorname{sen} A \cos A + \operatorname{sen} B \cos B + \operatorname{sen} C \cos C) =$$

$$= R (\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C).$$

Transformemos la expresión entre paréntesis:

$$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B = 2 \operatorname{sen}(A+B)\cos(A-B) =$$
$$= 2 \operatorname{sen} C \cos(A-B);$$

$$\operatorname{sen} 2C = 2 \operatorname{sen} C \cos C = -2 \operatorname{sen} C \cos(A+B);$$

luego $\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B \operatorname{sen} 2C =$

$$= 2 \operatorname{sen} C\,[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C;$$

tenemos, en fin,

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4\,R \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C =$$
$$= 2a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = 2b \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C = 2c \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

281. $$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2};$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2};$$

luego $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(a+b) =$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}\left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2}\right) =$$
$$= 4 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}.$$

282. $$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2};$$

$$\operatorname{sen} c + \operatorname{sen} d = 2 \operatorname{sen} \frac{c+d}{2} \cos \frac{c-d}{2} =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{c-d}{2}.$$

Sumando ordenadamente, resulta:

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c + \operatorname{sen} d =$$
$$= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}\left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{c-d}{2}\right) =$$
$$= 4 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+c-b-d}{4} \cos \frac{a+d-b-c}{2}$$

Y puesto que $a+b+c+d=360^\circ$, podemos escribir las igualdades

$$\frac{a+c-b-d}{4}=\frac{a+c-b-d+a+b+c+d-360^\circ}{4}=$$

$$=\frac{a+c}{2}-90^\circ;\quad \text{luego}\quad \cos\frac{a+c-b-d}{4}=\operatorname{sen}\frac{a+c}{2},$$

y del mismo modo

$$\cos\frac{a+d-b-c}{4}=\cos\frac{a+d-b-c+360^\circ-(a+d+b+c)}{4}=$$

$$=\cos\left(90^\circ-\frac{b+c}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}.$$

La expresión propuesta equivale, pues, á

$$4\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c}{2}.$$

283. 1.° Se puede reemplazar 1 por sen 90° y $\cos a$ por sen $90^\circ-a$; la expresión propuesta se transforma entonces en la suma de los senos de tres arcos que suman 180°. Aplicando la fórmula obtenida en el problema núm. 225 se obtiene:

$$1+\operatorname{sen}a+\cos a=\operatorname{sen}90^\circ+\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}(90^\circ-a)=$$

$$4\cos 45^\circ\,.\cos\frac{a}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{a}{2}\right).$$

2.° Reemplazando en la expresión propuesta $1+\cos 2a$ por su equivalente $2\cos^2 a$ se transforma en la siguiente:

$$\cos a+2\cos^2 a=\cos a(1+2\cos a);$$

pero
$$2\cos a=\frac{\operatorname{sen}2a}{\operatorname{sen}a};$$

luego
$$\cos a(1+2\cos a)=\cos a\left(1+\frac{\operatorname{sen}2a}{\operatorname{sen}a}\right)=$$

$$=\frac{\cos a(\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}2a)}{\operatorname{sen}a}=$$

$$=\cos a\,.\frac{2\operatorname{sen}\frac{3a}{2}\,.\cos\frac{a}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}=\cos a\frac{\operatorname{sen}\frac{3a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}.$$

284. Añadiendo y restando $\cos^2 a \cos^2 b$ se puede escribir, sucesivamente:

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - (\cos c - \cos a \cos b)^2 + \cos^2 a \cos^2 b =$$
$$= (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) - (\cos c - \cos a \cos b)^2 =$$
$$= \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b - (\cos c - \cos a \cos b)^2 =$$
$$= (\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \cos c - \cos a \cos b)(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - \cos c +$$
$$+ \cos a \cos b) =$$
$$= [\cos c - \cos(a + b)][\cos(a - b) - \cos c] =$$
$$= 4 \operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2} \,.\, \operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2} \,.\, \operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2} \,.\, \operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}.$$

285. 1.° Tenemos las siguientes igualdades:

$$\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) = 2\cos(a + b)\cos c;$$
$$\cos(a + c - b) + \cos(b + c - a) = 2\cos(a - b)\cos c.$$

Sumando ordenadamente obtenemos:

$$\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a + c - b) +$$
$$+ \cos(b + c - a) = 2\cos c\,[\cos(a + b) + \cos(a - b)] =$$
$$= 2\cos c \,.\, 2\cos a \,.\, \cos b = 4\cos a \cos b \cos c.$$

2.° Del mismo modo:

$$\operatorname{sen}(b + c - a) + \operatorname{sen}(a + c - b) = 2\operatorname{sen} c \,.\, \cos(a - b)$$

y $\operatorname{sen}(a + b - c) - \operatorname{sen}(a + b + c) = -2\operatorname{sen} c \,.\, \cos(a + b)$.

De donde resulta, por suma:

$$\operatorname{sen}(b + c - a) + \operatorname{sen}(a + c - b) +$$
$$+ \operatorname{sen}(a + b - c) - \operatorname{sen}(a + b + c) =$$
$$= 2\operatorname{sen} c\,[\cos(a - b) - \cos(a + b)] = 4\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c.$$

286. Se puede escribir la expresión propuesta como sigue:

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2\,ab\,(1 + \cos\alpha).$$

Los tres primeros términos forman el cuadrado de $a + b$

y $$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

de donde $$x^2 = (a + b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Y si hacemos $$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{4ab\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(a + b)^2},$$

resultará: $$x = (a + b)\cos\varphi.$$

Segunda parte

TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

CAPÍTULOS I Y II

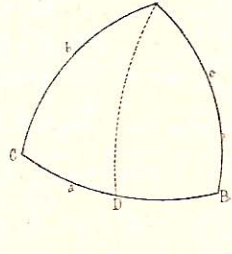
Figuras esféricas.—Relaciones fundamentales.

1. La fórmula $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$, si hacemos $b = c = a$, se transforma en

$$\cos A = \frac{\cos a\,(1 - \cos a)}{\operatorname{sen}^2 a} =$$

$$= \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \cdot \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}} = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2},$$

ó sea $$\cos A = \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{cotg} a.$$



2. Puesto que en el triángulo ABC se tiene $b = c$, el arco AD perpendicular sobre BC caerá en su punto medio y será bisector del ángulo A.

En el triángulo rectángulo CDA, tenemos (fórmula 2′, ELEM., página 128): $\operatorname{sen} CD = \operatorname{sen} AC \operatorname{sen} CAD$,

ó sea $$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \frac{A}{2}.$$

3. En el mismo triángulo tenemos (fórmula 3'):

$$\mathrm{tg}\, CD = \mathrm{tg}\, AC \cos C = \mathrm{tg}\, AC \cos B;$$

ó sea,
$$\mathrm{tg}\, \frac{a}{2} = \mathrm{tg}\, b \cos B.$$

4. Aplicando al mencionado triángulo CDA la primera fórmula del grupo 4' (pág. 128) obtenemos:

$$\cos AC = \mathrm{cotg}\, C\, \mathrm{cotg}\, CAD = \mathrm{cotg}\, B\, \mathrm{cotg}\, \frac{A}{2};$$

resulta, pues, la expresión pedida:

$$\cos b = \mathrm{cotg}\, B\, \mathrm{cotg}\, \frac{A}{2}.$$

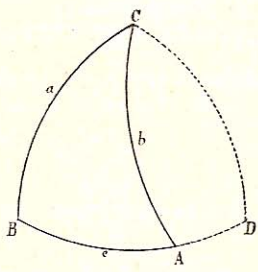
5. La segunda fórmula del grupo 4' da:

$$\cos CAD = \cos CD \,\mathrm{sen}\, C = \cos CD \,\mathrm{sen}\, B,$$

ó sea,
$$\cos \frac{A}{2} = \cos \frac{a}{2} \,\mathrm{sen}\, B.$$

6. Prolongando BA en AD de modo que BD = BC, resultará:

$$AD = a - c.$$



En el triángulo rectángulo CAD se tiene (fórmula 3'):

$$\mathrm{tg}\, b = \mathrm{tg}\, CDA \,\mathrm{sen}\, AD,$$

ó sea

$$\mathrm{tg}\, b = \mathrm{sen}\,(a - c)\, \mathrm{tg}\, CDA;$$

de donde

$$\mathrm{sen}\,(a - c) = \frac{\mathrm{tg}\, b}{\mathrm{tg}\, CDA} = \mathrm{tg}\, b \,.\, \mathrm{cotg}\, CDA. \qquad [1]$$

Aplicando al triángulo isósceles CDB la propiedad demostrada en el problema núm. 4, se obtendrá:

$$\cos a = \mathrm{cotg}\, CDA \,.\, \mathrm{cotg}\, \frac{B}{2};$$

de donde
$$\mathrm{cotg}\, CDA = \frac{\cos a}{\mathrm{cotg}\, \frac{B}{2}} = \cos a \,.\, \mathrm{tg}\, \frac{B}{2}.$$

Y reemplazando en la igualdad **[1]** cotg CDA por este valor, resultará:

$$\operatorname{sen}(a-c)=\operatorname{tg}b\,.\cos a\,.\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

7. La fórmula obtenida en el problema anterior

$$\operatorname{sen}(a-c)=\operatorname{tg}b\cos a\,.\operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

puede escribirse:

$$\operatorname{sen}(a-c)=\operatorname{sen}b\,.\frac{\cos a}{\cos b}\,.\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

La fórmula (1′) (ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA, libro del alumno, pág. 128), da: $\cos c=\dfrac{\cos a}{\cos b}$, y reemplazando $\dfrac{\cos a}{\cos b}$ por $\cos c$ en la expresión de $\operatorname{sen}(a-c)$,

tenemos: $$\operatorname{sen}(a-c)=\operatorname{sen}b\cos c\operatorname{tg}\frac{B}{2}.$$

8. (Véase ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA, libro del alumno, pág. 129, núm. 47). Permutando b y c en la demostración dada para $\operatorname{tg}^2\dfrac{c}{2}$, se obtiene:

$$\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}=\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}.$$

9. En la analogía, $\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}\operatorname{cotg}\dfrac{C}{2}$,

si $a+b=\pi$, $\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}=1$ y $\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}=\cos b$,

dicha fórmula se transforma en: $\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}=\cos b\,.\operatorname{cotg}\dfrac{C}{2}$,

ó sea, $$\cos b=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\,.\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

10. I. Se puede escribir:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}. \qquad [1]$$

De la fórmula fundamental

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \mathrm{A}$$

se puede sacar sucesivamente, por el procedimiento indicado en los ELEMENTOS, pág. 122, núm. 33 y siguientes, los valores de sen $\frac{\mathrm{A}}{2}$, cos $\frac{\mathrm{A}}{2}$, tg $\frac{\mathrm{A}}{2}$, etc. Llevados á la igualdad **[1]** nos dan, después de multiplicar el segundo miembro de la misma por la cantidad cotg $\frac{\mathrm{C}}{2}$ tg $\frac{\mathrm{C}}{2}$ igual á 1:

$$\operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\mathrm{C}}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}}{2}\operatorname{tg}\frac{\mathrm{C}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\mathrm{B}}{2}\operatorname{tg}\frac{\mathrm{C}}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}}{2}\operatorname{tg}\frac{\mathrm{B}}{2}}.$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\mathrm{C}}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-a)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-c)}}}{1 - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-a)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-b)}}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-b)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-c)}}}{1 - \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-a)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(p-a)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p-b)}}} =$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} p} + \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} p}}{1 - \frac{\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p}} = \frac{\operatorname{sen}(p-b) + \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen}(p-c)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\cos\frac{a+b}{2} \,.\, \operatorname{sen}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}.$$

De donde $\operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{\mathrm{C}}{2}.$

II. De la misma manera se deduciría la expresión

$$\operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}\cot\frac{\mathrm{C}}{2},$$

partiendo de $\operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\mathrm{B}}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\mathrm{A}}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{\mathrm{B}}{2}}.$

III. Para las otras dos analogías de Neper se parte de las fórmulas de $\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$ y $\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}$, reemplazando en ellas $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ y $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ por los valores indicados en los ELEMENTOS, página 125.

Se puede también considerar el triángulo polar del propuesto y aplicarle las dos primeras analogías.

CAPÍTULO III

Resolver los triángulos rectángulos por medio de los elementos indicados.

11. Datos: $a = 114^\circ\,15'$; $b = 46^\circ\,18'$.

Fórmulas (ELEM., pág. 133). $\left\{\begin{aligned} \cos c &= \frac{\cos a}{\cos b}. \\ \operatorname{sen} B &= \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}. \\ \cos C &= \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}. \end{aligned}\right.$

$$\begin{aligned} \log \cos a &= \bar{1},6135446 \\ \bar{\text{L}} \cos b &= 0,1605959 \\ \hline \log \cos c &= \bar{1},7741405 \\ c &= 126^\circ\,28'\,33'',2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} b &= \bar{1},8591186 \\ \bar{\text{L}} \operatorname{sen} a &= 0,0401185 \\ \hline \log \operatorname{sen} B &= \bar{1},8992371 \\ B &= 52^\circ\,27'\,38'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} b &= 0,0197144 \\ \bar{\text{L}} \operatorname{tg} a &= \bar{1},6536631 \\ \hline \log \cos C &= \bar{1},6733775 \\ C &= 118^\circ\,7'\,27'',7 \end{aligned}$$

NOTA. Adviértase que siendo $a > 90^\circ$, y $b < 90^\circ$ se debe tomar $c > 90^\circ$ y por consiguiente $C > 90^\circ$.

12. Datos: $a = 125^\circ\,12'\,18''$; $b = 53^\circ\,15'\,47''$.

Fórmulas (Elem., p. 138).
$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 \dfrac{c}{2} = \operatorname{tg} \dfrac{a+b}{2} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{a-b}{2}. \\ \operatorname{tg}^2 \dfrac{C}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)}. \\ \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \dfrac{B}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}} \end{cases}$$

$$a + b = 178^\circ\,28'\,5'' \qquad \frac{a+b}{2} = 89^\circ\,14'\,2'',5$$

$$a - b = 71^\circ\,56'\,31'' \qquad \frac{a-b}{2} = 35^\circ\,58'\,15'',5$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 1,8738838$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \bar{1},8607983$$
$$2 \log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = 1,7346821$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = 0,86734105$$
$$\frac{c}{2} = 82^\circ\,16'\,14'',8$$
$$c = 164^\circ\,32'\,29'',6$$

$$\log \operatorname{sen}(a-b) = \bar{1},9780631$$
$$\bar{L} \operatorname{sen}(a+b) = 1,5729314$$
$$2 \log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 1,5509945$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 0,7754972$$
$$\frac{C}{2} = 80^\circ\,28'\,50'',6$$
$$C = 160^\circ\,57'\,41'',2$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \bar{1},8607983$$
$$\bar{L} \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \bar{2},1261162$$

$$2 \log \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) = \bar{3},9869145$$
$$\log \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{B}{2}\right) = \bar{2},9934572$$

$$45^\circ - \frac{B}{2} = 5^\circ\,37'\,32'',7$$

$$\frac{B}{2} = 39^\circ\,22'\,27'',3; \quad B = 78^\circ\,44'\,54'',6.$$

13. Datos: $a = 57^\circ\ 9'\ 48''$; $b = 37^\circ\ 23'\ 19''$.

$$\text{Fórmulas.}\left\{\begin{aligned} \cos c &= \frac{\cos a}{\cos b}. \\ \operatorname{sen} B &= \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}. \\ \cos C &= \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}. \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} \log \cos a &= \bar{1},7341964 \\ \bar{L} \cos b &= 0,0998868 \\ \hline \log \cos c &= \bar{1},8340832 \\ c &= 46^\circ\ 57'\ 47'',1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \operatorname{sen} b &= \bar{1},7833445 \\ \bar{L} \operatorname{sen} a &= 0,0756071 \\ \hline \log \operatorname{sen} B &= \bar{1},8589516 \\ B &= 46^\circ\ 16'\ 37'',1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} b &= \bar{1},8832313 \\ \bar{L} \operatorname{tg} a &= \bar{1},8098035 \\ \hline \log \cos C &= \bar{1},6930348 \\ C &= 60^\circ\ 26'\ 52'',8 \end{aligned}$$

14. Datos: $a = 52^\circ\ 12'$; $B = 75^\circ\ 16'$.

$$\text{Fórmulas (ELEM., p. 135, 5.° caso).}\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen} b &= \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} B. \\ \operatorname{tg} c &= \operatorname{tg} a \cos B. \\ \operatorname{tg} C &= \frac{\cot B}{\cos a}. \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} a &= \bar{1},8977123 \\ \log \operatorname{sen} B &= \bar{1},9854803 \\ \hline \log \operatorname{sen} b &= \bar{1},8831926 \\ b &= 49^\circ\ 50'\ 1'' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \operatorname{tg} a &= 0,1103177 \\ \log \cos B &= \bar{1},4053816 \\ \hline \log \operatorname{tg} c &= \bar{1},5156993 \\ c &= 18^\circ\ 9'\ 9'',6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cot B &= \bar{1},4199013 \\ \bar{L} \cos a &= 0,2126054 \\ \hline \log \operatorname{tg} C &= \bar{1},6325067 \\ C &= 23^\circ\ 13'\ 18'',1 \end{aligned}$$

15. Datos: $a = 125^\circ\,52'\,10''$; $B = 85^\circ\,13'\,45''$.

Fórmulas (5.º caso). $\begin{cases} \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B. \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B. \\ \operatorname{tg} C = \dfrac{\cot B}{\cos a}. \end{cases}$

$$\begin{array}{rl|rl} \log \operatorname{sen} a = & \bar{1},9086749 & \log \operatorname{tg} a = & 0,1408216 \\ \log \operatorname{sen} B = & \bar{1},9984927 & \log \cos B = & \bar{2},9199696 \\ \hline \log \operatorname{sen} b = & \bar{1},9071676 & \log \operatorname{tg} c = & \bar{1},06079012 \\ b = & 53^\circ\,51'\,24'',9 & c = & 173^\circ\,26'\,18'',3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cot B = & \bar{2},9214769 \\ \bar{L} \cos a = & \bar{0},2321466 \\ \hline \log \operatorname{tg} C = & \bar{1},1536235 \\ C = & 171^\circ\,53'\,36'',5 \end{array}$$

16. Datos: $a = 110^\circ\,8'\,47''$; $B = 51^\circ\,42'\,9''$.

Fórmulas. $\begin{cases} \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B. \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B. \\ \operatorname{tg} C = \dfrac{\cot B}{\cos a}. \end{cases}$

$$\begin{array}{rl|rl} \log \operatorname{sen} a = & \bar{1},9725803 & \log \operatorname{tg} a = & 0,4354921 \\ \log \operatorname{sen} B = & \bar{1},8947608 & \log \cos B = & \bar{1},7922129 \\ \hline \log \operatorname{sen} b = & \bar{1},8673411 & \log \operatorname{tg} c = & 0,2277050 \\ b = & 47^\circ\,27'\,30'' & c = & 120^\circ\,37'\,26'',4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cot B = & \bar{1},8974520 \\ \bar{L} \cos a = & 0,4629117 \\ \hline \log \operatorname{tg} C = & 0,3603637 \\ C = & 113^\circ\,33'\,52'' \end{array}$$

17. Datos: $b = 52^\circ\,45'$; $c = 71^\circ\,15'$.

Fórmulas (1.er caso). $\begin{cases} \cos a = \cos b \,.\, \cos c. \\ \operatorname{tg} B = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} c}. \\ \operatorname{tg} C = \dfrac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{sen} b}. \end{cases}$

$\log\cos b = \bar{1},7819664$	$\log \operatorname{tg} b = 0,1189478$
$\log\cos c = \bar{1},5070992$	$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} c = 0,0236821$
$\log\cos a = \bar{1},2890656$	$\log \operatorname{tg} \mathrm{B} = 0,1426299$
$a = 78^\circ\, 46'\, 50'',4$	$\mathrm{B} = 54^\circ\, 14'\, 37'',5$

$$\log \operatorname{tg} c = 0,4692187$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} b = 0,0990858$$
$$\log \operatorname{tg} \mathrm{C} = 0,5683045$$
$$\mathrm{C} = 74^\circ\, 52'\, 45'',9$$

18. Datos: $b = 98^\circ\, 16'\, 12''$; $c = 37^\circ\, 12'\, 30''$.

$$\text{Fórmulas.}\left\{\begin{aligned} &\cos a = \cos b \cos c. \\ &\operatorname{tg} \mathrm{B} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} c}. \\ &\operatorname{tg} \mathrm{C} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{sen} b}. \end{aligned}\right.$$

$\log\cos b = \bar{1},1578739$	$\log \operatorname{tg} b = 0,8375864$
$\log\cos c = \bar{1},9011541$	$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} c = 0,2184493$
$\log\cos a = \bar{1},0590280$	$\log \operatorname{tg} \mathrm{B} = 1,0560357$
$a = 96^\circ\, 34'\, 41'',4$	$\mathrm{B} = 95^\circ\, 1'\, 23'',2$

$$\log \operatorname{tg} c = \bar{1},8803966$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} b = 0,0045398$$
$$\log \operatorname{tg} \mathrm{C} = \bar{1},8849364$$
$$\mathrm{C} = 37^\circ\, 29'\, 49'',9$$

19. Datos: $b = 125^\circ\, 15'\, 42''$; $c = 133^\circ\, 9'\, 45''$.

$$\text{Fórmulas.}\left\{\begin{aligned} &\cos a = \cos b \cos c. \\ &\operatorname{tg} \mathrm{B} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} c}. \\ &\operatorname{tg} \mathrm{C} = \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{sen} b}. \end{aligned}\right.$$

$\log\cos b = \bar{1},7614102$	$\log \operatorname{tg} b = 0,1505588$
$\log\cos c = \bar{1},8351004$	$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} c = 0,1370244$
$\log\cos a = \bar{1},5965106$	$\log \operatorname{tg} \mathrm{B} = 0,2875832$
$a = 66^\circ\, 44'\, 20'',2$	$\mathrm{B} = 117^\circ\, 16'\, 52'',4$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} c &= 0{,}0278751 \\ \overline{\mathrm{L}} \operatorname{sen} b &= 0{,}0880311 \\ \hline \log \operatorname{tg} \mathrm{C} &= 0{,}1159062 \\ \mathrm{C} &= 127^\circ\, 26'\, 36'',7 \end{aligned}$$

20. Datos: $\mathrm{B} = 53^\circ\, 12'$; $b = 48^\circ\, 30'$.

$$\text{Fórmulas (3.}^{\text{er}}\text{ caso).} \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} a &= \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \mathrm{B}}. \\ \operatorname{sen} c &= \operatorname{tg} b \cot \mathrm{B}. \\ \operatorname{sen} \mathrm{C} &= \frac{\cos \mathrm{B}}{\cos b}. \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} b &= \bar{1}{,}8744561 \\ \overline{\mathrm{L}} \operatorname{sen} \mathrm{B} &= 0{,}0965132 \\ \hline \log \operatorname{sen} a &= \bar{1}{,}9709693 \\ a_1 &= 69^\circ\, 16'\, 59'' \\ a_2 &= 110^\circ\, 43'\, 1'' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \operatorname{tg} b &= 0{,}0531916 \\ \log \cot \mathrm{B} &= \bar{1}{,}8739571 \\ \hline \log \operatorname{sen} c &= \bar{1}{,}9271487 \\ c_1 &= 57^\circ\, 43'\, 58'',3 \\ c_2 &= 122^\circ\, 16'\, 1'',7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos \mathrm{B} &= \bar{1}{,}7774439 \\ \overline{\mathrm{L}} \cos b &= 0{,}1787354 \\ \hline \log \operatorname{sen} \mathrm{C} &= \bar{1}{,}9561793 \end{aligned}$$

$$\mathrm{C}_1 = 64^\circ\, 41'\, 31'',1; \qquad \mathrm{C}_2 = 115^\circ\, 18'\, 28'',9.$$

Siendo $b < 90^\circ$, los otros dos lados serán de la misma naturaleza, es decir, ambos agudos ó ambos obtusos.

Además, el ángulo C es de la misma naturaleza que el lado c.

El problema tiene, pues, las dos soluciones siguientes:

$$1.^{\text{a}} \text{ solución.} \left\{ \begin{aligned} a &= 69^\circ\, 16'\, 59''. \\ c &= 57^\circ\, 43'\, 58'',3. \\ \mathrm{C} &= 64^\circ\, 41'\, 31'',1. \end{aligned} \right.$$

$$2.^{\text{a}} \text{ solución.} \left\{ \begin{aligned} a &= 110^\circ\, 43'\, 1''. \\ c &= 122^\circ\, 16'\, 1'',7. \\ \mathrm{C} &= 115^\circ\, 18'\, 28'',9. \end{aligned} \right.$$

21. Datos: $b = 65^\circ\, 10'\, 42''$; $\mathrm{B} = 72^\circ\, 10'\, 50''$.

Fórmulas: Las del problema anterior.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} b &= \bar{1},9579035 \\ \bar{L} \operatorname{sen} b &= 0,0213514 \\ \hline \log \operatorname{sen} a &= \bar{1},9792549 \\ a_1 &= 72^\circ\, 25'\, 52'',5 \\ a_2 &= 107^\circ\, 34'\, 7'',5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} b &= 0,3348659 \\ \log \cot B &= \bar{1},5070989 \\ \hline \log \operatorname{sen} c &= \bar{1},8419648 \\ c_1 &= 44^\circ\, 1'\, 28'',8 \\ c_2 &= 135^\circ\, 58'\, 31'',2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos B &= \bar{1},4857476 \\ \bar{L} \cos B &= 0,3769624 \\ \hline \log \operatorname{sen} C &= \bar{1},8627100 \\ C_1 &= 46^\circ\, 48'\, 0'',6 \\ C_2 &= 133^\circ\, 11'\, 59'',4 \end{aligned}$$

$$1.^{\text{a}} \text{ solución.} \left\{ \begin{aligned} a &= 72^\circ\, 25'\, 52'',5. \\ c &= 44^\circ\, 1'\, 28'',8. \\ C &= 46^\circ\, 48'\, 0'',6. \end{aligned} \right.$$

$$2.^{\text{a}} \text{ solución.} \left\{ \begin{aligned} a &= 107^\circ\, 34'\, 7'',5. \\ c &= 135^\circ\, 58'\, 31'',2. \\ C &= 133^\circ\, 11'\, 59'',4. \end{aligned} \right.$$

22. Datos: $b = 120^\circ\, 14'\, 50''$; $B = 110^\circ\, 36'\, 20''$.
Fórmulas: Las del problema núm. 20.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} b &= \bar{1},9364433 \\ \bar{L} \operatorname{sen} B &= 0,0287124 \\ \hline \log \operatorname{sen} a &= \bar{1},9651557 \\ a_1 &= 67^\circ\, 21'\, 14'',9 \\ a_2 &= 112^\circ\, 38'\, 45'',1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} b &= 0,2342437 \\ \log \cot B &= \bar{1},5751716 \\ \hline \log \operatorname{sen} c &= \bar{1},8094153 \\ c_1 &= 40^\circ\, 8'\, 58'',6 \\ c_2 &= 139^\circ\, 51'\, 1'',4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos B &= \bar{1},5464593 \\ \bar{L} \cos b &= 0,2978004 \\ \hline \log \operatorname{sen} C &= \bar{1},8442597 \\ C_1 &= 44^\circ\, 19'\, 7'',7 \\ C_2 &= 135^\circ\, 40'\, 52'',3 \end{aligned}$$

Puesto que $b > 90^\circ$, a y c serán de distinta naturaleza, y C, debiendo ser de la misma naturaleza que c, resultan las dos soluciones siguientes:

$$1.^{\text{a}}\text{ solución.}\left\{\begin{array}{l} a = 67^\circ\,21'\,14'',9. \\ c = 139^\circ\,51'\,\ \ 1'',4. \\ C = 135^\circ\,40'\,52'',3. \end{array}\right.$$

$$2.^{\text{a}}\text{ solución.}\left\{\begin{array}{l} a = 112^\circ\,38'\,45'',1. \\ c = 40^\circ\,\ 8'\,58'',6. \\ C = 44^\circ\,19'\,\ 7'',7. \end{array}\right.$$

23. Datos: $b = 95^\circ\,14'$; $C = 60^\circ\,20'$.

$$\text{Fórmulas (4.}^\circ\text{ caso).}\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\cos C}. \\ \operatorname{tg} c = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} C. \\ \cos B = \cos b \operatorname{sen} C. \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rl|rl} \log \operatorname{tg} b = & 1{,}0381341 & \log \operatorname{sen} b = & \bar{1}{,}9981859 \\ \bar{L} \cos C = & 0{,}3054358 & \log \operatorname{tg} C = & 0{,}2444154 \\ \hline \log \operatorname{tg} a = & 1{,}3435699 & \log \operatorname{tg} c = & 0{,}2426013 \\ a = & 87^\circ\,24'\,15'',5 & c = & 60^\circ\,13'\,49'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cos b = & \bar{2}{,}9600517 \\ \log \operatorname{sen} C = & \bar{1}{,}9389796 \\ \hline \log \cos B = & \bar{2}{,}8990313 \\ B = & 85^\circ\,27'\,15'',1 \end{array}$$

24. Datos: $b = 122^\circ\,25'\,42''$; $C = 52^\circ\,10'\,3''$.
Fórmulas: Las del problema anterior.

$$\begin{array}{rl|rl} \log \operatorname{tg} b = & 0{,}1970121 & \log \operatorname{sen} b = & \bar{1}{,}9263748 \\ \bar{L} \cos C = & 0{,}2122880 & \log \operatorname{tg} C = & 0{,}1098091 \\ \hline \log \operatorname{tg} a = & 0{,}4093001 & \log \operatorname{tg} c = & 0{,}0361839 \\ a = & 68^\circ\,42'\,37'',8 & c = & 47^\circ\,23'\,2'',7 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cos b = & \bar{1}{,}7293626 \\ \log \operatorname{sen} C = & \bar{1}{,}8975211 \\ \hline \log \cos B = & \bar{1}{,}6268837 \\ B = & 64^\circ\,56'\,32'',6 \end{array}$$

25. Datos: $b = 101° \, 42' \, 51''$; $C = 46° \, 15' \, 20''$.
Fórmulas: Las del problema núm. 23.

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} b = & 0{,}6833003 \\ \bar{L} \cos C = & 0{,}1602436 \\ \hline \log \operatorname{tg} a = & 0{,}8435439 \\ a = & 81° \, 50' \, 28'',1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{sen} b = & \bar{1}{,}9908593 \\ \log \operatorname{tg} C = & 0{,}0190400 \\ \hline \log \operatorname{tg} c = & 0{,}0098993 \\ c = & 45° \, 39' \, 10'',6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cos b = & \bar{1}{,}3075589 \\ \log \operatorname{sen} C = & \bar{1}{,}8587964 \\ \hline \log \cos B = & \bar{1}{,}1663553 \\ B = & 81° \, 33' \, 56'',6 \end{array}$$

26. Datos: $B = 74° \, 12'$; $C = 60° \, 15'$.

Fórmulas (6.º caso: Elem., p. 136). $\left\{ \begin{array}{l} \cos a = \cot B \cdot \cot C. \\ \cos b = \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} C}. \\ \cos c = \dfrac{\cos C}{\operatorname{sen} B}. \end{array} \right.$

$$\begin{array}{rl} \log \cot B = & \underline{1}{,}4517427 \\ \log \cot C = & \bar{1}{,}7570520 \\ \hline \log \cos a = & \bar{1}{,}2087947 \\ a = & 80° \, 41' \, 33'',3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cos B = & \bar{1}{,}4350161 \\ \bar{L} \operatorname{sen} C = & 0{,}0613808 \\ \hline \log \cos b = & \bar{1}{,}4963969 \\ b = & 71° \, 43' \, 22'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cos C = & \bar{1}{,}6956712 \\ \bar{L} \operatorname{sen} B = & 0{,}0167265 \\ \hline \log \cos c = & \bar{1}{,}7123977 \\ c = & 58° \, 57' \, 20'',5 \end{array}$$

27. Datos: $B = 35° \, 25' \, 4''$; $C = 65° \, 15' \, 52''$.
Fórmulas: Las del problema anterior.

$$\begin{array}{rl} \log \cot B = & \underline{0}{,}1480510 \\ \log \cot C = & \bar{1}{,}6634188 \\ \hline \log \cos a = & \bar{1}{,}8114698 \\ a = & 49° \, 37' \, 15'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log \cos B = & \bar{1}{,}9111299 \\ \bar{L} \operatorname{sen} C = & 0{,}0417953 \\ \hline \log \cos b = & \bar{1}{,}9529252 \\ b = & 26° \, 11' \, 52'',6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \log\cos C &= \bar{1},6216237 \\ \bar{L}\,\text{sen}\, B &= 0,2369211 \\ \hline \log\cos c &= \bar{1},8585448 \\ c &= 46^\circ\, 13'\, 5'',2 \end{aligned}$$

28. Datos: $B = 85^\circ\, 4'\, 22''$; $C = 36^\circ\, 14'\, 51''$.
Fórmulas: Las del problema núm. 26.

$$\begin{aligned} \log\cot B &= \bar{2},9355520 \\ \log\cot C &= 0,1347993 \\ \hline \log\cos a &= \bar{1},0703513 \\ a &= 83^\circ\, 14'\, 50'',1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cos B &= \bar{2},9339440 \\ \bar{L}\,\text{sen}\, C &= 0,2282109 \\ \hline \log\cos b &= \bar{1},1621549 \\ b &= 81^\circ\, 38'\, 50'',9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cos C &= \bar{1},9065884 \\ \bar{L}\,\text{sen}\, B &= 0,0026078 \\ \hline \log\cos c &= \bar{1},9091962 \\ c &= 35^\circ\, 46'\, 26'',9 \end{aligned}$$

CAPÍTULO IV

Resolver un triángulo cualquiera por medio de los datos indicados.

29. Datos: $a = 103^\circ\, 15'$; $b = 98^\circ\, 36'$; $c = 67^\circ\, 40'$.

Fórmulas.
$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\text{sen}\,(p-b)\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\,p \,.\, \text{sen}\,(p-a)}}. \\ \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{\text{sen}\,(p-a)\,\text{sen}\,(p-c)}{\text{sen}\,p \,.\, \text{sen}\,(p-b)}}. \\ \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{\text{sen}\,(p-a)\,\text{sen}\,(p-b)}{\text{sen}\,p \,.\, \text{sen}\,(p-c)}}. \end{cases}$$

$$a = 103^\circ\, 15'$$
$$b = 98^\circ\, 36'$$
$$c = 67^\circ\, 40'$$
$$2p = 269^\circ\, 31'$$

$$p - a = 31^\circ\, 30'\, 30''$$
$$p - b = 36^\circ\, 9'\, 30''$$
$$p - c = 67^\circ\, 5'\, 30''$$
$$p = 134^\circ\, 45'\, 30''$$

Cálculo de A.

$$\log \operatorname{sen}(p-b) = \bar{1},7708658$$
$$\log \operatorname{sen}(p-c) = \bar{1},9643204$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} p = 0,1486909$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen}(p-a) = 0,2818118$$
$$2 \log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 0,1656889$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 0,0828444$$
$$\frac{A}{2} = 50^\circ\, 25'\, 54'',9$$
$$A = 100^\circ\, 51'\, 59'',8$$

Cálculo de B.

$$\log \operatorname{sen}(p-a) = \bar{1},7181882$$
$$\log \operatorname{sen}(p-c) = \bar{1},9643204$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} p = 0,1486909$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen}(p-b) = 0,2291342$$
$$2 \log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 0,0603337$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 0,0301667$$
$$\frac{B}{2} = 46^\circ\, 59'\, 57'',9$$
$$B = 93^\circ\, 59'\, 55'',8$$

Cálculo de C.

$$\log \operatorname{sen}(p-a) = \bar{1},7181882$$
$$\log \operatorname{sen}(p-b) = \bar{1},7708658$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} p = 0,1486909$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen}(p-c) = 0,0356796$$
$$2 \log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \bar{1},6734245$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \bar{1},8367122$$
$$\frac{A}{2} = 34^\circ\, 28'\, 26'',4$$
$$A = 68^\circ\, 56'\, 52'',8$$

30. Datos: $a = 150^\circ\, 10'\, 5''$; $b = 110^\circ\, 20'\, 31''$; $c = 40^\circ\, 10'$.
Fórmulas: Las del problema anterior.

$$a = 150^\circ\, 10'\, 5''$$
$$b = 110^\circ\, 20'\, 31''$$
$$c = 40^\circ\, 10'$$
$$2p = 300^\circ\, 40'\, 36''$$

$$p - a = 10'\, 13''$$
$$p - b = 39^\circ\, 59'\, 47''$$
$$p - c = 110^\circ\, 10'\, 18''$$
$$p = 150^\circ\, 20'\, 18''$$

CÁLCULO DE A.

$$\log \operatorname{sen}(p-b) = \bar{1},8080349$$
$$\log \operatorname{sen}(p-c) = \bar{1},9725100$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} p = 0,3055024$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen}(p-a) = 2,5269653$$
$$2 \log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 2,6130126$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1,30650,63$$
$$\frac{A}{2} = 87^\circ 10' 24'',2$$
$$A = 174^\circ 20' 48'',4$$

CÁLCULO DE B.

$$\log \operatorname{sen}(p-a) = \bar{3},4730347$$
$$\log \operatorname{sen}(p-c) = \bar{1},9725100$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} p = 0,3055024$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen}(p-b) = 0,1919651$$
$$2 \log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \bar{3},9430122$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \bar{2},97150,61$$
$$\frac{B}{2} = 5^\circ 21' 0'',4$$
$$B = 10^\circ 42' 0'',8$$

CÁLCULO DE C.

$$\log \operatorname{sen}(p-a) = \bar{3},4730347$$
$$\log \operatorname{sen}(p-b) = \bar{1},8080349$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} p = 0,3055024$$
$$\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen}(p-c) = 0,0274900$$
$$2\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \bar{3},6140620$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \bar{2},8070310$$
$$\frac{C}{2} = 3^\circ 40' \ 8'',8$$
$$C = 7^\circ 20' 17'',6$$

31. Datos: $a = 85^\circ 3' 42''$; $b = 60^\circ 42' 50''$; $c = 35^\circ 10' 8''$.
Fórmulas: Las del problema núm. 29.

$a = 85^\circ \ 3' 42''$	$p - a = 5^\circ 24' 38''$
$b = 60^\circ 42' 50''$	$p - b = 29^\circ 45' 30''$
$c = 35^\circ 10' \ 8''$	$p - c = 55^\circ 18' 12''$
$2p = 180^\circ 56' 40''$	$p = 90^\circ 28' 20''$

CÁLCULO DE A.

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{sen}(p-b) &= \bar{1},6957817\\
\log \operatorname{sen}(p-c) &= \bar{1},9149654\\
\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} p &= 0,0000148\\
\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen}(p-a) &= 1,0255265\\
\hline
2 \log \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= 0,6362884\\
\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= 0,3181442\\
\frac{A}{2} &= 64^\circ\, 19'\, 38'',5\\
A &= 128^\circ\, 39'\, 17''
\end{aligned}$$

CÁLCULO DE B.

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{sen}(p-a) &= \bar{2},9744735\\
\log \operatorname{sen}(p-c) &= \bar{1},9149654\\
\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} p &= 0,0000148\\
\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen}(p-b) &= 0,3042183\\
\hline
2 \log \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \bar{1},1936720\\
\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \bar{1},5968360\\
\frac{B}{2} &= 21^\circ\, 33'\, 53'',2\\
B &= 43^\circ\, 7'\, 46'',4
\end{aligned}$$

CÁLCULO DE C.

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{sen}(p-a) &= \bar{2},9744735\\
\log \operatorname{sen}(p-b) &= \bar{1},6957817\\
\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} p &= 0,0000148\\
\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen}(p-c) &= 0,0850346\\
\hline
2 \log \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \bar{2},7553046\\
\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \bar{1},3776523\\
\frac{C}{2} &= 13^\circ\, 25'\, 9'',6\\
C &= 26^\circ\, 50'\, 19'',2
\end{aligned}$$

32. Datos: $A = 113^\circ\, 2'$; $B = 82^\circ\, 30'$; $C = 116^\circ\, 20'$.

Fórmulas (2.° caso, ELEM., p. 161.)...

$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \,.\, \cos(P-A)}{\cos(P-B)\cos(P-C)}}\\
\operatorname{tg} \frac{b}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \,.\, \cos(P-B)}{\cos(P-A)\cos(P-C)}}\\
\operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \sqrt{\frac{-\cos P \,.\, \cos(P-C)}{\cos(P-A)\cos(P-B)}}
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{array}{rl} A = & 113^\circ\ 2' \\ B = & 82^\circ\ 30' \\ C = & 116^\circ\ 20' \\ \hline 2P = & 311^\circ\ 52' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} P - A = & 42^\circ\ 54' \\ P - B = & 73^\circ\ 26' \\ P - C = & 39^\circ\ 36' \\ \hline P = & 155^\circ\ 16' \end{array}$$

CÁLCULO DE a.

$$\begin{array}{rl} \log(-\cos P) = & \bar{1},9605048 \\ \log\cos(P - A) = & \bar{1},8648331 \\ \bar{L}\cos(P - B) = & 0,5449559 \\ \bar{L}\cos(P - C) = & 0,1132199 \\ \hline 2\log \operatorname{tg}\frac{a}{2} = & 0,4835137 \\ \log \operatorname{tg}\frac{a}{2} = & 0,2417568 \\ \frac{a}{2} = & 60^\circ 10' 56'',1 \\ a = & 120^\circ 21' 52'',2 \end{array}$$

CÁLCULO DE b.

$$\begin{array}{rl} \log(-\cos P) = & \bar{1},9605048 \\ \log\cos(P - B) = & \bar{1},4550441 \\ \bar{L}\cos(P - A) = & 0,1351669 \\ \bar{L}\cos(P - C) = & 0,1132199 \\ \hline 2\log \operatorname{tg}\frac{b}{2} = & \bar{1},6639357 \\ \log \operatorname{tg}\frac{b}{2} = & \bar{1},8319679 \\ \frac{b}{2} = & 34^\circ 10' 57'',1 \\ b = & 68^\circ 21' 54'',2 \end{array}$$

CÁLCULO DE c.

$$\begin{array}{rl} \log(-\cos P) = & \bar{1},9605048 \\ \log\cos(P - C) = & \bar{1},8867801 \\ \bar{L}\cos(P - A) = & 0,1351669 \\ \bar{L}\cos(P - B) = & 0,5449559 \\ \hline 2\log \operatorname{tg}\frac{c}{2} = & 0,5274077 \\ \log \operatorname{tg}\frac{c}{2} = & 0,2637039 \\ \frac{c}{2} = & 61^\circ 24' 54'',6 \\ c = & 122^\circ 49' 49'',2 \end{array}$$

35. Datos: $A = 125^\circ\ 5'\ 8''$; $B = 160^\circ\ 3'\ 42''$; $C = 130^\circ\ 4'\ 15''$.
Fórmulas: Las del problema anterior.

$$\begin{array}{rl} A = & 125^\circ\ 5'\ 8'' \\ B = & 160^\circ\ 3'\ 42'' \\ C = & 130^\circ\ 4'\ 15'' \\ \hline 2P = & 415^\circ\ 13'\ 5'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} P - A = & 82^\circ\ 31'\ 24'',5 \\ P - B = & 47^\circ\ 32'\ 50'',5 \\ P - C = & 77^\circ\ 32'\ 17'',5 \\ \hline P = & 207^\circ\ 36'\ 32'',5 \end{array}$$

Cálculo de a.	Cálculo de b.
$\log(-\cos P) = \bar{1},94749775$	$\log(-\cos P) = \bar{1},94749775$
$\log\cos(P-A) = \bar{1},1143441$	$\log\cos(P-B) = \bar{1},82929125$
$\bar{L}\cos(P-B) = 0,17070875$	$\bar{L}\cos(P-A) = 0,8856559$
$\bar{L}\cos(P-C) = 0,6659712$	$\bar{L}\cos(P-C) = 0,6659712$
$2\log tg\frac{a}{2} = \bar{1},89852180$	$2\log tg\frac{b}{2} = 1,32841610$
$\log tg\frac{a}{2} = \bar{1},9492609$	$\log tg\frac{b}{2} = 0,66420805$
$\frac{a}{2} = 41^\circ 39' 38'',25$	$\frac{b}{2} = 77^\circ 46' 29'',6$
$a = 83^\circ 19' 16'',5$	$b = 155^\circ 32' 59'',2$

Cálculo de c.

$$\log(-\cos P) = \bar{1},94749775$$
$$\log\cos(P-C) = \bar{1},3340288$$
$$\bar{L}\cos(P-A) = 0,8856559$$
$$\bar{L}\cos(P-B) = 0,17070875$$

$$2\log tg\frac{c}{2} = 0,33789120$$

$$\log tg\frac{c}{2} = 0,16894560$$

$$\frac{c}{2} = 55^\circ 52' 24'',5$$
$$c = 111^\circ 44' 49''$$

36. Datos: $A = 33^\circ 9' 50''$; $B = 78^\circ 42' 9''$; $C = 72^\circ 4' 15''$.
Fórmulas: Las del problema núm. 32.

$A = 33^\circ\ 9' 50''$	$P - A = 58^\circ 48' 17''$
$B = 78^\circ 42'\ 9''$	$P - B = 13^\circ 15' 58''$
$C = 72^\circ\ 4' 15''$	$P - C = 19^\circ 53' 52''$
$2P = 183^\circ 56' 14''$	$P = 91^\circ 58'\ 7''$

CÁLCULO DE a.

$$\log(-\cos P) = \bar{2},5359518$$
$$\log\cos(P - A) = \bar{1},7142933$$
$$\bar{L}\cos(P - B) = 0,0117467$$
$$\bar{L}\cos(P - C) = 0,0267329$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \bar{2},2887247$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \bar{1},14436235$$

$$\frac{a}{2} = 7^\circ\,56'\,15'',7$$
$$a = 15^\circ\,52'\,31'',4$$

CÁLCULO DE b.

$$\log(-\cos P) = \bar{2},5359518$$
$$\log\cos(P - B) = \bar{1},9882533$$
$$\bar{L}\cos(P - A) = 0,2857067$$
$$\bar{L}\cos(P - C) = 0,0267329$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \bar{2},8366447$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \bar{1},41832235$$

$$\frac{b}{2} = 14^\circ\,40'\,55'',8$$
$$b = 29^\circ\,21'\,51'',6$$

CÁLCULO DE c.

$$\log(-\cos P) = \bar{2},5359518$$
$$\log\cos(P - C) = \bar{1},9732671$$
$$\bar{L}\cos(P - A) = 0,2857067$$
$$\bar{L}\cos(P - B) = 0,0117467$$

$$2\log\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \bar{2},8066723$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \bar{1},40333615$$

$$\frac{c}{2} = 14^\circ\,12'\,16'',8$$
$$c = 28^\circ\,24'\,33'',6$$

37. Datos: $a = 113^\circ\,2'$; $b = 82^\circ\,39'$; $C = 138^\circ\,50'$.

Fórmulas (3.^{er} caso, ELEM., p. 164)....

$$\left\{\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} &= \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}.\\
\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} &= \frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}.\\
\operatorname{tg}\frac{c}{2} &= \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\cdot\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{array}{rl} a = & 113^\circ\ 2' \\ b = & 82^\circ\ 39' \\ \hline a + b = & 195^\circ\ 41' \\ \dfrac{a+b}{2} = & 97^\circ\ 50'\ 30'' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} a = & 113^\circ\ 2' \\ b = & 82^\circ\ 39' \\ \hline a - b = & 30^\circ\ 23' \\ \dfrac{a-b}{2} = & 15^\circ\ 11'\ 30'' \end{array}$$

$$\frac{C}{2} = 69^\circ\ 25'$$

CÁLCULO DE $\dfrac{A+B}{2}$

$$\log\cos\frac{a-b}{2} = \bar{1},9845519$$
$$\log\cot\frac{C}{2} = \bar{1},5746601$$
$$\bar{L}\cos\frac{a+b}{2} = 0,8650709$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = 0,4242829$$
$$\frac{A+B}{2} = 110^\circ\ 37'\ 45'',4$$

CÁLCULO DE $\dfrac{A-B}{2}$

$$\log\operatorname{sen}\frac{a-b}{2} = \bar{1},4183822$$
$$\log\cot\frac{C}{2} = \bar{1},5746601$$
$$\bar{L}\operatorname{sen}\frac{a+b}{2} = 0,0040802$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \bar{2},9971225$$
$$\frac{A-B}{2} = 5^\circ\ 40'\ 23'',2$$

$$A = 116^\circ\ 18'\ 8'',6; \quad B = 104^\circ\ 57'\ 22'',2.$$

CÁLCULO DE c.

$$\log\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = 0,8609907$$
$$\log\cos\frac{A+B}{2} = \bar{1},5469371$$
$$\bar{L}\cos\frac{A-B}{2} = 0,0021324$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2} = 0,4100602$$

$$\frac{c}{2} = 68^\circ\ 44'\ 39'',8; \quad c = 137^\circ\ 29'\ 19'',6$$

38. Datos: $a = 120^\circ\ 4'\ 9''$; $b = 115^\circ\ 40'\ 18''$; $C = 120^\circ$.
Fórmulas: Las del número anterior.

$$a = 120^\circ\ 4'\ 9'' \qquad a = 120^\circ\ 4'\ 9''$$
$$b = 115^\circ\ 40'\ 18'' \qquad b = 115^\circ\ 40'\ 18''$$
$$a + b = 235^\circ\ 44'\ 27'' \qquad a - b = 4^\circ\ 23'\ 51''$$
$$\frac{a+b}{2} = 117^\circ\ 52'\ 13'',5 \qquad \frac{a-b}{2} = 2^\circ\ 11'\ 55'',5$$

$$\frac{C}{2} = 60^\circ.$$

CÁLCULO DE $\frac{A+B}{2}$

$$\log\cos\frac{a-b}{2} = \bar{1},9996802$$
$$\log\cot\frac{C}{2} = \bar{1},7614394$$
$$\bar{L}\cos\frac{a+b}{2} = 0,3302431$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = 0,0913627$$

CÁLCULO DE $\frac{A-B}{2}$.

$$\log \operatorname{sen}\frac{a-b}{2} = \bar{2},5839466$$
$$\log\cot\frac{C}{2} = \bar{1},7614394$$
$$\bar{L}\operatorname{sen}\frac{a+b}{2} = 0,0535441$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \bar{2},3989301$$

$$\frac{A+B}{2} = 180^\circ - 50^\circ\ 58'\ 57'',7 = 129^\circ\ 1'\ 2'',3;$$
$$\frac{A-B}{2} = 1^\circ\ 26'\ 7'',3$$
$$A = 130^\circ\ 27'\ 9'',6; \qquad B = 127^\circ\ 34'\ 55''$$

CÁLCULO DE c

$$\log \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = 0,2766988$$
$$\log\cos\frac{A+B}{2} = \bar{1},7990338$$
$$\bar{L}\cos\frac{A-B}{2} = 0,0001363$$
$$\log \operatorname{tg}\frac{c}{2} = 0,0758689$$
$$\frac{c}{2} = 49^\circ\ 58'\ 45'',7$$
$$c = 99^\circ\ 57'\ 31'',4$$

NOTA. La fórmula $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$, en la que tenemos $\cos\frac{a-b}{2}>0$ y $\cos\frac{a+b}{2}<0$, nos da:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}<0 \quad \text{y} \quad \frac{A+B}{2}>90^\circ;$$

hemos tomado, pues, para $\frac{A+B}{2}$ el valor $180^\circ-50^\circ 58' 57'',2$.

39. Datos: $a=110^\circ\,9'\,55''$; $b=115^\circ\,50'\,19''$; $C=100^\circ\,40'\,50''$
Fórmulas: Las del problema núm. 37.

$$a=110^\circ\ \ 9'\,55''$$
$$b=115^\circ\,50'\,19''$$
$$b+a=226^\circ\,14''$$
$$\frac{b+a}{2}=113^\circ\,7''$$

$$a=110^\circ\ \ 9'\,55''$$
$$b=115^\circ\,50'\,19''$$
$$b-a=5^\circ\,40'\,24''$$
$$\frac{b-a}{2}=2^\circ\,50'\,12''$$

$$\frac{C}{2}=50^\circ\,20'\,25''.$$

CÁLCULO DE $\frac{B+A}{2}$.

$$\log\cos\frac{b-a}{2}=\bar{1},9994675$$
$$\log\cot\frac{C}{2}=\bar{1},9185698$$
$$\bar{L}\cos\frac{b+a}{2}=0,4080873$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{B+A}{2}=0,3261246$$

CÁLCULO DE $\frac{B-A}{2}$.

$$\log\operatorname{sen}\frac{b-a}{2}=\bar{2},6945082$$
$$\log\cot\frac{C}{2}=\bar{1},9185698$$
$$\bar{L}\operatorname{sen}=\frac{b+a}{2}=0,0359802$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}=\bar{2},6490582$$

$$\frac{B+A}{2}=180^\circ-64^\circ\,44'\,9'',9=115^\circ\,15'\,50'',1;$$

$$\frac{B-A}{2}=2^\circ\,33'\,7'',5;$$

$$B=117^\circ\,48'\,57'',6;\quad A=112^\circ\,42'\,42'',6.$$

CÁLCULO DE c.

$$\log \operatorname{tg} \frac{b+a}{2} = 0{,}3721071$$

$$\log \cos \frac{B+A}{2} = \bar{1}{,}6302126$$

$$\bar{L} \cos \frac{B-A}{2} = 0{,}0004310$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = 0{,}0027507$$

$$\frac{c}{2} = 45^\circ\, 10'\, 53'',2$$

$$c = 90^\circ\, 21'\, 46'',4.$$

40. Datos: $A = 85^\circ\, 4'$; $B = 75^\circ\, 15'$; $c = 80^\circ\, 40'$.

Fórmulas (4.° caso, ELEM., p. 169.)....

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} &= \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}} \operatorname{tg} \frac{c}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a+b}{2}} \cot \frac{A-B}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\begin{array}{rlrl} A = & 85^\circ\ 4' & A = & 85^\circ\ 4' \\ B = & 75^\circ\ 15' & B = & 75^\circ\ 15' \\ \hline A+B = & 160^\circ\ 19' & A-B = & 9^\circ\ 49' \\ \frac{A+B}{2} = & 80^\circ\ 9'\ 30'' & \frac{A-B}{2} = & 4^\circ\ 54'\ 30'' \end{array}$$

$$\frac{c}{2} = 40^\circ\, 20'.$$

CÁLCULO DE $\frac{a+b}{2}$.

$$\log\cos\frac{A-B}{2} = \bar{1},9984045$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \bar{1},9289396$$
$$\bar{L}\cos\frac{A+B}{2} = 0,7671917$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = 0,6945358$$
$$\frac{a+b}{2} = 78^\circ 34' 37'',3$$
$$a = 82^\circ 47' 38'',2$$

CÁLCULO DE $\frac{a-b}{2}$.

$$\log\operatorname{sen}\frac{A-B}{2} = \bar{2},9322801$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \bar{1},9289396$$
$$\bar{L}\operatorname{sen}\frac{A+B}{2} = 0,0064386$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \bar{2},8676583$$
$$\frac{a-b}{2} = 4^\circ 13'\ 0'',9$$
$$b = 74^\circ 21' 36'',6$$

CÁLCULO DE C.

$$\log\operatorname{sen}\frac{a-b}{2} = \bar{2},8664802$$
$$\log\cot\frac{A-B}{2} = 1,0661244$$
$$\bar{L}\operatorname{sen}\frac{a+b}{2} = 0,0086889$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1},9412935$$
$$\frac{C}{2} = 41^\circ\ 8' 21'',2$$
$$C = 82^\circ 16' 42'',4$$

41. Datos: $A = 100^\circ 10' 20''$; $B = 30^\circ 4' 12''$; $c = 40^\circ 12' 25''$.
Fórmulas: Las del problema anterior.

$$A = 100^\circ 10' 20''$$
$$B = 30^\circ\ 4' 12''$$
$$A + B = 130^\circ 14' 32''$$
$$\frac{A+B}{2} = 65^\circ\ 7' 16''$$

$$A = 100^\circ 10' 20''$$
$$B = 30^\circ\ 4' 12''$$
$$A - B = 70^\circ\ 6'\ 8''$$
$$\frac{A-B}{2} = 35^\circ\ 3'\ 4$$

$$\frac{c}{2} = 20^\circ 6' 12'',5.$$

CÁLCULO DE $\frac{a+b}{2}$.

$$\log \cos \frac{A-B}{2} = \bar{1},9130930$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \bar{1},5635010$$
$$\bar{L} \cos \frac{A+B}{2} = 0,3760258$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \bar{1},8526198$$
$$\frac{a+b}{2} = 35^\circ\, 27'\, 34'',5$$

CÁLCULO DE $\frac{a-b}{2}$.

$$\log \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} = \bar{1},7591441$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{c}{2} = \bar{1},5635010$$
$$\bar{L} \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} = 0,0422974$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \bar{1},3649425$$
$$\frac{a-b}{2} = 13^\circ\, 2'\, 44'',6$$

$$a = 48^\circ 30' 19'',1; \qquad b = 22^\circ 24' 49'',9$$

CÁLCULO DE C.

$$\log \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} = \bar{1},3535865$$
$$\log \cot \frac{A-B}{2} = 0,1539489$$
$$\bar{L} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} = 0,2364758$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \bar{1},7440112$$
$$\frac{C}{2} = 29^\circ\, 52'',2$$
$$C = 58^\circ\, 1'\, 43'',4.$$

42. Datos: $A = 95^\circ\, 4'\, 18''$; $B = 85^\circ\, 42'\, 50''$; $c = 60^\circ\, 20'\, 30''$.
Fórmulas: Las del problema núm. 40.

$$A = 95^\circ\, 4'\, 18''$$
$$B = 85^\circ\, 42'\, 50''$$
$$A + B = 180^\circ\, 47'\, 8''$$
$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ\, 23'\, 34''$$

$$A = 95^\circ\, 4'\, 18''$$
$$B = 85^\circ\, 42'\, 50''$$
$$A - B = 9^\circ\, 21'\, 28''$$
$$\frac{A-B}{2} = 4^\circ\, 40'\, 44''$$

$$c = 30^\circ\, 10'\, 15''.$$

CÁLCULO DE $\frac{a+b}{2}$.

$$\log\cos\frac{A-B}{2} = \bar{1},9985503$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \bar{1},7644247$$
$$\bar{L}\cos\frac{A+B}{2} = 2,1639817$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = 1,9269567$$

CÁLCULO DE $\frac{a-b}{2}$.

$$\log\operatorname{sen}\frac{A-B}{2} = \bar{2},9115373$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \bar{1},7644247$$
$$\bar{L}\operatorname{sen}\frac{A+B}{2} = 0,0000102$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \bar{2},6759722$$

$$\frac{a+b}{2} = 180° - 89°\,19'\,19'',6 = 90°\,40'\,40'',4$$
$$\frac{a-b}{2} = 2°\,42'\,54''$$
$$a = 93°\,23'\,34'',4 \qquad b = 87°\,57'\,46'',4$$

CÁLCULO DE c.

$$\log\operatorname{sen}\frac{a-b}{2} = \bar{2},6754847$$
$$\log\cot\frac{A-B}{2} = 1,0870130$$
$$\bar{L}\operatorname{sen}\frac{a+b}{2} = 0,0000304$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1},7625281$$

$$\frac{C}{2} = 30°\,3'\,44''$$
$$C = 60°\,7'\,28''$$

43. Datos: $a = 55°\,12'$; $b = 62°\,30'$; $A = 45°\,15'$.

Fórmulas (5.° caso, ELEM., p. 154)....
$$\begin{cases} \operatorname{sen} B = \dfrac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}. \\[2ex] \cot\dfrac{C}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}\,\dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}. \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{c}{2} = \operatorname{tg}\dfrac{a+b}{2}\,\dfrac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{sen} A &= \bar{1},8513717 \\
\log \operatorname{sen} b &= \bar{1},9479289 \\
\bar{L} \operatorname{sen} a &= 0,0855779 \\
\hline
\log \operatorname{sen} B &= \bar{1},8848785
\end{aligned}$$

$$B' = 50^\circ\, 5'\, 54'',1; \quad B'' = 129^\circ\, 54'\, 5'',9.$$

Y puesto que tenemos

$$a - b < 0; \quad A - B' < 0; \quad A - B'' < 0,$$

los dos valores B′ y B″ satisfacen al problema.

$$\begin{aligned}
A + B' &= 95^\circ\, 20'\, 54'',1 \\
\frac{A + B'}{2} &= 47^\circ\, 40'\, 27'' \\
A - B' &= -\ 4^\circ\, 50'\, 54'',1 \\
\frac{A - B'}{2} &= -\ 2^\circ\, 25'\, 27'',1
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
A + B'' &= 175^\circ\ 9'\ 5'',9 \\
\frac{A + B''}{2} &= 87^\circ\, 34'\, 32'',9 \\
A - B'' &= -\ 84^\circ\, 39'\ 5'',9 \\
\frac{A - B''}{2} &= -\ 42^\circ\, 19'\, 32'',9
\end{aligned}$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{55^\circ\, 12' + 62^\circ\, 30'}{2} = 58^\circ\, 51';$$

$$\frac{a-b}{2} = \frac{55^\circ\, 12' - 62^\circ\, 30'}{2} = -\ 3^\circ\, 39'.$$

Cálculo de C′

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg} \frac{A + B'}{2} &= 0,0405987 \\
\log \cos \frac{a+b}{2} &= \bar{1},7137260 \\
\bar{L} \cos \frac{a-b}{2} &= 0,0008818 \\
\hline
\log \cot \frac{C'}{2} &= \bar{1},7552065 \\
\frac{C'}{2} &= 60^\circ\, 21'\, 17'',2 \\
C' &= 120^\circ\, 42'\, 34'',2
\end{aligned}$$

Cálculo de C″

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg} \frac{A + B''}{2} &= 1,3732960 \\
\log \cos \frac{a+b}{2} &= \bar{1},7137260 \\
\bar{L} \cos \frac{a-b}{2} &= 0,0008818 \\
\hline
\log \cot \frac{C''}{2} &= 1,0879038 \\
\frac{C''}{2} &= 4^\circ\, 40'\ 9'',6 \\
C'' &= 9^\circ\, 20'\, 19'',2
\end{aligned}$$

CÁLCULO DE c'	CÁLCULO DE c''
$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 0{,}2186544$	$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = 0{,}2186544$
$\log \cos \frac{A+B'}{2} = \bar{1}{,}8282382$	$\log \cos \frac{A+B''}{2} = \bar{2}{,}6263153$
$\bar{L} \cos \frac{A-B'}{2} = 0{,}0003889$	$\bar{L} \cos \frac{A-B''}{2} = 0{,}1311629$
$\log \operatorname{tg} \frac{c'}{2} = 0{,}0472815$	$\log \operatorname{tg} \frac{c''}{2} = \bar{2}{,}9761326$
$\frac{c'}{2} = 48^\circ\ 6'\ 45'',9$	$\frac{c''}{2} = 5^\circ\ 24'\ 25'',5$
$c' = 96^\circ\ 13'\ 31'',8$	$c'' = 10^\circ\ 48'\ 51''$

Las dos soluciones del problema son, pues,

$B' = 50^\circ\ 5'\ 54'',1$	$B'' = 129^\circ\ 54'\ 5'',9$
$C' = 120^\circ\ 42'\ 34'',4$	$C'' = 9^\circ\ 20'\ 19'',2$
$c' = 96^\circ\ 13'\ 31'',8$	$c'' = 10^\circ\ 48'\ 51''$.

44. Datos: $a = 36^\circ\ 18'\ 25''$; $b = 42^\circ\ 15'\ 22''$;
$A = 50^\circ\ 40'\ 30''$.

Fórmulas: Las del problema anterior.

$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}8884961 \\ \log \operatorname{sen} b &= \bar{1}{,}8276572 \\ \bar{L} \operatorname{sen} a &= 0{,}2275970 \\ \hline \log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}9437503 \end{aligned}$$

$$B' = 61^\circ\ 27'\ 50'',4; \quad B'' = 118^\circ\ 32'\ 9'',6.$$

Puesto que las dos desigualdades

$$A - B' < 0 \quad \text{y} \quad A - B'' < 0$$

son de mismo sentido que $a - b < 0$, los dos valores B′ y B″ satisfacen al problema, que tiene, pues, dos soluciones.

$$\frac{A+B'}{2} = 56^\circ\ 4'\ 10'',3$$
$$\frac{A-B'}{2} = -\ 5^\circ\ 23'\ 40'',3$$
$$\frac{a+b}{2} = 39^\circ\ 16'\ 53'',5$$

$$\frac{A+B''}{2} = 84^\circ\ 36'\ 19'',7$$
$$\frac{A-B''}{2} = -\ 33^\circ\ 55'\ 49'',7$$
$$\frac{a-b}{2} = -\ 2^\circ\ 58'\ 28'',5$$

CÁLCULO DE C'

$$\log \operatorname{tg} \frac{A+B'}{2} = 0,1721500$$
$$\log \cos \frac{a+b}{2} = \bar{1},8887659$$
$$\bar{L} \cos \frac{a-b}{2} = 0,0005855$$
$$\log \cot \frac{C'}{2} = 0,0615014$$
$$\frac{C'}{2} = 40^\circ\ 57'\ 23'',8$$
$$C' = 81^\circ\ 54'\ 47'',6$$

CÁLCULO DE C''

$$\log \operatorname{tg} \frac{A+B''}{2} = 1,0248832$$
$$\log \cos \frac{a+b}{2} = \bar{1},8887659$$
$$\bar{L} \cos \frac{a-b}{2} = 0,0005855$$
$$\log \operatorname{cotg} \frac{C''}{2} = 0,9142346$$
$$\frac{C''}{2} = 6^\circ\ 56'\ 46'',6$$
$$C'' = 13^\circ\ 53'\ 33'',2$$

CÁLCULO DE c'.

$$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \bar{1},9127279$$
$$\log \cos \frac{A+B'}{2} = \bar{1},7467793$$
$$\bar{L} \cos \frac{A-B'}{2} = 0,0019278$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{c'}{2} = \bar{1},6614350$$
$$\frac{c'}{2} = 24^\circ\ 38'\ 10'',4$$
$$c' = 49^\circ\ 16'\ 20'',8$$

CÁLCULO DE c''.

$$\log \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \bar{1},9127279$$
$$\log \cos \frac{A+B''}{2} = \bar{2},9731890$$
$$\bar{L} \cos \frac{A-B''}{2} = 0,0810708$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{c''}{2} = \bar{2},9669877$$
$$\frac{c''}{2} = 5^\circ\ 17'\ 42'',3$$
$$c'' = 10^\circ\ 35'\ 24'',6$$

Las dos soluciones del problema son:

$B' = 61^\circ\, 27'\, 50'',6$	$B'' = 118^\circ\, 32'\ \ 9'',4$
$C' = 81^\circ\, 54'\, 47'',6$	$C'' = \ \ 13^\circ\, 53'\, 33'',2$
$c' = 49^\circ\, 16'\, 20'',8$	$c'' = \ \ 10^\circ\, 35'\, 24'',6$

45. Datos: $a = 33^\circ 19' 30''$; $b = 32^\circ 12' 15''$; $A = 20^\circ 12' 36''$.

Fórmulas (5.° caso, 2.° método; ELEMENTOS, página 154). . .

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} B = \dfrac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a}. \\ \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} b \cos A; \quad \cos(c - \varphi) = \dfrac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}. \\ \operatorname{tg} \psi = \dfrac{\cot A}{\cos b}; \quad \cos(C - \psi) = \dfrac{\operatorname{tg} b \cos \psi}{\operatorname{tg} a}. \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} A &= \bar{1},5384003 \\ \log \operatorname{sen} b &= \bar{1},7266765 \\ \bar{L} \operatorname{sen} a &= 0,2601213 \\ \hline \log \operatorname{sen} B &= \bar{1},5251981 \\ B &= 19^\circ\, 34'\, 47'' \end{aligned}$$

CÁLCULO DE φ.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} b &= \bar{1},7992269 \\ \cos A &= \bar{1},9724032 \\ \hline \log \operatorname{tg} \varphi &= \bar{1},7716301 \\ \varphi &= 30^\circ\, 35'\, 8'' \end{aligned}$$

CÁLCULO DE c.

$$\begin{aligned} \log \cos a &= \bar{1},9219817 \\ \log \cos \varphi &= \bar{1},9349378 \\ \bar{L} \cos b &= 0,0725403 \\ \hline \log \cos(c - \varphi) &= \bar{1},9294598 \\ c - \varphi &= 31^\circ\, 46'\, 46'',6 \\ c &= 62^\circ\, 21'\, 54'',6 \end{aligned}$$

CÁLCULO DE ψ.

$$\begin{aligned} \log \cot A &= 0,4340029 \\ \bar{L} \cos b &= 0,0725403 \\ \hline \log \operatorname{tg} \psi &= 0,5065432 \\ \psi &= 72^\circ\, 41'\, 53'',6 \end{aligned}$$

CÁLCULO DE C.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} b &= \bar{1},7992269 \\ \log \cos \psi &= \bar{1},4733440 \\ \bar{L} \operatorname{tg} a &= 0,1821029 \\ \hline \log \cos(C - \psi) &= \bar{1},4546738 \end{aligned}$$

$$C - \psi = 73^\circ\, 26'\, 52'',3; \qquad C = 146^\circ\, 8'\, 45'',9.$$

46. Datos: $A = 144^\circ\,48'$; $B = 117^\circ\,30'$; $a = 154^\circ\,45'$.

Fórmulas (6.° caso, Elem., p. 156)...

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen} b &= \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}. \\ \cot \frac{C}{2} &= \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a-b}{2}} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}. \\ \operatorname{tg} \frac{c}{2} &= \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} \operatorname{tg} \frac{a+b}{2}. \end{aligned}\right.$$

Cálculo de b.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} B &= \bar{1},9479289 \\ \operatorname{sen} a &= \bar{1},6299890 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 0,2392517 \\ \hline \log \operatorname{sen} b &= \bar{1},8171696 \end{aligned}$$

$$b' = 41^\circ\,1'\,33'',6; \quad b'' = 138^\circ\,58'\,26'',4.$$

Las diferencias $a - b'$ y $a - b''$, siendo ambas del mismo signo que $A - B$, los valores b' y b'' satisfacen al problema, que tiene, pues, dos soluciones.

$$\frac{a+b'}{2} = 97^\circ\,53'\,16'',8 \qquad\qquad \frac{a+b''}{2} = 146^\circ\,51'\,43'',2$$

$$\frac{a-b'}{2} = 56^\circ\,51'\,43'',2 \qquad\qquad \frac{a-b''}{2} = 7^\circ\,53'\,16'',8$$

$$\frac{A+B}{2} = 131^\circ\,9' \qquad\qquad \frac{A-B}{2} = 13^\circ\,39'$$

Cálculo de C'.

$$\begin{aligned} \log \cos \frac{a+b'}{2} &= \bar{1},1374716 \\ \bar{L} \cos \frac{a-b'}{2} &= 0,2622847 \\ \log \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= 0,0585415 \\ \hline \log \cot \frac{C'}{2} &= \bar{1},4582978 \end{aligned}$$

Cálculo de C''.

$$\begin{aligned} \log \cos \frac{a+b''}{2} &= \bar{1},9229103 \\ \bar{L} \cos \frac{a-b''}{2} &= 0,0041288 \\ \log \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= 0,0585415 \\ \hline \log \cot \frac{C''}{2} &= \bar{1},9855806 \end{aligned}$$

$$\frac{C'}{2} = 73^\circ\, 58'\, 19'',1 \qquad\qquad \frac{C''}{2} = 45^\circ\, 57'\, 3'',5$$

$$C' = 147^\circ\, 56'\, 38'',2 \qquad\qquad C'' = 91^\circ\, 54'\, 7''$$

Cálculo de c'.

$$\log\cos\frac{A+B}{2} = \bar{1},8182474$$
$$\bar{L}\cos\frac{A-B}{2} = 0,0124430$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a+b'}{2} = 0,8583997$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{c'}{2} = 0,6890901$$
$$\frac{c'}{2} = 78^\circ\, 26'\, 12'',3$$
$$c' = 156^\circ\, 52'\, 24'',6$$

Cálculo de c''.

$$\log\cos\frac{A+B}{2} = \bar{1},8182474$$
$$\bar{L}\cos\frac{A-B}{2} = 0,0124430$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{a+b''}{2} = \bar{1},8148050$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{c''}{2} = \bar{1},6454954$$
$$\frac{c''}{2} = 23^\circ\, 50'\, 56'',4$$
$$c'' = 47^\circ\, 41'\, 52'',8$$

47. Datos: $A = 85^\circ\, 12'\, 15''$; $B = 80^\circ\, 18'\, 30''$;

$$a = 84^\circ\, 12'\, 35''.$$

Fórmulas: Las del problema anterior.

$$\log \operatorname{sen} B = \bar{1},9937571$$
$$\log \operatorname{sen} a = \bar{1},9977785$$
$$\bar{L} \operatorname{sen} A = 0,0015234$$
$$\log \operatorname{sen} b = \bar{1},9930590$$

$$b' = 79^\circ\, 47'\, 0'',8; \qquad b'' = 100^\circ\, 12'\, 59'',2.$$

Las diferencias $a - b'$ y $a - b''$, siendo de signo diferente, el problema tiene una sola solución, y puesto que tenemos á la vez $A - B > 0$ y $a - b' > 0$, el valor b' satisface al problema.

$$\frac{a+b}{2} = 81^\circ\, 59'\, 47'',9 \qquad\qquad \frac{a-b}{2} = 2^\circ\, 12'\, 47'',1$$

$$\frac{A+B}{2} = 82^\circ\, 45'\, 22'',5 \qquad\qquad \frac{A-B}{2} = 2^\circ\, 26'\, 52'',5$$

CÁLCULO DE C.	CÁLCULO DE c.
$\log\cos\frac{a+b}{2} = \bar{1},1437366$	$\log\cos\frac{A+B}{2} = \bar{1},1006833$
$\log\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = 0,8958366$	$\log\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = 0,8520128$
$\bar{L}\cos\frac{a-b}{2} = 0,0003242$	$\bar{L}\cos\frac{A-B}{2} = 0,0003965$
$\log\cot\frac{C}{2} = 0,0398974$	$\log\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \bar{1},9530926$
$\frac{C}{2} = 42^\circ\,22'\,18'',8$	$\frac{c}{2} = 41^\circ\,54'\,42'',4$
$C = 84^\circ\,44'\,37'',6$	$c = 83^\circ\,49'\,24'',8$

48. Datos: $A = 60^\circ 25' 32''$; $B = 56^\circ 15' 20''$; $a = 75^\circ 12' 15''$.

Fórmulas: Las de los dos problemas anteriores.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} B &= \bar{1},9198745 \\ \log \operatorname{sen} a &= \bar{1},9853555 \\ \bar{L} \operatorname{sen} A &= 0,0606230 \\ \hline \log \operatorname{sen} b &= \bar{1},9658530 \end{aligned}$$

$$b' = 67^\circ\,34'\,33''; \quad b'' = 112^\circ\,25'\,27''.$$

Las diferencias $a - b'$ y $a - b''$ son de signos diferentes; el problema tiene, pues, una sola solución; y puesto que $a - b'$ es positivo así como $A - B$, el valor b' satisface al problema.

$\frac{a+b}{2} = 71^\circ\,23'\,24''$	$\frac{a-b}{2} = 3^\circ\,48'\,51''$
$\frac{A+B}{2} = 58^\circ\,20'\,26''$;	$\frac{A-B}{2} = 2^\circ\;\;5'\;\;6''$

CÁLCULO DE C.	CÁLCULO DE c.
$\log\cos\frac{a+b}{2} = \bar{1},5039605$	$\log\cos\frac{A+B}{2} = \bar{1},7200512$
$\log \operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = 0,2099717$	$\log \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = 0,4727162$
$\bar{L}\cos\frac{a-b}{2} = 0,0009630$	$\bar{L}\cos\frac{A-B}{2} = 0,0002876$
$\log\cot\frac{C}{2} = \bar{1},7148952$	$\log \operatorname{tg}\frac{c}{2} = 0,1930550$
$\frac{C}{2} = 62^\circ\, 35'\, 7'',3$	$\frac{c}{2} = 57^\circ\, 20'\, 5'',7$
$C = 125^\circ\, 10'\, 14'',6$	$c = 114^\circ\, 40'\, 11'',4$

CAPÍTULOS V Y VI

Aplicaciones.

49. El volumen de un tetraedro en función de sus aristas y de sus caras lo da la fórmula

$$V = \frac{l\,l'\,l''}{3!}\,\omega. \qquad \text{(ELEMENTOS, pág. 183.)}$$

En la fórmula

$$\omega = \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}$$

(ELEM., pág. 119) reemplacemos a, b y c por sus valores; obtenemos:

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2},$$

de donde resulta: $\quad V = \dfrac{10\,.\,12\,.\,15}{2\,.\,3\,.\,2} = 150 \text{ cm.}^3$

50. En un tetraedro regular las caras son iguales á 60°

$$\omega = \sqrt{1 - 3\cos^2 60^\circ + 2\cos^3 60^\circ} = \sqrt{1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

luego $$V = \frac{a^3}{6}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

Esta misma fórmula se encuentra también por medio de la Geometria.

51. El paralelepipedo es igual á seis veces el tetraedro, que tiene las mismas aristas y el mismo ángulo sólido, luego

$$V = 2\, l\, l'\, l''\, \omega.$$

$$\omega = \sqrt{1 - \cos^2 90^\circ - 2\cos^2 60^\circ + 2\cos 90^\circ \cos^2 60^\circ} =$$
$$= \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$V = \frac{2\,.\,15\,.\,20\,.\,25\,.\,\sqrt{2}}{2} = 12990 \text{ cm.}^3$$

52. Si consideramos la cara que tiene por arista,

$$m = 12 \text{ cm}; \quad m' = 20 \text{ cm}; \quad m'' = 18 \text{ cm},$$

tendremos (ELEM. pág. 184):

$$\cos a = \frac{l^2 + l'^2 - m^2}{2\, l l'} = \frac{100 + 144 - 144}{2\,.\,10\,.\,12} = \frac{5}{12};$$

$$\cos b = \frac{l^2 + l''^2 - m'^2}{2\, l l''} = \frac{100 + 225 - 400}{2\,.\,10\,.\,15} = -\frac{1}{4};$$

$$\cos c = \frac{l'^2 + l''^2 - m''^2}{2\, l' l''} = \frac{144 + 225 - 324}{2\,.\,12\,.\,15} = \frac{1}{8};$$

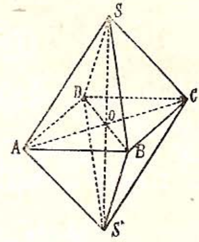
$$\omega = \sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{25}{144} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{10}{12\,.\,4\,.\,8}} =$$

$$= \sqrt{\frac{576 - 100 - 36 - 9 - 15}{576}} = \sqrt{\frac{416}{576}} = \frac{1}{6}\sqrt{13};$$

$$V = \frac{1}{3!}\, l l' l'' \omega = \frac{10\,.\,12\,.\,15\sqrt{13}}{2\,.\,3\,.\,6} = 50\sqrt{13} = 180{,}25 \text{ cm}^3.$$

53. Los planos trazados por los ejes S S′ y D B, A C y D B descomponen el octaedro en cuatro tetraedros, cuyas aristas son iguales á a, y sus caras de 60°, 60° y 90°; el volumen de cada uno será, pues,



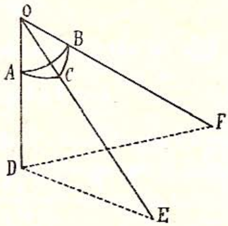
$$V = \frac{a^3}{2 \cdot 3}\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{a^3}{6}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

El volumen total será:

$$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}.$$

54. Supondremos que las inclinaciones dadas son con relación al plano horizontal; con respecto á la vertical, las inclinaciones serán 90° — 6° 12′ = 83° 48′ y 90° — 8° 20′ = 81° 40′.



Si desde el punto de observación, tomado como centro, se imagina una superficie esférica de radio arbitrario, los arcos B C, A B y A C serán, respectivamente, la medida del ángulo observado y de las inclinaciones de sus lados sobre la vertical O D; el ángulo A del triángulo esférico B A C será igual á E D F; basta, pues, calcular el ángulo A conociendo los tres lados del triángulo A B C.

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen}(p-a)}}.$$

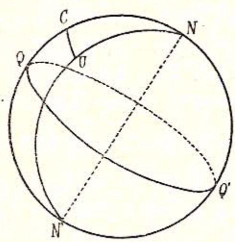
(Elementos, pág. 151, 1.er caso.)

$$\begin{aligned} a &= 52^\circ\, 15' \\ b &= 83^\circ\, 48' \\ c &= 81^\circ\, 40' \\ \hline 2p &= 217^\circ\, 43' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p - a &= 56^\circ\,36'\,30''; & \bar{\mathrm{L}}\,\mathrm{sen}\,(p-a) &= 0{,}0783510\\
p - b &= 25^\circ\;\,3'\,30''; & \log \mathrm{sen}\,(p-b) &= \bar{1}{,}6268952\\
p - c &= 27^\circ\,11'\,30''; & \log \mathrm{sen}\,(p-c) &= \bar{1}{,}6598863\\
p &= 108^\circ\,51'\,15''; & \bar{\mathrm{L}}\,\mathrm{sen}\,p &= 0{,}0239617\\
 & & \log \mathrm{tg}\,\frac{\mathrm{A}}{2} &= \bar{1}{,}3890942
\end{aligned}
$$

$$\frac{\mathrm{A}}{2} = 13^\circ\,45'\,50'',8; \quad \mathrm{A} = 27^\circ\,31'\,41'',6.$$

55. Trazando los meridianos de C y de U y el arco de círculo máximo CU, que une ambos puntos, se forma un triángulo esférico NCU, cuyos elementos conocidos son los siguientes:



$$
\begin{aligned}
\mathrm{NC} &= 90^\circ - 19^\circ\,25'\,17'' = 70^\circ\,34'\,43'';\\
\mathrm{NU} &= 90^\circ - 19^\circ\,12'\,21'' = 70^\circ\,47'\,39'';\\
\mathrm{N} &= 2'\,53'' + 3^\circ\,1'' \quad = 3^\circ\,2'\,54''.
\end{aligned}
$$

El problema consiste, pues, en calcular un lado de un triángulo esférico conociendo los otros dos lados y el ángulo comprendido.

La fórmula $\cos c = \cos a \cos b + \mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, b \cos \mathrm{C}$ equivale en este caso á

$$\cos \mathrm{CU} = \cos \mathrm{NC} \cos \mathrm{NU} + \mathrm{sen}\, \mathrm{NC}\, \mathrm{sen}\, \mathrm{NU} \cos \mathrm{N}.$$

$$
\begin{aligned}
\log \mathrm{sen}\, \mathrm{NC} &= \bar{1}{,}9745571\\
\log \mathrm{sen}\, \mathrm{NU} &= \bar{1}{,}9751297\\
\log \cos \mathrm{N} &= \bar{1}{,}9993851\\
\log \beta &= \bar{1}{,}9490719\\
\log \alpha &= \bar{1}{,}0389557\\
\log \frac{\beta}{\alpha} &= 0{,}9101162
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\log \cos \mathrm{NC} &= \bar{1}{,}5218089\\
\log \cos \mathrm{NU} &= \bar{1}{,}5171468\\
\log \alpha &= \bar{1}{,}0389557\\
\log \text{ de ad.} &= 0{,}9604936\\
\log \cos \mathrm{NC} &= \bar{1}{,}9994493
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{NC} = 2^\circ\,53'\,5''.$$

La distancia en kilómetros será:

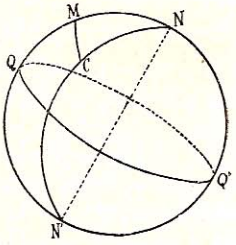
$$\frac{10000 \times 10385}{90 \times 60 \times 60} = 320{,}523 \text{ km.}$$

Nota.—En este problema y en los siguientes, hasta el número 60 inclusive, empleamos la fórmula

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

para el cálculo de un lado de un triángulo esférico, conociendo los otros dos lados y el ángulo comprendido.

Representamos, respectivamente, por α y por β las cantidades $\cos a \,.\, \cos b$ y $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$, y hacemos uso de las tablas de Gauss. (Véase Elementos de Trigonometría, pág. 106, número 178, y pág. 153, núm. 69, III).



56. Este problema es idéntico al anterior, y los datos son:

$$NM = 90^{\circ} - 23^{\circ}\,11'\,17'' = 66^{\circ}\,48'\,43''$$
$$NC = 90^{\circ} - 18^{\circ}\,8'\,56'' = 71^{\circ}\,51'\,4''$$
$$N = 8^{\circ}\,43'\,7'' + 7^{\circ}\,17'\,14'' = 16^{\circ}\,21'.$$

Tenemos:

$$\cos MC = \cos NM \cos NC + \operatorname{sen} NM \operatorname{sen} NC \cos N.$$

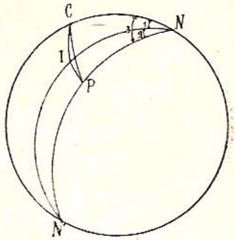
$$\log \operatorname{sen} NM = \bar{1}{,}9634183$$
$$\log \operatorname{sen} NC = \bar{1}{,}9778381$$
$$\log \cos N = \bar{1}{,}9828290$$
$$\log \beta = \bar{1}{,}9240854$$
$$\log \alpha = \bar{1}{,}0886613$$
$$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0{,}8354241$$

$$\log \cos NM = \bar{1}{,}5952209$$
$$\log \cos NC = \bar{1}{,}4934404$$
$$\log \alpha = \bar{1}{,}0886613$$
$$\text{log de adición} = 0{,}8946371$$
$$\log \cos MC = \bar{1}{,}9832984$$

$$MC = 15^{\circ}\,47'\,18'',2.$$

Distancia en kilómetros: $\dfrac{10000 \times 56868{,}5}{90 \times 60 \times 60} = 1754{,}259$ km.

57. El problema consiste en determinar el ángulo C del triángulo CIP, cuyos lados se calcularán por medio de los datos siguientes:



$$\mathrm{NC} = 90^{\circ} - 19^{\circ}\,25'\,17'' = 70^{\circ}\,34'\,43''$$
$$\mathrm{NI} = 90^{\circ} - 19^{\circ}\,11'\,11'' = 70^{\circ}\,48'\,49''$$
$$\mathrm{NP} = 90^{\circ} - 19^{\circ}\,1'\,17'' = 70^{\circ}\,58'\,43''$$
$$N_1 = 32'\,37'' - 29'\,3'' = 3'\,34''$$
$$N_2 = 2'\,53'' + 29'\,3'' = 31'\,56''$$
$$N_3 = 2'\,53'' + 32'\,27'' = 35'\,20''$$

Triángulo ICN:

$$\cos \mathrm{IC} = \cos \mathrm{CN} \,.\, \cos \mathrm{IN} + \operatorname{sen} \mathrm{CN} \,.\, \operatorname{sen} \mathrm{IN} \cos N_2;$$

$$\log \operatorname{sen} \mathrm{CN} = \bar{1},9745571$$
$$\log \operatorname{sen} \mathrm{IN} = \bar{1},9751811$$
$$\log \cos N_2 = \bar{1},9999813$$
$$\log \beta = \bar{1},9497195$$
$$\log \alpha = \bar{1},0385323$$
$$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,9111872$$

$$\log \cos \mathrm{CN} = \bar{1},5218089$$
$$\log \cos \mathrm{IN} = \bar{1},5167234$$
$$\log \alpha = \bar{1},0385323$$
$$\log \text{ de adición} = 0,9614475$$
$$\log \cos \mathrm{IC} = \bar{1},9999798$$

$$\mathrm{IC} = 33'\,10''.$$

Triángulo INP:

$$\cos \mathrm{IP} = \cos \mathrm{IN} \,.\, \cos \mathrm{NP} + \operatorname{sen} \mathrm{IN} \,.\, \operatorname{sen} \mathrm{NP} \cos N_1;$$

$$\log \operatorname{sen} \mathrm{IN} = \bar{1},9751811$$
$$\log \operatorname{sen} \mathrm{NP} = \bar{1},9756142$$
$$\log \cos N_1 = \bar{1},9999998$$
$$\log \beta = \bar{1},9507951$$
$$\log \alpha = \bar{1},0298359$$
$$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,9209592$$

$$\log \cos \mathrm{IN} = \bar{1},5167234$$
$$\log \cos \mathrm{NP} = \bar{1},5131125$$
$$\log \alpha = \bar{1},0298359$$
$$\log \text{ de adición} = 0,9701622$$
$$\log \cos \mathrm{IP} = \bar{1},9999981$$

$$\mathrm{IP} = 10'\,10''.$$

Triángulo CNP:

$$\cos CP = \cos CN \,.\, \cos NP + \operatorname{sen} CN \operatorname{sen} NP \cos N_3;$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log \operatorname{sen} CN = & \bar{1},9745571 & \log \cos CN = & \bar{1},5218089 \\
\log \operatorname{sen} NP = & \bar{1},9756142 & \log \cos NP = & \bar{1},5131125 \\
\log \operatorname{sen} N_3 = & \bar{1},9999771 & \log \alpha = & \bar{1},0349214 \\
\log \beta = & \bar{1},9501484 & \log \text{ de adición} = & 9650476 \\
\log \alpha = & \bar{1},0349214 & \log CP = & \bar{1},9999690 \\
\log \dfrac{\beta}{\alpha} = & 0,9152270 & &
\end{array}$$

$$CP = 38'\,3''.$$

Triángulo CIP:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p - CI)\operatorname{sen}(p - CP)}{\operatorname{sen} p \,.\, \operatorname{sen}(p - IP)}}\,.$$

$$\begin{array}{rl|rl}
CI = & 33'\,10'' & p - CI = & 9'\;\;2'',5 \\
IP = & 10'\,10'' & p - IP = & 32'\;\;2'',5 \\
CP = & 41'\;\;5'' & p - CP = & 1'\;\;7'',5 \\
2p = & 84'\,25'' & p = & 42'\,12'',5
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{sen}(p - CI) &= \bar{3},4199739 \\
\log \operatorname{sen}(p - CP) &= \bar{4},5148668 \\
\bar{L} \operatorname{sen} p &= 1,9108866 \\
\bar{L} \operatorname{sen}(p - IP) &= 2,0305651 \\
2 \log \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \bar{3},8762924 \\
\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \bar{2},9381462
\end{aligned}$$

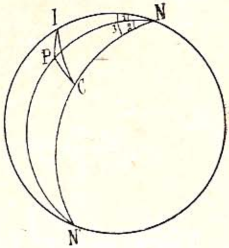
$$\frac{C}{2} = 4^\circ\,57'\,23'',8; \qquad C = 9^\circ\,54'\,47'',6.$$

Resp. La distancia angular es de $9^\circ\,54'\,47'',6$.

58. Calcularemos en primer lugar los lados del triángulo IPC como en el problema anterior; la fórmula de Simón

Lhuillier (ELEM., pág. 178) nos dará luego el exceso esférico.

Los elementos conocidos son:



$$NI = 90^\circ - 19^\circ\, 11'\, 11'' = 70^\circ\, 48'\, 49''$$
$$NP = 90^\circ - 19^\circ\ \ 1'\, 17'' = 70^\circ\, 58'\, 43''$$
$$NC = 90^\circ - 19^\circ\ \ 1'\, 31'' = 70^\circ\, 58'\, 29''$$
$$N_1 = \ 32'\, 37'' - 29'\, 3'' = \ 3'\, 34''$$
$$N_2 = 2^\circ\, 5'\, 16'' - 32'\, 37'' = 1^\circ\, 32'\, 39''$$
$$N_3 = 2^\circ\, 5'\, 16'' - 29'\ \ 3'' = 1^\circ\, 36'\, 13''$$

Triángulo NIP:

$$\cos IP = \cos NI \cos NP + \operatorname{sen} NI \operatorname{sen} NP \cos N_1;$$

$$\log \operatorname{sen} NI = \bar{1},9751811$$
$$\log \operatorname{sen} NP = \bar{1},9756142$$
$$\log \cos N_1 = \bar{1},9999998$$
$$\log \beta = \bar{1},9507951$$
$$\log \alpha = \bar{1},0298359$$
$$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,9209592$$

$$\log \cos NI = \bar{1},5131125$$
$$\log \cos NP = \bar{1},5131980$$
$$\log \alpha = \bar{1},0263105$$
$$\log \text{ de adición} = 0,9701622$$
$$\log \cos IP = \bar{1},9999981$$

$$IP = 10'\, 10''.$$

Triángulo NPC:

$$\cos PC = \cos NP \cos NC + \operatorname{sen} NP \operatorname{sen} NC \cos N_2;$$

$$\log \operatorname{sen} NP = \bar{1},9756142$$
$$\log \operatorname{sen} NC = \bar{1},9756041$$
$$\log \cos N_2 = \bar{1},9998423$$
$$\log \beta = \bar{1},9510606$$
$$\log \alpha = \bar{1},0263105$$
$$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,9247501$$

$$\log \cos NP = \bar{1},5131125$$
$$\log \cos NC = \bar{1},5131980$$
$$\log \alpha = \bar{1},0263105$$
$$\log \text{ de adición} = 0,9735486$$
$$\log \cos PC = \bar{1},9998591$$

$$PC = 1^\circ\, 27'\, 34''.$$

Triángulo NIC:

$$\cos IC = \cos NI \cos NC + \operatorname{sen} NI \operatorname{sen} NC \cos N_3;$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} NI &= \bar{1},9751811 \\ \log \operatorname{sen} NC &= \bar{1},9756041 \\ \log \cos N_3 &= \bar{1},9998299 \\ \hline \log \beta &= \bar{1},9506151 \\ \log \alpha &= \bar{1},0299214 \\ \hline \log \frac{\beta}{\alpha} &= 0,9206937 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos NI &= \bar{1},5167234 \\ \log \cos NC &= \bar{1},5131980 \\ \hline \log \alpha &= \bar{1},0299214 \\ \log \text{ de adición} &= 0,9699251 \\ \hline \log \cos IC &= \bar{1},9998465 \end{aligned}$$

$$IC = 1^\circ\, 31'\, 23'',3.$$

Exceso esférico del triángulo PIC.
(Fórmula de S. Lhuillier):

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{2} = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}.$$

$$\begin{aligned} a = IP &= 10'\, 10'' \\ b = PC &= 1^\circ\, 27'\, 34'' \\ c = IC &= 1^\circ\, 31'\, 23'',3 \\ \hline 2p &= 3^\circ\ \ 9'\ \ 7'',3 \end{aligned}$$

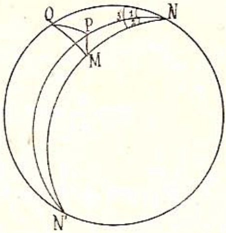
$$\begin{aligned} p - a &= 1^\circ\, 24'\, 23'',6; & \frac{p-a}{2} &= 42'\, 11'',8 \\ p - b &= 6'\, 59'',6; & \frac{p-b}{2} &= 3'\, 29'',8 \\ p - c &= 3'\, 10'',3; & \frac{p-c}{2} &= 1'\, 35'',1 \\ \hline p &= 1^\circ\, 34'\, 33'',6; & \frac{p}{2} &= 47'\, 16'',8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{p}{2} &= \bar{2},1384310 \\ \log \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} &= \bar{2},0890261 \\ \log \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} &= \bar{3},0073797 \\ \log \operatorname{tg} \frac{p-c}{2} &= \bar{4},6637533 \\ \hline 2 \log \operatorname{tg} \frac{S}{2} &= \overline{11},8985901 \end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{S}{2} = \bar{6},94929505$$

$$\frac{S}{2} = 1'',87 \qquad S = 3'',74.$$

59. Este problema es idéntico al anterior.



$$N Q = 90^\circ - 20^\circ\, 35'\, 36'' = 69^\circ\, 24'\, 24''$$
$$N P = 90^\circ - 19^\circ\, 2'\, 31'' = 70^\circ\, 57'\, 29''$$
$$N M = 90^\circ - 19^\circ\, 42'\, 12'' = 70^\circ\, 17'\, 48''$$
$$N_1 = 1^\circ\, 15'\, 16'' + 55'\, 53'' = 2^\circ\, 11'\, 9''$$
$$N_2 = 1^\circ\, 59'\, 3'' - 55'\, 53'' = 1^\circ\, 3'\, 10''$$
$$N_3 = 1^\circ\, 15'\, 16'' + 1^\circ\, 59'\, 3'' = 3^\circ\, 14'\, 19''$$

Triángulo NQP:

$$\cos QP = \cos NQ \cos NP + \operatorname{sen} NQ \operatorname{sen} NP \cos N_1;$$

$$\log \operatorname{sen} NQ = \bar{1},9713225$$
$$\log \operatorname{sen} NP = \bar{1},9755605$$
$$\log \cos N_1 = \bar{1},9996839$$
$$\log \beta = \bar{1},9465669$$
$$\log \alpha = \bar{1},0597770$$
$$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,8867899$$

$$\log \cos NQ = \bar{1},5462128$$
$$\log \cos NP = \bar{1},5135642$$
$$\log \alpha = \bar{1},0597770$$
$$\log \text{ de adición} = 0,9397841$$
$$\log \cos QP = \bar{1},9995611$$

$$QP = 2^\circ\, 34'\, 32''.$$

Triángulo NPM:

$$\cos PM = \cos NP \,.\, \cos NM + \operatorname{sen} NP \operatorname{sen} NM \cos N_2;$$

$$\log \operatorname{sen} NP = \bar{1},9755605$$
$$\log \operatorname{sen} NM = \bar{1},9737977$$
$$\log \cos N_2 = \bar{1},9999267$$
$$\log \beta = \bar{1},9492849$$
$$\log \alpha = \bar{1},0413874$$
$$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,9078975$$

$$\log \cos NP = \bar{1},5135642$$
$$\log \cos NM = \bar{1},5278232$$
$$\log \alpha = \bar{1},0413874$$
$$\log \text{ de adición} = 0,9585185$$
$$\log \cos PM = \bar{1},9999059$$

$$PM = 1^\circ\, 11'\, 34''.$$

Triángulo NQM:

$$\cos QM = \cos NQ \cos NM + \operatorname{sen} NQ \operatorname{sen} NM \cos N_3;$$

$$\begin{array}{r|r}
\log \operatorname{sen} NQ = \bar{1},9713225 & \log \cos NQ = \bar{1},5462128 \\
\log \operatorname{sen} NM = \bar{1},9737977 & \log \cos NM = \bar{1},5278232 \\
\log \cos N_3 = \bar{1},9993070 & \log \alpha = \bar{1},0740360 \\
\log \beta = \bar{1},9444258 & \log \text{ de adición} = 0,9252999 \\
\log \alpha = \bar{1},0740360 & \log \cos QM = \bar{1},9993359 \\
\log \dfrac{\beta}{\alpha} = 0,8703900 &
\end{array}$$

$$QM = 3^\circ\, 10'\, 4'',2.$$

Exceso esférico del triángulo QMP:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{2} = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-c}{2};$$

$$\begin{aligned}
a &= PQ = 2^\circ\, 34'\, 32'' \\
b &= PM = 1^\circ\, 11'\, 34'' \\
c &= QM = 3^\circ\, 10'\, 42'' \\
2p &= 6^\circ\, 56'\, 10'',2
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rr}
p - a = \quad 53'\, 33'',1 & \dfrac{p-a}{2} = \quad 26'\, 46'',5 \\
p - b = 2^\circ\, 16'\, 31'',1 & \dfrac{p-b}{2} = 1^\circ\ \ 8'\, 15'',6 \\
p - c = \quad 18'\ \ 0'',9 & \dfrac{p-c}{2} = \quad 9'\ \ 0'',5 \\
p = 3^\circ\, 28'\ \ 5'',1 & \dfrac{p}{2} = 1^\circ\, 44'\ \ 2'',5
\end{array}$$

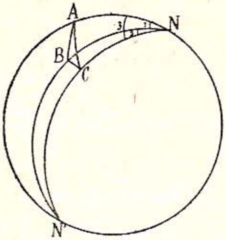
$$\begin{aligned}
\log \operatorname{tg} \frac{p}{2} &= \bar{2},4810650 \\
\log \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} &= \bar{3},8914643 \\
\log \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} &= \bar{2},2979495 \\
\log \operatorname{tg} \frac{p-c}{2} &= \bar{3},4183714 \\
2 \log \operatorname{tg} \frac{S}{2} &= \bar{8},0888512
\end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{S}{2} = \bar{4},0444256$$

$$\frac{S}{2} = 22'',85; \quad S = 45'',7.$$

60. Los datos de este problema son:

$NA = 90^\circ - 23^\circ\,11'\,17'' = 66^\circ\,48'\,43''$
$NB = 90^\circ - 20^\circ\,35'\,36'' = 69^\circ\,24'\,24''$
$NC = 90^\circ - 19^\circ\,26'\,\;1'' = 70^\circ\,33'\,59''$
$N_1 = 7^\circ\,17'\,14'' - 1^\circ\,15'\,16'' = 6^\circ\,1'\,58''$
$N_2 = 1^\circ\,15'\,16''$
$N_3 = 7^\circ\,17'\,14''$



Calcularemos los lados del triángulo ABC como en los dos problemas anteriores.

Triángulo ABN:

$$\cos AB = \cos NA \cos NB + \operatorname{sen} NA \operatorname{sen} NB \cos N_1;$$

$\log \operatorname{sen} NA = \bar{1},9634183$
$\log \operatorname{sen} NB = \bar{1},9713225$
$\log \cos N_1 = \bar{1},9975881$

$\log \beta = \bar{1},9323289$
$\log \alpha = \bar{1},1414337$

$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,7908952$

$\log \cos NA = \bar{1},5952209$
$\log \cos NB = \bar{1},5462128$

$\log \alpha = \bar{1},1414337$
$\log$ de adición $= 0,8560442$

$\log \cos AB = \bar{1},9974779$

$$AB = 6^\circ\,10'\,7'',8.$$

Triángulo BCN:

$$\cos BC = \cos NB \cos NC + \operatorname{sen} NB \operatorname{sen} NC \cos N_2;$$

$\log \operatorname{sen} NB = \bar{1},9713225$
$\log \operatorname{sen} NC = \bar{1},9745244$
$\log \cos N_2 = \bar{1},9998959$

$\log \beta = \bar{1},9457428$
$\log \alpha = \bar{1},0682844$

$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,8774584$

$\log \cos NB = \bar{1},5462128$
$\log \cos NC = \bar{1},5220716$

$\log \alpha = \bar{1},0682844$
$\log$ de adición $= 0,9315348$

$\log \cos BC = \bar{1},9998192$

$$BC = 1^\circ\,39'\,11'',7.$$

Triángulo ACN:

$$\cos AC = \cos NA \cos NC + \operatorname{sen} NA \operatorname{sen} NC \cos N_3;$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} NA &= \bar{1},9634183 \\ \log \operatorname{sen} NC &= \bar{1},9745244 \\ \log \cos N_3 &= \bar{1},9964778 \\ \hline \log \beta &= \bar{1},9344205 \\ \log \alpha &= \bar{1},1172925 \\ \hline \log \frac{\beta}{\alpha} &= 0,8171280 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos NA &= \bar{1},5952209 \\ \log \cos NC &= \bar{1},5220716 \\ \hline \log \alpha &= \bar{1},1172925 \\ \log \text{ de adición} &= 0,8787163 \\ \hline \log \cos AC &= \bar{1},9960088 \end{aligned}$$

$$AC = 7^\circ\, 45'\, 21'',1.$$

Exceso esférico del triángulo ABC:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{2} = \operatorname{tg} \frac{p}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}.$$

$$\begin{aligned} BC = a &= 1^\circ\, 39'\, 11'',7 \\ AC = b &= 7^\circ\, 45'\, 21'',1 \\ AB = c &= 6^\circ\, 10'\, 7'',8 \\ \hline 2p &= 15^\circ\, 34'\, 40'',6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p - a &= 6^\circ\, 8'\, 8'',6 \\ p - b &= 1'\, 59'',2 \\ p - c &= 1^\circ\, 37'\, 12'',5 \\ \hline p &= 7^\circ\, 47'\, 20'',3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p-a}{2} &= 3^\circ\, 4'\, 4'',3 \\ \frac{p-b}{2} &= 59'',6 \\ \frac{p-c}{2} &= 48'\, 36'',25 \\ \hline \frac{p}{2} &= 3^\circ\, 53'\, 40'',15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{p}{2} &= \bar{2},8329971 \\ \log \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} &= \bar{2},7291284 \\ \log \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} &= \bar{4},4608064 \\ \log \operatorname{tg} \frac{p-c}{2} &= \bar{2},1504285 \\ \hline 2 \log \operatorname{tg} \frac{S}{2} &= \bar{8},1733604 \end{aligned}$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{S}{2} = \bar{4},0866802$$

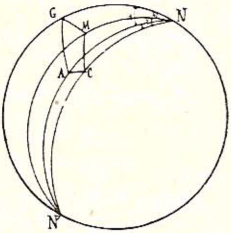
$$\frac{S}{2} = 25'',2$$

$$S = 50'',4$$

61. Los lados del cuadrilátero se calcularán por medio de la fórmula

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C,$$

aplicada á los cuatro triángulos que tienen por vértice el polo N y por bases dichos lados.



Los elementos conocidos son:

$$NG = 90^\circ - 27^\circ\, 55'\, 53'' = 62^\circ\ 4'\ 7''$$
$$NA = 90^\circ - 16^\circ\, 50'\, 19'' = 73^\circ\ 9'\, 41''$$
$$NC = 90^\circ - 18^\circ\ 8'\, 56'' = 71^\circ\, 51'\ 4''$$
$$NM = 90^\circ - 25^\circ\, 52'\, 32'' = 64^\circ\ 7'\, 28''$$
$$N_1 = 11^\circ\, 47'\, 20'' - 46'\, 24'' = 11^\circ\, 0'\, 56''$$
$$N_2 = 46'\, 24'' + 8^\circ\, 43'\, 7'' = 9^\circ\, 29'\, 31''$$
$$N_3 = 8^\circ\, 43'\, 7'' - 1^\circ\, 37'\, 33'' = 7^\circ\, 5'\, 34''$$
$$N_4 = 11^\circ\, 47'\, 20'' + 1^\circ\, 37'\, 33'' = 13^\circ\, 24'\, 53''$$

Triángulo NAG:

$$\cos AG = \cos NA \,.\, \cos NG + \operatorname{sen} NA \operatorname{sen} NG \cos N_1;$$

$$\log \operatorname{sen} NG = \bar{1},9462110$$
$$\log \operatorname{sen} NA = \bar{1},9809684$$
$$\log \cos N_1 = \bar{1},9919236$$
$$\log \beta = \bar{1},9191030$$
$$\log \alpha = \bar{1},1325436$$
$$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,7865594$$

$$\log \cos NG = \bar{1},6706298$$
$$\log \cos NA = \bar{1},4619138$$
$$\log \alpha = \bar{1},1325436$$
$$\log \text{ de adición} = 0,8523149$$
$$\log \cos AG = \bar{1},9848585$$

$$AG = 15^\circ\, 2'\, 30'',9.$$

Triángulo NAC:

$$\cos AC = \cos NA \cos NC + \operatorname{sen} NA \operatorname{sen} NC \cos N_2;$$

$$\log \operatorname{sen} NA = \bar{1},9809684$$
$$\log \operatorname{sen} NC = \bar{1},9778381$$
$$\log \cos N_2 = \bar{1},9940129$$
$$\log \beta = \bar{1},9528194$$
$$\log \alpha = \bar{2},9553542$$
$$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,9974652$$

$$\log \cos NA = \bar{1},4619138$$
$$\log \cos NC = \bar{1},4934404$$
$$\log \alpha = \bar{2},9553542$$
$$\log \text{ de adición} = 1,0390890$$
$$\log \cos AC = \bar{1},9944432$$

$$AC = 9^\circ\, 8'\, 45'',16.$$

Triángulo NMC:

$$\cos MC = \cos NM \cos NC + \operatorname{sen} NM \operatorname{sen} NC \cos N_3;$$

$$\log \operatorname{sen} NM = \bar{1},9541190$$
$$\log \operatorname{sen} NC = \bar{1},9778381$$
$$\log \cos N_3 = \bar{1},9966638$$
$$\log \beta = \bar{1},9286209$$
$$\log \alpha = \bar{1},1333430$$
$$\log \frac{\beta}{\alpha} = 0,7952779$$

$$\log \cos NM = \bar{1},6399026$$
$$\log \cos NC = \bar{1},4934404$$
$$\log \alpha = \bar{1},1333430$$
$$\log \text{ de adición} = 0,8598190$$
$$\log \cos MC = \bar{1},9931620$$

$$MC = 10^\circ\, 8'\, 26'',6.$$

Triángulo NGM:

$$\cos MG = \cos NG \cos NM + \operatorname{sen} NG \operatorname{sen} NM \cos N_4;$$

$$\log \operatorname{sen} NG = \bar{1},9462110$$
$$\log \operatorname{sen} NM = \bar{1},9541190$$
$$\log \cos N_4 = \bar{1},9879862$$
$$\text{los}\, \beta = \bar{1},8883162$$
$$\log \alpha = \bar{1},3105324$$
$$0,5777838$$

$$\log \cos NG = \bar{1},6706298$$
$$\log \cos NM = \bar{1},6399026$$
$$\log \alpha = \bar{1},3105324$$
$$\log \text{ de adición} = 0,6796588$$
$$\log \cos MG = \bar{1},9901912$$

$$MG = 12^\circ\, 7'\, 53'',7.$$

Los ángulos del cuadrilátero son la suma ó la diferencia de los ángulos á la base de los triángulos ya considerados; calcularemos, pues, dichos ángulos por medio de las analogías de Neper:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}\cot\frac{C}{2}.$$

Triángulo NAG:

$$\begin{array}{rl|rl}
a=NA= & 73^\circ\ 9'\ 41'' & a=NA= & 73^\circ\ 9'\ 41'' \\
b=NG= & 62^\circ\ 4'\ 7'' & b=NG= & 62^\circ\ 4'\ 7'' \\
\hline
a+b= & 135^\circ\ 13'\ 48'' & a-b= & 11^\circ\ 5'\ 34'' \\
\frac{a+b}{2}= & 67^\circ\ 36'\ 54'' & \frac{a-b}{2}= & 5^\circ\ 32'\ 47''
\end{array}$$

$$C=N_1;\quad \frac{C}{2}=\frac{11^\circ\ 56''}{2}=5^\circ\ 30'\ 28'';$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log\cos\frac{a-b}{2}= & \bar{1},9979620 & \log\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}= & \bar{2},9852092 \\
\log\cot\frac{C}{2}= & 1,0158056 & \log\cot\frac{C}{2}= & 1,0158056 \\
\bar{L}\cos\frac{a+b}{2}= & 0,4192707 & \bar{L}\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}= & 0,0340246 \\
\hline
\log\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}= & 1,4330383 & \log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}= & 0,0350394 \\
\frac{A+B}{2}= & 87^\circ\ 53'\ 15'',4 & \frac{A-B}{2}= & 47^\circ\ 18'\ 31'',8
\end{array}$$

$A=NGA=135^\circ\ 11'\ 45'',2;\quad B=NAG=40^\circ\ 34'\ 41'',6.$

Triángulo NAC:

$$\begin{array}{rl|rl}
a=NA= & 73^\circ\ 9'\ 41'' & a=NA= & 73^\circ\ 9'\ 41'' \\
b=NC= & 71^\circ\ 51'\ 4'' & b=NC= & 71^\circ\ 51'\ 4'' \\
\hline
a+b= & 145^\circ\ 0'\ 45'' & a-b= & 1^\circ\ 18'\ 37'' \\
\frac{a+b}{2}= & 72^\circ\ 30'\ 22'',5 & \frac{a-b}{2}= & 39'\ 18'',5
\end{array}$$

$$C = N_2;\quad \frac{C}{2} = \frac{9^\circ\, 29'\, 31''}{2} = 4^\circ\, 44'\, 45'',5.$$

$\log\cos\frac{a-b}{2} = \bar{1},9999716$	$\log\operatorname{sen}\frac{a-b}{2} = \bar{2},0582013$
$\log\cot\frac{C}{2} = 1,0808026$	$\log\cot\frac{C}{2} = 1,0808026$
$\bar{L}\cos\frac{a+b}{2} = 0,5220085$	$\bar{L}\operatorname{sen}\frac{a+b}{2} = 0,0205656$
$\log\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = 1,6027827$	$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \bar{1},1595695$
$\frac{A+B}{2} = 88^\circ\, 34'\, 13''$	$\frac{A-B}{2} = 8^\circ\, 13'\, 0'',3$

$$A = NCA = 96^\circ\, 47'\, 13'',3;\qquad B = NAC = 80^\circ\, 21'\, 12'',7.$$

Triángulo NMC:

$a = NC = 71^\circ\, 51'\, 4''$	$a = NC = 71^\circ\, 51'\, 4''$
$b = NM = 64^\circ\, 7'\, 28''$	$b = NM = 64^\circ\, 7'\, 28''$
$a + b = 135^\circ\, 58'\, 32''$	$a - b = 7^\circ\, 43'\, 36''$
$\frac{a+b}{2} = 67^\circ\, 59'\, 16''$	$\frac{a-b}{2} = 3^\circ\, 51'\, 48''$

$$C = N_3;\quad \frac{C}{2} = \frac{7^\circ\, 5'\, 34''}{2} = 3^\circ\, 32'\, 47''$$

$\log\cos\frac{a-b}{2} = \bar{1},9990120$	$\log\operatorname{sen}\frac{a-b}{2} = \bar{2},8285104$
$\log\cot\frac{C}{2} = 1,2077812$	$\log\cot\frac{C}{2} = 1,2077812$
$\bar{L}\cos\frac{a+b}{2} = 0,4261953$	$\bar{L}\operatorname{sen}\frac{a+b}{2} = 0,0328716$
$\log\operatorname{tg}\frac{A+B}{2} = 1,6329885$	$\log\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = 0,0691632$
$\frac{A+B}{2} = 88^\circ\, 39'\, 58'',7$	$\frac{A-B}{2} = 49^\circ\, 32'\, 35'',3$

$$A = NMC = 138^\circ\, 12'\, 34'';\qquad B = NCM = 39^\circ\, 7'\, 23'',4$$

Triángulo NGM:

$$\begin{array}{ll|ll}
a = \mathrm{NM} = & 64^\circ\ 7'\ 28'' & a = \mathrm{NM} = & 64^\circ\ 7'\ 28'' \\
b = \mathrm{NG} = & 62^\circ\ 4'\ 7'' & b = \mathrm{NG} = & 62^\circ\ 4'\ 7'' \\
\hline
a+b = & 126^\circ\ 11'\ 35'' & a-b = & 2^\circ\ 3'\ 21'' \\
\dfrac{a+b}{2} = & 63^\circ\ 5'\ 47'',5 & \dfrac{a-b}{2} = & 1^\circ\ 1'\ 40'',5
\end{array}$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{N}_4; \quad \frac{\mathrm{C}}{2} = \frac{13^\circ\ 24'\ 53''}{2} = 6^\circ\ 42'\ 26'',5;$$

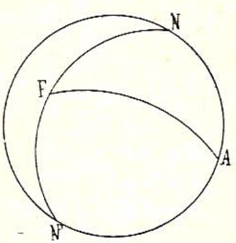
$$\begin{array}{rl|rl}
\log\cos\dfrac{a-b}{2} = & \bar{1},9999301 & \log\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2} = & \bar{2},2538119 \\
\log\cot\dfrac{\mathrm{C}}{2} = & 0,9295807 & \log\cot\dfrac{\mathrm{C}}{2} = & 0,9295807 \\
\bar{\mathrm{L}}\cos\dfrac{a+b}{2} = & 0,3443922 & \bar{\mathrm{L}}\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2} = & 0,0497471 \\
\hline
\log\operatorname{tg}\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} = & 1,2739030 & \log\operatorname{tg}\dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} = & \bar{1},2331397 \\
\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} = & 86^\circ\ 57'\ 12'',4 & \dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2} = & 9^\circ\ 42'\ 24'',7
\end{array}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{NGM} = 96^\circ\ 39'\ 37'',1 \qquad \mathrm{B} = \mathrm{NMG} = 77^\circ\ 14'\ 47'',7$$

Los ángulos del cuadrilátero son, pues,

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} &= 135^\circ\ 11'\ 45'',2 - 96^\circ\ 39'\ 37'',1 = 38^\circ\ 32'\ 8'',1 \\
\mathrm{A} &= 40^\circ\ 34'\ 41'',6 + 80^\circ\ 21'\ 12'',7 = 120^\circ\ 55'\ 54'',3 \\
\mathrm{C} &= 96^\circ\ 47'\ 13'',3 - 39^\circ\ 7'\ 23'',4 = 57^\circ\ 37'\ 49'',9 \\
\mathrm{M} &= 360^\circ - (138^\circ\ 12'\ 34'' + 77^\circ\ 14'\ 47'',7) = 144^\circ\ 32'\ 38'',3.
\end{aligned}$$

62. En este problema hay que calcular la longitud en kilómetros del arco AF y el ángulo NAF.



Los datos son:

$$\begin{aligned}
\mathrm{NA} &= 90^\circ - 16^\circ\ 50'\ 19'' = 73^\circ\ 9'\ 41'' \\
\mathrm{NF} &= 90^\circ - 19^\circ\ \mathrm{N} = 71^\circ \\
\mathrm{FNA} &= 140^\circ - 46'\ 2'' = 139^\circ\ 13'\ 58''
\end{aligned}$$

CÁLCULO DE AF.

$$\cos AF = \cos NA \cos NF + \operatorname{sen} NA \operatorname{sen} NF \cos N;$$

$$\begin{array}{rl|rl}
\log \operatorname{sen} NA = & \bar{1},9809684 & \log \cos NA = & \bar{1},4619138 \\
\log \operatorname{sen} NF = & \bar{1},9756701 & \log \cos NF = & \bar{1},5126419 \\
\log \cos N = & \bar{1},8793074 & \log \alpha = & \bar{2},9745557 \\
\log \beta = & \bar{1},8359459 & \text{log de sustracción} = & 0,7971003 \\
\log \alpha = & \bar{2},9745557 & \log \cos AF = & \bar{1},7716560 \\
\log \frac{\beta}{\alpha} = & 0,8613902 & &
\end{array}$$

$$AF = 180^\circ - 53^\circ\, 45'\, 55'',3 = 126^\circ\, 14'\, 4'',7.$$

En la fórmula que da cos AF, los tres factores del segundo término del binomio son, en valor absoluto, mayores que los dos factores del primer término; pero siendo cos N negativo, resulta también para cos AF un valor negativo; tenemos, pues, $AF > 90^\circ$, por lo cual tomamos para AF el valor

$$180^\circ - 53^\circ\, 45'\, 55'',3 \quad \text{ó sea} \quad 126^\circ\, 14'\, 4'',7$$

$$126^\circ\, 14'\, 4'',7 = 126^\circ,2346.$$

La longitud en kilómetros será:

$$\frac{40000 \times 126,2346}{360} = 14026,1 \text{ km}.$$

CÁLCULO DEL ÁNGULO A.

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}};$$

$$\begin{array}{rl|rl}
a = NF = & 71^\circ & p - a = & 64^\circ\, 11'\, 52'',8 \\
b = NA = & 73^\circ\ \ 9'\, 41'' & p - b = & 62^\circ\ \ 2'\, 11'',8 \\
c = AF = & 126^\circ\, 14'\ \ 4'',7 & p - c = & 8^\circ\, 57'\, 48'',1 \\
2p = & 270^\circ\, 23'\, 45'',7 & p = & 135^\circ\, 11'\, 52'',8
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\log \operatorname{sen}(p-b) &= \bar{1},9460824\\
\log \operatorname{sen}(p-c) &= \bar{1},1925753\\
\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen} p &= 0,1520210\\
\bar{\mathrm{L}} \operatorname{sen}(p-a) &= 0,0456110
\end{aligned}$$

$$2 \log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \bar{1},3362897$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \bar{1},6681448$$

$$\frac{A}{2} = 24^\circ\, 58'\, 24''$$

$$A = 49^\circ\, 56'\, 48''$$

Tercera parte

CAPÍTULOS I Y II

Funciones trigonométricas.

1. Los arcos que satisfacen á $\operatorname{tg} a = 1$ están comprendidos en la fórmula $k\pi + a$; $a = 45°$;

reemplazando a por 45° y k por 1, 2 y 3, resulta:

$$45°, \quad 225°, \quad 405°, \quad 585° \quad \text{y} \quad 765°.$$

2. Sea x el menor de los ángulos que se debe calcular:

$$\log \cos x = \log 0{,}548 = \bar{1}{,}7387806;$$
$$x = 56°\, 46'\, 12''.$$

Los demás están comprendidos en la fórmula $2k\pi \pm x$; serán, pues,

$$\begin{aligned} 360° - x &= 303°\, 13'\, 48''; \\ 360° + x &= 416°\, 46'\, 12''; \\ (2 \times 360°) - x &= 663°\, 13'\, 48''; \\ (2 \times 360°) + x &= 776°\, 46'\, 12''. \end{aligned}$$

3. Las fórmulas son:

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen} a};$$

$$\cos \frac{a}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \operatorname{sen} a} \mp \sqrt{1 - \operatorname{sen} a};$$

$a = 2473° = 6$ circunferencias $+ 313°$. El arco a termina en el cuarto cuadrante; su mitad termina, pues, en el segundo cuadrante; luego el *seno* será positivo y el *coseno* negativo.

Además las líneas de $\frac{a}{2}$ son iguales en valor absoluto á las del arco de 22° 30′, lo que indica que el seno es menor que el coseno; luego

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}2473^\circ}-\sqrt{1-\operatorname{sen}2473^\circ};$$

$$\cos\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}2473^\circ}+\sqrt{1-\operatorname{sen}2473^\circ}.$$

4. 1.° $\operatorname{sen}105^\circ 45' 4''=\operatorname{sen}(180^\circ-105^\circ 45' 4'')=\operatorname{sen}74^\circ 14' 56''$.

2.° $\operatorname{sen}124^\circ 3' 12''=\operatorname{sen}(180^\circ-124^\circ 3' 12'')=$
$=\operatorname{sen}55^\circ 56' 48''$.

3.° $\operatorname{sen}223^\circ 32^\circ 21''=-\operatorname{sen}(223^\circ 32' 21''-180^\circ)=$
$=-\operatorname{sen}43^\circ 32' 21''$.

4.° $1413^\circ=3$ circunferencias $+\,333^\circ$; luego $\operatorname{sen}1413^\circ=$
$=\operatorname{sen}333^\circ$ $\operatorname{sen}1413^\circ 18' 43''=-\operatorname{sen}(360^\circ-333^\circ 18' 43'')=$
$=-\operatorname{sen}26^\circ 41' 17''$.

5. Sea $2x$ el ángulo cuyo coseno se conoce; tenemos:

$$\cos x=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}=\sqrt{\frac{1-0{,}358}{2}}=0{,}5665.$$

6. $$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}=\pm\,0{,}96369;$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}=\pm\,0{,}26700.$$

7. $$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a}\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}a}}{2}=$$

$$=\frac{\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{3}}{4}=\pm\,0{,}99203;$$

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a}\mp\sqrt{1-\operatorname{sen}a}}{2}=$$

$$=\frac{\pm\sqrt{5}\mp\sqrt{3}}{4}=\mp\,0{,}12600.$$

8. Tenemos, atendiendo al valor absoluto, $\cos a < \operatorname{sen} a$; luego, si suponemos el círculo trigonométrico dividido en ocho partes iguales, el arco a termina en la séptima de dichas partes; $\frac{a}{2}$ termina, pues, en la cuarta división, y su seno es menor que su coseno en valor absoluto. Por consiguiente, en la expresión del seno tomaremos el signo — entre los dos radicales de la fórmula, y el signo + para el coseno. Además, puesto que $\frac{a}{2}$ termina en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ es positivo y $\cos\frac{a}{2}$ negativo.

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{24}{25}}-\sqrt{1-\frac{24}{25}}\right)=\frac{3}{5};$$

$$\cos\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{24}{25}}+\sqrt{1-\frac{24}{25}}\right)=-\frac{4}{5}.$$

CAPÍTULO III

Generalización de fórmulas.

9. $$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a};$$

pero $$\operatorname{tg} a=\operatorname{tg} 45^\circ=1;$$

luego $$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\operatorname{tg} 22^\circ\,30'=-1+\sqrt{2}=0{,}4142135.$$

10. Si en la fórmula de $\operatorname{tg}(a+b)$ se reemplaza b por $2a$, se obtiene para $\operatorname{tg} 3a$ la fórmula:

$$\operatorname{tg} 3a=\frac{3\operatorname{tg} a-\operatorname{tg}^3 a}{1-3\operatorname{tg}^2 a}.$$

Esta fórmula equivale á la siguiente:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} - \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{3}}{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}}.$$

Llevando este valor á la relación dada, y simplificando por $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}$, resulta:

$$\frac{3 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}}{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}} = 2 + \sqrt{3};$$

de donde se deduce, sucesivamente:

$$3 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3} = 2 + \sqrt{3}\left(1 + 3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3}\right);$$

$$(6 + 3\sqrt{3} - 1)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3} = 2 + \sqrt{3} - 3;$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{5 - 3\sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3} = \pm\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \pm(2 - \sqrt{3});$$

luego $$\operatorname{tg}\alpha = \pm(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = \pm 1.$$

11. La expresión propuesta puede escribirse:

$$\cos^2(\alpha + \beta)\left[\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)}{\cos^2(\alpha + \beta)} + p\,\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)}{\cos^2(\alpha + \beta)} + q\right]$$

ó $$\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}[\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) + p\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + q];$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\frac{p}{1 - q} = \frac{p}{q - 1};$$

y $$\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta) = \frac{p^2}{(q - 1)^2}.$$

La expresión propuesta equivale, pues, á

$$\frac{1}{1 + \frac{p^2}{(q - 1)^2}}\left[\frac{p^2}{(q - 1)^2} + \frac{p^2}{q - 1} + q\right] = q.$$

12. 1.° La fórmula $\operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$ puede escribirse:

$$\operatorname{sen} a = 2 : \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} = 2 : \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \cot \frac{a}{2}},$$

lo que equivale á

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \cot \frac{a}{2} = \frac{2}{\operatorname{sen} a},$$

ó también á $$\operatorname{tg} a + \cot a = \frac{2}{\operatorname{sen} 2a}.$$

2.° Tenemos:

$$1 + \sec 2a = 1 + \frac{1}{\cos 2a} = \frac{1 + \cos 2a}{\cos 2a} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos 2a} \cdot \frac{1 + \cos 2a}{\operatorname{sen} 2a} = \operatorname{tg} 2a \cdot \frac{2 \cos^2 a}{2 \operatorname{sen} a \cos a} =$$

$$\operatorname{tg} 2a \,.\, \cot a = \frac{\operatorname{tg} 2a}{\operatorname{tg} a}, \quad \text{ó sea} \quad \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} 2a}{1 + \operatorname{sen} a}.$$

13. Tenemos: $\sec 2a = \frac{1}{\cos 2a} = \frac{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}$, y dividiendo los dos términos por $\operatorname{sen}^2 a$, resultará:

$$\sec 2a = \frac{\cot^2 a + 1}{\cot^2 a - 1}.$$

14. 1.° $$\operatorname{tg} 2a = \frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos 2a} = \frac{2 \operatorname{sen} 2a \,.\, \operatorname{sen} a}{2 \cos 2a \,.\, \operatorname{sen} a}.$$

Reemplazando en ambos términos los productos, por diferencias de senos ó de cosenos, resulta:

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{\cos a - \cos 3a}{\operatorname{sen} 3a - \operatorname{sen} a}.$$

2.° Asimismo se puede escribir:

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{sen} 3a}{\cos 3a} = \frac{2 \operatorname{sen} 3a \,.\, \operatorname{sen} a}{2 \cos 3a \operatorname{sen} a} = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\operatorname{sen} 4a - \operatorname{sen} 2a}.$$

15. 1.° $$\frac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\cos a - \cos b} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)}{2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)} =$$
$$= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a+b);$$

2.° $$\frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos b - \cos a} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)} =$$
$$= \cot \frac{1}{2}(a+b).$$

16. Se puede escribir:

$$\operatorname{sen} 2a = \cos (90^\circ - 2a) = \cos 2 (45^\circ - a).$$

Si se reemplaza el coseno por su valor en función de la tangente de la mitad del arco, resulta:

$$\operatorname{sen} 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 (45^\circ - a)}{1 + \operatorname{tg}^2 (45^\circ - a)}.$$

17. 1.° Sustituyendo b por $2a$ en la fórmula de sen $(a+b)$, se obtiene: $\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a;$

$$= 4 \operatorname{sen} a \left(\frac{3}{4} - \operatorname{sen}^2 a\right);$$
$$= 4 \operatorname{sen} a (\operatorname{sen}^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 a);$$
$$= 4 \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} (60^\circ - a) \operatorname{sen} (60^\circ + a).$$

2.° Se obtendría también, sustituyendo b por $2a$ en

$$\cos (a+b),$$

la relación:

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a;$$
$$= 4 \cos a \left(\cos^2 a - \frac{3}{4}\right);$$
$$= 4 \cos a (\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 60^\circ);$$
$$= 4 \cos a \cos (60^\circ + a) \cos (60^\circ - a).$$

3.° Dividiendo ordenadamente los resultados obtenidos en los dos números anteriores, obtendremos:

$$\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} (60^\circ + a) \,.\, \operatorname{tg} (60^\circ - a).$$

18. Si se sustituye en la expresión propuesta los primeros miembros de las siguientes igualdades por los segundos,

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a,$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2},$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2},$$

se obtiene:

$$\frac{2 \operatorname{sen} a \cos^2 a}{4 \cos^2 a \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{\operatorname{sen} a}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

La identidad queda, pues, verificada

19. 1.º $\dfrac{\cos a + \operatorname{sen} a}{\cos a - \operatorname{sen} a} = \dfrac{(\cos a + \operatorname{sen} a)^2}{(\cos a - \operatorname{sen} a)(\cos a + \operatorname{sen} a)} =$

$$= \frac{\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a + 2 \operatorname{sen} a \cos a}{\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 + 2 \operatorname{sen} a \cos a}{\cos 2a} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} 2a}{\cos 2a} = \frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a} = \operatorname{tg} 2a + \sec 2a.$$

2.º $\operatorname{sen} 3a \operatorname{cosec} a - \cos 3a \sec a = \dfrac{\operatorname{sen} 3a}{\operatorname{sen} a} - \dfrac{\cos 3a}{\cos a} =$

$$= \frac{3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a}{\operatorname{sen} a} - \frac{4 \cos^3 a - 3 \cos a}{\cos a} = 3 - 4 \operatorname{sen}^2 a -$$

$$- 4 \cos^2 a + 3 = 6 - 4 (\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a) = 6 - 4 = 2.$$

20. 1.º $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a;$
$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a.$

Multiplicando ordenadamente se obtiene:

$$\operatorname{sen}(a + b) \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}^2 a \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cos^2 a =$$
$$= \operatorname{sen}^2 a (1 - \operatorname{sen}^2 b) - \operatorname{sen}^2 b (1 - \operatorname{sen}^2 a) = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b.$$

2.º $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$

El producto será:

$$\cos(a + b) \cos(a - b) = \cos^2 a \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b =$$
$$= \cos^2 a (1 - \operatorname{sen}^2 b) - \operatorname{sen}^2 b (1 - \cos^2 a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b.$$

21. 1.° Efectuemos las operaciones indicadas en el primer miembro:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + 2\cos a \cos b + \operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b =$$
$$= 2 + 2(\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) = 2 + 2\cos(a - b) =$$
$$= 2[1 + \cos(a - b)] = 4\cos^2 \frac{1}{2}(a + b).$$

La identidad queda, pues, verificada.

2.° Operando del mismo modo, el primer miembro viene á ser igual á $2 - 2\cos(a - b)$ ó sea

$$2[1 - \cos(a - b)] = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(a - b).$$

22. 1.° Se puede escribir:

$$\operatorname{sen} 5a = \operatorname{sen}(3a + 2a) = \operatorname{sen} 3a \cos 2a + \operatorname{sen} 2a \cos 3a =$$
$$= (3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a)(1 - 2 \operatorname{sen}^2 a) +$$
$$+ 2 \operatorname{sen} a \cos a (4\cos^3 a - 3\cos a) =$$
$$= (3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a)(1 - 2 \operatorname{sen}^2 a) + 2 \operatorname{sen} a \cos^2 a (4\cos^2 a - 3) =$$
$$= (3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a)(1 - 2 \operatorname{sen}^2 a) +$$
$$+ 2 \operatorname{sen} a (1 - \operatorname{sen}^2 a)(4\cos^2 a - 3) = 5 \operatorname{sen} a -$$
$$- 20 \operatorname{sen}^3 a + 16 \operatorname{sen}^5 a.$$

2.° Se tiene igualmente:

$$\cos 5a = \cos(3a + 2a) = \cos 3a \cos 2a - \operatorname{sen} 3a \operatorname{sen} 2a =$$
$$= (4\cos^3 a - 3\cos a)(2\cos^2 a - 1) -$$
$$- (3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a) 2 \operatorname{sen} a \cos a =$$
$$= (4\cos^3 a - 2\cos a)(2\cos^2 a - 1) - 2 \operatorname{sen}^2 a \cos a (3 - 4 \operatorname{sen}^2 a) =$$
$$= (4\cos^3 a - 3\cos a)(2\cos^2 a - 1) -$$
$$- 2\cos a (1 - \cos^2 a)(4\cos^2 a - 1) = 16\cos^5 a -$$
$$- 20\cos^3 a + 5\cos a.$$

3.° Se escribe las igualdades siguientes:

$$\operatorname{sen} 6a = 2 \operatorname{sen} 3a \cos 3a =$$
$$= 2(3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a)(4\cos^3 a - 3\cos a) =$$
$$= 2 \operatorname{sen} a (4\cos^2 a - 1)(4\cos^3 a - 3\cos a) =$$
$$= 2 \operatorname{sen} a (16\cos^5 a - 16\cos^3 a + 3\cos a).$$

23. $\operatorname{sen}(a-b)+\operatorname{sen}(b-c)=$

$$=2\operatorname{sen}\frac{a-c}{2}\cos\frac{a-2b+c}{2}=$$

$$=-2\operatorname{sen}\frac{c-a}{2}\cos\frac{a-2b+c}{2}; \qquad [1]$$

$$\operatorname{sen}(c-a)=2\operatorname{sen}\frac{c-a}{2}\cos\frac{c-a}{2}. \qquad [2]$$

Sumando ordenadamente **[1]** y **[2]** se obtiene:

$$\operatorname{sen}(a-b)+\operatorname{sen}(b-c)+\operatorname{sen}(c-a)=$$

$$=2\operatorname{sen}\frac{c-a}{2}\left(\cos\frac{c-a}{2}-\cos\frac{a-2b+c}{2}\right)=$$

$$=2\operatorname{sen}\frac{c-a}{2}\,.\,2\operatorname{sen}\frac{c-b}{2}\,.\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}=$$

$$=-4\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{c-a}{2};$$

luego $\operatorname{sen}(a-b)+\operatorname{sen}(b-c)+\operatorname{sen}(c-a)+$

$$+4\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{c-a}{2}=0.$$

24. 1.° $\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}b=2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2};$

$$\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}b+\operatorname{sen}c=2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+\operatorname{sen}c; \qquad [1]$$

$$\operatorname{sen}(a+b+c)=\operatorname{sen}(a+b)\cos c+\operatorname{sen}c\cos(a+b); \qquad [2]$$

de donde, restando **[2]** de **[1]**,

$$\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}b+\operatorname{sen}c-\operatorname{sen}(a+b+c)=$$

$$=2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}-\operatorname{sen}(a+b)\cos c-$$

$$-\operatorname{sen}c\,[1-\cos(a+b)]. \qquad [3]$$

Pero $\qquad \operatorname{sen}(a+b)=2\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$

y $\qquad 1-\cos\frac{a+b}{2}=2\operatorname{sen}^2\frac{a+b}{2}.$

El segundo miembro de la identidad [**3**] puede escribirse, pues,

$$2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} -$$

$$- 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a+b}{2} \cos c - \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} c \right); \quad [4]$$

$$\cos \frac{a+b}{2} \cos c - \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} c = \cos \left(\frac{a+b}{2} + c \right);$$

luego [**4**] es igual también á

$$2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \left[\cos \frac{a-b}{2} - \cos \left(\frac{a+b}{2} + c \right) \right] =$$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \, 2 \operatorname{sen} \frac{a+c}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} =$$

$$= 4 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} \operatorname{sen} \frac{a+c}{2},$$

lo que verifica la identidad propuesta.

2.° La segunda identidad se verifica de igual modo:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2};$$

$$\cos a + \cos b + \cos c = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + \cos c; \quad [1]$$

$$\cos (a+b+c) = \cos (a+b) \cos c - \operatorname{sen} (a+b) \operatorname{sen} c; \quad [2]$$

de donde $\cos a + \cos b + \cos c + \cos (a+b+c) =$

$$= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - \operatorname{sen} (a+b) \operatorname{sen} c +$$

$$+ \cos c \,[1 + \cos (a+b)]. \quad [3]$$

Pero $\operatorname{sen} (a+b) = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$

y $1 + \cos (a+b) = 2 \cos^2 \frac{a+b}{2}.$

El segundo miembro de la identidad [**3**] se puede escribir, pues,

$$2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+$$
$$+2\cos\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2}\cos c-\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}\operatorname{sen} c\right).$$

La expresión entre paréntesis, siendo igual á

$$\left(\frac{a+b}{2}+c\right),$$

el segundo miembro es igual también á

$$2\cos\frac{a+b}{2}\left[\cos\frac{a-b}{2}+\cos\left(\frac{a+b}{2}+c\right)\right]=$$
$$=2\cos\frac{a+b}{2}\,.\,2\cos\frac{a+c}{2}\,.\,\cos\frac{b+c}{2}=$$
$$=4\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{a+c}{2}.$$

NOTA.—En el caso particular de $a+b+c=\pi$,

$$\operatorname{sen}(a+b+c)=0 \quad \text{y} \quad \cos(a+b+c)=1.$$

Además,

$$\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}=\cos\frac{c}{2};\quad \operatorname{sen}\frac{b+c}{2}=\frac{a}{2};\quad \operatorname{sen}\frac{a+c}{2}=\cos\frac{b}{2};$$
$$\cos\frac{a+b}{2}=\operatorname{sen}\frac{c}{2};\quad \cos\frac{b+c}{2}=\operatorname{sen}\frac{a}{2};$$
$$\cos\frac{a+c}{2}=\operatorname{sen}\frac{b}{2}.$$

Y las dos relaciones propuestas se transforman en las siguientes:

$$\operatorname{sen} a+\operatorname{sen} b+\operatorname{sen} c=4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2};$$

$$\cos a+\cos b+\cos c=4\operatorname{sen}\frac{a}{2}\operatorname{sen}\frac{b}{2}\operatorname{sen}\frac{c}{2}.$$

25. 1.° $\operatorname{tg} a - \cot a = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} - \dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 a - \cos^2 a}{\operatorname{sen} a \cos a} =$

$$= \frac{-\cos 2a}{\operatorname{sen} a \cos a} = -\frac{2\cos 2a}{\operatorname{sen} 2a} = -2\cot 2a.$$

Podemos escribir, pues,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg} a - \cot a = -2\cot 2a;\\
&2\operatorname{tg} 2a - 2\cot 2a = -4\cot 4a;\\
&4\cot 4a - 4\cot 4a = -8\cot 8a;
\end{aligned}$$

de donde $\operatorname{tg} a - \cot a + 2\operatorname{tg} 2a + 4\cot 4a = -8\cot 8a,$

ó sea $\operatorname{tg} a + 2\operatorname{tg} a + 4\cot 4a + 8\cot 8a = \cot a.$

2.° Podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\cos a + \cos 2a + \cos 3a &= 2\cos 2a \cos a + \cos 2a =\\
&= \cos 2a\,(2\cos a + 1);\\
&= \cos 2a\left[2\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\right) + 1\right];\\
&= \cos 2a\left(3 - 4\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\right);\\
&= \frac{\cos 2a}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}\left(3\operatorname{sen}\frac{a}{2} - 4\operatorname{sen}^3\frac{a}{2}\right);\\
&= \frac{\cos 2a}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}\operatorname{sen}\frac{3a}{2};
\end{aligned}$$

de donde

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a = \frac{\cos 2a \,.\, \operatorname{sen}\frac{3a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}.$$

3.° Tenemos las igualdades sucesivas:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a &= \frac{\operatorname{sen} 3a}{\cos 3a} - \frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos 2a} - \operatorname{tg} a;\\
&= \frac{\operatorname{sen} 3a \cos 2a - \operatorname{sen} 2a \cos 3a}{\cos 3a \cos 2a} - \operatorname{tg} a;\\
&= \frac{\operatorname{sen} a}{\cos 3a \cos 2a} - \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a};
\end{aligned}$$

$$= \frac{\text{sen } a (\cos a - \cos 3a \cos 2a}{\cos a \cos 2a \cos 3a} =$$

$$= \frac{\text{sen } a [\cos (3a - 2a) - \cos 3a \cos 2a]}{\cos a \cos 2a \cos 3a} =$$

$$= \frac{\text{sen } a [\cos 3a \,.\, \cos 2a + \text{sen } 2a \,.\, \text{sen } 3a - \cos 3a \cos 2a]}{\cos a \,.\, \cos 2a \cos 3a} =$$

$$= \frac{\text{sen } a \,.\, \text{sen } 2a \,.\, \text{sen } 3a}{\cos a \cos 2a \cos 3a} = \text{tg } a \text{ tg } 2a \text{ tg } 3a.$$

26. Desarrollando el primer miembro de la igualdad propuesta se obtiene:

$$2 (\text{sen}^8 a + \cos^2 a + 3 \text{ sen}^4 \cos^4 a + 2 \text{sen}^6 a \cos^2 a + \\ + 2 \cos^6 a \text{ sen}^2 a);$$

lo que es igual á

$$\text{sen}^8 a + \cos^8 a + (\text{sen}^2 a + \cos^2 a)^4.$$

La expresión propuesta se reduce, pues, á

$$(\text{sen}^2 a + \cos^2 a)^4 = 1,$$

lo que es evidente.

27. 1.° La fórmula

$$\cos (a - b) - \cos (a + b) = 2 \text{sen } a \text{ sen} b;$$

da $$\cos (-60°) - \cos 90° = \frac{1}{2};$$

lo que es evidente.

2.° Sabiendo que $\text{tg } 30° = \frac{1}{3} \sqrt{3}$, se obtiene:

$$\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3}$$

por medio de la fórmula que expresa la tangente de la mitad de un arco en función de la tangente de dicho arco.

Reemplazando en la expresión propuesta $\text{tg } \frac{a}{4}$ por

$$\text{tg } 15° = 2 - \sqrt{3}$$

y $\text{tg} a$ por su valor $\sqrt{3}$, resulta la igualdad

$$2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2.$$

28. 1.° $\cos\left(a-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)=2\operatorname{sen} a \operatorname{sen}\frac{h}{2}.$

Si en la fórmula anterior se reemplaza a por los valores

$$a+h,\quad a+2h,\quad a+3h\ \ldots..,\quad a+(n-1)h,$$

se podrá escribir sucesivamente:

$$\operatorname{sen} a=\left[\cos\left(a-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\right]:2\operatorname{sen}\frac{h}{2};$$

$$\operatorname{sen}(a+h)=\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{3h}{2}\right)\right]:2\operatorname{sen}\frac{h}{2};$$

$$\operatorname{sen}(a+2h)=\left[\cos\left(a+\frac{3h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{5h}{2}\right)\right]:2\operatorname{sen}\frac{h}{2};$$

....

$$\operatorname{sen}\left[a+\left(n-1\right)h\right]=$$

$$=\left[\cos\left(a+2\frac{n-3}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)\right]:2\operatorname{sen}\frac{h}{2}.$$

Sumando ordenadamente, resulta:

$$S=\left[\cos\left(a-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)\right]:2\operatorname{sen}\frac{h}{2}.$$

Y cambiando el dividendo en producto, se obtiene:

$$S=\frac{\operatorname{sen}\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}.$$

2.° Operando con la fórmula

$$\operatorname{sen}\left(a+\frac{h}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(a-\frac{h}{2}\right)=2\cos a\cos\frac{h}{2}$$

como se ha hecho en la primera parte, se obtiene la suma S_1 de los cosenos de los arcos en progresión aritmética de razón h:

$$S_1=\frac{\cos\left[a+\frac{(n-1)}{2}h\right]\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}.$$

29. Haciendo $h = a$ en las fórmulas anteriores, se obtiene:

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 3a + \ldots\ldots + \operatorname{sen} na =$$
$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)a}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{na}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a}{2}};$$

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots\ldots + \cos na =$$
$$= \frac{\cos \frac{(n+1)a}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{na}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}.$$

30. Haciendo $h = 2a$ en las mismas fórmulas, resulta:

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a + \operatorname{sen} 5a + \ldots\ldots + \operatorname{sen}(2n-1)a = \frac{\operatorname{sen}^2 na}{\operatorname{sen} a};$$

$$\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots\ldots + \cos(2n-1)a = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} 2na}{\operatorname{sen} a}.$$

31. La expresión

$$\operatorname{sen} a - \operatorname{sen}(a+h) + \operatorname{sen}(a+2h) - \ldots\ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} \operatorname{sen}[a + (n-1)h]$$

se transforma en la siguiente si se añade sucesivamente π, 2π, 3π, ... etc. á los arcos á partir del segundo:

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(a + h + \pi) + \operatorname{sen}(a + 2h + 2\pi) + \ldots\ldots +$$
$$+ \operatorname{sen}[a + (n-1)(h+\pi)].$$

El resultado se deduce del problema anterior por el cambio de h por $h + \pi$, lo que da:

$$S = \frac{\operatorname{sen}\left[a + \frac{(n-1)(h+\pi)}{2}\right] \operatorname{sen} \frac{n(h+\pi)}{2}}{\operatorname{sen} \frac{h+\pi}{2}}. \quad [1]$$

Se obtiene del mismo modo:

$$S_1 = \cos a - \cos(a+h) + \cos(a+2h) - \ldots\ldots +$$
$$+ (-1)^{n-1} \cos[a + (n-1)h] =$$
$$= \frac{\cos\left[a + \frac{(n-1)(h+\pi)}{2}\right] \operatorname{sen} \frac{n(h+\pi)}{2}}{\operatorname{sen} \frac{h+\pi}{2}}. \quad [2]$$

Si se supone $h = a$ en la expresión [**1**], ésta viene á ser:

$$S = \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 3a - \ldots\ldots \pm$$

$$\pm \operatorname{sen} na = \frac{\operatorname{sen} \frac{(n+1)(a+\pi)}{2} \operatorname{sen} \frac{(a+\pi)}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{a+\pi}{2}\right)}.$$

Asimismo la fórmula [**2**] se transforma en la siguiente:

$$S_1 = \cos a - \cos 2a + \cos 3a - \ldots\ldots \pm$$

$$\pm \cos na = \frac{\cos \frac{(n+1)(a+\pi)}{2} \operatorname{sen} \frac{n(a+\pi)}{2}}{\operatorname{sen}\left(\frac{a+\pi}{2}\right)}.$$

32. Si en la fórmula $\operatorname{sen}^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$, reemplazamos n por $a + h$, $a + 2h$, etc., obtendremos sucesivamente:

$$\operatorname{sen}^2 (a + h) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2(a + h)];$$

$$\operatorname{sen}^2 (a + 2h) = \frac{1}{2}[1 - \cos 2(a + 2h)];$$

....

Sumando ordenadamente tendremos (Véase el núm. 28):

$$S = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}[\cos 2a + \cos 2(a + h) + \cos 2(a + 2h) + \ldots\ldots] =$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{\cos[2a + (n-1)h] \operatorname{sen} nh}{2 \operatorname{sen} h}.$$

Si en esta última fórmula hacemos $h = a$ resultará:

$$S = \operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 2a + \operatorname{sen}^2 3a + \ldots\ldots + \operatorname{sen}^2 na =$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)a \operatorname{sen} a}{2 \operatorname{sen} a}.$$

33. La fórmula $\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a$ da:

$$\operatorname{sen}^3 a = \frac{1}{4}(3 \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} 3a).$$

Si sustituímos a por $a+h$, obtendremos sucesivamente:

$$\operatorname{sen}^3(a+h)=\frac{1}{4}[3\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen}3(a+h)];$$

$$\operatorname{sen}^3(a+2h)=\frac{1}{4}[3\operatorname{sen}(a+2h)-\operatorname{sen}3(a+2h)];$$

....

Y, sumando ordenadamente,

$$S=\frac{3}{4}[\operatorname{sen}a+\operatorname{sen}(a+h)+\operatorname{sen}(a+2h)+\ldots..]-$$

$$-\frac{1}{4}[\operatorname{sen}3a+\operatorname{sen}3(a+h)+\operatorname{sen}3(a+2h)+\ldots..],$$

ó sea (véase núm. 28):

$$S=\frac{3}{4}\frac{\operatorname{sen}\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}-$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}\left(3a+\frac{n-1}{2}3h\right)\operatorname{sen}\frac{3nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3h}{2}}.$$

Si hacemos $h=a$, tendremos:

$$S=\operatorname{sen}^3a+\operatorname{sen}^3 2a+\operatorname{sen}^3 3a+\ldots.+\operatorname{sen}^3 na=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}\right)a\,.\operatorname{sen}\frac{na}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}-\frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}\frac{3(n+1)a}{2}\operatorname{sen}\frac{3na}{2}}{\operatorname{sen}\frac{3a}{2}}.$$

34. Se sustituye cada término por una diferencia de cosenos por medio de la fórmula

$$\cos q-\cos p=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p+q)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(p-q),$$

que se escribe:

$$\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b=\frac{1}{2}\cos(a-b)-\frac{1}{2}\cos(a+b);$$

así, $$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} 2a = \frac{1}{2}\cos a - \frac{1}{2}\cos 3a;$$

$$\operatorname{sen} 2a \operatorname{sen} 3a = \frac{1}{2}\cos a - \frac{1}{2}\cos 5a;$$

$$\operatorname{sen} 3a \operatorname{sen} 4a = \frac{1}{2}\cos a - \frac{1}{2}\cos 7a;$$

....

sumando ordenadamente se obtiene:

$$S = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 2a \operatorname{sen} 3a + \ldots\ldots =$$
$$= \frac{n}{2}\cos a - \frac{1}{2}(\cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \ldots\ldots),$$

según la segunda fórmula del núm. 28, en la cual hacemos $h = 2a$.

El paréntesis es igual á $\dfrac{\cos[3a + (n-1)a]\operatorname{sen} na}{\operatorname{sen} a}$.

Tenemos, pues,

$$S = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 2a \operatorname{sen} 3a + \ldots\ldots =$$
$$= \frac{n}{2}\cos a - \frac{\cos[3a + (n-1)a]\operatorname{sen} na}{2\operatorname{sen} a} =$$
$$= \frac{n}{2}\cos a - \frac{\cos(n+2)a \operatorname{sen} a}{2\operatorname{sen} a}.$$

35. Busquemos en primer lugar una fórmula que permita descomponer cada término en la diferencia de otros dos.

Si hacemos $b = a$ en la fórmula

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b},$$

obtendremos:

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a} = \frac{1}{2}(\cot a - \operatorname{tg} a).$$

de donde $$\operatorname{tg} a = \cot a - 2\cot 2a;$$

luego $$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\cot a - \cot 2a;$$

$$\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{a}{4} = \frac{1}{4}\cot\frac{a}{4} - \frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}.$$

....

$$\frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{tg} \frac{a}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \cot \frac{a}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-2}} \cot \frac{a}{2^{n-2}}.$$

....

Sumando ordenadamente resulta:

$$S = \frac{1}{2^{n-1}} \cot \frac{a}{2^{n-1}} - 2 \cot 2a.$$

Si hacemos $\frac{a}{2^{n-1}} = \beta$, el término $\frac{1}{2^{n-1}} \cot \frac{a}{2^{n-1}}$ es igual á $\frac{1}{a} \cos \beta . \frac{\beta}{\operatorname{sen} \beta}$; y si suponemos que n aumente indefinidamente, $\cos \beta = 1$ y $\frac{\beta}{\operatorname{sen} \beta} = 1$. Luego el límite de la serie propuesta, cuando n aumenta indefinidamente es:

$$\lim S = \frac{1}{a} - 2 \cot 2a.$$

36.
$$\sec a = \frac{1}{\cos a};$$

$$\sec 2a = \frac{1}{\cos 2a};$$

luego
$$\sec a . \sec 2a =$$

$$= \frac{1}{\cos a \cos 2a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a} . \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a . \cos^2 a} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} a} . \frac{\operatorname{sen}(2a - a)}{\cos a \cos 2a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a} . \frac{\operatorname{sen} 2a \cos a - \operatorname{sen} a \cos 2a}{\cos a \cos 2a} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} a} . (\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a).$$

Se puede escribir, pues,

$$\sec a \sec 2a = \frac{1}{\operatorname{sen} a} (\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a);$$

$$\sec 2a \sec 3a = \frac{1}{\operatorname{sen} a} (\operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a);$$

....

$$\sec na \sec (n+1) a = \frac{1}{\operatorname{sen} a} [\operatorname{tg} (n+1) a - \operatorname{tg} na].$$

Sumando ordenadamente, resulta:

$$S = \frac{\operatorname{tg}(n-1)a - \operatorname{tg} a}{\operatorname{sen} a}.$$

Si $n = \infty$, la serie tiene un valor infinito.

37.
$$\cot\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}};$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}.$$

Luego:

$$\cot\frac{a}{2} - \cot a = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{a}{2}} - \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} a \cos\frac{a}{2} - \cos a \operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen}\frac{a}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen}\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen} a} = \operatorname{cosec} a.$$

Se puede escribir, pues,

$$\operatorname{cosec} a = \cot\frac{a}{2} - \cot a;$$

$$\operatorname{cosec} 2a = \cot a - \cot 2a;$$

$$\operatorname{cosec} 4a = \cot 2a - \cot 4a;$$

....

$$\operatorname{cosec} 2^{n-1} a = \cot 2^{n-2} a - \cot 2^{n-1} a.$$

Sumando se obtiene: $S = \cot\frac{a}{2} - \cot 2^{n-1} a.$

CAPÍTULO IV

Ecuaciones trigonométricas.

Ecuaciones con una incógnita.

38. $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$; de donde $3 \operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

y suprimiendo la solución $\operatorname{tg} x = 0$ que corresponde á $x = 0$, queda:

$$3 = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$$

de donde se deduce $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{3}$,

ó sea $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}, \quad x = 30^\circ.$

39. Se sustituye $\cot x$ por $\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ y resulta:

$$\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 4,$$

ó sea: $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$; de donde $\operatorname{tg} x = 2 \pm 1$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & \operatorname{tg} x = 3, \quad x' = 71^\circ\, 33'\, 54'',1 \\ \text{y si} & \operatorname{tg} x = 1, \quad x'' = 45^\circ \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} K\pi + x'; \\ K\pi + x''. \end{array}\right.$$

40. Se escribe: $\operatorname{tg} x + \dfrac{ab}{\operatorname{tg} x} = a + b;$

$$\operatorname{tg}^2 x - (a + b) \operatorname{tg} x + ab = 0.$$

Las raices de esta ecuación, son:

$$\operatorname{tg} x = a \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} x = b.$$

41. Se escribe: $\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = 1;$

de donde $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$

y $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right).$

El valor $\operatorname{tg} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es el lado de decágono regular estrellado, ó sea la cuerda del arco de 108°; es igual, pues, á 2 sen 54′.

Sea α el ángulo x tal que $\operatorname{tg} x = 2 \operatorname{sen} 54'$,

se tendrá: $$x = K\pi + \alpha;$$

$$\log \operatorname{tg} x = 0{,}2089875; \quad \alpha = 58^\circ\, 16'\, 55'',1.$$

El segundo valor de $\operatorname{tg} x$ es $-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = -2 \operatorname{sen} 18.$

Si α' es un ángulo positivo que corresponde á dicho valor

se tendrá: $$x = K\pi - \alpha'.$$

42. $$\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 7x = 0$$

ó sea: $$2 \operatorname{sen} x \cos 6x = 0.$$

Esta ecuación se descompone en otras dos:

$$\operatorname{sen} x = 0; \quad \text{de donde} \quad x = K\pi;$$

$$\cos 6x = 0; \quad \text{de donde} \quad 6x = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$

y $$x = \frac{(2K+1)\pi}{12}.$$

43. La ecuación $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} x = 0$ equivale á

$$2 \operatorname{sen} \frac{5}{2} x \cos \frac{3}{x} = 0.$$

Esta ecuación se descompone en

$$\operatorname{sen} \frac{5}{2} x = 0; \quad \text{de donde} \quad \frac{5}{2} x = K\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{2K\pi}{5};$$

$$\cos \frac{3}{2} x = 0; \quad \frac{3}{2} x = 2K\pi \pm \frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{(4K+1)\pi}{3}.$$

44. Esta ecuación se puede escribir:

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} - (x+h)\right],$$

y para abreviar, haciendo $\frac{\pi}{2} - h = \alpha$;

$$\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}(\alpha - x) = 0 \quad \text{ó} \quad 2 \operatorname{sen} \frac{3x - \alpha}{2} \cos \frac{x + \alpha}{2} = 0.$$

Esta última ecuación se descompone en dos:

$$\operatorname{sen} \frac{3x - \alpha}{2} = 0; \text{ de donde } \frac{3x - \alpha}{2} = K\pi; \quad x = \frac{2K\pi + \alpha}{3};$$

$$\cos \frac{x + \alpha}{2} = 0; \quad \frac{x + \alpha}{2} = 2K\pi \pm \frac{\pi}{2}; \quad x = (4K + 1)\pi - \alpha.$$

45. La ecuación equivale á

$$\operatorname{sen}(x + a) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 3x - b\right) = 0,$$

ó sea

$$2 \operatorname{sen} \frac{x + a - \frac{\pi}{2} + 3x + b}{2} \cos \frac{x + a + \frac{\pi}{2} - 3x - b}{2} = 0,$$

de donde se deduce

$$\frac{4x + a + b - 90^\circ}{2} = K\pi; \quad x = (4K + 1)\frac{\pi}{8} - \frac{a + b}{4};$$

$$\cos \frac{-2x + a - b + 90^\circ}{2} = 0;$$

$$\frac{-2x + a - b + 90^\circ}{2} = (2K + 1)\frac{\pi}{2};$$

$$x = \frac{a - b}{2} - (4K + 1)\frac{\pi}{4}.$$

46. $$\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 8 \cos^2 x;$$

$$\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x + \cos 2x \cos x = 8 \cos^2 x \operatorname{sen} x \cos 2x.$$

Desarrollando en el primer miembro $\operatorname{sen} 2x$ y $\cos 2x$, se puede simplificar por $\cos x$, lo que suprime la solución

$$\cos x = 0; \quad \text{de donde} \quad x = (2K + 1)\frac{\pi}{2};$$

queda $$1 = 8 \operatorname{sen} x \cos x \cos 2x$$

ó $$1 = 4 \operatorname{sen} 2x \cos 2x = 2 \operatorname{sen} 4x;$$

de donde $$\operatorname{sen} 4x = \frac{1}{2};$$

luego $$4x = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \begin{cases} 2K\pi + \frac{\pi}{6}; \\ (2K+1)\pi - \frac{\pi}{6} = 2K\pi + \frac{5\pi}{6}; \end{cases}$$

de donde $$x = \begin{cases} \frac{K\pi}{2} + \frac{\pi}{24}; \\ \frac{K\pi}{2} + \frac{5\pi}{24}. \end{cases}$$

47. La ecuación propuesta se escribe:

$$2 \operatorname{sen} \frac{3}{2} x \cos \frac{x}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{3}{2} x \cos \frac{3}{2} x = 0,$$

ó sea $$2 \operatorname{sen} \frac{3}{2} x \left(\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3}{2} x \right) = 0,$$

ó $$4 \operatorname{sen} \frac{3}{2} x \cos x \cos 2x = 0.$$

Esta ecuación se descompone en otras tres:

$\operatorname{sen} \frac{3}{2} x = 0$; lo que da $\frac{3}{2} x = K\pi$; de donde $x = \frac{2K\pi}{3}$;

$\cos x = 0$; » $x = 2K\pi \pm \frac{\pi}{2}$;

$\cos 2x = 0$; » $2x = 2K\pi \pm \frac{\pi}{2}$; » $x = K\pi \pm \frac{\pi}{2}$

48. Reemplazando $\operatorname{sen} 2x$ por $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$ obtenemos:

$$\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

Para que dos arcos tengan el mismo coseno, es preciso que su suma ó su diferencia sea múltiplo de $2K$; tenemos, pues,

$$3x + \frac{\pi}{2} - 2x = 2K\pi \quad \text{y} \quad 3x - \frac{\pi}{2} + 2x = 2K\pi;$$

de donde $$x = 2K\pi - \frac{\pi}{2}.$$

y $$x = \frac{1}{5}\left(2K\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{10}(4K+1)\pi.$$

La primera fórmula da, si $K = 1$,

$$x = \frac{3}{2}\pi,$$

y la segunda da, si $K = 0, 1, 2, 3, 4$,

$$x = \frac{\pi}{10}, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{9\pi}{10}, \quad x = \frac{13\pi}{10} \quad \text{y} \quad x = \frac{17\pi}{10}.$$

49. $2 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(45^\circ - x) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos x - \cos 45^\circ \operatorname{sen} x;$

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

luego $$2 \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x);$$

de donde $$\left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}; \quad x = 14^\circ\, 38'\, 19'',72; \quad \text{y} \quad K\pi + x.$$

50. De la ecuación propuesta se deduce:

$$3 \cos x = 3 - 2 \operatorname{sen} x.$$

Elevando al cuadrado, se obtiene:

$$9 \cos^2 x = 9 + 4 \operatorname{sen}^2 x - 12 \operatorname{sen} x;$$

$$9(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 9 + 4 \operatorname{sen}^2 x - 12 \operatorname{sen} x;$$

$$13 \operatorname{sen}^2 x - 12 \operatorname{sen} x = 0; \quad \operatorname{sen} x (13 \operatorname{sen} x - 12) = 0,$$

luego $$\operatorname{sen} x = 0; \quad \text{de donde} \quad x = \begin{cases} 2K\pi, \\ (2K+1)\pi, \end{cases}$$

y $$13 \operatorname{sen} x - 12 = 0; \quad \operatorname{sen} x = \frac{12}{13};$$

de donde $$x = 67^\circ\, 22'\, 50''.$$

51. El segundo miembro es el valor de $\operatorname{sen} 2x$ en función de $\operatorname{tg} x$; se tiene, pues,

$$\cos x = \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x;$$

$$\cos x (1 - 2 \operatorname{sen} x) = 0,$$

de donde $\cos x = 0$; luego $x = (2\mathrm{K} \pm 1)\frac{\pi}{2}$;

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}; \quad x = \begin{cases} 2\mathrm{K}\pi + 30^\circ, \\ (2\mathrm{K}+1)\pi - 30^\circ; \end{cases}$$

52. $\operatorname{sen}(x + 45^\circ) + \operatorname{sen}(x + 75^\circ) = 2 \operatorname{sen}(x + 60^\circ) \cos 15^\circ$;

luego $2 \operatorname{sen}(x + 60^\circ) \cos 15^\circ = \operatorname{sen} 82^\circ$;

$$\operatorname{sen}(x + 60^\circ) = \frac{\operatorname{sen} 82^\circ}{2 \cos 15^\circ}.$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} 82^\circ &= \bar{1},9957528 \\ \bar{\mathrm{L}}\, 2 &= \bar{1},69897 \\ \bar{\mathrm{L}} \cos 15^\circ &= 0,0150562 \\ \hline \log \operatorname{sen}(x + 60'') &= \bar{1},7097790 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 60^\circ &= 30^\circ\, 50'\, 13'',9 \\ x &= -\, 29^\circ\ \ 9'\, 46'',1 \end{aligned}$$

y los demás ángulos dados por las fórmulas

$$2\mathrm{K}\pi + x \quad \text{y} \quad (2\mathrm{K}+1)\pi - x.$$

53. Hay que resolver la ecuación $\cos x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$,

ó sea $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$;

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} - 1 = 0;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

La raiz $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ es positiva y menor que 1, pero $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ es menor que -1; el primer valor sólo es admisible, si α es uno de los arcos que corresponden á

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2};$$

se tiene: $$\frac{x}{2}=\begin{cases}2K\pi+\alpha;\\(2K+1)\pi-\alpha.\end{cases}$$

luego $$x=\begin{cases}4K\pi+2\alpha;\\(2K+1)2\pi-2\alpha.\end{cases}$$

Estas dos expresiones están comprendidas en la fórmula $2K\pi\pm\alpha$; y los arcos x terminan en los extremos de una cuerda paralela á BB'.

54. Se escribe la igualdad:

$$(\operatorname{sen}x+\cos x)+\left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right)+\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)=m$$

ó sea $$(\operatorname{sen}x+\cos x)\left(1+\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x}\right)=m-\frac{1}{\operatorname{sen}x\cos x}$$

$$(\operatorname{sen}x+\cos x)(\operatorname{sen}x\cos x+1)=m\operatorname{sen}x\cos x-1.$$

Pero si á $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$ se añade $2\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}2x$

se obtiene $$\operatorname{sen}x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{sen}2x};$$

y siendo $$\operatorname{sen}x\cos x=\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x,$$

se tiene la ecuación:

$$\sqrt{1+\operatorname{sen}2x}\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{2}+1\right)=\frac{m\operatorname{sen}2x}{2}-1.$$

Elevando al cuadrado:

$$(1+\operatorname{sen}2x)\left(\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4}+\operatorname{sen}2x+1\right)=$$
$$=\frac{m^2\operatorname{sen}^2 2x}{4}-m\operatorname{sen}2x+1,$$

ó sea $$\operatorname{sen}^3 2x+5\operatorname{sen}^2 2x+8\operatorname{sen}2x+4=$$
$$=m^2\operatorname{sen}^2 2x-4m\operatorname{sen}2x+4.$$

Se puede dividir por sen $2x$, puesto que de sen $2x = 0$ se deduce $x = 0$ ó $x = \frac{\pi}{2}$, y $m = \infty$; resulta entonces, después de ordenar:

$$\text{sen}^2 2x - (m^2 - 5)\,\text{sen}\, 2x + 4(m + 2) = 0.$$

Discusión.—Para que las raíces sean reales hace falta que se tenga: $b^2 - 4ac \geq 0$;

pero $$b^2 - 4ac = m^4 - 10m^2 + 25 - 16(m + 2) =$$
$$= m^4 + 10m^2 - 16m - 7;$$

esta última expresión es divisible por $(m + 1)^2$, y su valor es:

$$(m + 1)^2 (m^2 - 2m - 7)$$

ó también $(m + 1)^2 (m - 2\sqrt{2} - 1)(m - 2\sqrt{2} + 1)$.

El valor de m debe ser exterior á las raíces

$$-(2\sqrt{2} - 1) = -1{,}828 \quad \text{y} \quad (2\sqrt{2} + 1) = 3{,}828.....$$

Además las raíces de la ecuación en sen $2x$ deben estar comprendidas entre -1 y $+1$.

Sustituyendo m por los valores $-\infty$, -1, 0, 1, m', m'', $+\infty$, se deduce que:

Si m está comprendido entre $-\infty$ y $-2{,}242$, hay *una solución negativa.*

Si m está comprendido entre $-2{,}242$ y -2, hay *una solución negativa y una positiva.*

Si m está comprendido entre -2 y $-1{,}828$ ....., hay *dos soluciones negativas.*

Si $m > 3{,}828$ ....., hay *una solución positiva.*

55. Estas tres ecuaciones son de la forma

$$a\,\text{sen}\, x + b \cos x = c.$$

Haciendo $\frac{b}{a} = \text{tg}\,\varphi$, los valores de x se obtienen por la fórmula $\text{sen}(x + \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$. (Véase Elementos, página 102, ejemplo IV.)

La condición $c^2 \leq a^2 + b^2$ queda satisfecha.

La 1.ª ecuación da: $x = 120^\circ$ y $x = 2K\pi \pm 120^\circ$.

La 2.ª da: $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = K\pi + \frac{\pi}{3}$, y

La 3.ª da: $x = 75^\circ$, etc.

56. Se deduce de la ecuación propuesta:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x - a)$$

ó
$$2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Suprimiendo el factor común $2\operatorname{sen}\frac{a}{2}$, queda

$$\cos\left(x - \frac{a}{2}\right) = \cos\frac{a}{2};$$

de donde
$$x - \frac{a}{2} = 2K\pi \pm \frac{a}{2};$$

$$x = 2K\pi;$$

$$x = 2K\pi \pm a.$$

57. Se puede escribir: $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos x + 1$

ó
$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \cos x + 1,$$

ó también
$$2\cos^2 x - \cos x - 2 = 0;$$

de donde
$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

El valor positivo, siendo mayor que 1, debe desecharse; sólo conviene el valor $\cos x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$,

lo que da $x = 141^\circ\, 19'\, 54'',09$ y $2K\pi \pm x$.

58. Reemplazando $\operatorname{tg} x$ por $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, tendremos:

$$\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x = m\cos x$$

$$1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x = m\cos x;$$

$$\cos^2 x - m\cos x + 1 = 0;$$

$$\cos x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}.$$

Para que un valor de $\cos x$ convenga, es preciso que sea *real* y que esté comprendido entre $+1$ y -1. La condición de realidad es $m^2 - 4 \geq 0$; el valor de m ha de ser exterior á las raices de $m^2 - 4 = 0$.

Además las raices de la ecuación propuesta son del mismo signo; son positivas si $m > 2$, pero la mayor siendo mayor que 1, solo conviene la menor. Las dos raices son negativas si $m < -2$; entonces sólo conviene la mayor.

Se puede escribir: $\cos x = \frac{m}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{m^2}}\right)$ y haciendo $\frac{4}{m^2} = \operatorname{sen}^2 \varphi$ se tiene:

$$\cos x = \frac{m}{2}(1 \pm \cos\varphi);$$

lo que da

$$\cos x = m \cos^2 \frac{\varphi}{2};$$

y

$$\cos x = m \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

59. Se escribe, reemplazando $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ por su valor en función de la tangente:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = a;$$

de donde se deduce:

$$(a^2 - 1)\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + a^2 - 1 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm a\sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1}.$$

La condición de posibilidad es $2 - a^2 > 0$, ó $a^2 - 2 < 0$.

El producto de las raices siendo 1, dichas raices son del mismo signo que el de su suma $\frac{2}{a^2 - 1}$, y serán positivas ó negativas según que a sea exterior ó interior á las raices ± 1 del denominador.

Nota. — La ecuación propuesta, siendo de la forma

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c,$$

podrá resolverse por el método señalado en el núm. 55.

60. Añadiendo á cada miembro $2\,\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{cotg}\,x$ ó 2, resulta:

$$\left(\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right)^2 = m^2 + 2, \quad \text{ó} \quad \left(\frac{1 + \mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}\,x}\right)^2 = m^2 + 2;$$

de donde

$$\left(\frac{2}{\mathrm{sen}\,2x}\right)^2 = m^2 + 2;$$

$$\mathrm{sen}^2\,2x = \frac{4}{m^2 + 2}.$$

Condición de posibilidad: $\frac{4}{m^2 + 2} \leq 1;$

de donde

$$m \geq \sqrt{2}.$$

61. Quitando los denominadores, tendremos:

$$a\,(\cos x + \mathrm{sen}\,x) = b\,\mathrm{sen}\,x\,\cos x;$$
$$2a\,(\cos x + \mathrm{sen}\,x) = 2b\,\mathrm{sen}\,x\,\cos x;$$
$$2a\,(\cos x + \mathrm{sen}\,x) = b\,\mathrm{sen}\,2x.$$

Elevando al cuadrado, resultará:

$$4a^2\,(1 + \mathrm{sen}\,2x) = b^2\,\mathrm{sen}^2\,2x;$$

de donde

$$b^2\,\mathrm{sen}^2\,2x - 4a^2\,\mathrm{sen}\,2x - 4a^2 = 0.$$

Esta ecuación del segundo grado da $\mathrm{sen}\,2x$.

62. Hay que resolver la ecuación $\cos x = \mathrm{tg}\,x$

ó

$$\cos^2 x = \mathrm{sen}\,x;$$

$$1 - \mathrm{sen}^2 x = \mathrm{sen}\,x;$$

$$\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\,x - 1 = 0;$$

de donde

$$\mathrm{sen}\,x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right).$$

La solución $\frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{5}\right)$ no conviene; luego

$$\mathrm{sen}\,x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2};$$

x es el arco cuyo seno es igual al lado del decágono regular convexo inscrito.

63. Se tiene:

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(a - x) = 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos\left(x - \frac{a}{2}\right) = m;$$

de donde
$$\cos\left(x - \frac{a}{2}\right) = \frac{m}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}}.$$

Sea α un valor de $x - \frac{a}{2}$, se deduce:

$$x - \frac{a}{2} = 2\,\mathrm{K}\pi \pm \alpha;$$

de donde
$$x = 2\,\mathrm{K}\pi \pm \alpha + \frac{a}{2}.$$

64. Expresemos tg $3x$ en función de tg x:

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x},$$

luego
$$\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = 0;$$

de donde
$$\operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg}^2 x) = 0.$$

Esta ecuación se descompone en otras dos:

$$\operatorname{tg} x = 0; \quad \text{de donde} \quad x = 0; \quad x = \mathrm{K}\pi;$$

$$\operatorname{sen} x = 0, \quad \cos x = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}^2 x = 1;$$

de donde
$$\operatorname{tg} x = \pm 1; \quad x = \pm 45^\circ;$$

$$\operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}; \quad \cos x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Ecuaciones con varias incógnitas.

65. Pasando todos los términos al primer miembro se puede escribir:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) = 0;$$

$$\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 0,$$

ó sea

$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}+2y\right)\cos\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}-2y\right)=0;$$

$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(2x-\frac{\pi}{2}+y\right)\cos\frac{1}{2}\left(2x+\frac{\pi}{2}-y\right)=0.$$

Este sistema da las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x-\frac{\pi}{2}+2y=0 & [1] \\ x+\frac{\pi}{2}-2y=\pi & [2] \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{2}+y=0 & [3] \\ 2x+\frac{\pi}{2}-y=\pi & [4] \end{cases}$$

[1] y [3] dan:

$$x=\frac{\pi}{6};\quad y=\frac{\pi}{6};\quad x=y=30^{\circ}.$$

[1] y [4] dan:

$$x=\frac{3\pi}{10};\quad y=\frac{\pi}{10};\quad x=54^{\circ};\quad y=18^{\circ}.$$

[2] y [3], y [2] y [4] dan $x=30^{\circ}$ é $y=-30^{\circ}$.

Advertencia.—Para mayor sencillez, al escribir las ecuaciones anteriores, hemos considerado sólo los arcos menores positivos cuyo seno ó coseno es cero.

66. Sea x é y los ángulos que se quiere calcular; se tiene las ecuaciones

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=a;$$
$$\cos x+\cos y=b$$

ó sea

$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=a; \qquad [1]$$

$$2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)=b. \qquad [2]$$

Dividiendo ordenadamente se obtiene:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)=\frac{a}{b}.$$

Esta relación da $x+y$; sea α el valor de $\frac{x+y}{2}$. Sustituyendo $\frac{x+y}{2}$ por α en la ecuación [**1**], resulta:

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cos \frac{1}{2}(x-y) = a;$$

luego $$\cos \frac{1}{2}(x-y) = \frac{a}{2 \operatorname{sen} \alpha};$$

pero $$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Se obtiene, pues,

$$\cos \frac{1}{2}(x-y) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Esta relación da $\frac{1}{2}(x+y) = \beta$;

de donde $$x = \alpha + \beta;$$
$$y = \alpha - \beta.$$

67. Reemplazando las cotangentes por las inversas de las tangentes y haciendo $\operatorname{tg} x = X$ y $\operatorname{tg} y = Y$, tendremos:

$$X + \frac{1}{Y} = a;$$
$$\frac{1}{X} + Y = b;$$

de donde se deduce:

$$XY + 1 = aY; \qquad [\mathbf{1}]$$
$$1 + XY = bX; \qquad [\mathbf{2}]$$

luego $$aY = bX; \quad \frac{X}{Y} = \frac{a}{b}. \qquad [\mathbf{3}]$$

Eliminando sucesivamente X é Y entre la ecuación [**3**] y las ecuaciones [**1**] y [**2**], se obtiene:

$$\frac{aY^2}{b} + 1 = aY; \quad 1 + \frac{bX^2}{a} = bY;$$

$$aY^2 - abY + b = 0; \quad bX^2 - abX + a = 0:$$

de donde
$$Y = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2a};$$
$$X = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 - 4ab}}{2b}.$$

La relación de $\operatorname{tg} x$ á $\operatorname{tg} y$, siendo $\frac{a}{b}$ y no $\pm \frac{a}{b}$, hay que tomar los radicales con el mismo signo.

68.
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Atendiendo á la primera ecuación, la segunda puede escribirse:
$$\frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{4}{3};$$
de donde
$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{4}.$$

Los valores $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{tg} y$ son, pues, las raices de la ecuación
$$X^2 - X + \frac{1}{4} = 0;$$
luego
$$X = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, $\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

69. La segunda ecuación se escribe:
$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = b.$$

Atendiendo á la primera, se tiene:
$$\frac{a}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = b; \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{b-a}{b}.$$

Los valores de $\operatorname{tg} x$ y $\operatorname{tg} y$ son las raices de la ecuación
$$X^2 - aX + \frac{b-a}{b} = 0;$$
luego
$$X = \left\{ \begin{matrix} \operatorname{tg} x \\ \operatorname{tg} y \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 + \frac{4a}{b} - 4}\right).$$

Discusión.—Para que estas raíces convengan basta que sean reales. La condición de posibilidad es, pues,

$$a^2 + \frac{4a}{b} - 4 \geq 0.$$

Este trinomio será positivo, como su primer término, para todos los valores de a exteriores á sus raíces, que son:

$$-\frac{2}{b}\left(1 \pm \sqrt{b^2+1}\right).$$

Se deberá tener, pues,

$$a \leq -\frac{2}{b}\left(1 - \sqrt{b^2+1}\right),$$

ó

$$a \geq -\frac{2}{b}\left(1 + \sqrt{b^2+1}\right).$$

Los ángulos que satisfacen al sistema propuesto están comprendidos en las fórmulas $x + \mathrm{K}\pi$ é $y + \mathrm{K}\pi$.

70. Sumando y restando las dos ecuaciones se obtiene

$$\cos(x+y) = b - a;$$
$$\cos(x-y) = b + a.$$

Si α representa uno de los arcos cuyo coseno es $b - a$, y β uno de los arcos cuyo coseno es $b + a$, se tendrá:

$$x + y = 2\mathrm{K}\pi \pm \alpha,$$
$$x - y = 2\mathrm{K}\pi \pm \beta,$$

de donde $x = \mathrm{K}\pi \pm \frac{\alpha \pm \beta}{2}$; $y = \mathrm{K}\pi \pm \frac{\alpha \mp \beta}{2}$.

Aplicación.—Si $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{3}{4}$ se tiene:

$$\cos(x+y) = b - a = \frac{1}{2}; \quad \cos(x-y) = b + a = 1,$$

luego $x + y = 2\mathrm{K}\pi \pm \frac{\pi}{3}$; $x - y = 2\mathrm{K}\pi$;

$$x = \mathrm{K}\pi \pm \frac{\pi}{6}; \quad y = \mathrm{K}\pi \mp \frac{\pi}{6}.$$

71. Las ecuaciones propuestas se escriben:

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Dividiendo ordenadamente se obtiene:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+y) = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

de donde $$\frac{1}{2}(x+y) = \mathrm{K}\pi + \frac{\alpha}{2}. \qquad [1]$$

Llevando este valor á la primera ecuación resulta, si K es

par, $$\cos \frac{1}{2}(x-y) = \cos \frac{\alpha}{2},$$

y si K es impar, $$\cos \frac{1}{2}(x-y) = -\cos \frac{\alpha}{2}.$$

La primera de estas relaciones da:

$$\frac{1}{2}(x-y) = 2\mathrm{K}\pi \pm \frac{\alpha}{2}$$

y la segunda $$\frac{1}{2}(x-y) = (2\mathrm{K}+1)\pi \pm \frac{\alpha}{2}.$$

Combinando sucesivamente estos dos resultados con el valor [**1**] se obtienen los dos sistemas

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2\mathrm{K}\pi + \alpha \\ y = 2\mathrm{K}\pi \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 2\mathrm{K}\pi \\ y = 2\mathrm{K}\pi + \alpha \end{array}\right.$$

Después de encontrar el valor [**1**] es preferible sumar las ecuaciones elevadas al cuadrado; se obtiene:

$$4 \cos^2 \frac{1}{2}(x-y) = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

de donde $$\cos \frac{1}{2}(x-y) = \pm \cos \frac{\alpha}{2};$$

$$\frac{1}{2}(x-y) = 2\mathrm{K}\pi \pm \frac{\alpha}{2}; \quad \frac{1}{2}(x-y) = (2\mathrm{K}+1)\pi \pm \frac{\alpha}{2}.$$

Se deduce de estas ecuaciones:

$$x = K\pi + \alpha; \quad y = K\pi;$$
$$x = K\pi; \quad y = K\pi + \alpha.$$

Esta solución supone $\cos\frac{\alpha}{2}$ diferente de 0; si $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$, se tiene

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y) = 0;$$

$$\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y) = 0;$$

cuya resolución no ofrece dificultad.

72. Se puede escribir:

$$4\operatorname{sen}(x+y)\cos(x-y) = 1 \qquad [\mathbf{I}]$$

y $$2\operatorname{sen}(x+y) = 1;$$

de donde $$\operatorname{sen}(x+y) = \frac{1}{2}$$

y sustituyendo $\operatorname{sen}(x+y)$ por $\frac{1}{2}$ en [**I**], se obtiene:

$$\cos(x-y) = \frac{1}{2};$$

luego $x + y = K\pi \pm \frac{\pi}{6}$; $x - y = 2K\pi \pm \frac{\pi}{3}$.....

73. Sumando las dos primeras ecuaciones, después de elevarlas al cuadrado, resulta:

$$2 + 2(\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y) = a^2 + b^2,$$

ó sea $$2 + 2\cos(x-y) = a^2 + b^2.$$

Llevando á esta ecuación el valor de $\cos(x-y)$, sacado de la tercera, se obtiene:

$$2 + 2c = a^2 + b^2.$$

74. Dividiendo la primera ecuación por la segunda, se tiene: $$a\cos x - b\cos y = \frac{c^2}{r}.$$

Combinando esta ecuación con la segunda del sistema propuesto, resulta:

$$\cos x = \frac{1}{2a}\left(r + \frac{c^2}{r}\right);$$

$$\cos y = \frac{1}{2b}\left(r - \frac{c^2}{r}\right).$$

La tercera ecuación propuesta se puede escribir:

$$\frac{a^2 \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 y};$$

luego $$a^2(\sec^2 x - 1) - b^2(\sec^2 y - 1),$$

ó sea $$a^2\left[\frac{4a^2r^2}{(r^2+c^2)^2} - 1\right] = b^2\left[\frac{4b^2r^2}{(r^2-c^2)^2} - 1\right].$$

75. De la segunda ecuación se deduce:

$$x = \frac{y(1+\cos^2\alpha) - c \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}. \qquad [\mathbf{1}]$$

Sustituyendo x por este valor en la primera ecuación resulta, después de efectuar las reducciones:

$$y = \frac{c \operatorname{sen}\alpha}{1 - \cos\alpha},$$

y llevando este valor á la expresión [**1**] se obtiene:

$$x = c\,\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}. \qquad [\mathbf{2}]$$

Atendiendo á las igualdades

$$\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot^2\alpha \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2},$$

la expresión [**2**] se transforma en $x = c\cot^2\frac{\alpha}{2}$, y el valor de y es $c\cot\frac{\alpha}{2}$.

De donde $$y^2 - cx = 0.$$

76. Añadiendo á las dos ecuaciones propuestas la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, se pueden considerar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ como las raíces de la ecuación $X^2 + pX + q = 0$, á la condición de que la suma de las raíces $-p$ sea igual á m, la suma de sus cuadrados p^2-q igual á 1 y la suma de sus cubos $-p^3+3pq=n$.

Las dos primeras de estas relaciones dan:

$$p=-m \quad \text{y} \quad q=\frac{m^2-1}{2}.$$

Y sustituyendo p y q por dichos valores en la tercera relación, resulta:

$$m^3-\frac{3m(m^2-1)}{2}=n,$$

ó sea
$$m^3-3m+2n=0.$$

77. La primera ecuación se escribe:

$$(x \operatorname{sen}\alpha - y\cos\alpha)^2 = x^2+y^2$$

ó
$$x^2+y^2-(x\operatorname{sen}\alpha-y\cos\alpha)^2=0;$$

de donde
$$x^2\cos^2\alpha+2xy\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+y^2\operatorname{sen}^2\alpha=0$$

ó
$$(x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha)^2=0,$$

luego
$$x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha=0;$$

$$x\cos\alpha=-y\operatorname{sen}\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{x}{y};$$

de donde se deduce
$$\cos^2\alpha=\frac{y^2}{x^2+y^2};$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Llevando estos valores á la segunda ecuación, se obtiene:

$$\frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{1}{x^2+y^2},$$

luego
$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1.$$

78. La primera ecuación equivale á

$$a\operatorname{sen}^2x+a'(1-\operatorname{sen}^2x)=b;$$

de donde $$\operatorname{sen}^2 x = \frac{b-a'}{a-a'};$$

luego $$\cos^2 x = \frac{a-b}{a-a'}$$

y $$\operatorname{tg}^2 x = \frac{b-a'}{a-b}. \qquad [1]$$

Se saca del mismo modo de la segunda ecuación

$$\operatorname{tg}^2 y = \frac{b'-a}{a'-b'} \qquad [2]$$

Llevando los valores [1] y [2] á la tercera ecuación del sistema propuesto, después de elevarla al cuadrado, se obtiene:

$$a^2 \frac{b-a'}{a-b} = a'^2 \frac{b'-a}{a'-b'};$$

de donde $a^2(b-a')(b'-a') = a'^2(b'-a)(b-a)$

ó $$a^2[bb' - a'(b+b')] = a'^2[bb' - a(b+b')];$$

$$bb'(a^2 - a'^2) = aa'(a-a')(b+b')$$

ó $$bb'(a+a') = aa'(b+b').$$

Y dividiendo ambos miembros por $aa'bb'$ resulta:

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{a} = \frac{1}{b'} + \frac{1}{b}.$$

79. Se pueden escribir las dos primeras ecuaciones como sigue:

$$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y) = a, \qquad [1]$$

$$2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y) = b. \qquad [2]$$

La tercera equivale á

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{y}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1}.$$

En toda proporción, la diferencia de los dos primeros términos es á su suma, como la diferencia de los dos últimos es á la suma de los mismos; se tiene, pues,

$$\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{y}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\operatorname{sen}\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{y}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

ó sea
$$\frac{\cos\frac{1}{2}(x+y)}{\cos\frac{1}{2}(x-y)}=\cos\alpha. \qquad [\mathbf{3}]$$

Multiplicando [**3**], sucesivamente, por [**1**] y [**2**] se obtiene:

$$\operatorname{sen}(x+y)=a\cos\alpha \qquad [\mathbf{4}]$$

y
$$2\cos^2\frac{1}{2}(x+y)=b\cos\alpha,$$

ó sea
$$1+\cos(x+y)=b\cos\alpha;$$

de donde
$$\cos(x+y)=b\cos\alpha-1. \qquad [\mathbf{5}]$$

Bastará sumar las igualdades [**4**] y [**5**] elevadas ambas al cuadrado, para obtener la relación

$$1=a^2\cos^2\alpha+b(\cos\alpha-1)^2,$$

ó sea
$$(a^2+b^2)\cos\alpha=2b.$$

80. La primera ecuación da:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+a)}{\operatorname{sen}(x-a)}=\frac{a+b}{a-b};$$

de donde
$$\frac{\operatorname{sen}(x+\alpha)+\operatorname{sen}(x-\alpha)}{\operatorname{sen}(x+\alpha)-\operatorname{sen}(x-\alpha)}=\frac{a}{b},$$

ó sea
$$\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{a}{b} \qquad a\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}x.$$

Reemplazando $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}x$ por sus valores en función de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ y $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, se obtiene:

$$\frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{b\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

ó
$$a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - b \operatorname{tg}\frac{x}{2} =$$
$$= \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(a \operatorname{tg}\frac{x}{2} - b \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = c \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

de donde
$$a \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(b + c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

Reemplazando $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ por su valor, sacado de la segunda ecuación del sistema propuesto, se obtiene la relación

$$a^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \left(b + c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(c + b \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

CAPÍTULOS V Y VI

Fórmula de Moivre.—Aplicaciones.

81. Haciendo $m = 7$ en la fórmula de Moivre, se obtiene:

$$\cos 7a + i \operatorname{sen} 7a = (\cos a + i \operatorname{sen} a)^7.$$

El segundo miembro, desarrollado por la fórmula del binomio, da:

$$(\cos a + i \operatorname{sen} a)^7 = \cos^7 a + 7\cos^6 a \,.\, i \operatorname{sen} a +$$
$$+ 21\cos^5 a \,.\, i^2 \operatorname{sen}^2 a + 35\cos^4 a \,.\, i^3 \operatorname{sen}^3 a + 35\cos^3 a \,.\, i^4 \operatorname{sen}^4 a +$$
$$+ 21\cos^2 a \,.\, i^5 \operatorname{sen}^5 a + 7\cos a \,.\, i \operatorname{sen}^6 a + \operatorname{sen}^7 a.$$

El segundo miembro se puede dividir en dos grupos como sigue, atendiendo á los valores de las potencias de i:

$$\cos 7a + i \operatorname{sen} 7a = (\cos a + i \operatorname{sen} a)^7 =$$
$$= (\cos^7 a - 21\cos^5 a \operatorname{sen}^2 a + 35\cos^3 a \operatorname{sen}^4 a - 7\cos a \operatorname{sen}^6 a) +$$
$$+ i\,(7\cos^6 a \operatorname{sen} a - 35\cos^4 a \operatorname{sen}^3 a + 21\cos^2 a \operatorname{sen}^5 a - \operatorname{sen}^7 a);$$

de donde resulta que

$$\cos 7a = \cos^7 a - 21\cos^5 a \operatorname{sen}^2 a +$$
$$+ 35\cos^3 a \operatorname{sen}^4 a - 7\cos a \operatorname{sen}^6 a. \qquad [1]$$

$$\operatorname{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a;\ \operatorname{sen}^4 a = (1 - \cos^2 a)^2 = 1 - 2\cos^2 a + \cos^4 a;$$
$$\operatorname{sen}^6 a = (1 - \cos^2 a)^3 = 1 - 3\cos^2 a + 3\cos^4 a - \cos^6 a.$$

Reemplazando en la expresión [**1**] las potencias de sen a por los valores que se acaban de escribir, se obtiene, después de ordenar los resultados:

$$\cos 7a = 64 \cos^7 a - 112 \cos^5 a + 56 \cos^3 a - 7 \cos a.$$

Y sustituyendo $\cos a$ por $\frac{3}{5}$, resulta:

$$\cos 7a = 1{,}7915904 - 8{,}70912 + 12{,}096 - 4{,}20 = 0{,}9784704.$$

82. Se podría calcular $\cos a$ en función de $\operatorname{tg} a$, y luego $\cos 9a$, como en el número anterior, por medio de la fórmula de Moivre.

Sin embargo, se ve fácilmente que si $\operatorname{tg} a = \sqrt{3}$, $a = 60^\circ$;

luego $$9a = 540^\circ;$$

$$\cos 9a = \cos 540^\circ = \cos 180^\circ = 0.$$

83. Se representa $\frac{a}{2}$ por α, y el problema consiste en calcular $\operatorname{sen} 3\alpha$ en función de $\operatorname{sen}\alpha$.

Se obtiene, ya por la fórmula de Moivre, ya por la fórmula de $\operatorname{sen}(a+b)$, reemplazando b por $2a$,

$$\operatorname{sen} 3a = 3 \operatorname{sen} a - 4 \operatorname{sen}^3 a;$$

$$\operatorname{sen} \frac{3a}{2} = 3 \operatorname{sen} \frac{a}{2} - 4 \operatorname{sen}^3 \frac{a}{2}.$$

Reemplazando en esta última expresión $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ por $\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\operatorname{sen} a} \pm \sqrt{1-\operatorname{sen} a}\right)$ se obtendrá $\operatorname{sen}\frac{3a}{2}$ en función de $\operatorname{sen} a$.

84. Se escribe $\frac{\pi}{8} = \alpha$, y el problema consiste en calcular $\cos 5\alpha$ en función de $\cos\alpha$.

Se aplica la regla de Moivre.

Se puede también escribir:

$$\cos \frac{5\pi}{8} = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} =$$

$$= -\operatorname{sen} 22^\circ 5 = -\frac{\text{cuerda } 45^\circ}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

85. 1.° La fórmula de Moivre da:

$$\cos 6a = 32\cos^6 a + 48\cos^4 a + 18\cos^2 a - 1. \qquad [1]$$

2.° Comparando esta igualdad con la ecuación propuesta:

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 = 2,$$

si restamos 1 de cada miembro de ésta, podremos escribir, haciendo $\cos a = x$:

$$\cos 6a = 1; \quad \text{de donde} \quad 6a = 2K\pi; \quad a = \frac{2K\pi}{6}.$$

Los valores de a son, pues: 0°, 60°, 120°, 180°, 240° y 300°, y los cosenos de estos ángulos que son las raíces de la ecuación propuesta son: $1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

Las seis raíces de dicha ecuación son conjugadas dos á dos.

3.° Restando 1 á cada miembro de la segunda ecuación propuesta $32x^6 - 48x^4 + 18x^2 = 0$, y comparando como antes con la expresión [**1**] tendremos:

$$\cos 6a = -1; \quad \text{de donde} \quad 6a = (2K+1)\pi;$$

luego
$$a = \frac{(2K+1)\pi}{6}.$$

Los valores de a serán: 30°, 90°, 150°, 210°, 270° y 330°, cuyos cosenos, que son las raíces de la segunda ecuación, son $\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Estas raíces son conjugadas dos á dos.

86. Escribamos $y = \sqrt[4]{-1}$; de donde

$$y^4 = -1 = \cos(2K+1)\pi + i\,\mathrm{sen}(2K+1)\pi.$$

Extrayendo la raíz cuarta, para lo cual el módulo, siendo la unidad, basta dividir el argumento por 4, resulta:

$$y = \cos\frac{(2K+1)\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{(2K+1)\pi}{4}.$$

Haciendo sucesivamente $K = 0$, 1, 2 y 3, tendremos los cuatro valores de y:

$$y_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

$$y_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$y_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$$

$$y_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

87. $\sqrt[3]{i} = \sqrt[6]{-1}$.

Hagamos $y = \sqrt[6]{-1}$; de donde $y^6 = -1$.
Podemos escribir también:

$$y^6 = \cos(2K+1)\pi + i\,\text{sen}(2K+1)\pi.$$

Extrayendo la raíz sexta, para lo cual dividiremos por 6 el argumento, obtendremos:

$$y = \cos\frac{(2K+1)\pi}{6} + i\,\frac{\text{sen}\,(2K+1)\pi}{6}.$$

Haciendo sucesivamente $K = 0, 1 \ldots\ldots 5$, obtendremos los seis valores de y:

$$y_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3});$$

$$y_2 = \cos\frac{3\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{6} = 0 + i = i;$$

$$y_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} =$$
$$= \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3});$$

$$y_4 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} =$$
$$= \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3});$$

$$y_5 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{6} = 0 - i = -i;$$

$$y_6 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} =$$
$$= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}).$$

88. Las tres raiçes cúbicas de la unidad son (ELEMENTOS, página 232):

$$z_1 = 1; \quad z_2 = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}; \quad z_3 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Su suma es igual á 0.

89. Las cuatro raices bicuadradas de la unidad son:

$$z_1 = 1; \quad z_2 = i; \quad z_3 = -1; \quad z_4 = -1.$$

Su suma es igual también á 0. (ELEMENTOS, pág. 232).

90. Representando por $z_1\ z_2\ \ldots\ldots\ z_m$ las m raices de la unidad, podemos escribir:

$$z_1 = \cos 0^\circ + i\,\mathrm{sen}\,0^\circ = 1;$$
$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{m} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{m};$$
$$z_3 = \cos\frac{4\pi}{m} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{m};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_{m-1} = \cos\frac{(m-2)\,2\pi}{m} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{(m-2)\,2\pi}{m};$$
$$z_m = \cos\frac{(m-1)\,2\pi}{m} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{(m-1)\,2\pi}{m}.$$

Sea S la suma de las m raices de la unidad, tenemos:

$$S = \left[\cos 0^\circ + \cos\frac{2\pi}{m} + \cos\frac{4\pi}{m} + \ldots\ldots + \right.$$
$$\left. + \cos\frac{(m-2)\,2\pi}{m} + \cos\frac{(m-1)\,2\pi}{m}\right] +$$
$$+ i\left[\mathrm{sen}\,0^\circ + \left(\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{m} + \mathrm{sen}\,\frac{(m-1)\,2\pi}{m}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{m} + \mathrm{sen}\,\frac{(m-2)\,2\pi}{m}\right) + \ldots\ldots\right].$$

Advirtiendo que $\operatorname{sen} 0^\circ = 0$, que $\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{m}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{(m-1)\,2\pi}{m}$ son iguales y de signos contrarios, por ser los arcos

$$\frac{2\pi}{m} \quad \text{y} \quad \frac{(m-1)\,2\pi}{m}$$

suplementarios, y que lo mismo sucede con los demás valores de los paréntesis que tienen por factor común i, se ve que S se reduce á $\cos 0^\circ + \cos\dfrac{2\pi}{m} + \ldots.. + \cos\dfrac{(m-1)\,2\pi}{m}$.

Aplicaremos á esta suma la fórmula encontrada en el problema 28 (Tercera parte) para la suma de los cosenos de una serie de arcos en progresión aritmética; esta fórmula es:

$$S = \frac{\cos\left[a + (n-1)\,\frac{h}{2}\right] \operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}.$$

En este caso:

$$a = 0^\circ; \quad n = m; \quad h = \frac{2\pi}{m};$$

luego

$$S = \frac{\cos\left[0^\circ + (m-1)\,\frac{\pi}{m}\right] \operatorname{sen}\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}} = \frac{\cos\,(m-1)\,\frac{\pi}{m}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}}\,.\operatorname{sen}\pi;$$

$$\operatorname{sen}\pi = 0;$$

luego $$S = 0.$$

Así, la suma de las m raices m^{as} de la unidad es igual á 0.

91. Las tres raices cúbicas de la unidad son:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Se ve fácilmente que $z_2^2 = z_3$, y que $z_3^2 - z_2$.

La suma de los cuadrados será, pues,

$$1 + \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = 0.$$

92. 1.° Las raíces m^{as} de la unidad están comprendidas en la fórmula $z = \cos\frac{2K\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2K\pi}{m}$; si hacemos $K = 0, 1, 2, \ldots\ldots m - 1$, tendremos:

$$z_1 = \cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ;$$

$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m};$$

$$z_3 = \cos\frac{4\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{m};$$

. . . .

$$z_{m-1} = \cos\frac{(m-2)2\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{(m-2)2\pi}{m};$$

$$z_m = \cos\frac{(m-1)2\pi}{2m} + i \operatorname{sen}\frac{(m-1)2\pi}{m};$$

Para elevar estas diversas raíces á la potencia n basta multiplicar por n su argumento; de donde resulta:

$$z_1^n = \cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ;$$

$$z_2^n = \cos\frac{2n\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{m};$$

$$z_3^n = \cos\frac{4n\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{4n\pi}{m};$$

. . . .

$$z_{m-1}^n = \cos\frac{(m-2)2n\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{(m-2)2n\pi}{m};$$

$$z_m^n = \cos\frac{(m-1)2n\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{(m-1)2n\pi}{m}.$$

Sumando ordenadamente y representando por S_1 la suma de los cosenos y por S_2 la suma de los senos, tenemos:

$$S = S_1 + i S_2.$$

S_1 y S_2 son, respectivamente, la suma de los cosenos y de los senos de una serie de arcos en progresión aritmética; en dicha progresión el primer término $a=0$; la razón

$$h=\frac{2n\pi}{m},$$

y el número de términos es m.

Las fórmulas que representan dichas sumas son (problema 38, Tercera parte).

$$S_1=\frac{\cos\left[a+(n-1)\frac{h}{2}\right]\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\left[0^{\circ}+(m-1)\frac{n\pi}{m}\right]\operatorname{sen} m\,.\,\frac{n\pi}{m}}{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{m}}=$$

$$=\frac{\cos(m-1)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{m}\operatorname{sen} n\pi}{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{m}}=0.$$

$$S_2=\frac{\operatorname{sen}\left[a+(n-1)\frac{h}{2}\right]\operatorname{sen}\frac{nh}{2}}{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}(m-1)\frac{n\pi}{m}\operatorname{sen} n\pi}{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{m}}=0.$$

luego $$S=S_1+S_2=0.$$

2.° Si $n=m$, $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{m}=\operatorname{sen}\pi=0$; y S_1 y S_2 toman la forma de la indeterminación $\frac{0}{0}$; pero la potencia m de cualquier raiz m^a de la unidad siendo igual á 1, la suma de las potencias m^{as} de las m raices, será igual á m.

93. Representemos por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_m$ las m raices m^{as} de la unidad; tendremos.

$$(x+\alpha_1)^m=x^m+mx^{m-1}\alpha_1+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}\alpha_1^2+\ldots\ldots+\alpha_1^m;$$

$$(x+\alpha_2)^m=x^m+mx^{m-1}\alpha_2+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^{m-2}\alpha_2^2+\ldots\ldots+\alpha_2^m;$$

$$(x+\alpha_3)^m = x^m + mx^{m-1}\alpha_3 + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^{m-2}\alpha_3^2 + \ldots\ldots + \alpha_3^m;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(x+\alpha_m)^m = x^m + mx^{m-1}\alpha_m + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^{m-2}\alpha_m^2 + \ldots\ldots + \alpha_m^m;$$

de donde:

$$\Sigma(x+\alpha)^m = mx^m + mx^{m-1}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots\ldots+\alpha_m) +$$
$$+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^{m-2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots\ldots+\alpha_m^2)+$$
$$+\ldots\ldots+(\alpha_1^m+\alpha_2^m+\alpha_3^m+\ldots\ldots+\alpha_m^m).$$

Pero, como se ha demostrado en el núm. 92.

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots\ldots+\alpha_m=0;$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots\ldots+\alpha_m^2=0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_1^m+\alpha_2^m+\ldots\ldots+\alpha_m^m=1;$$

de donde $\quad \Sigma(x+\alpha)^m = mx^m + m = m(x^m+1).$

94. 1.° Si hacemos $\alpha=1$, la realidad de la expresión propuesta es evidente; si α representa una de las otras raíces cúbicas de la unidad, la segunda, por ejemplo, α^2 representará la tercera; efectuando tendremos:

$$(x+\alpha)^3+(x+\alpha^2)^3=(x^3+3\alpha x^2+3\alpha^2x+\alpha^3)+$$
$$+(x^3+3\alpha^2x^2+3(\alpha^2)^2x+(\alpha^2)^3,$$

ó sea: $\quad 2x^3+3x^2(\alpha+\alpha^2)+3x[\alpha^2+(\alpha^2)^2]+[\alpha^3+(\alpha^2)^3]. \quad$ **[1]**

Pero $\qquad \alpha+\alpha^2=-1;\ (\alpha^2)^2=\alpha;$

de donde $\quad \alpha^2+(\alpha^2)^2=\alpha^2+\alpha=-1;\quad \alpha^3=1;\quad (\alpha^2)^3=1.$

Y la expresión propuesta es igual á

$$2x^3-3x^2-3x+2,$$

que tiene un valor real.

2.º Si hacemos $2x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$,

tendremos también $(x + \alpha)^3 + (x + \alpha^2)^3 = 0$.

El primer miembro, que es la suma de dos cubos, es divisible por $[(x + \alpha) + (x + \alpha^2)]$, ó sea por $2x + \alpha + \alpha^2$; de donde:

$$(2x + \alpha + \alpha^2)\,[(x + \alpha)^2 + (x + \alpha)\,(x + \alpha^2) + (x + \alpha^2)^2] = 0;$$

luego $2x + \alpha + \alpha^2 = 0$; ó sea $2x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$;

$$(x + \alpha)^2 - (x + \alpha)\,(x + \alpha^2) + (x + \alpha^2)^2 = 0,$$

ó sea
$$x^2 - x + 2 = 0;$$

de donde
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}.$$

Las tres raíces de la ecuación propuesta son, pues,

$$-1,\quad \frac{1}{2}\quad \text{y}\quad 2.$$

Fe de erratas de las Soluciones.

Pág.	Núm.	Dice.	Debe decir.
7	58	$58^\circ\,21'\,1'',1$	$58^\circ\,1'\,21'',1$
19	126	$61^\circ\,48'$.....	$61^\circ\,49'$.....
20	134	75°.....	52°.....
22	141	$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \ldots..$	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a + b) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^3(a + b)}}{\operatorname{tg}(a + b)} = \ldots.$
24	146	los dos términos de la fórmula.....	los dos términos del segundo miembro de la fórmula.....
49	201	$c = 695,90$	$c = 625,90$
54	206	$A = 79^\circ\,17'$.....	$A = 70^\circ\,17'$....
89	269	$DE = \frac{AE \operatorname{sen} DAE}{\operatorname{sen} ADE}$	$DE = \frac{AB \operatorname{sen} DAE}{\operatorname{sen} ADE}$
90	270	$\operatorname{sen}(\gamma + \alpha) \cos\beta$	$\operatorname{sen}(\gamma - \alpha) \cos\beta$
95	278	(3.ª línea) $\cos 18^\circ$ (4.ª línea) $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$	$\operatorname{sen} 18^\circ$ $\frac{1}{8}(\sqrt{5} - 1)$

Pág.	Núm.	Dice.	Debe decir.
135	51	$V = 2\, ll'\, l''\, \omega$ $V = \frac{2.15.20.25\sqrt{2}}{2} =$ $= 12990$ cm.^{3}	$V = ll'\, l''\, \omega$ $V = \frac{15.20.25\sqrt{2}}{2} =$ $= 5303{,}25$ cm.^{3}
155	3	$22^\circ\, 30'$	$23^\circ\, 30'$
157	10	(9.ª línea) $\frac{\sqrt{3}-1}{5-3\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{5+3\sqrt{3}}$
158	12	(10.ª línea) $\frac{\operatorname{tg} 2a}{1+\operatorname{sen} a}$	$\frac{\operatorname{tg} 2a}{1+\sec 2a}$
159	15	(1.ª línea) $\cos a - \cos b$	$\cos a + \cos b$

ADVERTENCIAS.

1.ª En la página 12 falta la solución de los problemas números 101 y 102, que ponemos á continuación:

101. $\operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{2}{3}}$; luego $\log \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}(\log 2 - \log 3) = \bar{1}{,}9119543$

$$x = 54^\circ\, 44'\, 8''.12.$$

102. $$\log \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}(\log 2 - \log 3) = \bar{1}{,}9119543$$

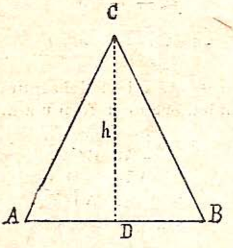
$$x = 39^\circ\, 13'\, 53'',23.$$

2.ª La NOTA del problema núm. 187, pág. 38, está equivocada; se puede reemplazar por la siguiente:

$$c' = h \cot B; \qquad b' = h \cot C,$$

de donde:
$$b' + c' = h\,(\cot B + \cot C)$$

$$a = h\,\frac{\operatorname{sen}(B+C)}{\operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C} = \frac{h}{\operatorname{sen} C \cos C} = \frac{2h}{2 \operatorname{sen} C \cos C} = \frac{2h}{\operatorname{sen} 2C},$$



resulta, pues, $\operatorname{sen} 2C = \frac{a}{2h}$;

$$2C = 51^\circ\, 18'\, 31'',6; \quad C = 25^\circ\, 39'\, 15'',8$$

Se terminará luego el problema con facilidad.

3.ª En el problema núm. 263 se debe escribir: $b = 34$ m. en lugar de $b = 35$ m.; la solución es, entonces, $B = 31^\circ\, 15'\, 49'',4$.

NOTA.—La figura adjunta debe sustituirse á la que va en la página 59, número 215 del libro de *Soluciones*.

ÍNDICE

TERCERA PARTE.

Estudio algebraico de las razones trigonométricas.

A. S. J.-C.