COLECCIÓN G. M. BRUÑO

ARITMETICA

CURSO SUPERIOR

EDICION VENEZOLANA

LIBRERIA MUNDIAL
CARACAS

ARITMETICA

CURSO SUPERIOR

COLECCION G. M. BRUÑO

ARITMETICA

CURSO SUPERIOR

CON CALCULO MENTAL Y PARTE COMERCIAL

POR

G. M. BRUÑO

10ª EDICION VENEZOLANA

LIBRERIA MUNDIAL
CARACAS

ADVERTENCIA

Este Curso superior *completa nuestros* cursos elemental y medio.

Hemos procedido con mucha sencillez en la exposición de la parte teórica, y enriquecido la parte práctica con buena copia de ejercicios orales y de cálculo mental.

A estos ejercicios siguen unos 1.100 problemas que juntos con más de 200 de recapitulación, clasificados por géneros, no dudamos serán de suma utilidad para los jóvenes, proporcionándoles abundante materia para tareas escritas.

Cinco partes comprende este tratado:

Parte I. — Operaciones con números enteros.

— II. — Operaciones con números decimales, y fracciones. — Raíces cuadrada y cúbica.

— III. — Sistema métrico. — Números complejos.

— IV. — Operaciones con números proporcionales. — Reglas diversas.

— V. — Parte comercial. *En ella se han introducido el cálculo del interés y del Descuento por los*

métodos comerciales, *valoración de mercaderías, nociones sobre los Efectos de comercio, Cuentas corrientes, Cambio, Corretaje, derechos de Aduana, etc., etc.*

Termina el Curso por la teoría simplificada de las Progresiones, del Cálculo logarítmico y de los Intereses compuestos.

A R I T M E T I C A

DEFINICIONES PRELIMINARES

1. Aritmética es la ciencia que trata de la expresión, cálculo y propiedades de las cantidades consideradas como números.

2. Cantidad.—Llámase *cantidad* todo lo que es susceptible de aumento o de disminución.

Por ejemplo, *la longitud de una cuerda, la población de una ciudad*, etcétera.

Hay dos clases de cantidades, la *continua* y la *discreta*.

Cantidad continua es aquella cuyas partes no pueden separarse.

Ejemplo: *la longitud de un camino, la de una pieza de paño, la altura de una pared.*

Cantidad discreta es la que consta de partes distintas o separables.

Como por ejemplo, *los alumnos de una clase, una hilera de árboles.*

Todo lo que se puede medir es cantidad *continua*, y lo que se puede contar es cantidad *discreta*.

3. Medir una cantidad es compararla con otra conocida y de la misma especie, que se llama *unidad*.

4. Número es el conjunto de *unidades o partes de unidad* de una misma especie, o también la *unidad* misma.

5. Unidad es la cantidad conocida con la cual se comparan todas las cantidades de la misma especie.

Por ejemplo, si se quiere contar los árboles de una alameda, los metros que tiene una pieza de paño, etc., la *unidad* será un árbol, un metro.

6. **De la comparación** de una cantidad con su unidad pueden resultar tres clases de números: 1° *el entero*, 2° *el quebrado*, y 3 *el mixto*.

Resulta un número entero cuando la cantidad medida contiene la unidad un número exacto de veces.

Como *tres* vasos, *diez* hombres.

Se tiene un quebrado cuando la cantidad es menor que la unidad.

Como *un tercio* de litro, *tres quintos* de kilogramo.

Resulta un número mixto cuando la cantidad medida contiene la unidad una o varias veces, y además una o varias partes de la unidad.

Por ejemplo, *dos* metros y *medio*.

Estas tres clases de números se dividen en *abstractos* y *concretos*.

7. **Número abstracto** es aquel en que no está determinada la naturaleza de la unidad.

Por ejemplo, *cuatro, dos tercios*.

8. **Número concreto** es aquel en que está determinada la naturaleza de la unidad.

Como *cuatro palomas, dos tercios de litro*.

Los números concretos son homogéneos cuando se refieren a unidades de una misma especie.

V. g.: cinco *libros*, veinte *libros*.

Y son heterogéneos cuando se refieren a unidades de distinta especie.

Como veinte *sombreros*, quince *cuadernos*.

El número concreto se subdivide en *complejo* e *incomplejo*.

9. **Número complejo** es el que consta de varias partes que se refieren respectivamente a unidades de diferentes especies, pero de un mismo género, y cuyo sistema de numeración no es decimal.

V. g.: *cuatro días, seis horas, cinco minutos*.

10. **Número incomplejo** es el que consta sólo de unidades de un mismo género y especie.

V. g.: *ocho arrobas, veinticuatro horas*.

PARTE I

NÚMEROS ENTEROS

CAPÍTULO I

NUMERACIÓN

11. Definición.—*Numeración* es la parte de la Aritmética que enseña a expresar o nombrar y a escribir los números.

La numeración se divide en *hablada* y *escrita*.

§ I. NUMERACIÓN HABLADA

12. Definición.—*Numeración hablada* es el arte de expresar los números con algunas palabras, empleadas solas o convenientemente combinadas.

Las palabras con que se expresan los números se llaman *nombres de los números*.

13. Formación de los números enteros.—La unidad se expresa por la palabra *uno*. Esta palabra es la *unidad simple* o de *primer orden*. Para formar los números se añade la unidad a sí misma, luego otra unidad al grupo de las dos primeras, y así sucesivamente.

Así, *uno* añadido a *uno* da *dos*; *uno* añadido a *dos* da *tres*; *uno* añadido a *tres* da *cuatro*, y así en adelante; de modo que, añadiendo una unidad a cada número ya encontrado, se forma un nuevo número.

La serie de los números enteros es ilimitada.

14. Los nombres de los nueve primeros números son: **uno**, **dos**, **tres**, **cuatro**, **cinco**, **seis**, **siete**, **ocho**, **nueve**.

Cada uno de los nueve primeros números expresa *unidades simples* o de *primer orden*.

15. El número siguiente se llama *diez* o *decena*; es la unidad de *segundo orden*, que se compone de diez unidades simples.

1° Por *decenas* se cuenta del mismo modo que se contó por unidades simples; se dirá pues: *una decena*, *dos decenas*, hasta *nueve decenas*.

El uso ha reemplazado estas expresiones con las siguientes: *diez*, *veinte*, *treinta*, *cuarenta*, *cincuenta*, *sesenta*, *setenta*, *ochenta*, *noventa*.

2° Los nombres de los *nueve* números comprendidos entre dos decenas consecutivas se forman añadiendo al nombre de cada decena el de las nueve unidades simples, de esta manera: *treinta y uno*, *cuarenta y seis*, hasta *noventa y nueve*.

16. Nota. 1° El uso ha querido que en vez de decir *diez y uno*, *diez y dos*, *diez y tres*, *diez y cuatro*, *diez y cinco*, se diga *once*, *doce*, *trece*, *catorce*, *quince*; los demás números hasta *veinte* siguen la formación ordinaria: *diez y seis*, *diez y siete*, etc.

2° Desde *veinte* hasta *treinta*, los números se expresan en una sola palabra: *veintiuno*, *veintidós*, *veintitrés*, *veintinueve*.

17. El conjunto de diez decenas se llama *centena* o *ciento*; es la unidad de *tercer orden*.

1° Se cuenta por *centenas* como se contó por *decenas* y por *unidades simples*, diciendo: *una centena*, *dos centenas*..., *nueve centenas*, o más simplemente: *ciento*, *doscientos*, *tres-*

cientos, cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, ochocientos, novecientos.

2° Los nombres de los números comprendidos entre dos centenas consecutivas se forman añadiendo al nombre de cada centena, el de los noventa y nueve primeros números; v. gr.: *ciento uno, ciento dos, ciento noventa y nueve..., novecientos uno, novecientos dos...,* hasta *novecientos noventa y nueve.*

3° El grupo de los tres primeros órdenes de unidades constituye la *clase de las unidades simples.*

18. El conjunto de diez centenas se llama *mil, millar o unidad de segunda clase.*

1° La clase *de los millares,* así como la de las unidades simples, se compone de *unidades, decenas y centenas,* las cuales constituyen los *órdenes* 4°, 5° y 6°.

2° Los nombres de los números comprendidos entre dos millares consecutivos se forman añadiendo al nombre de cada colección de miles los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números.

3° El conjunto de *diez centenas de mil, o mil millares,* se llama *millón o unidad de tercera clase.*

19. La clase de los *millones,* así como la de los *millares* y la de las *unidades simples,* se compone de *unidades, decenas y centenas,* las cuales constituyen los *órdenes* 7°, 8° y 9°.

Los nombres de los números comprendidos entre dos millones consecutivos se forman añadiendo al nombre de cada colección de millones los nombres de los novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve primeros números.

Continuando, sucesivamente se obtienen *millares de millón, o unidad de cuarta clase,* en seguida los *billones, millares de billón, trillones, millares de trillón,* etc.

20. Sistema de numeración.—Llámase *sistema de numeración* al conjunto de las convenciones según las cuales se expresan y representan todos los números.

21. Base de un *sistema de numeración* es el número de unidades de un orden cualquiera necesarias para componer una unidad del orden superior inmediato.

El sistema de numeración que acabamos de estudiar se llama decimal, porque *su base es diez.*

Se ve, en efecto, que el sistema *decimal* se funda en esta convención:

Diez unidades de un orden forman una unidad del orden superior inmediato, y mil unidades de una clase forman una unidad de la clase superior inmediata.

Recíprocamente, una unidad de un orden vale diez unidades del orden inferior inmediato, etc.

Así, diez unidades equivalen a una decena; cien unidades a una centena; una centena a diez decenas; un millar a diez centenas, etc.

NOTA: Por lo que antecede se ve que se han podido designar todos los números por medio de un reducido número de vocablos.

TABLA DE NUMERACIÓN

8ª Clase	7ª Clase	6ª Clase	5ª Clase	4ª Clase	3ª Clase	2ª Clase	1ª Clase
24 23 22 orden	21 20 19 orden	18 17 16 orden	15 14 13 orden	12 11 10 orden	9º 8º 7º orden	6º 5º 4º orden	3º 2º 1º orden
638	**127**	**394**	**237**	**867**	**523**	**675**	**478**
centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades	centenas decenas unidades
de millar de trillón	de trillón	de millar de billón	de billón	de millar de millón	de millón	de millar	simples
4º período trillones		3er. período billones		2º período millones		1er. período unidades	

§ II. NUMERACIÓN ESCRITA

22. Definición.—*Numeración escrita* es el arte de representar los números por medio de ciertos signos convencionales llamados *cifras*, o *guarismos*.

Estos signos son las cifras *arábigas* (1) siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
uno	**dos**	**tres**	**cuatro**	**cinco**	**seis**	**siete**	**ocho**	**nueve**	**cero**

Las nueve primeras cifras se llaman *significativas* porque representan por sí mismas un valor.

El *cero* no tiene valor ninguno ni por sí, ni antepuesto a otro número; es una cifra *insignificativa* o *auxiliar* cuyo oficio es ocupar el lugar de cualquier orden, cuando no haya unidades de este orden en un número.

23. Valor absoluto y valor relativo.—Cada cifra significativa tiene dos valores: el uno *absoluto* y el otro *relativo*.

Valor absoluto de una cifra es el que depende de la forma que tiene; conserva este valor en cualquier lugar en que se encuentre.

V. g.: En los números 402 y 14, el 4 siempre valdrá 4, y no 3 ni 5, etc.

Valor relativo o local de una cifra es el que depende del lugar que ocupa en un número.

Así, en el número 6.408, el valor absoluto del primer guarismo de la izquierda es 6, su valor relativo es 6 unidades de millar; asimismo, el valor absoluto del segundo guarismo es 4, y su valor relativo es 4 centenas, etc.

24. Convención.—La numeración escrita se funda en la convención siguiente:

Toda cifra escrita a izquierda de otra representa unidades diez veces mayores que las que expresa ésta.

(1) Estas cifras se llaman *arábigas* porque fueron los Arabes quienes las introdujeron en Europa en el siglo X.

De este principio resulta que si la primera cifra representa *unidades simples*, la que la sigue a la izquierda representará *decenas*; la tercera, *centenas*, etc.

Así, en el número 624, el 6 representa centenas; el 2 decenas, y el 4 unidades; y en el número 4.009, el 4 representa millares, y el 9 unidades.

Luego se necesita una cifra para representar un número que no tiene más que unidades, dos para el que tiene decenas, etc.

25.—ESCRITURA DE UN NÚMERO.—Para representar un número, se escriben sucesivamente de izquierda a derecha las centenas, docenas y unidades de cada clase, empezando por la clase superior, y colocando ceros en los lugares que carecen de unidades.

Para representar, por ejemplo, el número *cuatrocientos cinco*, se escribirá 405.

Y para representar el número *cuatro mil seis millones veinte mil quinientas unidades*, se dispondrán los guarismos del modo siguiente: 4 006 020 500.

26. Lectura de un número.—I. Para leer un número de tres guarismos, *se anuncian separadamente las centenas, las decenas y las unidades.*

Así, 739 se leerá: *setecientas treinta y nueve unidades.*

II.—PARA LEER UN NÚMERO CUALQUIERA: 1° Se divide el número en grupos de a seis cifras, empezando por la derecha; entre el primero y el segundo grupo, y en la parte inferior, se escribe el número 1 que representa los millones; entre el segundo y el tercero, el número 2 que representa los billones; entre el tercero y el cuarto el número 3 que representa los trillones, etc.

Cada grupo de a seis cifras se subdivide en dos de a tres, con un punto o con una coma, para separar los millares. La última sección puede constar de sólo una o dos cifras.

2° En seguida, empezando por la izquierda, se leen sucesivamente las diferentes secciones, posponiendo la palabra mil donde se encuentra un punto; millón **donde se encuentra la cifra** uno; billón **donde hay el dos, etc.**

Así, el número 4 203 000 963 005 430 728
se dispondrá del modo siguiente: $4_3203.000_2963.005_1430.728$
y se leerá:

Cuatro trillones—doscientos tres mil billones—novecientos sesenta y tres mil cinco millones—cuatrocientas treinta mil setecientas veintiocho unidades.

27. NOTA: De los principios de la numeración resulta que *para que un número entero sea* 10, 100, 1000... *veces mayor, basta escribir a la derecha de este número, uno, dos, tres... ceros.*

Ejemplo.—Sea el número 25.

Si se agrega un cero a la derecha, resulta el número 250. Al principio teníamos 25 unidades, y ahora 25 decenas; siendo las decenas diez veces mayores que las unidades, el número 250 es, por lo tanto, diez veces mayor que 25.

Un raciocinio análogo probaría que, agregando dos ceros, el número se hace cien veces mayor, etc.

Del mismo modo se demostraría que *para hacer un número terminado por ceros,* 10, 100, 1000, etc., *veces menor, basta quitar uno, dos, tres, etc., ceros de la derecha.*

CIFRAS ROMANAS

28. Para representar los números, los Romanos usaban las cifras siguientes:

	I	V	X	L	C	D	M
cuyo valor es:	1	5	10	50	100	500	1000.

La escritura de los números por medio de las cifras romanas se funda en las siguientes convenciones.

29. CONVENCIONES.—I. Si a la derecha de una cifra se escribe otra el valor igual o menor, el valor que representa ésta se agrega al valor de la primera

Así, los números	III,	XV,	XXVII,	CLXI,	MDCCXVI
se leen	3	15	27	161	1716.

Es de advertir que no se repite más de tres veces seguidas el mismo carácter.

30. II.—Si a la izquierda de una cifra se escribe otra menor, el valor de aquélla queda disminuído en el valor de ésta.

Los números IV, XL, XCI, CDXIX, MDCCCXCVIII, MCMIX se leen 4 40 91 419 1898 1909.

31. III.—Una rayita encima de una cifra le hace representar miles; dos rayitas, millones, etc.

Los números	$\overline{\text{III}}$,	$\overline{\overline{\text{VII}}}$
representan	3 000	7 000 000

Sin embargo los números 1 000, 2 000, 3 000, se suelen escribir M, MM, MMM.

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el período o la clase de las mayores unidades de un número entero que tiene: 1° 9 guarismos, 2° 13 guarismos; 3° 17 guarismos; 4° 12 guarismos?

2. ¿Cuántas cifras tienen los números enteros cuyas mayores unidades son: 1° decenas de billón; 2° centenas de mil; 3° unidades de millón; 4° centenas de millón?

3. Hágase 10 y 100 veces mayor cada uno de los números siguientes: 384, 645, 8.572.

4. Hágase 100 y 1 000 veces menor cada uno de los números siguientes: 2 000, 384 000, 75 000.

5. Escríbanse con cifras arábigas las cantidades siguientes:

XLV, LVIII, LXIX, LXXXIV, XCIX, CIX, CCXXXIV, CDXCIX, CMLIV, MCDXCII, MDCCXIX, MDCCCLXXXVII.

6. Escríbanse con cifras romanas las cantidades siguientes: 35, 69, 979, 904, 1 099, 1 214, 1 328, 1 355, 1 451, 1 515, 1 610, 1 648, 1 699, 1 779, 1 794, 1 800, 1 814, 1 830, 1 848, 1 870, 1 880, 1 910.

OPERACIONES CON LOS NÚMEROS ENTEROS

DEFINICIONES

32. **Operaciones aritméticas.**—Llámanse *operaciones*, en Aritmética, las diversas combinaciones que se hacen con los números, cuando se quiere buscar algún resultado.

Las operaciones fundamentales son cuatro: *adición, sustracción, multiplicación y división.*

33. **Prueba.**—*Prueba* de una operación es otra operación que tiene por objeto cerciorarse de la exactitud de la primera.

La prueba no da siempre *certidumbre absoluta* de la exactitud de una operación, como lo veremos a continuación.

34. **Problema.**—*Problema* es una cuestión que tiene por objeto buscar cantidades desconocidas, valiéndose para ello de otras conocidas.

Las cantidades conocidas son los *datos* del problema.

La resolución de un problema comprende la solución y el cálculo.

Solución es la indicación de las operaciones que se deben efectuar.

Cálculo es la ejecución de las operaciones indicadas en la solución.

CAPÍTULO II

ADICIÓN DE ENTEROS

§ I. NOCIÓN DE LA ADICIÓN

35. Definición.—Adición es una operación que tiene por objeto reunir varios números de una misma especie en uno solo, llamado suma o total.

Si se quiere saber, por ejemplo, cuántos niños hay en tres clases de las cuales la primera tiene 45, la segunda 62, y la tercera, 84, se debe ejecutar una adición, reuniendo los números 45, 62 y 84 en uno solo.

36. Sumandos.—Las cantidades que han de añadirse unas a otras se llaman *sumandos.*

En la suma de números concretos, los sumandos han de ser cantidades de una misma especie, u homogéneas.

Así, se pueden sumar bolívares con bolívares, metros con metros, botellas con botellas, pero no bolívares con metros ni con botellas.

37. Signo de la adición.—La adición se indica con el signo $+$ que se lee *más*, el cual se coloca entre los números que deben sumarse.

Así, para indicar la suma de 3, 4 y 7, se escribe:

$$3 + 4 + 7$$

Que se lee: *tres más cuatro más siete.*

38. Igualdad.—Dos rayitas horizontales $=$ forman el signo de *igualdad*, que se lee *igual a*, e indica que la cantidad o cantidades que le preceden son iguales a las que le siguen.

Podemos escribir: $3 + 4 + 7 = 14$

lo cual se llama *una igualdad.* La parte $3 + 4 + 7$ es el *primer miembro*, y 14, el *segundo miembro.*

§ II. PRÁCTICA DE LA ADICIÓN

Consideremos dos casos:

39. 1ER. CASO.—Suma de un número dígito con cualquier otro número.

Para sumar un número dígito con cualquier otro número, se añade el primero a la cifra de las unidades simples del segundo.

Si ocurriere que esta suma resulte mayor que 9, se suma la decena con las decenas del segundo número.

Así, para sumar 6 con 342 se añade 6 a 2, y resulta la suma 348.

Para sumar 8 con 347, se dirá: 8 y 7 son 15; escribo 5 y llevo 1 decena; 1 y 4 son 5, etc.

40. 2º CASO.—Suma de varios números cualesquiera.

Súmense: 847, 292 y 759.

$$\left.\begin{array}{r} 847 \\ 292 \\ 759 \end{array}\right\} \textit{Sumandos.}$$
$$\overline{1\,898} \quad \textit{Total}$$

Escribo primero los sumandos unos debajo de otros, colocando las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc. Tiro una raya debajo de los sumandos, y empiezo por la derecha diciendo: 7 unidades más 2 unidades son 9 unidades, más 9 unidades son 18 unidades. En 18 unidades hay 8 unidades que escribo debajo de las unidades, y 1 decena que llevo a la columna de las decenas. Una decena y 4 decenas son 5 decenas, y nueve decenas son 14 decenas, y 5 decenas son 19 decenas. En 19 decenas hay 9 decenas que escribo debajo de las decenas, y una centena que llevo a la columna de las centenas. Una centena y 8 centenas son 9 centenas, y 2 centenas son 11 centenas, y 7 centenas son 18 centenas que escribo.

El total es 1 898.

En la *práctica*, se dice:

7 y 2...9 y 9...18, escribo 8 y llevo 1;
1 y 4...5 y 9...14 y 5...19, escribo 9 y llevo 1;
1 y 8...9 y 2...11 y 7...18, que escribo.

41. REGLA.—Para sumar varios números cualesquiera, se escriben los sumandos unos debajo de otros, de modo que las unidades del mismo orden vayan en una misma columna; se tira una raya debajo del último sumando, y se escribe el resultado debajo de esta raya.

Empezando por la derecha, se suman las cifras de la columna de las unidades; si la suma no pasa de 9, se escribe íntegra; si pasa de 9, se escriben sólo las unidades reservando las decenas que resulten, para sumarlas con las cifras de la columna siguiente.

Se suman del mismo modo las demás columnas, y debajo de la última se escribe íntegro el total que resulte.

42. Nota: I. Se empieza la adición por la columna de las unidades para que se puedan llevar a la columna de las decenas las que provienen de la adición de la primera columna, y las centenas que provienen de la segunda columna se puedan llevar a la de las centenas, etc.

II. Cuando hay muchos sumandos, se puede, para facilitar el cálculo, formar varios grupos y hacer sumas parciales, escribir el resultado de cada adición parcial y sumar luego estos resultados.

43. Prueba de la adición.—La prueba de la adición puede hacerse principalmente de los dos modos siguientes:

1° Repitiendo la operación en un *orden inverso* al que se siguió al ejecutarla, como lo manifiesta el ejemplo adjunto.

22 481	*Prueba.*
7 642	
8 975	
426	
5 438	
22 481	*Total.*

2° Cuando hay muchos sumandos, se pueden formar con ellos grupos de 3, 4, 5... que se suman separadamente. Después se reúnen en uno solo todos los totales parciales. El último resultado debe ser igual a la suma primitiva.

$$\left.\begin{array}{r}12\,324\\925\\4\,942\end{array}\right\}\ 18\,191$$
$$\left.\begin{array}{r}25\,015\\98\\4\,726\end{array}\right\}\ 29\,839$$
$$\overline{48\,030}\qquad\overline{48\,030}$$

§ III. CÁLCULO MENTAL EN LA ADICIÓN

44. No existen reglas generales y absolutas para el cálculo mental, sólo la práctica enseña varios procedimientos rápidos que vamos a poner de manifiesto por medio de varios ejemplos.

El procedimiento del *número redondo* es propiamente como la base del cálculo mental.

Número redondo es el que termina por uno o varios ceros; dado un número, para hacerlo redondo basta añadirle el *complemento* a 10 de la cifra de las unidades.

Observemos primero que cada uno de los números dígitos tiene su complemento a 10, esto es un número que, añadido al primero, da 10.

I. *Súmense*: 1º 6, 7 y 4.

Diremos: 6, 4 y 7 son 17, pues 4 es el complemento de 6.

2º 7, 8, 3 y 2.

Se dice, agrupando las cifras cuya suma es igual a 10:

7, 3, 8 y 2 = 20, pues $7 + 3 = 10$; $8 + 2 = 10$.

3º 8, 7, 12 y 15.

Se dice: 8, 7 y 15 son 30 y 12 = 42

o también 8 y 12, 20 y 15, 35 y 7 = 42

II. *Súmense*: 1º 87 y 15.

Se puede añadir a 87 lo que le falta para que iguale a 90, tomándolo a 15, pues más fácil es operar con los números 90 y 12, desde luego se ve, en efecto, que $90 + 12 = 102$.

Hubiéramos podido decir también $87 + 10 + 5 = 102$.

2º 235 y 127.

Mentalmente se dice 235 y 5 y 122 son 362

o también 235 y 120 y 7 son 362.

III. *Súmense*: 342 y 453.

Se descomponen los números en sus unidades de varios órdenes; se hacen las sumas de las unidades del mismo orden, *empezando por el mayor*, y se suman los resultados parciales.

Para sumar 342 con 453, se dice:

300	y	400	=	700
40	y	50	=	90
2	y	3	=	5
Total				795

Para sumar los números 692, 565, 422, se dice:

600,	500	y	400	=	1 500
90,	60	y	20	=	170
2,	5	y	2	=	9
Total					1 679

NOTA: Generalmente no se emplea exclusivamente el cálculo mental; a proporción que se obtiene un resultado, se lo escribe, y se combina el cálculo mental con el cálculo escrito.

CAPÍTULO III

SUSTRACCIÓN DE ENTEROS

§ I. NOCIÓN DE LA SUSTRACCIÓN

45. Definición.—*Sustracción* o *resta* es una operación por medio de la cual se quita un número de otro de la misma especie.

La sustracción es una operación inversa de la adición, y puede también definirse así: Es una operación en la cual dada la suma de dos números y uno de ellos, se busca el otro.

Así, la operación por medio de la cual se averigua cuántas naranjas deben separarse o sacarse de un canasto que tiene 86, para que queden 34, se llama *sustracción*, porque para esto debe restarse 34 de 86.

46. Signos de la sustracción.—La sustracción se indica con el signo —, que se lee *menos.*

Para indicar que de 19 se restan 7, se escribe 19—7, y se lee 19 menos 7.

47. Minuendo y sustraendo.—Llámase *minuendo* la cantidad de que ha de restarse o quitarse otra menor.

Sustraendo es el número que se resta del minuendo.

En el ejemplo anterior, 19 es el *minuendo*, y 7 el *sustraendo*.

48. El resultado de la sustracción se llama *resta*, *exceso*, o *diferencia*.

§ II. PRÁCTICA DE LA SUSTRACCIÓN

Ocurren dos casos en la operación de restar:

49. 1ER. CASO.—Restar un número de otro cuando cada cifra del sustraendo es menor que su correspondiente del minuendo, o igual a ella.

Réstese 325 de 749.

749 *Minuendo*		Basta restar sucesivamente las unidades, decenas y centenas de 325 de las unidades, decenas y centenas de 749.
325 *Sustraendo*		
424 *Resta*		

Quito 5 unidades de 9, y quedan 4; 2 decenas de 4, y quedan 2; 3 centenas de 7, y quedan 4; o más brevemente: 5 de 9, 4; 2 de 4, 2; 3 de 7, 4; la cantidad 424 representará la diferencia que hay entre los dos números propuestos.

50. 2º CASO.—Restar dos números cuando una o varias cifras del sustraendo son mayores que sus correspondientes del minuendo.

Entonces hay que aplicar el principio siguiente que se considera como evidente:

La diferencia de dos números no se altera cuando se les añade una misma cantidad.

Sea restar 3 849 de 6 456.

6 456	Después de haber dispuesto los números
3 849	como en el caso precedente, se ve que no pue-
2 607	den restarse 9 unidades de 6; añado entonces

al 6 una decena o 10 unidades, lo cual da 16; 9 de 16, 7; como añadí una decena a las 6 unidades, debo añadir también una decena al 4 del sustraendo; 1 y 4 son 5, de 5 queda 0; 8 de 14 quedan 6, llevo 1 millar a los 3 del sustraendo; 1 y 3 son 4, de 6 quedan 2.

En la práctica se dice así:

de 9 a 16 van 7, y llevo una;
de 5 a 5, cero;
de 8 a 14, 6;
de 4 a 6, 2.

De lo que antecede se deduce la siguiente regla:

51. REGLA.—Para restar un número de otro, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que vayan las unidades debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc.

Debajo del sustraendo se tira una raya para separarlo del resultado.

Se quitan sucesivamente las unidades, decenas, centenas, etc. del sustraendo, de las unidades, decenas, centenas, etc., del minuendo. Si una cifra del sustraendo es mayor que su correspondiente del minuendo, se añaden a ésta diez unidades de su orden y por compensación, se añade una unidad de su orden a la cifra siguiente del sustraendo.

El número así obtenido es la diferencia de los números dados.

52. Nota: Se empieza la sustracción por la derecha, porque si se empezase por la izquierda, sería menester cambiar el resultado ya escrito cada vez que la cifra siguiente del sustraendo fuere mayor que su correspondiente del minuendo.

No importa empezar la sustracción por cualquier columna cuando todas las cifras del sustraendo son menores que sus correspondientes del minuendo.

53. Prueba de la sustracción.—La prueba de la sustracción puede hacerse principalmente de dos modos:

1° Por la adición.—Sumando la diferencia con el sustraendo, el total debe ser igual al minuendo.

$$\begin{array}{rr} & 1\,854 \\ & \underline{968} \\ \textit{Diferencia:} & 886 \end{array} \left\{ \; 1\,854 \; \textit{Prueba.} \right.$$

2° Por la sustracción.—Restando del minuendo la diferencia, el resultado debe ser igual al sustraendo.

$$\begin{array}{rrr} & \text{Operación} & \text{Prueba} \\ & 2\,908 & 2\,908 \\ & \underline{1\,439} & \underline{1\,469} \\ \textit{Diferencia:} & 1\,469 & 1\,439 = \textit{al sustraendo.} \end{array}$$

§ III. CÁLCULO MENTAL EN LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN COMBINADAS

54. I. Súmense: 1° 6 425 y 193.

A 6 425 se añadirá 200 y se restará 7, ya que $200 - 7 = 193$.

$$6\,425 + 193 = 6\,425 + 200 - 7 = 6\,618$$

2° 4 225 y 992.

A 4 225 se añadirá 1 000 y se restará 8, pues $1\,000 - 8 = 992$

$$4\,225 + 1\,000 - 8 = 5\,217$$

II. *De* 425 *réstese*: 1° 93.

Se restará 100 y se añadirá 7, pues $100 - 7 = 93$.

$$425 - 93 = 425 - 100 + 7 = 332$$

2° 294.

Se restará 300 y se añadirá 6

$$425 - 294 = 425 - 300 + 6 = 131.$$

III. *De* 48 *réstese* $8 + 4 + 6$.

Se dice $48 - (8 + 4 + 6) = 48 - 8 - 4 - 6$

$$48 - 8 = 40, \quad 40 - 4 = 36, \quad 36 - 6 = 30.$$

Lo que manifiesta que para restar de un número la suma de otros se restan sucesivamente estos números del primero.

IV. *De* 425 *réstese* 167.

He aquí cómo puede descomponerse la operación:

$$
\begin{aligned}
425 - 100 &= 325\\
325 - 60 &= 265\\
265 - 7 &= 258
\end{aligned}
$$

La diferencia es 258.

Para restar 60 de 325, hubiéramos podido restar 100 y añadir 40.

EJERCICIOS DE SUMAR Y RESTAR

Ejercicios orales

7. ¿Por qué no se empieza la adición por la izquierda, y cuándo puede empezarse por cualquier columna?

8. ¿Qué indica el total cuando se añade la ganancia al precio de compra?

9. ¿Qué indica el total cuando se añade la pérdida al precio de venta?

10. Si se añade la edad que tienes ahora al año de tu nacimiento, ¿qué indica el total?

11. ¿Por qué se empieza la sustracción por la derecha, y en qué caso sería indiferente empezarla por la izquierda o por cualquier columna?

12. ¿Cómo se hace la prueba de la sustracción por la sustracción?

13. ¿Qué número resulta sumando el sustraendo con la diferencia?

14. ¿Qué resulta si del minuendo se quita la diferencia?

15. Si se aumenta el minuendo, ¿qué sucede con la diferencia?

16. ¿Qué sucede con la diferencia si se disminuye el minuendo?

17. ¿Qué alteración hay en la diferencia cuando se aumenta el sustraendo?

18. ¿Se altera la diferencia si se añade una misma cantidad a ambos términos?

19. Si se quita una misma cantidad a ambos términos, ¿queda alterada la diferencia?

20. ¿Qué cantidad resulta sumando juntamente el minuendo, el sustraendo y la diferencia?

21. Si a la suma de dos números se añade su diferencia ¿qué resulta en el total?

22. La diferencia de dos números añadida a su suma da 432; ¿cuál es el número mayor?

23. Cuando se conoce la suma de dos números y su diferencia, ¿cómo se encuentra el número mayor?

24. Si de la suma de dos números se resta su diferencia, ¿qué número sale en el resultado?

25. Conocida la suma de dos números y su diferencia, ¿qué debe hacerse para encontrar el menor?

26. La suma de dos números es igual a 24, su diferencia, a 6; ¿cuál es el número menor?

27. La suma de dos números es igual a 50, su diferencia a 20; ¿cuál es el número menor?

28. ¿Qué resulta si se resta la suma de dos números del duplo del mayor?

29. ¿Qué resulta si se resta de la suma de dos números el duplo del menor?

30. La suma de dos números es 400, el duplo de su diferencia es 36; ¿cuáles son estos números?

31. La suma de dos números es 80, el duplo del menor es 60; ¿cuál es la diferencia de estos números?

CÁLCULO MENTAL

32. Efectuar las sumas siguientes:

1º $3 + 9 + 7$; 3º $7 + 4 + 6 + 3$; 5º $27 + 33$;
2º $6 + 5 + 4 + 5$; 4º $6 + 3 + 1 + 7$; 6º $26 + 34$;

33. Súmense:

1º $42 + 58$; 3º $509 + 491$; 5º $333 + 367$;
2º $72 + 27$; 4º $712 + 688$; 6º $426 + 174$.

34. Descomponer en dos partes de una sola cifra, y de todos los modos posibles, los números: 11, 12, 13, 14, 15, 16.

35. Súmense:

1º $4 + 15 + 6 + 23$; 3º $72 + 43 + 15 + 28$;
2º $56 + 87 + 44 + 21$; 4º $277 + 209 + 310$.

36 Súmense: 1° 215 + 97; 3° 312 + 95; 5° 292 + 63;
2° 133 + 92; 4° 434 + 91; 6° 896 + 119.

37. Con los datos del N° precedente efectuar las restas.

38. Súmense: 1° 125 + 97 + 319; 3° 67 + 43 + 198;
2° 150 + 91 + 174; 4° 288 + 98 + 147.

39. Efectuar las restas siguientes:

1° 247 — 92; 3° 333 — 88; 5° 382 — 105;
2° 423 — 93; 4° 234 — 107 6° 382 — 98.

40. Réstense: 1° 80 — 50; 3° 2 500 — 1 200;
2° 350 — 170; 4° 4 000 — 1 200.

41. Efectúense las operaciones indicadas:

1° 440 — 95; 3° 82 400 + 99; 5° 214 + 267 + 92;
2° 548 + 98; 4° 82 400 — 99; 6° 74 — 28.

PROBLEMAS

42. Cristóbal Colón nació en Génova en 1436; a los 56 años descubrió la América y murió en Valladolid 14 años después; pregúntase: 1° en qué año descubrió la América; 2° en qué año falleció.

43. La América Meridional cuenta 46 897 500 habitantes; la América Septentrional, 117 985 000; Europa, 436 783 000; Asia, 864 565 500; África, 145 230 000; Oceanía, 46 000 000; ¿cuál es la población total del globo?

44. Celedonio tiene Bs. 5 786; Felisa, Bs. 3 794, y Eudoxia tanto como los dos primeros juntos; ¿cuántos tiene esta última, y cuánto todos tres?

45. Pablo y Pedro se reparten 98 lápices; si Pablo debe recibir 10 más que Pedro, ¿cuántos cabrán a cada uno?

46. Patricio ha comprado paño, y lo revende en Bs. 6 218, perdiendo Bs. 143; ¿en cuánto lo había comprado?

47. Tres sobrinos han heredado: el 1° Bs. 4 720; el 2° Bolívares 1 365 más que el 1°; y el 3° tanto como los otros dos juntos. Dígase cuánto fué la herencia total.

48. El gran Pontífice Pío IX nació en mayo de 1792 y murió a la edad de 86 años; ¿cuál fué el año de su muerte?

49. El mayor de dos números es 286 704, y su diferencia 79 815. ¿En cuánto el menor pasa al número 43 210?

50. Preguntado un hacendado por el número de ovejas que tiene, responde que en un redil tiene 732, en otro 984, en otro 762, en el cuarto 978, en el quinto 723, y en el último 324; ¿cuál es el número total de sus ovejas?

51. Varias personas contribuyen a la fabricación de una iglesia, Silvano da Bs. 1 431; Milcíades, Bs. 1 395; Heraclio, Bs. 989; Indalecio, Bs. 763 y Gerardo, Bs. 1 437; ¿con qué suma han contribuído los cinco juntos?

52. La suma de dos números es 45 215; su diferencia 23 949; ¿cuáles son estos dos números?

53. La diferencia de dos números es 2 369; el duplo del mayor es 6 508; ¿cuáles son estos números?

54. La diferencia de dos números es 3 215; el duplo del menor es 7 270; ¿cuál es el mayor?

55. La suma de dos números es 5 810; el duplo del menor es 1 374; ¿cuál es la diferencia de estos números?

56. Tres buques han cargado respectivamente 2 520, 1 990 y 2 150 costales de trigo; dos comerciantes compran, el uno 1 880 costales y el otro 1 720; ¿cuántos quedan por vender?

57. Un padre tenía 45 años cuando nació su hijo, ¿cuál será la edad de éste cuando el padre tenga 87 años?

58. El Libertador Simón Bolívar nació en Caracas en 1783; principió su carrera militar en 1811, y murió en la quinta de San Pedro, cerca de Santa Marta, 19 años después: 1º ¿qué edad tenía cuando principió su carrera militar?; 2º ¿en qué año, y de qué edad murió?

59. Antonio deja al morir una fortuna de Bs. 15 860, que debe repartirse como sigue; a sus herederos Bs. 6 700, a un convento Bs. 5 400 y el resto a los pobres; ¿cuánto les tocó a éstos?

60. Vicente deposita en el Banco Bs. 8 752; saca una vez Bs. 3 234, después Bs. 1 700, más tarde Bs. 962, y por fin Bs. 49; ¿cuánto le queda todavía en el Banco?

61. Emerenciana cosecha en su hacienda 1 575 hectolitros de cebada y 900 de trigo. Vende 807 hectolitros de cebada y 391 de trigo a Humberto, y todo lo demás a Evaristo, ¿cuántos hectolitros de cada especie ha vendido a este último?

62. Raimundo tiene que caminar 6 784 millas, de las cuales 2 324 en ferrocarril, 1 570 en coche, 450 a caballo, 175 a pie, y las restantes en vapor; ¿cuántas millas tiene que caminar en vapor?

63. En 1819 fundó Bolívar la República de Colombia, compuesta de los estados de Venezuela, Nueva Granada y Ecuador; en 1829 se desmembró Venezuela, y un año más tarde el Ecuador; ¿a los cuántos años de la fundación de la República se desmembró Venezuela, y en que año el Ecuador?

CAPÍTULO IV

MULTIPLICACIÓN DE ENTEROS

§ I. NOCIONES GENERALES

55. Definición.—*Multiplicación* es una operación por la cual se toma un número llamado *multiplicando* tantas veces como unidades tiene otro llamado *multiplicador.*

Según esta definición, multiplicar un número por 5, es tomarlo cinco veces.

Así, pues, multiplicar 10 por 5 es lo mismo que *hacer la suma* de 5 números iguales a 10.

$$10 \times 5 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10.$$

Por donde se ve: 1° que el producto de *cero* por cualquier número es *cero*, pues la suma de cualquier número de ceros es cero; 2° que el producto de 1 por cualquier número es igual a este número; porque multiplicar 1 por 10, por ejemplo, es hacer la suma de 10 números iguales a 1; luego el producto es 10.

Por definición también, el producto de un número por *cero* es igual a *cero*, y el producto por 1 de un número es igual a este número.

La definición precedente conviene sólo cuando el multiplicador es un *número entero*; la siguiente es general.

56. Otra definición.—Multiplicación es una operación que tiene por objeto buscar un número, llamado *producto*, que sea respecto del multiplicando, lo que el multiplicador es respecto de la unidad.

Según esta definición, cuando el multiplicador es igual a 2 veces, 3 veces, 20 veces, etc, la unidad, el producto es igual a 2 veces, 3 veces, 20 veces, etc, el multiplicando; y cuando el multiplicador no es más que la décima parte, la centésima parte, los 45 milésimos, etc., de la unidad, el producto no es más que la décima parte, la centésima parte, los 45 milésimos, etc., del multiplicando.

57. Signo de la multiplicación.—La multiplicación se indica con el signo $\times$ o con un punto puesto entre las cantidades que se deben multiplicar.

Así, para indicar el producto de 10 por 5 se escribe 10×5 o 10.5, que se lee 10 *multiplicado por* 5.

Luego $10 \times 5 = 10.5 = 50.$

El producto de la suma de varios números por otro se indica escribiendo la suma entre paréntesis, posponiéndole el número por el cual se debe multiplicar.

Así para indicar el producto de $3 + 4$ por 7, se escribirá: $(3 + 4) \times 7$, ó $(3 + 4).\ 7$, ó más sencillamente $(3 + 4)\, 7$.

58. El resultado de la multiplicación se llama *producto*.

El producto es de la misma especie que el multiplicando.

Así, en este ejemplo: Si el metro de paño cuesta 9 bolívares, ¿cuánto costarán 7 metros?, el multiplicando es 9 bolívares; el producto buscado es también de la misma especie y por consiguiente 63 bolívares.

59. Factores del producto.—El multiplicando y multiplicador juntamente tomados son los *factores del producto*, esto es, los números que engendran el producto.

En el ejemplo 10×5, 10 es el *multiplicando*, 5 el *multiplicador* y 50 el *producto*.

El multiplicando y el multiplicador, como tales, son siempre números abstractos, aunque en la práctica el multiplicando representa ordinariamente un número concreto.

60. Llámase *producto de varios factores*, el número que resulta multiplicando el primer factor por el segundo, el resultado por el tercero, este último resultado por el cuarto, y así sucesivamente.

Si consideramos el producto de los factores 2, 3, 5, tendremos:

$$2 \times 3 \times 5 = 30.$$

61. Tabla de multiplicar.—Para ejecutar con facilidad la multiplicación, es necesario tomar de memoria los productos de dos números dígitos cualesquiera, contenidos en la siguiente tabla que, por haber sido inventada por Pitágoras, se llama *Tabla pitagórica.*

TABLA PITAGÓRICA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Para construir esta Tabla, se escriben en línea horizontal las nueve primeras cifras.

En seguida se añade cada número de esta primera línea a sí mismo, y resulta la 2ª, que contiene los productos por 2 de los nueve primeros números.

Añadiendo cada número de la 1ª línea a su correspondiente de la 2ª, se forma la 3ª, que contiene los productos por 3 de los nueve primeros números.

Añadiendo sucesivamente los números de la 1ª y 3ª...., los de la 1ª y 8ª, etc., se forman las líneas siguientes, que contienen los productos de los nueve primeros números por 4...., 9ª.

Para determinar por medio de esta tabla los productos de dos números dígitos cualesquiera, se busca uno de ellos en la primera fila horizontal y el otro en la 1ª hilera vertical; en la casilla en que se encuentran ambas, se halla el producto pedido.

Para encontrar el producto de 6 por 8, por ejemplo, se busca el número 6 en la primera fila horizontal y se baja verticalmente la hilera correspondiente a dicho número, hasta la octava fila; 48 es el producto buscado.

NOTA.—Se habría obtenido el mismo resultado buscando primero el 8 en la primera fila horizontal, y bajando en seguida verticalmente hasta la sexta. Por donde se ve que el producto de 6 por 8 es el mismo que el de 8 por 6.

62. NÚMERO DE CIFRAS DE UN PRODUCTO.—El número de cifras de un producto de dos factores es igual al número total de las cifras de los factores, o a este número menos 1.

Sea el producto $3\,527 \times 382$; digo que tendrá $4 + 3 = 7$ ó 6 cifras.

En efecto, $3\,527 <$ (1) $10\,000$, y $382 < 1\,000$.

Multipliquemos ordenadamente:

$$3\,527 \times 382 < 10\,000 \times 1\,000, \text{ ó } 10\,000\,000.$$

Ahora bien, 10 000 000 es el menor número de 8 cifras; luego el producto $3\,527 \times 382$, que es menor que 10 000 000 no tendrá 8 cifras; no podrá tener sino 7, a lo más.

Tenemos también $3\,527 > 1\,000$, y $382 > 100$.

Luego $3\,527 \times 382 > 1\,000 \times 100$ ó $100\,000$.

Pero 100 000 es el menor número de 6 cifras; el producto $3\,527 \times 382$ tendrá por lo tanto a lo menos 6 cifras.

(1) $<$ menor que; $>$ mayor que. Estos signos se emplean para indicar una desigualdad.

§ II. TEOREMAS RELATIVOS A LA MULTIPLICACIÓN

63. TEOREMA [1]. — **Para multiplicar una suma por un número basta multiplicar cada parte de ella, por este número y sumar los resultados.**

Sea multiplicar $(3 + 4)$ por 2; digo que tendremos:

$$(3 + 4) . 2 = 3 . 2 + 4 . 2.$$

En efecto, multiplicar $(3 + 4)$ por 2 es (**55**) hacer la suma de dos números iguales a $(3 + 4)$: $3 + 4$

$3 + 4$

Sumando verticalmente, tenemos $3 . 2 + 4 . 2$

por lo tanto $(3 + 4) . 2 = 3 . 2 + 4 . 2.$

64. TEOREMA. — Para multiplicar la diferencia de dos números por un tercero, basta multiplicar cada uno de ellos por el tercero y buscar la diferencia de los productos.

Sea multiplicar $(5 - 3)$ por 2; digo que tendremos:

$$(5 - 3) . 2 = 5 . 2 - 3 . 2.$$

En efecto, para repetir 2 veces $(5 - 3)$, basta hacer la suma de dos números iguales a $5 - 3$: $5 - 3$

$5 - 3$

Sumando verticalmente, tenemos: $5 . 2 - 3 . 2$

por lo tanto $(5 - 3).2 = 5 . 2 - 3 . 2.$

65. TEOREMA. — Para multiplicar una suma por otra, basta multiplicar sucesivamente todas las partes de la primera por cada una de las partes de la segunda, y sumar los resultados.

Multiplíquese $(13 + 7)$ por $(5 + 8)$.

Debemos tener:

$$(13 + 7) \times (5 + 8) = 13.5 + 7.5 + 13.8 + 7.8.$$

En efecto, para repetir la suma $(13 + 7)$, $(5 + 8)$ veces, basta repetirla 5 y 8 veces, y sumar los resultados; luego

$$(13 + 7) \times 5 = 13 . 5 + 7 . 5 \qquad (\mathbf{63})$$
$$(13 + 7) \times 8 = 13 . 8 + 7 . 8 \qquad (\mathbf{63})$$

[1] *Teorema* es una verdad que necesita ser demostrada.

Sumando ordenadamente estas dos igualdades, tendremos:

$$(13 + 7) \times 5 + (13 + 7) \times 8$$

o $(13 + 7) \times (5 + 8) = 13 \,.\, 5 + 7 \,.\, 5 + 13 \,.\, 8 + 7 \,.\, 8.$

NOTA: De este teorema se infiere que, si se aumentan de cierta cantidad los dos factores de un producto, éste queda aumentado:

1° Del producto del multiplicando por el número añadido al multiplicador;

2° Del producto del multiplicador por el número añadido al multiplicando;

3° Del producto de los dos números añadidos.

66. Teorema.—*No se altera un producto cuando se invierte el orden de los factores.*

Consideraremos los siguientes casos:

I. PRODUCTO DE DOS FACTORES.—Demostremos que:

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Para ello, escribamos en fila horizontal las 3 unidades del multiplicando, y repitamos esta fila 4 veces:

$$\begin{array}{c}
1 + 1 + 1 \\
1 + 1 + 1 \\
1 + 1 + 1 \\
1 + 1 + 1 \\
\\
4 \times 3
\end{array}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} 3 \times 4$$

Contando todas estas unidades por líneas horizontales resulta 3×4, y por líneas verticales, 4×3. Como en ambos casos hemos contado todas las unidades del cuadro, resulta que

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

II. No se altera el producto de varios factores cuando se invierte el orden de los dos últimos.

1° El producto tiene *tres factores*. Sea el producto $6 \,.\, 4 \,.\, 5$; digo que tendremos:

$$6 \,.\, 4 \,.\, 5 = 6 \,.\, 5 \,.\, 4.$$

Para demostrarlo, escribamos el número 6, 4 veces en una misma línea horizontal, y repetimos esta línea 5 veces:

$$\underbrace{\left.\begin{array}{c}6+6+6+6\\6+6+6+6\\6+6+6+6\\6+6+6+6\\6+6+6+6\end{array}\right\}}_{6 \,.\, 5 \,.\, 4} 6 \,.\, 4 \,.\, 5$$

Cada línea horizontal contiene al 6 repetido 4 veces, esto es, $6 \,.\, 4$; y como hay 5 líneas, tenemos $6 \,.\, 4 \,.\, 5$.

Cada línea vertical contiene al 6 repetido 5 veces, esto es, $6 \,.\, 5$; y como hay cuatro columnas, tenemos $6 \,.\, 5 \,.\, 4$.

Siendo en ambos casos uno mismo el número de unidades, se infiere que

$$6 \,.\, 4 \,.\, 5 = 6 \,.\, 5 \,.\, 4.$$

2° El producto tiene *un número cualquiera de factores*. Sea el producto $3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7$.

Por definición (**60**) tenemos:

$$3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 = 12 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 = 60 \,.\, 6 \,.\, 7.$$

Ahora bien, $60 \,.\, 6 \,.\, 7 = 60 \,.\, 7 \,.\, 6$; (I)

luego tendremos también:

$$3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 = 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 6.$$

III. No se altera el producto de varios factores cuando se invierte el orden de dos factores consecutivos.

1° *Los factores son los dos primeros.*

Sea el producto $3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6$; digo que es igual a $4 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 6$.

En efecto, $3 . 4 = 4 . 3$ (I); estos productos iguales multiplicados por una misma cantidad $5 . 6$, darán resultados iguales; luego:

$$3 . 4 . 5 . 6 = 4 . 3 . 5 . 6.$$

2° *Los dos factores ocupan cualquier lugar.*

Sea el producto $3 . 4 . 5 . 6 . 7$; digo que es igual a $3 . 4 . 6 . 5 . 7$.

En efecto, $3 . 4 . 5 . 6 = 3 . 4 . 6 . 5$; (II)
luego $3 . 4 . 5 . 6 . 7 = 3 . 4 . 6 . 5 . 7$.

IV. No se altera el producto de varios factores cuando se coloca un factor cualquiera en un lugar cualquiera.

Sea el producto $2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7$.

Tenemos sucesivamente (III):

$$\begin{aligned} 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 &= 2 . 3 . 4 . 5 . 7 . 6 \\ = 2 . 3 . 4 . 7 . 5 . 6 &= 2 . 3 . 7 . 4 . 5 . 6 \\ = 2 . 7 . 3 . 4 . 5 . 6 &= 7 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 \end{aligned}$$

Por donde se ve que el factor 7 se ha colocado en todos los lugares. Del propio modo se demostraría que cualquier otro factor puede también colocarse sucesivamente en todos ellos.

Luego no se altera un producto cuando se invierte el orden de los factores.

Consecuencias.—De este teorema se deducen las dos consecuencias siguientes, y también los teoremas que van a continuación.

67. I. Para multiplicar un número por la suma de varios otros, basta multiplicar este número por cada parte de la suma, y sumar los resultados.

Multiplíquese 7 por la suma $(4 + 5)$; digo que tendremos:

$$7 . (4 + 5) = 7 . 4 + 7 . 5.$$

En efecto, según el caso III, invirtiendo el orden de los factores, resulta:

$$7 . (4 + 5) = (4 + 5) . 7$$

y así volvemos al teorema N° **63**;

luego: $7 \cdot (4 + 5) = (4 + 5) \cdot 7 = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 7$

o $7 \cdot (4 + 5) = 7 \cdot 4 + 7 \cdot 5.$

68. II. Para multiplicar un número por la diferencia de otros dos, basta multiplicar este número por cada uno de los términos de la diferencia y restar los productos obtenidos.

Sea multiplicar 7 por la diferencia (8 — 5); digo que tendremos $7 \cdot (8 - 5) = 7 \cdot 8 - 7 \cdot 5.$

En efecto, $7 \cdot (8 - 5) = (8 - 5) \cdot 7$ (**66**)

ahora bien, $(8 - 5) \cdot 7 = 8 \cdot 7 - 5 \cdot 7$ (**64**)

luego $7 \cdot (8 - 5) = (8 - 5) \cdot 7 = 7 \cdot 8 - 7 \cdot 5.$

69. TEOREMA.—No se altera un producto cuando se reemplazan varios factores por su producto efectuado.

Sea el producto $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$; digo que tendremos:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 3 \cdot 24 \cdot 5.$$

En efecto $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5$ (**66**)

o $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 24 \cdot 3 \cdot 5$ (**60**)

y por último $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 3 \cdot 24 \cdot 5$ (**66**)

NOTA: Para multiplicar un número por varios factores, se lo puede multiplicar por el producto de ellos.

70. TEOREMA.—Para multiplicar un producto de varios factores por un número basta multiplicar uno de los factores por este número.

Sea multiplicar $8 \cdot 3$ por 7; digo que basta multiplicar por 7 el factor 3.

En efecto, el producto

$8 \cdot 3 \cdot 7 = 3 \cdot 7 \cdot 8$ (**66**)

u $8 \cdot 3 \cdot 7 = 21 \cdot 8 = 8 \cdot 21$ (**69**)

71. De donde se infiere que cuando se multiplica un factor de un producto por un número, el producto queda multiplicado por este número.

72. NOTA.—Para multiplicar dos o más números que rematan en ceros, basta multiplicar las cifras significativas sin hacer caso de los ceros, los cuales se escriben a la derecha del producto.

Multiplíquese 3 400 por 250; tenemos:

$$3\,400 = 34 \cdot 100$$
$$250 = 25 \cdot 10$$

Multipliquemos ordenadamente:

$$3\,400 \cdot 250 = 34 \cdot 100 \cdot 25 \cdot 10$$

o $\quad 3\,400 \cdot 250 = 34 \cdot 25 \cdot 100 \cdot 10$

y por último $\quad 3\,400 \cdot 250 = 34 \cdot 25 \cdot 1\,000$

por donde se ve que después de haber multiplicado 34 por 25, basta añadir tres ceros a la derecha del producto.

§ III. PRÁCTICA DE LA MULTIPLICACIÓN

Distinguiremos los tres casos siguientes:

73. Caso I: Multiplicar un número dígito por otro.

Puede obtenerse el producto de los dos números por medio de adiciones.

Así $\quad 6 \cdot 3 = 6 + 6 + 6 = 18.$

Pero en la práctica la tabla de Pitágoras proporciona el producto.

74. Caso II: Multiplicar un número cualquiera por un número dígito.

Multiplíquese 847 por 5.

El multiplicando 847 se compone de 7 unidades, 4 decenas y 8 centenas; para multiplicarlo por 5 basta (**63**) multiplicar por 5 todas sus partes, y sumar los resultados.

Disposición de la operación

$$\textit{factores del producto}\begin{cases} 847 & \textit{multiplicando} \\ \times 5 & \textit{multiplicador} \end{cases}$$
$$\overline{4\,235} \quad \textit{producto}$$

Se dice: 5 veces 7 unidades son 35 unidades, escribo 5 y llevo 3 decenas; 5 veces 4 decenas son 20 decenas y 3 que llevo son 23 decenas; escribo 3 decenas y llevo 2 centenas; 5 veces 8 centenas son 40 centenas y 2 que llevo son 42 centenas que escribo.

El producto es 4 235.

75. REGLA.—Para multiplicar un número cualquiera por un número dígito, se escribe el multiplicador debajo del multiplicando y se tira una raya.

En seguida, empezando por la derecha, se multiplica sucesivamente cada cifra del multiplicando por el multiplicador. Si el producto no pasa de 9, se lo escribe, si es mayor, se escriben solamente las unidades de cada producto parcial, y se llevan las decenas para sumarlas con el producto siguiente.

Se continúa la operación hasta el último producto, que se escribe íntegro.

76. NOTA.—Si el multiplicador es un número formado por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el número por la cifra significativa, y se escriben los ceros a la derecha del producto.

EJEMPLO: Multiplíquese 1 425 por 400.

Como 400 es igual a 4×100, basta multiplicar 1 425 por 4 y el resultado por 100 (**69**), esto es, basta multiplicar por 4 y escribir dos ceros a la derecha del producto (**72**).

77. CASO III. El multiplicando y el multiplicador tienen varias cifras.

Multiplíquese 3 827 por 584.

Tenemos: $584 = 500 + 80 + 4$.

Para repetir 584 veces el multiplicando, hay que multiplicarlo por 4, por 80 y por 500, y sumar los resultados, lo que ya sabemos hacer.

Disposición de la operación

$$\begin{array}{r l}
3827 & \textit{multiplicando} \\
584 & \textit{multiplicador} \\
\hline
15\,308 & \\
306\,160 & \textit{productos parciales} \\
1\,913\,500 & \\
\hline
2\,234\,968 & \textit{producto total}
\end{array}$$

En la práctica no se escriben los ceros que terminan los productos parciales:

Entonces se tiene:

```
    3 827
      584
 --------
   15 308
  306 16
 1 913 5
---------
2 234 968
```

78. REGLA.—Para multiplicar entre sí dos números cualesquiera, se escribe el multiplicador debajo del multiplicando, de modo que las unidades de una misma especie se correspondan.

En seguida, empezando por la derecha, se multiplica sucesivamente todo el multiplicando por cada cifra del multiplicador, cuidando de escribir la primera cifra de cada producto parcial debajo de la cifra por la cual se multiplicó.

Se suman los productos parciales, y el total da el producto pedido.

NOTA: Si tuviéramos que multiplicar, por ejemplo, 847 por 2 003, tendríamos, según la regla precedente:

```
      847
    2 003
---------
    2 541
1 694
---------
1 696 541
```

79. Prueba de la multiplicación.—Para hacer la prueba de la multiplicación, se repite la operación, invirtiendo el orden de los factores, y debe resultar el mismo producto (**66**).

Más adelante veremos otros procedimientos.

§ IV. NOCIONES SOBRE LAS POTENCIAS

80. Llámase potencia de un número el producto de varios factores iguales a él.

Así, $2 \times 2 \times 2$ es una potencia de 2, y $25 + 25$, una potencia de 25.

81. Por grado de una potencia se entiende el número de veces que entra en ella un mismo factor.

Primera potencia de un número es el mismo número, el cual se llama *base* de la potencia.

Segunda potencia o cuadrado de un número es el producto de dicho número multiplicado por sí mismo.

Así, 4 es el cuadrado o segunda potencia de 2, pues $4 = 2 \times 2$.

Tercera potencia o cubo de un número es el producto de dicho número tomado tres veces como factor.

Por ejemplo, 8 es el cubo de 2, pues $8 = 2 \times 2 \times 2$.

Cuarta potencia de un número es el producto de dicho número tomado cuatro veces como factor.

Así, 16 es la cuarta potencia de 2, pues $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

82. Las potencias de los números se indican por medio de una cifra que se escribe a la derecha, y en la parte superior de ellos; esta cifra se llama *exponente*.

Así, 13^4 indica la cuarta potencia de 13, o el producto de 4 factores iguales a 13; luego:

$$13^4 = 13 \,.\, 13 \,.\, 13 \,.\, 13.$$

El exponente 1 se subentiende siempre.

Así, $$7^o = 7.$$

83. Para obtener una potencia de 10, basta escribir la cifra 1 seguida de tantos ceros como unidades tiene el grado de la potencia.

En efecto, $$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000,$$
etc.

84. **TEOREMA.—Para multiplicar entre sí varias potencias de un mismo número, basta dar a éste un exponente igual a la suma de los exponentes de dichas potencias.**

Sea multiplicar 2^4 por 2^2; digo que el producto será 2^6.

En efecto, tenemos sucesivamente:

$$2^4 \times 2^2 = (2.2.2.2) \times (2.2) = 2.2.2.2.2.2 = 2^6 \text{ ó } 2^{4+2}.$$

Asimismo $$3^2.3^4.3^5 = 3^{2+4+5} = 3^{11}$$

85. **TEOREMA.—Para elevar la potencia de un número a otra potencia, basta elevar este número a una potencia cuyo exponente sea el producto de los exponentes.**

Así, $$(7^2)^3 = 7^2.7^2.7^2.$$

Luego (**84**): $$(7^2)^3 = 7^{2+2+2} = 7^{2.3} = 7^6$$

86. TEOREMA.—Para elevar un producto a cualquier potencia, basta elevar cada uno de sus factores a esta potencia.

Para elevar al cuadrado el producto $2^3.3^2.5$, tendremos sucesivamente:

$$\begin{aligned}(2^3.3^2.5)^2 &= (2^3.3^2.5) \times (2^3.3^2.5) && \textbf{(80)}\\ &= 2^3.3^2.5.2^3.3^2.5 \\ &= 2^3.2^3.3^2.3^2.5.5 && \textbf{(66)}\\ &= (2^3)^2.(3^2)^2.5^2\end{aligned}$$

y según el teorema anterior:

$$(2^3.3^2.5)^2 = 2^6.3^4.5^2.$$

§ V. CÁLCULO MENTAL EN LA MULTIPLICACIÓN

87. Multiplicación de un número por 2.—Se añade este número a sí mismo.

Así $\quad 45 \times 2 = 45 + 45 = 90;$
$\quad 450 \times 2 = 450 + 450 = 900;$
o también $\quad 45 \times 2 = 40 \times 2 + 5 \times 2 = 90; \quad$ **(63)**
en fin $\quad 45 \times 2 = 50 \times 2 - 5 \times 2 = 90.$

88. Multiplicación por 9, por 99, por 999, etc.—Para multiplicar un número por 9, se lo multiplica por 10, y del producto se resta el número.

Así, $\quad 48 \times 9 = 48.(10 - 1) = 48.10 - 48. \quad$ **(64)**

Para multiplicar un número por 99, se lo multiplica por 100, y se resta el número, pues $99 = 100 - 1$.

Por ejemplo: $\quad 225 \times 99 = 22\,500 - 225 = 22\,275.$

Para multiplicar por 999, se multiplica por 1 000 y se resta el multiplicando, ya que $999 = 1\,000 - 1$.

89. Multiplicación por 11.—Si el número que se ha de multiplicar tiene sólo una cifra, se la repite dos veces.

Así, $\quad 8 \times 11 = 88.$

Si el número tiene dos cifras, se hace la suma de estas cifras y se la escribe entre ellas.

Para multiplicar 52 por 11, se dice $5 + 2 = 7$, que se coloca entre 5 y 2. El producto es 572.

Cuando esta suma tiene más de una cifra, se escribe sólo la de las unidades, y se añade la de las decenas a las del número.

Así, para multiplicar 75 por 11, diremos: $7 + 5 = 12$; se coloca el 2 entre 7 y 5, y se añade 1 a 7. El producto es 825.

El procedimiento general consiste en multiplicar el número por 10, y añadir al producto el mismo número.

Así, $$45 \times 11 = 45.(10 + 1) = 45.10 + 45 \qquad (63)$$

Asimismo, para multiplicar un número por 101, se lo multiplica por 100, y al producto se añade el multiplicando, pues $101 = 100 + 1$.

90. Multiplicación por 12.—Se puede multiplicar el número por 3 y por 4, ya que $12 = 3 . 4$.

Se lo puede también multiplicar por 10, y al producto añadir dos veces el número.

Así, $$428 \times 12 = 428.3.4$$
$$428 \times 12 = 428.(10 + 2) = 428.10 + 428.2.$$

91. Multiplicación por 15.—Se multiplica el número por 3 y por 5, pues $15 = 3 . 5$.

Se puede también multiplicar por 10, y añadir al producto 5 veces el número, o la mitad del mismo producto.

Si el número es *par*, se le puede añadir su mitad, y multiplicar por 10 la suma obtenida.

Si el número es *impar*, se le añade su mitad por defecto, y se escribe 5 a la derecha de la suma obtenida.

Sea 17×15; tenemos $17 + 8 = 25$; a la derecha escribamos 5.

El número 255 es el producto buscado.

92. Multiplicación por 20, 30, 40, etc.—Para multiplicar un número por 20 se lo multiplica por 2 y por 10, pues $20 = 2 \times 10$.

Para multiplicarlo por 30, se lo multiplica por 3 y por 10, etc.

93. Multiplicación por 19, 29, 39, etc.—Se multiplica por 20, por 30, por 40, etc., y del producto se resta el multiplicando.

Así, $45 \times 19 = 45.(20 - 1) = 45.20 - 45.$

94. Multiplicación por 21, 31, 41, etc.—Se multiplica por 20, 30, 40, etc., y al producto se añade el número.

Así, $45 \times 21 = 45.(20 + 1) = 45.20 + 45.$

95. Producto de dos números comprendidos entre 10 y 20.—Para obtener este producto, se añade a uno de los números la cifra de las unidades del otro, se multiplica la suma por 10, y se añade el producto de las cifras de las unidades.

Sea
$$\begin{aligned} 15 \times 14 &= (10 + 5).(10 + 4) \\ 15 \times 14 &= 10.10 + 5.10 + 10.4 + 5.4 \\ &= (10 + 5 + 4).10 + 5.4 \\ &= (15 + 4).10 + 5.4. \end{aligned}$$

EJERCICIOS ORALES Y DE CÁLCULO MENTAL

64 ¿Qué pasa a ser el producto cuando se duplica, triplica o cuadriplica uno de los factores?

65. Si se toma la mitad, la tercera o la cuarta parte de un factor, ¿a qué se reduce el producto?

66. La diferencia de dos números es 15; ¿cuál será ésta si ambos números se multiplican por 3?

67. ¿Cuál es la sexta potencia de 2; la cuarta de 3, de 5?

68. Un número debe ser multiplicado sucesivamente por 3, 5, 8; ¿qué cantidad puede reemplazar a estos factores sucesivos?

69. Un número debe ser multiplicado por 24; ¿podrá encontrarse el producto por medio de multiplicaciones sucesivas? ¿Cuáles serían éstas?

70. ¿Cuánto suman los productos siguientes: 18×25 más 42×25? ¿Cómo puede encontrarse la misma suma con una sola multiplicación?

71. Búsquese la diferencia de los productos siguientes: 1° 43×16 y 23×16; 2° 54×12 y 42×12.

72. ¿Qué alteración sufre un producto cuando se añade un mismo número, 5 por ejemplo, a ambos factores?

73. ¿Cómo se hace la prueba de la multiplicación por la multiplicación, y en qué principio se funda este procedimiento?

74. Búsquese el producto de 25 por 9, sin ejecutar directamente la multiplicación.

75. Búsquese el producto de 18 por 11, sin ejecutar directamente la multiplicación.

76. Búsquese del propio modo el producto de 49: 1º por 99 y 2º por 101.

77. ¿Cuál es el producto de 51 por 1 010, sin ejecutar directamente la multiplicación?

78. Efectuar mentalmente los productos siguientes:

1º 10×10; 3º 48×10; 5º $138 \times 1\,000$;
2º 100×100; 4º 56×100; 6º 150×100.

79. Efectuar los productos:

1º 65×2; 3º 35×20;
2º 214×3; 4º 238×30.

80. Efectuar los productos:

1º 25×12; 3º 210×8;
2º 41×12; 4º 324×8.

81. Efectuar los productos:

1º 28×9; 3º 124×99;
2º 98×9; 4º 525×99.

82. Efectuar los productos siguientes:

1º 42×11; 3º 56×21;
2º 48×11; 4º 614×21.

83. Efectuar los productos:

1º 15×9; 3º 46×29;
2º 24×19; 4º 58×39.

84. Efectuar los productos:

1º 52×5; 3º 37×15;
2º 62×15; 4º 78×25.

85. Efectuar los productos:

1º 17×14; 3º 15×17;
2º 12×18; 4º 19×13.

PROBLEMAS

86. ¿Qué número de duraznos hay en 14 canastas, si cada una tiene 17 docenas?

87. Esteban compra 148 hectolitros de cebada, a Bs. 20 hectolitro, por lo cual da en pago 67 metros de paño de Bs. 40 metro, y el resto en especias; ¿a cuánto asciende el valor de éstas?

88. Heliodoro y Venancio salen de una misma ciudad en dirección contraria; el 1° camina 35 millas por día, y el 2° sólo 29; ¿a qué distancia estarán los dos al cabo de 10 días?

89. Braulio compra 14 vacas a Bs. 140 cada una, 7 caballos a Bs. 196 cada uno, 34 bueyes a Bs. 157 cabeza, y 300 ovejas a Bs. 40 cada una; revende todos estos animales por Bolívares 14 842; ¿cuánto gana en el negocio?

90. Fabricio tiene 367 carneros, Servando tiene 3 veces más que él, menos 409, y Hermenegildo tiene tanto como ambos juntos; ¿cuántos carneros tienen los dos últimos, y cuántos los tres juntos?

91. Geroncio tiene Bs. 145, Ezequías 7 veces tanto como él, más Bs. 299, y Sulpicio tiene 3 veces tanto como los dos juntos, menos Bs. 1 999. ¿Qué suma poseen los dos últimos, y todos tres juntos?

92. Se han tejido 216 docenas de pañuelos a Bs. 5 docena. Si 2 pañuelos se venden por Bs. 1, dígase el beneficio realizado.

93. En un castillo hay 18 ventanas en el 1er. piso; otras tantas en el 2s, y 12 buhardillas en el 3°; las ventanas del 1er. piso constan de 16 cristales cada una, las del 2° tienen 12, y las buhardillas 8; ¿cuántos cristales hay en este castillo, si en el piso bajo hay 198?

94. Se compraron 40 docenas de huevos en Bs. 5 el ciento, y se han revendido a Bs. 2 docena; ¿cuánto se ha ganado?

95. Un obrero que teje 5 m. de paño por día ha gastado 13 días para tejer una pieza. ¿Cuánto debe recibir, si le pagan a razón de Bs. 2 por metro de paño tejido?

96. Un comerciante en vinos compra 4 pipas de vino de Burdeos de 240 litros cada una. Paga por la compra Bs. 360, Bs. 535 por el transporte, Bs. 210 de derecho y Bs. 15 de comisión. Si hay 5 litros de heces en cada pipa. ¿a cómo tendrá que vender el litro de vino para ganar Bs, 1 560?

97. Un hombre respira 18 veces por minuto, término medio. A cada inspiración introduce en sus pulmones 136 cm^3 de oxígeno, poco más o menos; a cada expiración arroja 106 cm^3; ¿qué cantidad de oxígeno consume por hora?

98. Un mercader compra 8 barriles de vino de 220 litros cada uno, a Bs. 215 el barril. Con este vino mezcla 345 litros de otro que vale Bs. 6.20 el litro, y vende la mezcla a Bs. 4 el litro. ¿Cuál es su beneficio?

99. Un librero compra 5 docenas de libros a Bs. 3 el volumen; le dan 13 por 12 y le hacen sobre el precio de la factura una rebaja de Bs. 54. ¿Qué beneficio realizará el librero al vender cada volumen a Bs. 4?

100. Una arrendataria lleva al mercado 52 kg. de mantequilla; al principio se le ofrece tomar toda la mantequilla a razón de Bs. 2 el medio kilogramo, pero prefiere aguardar. Más tarde le compran toda la mantequilla por Bs. 210. ¿Cuánto ha ganado o perdido en la venta?

CAPÍTULO V

DIVISIÓN DE ENTEROS

§ I. NOCIÓN DE LA DIVISIÓN

96. Definición.—*División* es una operación por la cual conociendo el producto de dos factores y uno de ellos, se busca el otro.

Así, dividir 40 por 5 es buscar un factor que, multiplicado por 5, da 40 por producto.

Se dice también que *división* es una operación cuyo objeto es partir un número en tantas partes iguales como unidades tiene otro.

97. Dividendo, divisor, cociente.—Llámase *dividendo* el número que debe dividirse o partirse en tantas partes iguales como unidades tiene el divisor.

Divisor es el número por el cual se ha de partir el dividendo, para saber cuántas veces cabe en él.

Cociente es el número que resulta de la división del dividendo por el divisor.

98. División exacta y aproximada.—La división es exacta cuando el dividendo contiene al divisor un número exacto de veces. Entonces se dice que el dividendo es un *múltiplo* del divisor; inversamente, el divisor es un *submúltiplo* del dividendo.

Por ejemplo, 42 es un *múltiplo* de 7, e inversamente, 7 es un *submúltiplo* o *divisor* de 42.

72 es un *múltiplo* de 9, y 9 un *divisor* de 72.

Múltiplo de un número es el producto de este número por otro.

La división es *aproximada*, cuando el dividendo no es un múltiplo cabal del divisor. En este caso la división tiene un *residuo*.

99. Residuo.—Llámase *residuo de una división aproximada*, al excedente del dividendo sobre el producto del divisor por el cociente. El residuo ha de ser necesariamente menor que el divisor.

Así, en la división de 45 por 7, el *cociente* es 6, y el *residuo* 3.

Entonces se dice que se tiene el cociente *en menos de una unidad*.

NOTA: Cuando la división es *exacta*, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente; cuando es *aproximada*, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el residuo.

100. Indicación de la división.—Para indicar que un número se ha de dividir por otro, se escribe el dividendo, y a continuación el divisor, separándolos por medio de dos puntos; y también poniendo el dividendo encima del divisor, separados con una raya horizontal.

Para expresar, por ejemplo, que 42 se ha de dividir por 7, se escribe: $42 : 7$ o $\dfrac{42}{7}$.

101. NÚMERO DE CIFRAS DEL COCIENTE.—El número de cifras del cociente es igual al número de ceros que se deben escribir a la derecha del divisor para formar un número que contenga al dividendo a lo menos una vez, y menos de 10 veces.

Sean, por ejemplo, los números 79 792 y 651. Digo que el cociente tendrá 3 cifras.

En efecto, el producto del divisor por el cociente debe reproducir el dividendo. Tenemos:

$$651 \times 100 < 79\,792 < 651 \times 1\,000.$$

Estando el dividendo comprendido entre el producto del divisor por 100 y por 1 000, el cociente estará comprendido entre 100 y 1 000. Ahora bien, todos los números comprendidos entre 100 y 1 000 constan de 3 cifras. Luego el cociente tiene 3 cifras, esto es, tantas como ceros se han escrito a la derecha de 651 para hacerlo mayor que 79 792.

§ II. TEOREMAS RELATIVOS A LA DIVISIÓN

102. TEOREMA.—Para dividir una suma por un número, basta dividir todas las partes de la suma por dicho número, y sumar los resultados.

Divídase $(15 + 6)$ por 3.

La suma $15 + 6$ es el producto del divisor 3 por el cociente, que ha de ser evidentemente una suma. Ahora bien, para formar el dividendo, ha debido multiplicarse cada parte del cociente por el divisor (**63**). Luego, para dividir $15 + 6$ por 3, bastará dividir 15 por 3, y 6 por 3.

$$(15 + 6) : 3 = (15 : 3) + (6 : 3) = 5 + 2.$$

103. TEOREMA.—Para dividir por un número un producto de varios factores, basta dividir uno de ellos por este número.

Para dividir por 4 el producto $5 . 8 . 7$, digo que basta dividir por 4 el factor 8; el cociente será $5 . 2 . 7$.

En efecto, poniendo $2 . 4$ en vez de 8, e invirtiendo el orden de los factores, resulta:

$$5 . 8 . 7 = 5 . 2 . 4 . 7 = 5 . 2 . 7 . 4$$

esto es $\quad 5 . 8 . 7 = (5 . 2 . 7)4$

Lo que manifiesta que $5 . 2 . 7$ es el cociente, ya que al multiplicarlo por el divisor 4, resulta el dividendo $5 . 8 . 7$.

104. COROLARIO.—Para dividir un producto por uno de sus factores, basta suprimir este factor.

Por ejemplo: $\quad (4.12.5) : 5 = 4.12.$

105. TEOREMA.—Cuando se multiplica el dividendo y el divisor por un mismo número, no se altera el cociente; pero el residuo, si lo hay, queda multiplicado por dicho número.

Si, por ejemplo, 51 es el dividendo, 9 el divisor, debemos tener:

$$51 = 9 \,.\, 5 + 6.$$

Multipliquemos ambos miembros por 7:

$$51 \,.\, 7 = (9 \,.\, 5) \,.\, 7 + 6 \,.\, 7$$

o

$$51 \,.\, 7 = (9 \,.\, 7) \,.\, 5 + 6 \,.\, 7.$$

El residuo 6 es menor que el divisor 9; por lo tanto 6 . 7 será menor que el nuevo divisor 9 . 7; por consiguiente 6 . 7 es el residuo de la división de 51 . 7 por 9 . 7.

Así, se ve que el dividendo y el divisor quedan multiplicados por 7, que no se ha alterado el cociente 5, y que el residuo está multiplicado por 7.

106. TEOREMA.—Cuando se divide el dividendo y el divisor por un mismo número, no se altera el cociente; pero el residuo, si lo hay, queda dividido por dicho número.

Si 69 es el dividendo, 9 el divisor, 7 el cociente y 6 el residuo, tendremos:

$$69 = 9 \,.\, 7 + 6.$$

Dividamos ambos miembros por 3:

$$\frac{69}{3} = \frac{9 \,.\, 7}{3} + \frac{6}{3}$$

o

$$\frac{69}{3} = \frac{9}{3} \,.\, 7 + \frac{6}{3}$$

Esta igualdad manifiesta que habiendo dividido por 3 el dividendo y el divisor, no se ha alterado el cociente 7 y el residuo 6 queda dividido por 3.

107. TEOREMA.—Para dividir un número por el producto de varios factores, basta dividirlo por uno de ellos; en seguida, el cociente encontrado, por otro factor, y así sucesivamente.

Divídase 180 por el producto $(2 \times 3 \times 5)$ ó 30.

Dividiendo 180 sucesivamente por 2, 3 y 5, resulta:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 90 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 90 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 30 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$$

6 es el cociente buscado; en efecto:

$$180 = 2 \times 90 \qquad (1)$$
$$90 = 3 \times 30 \qquad (2)$$
$$30 = 5 \times 6 \qquad (3)$$

Multipliquemos ordenadamente las 3 igualdades:

$$180 \times 90 \times 30 = 2 \times 90 \times 3 \times 30 \times 5 \times 6.$$

Suprimiendo los factores comunes a ambos miembros, resulta:

$$180 = (2 \,.\, 3 \,.\, 5) \times 6.$$

Por donde se ve que al multiplicar por 6 el producto $2 \,.\, 3 \,.\, 5$, resulta 180; luego 6 es el cociente de 180 por $2 \,.\, 3 \,.\, 5$ ó 30.

108. TEOREMA.—El cociente de dos potencias de un mismo número se obtiene restando el exponente del divisor del exponente del dividendo.

Así, por ejemplo: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$.

Para comprobar este resultado, basta multiplicar el divisor por el cociente, y debe resultar el dividendo.

Tenemos en efecto: $2^3 \times 2^2 = 2^5$. **(84)**

§ III. PRÁCTICA DE LA DIVISIÓN

Distinguiremos tres casos en la división de enteros.

109. Caso I: El divisor y el cociente son números dígitos.

Divídase 49 por 9.

Por medio de la tabla de Pitágoras, se ve desde luego que 49 está comprendido entre 45 y 54:

$$45 < 49 < 54$$

o

$$9 . 5 < 49 < 9 . 6.$$

Estando el cociente comprendido entre 5 y 6, 5 será en menos de una unidad, el cociente buscado, y tendremos:

$$49 = 9 . 5 + 4.$$

110. Nota: Se puede también encontrar el cociente por medio de sustracciones sucesivas.

Así, por ejemplo, para dividir 28 por 7 se puede restar 7 cuatro veces sucesivamente.

El número de sustracciones representa el cociente, y la última resta, si la hay, es el residuo de la división. En el presente caso, el cociente es 4, y el residuo nulo.

Este ejemplo manifiesta que la división no es más que una sustracción abreviada, y que es una operación inversa de la multiplicación.

111. Caso II: El dividendo y el divisor son números compuestos, y el cociente, número dígito.

Divídase 5 847 por 849.

Como tenemos: $849 \times 1 < 5\,847 < 849 \times 10$

el cociente estará comprendido entre 1 y 10, y tendrá por tanto una sola cifra.

Para determinar cuál es ésta, se observa que el producto del divisor por el cociente es la suma de los productos de las 8 centenas, 4 decenas y 9 unidades del divisor por el cociente.

Disposición de la operación

Dividendo	5 847	849	*Divisor*
	5 094	6	*Cociente*
Residuo	753		

Ahora bien, el producto de las 8 centenas por la cifra del cociente, da centenas, y este producto no puede encontrarse sino en las 58 *centenas* del dividendo. El cociente de 58 por 8 (CASO I) que es 7, será la cifra buscada o una mayor.

Para averiguar que 7 es la cifra verdadera, se multiplica 849 por 7:

$$849 \times 7 = 5\,943.$$

Como el producto 5 943 es mayor que 5 847, el guarismo 7 excede al verdadero. Probemos con 6.

$$849 \times 6 = 5\,094.$$

Ya que 5 094 es menor que 5 847, se deduce que 6 es el guarismo del cociente. El residuo 753 indica que la división es aproximada.

$$\begin{array}{r|l} 5\,847 & 849 \\ \cline{2-2} 753 & 6 \end{array}$$

NOTA: En la práctica no se escribe el producto del divisor por la cifra del cociente, y se dice: 58 entre 8 a 6; $6 \times 9 = 54$, de 57 quedan 3, y llevo 5; $6 \times 4 = 24$ y 5 que llevo son 29, de 34 quedan 5, y llevo 3; $6 \times 8 = 48$ y 3 que llevo son 51, de 58 quedan 7. El cociente es 6, y el residuo 753.

112. REGLA.—Para dividir un número de varias cifras por otro también de varias cifras, cuando el cociente tiene sólo una cifra, se escribe el mayor y a continuación el menor, se los separa por una raya vertical, y se subraya el segundo (las dos rayas se llaman galeras.)

Cuando el dividendo y el divisor tienen el mismo número de cifras, se divide la primera del dividendo por la primera del divisor; cuando el dividendo tiene una cifra más, se divide el número formado por las dos primeras cifras a izquierda del dividendo por la primera del divisor, y resulta la cifra del cociente o una cifra mayor.

Para comprobarla, se multiplica el divisor por esta cifra, y si el producto es menor que el dividendo o igual a él, el cociente hallado es el verdadero; si no se lo disminuye en una unidad, hasta que el producto pueda restarse del dividendo.

113. Caso III: El dividendo y el divisor son cualesquiera y el cociente tiene varias cifras.

Divídase 84 935 por 243.

Como tenemos $243 \times 100 < 84\,935 < 243 \times 1\,000$, el cociente estará comprendido entre 100 y 1 000, y por lo tanto constará de 3 cifras, esto es, centenas, decenas y unidades. Las centenas del cociente multiplicadas por el divisor darán centenas, y este producto no puede encontrarse sino en las 849 centenas del dividendo; digo que dividiendo 849 por 243 (como en el Caso II) se encontrará la cifra de las centenas del cociente: tenemos, en efecto:

$$3 \times 243 \leq 849 < 4 \times 243.$$

Estando colocados estos números por orden de valor, sus productos por 100 lo estarán también; luego

$$300 \times 243 \leq 84\,900 < 400 \times 243.$$

Ahora bien, 849 y 4×243 difieren a lo menos en una unidad, luego 84 900 y 400×243 difieren a lo menos en una centena; por lo tanto se puede añadir 35 al número 84 900 sin alterar la segunda desigualdad, y la primera se verificará *a fortiori*:

$$300 \times 243 < 84\,935 < 400 \times 243.$$

Estando el dividendo comprendido entre 300 y 400 veces el divisor, el cociente estará comprendido entre 300 y 400; luego 3 es la cifra de las centenas.

Disposición de la operación

$$\begin{array}{r|l} 84\,935 & 243 \\ \cline{2-2} 12\,035 & 349 \\ 2\,315 & \\ 128 & \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{r|l} 84\,935 & 243 \\ \cline{2-2} 12\,03 & 349 \\ 2\,315 & \\ 128 & \end{array}$$

Si del dividendo se resta el producto del divisor por las centenas del cociente, el residuo 12 035 contendrá todavía el producto del divisor por las decenas y las unidades del cociente, más el residuo, si lo hay. Pero el producto del divisor por las decenas del cociente da decenas, que no podrán encontrarse sino en las 1 203 decenas del residuo. Dividiendo 1 203 por 243, resulta 4 por cociente.

Por medio de un raciocinio análogo al precedente, se demostraría que el dividendo está comprendido entre 340 y 350 veces el divisor; luego 4 es la cifra de las decenas del cociente.

Por último, si se resta de 12 035 el producto del divisor por 4, el residuo 2 315, dividido por el divisor, dará la cifra 9 de las unidades del cociente.

Así, pues, el cociente de 84 935 por 243 es 349.

114. REGLA.—Para dividir entre sí dos números cualesquiera, se escribe el divisor a la derecha del dividendo, separándolos por la galera; se separa de la izquierda del dividendo un número que contenga al divisor, al menos una vez y menos de 10 veces.

Se parte este dividendo parcial por el divisor, y se encuentra así la primera cifra del cociente; se multiplica todo el divisor por esta cifra, y el producto se resta del dividendo parcial.

A la derecha de la diferencia que resulta, se baja la siguiente cifra del dividendo; se divide este segundo dividendo parcial, por el divisor, y se encuentra la segunda cifra del cociente; se multiplica el divisor por esta cifra, y el producto se resta del segundo dividendo parcial.

Se continúa la operación hasta que se hayan bajado todos los guarismos del dividendo.

El conjunto de las cifras encontradas forma el cociente.

NOTA: Cuando después de bajar un guarismo del dividendo para formar otro dividendo parcial, éste es menor que el divisor, se escribe un cero en el cociente, se baja la cifra siguiente del dividendo, y se continúa la operación.

115. Caso particular.—El dividendo es un número compuesto y el divisor tiene sólo una cifra.

Divídase 3 976 por 8.

Aplicando la regla precedente, tendremos:

3 976	8		3 976	8
77	497		497	
56				
0				

En la práctica se escribe el cociente debajo del dividendo, y se opera mentalmente diciendo: 39 por 8 van 4, 77 por 8 van 9, 56 por 8 van 7.

116. CASO EN QUE EL DIVIDENDO Y EL DIVISOR REMATAN EN CEROS.— Cuando el dividendo y el divisor rematan en ceros, se puede, sin alterar el cociente, suprimir en ambos números igual número de ceros.

Para encontrar al residuo, se añade el residuo obtenido el número de ceros que se han suprimido en el dividendo (106).

Ejemplo. — Divídase 75 000 por 4 500. Se suprimen dos ceros, y resultarán los números 750 y 45. Se efectuará la división según el procedimiento ordinario, y al residuo añadiremos dos ceros.

750	45
300	16
3 000	

117. Prueba de la división.—1° *Por la multiplicación.*—Para hacer la prueba de la división, se multiplica el divisor por el cociente, al producto se añade el residuo, si lo hay, y debe resultar el dividendo (**99**).

Ejemplo. — Divídase 8 467 por 8.

Operación			*Prueba*	
8 467	8		1 058	
46	1 058		× 8	
67			8 464	
3			+ 3	*residuo*
			8 467	

2° *Por la división.*—Para hacer la prueba de la división por la misma división, se divide el dividendo por el cociente, y debe resultar el divisor, y el mismo residuo, cuando lo hay.

118. Prueba de la multiplicación por la división. —Para ejecutar la prueba de la multiplicación, se puede dividir el producto por uno de los factores, y debe resultar el otro por cociente; la división no debe tener residuo.

§ IV. CÁLCULO MENTAL EN LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN COMBINADAS

Para este cálculo, muy provechoso sería tomar de memoria el duplo y la mitad, así como el triplo de los 100 primeros números.

119. Multiplicación de un número por 5.—Se multiplica el número por 10 y se divide el producto por 2, ya que $5 = \frac{10}{2}$.

Así, $$224 \times 5 = \frac{2\,240}{2} = 1\,120.$$

120. Multiplicación por 25.—Se multiplica el número por 100, y se divide el producto por 4, pues $25 = \frac{100}{4}$.

Por ejemplo, $$845 \times 25 = \frac{84\,500}{4} = 21\,125.$$

121. Multiplicación por 15.—Se multiplica el número por 10, y al resultado se añade la mitad del producto.

Así, $$220 \times 15 = 2\,200 + 1\,100 = 3\,300.$$

122. Multiplicación por 125.—Se multiplica el número por 1 000, y se divide el producto por 8.

Ejemplo: $$340 \times 125 = \frac{340\,000}{8} = 42\,500.$$

Se puede también multiplicar el número por 100 y añadir a este producto su cuarta parte.

$$340 \times 125 = 34\,000 + \frac{34\,000}{4} = 42\,500.$$

123. División por 5.—Se duplica el número, y se divide el resultado por 10.

Así, $$70 : 5 = \frac{70 \times 2}{10} = 14.$$

124. División por 25.—Se multiplica el número por 4, y se divide el resultado por 100.

Por ejemplo, $$350 : 25 = \frac{350 \times 4}{100} = 14.$$

125. División por 20, 30, 40, etc.—Se divide el número por 10, y se toma la mitad, el tercio, el cuarto del resultado.

Estos procedimientos se usan aun cuando los números no son divisibles por 5, 25, etc., pero entonces el cociente es un número decimal.

126. Como aplicación del teorema (**107**), con facilidad puede encontrarse el cociente cuando el divisor es el producto de factores simples, sobre todo de 2, 3 y 5.

Ejemplos:

Para dividir	un número por	6	se divide por	2	y por	3
—	—	12	—	3	—	4
—	—	15	—	3	—	5
—	—	18	—	2	—	9
—	—	45	—	5	—	9
—	—	54	—	6	—	9
—	—	75	—	3	—	25

etcétera.

EJERCICIOS ORALES

101. En una división exacta, ¿cómo se encuentra el dividendo, siendo conocidos el divisor y el cociente?

102 ¿Cómo se encuentra el dividendo si se conoce el divisor, el cociente y el residuo?

103. En una división exacta, ¿cómo se encuentra el divisor, siendo conocidos el dividendo y el cociente?

104. ¿Qué sucede en el cociente si se duplica, triplica, etc., el dividendo?

105. Si se toma la mitad, tercera parte, etc., del dividendo, ¿qué sucede en el cociente?

106. Si se duplica, triplica, etc., el divisor, ¿qué viene a ser el cociente?

107. Si se toma la mitad, tercera parte, etc., del divisor, ¿qué pasa a ser el cociente?

108. ¿Qué alteración ocurre en el producto, cuando se multiplica uno de sus factores por un número?

109. ¿Qué cambio hay en el producto, cuando se divide uno de sus factores por un número?

110. ¿Qué sucede al producto, si se multiplican dos de sus factores por un número?

111. Si se dividen dos factores de un producto por un mismo número, ¿qué cambio se verifica en el producto?

112. ¿Se altera un producto si se multiplica uno de sus factores por un número, y se divide otro factor por el mismo número?

113. ¿Cuál es el divisor si el dividendo es: 1º doble; 2º triple; 3º cuádruple del cociente?

114. ¿Cuál es el divisor cuando el cociente es: 1º doble; 2º cuádruple; 3º quíntuplo del dividendo?

115. ¿Qué se hace del cociente de una división: 1º si se aumenta el dividendo; 2º si se disminuye el dividendo; 3º si se disminuye el divisor; 4º si se aumenta el divisor?

116. ¿Cuál será el cociente de una división: 1º si se añade el divisor al dividendo; 2º si se resta el divisor del dividendo?

117. Dada la suma de dos números y su cociente, ¿qué debe hacerse para encontrar el número menor? — Aplicación: suma 64, cociente 7.

118. Dada la diferencia de dos números y su cociente, ¿cómo se encontrará el menor? Aplicación: diferencia 144, cociente 13.

119. Habiendo partido el dividendo por un número, 7 por ejemplo, si se multiplica el divisor por este mismo número; ¿cuál será el cociente?

120. Un número debe dividirse por el producto $3 \times 5 \times 7 \times 9$; ¿qué alteración habría en el cociente si se suprimiera en el divisor: 1º el factor 5; 2º los factores 7 y 9?

121. En lugar de dividir un número sucesivamente por los factores 2, 5 y 8, ¿por qué cantidad sería menester dividirlo para ejecutar una sola división?

122. ¿Cómo podría dividirse un número por 21, haciendo dos divisiones sucesivas?

123. ¿Cuándo acontece que el número que se añade al dividendo, aumenta sólo el residuo sin hacer variar el cociente?

124. ¿Cuándo altera el cociente un número que se añade al dividendo?

125. Si una división da residuo, ¿cuál es el menor número que se debe quitar del dividendo para que resulte un cociente exacto?

126. Si la división da residuo, ¿cuál es el menor número que se debe añadir al dividendo para que salga un cociente exacto?

127. ¿Cómo se hace la prueba de la multiplicación por la división?

128. ¿Cómo se hace la prueba de la división por la multiplicación?

129. ¿Cómo se hace la prueba de la división por la división?

CÁLCULO MENTAL

130. Dividir por dos los números siguientes:

14 ; 20 ; 54 ; 90 ; 122 ; 678.

131. Dividir por 5 los números siguientes:

75 ; 125 ; 160 ; 700 ; 905 ; 1 000.

132. Dividir por 50 los números siguientes:

300 ; 350 ; 450 ; 700.

133. Dividir por 25 los números siguientes:

75 ; 125 ; 300 ; 475.

134. Dividir por 15 los números siguientes:

60 ; 75 ; 120 ; 600.

135. Efectuar las divisiones siguientes:

1º 460 : 20; 3º 520 : 40; 5º 880 : 80
2º 480 : 20; 4º 640 : 40; 6º 720 : 80

136. Dividir por 12 los números siguientes:

60 ; 120 ; 180 ; 288 ; 420 ; 456.

PROBLEMAS

137. ¿Por qué número debe dividirse 106 938 para que resulte 457?

138. ¿Cuántos días necesitará un escribiente para copiar un libro de 720 páginas, si copia 3 en 1 hora, y si trabaja 12 horas por día?

139. Un general reparte 11 000 cartuchos a 5 batallones compuestos de 550 hombres cada uno; ¿cuántos cartuchos tocan a cada soldado?

140. Un ejército de 6 000 hombres tiene víveres para 5 meses, si se despiden 4 500 soldados, ¿cuánto tiempo podrán durar los mismos víveres para los restantes?

141. Compro 150 hectáreas de terreno por Bs. 9 750, y vendo una parte de él por Bs. 7 140, a Bs. 85 la hectárea; deseo saber cuántas me quedan y cuánto he ganado en cada una de las que he vendido.

142. Raimundo compra igual número de vacas y caballos por Bs. 24 000; cada vaca le sale a Bs. 120, y cada caballo a Bs. 180; pregúntase cuántas vacas y caballos ha comprado.

143. Un hacendado compra cierto número de animales por Bs. 8 050, vende una parte de ellos por Bs. 6 237, a Bs. 63 cada uno, y gana en todos éstos Bs. 1 683; pregúntase cuántos compró, y qué suma ganó en cada uno de los vendidos.

144. Vicente compra cierta cantidad de barriles de harina por Bs. 1 424 y los vende todos por Bs. 2 492, ganando así Bs. 3 por barril, ¿cuántos barriles compró, y cuánto le costó cada uno?

145. Vendiendo 25 metros de paño por Bs. 275, se ha ganado Bs. 2 por metro. ¿Cuánto mide la pieza de paño que se compró por Bs. 576?

PROBLEMAS SOBRE LAS CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES

146. Marcelino nació cuando tenía 27 años su padre y contaba 33 cuando éste murió; ¿cuánto tiempo vivió el padre?

147. Antonio compra caballos por Bs. 4 100; al revenderlos por Bs. 4 400, gana Bs. 20 en cada uno; pregúntase cuántos caballos ha comprado.

148. Tres toneles de aguardiente han costado juntos Bs. 675 de compra, Bs. 175 de derechos y Bs. 50 de transporte y otros gastos; ¿a cómo debe venderse el litro para ganar en todo Bs. 180, sabiendo que un tonel contiene 120 litros?

149. Dos obreros que trabajan juntos durante 30 días, han ganado Bs. 150; la ganancia diaria del uno es de Bs. 3, ¿cuál es la del otro?

150. En una familia el padre gana Bs. 5 por día, y la madre Bs. 2; si el gasto diario es de Bs. 3, ¿cuánto habrán economizado al cabo de un mes de 30 días, de los cuales sólo 26 son de trabajo?

151. Feliciano va al mercado con duraznos; ha perdido 35, da 8 a los pobres, vende 7 docenas en el camino y llega con 476, ¿cuántos tenía al salir de su casa?

152. Si me diesen Bs. 150, podría pagar una deuda de Bolívares 290, y me quedarían Bs. 83. ¿Cuánto tengo?

153. Si hubiese vendido Bs. 20 menos una mercancía que me costaba Bs. 400, no habría ganado sino Bs. 18. ¿En cuánto la vendí?

154. El comerciante Simplicio manda fabricar 16 pares de botas por Bs. 206; vende la mitad a Bs. 14 el par; ¿en cuánto debe vender cada uno de los pares restantes para ganar en todo Bs. 26?

155. Dos socios se han repartido cierta cantidad: al primero le han cabido Bs. 445; al segundo, tres veces tanto como al primero, menos Bs. 246; ¿cuál es la suma repartida?

156. Dos individuos se hallan a 50 millas de distancia uno de otro, y van al encuentro andando el uno 2 millas por hora, y el otro 3; ¿a qué distancia se hallarán después de 5 horas de marcha?

157. El mayor de dos números es 73 veces 109, y la diferencia de ambos es igual a 17 veces 28, ¿cuál es el número menor?

158. La suma de dos números es 360, y el menor 114, ¿cuál es el producto del mayor por el menor?

159. La suma de dos números es 5 764 y su diferencia 4 892. ¿Cuáles son estos números?

160. El producto de dos números es 6 840; si se quita 5 al multiplicador, el producto se disminuye de 760. ¿Cuáles son estos dos números?

161. La suma de dos números es 6 210, su cociente es 17, ¿cuáles son estos números?

162. La suma de dos números es 6 000; su cociente es 14 y el residuo de su división 45. ¿Cuáles son estos números?

163. ¿Cuál es el número que dividido por 453, da por cociente 307 y por residuo 109?

164. Norberto paga Bs. 294 por igual número de metros de paño de tres precios diferentes: el 1° de a Bs. 5, el 2° de a Bs. 7 y el 3° de a Bs. 9 el metro; ¿cuántos metros ha comprado de cada precio?

165. Enrique paga Bs. 18 810 por cierto número de caballos, y vende una parte de ellos por Bs. 7 990, a Bs. 185 cada uno, perdiendo en este negocio Bs. 10 por caballo; ¿en cuánto debe vender los restantes para ganar Bs. 2 180 en todos los caballos?

166. ¿Cuál es el número que si se divide por 45, y se aumenta 50 al cociente, y a la suma que resulta se le quita la diferencia de 16 a 28, y el resultado se multiplica por 6, y el producto de está multiplicación se parte por 24, da 12 en el cociente?

167. Dos relojes eléctricos, A y B, colocados en los extremos de una calle de 1 804 m. de longitud, dan la hora a 3 segundos de intervalo. ¿Cuál es el punto de la calle de donde se oyen los dos relojes dar la hora al mismo tiempo, sabiendo que el sonido recorre 340 m. por segundo, y que el reloj A da primero?

168. Un chalán compra caballos por Bs. 8 000; al venderlos en Bs. 8 800, gana Bs. 100 en cada uno. Dígase el número de caballos comprados y el precio de compra de cada uno.

169. Dos jugadores A y B convienen en que, después de cada mano, el que pierda dará al otro Bs. 2; después de 15 manos, el jugador A ha ganado Bs. 14; ¿cuántas manos ha ganado cada uno?

170. Un escolar dice a uno de sus condiscípulos: para comprar 10 libros me faltarían Bs. 15, pero si no comprase más que 4 me sobrarían Bs. 3. Se pregunta: 1º el precio de un libro; 2º cuánto tenía dicho escolar.

171. Tomás quiere dividir Bs. 4 590 en tres partes, de modo que la 2ª tenga Bs. 150 menos que la 1ª, la cual debe ser de Bolívares 1 850; ¿cuál será la 3ª?

172. Se han multiplicado entre sí dos números enteros, siendo el multiplicando 63 y el producto 3 339; pero ha habido un error tomando 3 en vez de 5 en las unidades del multiplicador; ¿cuál debe ser el verdadero producto?

173. Teodosio ha comprado 15 docenas de naranjas en dos sacos; pero hay en el uno 30 naranjas más que en el otro; ¿cuántas corresponden a cada saco?

174. Una fuente tiene 1 980 litros de capacidad; ¿qué cantidad de agua debe echar por minuto una llave que la llena en 3 horas?

175. Dos caños arrojan por minuto, el uno 12 litros y el otro 16, y llenan juntos un aljibe en 3 horas 15 minutos; ¿cuántos litros de capacidad tiene el aljibe?

176. Una pila tiene 4 775 litros de capacidad; ¿en cuántas horas la llenarán dos caños que arrojan por minuto, el uno 10 litros y el otro 15 litros?

177. Un reloj adelanta 3 minutos cada 4 horas, ¿cuánto habrá adelantado al fin de una semana?

178. Hace ya 45 horas que un reloj adelanta 3 minutos cada 5 horas; ¿qué hora señala el reloj cuando son las 8 y 50 minutos?

179. Ya hace 33 horas que un reloj atrasa 2 minutos cada tres horas; ¿qué hora señala cuando son las 3 y 8 minutos?

180. Hace 45 horas que un reloj está atrasado; de cuánto es el atraso por hora, sabiendo que señala las 2 y 48 minutos cuando son las 3 y 18 minutos?

181. Un aljibe vacío recibe agua por 2 grifos que dan, término medio, 42 litros por minuto el uno y 50 el otro. Dígase la capacidad del aljibe que no obstante perder por una grieta 15 litros de agua por minuto, se llena en 35 horas.

182. Un librero compra 650 volúmenes a Bs. 15 docena, recibiendo 13 libros por 12. ¿A cómo tiene que vender el volumen para ganar Bs. 210, si los gastos son de Bs. 15?

183. Si entran 3 kg. de harina en 4 kg. de pan, calcúlese el beneficio de un panadero que ha comprado 56 costales de harina a Bs. 75 el costal, sabiendo que el peso neto de cada costal es de 157 kg. y que vende el kilogramo de pan a Bs. 0,54?

184. Dos correos salen a un mismo tiempo de dos ciudades distantes 360 millas una de otra; el 1° camina 6 millas por hora, y el 2° 9; ¿al cabo de cuánto tiempo se encontrarán, si andan 11 horas por día, y a qué distancia de ambas ciudades?

185. Por 48 días de trabajo 19 obreros han recibido Bs. 2 976; a cada uno de los 12 primeros le toca el duplo de cada uno de los otros 7; pregúntase lo que gana cada obrero por día.

186. Un peón que camina 5 leguas por día de 10 horas de marcha sale de Ambato con dirección a Guayaquil; dos días después, un jinete que camina 22 leguas por día sale de Quito también con dirección a Guayaquil. Como hay 24 leguas de Quito a Ambato, ¿en cuántos días alcanzará el jinete al peón?

CAPÍTULO VI

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS

DIVISIBILIDAD

§ I. DEFINICIONES Y TEOREMAS PRELIMINARES

127. Un número es divisible por otro cuando lo contiene un número exacto de veces.

Por ejemplo, 18 es *divisible* por 6, porque al partir 18 por 6 resulta por cociente el número entero 3, y cero por residuo.

128. Llámase *submúltiplo, factor o divisor* de un número entero, otro número entero contenido un número exacto de veces en el primero, llamado *múltiplo* (**98**).

Así, por ejemplo, los números 2, 3, etc., que están contenidos un número exacto de veces en 18, son *submúltiplos* de 18.

18 es un *múltiplo* de cada uno de estos números. 18 podrá designarse por *m* 2, *m* 3, que se lee: *multiplo de* 2, *múltiplo de* 3, etc.

A los submúltiplos de un número, también se les da el nombre de partes *alícuotas*.

129. Un número es *par* cuando remata en cifra par o en cero; todo número par es un múltiplo de 2.

Así, los números 746, 850, 1128 son *pares*, por que rematan en cifra par o en cero.

130. Un número es *impar* cuando remata en cifra impar.

Por ejemplo, los números 17, 121, 235 son *impares*.

131. TEOREMA.—Todo número que es divisor de otros es divisor de la suma de ellos.

Sea 7 que divide a 35, a 42 y a 56; digo que dividirá a la suma $35 + 42 + 56$ ó 133.

En efecto

$$35 = 5 \times 7$$
$$42 = 6 \times 7$$
$$56 = 8 \times 7$$

Sumando ordenadamente, resulta:

$$35 + 42 + 56 \quad ó \quad 133 = (5 + 6 + 8) \times 7.$$

Luego 7 divide a la suma 133 ya que está contenido en ella $5 + 6 + 8$ ó 19 veces exactamente.

132. TEOREMA.—Todo número que es divisor de otro, es también divisor de los múltiplos de ese otro.

Sea 5 que divide a 15; digo que dividirá a 4 veces 15 ó 60, que es un múltiplo de 15.

En efecto, 60 es la suma de 4 números iguales a 15:

$$60 = 15 + 15 + 15 + 15.$$

Luego 5 que divide a 15 dividirá a 60. **(131)**

133. TEOREMA.—Todo número que es divisor de otros dos es divisor de su diferencia.

Sea 11 que divide a 77 y a 44; digo que dividirá a su diferencia 33.

En efecto, tenemos: $77 = 7 \times 11;$
$44 = 4 \times 11.$

Restando ordenadamente, resulta:

$$77 - 44 = 7 \times 11 - 4 \times 11$$

o

$$33 = (7 - 4) \times 11.$$

Así 11 divide a la diferencia 33, pues está contenido en ella $7 - 4$ ó 3 veces.

134. COROLARIO.—Como 77 y 44 son múltiplos de 11, se infiere que la diferencia de dos múltiplos de un número es también múltiplo de dicho número.

135. TEOREMA.—Todo número que divide al dividendo y al divisor, divide al residuo de la división.

Sea, por ejemplo, 3 que divide al dividendo 66 y al divisor 12; digo que dividirá al residuo de la división.

En efecto, tenemos: $66 = 12 \times 5 + 6,$

o bien $66 - 12 \times 5 = 6;$

3 dividiendo a 12, divide también a su múltiplo 12×5; dividiendo a 66 y a 12×5, debe dividir a su diferencia 6. **(133)**

136. TEOREMA.—Todo número que divide al divisor y al residuo, divide al dividendo.

Sea por ejemplo 3 que divide al divisor 12 y al residuo 6, digo que dividirá al dividendo 66.

En efecto, $66 = 12 \times 5 + 6;$

3 dividiendo a 12, divide también a su múltiplo 12×5; dividiendo a 12×5 y a 6, dividirá a su suma 66. **(131)**

137. COROLARIO.—Todo número que divide a la suma de otros dos y a uno de ellos, divide al otro.

138. TEOREMA.—Todo número que divide a todas las partes de una suma, menos una, no divide a la suma, y el residuo de la división de la suma por dicho número es el mismo que el de la parte no divisible.

Sea 7 que divide a 56 y a 14, pero que no divide a 32; digo que no dividirá a la suma $56 + 14 + 32$ ó 102, y que el residuo de la división de 102 por 7 es igual al de 32 por 7.

En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned} 56 &= 8 \times 7 \\ 14 &= 2 \times 7 \\ 32 &= 4 \times 7 + 4 \end{aligned}$$

Sumando ordenadamente, resulta:

$56 + 14 + 32$ ó $102 = 7 \times (8 + 2 + 4) + 4.$

Lo que manifiesta que 102 no es divisible por 7, y el residuo de la división de 102 por 7 es igual al de la división de 32 por 7.

§ II. CARACTERES DE DIVISIBILIDAD

139. DIVISIBILIDAD POR 2.—Un número es divisible por 2 cuando la cifra de sus unidades simples es cero o par.

1° Sea el número 140.

Tenemos: $140 = 14 \times 10.$

Ahora bien, 2 divide a 10, ya que $10 = 2 \times 5$; luego divide a 14×10 que es un múltiplo de 10. (**132**)

2° Sea el número 148.

Tenemos: $148 = 140 + 8.$

2 divide a 140 pues remata en cero; 2 divide también a 8 que es una cifra par (129). Dividiendo a 140 y a 8, 2 divide a su suma 148. (**131**)

140. NOTA.—El residuo de la división de un número por 2 es igual al residuo de la división por 2 de la cifra de sus unidades simples, pues las decenas son siempre divisibles por 2; este residuo cuando lo hay, es forzosamente 1.

141. DIVISIBILIDAD POR 5.—Un número es divisible por 5 cuando la cifra de sus unidades simples es cero o 5.

1° Sea el número 230.

Tenemos: $230 = 23 \times 10.$

5 divide a 10, pues $10 = 5 \times 2$. Dividiendo a 10, tendrá que dividir a su múltiplo 23×10 ó 230. (**132**)

2° Sea el número 425.

Tenemos: $425 = 420 + 5.$

5 divide a 420 que remata en cero, y se divide también a sí mismo; luego divide a la suma $420 + 5$ ó 425. (**131**)

142. NOTA.—El residuo de la división de un número por 5 es igual al residuo de la división por 5 de la cifra de sus unidades, ya que las decenas son siempre divisibles por 5.

143. DIVISIBILIDAD POR 4 O POR 25.—Un número es divisible por 4 o por 25 cuando sus dos primeras cifras de la derecha son ceros, o forman un número divisible por 4 o por 25.

En efecto, observemos que $100 = 4 \times 25$; ahora bien, un número cualquiera, 1 335 por ejemplo, puede descomponerse en dos partes, una de las cuales es el número formado por las centenas, esto es, un múltiplo de 100, y por consiguiente divisible por 4 y por 25; la otra es el número formado por las dos últimas cifras de la derecha.

Así,
$$\begin{aligned} 1\,335 &= 1\,300 + 35 \\ &= m\ \ 4 + 35 \\ &= m\ 25 + 35 \end{aligned}$$

De donde se infiere que el residuo de la división de un número por 4 o por 25 es igual al residuo de la división por 4 o por 25 del número formado por sus dos primeras cifras de la derecha.

144. NOTA.—Del mismo modo se demostraría que un número es divisible por 8 o por 125 cuando sus tres primeras cifras de la derecha son ceros, o forman un número divisible por 8 o por 125; etc.

145. DIVISIBILIDAD POR 9 Y POR 3.—Un número es divisible por 9 o por 3 cuando la suma de los valores absolutos de sus cifras es divisible por 9 o por 3.

Para demostrarlo, observemos que:

1° Toda potencia de 10 es igual a un múltiplo de 9 más 1.

En efecto, tenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned} 10 &= \ \ 9 + 1 = m\,9 + 1 \\ 100 &= \ 99 + 1 = m\,9 + 1 \\ 1\,000 &= 999 + 1 = m\,9 + 1 \end{aligned}$$

y así en adelante.

2° Todo número formado por una cifra significativa seguida de ceros es un múltiplo de 9, más el valor absoluto de dicha cifra.

En efecto, multipliquemos por una cifra cualquiera los dos miembros de las igualdades precedentes, y resultará:

$$\begin{aligned} 10 \times 3 \text{ ó } \quad 30 &= (m\,9 + 1) \,.\, 3 = m\,9 + 3 \\ 100 \times 4 \text{ ó } \ 400 &= (m\,9 + 1) \,.\, 4 = m\,9 + 4 \\ 1\,000 \times 8 \text{ u } 8\,000 &= (m\,9 + 1) \,.\, 8 = m\,9 + 8 \end{aligned}$$

3° Todo número es igual a un múltiplo de 9, más la suma de los valores absolutos de sus cifras.

Sea el número 12 345; digo que este número es igual a un múltiplo de 9 más (1 + 2 + 3 + 4 + 5).

En efecto, tenemos:

$$12\,345 = \begin{cases} 10000 = m\,9 + 1 \\ 2000 = m\,9 + 2 \\ 300 = m\,9 + 3 \\ 40 = m\,9 + 4 \\ 5 = \quad\;\; + 5 \end{cases}$$

Sumemos ordenadamente:

$$12\,345 = m\,9 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

Ahora bien, 9 que divide al múltiplo de 9 dividirá a 12 345 si divide al paréntesis que es la suma de los valores absolutos de las cifras (**131**).

La demostración es idéntica por 3. En efecto, 3 divide a 9, y por consiguiente a un múltiplo de 9. Por lo tanto 3 *dividirá al número si divide a la suma de los valores absolutos de sus cifras.*

La demostración de divisibilidad por 9 y por 3 puede hacerse del modo siguiente, que se puede comprobar *a priori.*

$$\begin{aligned} 12\,345 &= 10\,000 + 2\,000 + 300 + 40 + 5 \\ &= (9\,999 + 2\times 999 + 3\times 99 + 4\times 9) + (1+2+3+4+5) \\ &= m9 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \end{aligned}$$

146. NOTA.—El residuo de la división de un número por 9 o por 3 se encuentra dividiendo por 9 o por 3 la suma de las cifras que lo componen.

Así, el residuo de la división de 56 785 por 9 es el de la división por 9 de (5 + 6 + 7 + 8 + 5), o sea 4.

El residuo de la división de este mismo número por 3 es 1.

En la práctica, para encontrar el residuo por 9, se suman sucesivamente las cifras del número, diferentes de 9, cuidando de restar 9 de cada suma parcial mayor que esta cifra. La última resta es el residuo buscado.

El residuo por 3 se encuentra dejando los múltiplos de 3, y restando de las sumas parciales el mayor múltiplo de 3 contenido en ellas.

Así, para encontrar rápidamente el residuo de 56 785 por 9, se dice:

$5 + 6 = 11$; $11 - 9 = 2$; $2 + 7 = 9$; $8 + 5 = 13$; $13 - 9 = 4$

o de otro modo: siendo 31 la suma de los valores absolutos de las cifras del número 56 785, se dice: $3 + 1 = 4$, residuo igual al precedente.

Para encontrar el residuo por 3:

$5 + 7 = 12$; $8 + 5 = 13$; $13 - 12 = 1$;

o razonando con 31, se dice: $3 + 1 = 4$; $4 - 3 = 1$.

147. DIVISIBILIDAD POR 11.—Un número es divisible por 11 cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras de lugar impar y los valores de las de lugar par, contando de derecha a izquierda, es cero o un multiplo de 11.

Para demostrarlo, observemos que:

1° Toda *potencia impar* de 10 es igual a un múltiplo de 11 menos 1, y toda *potencia par* de 10 es igual a un múltiplo de 11 más 1.

En efecto, tenemos sucesivamente:

$$
\begin{aligned}
10 &= 11-1 = m\,11-1 \\
100 &= 10 \times 10 = (m\,11-1) \times (m\,11-1) = m\,11+1 \\
1\,000 &= 100 \times 10 = (m\,11+1) \times (m\,11-1) = m\,11-1 \\
10\,000 &= 1\,000 \times 10 = (m\,11-1) \times (m\,11-1) = m\,11+1
\end{aligned}
$$

etcétera.

2° Todo número formado por una cifra significativa seguida de ceros se compone de un múltiplo de 11, más o menos el valor absoluto de esta cifra, según que el número de ceros sea par o impar.

En efecto, multipliquemos por una cifra cualquiera las igualdades que preceden; tendremos:

$$
\begin{aligned}
10 \times 5 \text{ ó } 50 &= (m\,11 - 1) \,.\, 5 = m\,11 - 5 \\
100 \times 7 \text{ ó } 700 &= (m\,11 + 1) \,.\, 7 = m\,11 + 7 \\
1\,000 \times 3 \text{ ó } 3\,000 &= (m\,11 - 1) \,.\, 3 = m\,11 - 3 \\
10\,000 \times 8 \text{ u } 80\,000 &= (m\,11 + 1) \,.\, 8 = m\,11 + 8
\end{aligned}
$$

3º Un número cualquiera es igual a un múltiplo de 11, más el exceso de la suma de las cifras de orden impar sobre la de las cifras de orden par, contando de derecha a izquierda.

Sea el número 43 529; tendremos:

$$43\,529 = \begin{cases} 40\,000 = m\,11 + 4 \\ 3\,000 = m\,11 - 3 \\ 500 = m\,11 + 5 \\ 20 = m\,11 - 2 \\ 9 = \quad\quad + 9 \end{cases}$$

Sumando ordenadamente, resulta:

$$43\,529 = m\,11 + (4 + 5 + 9) - (3 + 2)$$

o $$43\,529 = m\,11 + 13$$

Pero 11 divide a un múltiplo de 11; si divide a 13, dividirá también a la suma 43 529 (**131**).

Luego el residuo de la división de 43 529 por 11 es igual al de la división por 11 del exceso 13 de la suma de las cifras de lugar impar sobre la de las cifras de lugar par.

148. NOTA: Si la suma de las cifras de lugar impar fuese menor que la de las cifras de lugar par, se aumentaría la primera suma de un múltiplo de 11 suficiente para que fuera posible la sustracción.

Sea, por ejemplo, el número 18 291; tendremos:

$$18\,291 = m\,11 + (1 + 2 + 1) - 9 + 8$$
$$18\,291 = m\,11 + (4 - 17)$$

o bien $18\,291 = m\,11 + 22 + 4 - 17 = m\,11 + 9$,

pues un múltiplo de 11 puede descomponerse en otro múltiplo de 11 más 22; por lo tanto el residuo de la división de 18 291 por 11 es 9.

§ III. PRUEBAS DE LA MULTIPLICACIÓN Y DE LA DIVISIÓN

Estas pruebas se fundan en el teorema siguiente:

149. TEOREMA.—El residuo de la división de un producto de dos factores por un divisor cualquiera, es igual al residuo que se obtiene dividiendo por este divisor el producto de los dos residuos obtenidos al dividir cada factor por el mismo divisor.

Sean A y B los dos factores, R y R′ los residuos de su división por un divisor d; tenemos:

$$A = m \text{ de } d + R$$
$$B = m \text{ de } d + R'$$

Multipliquemos ordenadamente:

$$A \times B = (m \text{ de } d + R)\ (m \text{ de } d + R') = m \text{ de } d + R \times R'.$$

Este resultado manifiesta que el residuo de la división de $A \times B$ por d es igual al de $R \times R'$ por d.

Ejemplo: Sean los números 345 y 29, y el divisor 9. Tenemos:

$$345 = m9 + 3 \qquad \textbf{(145)}$$
$$29 = m9 + 2$$

Multiplicando ordenadamente, resulta:

$$345 \times 29 = (m\,9 + 3) \times (m\,9 + 2)$$

o

$$345 \times 29 = m\,9 + 3 \times 2$$

El residuo de la división por 9 de 345×29 es igual al residuo de la división por 9 de 3×2.

150. PRUEBA POR 9 DE LA MULTIPLICACIÓN.—Para hacer la prueba por 9 de la multiplicación, se buscan los residuos por 9 del multiplicando, del multiplicador y del producto. Se multiplican entre sí los dos primeros residuos, y su producto dividido por 9 debe dar un residuo igual al del producto total.

Ejemplo: Hágase la prueba por 9 del producto 347×526.

Operación

$$\begin{array}{r} 347\\ 526\\ \hline 2082\\ 694\\ 1735\\ \hline 182522 \end{array}$$

Prueba

Residuo de 347

Residuo de 5×4 $\quad \begin{array}{ccc} & 5 & \\ 2 & \times & 2 \\ & 4 & \end{array} \quad$ Residuo de 182 522

Residuo de 526

En la práctica se escriben los residuos de los factores en dos ángulos opuestos por el vértice; se hace el producto de ellos, y se escribe en un tercer ángulo el residuo de este producto. En el cuarto ángulo se escribe el residuo del producto que se quiera comprobar. Los dos últimos residuos han de ser iguales.

151. Prueba por 9 de la división.—La prueba por 9 de la división se deduce de la prueba por 9 de la multiplicación:

1° *Si la división no tiene residuo*, se hace la prueba considerando el dividendo como el producto del divisor por el cociente, y así se vuelve al caso de la multiplicación.

2° *Cuando la división tiene residuo*, se lo resta del dividendo, y se vuelve al caso precedente.

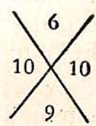
152. Prueba por 11.—La prueba por 11 se ejecuta como la prueba por 9, tomando los residuos por 11 en vez de 9.

Ejemplo: Hágase la prueba por 11 del producto 347 × 526.

Operación

$$\begin{array}{r} 347 \\ 526 \\ \hline 2082 \\ 694 \\ 1735 \\ \hline 182522 \end{array}$$

Prueba



153. Notas: I. No siempre que se verifique la prueba, será cierta la operación; claro está, en efecto, que en la prueba por 9, por ejemplo, cambiando de lugar las cifras de los factores o del producto, la prueba quedará satisfecha aunque la operación resulte equivocada.

La prueba por 11 da mayor probabilidad de la exactitud de la operación, pues el residuo de la división de un número por 11 depende no sólo del valor absoluto de las cifras, sino también de su lugar en los números.

II. Puede también hacerse la prueba por 13, por 17, etc., pero no se usan estos números por ser más difícil encontrar los residuos.

CAPÍTULO VII

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

154. Definiciones.—Llámase común divisor de varios números un número que los divide a todos sin residuo.

Así, 2, 3 y 6 son *divisores comunes* de 42 y 60.

155. Máximo común divisor de varios números es el mayor número que los divide exactamente a todos.

En el ejemplo precedente, 6 es el mayor común divisor de 42 y 60.

Cuando varios números no tienen más que 1 por común divisor, claro está que su máximo común divisor es también 1. En este caso, se dice que los números son primos entre sí.

El máximo común divisor se designa por medio de las iniciales *m. c. d.*

MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS

La investigación del *m. c. d.* se funda en los dos teoremas siguientes:

156. TEOREMA.—Dados dos números, si el menor divide al mayor, aquél es el m. c. d. de ambos.

Sean los números 48 y 12, siendo 12 factor de 48.

12 divide a 48 y a sí mismo: luego es divisor *común*; y no puede haber un divisor *mayor* que divida a 48 y a 12; por consiguiente 12 es el *m. c. d.* de los números propuestos.

157. TEOREMA.—El m. c. d. de dos números, que no son divisibles uno por otro, es el mismo que el del menor de ellos y del residuo de su división.

Sean los números 1 784 y 216, cuyo cociente es 8, y el residuo de su división 56. Tenemos:

$$1\,784 = 216 \times 8 + 56.$$

Digo que el *m. c. d.* de 1 784 y 216 es el mismo que el de 216 y 56. En efecto:

1° Todo número que divide a 1 784 y 216, divide a 56, residuo de su división (**135**).

2° Todo común divisor de 216 y 56 divide también a 1 784 (**136**).

Luego los números 1 784, 216 y 56 admiten los mismos divisores comunes, y por lo tanto el mismo *m. c. d.*

158. Problema.—*Búsquese el* m. c. d. *de dos números.*

Sean los números 615 y 195.

El *m. c. d.* de 615 y 195 no puede ser mayor que 195, ya que debe dividir a este número. Si 195 divide a 615, el número 195 será el *m. c. d.* de los dos números propuestos (**156**).

Dividamos pues 615 por 195.

$$\begin{array}{r|l} 615 & 195 \\ \hline 30 & 3 \end{array}$$

Lo que manifiesta que 195 no es el *m. c. d.*; pero el *m. c. d.* de 615 y 195 es el mismo que el de 195 y 30 (**157**).

Dividamos 195 por 30.

$$\begin{array}{r|l} 195 & 30 \\ \hline 15 & 6 \end{array}$$

Por donde se ve que 30 no es el *m. c. d.* buscado; dividamos 30 por 15.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 15 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Luego 15 es el *m. c. d.* de 30 y 15, y también de 195 y 30, y por lo tanto de 615 y 195.

Disposición de la operación

	3	6	2	*Cocientes.*
615	195	30	15	*Divisores.*
30	15	0		*Residuos.*

De esta demostración se deduce la siguiente regla:

159. REGLA.—Para encontrar el m. c. d. de dos números se divide el mayor por el menor. Si no hay residuo, el número menor es el m. c. d.; si queda residuo, se divide el divisor por este residuo; en seguida, el primer residuo por el segundo, el segundo por el tercero, y así sucesivamente hasta que no quede residuo. El último divisor empleado es el m. c. d. buscado.

A continuación (**186**) indicaremos otro procedimiento.

160. NOTA: I. Si el último divisor fuese 1, los dos números serían *primos entre sí*.

EJEMPLO: Búsquese el *m. c. d.* de los números 4 807 y 119.

	40	2	1	1	7	3
4 807	119	47	25	22	3	1
47	25	22	3	1	0	

161. II. Todo común divisor de dos números es divisor de su m. c. d.

En efecto (**158**), todo número que divide, por ejemplo, a 615 y 195, divide al residuo de su división, 30. El mismo número, dividiendo a 225 y a 30 divide a 15, residuo de su división.

162. III. Cuando se multiplican o dividen varios números por otro el m. c. d. de ellos queda multiplicado o dividido por dicho número.

Lo que es una consecuencia de los teoremas (**105** y **106**).

163. PROBLEMA.—Búsquese el m. c. d. de los números 615, 195 y 80.

El *m. c. d.* de 615 y 195 es 15. El *m. c. d.* buscado es pues igual al *m. c. d.* de 80 y 15.

$$\underbrace{615 \quad 195}_{15} \quad 80$$

$$\underbrace{15 \qquad 80}_{5}$$

Luego, 5 es el *m. c. d.* de los números 615, 195 y 80.

Si tuviéramos 4, 5.... números, se buscaría el *m. c. d.* de los 3 primeros, luego el del cuarto y de este *m. c. d.*, etcétera.

164. REGLA.—Para encontrar el m. c. d. de varios números, se busca el de los dos primeros; en seguida el m. c. d. de este último y del tercer número, y así en adelante. El último m. c. d. encontrado es el de los números propuestos.

CAPÍTULO VIII

NÚMEROS PRIMOS

§ I. PROPIEDADES

165. Definición.—Llámase *número primo* el que sólo es divisible por sí mismo y por la unidad.

Así, por ejemplo, 3, 5, 11, 17 son números *primos*.

De esta definición se infiere que un número primo no puede dividir a otro número primo.

166. Números primos entre sí.—Dos o más números son *primos entre sí* cuando no tienen otro divisor común que la unidad, aunque cada uno separadamente no sea primo.

Por ejemplo, 16 y 27 son *primos entre sí*, así como 12, 25 y 91.

Dos números *consecutivos* son primos entre sí.

Todo número primo que no divide a otro número dado es primo con él.

167. Formación de una tabla de números primos.—Busquemos, por ejemplo, todos los números primos menores que 100.

Primero se escribe la serie natural de los números:

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

En seguida, contando desde el 2, se rayan o tachan de 2 en 2 los números de esta tabla, y quedan así tachados todos los múltiplos de 2.

Contando desde el 3, que se conserva, se tachan los números de 3 en 3, y quedan suprimidos todos los múltiplos de 3.

Se pasa al 5, y se hace lo mismo, de 5 en 5; luego, de 7 en 7, con lo cual queda terminada la operación.

Este método se conoce con el nombre de criba de Erastóstenes, y se funda en la propiedad siguiente, a saber: que **todos los números de la serie natural que van de dos en dos, son los múltiplos de 2; los que van de tres en tres, son los múltiplos de 3; los que van de cinco en cinco son los múltiplos de 5, y así sucesivamente.**

Por la tabla anterior se ve que hay 25 números primos menores que 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

168. Nota.—No debe contarse el número 1 entre los primos, puesto que todos los números, primos o no, son divisibles por 1.

I. Después de testados todos los múltiplos de 2, 3, 5, 7, el primer número no testado, 11, es número primo, porque si no lo fuera, sería múltiplo de uno de los números 2, 3, 5, 7, y como tal habría sido testado; por consiguiente, este método va indicando sucesivamente los números primos cuyos múltiplos deben rayarse.

II. Para tachar los múltiplos de cada número primo, basta empezar desde el cuadrado de cada uno; así, para el número 7, por ejemplo, se empezará desde 49; porque como los múltiplos precedentes son productos de 7 por los números menores que él, ya están tachados como múltiplos de 2, 3 ó 5.

III. La tabla queda concluída después de tachados los múltiplos de un número primo cuyo cuadrado es superior al límite que uno se ha propuesto; en el ejemplo anterior, en que el límite es 100, como $7^2 = 49$, y $11^2 = 121$, se suspende después de haber suprimido los múltiplos de 7.

169. REGLA PARA CONOCER SI UN NÚMERO ES PRIMO.—Un número es primo cuando no puede dividirse por ninguno de los números primos cuyos cuadrados son menores que él.

Sea 113 un número que no es divisible por ninguno de los números primos 2, 3, 5 y 7, cuyos cuadrados son menores que 113; digo pues que este número es primo.

En efecto, si no lo fuera, no podría admitir por factor primo más que a 11 o a un número mayor que 11; pero esto no es posible, porque siendo 113 menor que 11×11, si admitiera un divisor igual o superior a 11, el cociente sería menor que 11, y 113 sería divisible por 2, 3, 5 ó 7, lo que va contra la hipótesis. Luego 113, que no admite ninguno de estos divisores, es número primo.

Cuando se quiere averiguar si un número es primo, se puede parar la operación cuando se llega a probar un divisor tal que su cuadrado es mayor que el número propuesto, o cuando el cociente de la división es menor que el divisor probado.

Se dirá, por ejemplo, que 139 es número primo, cuando uno se haya cerciorado de que 139 no es divisible por los números primos 2, 3, 5, 7 y 11; pues $13 \times 13 = 169$, número mayor que 139.

170. TEOREMA.—Todo número que no es primo admite a lo menos un factor primo.

En efecto, 21, por ejemplo, que no es primo, admite por definición a lo menos un divisor diferente de 21 y 1.

Sea 3 el menor de sus divisores: 3 es *primo*, porque si no lo fuera, admitiría a su vez un divisor menor que dividiría a su múltiplo 21, y éste tendría un divisor menor que su menor divisor, lo que es imposible.

171. TEOREMA.—Cualquier número primo que no divide a otro número es primo con él.

Sea 7, que no divide a 18; digo que estos dos números son primos entre sí.

En efecto, los divisores de 7 son 7 y 1; ahora bien, 7 no divide a 18; luego 7 y 18 no tienen más divisor común que 1, y por lo tanto son primos entre sí.

172. TEOREMA.—Cualquier número que divide a un producto de dos factores, y es primo con uno de ellos, debe dividir al otro.

Sea 6 que divide a 35×12, y que es primo con 35; demostremos que dividirá a 12.

$$\underbrace{6 \qquad 35}_{1}$$

En efecto, siendo 6 y 35 primos entre sí, su *m. c. d.* es 1.

Multipliquemos 6 y 35 por 12; su *m. c. d.* será 1×12 ó 12 (**162**).

$$\underbrace{6 \times 12 \qquad 35 \times 12}_{1 \times 12}$$

Ahora bien, 6 dividiéndose a sí mismo, dividirá a su múltiplo 6×12. Por hipótesis, 6 divide también a 35×12.

Dividiendo a 6×12 y a 35×12, dividirá también a su *m. c. d.* 12 (**161**).

173. TEOREMA.—Cualquier número primo que divide un producto de factores, divide necesariamente a un factor.

Sea el número primo 5, que divide al producto $4 \times 12 \times 15$; digo que divide al menos a uno de estos factores.

En efecto, escribamos el producto bajo la forma $4 \times (12 \times 15)$; 5 es primo con 4, luego divide al producto 12×15 (**172**).

Como 5 no divide a 12, debe dividir a 15. En efecto, $15 = 5 \times 3$.

174. COROLARIO.—Cualquier número primo que divide a un producto de factores primos es necesariamente igual a uno de ellos.

175. TEOREMA.—Cuando un número es divisible por otros, números, que son primos entre sí de dos en dos, también es divisible por el producto de ellos.

Sea el número 360 divisible por 4, 5 y 9, que son primos entre sí. Demostremos que es divisible por $4 \times 5 \times 9$.

En efecto, dividiendo 360 por 4, resulta:

$$360 = 4 \times 90.$$

Ahora bien, por hipótesis, 5 divide a 360; por consiguiente divide a 4×90. Pero como 5 es primo con 4, divide a 90 (**172**). En efecto,

$$90 = 5 \times 18.$$

De igual modo, 9 divide a 360, y por consiguiente divide a 4×90. Pero siendo primo con 4, divide a 90.

Por lo mismo, 9 que divide a 90, dividirá a 5×18. Pero como es primo con 5, divide a 18.

$$18 = 9 \times 2.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, resulta:

$$360 \times 90 \times 18 = 4 \times 90 \times 5 \times 18 \times 9 \times 2$$

Dividiendo ambos miembros por 90 y por 18, tenemos:

$$360 = (4 \times 5 \times 9) . 2$$

Luego 360 es divisible por $(4 \times 5 \times 9)$, ya que el cociente es 2.

176. Consecuencias.—De este teorema se infiere que un número es divisible:

por	6	cuando lo es	por	2	y por	3
—	18	—	—	2	—	9
—	15	—	—	3	—	5
—	36	—	—	4	—	9

etcétera.

§ II. DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO EN SUS FACTORES PRIMOS

177. Definición.—Descomponer un número en sus factores primos es transformarlo en un producto indicado de factores primos.

178. TEOREMA.—Todo número que no es primo es igual a un producto de factores primos.

Sea 30 un número que no es primo.

El divisor menor de este número es un factor primo (**170**); así, pues,

$$30 = 2 \times 15 \qquad (1)$$

Si 15 fuera primo, la proposición quedaría demostrada. Pero si 15 no es primo, admite un divisor primo (**170**). Sea 3 este divisor:

$$15 = 3 \times 5 \qquad (2)$$

Multipliquemos ordenadamente las igualdades (1) y (2):

$$30 \times 15 = 2 \times 15 \times 3 \times 5$$
$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

Además, se ve que los cocientes 15, 5, etc., van disminuyendo; se llegará pues necesariamente a un cociente que sea primo.

179. TEOREMA.—Un número no puede descomponerse sino en un solo sistema de factores primos.

Para demostrarlo, basta hacer constar que si dos productos iguales se forman de factores primos, estos factores son los mismos.

Sean los productos iguales $2 . 3 . 5 . 7$ y $a . b . c . d$, formados de factores primos; digo que estos factores son los mismos en ambos productos.

En efecto, el factor primo 2, dividiendo al producto $2 . 3 . 5 . 7$, dividirá al producto igual $a . b . c . d$; dividiendo $a . b . c . d$, debe forzosamente dividir a uno de sus factores (**173**); pero estos factores son primos, luego en el producto $a . b . c . d$ hay un factor igual a 2 (**174**).

Podríamos hacer un raciocinio análogo acerca de los factores 3, 5 y 7. Por consiguiente, cualquiera que sea el modo de descomposición, siempre se encuentra el mismo resultado.

180. REGLA.—Para descomponer un número en sus factores primos, se divide primero el número por el menor de sus divisores primos; se hace lo mismo con el cociente, luego con el segundo cociente, y así en adelante, hasta que resulte un cociente igual a 1. Los divisores son los factores primos del número propuesto.

Ejemplo.—Descompóngase 252 en sus factores primos.

252 es divisible por	2..........	$252 = 2 \times 126$
126 —	2..........	$126 = 2 \times 63$
63 —	3..........	$63 = 3 \times 21$
21 —	3..........	$21 = 3 \times 7$
7 es número primo	....	$7 = 7 \times 1$

Así, $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$ ó $2^2 \times 3^2 \times 7$

En la práctica se escriben los dividendos a la izquierda, y los divisores a la derecha de una misma línea vertical.

$$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

181. CONDICIÓN DE DIVISIBILIDAD DE DOS NÚMEROS.—La condición necesaria y suficiente para que el cociente de la división de dos números resulte entero es que el

divisor no encierre otros factores que los del dividendo, y que estos factores no tengan en el divisor mayor exponente que en el dividendo.

1° *Condición necesaria.*—El dividendo, por ser el producto del divisor por el cociente, se compone del producto de todos los factores del divisor y del cociente; por lo tanto contiene todos los factores del divisor con exponentes a lo menos iguales a los que tienen en el mismo divisor.

2° *Condición suficiente.*—Porque si la suponemos cumplida, se podrá partir el dividendo en dos series de factores, constando la una de los factores del divisor, y la otra, de los factores del cociente. El producto de estos últimos factores dará el cociente que, por consiguiente, será entero.

Sean los números 37 800 y 756.

Descomponiéndolos en sus factores primos, resulta:

$$37\,800 = 2^3 . 3^3 . 5^2 . 7$$
$$756 = 2^2 . 3^3 . 7$$

Podemos escribir:

$$37\,800 = (2^2 . 3^3 . 7) \times (2 . 5^2)$$

Luego $37\,800 = 756 \times (2 . 5^2)$

o $37\,800 = 756 \times 50$

De donde $37\,800 : 756 = 50$

El cociente 50 es exacto.

§ III. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

182. I. **Hallar todos los divisores de un número.**—*Búsquense todos los divisores de* 180.

Descompongamos 180 en sus factores primos.

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \qquad \textbf{(180)}$$

El número 180 es divisible por:

$$(A) \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 5 & \end{array} \right\} \text{ o bien } \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & \end{array} \right.$$

Los números de la primera línea horizontal dividen a 180, y son primos con los de la segunda que dividen también a 180; sus productos de dos en dos dividirán a 180 (**175**).

Estos productos son:

$$(B)\left\{\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & 36 \end{array}\right.$$

Del propio modo, los productos del cuadro (B) dividen a 180, lo mismo que los números de la tercera línea del cuadro (A). Como los unos son primos con los otros, los productos de ellos, combinados de dos en dos, dividirán a 180 (**175**). Estos productos son:

$$(C)\left\{\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & 36 \\ 5 & 10 & 20 \\ 15 & 30 & 60 \\ 45 & 90 & 180 \end{array}\right.$$

183. REGLA.—Para encontrar todos los divisores de un número, se lo descompone en sus factores primos, después de lo cual se escriben en una línea horizontal el número 1 y las diferentes potencias de un mismo factor del número propuesto (se suele empezar por el factor menor).

Se multiplican los números de la primera línea por cada potencia del segundo factor; en seguida se multiplican todos los divisores ya encontrados por cada potencia del tercer factor, y así sucesivamente.

Cuando se ha concluído la operación resultan en un mismo cuadro todos los divisores pedidos.

184. NOTA: También podría procederse del modo siguiente:

Descompongamos el número en sus factores primos:

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

Todos los productos de los factores de 180, que son primos entre sí, combinados de dos en dos, de tres en tres, etc., dividen a 180 (**175**).

Para encontrar estos productos, dispongamos en línea vertical, y por orden de valor, los factores primos.

180	2								
90	2	4							
45	3	6	12						
15	3	9	18	36					
5	5	10	20	15	30	60	45	90	180
1									

Multiplicando 2 por 2, se escribe el producto 4 a la derecha del segundo 2; multiplicando en seguida por 3 las dos primeras líneas, compuestas de los números 2 y 4, se escriben los productos a la derecha del 3; multiplicando por 3 las tres primeras líneas, compuestas de los números 2, 4, 3, 6 y 12, se escriben los productos a la derecha del segundo 3; por último se multiplican por 5 las cuatro primeras líneas, y resulta la quinta.

Todos los números del cuadro dividen a 180 (**175**).

185. NÚMERO DE DIVISORES DE UN NÚMERO.— Para saber cuántos divisores tiene un número, basta añadir una unidad a los exponentes de sus factores primos, y buscar el producto de los números obtenidos.

Sea, por ejemplo, $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Para encontrar todos los divisores de 360, descompuesto en sus factores primos, acabamos de ver (**184**) que se puede formar el cuadro siguiente:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & 8 \\ & 1 & 3 & 9 \\ & & 1 & 5 \end{array}$$

Ahora bien, fácil es observar que cada línea horizontal tiene tantos divisores más uno, cuantos lo indica el exponente de número primo que ha servido para formarla.

Y como para encontrar estos divisores, se multiplican todos los términos de la 1ª línea por cada término de la 2ª, en seguida todos los productos obtenidos, por cada término de la 3ª, y así sucesivamente, tendremos en este ejemplo:

$$(3 + 1) \ (2 + 1) \ (1 + 1) = 24 \text{ divisores.}$$

186. II.—**Hallar el máximo común divisor de varios números.**

Sean los números 540 y 360.

Tenemos (**180**) $540 = 2^2 . 3^3 . 5$

$360 = 2^3 . 3^2 . 5$

El *m. c. d.* ha de ser:

1° *divisor común*; luego todos sus factores primos deben estar contenidos en cada uno de los números (**181**), esto es, son comunes a los números propuestos;

2° *el mayor posible*; luego se deben tomar los factores primos con la mayor potencia común a los números propuestos, potencia que corresponde al menor exponente de los factores comunes a todos ellos.

El *m. c. d.* de los números 540 y 360 será:

$$2^2 . 3^2 . 5 = 180.$$

187. REGLA.—Para encontrar el m. c. d. de varios números descompuestos en sus factores primos, basta multiplicar entre sí los factores primos comunes a estos números, tomados con su menor exponente.

III. Hallar el mínimo común múltiplo de varios números.

188. Llámase común múltiplo de varios números, un número que es exactamente divisible por cada uno de ellos.

Así, 30 que es divisible por 2, 3, 5, es *común múltiplo* de estos números.

189. Mínimo común múltiplo de varios números es el menor número divisible por cada uno de ellos. Se lo designa con las iniciales *m. c. m.*

Problema.—*Hállese el* m. c. m. *de los números* 60, 70 *y* 72.

Descomponiendo estos números en sus factores primos, resulta:

$$60 = 2^2 . 3 . 5$$
$$70 = 2 . 5 . 7$$
$$72 = 2^3 . 3^2$$

Para que el número buscado sea *múltiplo* de 60, 70 y 72, es preciso que entre sus factores haya todos los factores de 60, 70 y 72.

Para que sea el *mínimo común múltiplo*, lo formaremos tomando sólo los factores *absolutamente indispensables.*

Luego el *m. c. m.* de los números 60, 70 y 72 es igual a

$$2^3 . 3^2 . 5 . 7 = 2\,520.$$

190. REGLA.—Para encontrar el m. c. m. de varios números, se los descompone en sus factores primos, y se forma el producto de todos los factores primos, comunes o no, tomados con su mayor exponente.

191. NOTAS: I. El *m. c. m.* de dos números es igual al producto de éstos, dividido por su *m. c. d.*

En efecto, sean los números:

$$N = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$$
$$N' = 2^2 \times 3 \times 5^3 \times 11$$

Su producto $NN' = 2^3 \times 2^2 \times 3^2 \times 3 \times 5 \times 5^3 \times 7^2 \times 11$

Su *m. c. d.* es $2^2 \times 3 \times 5.$

El cociente de NN′ por el *m. c. d.* será:

$$2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^2 \times 11$$

que es el *m. c. m.* de los números.

II. El *m. c. m.* de dos números primos entre sí es el producto de estos números.

III. El producto del *m. c. m.* de dos números por su *m. c. d.* es igual al producto de estos números.

Lo que es una consecuencia de la nota I.

IV. Los cocientes de dos números por su *m. c. d.* son primos entre sí.

V. g.: Los números 48 y 18 tienen 6 por *m. c. d.*: los cocientes respectivos son 8 y 3, números primos entre sí.

EJERCICIOS ORALES

187. ¿Qué es múltiplo de un número?

188. ¿Cómo se forma un múltiplo de un número?

189. ¿Cuántos múltiplos puede tener un número?

190. ¿Qué se llama divisor de un número?

191. ¿Qué otros nombres tiene el divisor?

192. ¿Cuál es el mayor divisor de un número?

193. ¿Cuál es el menor divisor de un número?

194. ¿Cuántos divisores tiene un número primo?

195. Cuando se divide un número por uno de sus divisores, ¿a qué es igual: 1º el cociente; 2º el residuo?

196. ¿Qué número par es primo?

197. ¿De qué número son múltiplos todos los números pares?

198. ¿Cuál es el menor número que se debe añadir o quitar a un número par, para hacerlo impar?

199. ¿Cuál es el menor número que se debe añadir o quitar a un número impar, para hacerlo par?

200. ¿Cuáles son las cifras que se pueden añadir a 35, para formar un número impar de 3 cifras?

201. ¿Cuántas cifras diferentes se pueden añadir a 24, para formar un número par de 3 cifras?

202. ¿Un número es múltiplo o submúltiplo de sus divisores?

203. ¿Qué es cualquier número con relación a sus múltiplos?

204. ¿Qué viene a ser respecto de un número la suma de varios de sus múltiplos?

205. ¿Qué es respecto de un número la diferencia de dos de sus múltiplos?

206. Un número que divide al divisor, divide también al producto de éste por el cociente. ¿Por qué?

207. Todo número que divide al dividendo y al divisor, divide al residuo de su división. ¿Por qué?

208. Todo número que divide al divisor y al residuo, divide al dividendo. ¿Por qué?

209. Un número que divide al dividendo y al residuo, divide al divisor. ¿Por qué?

210. ¿Qué clase de número resulta al sumar: 1º dos números pares; 2º dos números impares; 3º un número par con otro impar?

211. ¿Qué clase de número resulta si se resta: 1º un número par de otro; 2º un número impar de otro impar; 3º un número par de un número impar, y *viceversa*.

212. ¿Qué parte de cualquier número compuesto es siempre divisible por 2?

213. ¿Por qué depende de la cifra de las unidades la divisibilidad de un número por 2?

214. ¿Cuál es el mayor múltiplo de 2 contenido en un número cualquiera?

215. ¿Qué parte de un número compuesto es siempre divisible por 5?

216. Si se divide un número por 5, ¿cuándo sale en el residuo el guarismo de las unidades de este número?

217. ¿Cuándo es un número divisible por 4?

218. ¿Por qué depende de las dos últimas cifras de la derecha la divisibilidad de un número por 4?

219. Cuando se busca el residuo de la división de un número por 4, ¿qué parte de este número hay que dividir: 1º si la cifra de las decenas es par; 2º si la cifra de las decenas es impar?

220. ¿Cuáles son los números de dos cifras que se pueden escribir a la derecha de cualquier número impar para que resulte un número divisible por 4?

221. ¿Cuándo es un número divisible por 25?

222. ¿Por qué depende del número formado por las dos últimas cifras de la derecha la divisibilidad de un número por 25?

223. Cuando se busca el residuo de la división de un número por 25, ¿qué parte de este número basta dividir?

224. ¿Qué números diferentes pueden ponerse en las dos últimas cifras de la derecha en los números divisibles por 25?

225. ¿Cuál es el residuo de la división de 34 284 por 25; de 1 339 por 4?

226. ¿Cuándo es divisible un número: 1º por 8; 2º por 125?

227. En un número igual a lo menos a 1 000, ¿cuál es la parte siempre divisible por 8 y por 125?

228. ¿Cuándo es un número divisible por 3?

229. ¿Qué se debe restar de un número para que resulte el mayor múltiplo de 3 contenido en él?

230. Dígase el menor número que debe añadirse a 452 para que sea divisible por 3.

231. ¿Qué cifras pueden escribirse a la derecha de 451, para formar un número de 4 cifras divisible por 3?

232. ¿Es preciso dividir 451 por 3 para obtener el residuo de la división?

233. ¿Cuándo es un número divisible por 9?

234. ¿Qué cifras pueden escribirse a la derecha del número 216 para que resulte un número de 4 cifras divisible por 9?

235. Dígase, sin efectuar la división, el residuo de la división de 428; 1º por 3; 2º por 9.

236. Cuando al hacer la prueba por 9 de la multiplicación, un factor da 0 por residuo, ¿qué residuo debe dar el producto?

237. ¿Cómo se haría la prueba por 3: 1º de la multiplicación; 2º de la división?

238. ¿Cuándo es un número divisible: 1º por 6; 2º por 15; 3º por 18?

239. ¿Por qué depende la divisibilidad de un número por 6 de su divisibilidad por 2 y por 3?

240. ¿Puede un número impar ser divisible por 6?

241. ¿Es par un número divisible por 18? ¿Por qué?

242. ¿Cuándo es un número divisible por 12?

243. Un número divisible por 12, ¿es par?, ¿por qué?

244. ¿Qué especie de número resulta multiplicando entre sí: 1º dos números pares; 2º dos impares; 3º un par por un impar y *viceversa*?

245. ¿Cuál es el menor número que da 5 de residuo al dividirlo por 6 ó por 8?

246. ¿Cuál es el menor número que da 7 de residuo al dividirlo por 8, por 12 ó por 15?

247. ¿Dos números pares son primos entre sí?

248. ¿Cuál es el *m. c. d.* entre un múltiplo y su submúltiplo?

249. ¿Cómo se llama el número que tiene por factores todos los divisores primos comunes a dos números?

250. ¿Cuál es el *m. c. d.* de dos números si 1 es el residuo de la división del mayor por el menor?

PROBLEMAS

251. ¿Cuáles son los múltiplos menores que 100 de cada uno de los números siguientes: 13, 17, 20, 25?

252. ¿Cuáles son los múltiplos pares menores que 1 000 de cada uno de los números siguientes: 97, 102, 125, 150?

253. ¿Qué números menores que 100 son a la vez divisibles por 2, por 3 y por 4?

254. ¿Qué números menores que 1 000 son divisibles a un tiempo por 4, por 5, por 6 y por 8?

255. Escríbanse los números de 4 cifras divisibles a la vez por 2, por 3, por 4, por 5, por 6 y por 7.

256. ¿Por cuál de los números siguientes: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 25 y 125 es divisible cada uno de los números: 1 166, 1 288 y 1 938?

257. Igual pregunta acerca de los números 2 464, 2 475 y 3 510.

258. Igual pregunta acerca de los números 29 935, 53 625 y 82 875.

259. Búsquense los factores primos de los números siguientes:

1°	280	4°	14 700	7°	147 231
2°	2 646	5°	16 335	8°	839 160
3°	2 970	6°	15 147	9°	873 425

260. Búsquense todos los divisores de los números siguientes:

1°	100	4°	1 755	7°	5 145
2°	360	5°	2 646	8°	8 398
3°	1 728	6°	3 819	9°	15 435

261. ¿Cuáles son los divisores comunes a los números siguientes?:

1°	420	y	720		
2°	900	y	375		
3°	12 285	y	4 375		
4°	42 432	y	945 945		
5°	172 172	y	1 126 125		
6°	1 890	y	3 528		
7°	672		8 624	y	502 656
8°	183 456		458 640	y	642 096
9°	810 810		729 729	y	4 459 455
10°	388 800		472 500	y	2 337 500

262. Búsquese el *m. c. d.* de los números siguientes: 1° por el método ordinario; 2° por sus factores primos:

1°	128 y	192	6°	72	216	y	128
2°	240 y	160	7°	24	80	y	160
3°	180 y	224	8°	90	180	y	945
4°	900 y	7 290	9°	60	320	y	360
5°	571 428 y	999 999	10°	100	550	y	10 500

263. Búsquese el *m. c. m.* de los números siguientes:

1°	60	81	y	90	5°	15	24	28	y	44	
2°	70	130	y	190	6°	72	135	216	y	648	
3°	506	759	y	1 771	7°	12	18	24	36	y	48
4°	3 168	6 048	y	4 896	8°	7	12	21	24	y	42

264. El *m. c, d.* de dos números es 312, su *m. c. m.* 6 552; ¿cuál es el producto de ambos?

265. El *m. c. d.* de dos números es 12, su *m. c. m.* 420; ¿cuáles son estos números, sabiendo que su diferencia es menor que 30?

266. Búsquense, por medio de los divisores, dos números consecutivos, cuyo producto sea 1 260.

267. Búsquense, por medio de los divisores, dos números cuya diferencia sea 3, y el producto 1 120.

268. Alonso da a su hijo menor 35 Bs. y al mayor 50 para que los repartan a cierto número de pobres, de modo que a cada uno le toque igual suma; ¿cuál es el mayor número de Bs. que le tocará a cada uno, y cuántos los pobres socorridos por cada *hijo?*

269. ¿Cuál es la menor suma de dinero con la cual se puede comprar un número exacto de libros a Bs. 5, a Bs. 3, a Bs. 4 o a Bs. 6 cada uno?

270. Tres vapores se emplean en un mismo servicio, el 1° *cada 6 días, el* 2° *cada 8 días y el* 3° *cada 10 días. Si los tres salen juntos un día, ¿en qué otro día volverán a salir juntos y cuántas veces habrá servido cada uno?*

271. Fabricio manda comprar pollos, patos y gallipavos, *empleando la menor suma posible, pero una misma para cada* especie de aves, so pena de tener que pagarle el criado 50 cent. por cada ave que compre de más. Encontró el criado pollos de a 1,20 cent, patos de a 3,00 y gallipavos de a 7,50 y de a 9,00; tomó los más baratos de estos últimos, y tuvo que pagar una suma a su señor; se pregunta cuál fué ésta.

PARTE II

NUMEROS QUEBRADOS
RAICES

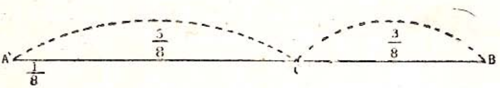
CAPÍTULO I

QUEBRADOS COMUNES

§ I. NOCIONES PRELIMINARES

192. Definición.—Llámase *quebrado o fracción*, una o varias partes de la unidad dividida en cualquier número de partes iguales.

Supongamos la *unidad* representada por la recta AB, y dividamos esta recta en 8 partes iguales.



Cada división representa *un octavo* de la unidad; el segmento CB representa los *tres octavos*, y el segmento AC, los *cinco octavos*.

Asimismo, si se divide una manzana en dos partes iguales, cada parte representará una fracción de la manzana, y se llamará *un medio o una mitad;* si se divide en tres partes iguales, una de ellas representará *un tercio* y dos, *dos tercios;* si se divide en diez partes, cada una representará *un décimo*, etc.

193. Términos del quebrado.—Un quebrado consta de dos *términos,* llamados numerador y denominador.

El *denominador* indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad.

El *numerador* denota el número de estas partes que se toman para formar el quebrado.

Si se dice, por ejemplo, que el segmento AC es los *cinco* octavos de la unidad, *cinco* representa el *numerador,* y *ocho* el *denominador.*

194. Escritura de un quebrado.—Los dos números con que se representa un quebrado común se escriben uno encima de otro y separados entre sí por una raya horizontal u oblicua.

Un tercio	se escribe	$\frac{1}{3}$ ó 1/3.
Tres cuartos	„	$\frac{3}{4}$ ó 3/4.
Siete octavos	„	$\frac{7}{8}$ ó 7/8.
Once doceavos	„	$\frac{11}{12}$ u 11/12.

195. Lectura de un quebrado.—Para leer un quebrado común se enuncia primero el numerador, y después el denominador, agregando a éste la terminación avo cuando es 8, y siempre que es mayor que 10.

V. g.: $\frac{3}{8}$, tres *octavos;* $\frac{7}{12}$, siete *doceavos;* $\frac{8}{22}$, ocho veintidos*avos;* $\frac{14}{130}$, catorce ciento treinta*avos;* $\frac{25}{300}$, veinticinco trescientos*avos.*

Si el denominador es uno de los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, ó 9, no se le agrega la terminación *avo*, porque cada uno de estos números tiene la suya propia, a saber: *medio, tercio, cuarto, quinto, sexto, séptimo, noveno.*

Así, $\frac{2}{3}$ se lee *dos tercios.*

$\frac{3}{5}$,, *tres quintos.*

$\frac{5}{7}$,, *cinco séptimos.*

Cuando el denominador es la unidad seguida de uno o más ceros, como 10, 100, 1 000, etc., se dice *décimo, centésimo, milésimo,* etc.

$\frac{3}{10}$ se lee *tres décimos.*

$\frac{7}{100}$,, *siete centésimos.*

196. Comparación de un quebrado con la unidad.—Pueden ocurrir tres casos:

1° Que el numerador sea menor que el denominador; entonces el quebrado es *menor que la unidad*, y se llama *quebrado propio.*

Por ejemplo, $\frac{4}{7}$ y $\frac{11}{15}$.

2° Que los términos sean iguales entre sí; entonces el quebrado es *igual a la unidad.*

Así, $\frac{8}{8} = 1.$

3° Que el numerador sea mayor que el denominador; entonces el quebrado es *mayor que la unidad.*

Por ejemplo, $\frac{12}{7}$ y $\frac{15}{11}$.

En este caso el quebrado se llama *impropio* o *expresión fraccionaria*.

§ II. PRINCIPALES PROPIEDADES DE LOS QUEBRADOS

197. TEOREMA.—Si dos quebrados tienen un mismo denominador el mayor es el que tiene mayor numerador.

Sean los quebrados $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{7}$ que tienen un mismo denominador; digo que $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$.

En efecto, estos quebrados representan partes iguales de la unidad, a saber, séptimos; pero el primero tiene 5 de estas partes, mientras que el segundo no tiene más que 3; luego $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$.

198. TEOREMA.—Si dos quebrados tienen un mismo numerador, el mayor es el que tiene menor denominador.

Sean los quebrados $\frac{3}{8}$ y $\frac{3}{11}$ que tienen un mismo numerador; digo que $\frac{3}{8} > \frac{3}{11}$.

En efecto, cada uno de estos quebrados representa 3 partes de la unidad; pero las partes del primero, que son octavos, son mayores que las del segundo, que son onceavos; luego $\frac{3}{8} > \frac{3}{11}$.

199. TEOREMA.—Si se multiplica el numerador de un quebrado por un número, el quebrado queda multiplicado por este número; y si se multiplica el denominador, el quebrado queda dividido.

1° Sea el quebrado $\frac{4}{7}$; multiplico el numerador por 3, y resulta $\frac{12}{7}$; digo que $\frac{12}{7}$ es 3 veces mayor que $\frac{4}{7}$.

En efecto, ambos quebrados representan partes iguales de la unidad, esto es, séptimos; pero $\frac{12}{7}$ contiene 3 veces más de estas partes; luego $\frac{12}{7}$ es 3 veces mayor que $\frac{4}{7}$.

2° Sea el quebrado $\frac{4}{7}$; multiplico el denominador por 3, y resulta $\frac{4}{21}$; digo que $\frac{4}{21}$ es 3 veces menor que $\frac{4}{7}$.

En efecto, ambos quebrados representan igual número de partes de la unidad, esto es, 4; pero las partes de $\frac{4}{21}$ son 3 veces menores que las de $\frac{4}{7}$; luego $\frac{4}{21}$ es 3 veces menor que $\frac{4}{7}$.

200. TEOREMA.—Si se divide el numerador de un quebrado por un número, el quebrado queda dividido por este número; y si se divide el denominador, el quebrado queda multiplicado.

1° Sea el quebrado $\frac{6}{9}$; divido el numerador por 3, y resulta $\frac{2}{9}$; digo que $\frac{2}{9}$ es 3 veces menor que $\frac{6}{9}$.

En efecto, en ambos quebrados las partes de la unidad son iguales, pues son novenos; pero $\frac{2}{9}$ contiene 3 veces menos de estas partes; luego $\frac{2}{9}$ es 3 veces menor que $\frac{6}{9}$.

2° Sea el quebrado $\frac{5}{24}$; divido el denominador por 3, y resulta $\frac{5}{8}$; digo que este quebrado es 3 veces mayor que $\frac{5}{24}$.

En efecto, ambos quebrados representan un mismo número de partes de la unidad, esto es, 5; pero estas partes son 3 veces mayores en $\frac{5}{8}$; luego este quebrado es 3 veces mayor que $\frac{5}{24}$.

201. Consecuencias.—1ª Para multiplicar un quebrado por un número, se multiplica el numerador por este número lo que siempre es posible; o se divide el denominador por este número, cuando puede efectuarse la operación.

2ª Para dividir un quebrado por un número, se multiplica el denominador por este número, lo que siempre es posible; o se divide el numerador por este número cuando puede efectuarse la operación.

202. TEOREMA.—No se altera el valor de un quebrado cuando se multiplican o se dividen sus dos términos por un mismo número.

1° Sea el quebrado $\frac{4}{5}$; multiplico sus dos términos por 3, y resulta $\frac{12}{15}$; digo que este quebrado es igual a $\frac{4}{5}$.

En efecto, al multiplicar el numerador por 3, el quebrado queda multiplicado por 3 (**199,** 1°); al multiplicar el denominador por 3, el quebrado queda dividido por 3 (**199,** 2°).

Por lo tanto, estando el quebrado multiplicado y dividido por un mismo número, no se ha alterado su valor.

2° Sea el quebrado $\frac{24}{40}$; divido ambos términos por 8, y resulta $\frac{3}{5}$; digo que este quebrado es igual a $\frac{24}{40}$.

En efecto, al dividir el numerador por 8, el quebrado queda dividido por 8 (**200,** 1°); al dividir el denominador por 8, el quebrado queda multiplicado por 8 (**200**, 2°).

Luego, estando el quebrado dividido y multiplicado por un mismo número, no se ha alterado su valor.

203. TEOREMA.—Si a los dos términos de un quebrado propio se añade un mismo número, el quebrado que resulta es mayor que el propuesto.

Sea el quebrado $\frac{5}{7}$; añado 4 a sus dos términos, y resulta $\frac{9}{11}$; digo que $\frac{9}{11} > \frac{5}{7}$.

En efecto, a $\frac{5}{7}$ le faltan $\frac{2}{7}$ para igualar la unidad, y a $\frac{9}{11}$ le faltan $\frac{2}{11}$. Como tenemos $\frac{2}{11} < \frac{2}{7}$ (**198**), se infiere que al quebrado $\frac{5}{7}$ le falta más para igualar la unidad, luego $\frac{9}{11} > \frac{5}{7}$.

204. TEOREMA.—Si a los dos términos de un quebrado impropio se añade un mismo número, el quebrado que resulta es menor que el propuesto.

Sea el quebrado impropio $\frac{9}{7}$; añado 6 a sus dos términos, y resulta $\frac{15}{13}$; digo que $\frac{15}{13} < \frac{9}{7}$.

En efecto, al quebrado $\frac{15}{13}$ le sobran $\frac{2}{13}$ para valer la unidad, y al quebrado $\frac{9}{7}$ le sobran $\frac{2}{7}$. Como tenemos (**198**) $\frac{2}{13} < \frac{2}{7}$ se infiere que $\frac{15}{13}$ excede a la unidad en menos que $\frac{9}{7}$; luego $\frac{15}{13} < \frac{9}{7}$.

Del mismo modo se demostraría que, **si los términos de un quebrado se disminuyen en un mismo número, el quebrado que resulta es menor o mayor que el propuesto, según que éste sea propio o impropio.**

205. TEOREMA.—Un quebrado representa el cociente de su numerador por su denominador.

Sea el quebrado $\frac{7}{15}$; digo que representa el cociente de su numerador por su denominador.

En efecto, si 7 dividido por 15 da $\frac{7}{15}$ por cociente, al multiplicar el cociente $\frac{7}{15}$ por el divisor 15, debe resultar el dividendo 7.

Pero, para multiplicar $\frac{7}{15}$ por 15, basta dividir por 15 el denominador de este quebrado (**201**). Hagamos la operación: $\frac{7}{15 : 15} = \frac{7}{1} = 7$;

lo que queríamos demostrar.

206. NOTA: Este teorema proporciona un medio de encontrar el cociente exacto de una división aproximada.

Para ello, basta añadir al cociente un quebrado que tenga por numerador el residuo de la división, y por denominador, el divisor.

Así, el cociente exacto de $\frac{27}{4}$ es $6 + \frac{3}{4}$ ó $6\frac{3}{4}$

El mismo teorema manifiesta que el valor de un quebrado no depende de la magnitud de sus términos, sino de su *relación*, esto es, del cociente del numerador por el denominador.

Así, el quebrado $\frac{3}{8}$ es mayor que $\frac{3}{11}$, porque representa 3 partes de una unidad dividida en 8; el segundo representa también 3 partes, pero como la unidad está dividida en 11, éstas son menores.

§ III. REDUCCIONES O TRANSFORMACIONES DE QUEBRADOS

207. Definición.—Llámanse *reducciones* de quebrados los varios cambios que se hacen en sus términos sin alterar el valor de estos quebrados.

Hay cuatro reducciones principales de quebrados.

Primera reducción

208. Reducir un número entero o un número mixto a quebrado impropio.

1º Reducir 6 enteros a séptimos.

Un entero vale 7 séptimos o $\frac{7}{7}$,

6 enteros valdrán $\frac{7 \times 6}{7} = \frac{42}{7}$.

209. REGLA.—Para reducir un entero a quebrado impropio, se multiplica el denominador dado por el entero, y al producto se le pone el mismo denominador.

2° Reducir $6\frac{3}{4}$ a quebrado impropio.

Los 6 enteros valen $\frac{24}{4}$, según el caso anterior;

$$\frac{24}{4}+\frac{3}{4} \text{ valdrán 27 cuartos o } \frac{27}{4}.$$

210. REGLA.—Para reducir un número mixto a quebrado impropio, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, al producto se le añade el numerador, y al total se le da por denominador el mismo del quebrado.

Segunda reducción

211. Sacar los enteros contenidos en un quebrado impropio.

Sáquense los enteros contenidos en $\frac{72}{7}$.

Como cada unidad vale 7 séptimos, tantas veces como 7 esté contenido en 72, tantos enteros contendrá el quebrado impropio.

212. REGLA.—Para sacar los enteros contenidos en un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador, el cociente representa los enteros; si queda residuo, se lo pone por numerador de un quebrado, cuyo denominador es el del quebrado impropio.

Tercera reducción

Simplificar los quebrados y reducirlos a su más simple expresión

213. Definición.—*Simplificar* un quebrado es transformarlo en otro equivalente cuyos términos sean menores, y por tanto más *simples.*

Ejemplo $\frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

Los quebrados $\frac{8}{12}, \frac{4}{6}, \frac{2}{3}$ son simplificaciones de $\frac{16}{24}$.

214. Reducir un quebrado a su *más simple expresión*, es representarlo con los menores términos posibles.

Así, cada uno de los quebrados $\frac{8}{12}, \frac{4}{6}$ y $\frac{2}{3}$ es una expresión más simple que $\frac{16}{24}$; pero sólo $\frac{2}{3}$ es la *más simple* de todas.

Cuando el quebrado no se puede simplificar, se llama *irreducible*; entonces sus términos son *primos entre sí*.

Propóngamonos simplificar el quebrado $\frac{120}{180}$.

$$\frac{120}{180} = \frac{\cancel{10} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}{\cancel{10} \times \cancel{2} \times 3 \times \cancel{3}} = \frac{2}{3}$$

El quebrado $\frac{2}{3}$ es *irreducible*, ya que sus términos no tienen más que 1 por divisor común.

215. REGLA.—Para simplificar un quebrado, se descomponen sus dos términos en sus factores primos, y se suprimen en ambos los factores que les sean comunes.

También puede reducirse a su más simple expresión dividiendo sus dos términos por su m. c. d.

Redúzcase, por ejemplo, el quebrado $\frac{117}{975}$ a su más simple expresión.

El *m. c. d.* de 975 y 117 es 39. Dividamos ambos términos por 39.

$$\frac{117 : 39}{975 : 39} = \frac{3}{25}$$

El quebrado $\frac{3}{25}$ es irreducible, pues sus términos son primos entre sí.

216. NOTA.—De que 117 es igual a 39 veces 3, y 975 a 39 veces 25, se infiere que **cuando un quebrado es equivalente a otro cuyos términos son primos entre sí, los términos del primer quebrado son equimúltiplos de los del segundo.**

Cuarta reducción

Reducir quebrados a un común denominador

217. Definición.—Reducir quebrados a un *común denominador* es transformarlos en otros equivalentes, cuyos denominadores sean iguales.

1° *Reducir dos quebrados a un común denominador.*—Redúzcanse a un común denominador los quebrados $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{8}$.

Multiplico por 8 los dos términos del primer quebrado, y por 5 los dos términos del segundo, y resultan los quebrados $\frac{24}{40}$ y $\frac{35}{40}$. Estos quebrados son equivalentes a los primeros (**202**), y tienen el mismo denominador.

2° *Reducir varios quebrados a un común denominador.*—Redúzcanse a un común denominador los quebrados $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{8}{11}$ y $\frac{2}{9}$.

Multiplico los dos términos del primer quebrado por $7 \times 11 \times 9$, los del segundo por $4 \times 11 \times 9$, los del tercero por $4 \times 7 \times 9$, y los del cuarto por $4 \times 7 \times 11$; así resulta:

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 7 \times 11 \times 9}{4 \times 7 \times 11 \times 9} = \frac{2\,079}{2\,772}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 4 \times 11 \times 9}{7 \times 4 \times 11 \times 9} = \frac{1\,980}{2\,772}$$

$$\frac{8}{11} = \frac{8 \times 4 \times 7 \times 9}{11 \times 4 \times 7 \times 9} = \frac{2\,016}{2\,772}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \times 4 \times 7 \times 11}{9 \times 4 \times 7 \times 11} = \frac{616}{2\,772}$$

Estos quebrados son equivalentes a los primeros (**202**) y tienen el mismo denominador.

218. REGLA.—1º Para reducir dos quebrados a un común denominador se multiplican los dos términos de cada uno por el denominador del otro.

2º Para reducir varios quebrados a un común denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el producto de los denominadores de los demás.

NOTA: Después de reducidos los quebrados a un común denominador es mucho más fácil compararlos, ya que basta comparar los numeradores.

Así, de los quebrados propuestos se ve inmediatamente que $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{2}{9}$, y que $\frac{8}{11}$ es mayor que $\frac{5}{7}$.

219. Reducción de quebrados a su mínimo común denominador.—Ya sabemos que el denominador común es común múltiplo de los denominadores; por lo tanto el *mínimo común denominador* será el *mínimo común múltiplo de los denominadores.* Luego, podemos formular la regla siguiente:

REGLA.—Para reducir quebrados a su mínimo común denominador: 1º se reducen estos quebrados a su más simple expresión; 2º se busca el m. c. m. de los denominadores;

3º se divide el m. c. m. por el denominador de cada quebrado, y se múltiplican los dos términos del quebrado por el cociente correspondiente.

Ejemplo: Redúzcanse a su mínimo común denominador los quebrados $\frac{7}{12}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{11}{30}$ y $\frac{9}{40}$.

Siendo el *m. c. m.* de los denominadores $2^3 . 3^2 . 5$ ó 360, tendremos, aplicando la regla precedente:

cocientes: $\frac{360}{12} = 30$; $\frac{360}{18} = 20$; $\frac{360}{30} = 12$; $\frac{360}{40} = 9$.

Disposición de las operaciones

$$12 = 2^2 . 3 \qquad \frac{7 \times 30}{12 \times 30} = \frac{210}{360}$$

$$18 = 2 . 3^2 \qquad \frac{5 \times 20}{18 \times 20} = \frac{100}{360}$$

$$30 = 2 . 3 . 5 \qquad \frac{11 \times 12}{30 \times 12} = \frac{132}{360}$$

$$40 = 2^3 . 5 \qquad \frac{9 \times 9}{40 \times 9} = \frac{81}{360}$$

Estos quebrados son equivalentes a los primeros, pues se han multiplicado por un mismo número los dos términos de cada uno de los quebrados propuestos; el denominador es *igual*, ya que es el producto de los mismos factores; y es el *mínimo* denominador, por ser el *m. c. m.* de los primeros denominadores.

EJERCICIOS

Reducir a quebrado impropio:

272.	$54\frac{1}{4}$	**276.**	$150\frac{5}{12}$	**280.**	$92\frac{3}{20}$
273.	$24\frac{2}{9}$	**277.**	$158\frac{7}{15}$	**281.**	$36\frac{1}{25}$
274.	$45\frac{3}{10}$	**278.**	$243\frac{11}{19}$	**282.**	$235\frac{5}{8}$
275.	$109\frac{3}{11}$	**279.**	$145\frac{8}{21}$		

Extraer los enteros contenidos en las expresiones siguientes:

283.	$\frac{3\,489}{7}$	**287.**	$\frac{23\,589}{24}$	**291.**	$\frac{31\,416}{18}$
284.	$\frac{8\,543}{11}$	**288.**	$\frac{13\,482}{28}$	**292.**	$\frac{456\,429}{25}$
285.	$\frac{3\,981}{8}$	**289.**	$\frac{13\,265}{9}$	**293.**	$\frac{254\,392}{15}$
286.	$\frac{3\,502}{12}$	**290.**	$\frac{431\,500}{24}$	**294.**	$\frac{483\,562}{21}$

Simplificar las expresiones siguientes:

295.	$\frac{32}{48}$	**298.**	$\frac{87}{192}$	**301.**	$\frac{1\,470}{2\,205}$
296.	$\frac{46}{54}$	**299.**	$\frac{320}{750}$	**302.**	$\frac{5\,544}{38\,808}$
297.	$\frac{96}{144}$	**300.**	$\frac{1\,080}{1\,350}$	**303.**	$\frac{5\,673}{13\,237}$

304. $\frac{2\,646}{22\,050}$

305. $\frac{10\,500}{15\,435}$

306. $\frac{85\,995}{89\,180}$

307. $\frac{49\,077}{105\,165}$

308. $\frac{105\,535}{263\,835}$

309. $\frac{606\,375}{1\,378\,125}$

310. $\frac{20\,366}{75\,474}$

311. $\frac{936\,544}{5\,258\,214}$

312. $\frac{1\,679\,616}{2\,799\,360}$

313. $\frac{78 \times 84 \times 44}{98 \times 99 \times 520}$

314. $\frac{88 \times 133 \times 15 \times 211}{2\,185 \times 462}$

315. $\frac{4\,715 \times 104 \times 792 \times 57}{280\,071 \times 288 \times 52}$

316. $\frac{9\,936 \times 11\,875 \times 3\,773}{1\,081 \times 893 \times 31\,801}$

317. $\frac{9\,594\,000 \times 95 \times 105 \times 4\,969 \times 7}{828 \times 575 \times 45 \times 76 \times 117 \times 210}$

318. $\frac{84 + 120 + 132}{252}$

319. $\frac{4\,935 - 735}{105 + 840 + 1\,155}$

Reducir a un mismo denominador los quebrados siguientes:

320. $\frac{1}{3}$ $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$

321. $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$

322. $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{9}$

323. $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{5}{9}$ y $\frac{1}{12}$

324. $\frac{11}{12}$ $\frac{13}{14}$ y $\frac{3}{14}$

325. $\frac{7}{8}$ $\frac{3}{11}$ y $\frac{3}{14}$

326. $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{9}{16}$ y $\frac{11}{32}$

327. $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{11}{12}$ y $\frac{15}{16}$

Reducir a su mínimo común denominador los quebrados siguientes:

328. $\frac{5}{6}\ \frac{11}{12}\ \frac{7}{15}$ y $\frac{5}{18}$

329. $\frac{2}{3}\ \frac{1}{7}\ \frac{4}{9}$ y $\frac{5}{12}$

330. $\frac{3}{4}\ \frac{2}{9}\ \frac{7}{12}\ \frac{5}{16}$ y $\frac{3}{21}$

331. $\frac{12}{21}\ \frac{7}{14}\ \frac{11}{42}$ y $\frac{8}{27}$

332. $\frac{3}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{7}{12}\ \frac{8}{15}\ \frac{11}{20}$ y $\frac{29}{30}$

333. $\frac{24}{99}\ \frac{25}{77}$ y $\frac{17}{693}$

334. $\frac{5}{504}\ \frac{11}{1\,260}$ y $\frac{5}{756}$

335. $\frac{13}{84}\ \frac{19}{252}$ y $\frac{29}{756}$

336. $\frac{3}{14}\ \frac{2}{21}\ \frac{6}{25}$ y $\frac{5}{18}$

337. $\frac{1}{84}\ \frac{1}{616}\ \frac{1}{1\,125}$ y $\frac{1}{539}$

CAPÍTULO II

OPERACIONES CON LOS QUEBRADOS COMUNES

§ I. ADICIÓN

Los sumandos en la adición de quebrados deben ser, como en la de enteros, homogéneos; por consiguiente deben reducirse aquéllos a un común denominador, esto es, a una misma denominación, si ya no lo están.

220. Suma de quebrados de igual denominador.

Súmense los quebrados $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{8}$.

Claro está que 1 *octavo* + 3 *octavos* + 5 *octavos* + 7 *octavos*, son $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ *octavos*.

Luego $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{16}{8}$ ó 2 unidades.

REGLA.—Para sumar varios quebrados que tienen igual denominador, se suman los numeradores, y a la suma se le pone por denominador el denominador común; luego se extraen los enteros si los hay.

221. Suma de varios quebrados cualesquiera.—Súmense los quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{7}$ y $\frac{2}{3}$.

Reduciendo estos quebrados a un común denominador, resulta:

$$\frac{3}{5}=\frac{3\times 7\times 3}{5\times 7\times 3}=\frac{63}{105};$$

$$\frac{6}{7}=\frac{6\times 5\times 3}{7\times 5\times 3}=\frac{90}{105};$$

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times 5\times 7}{3\times 5\times 7}=\frac{70}{105};$$

Basta ahora aplicar la regla precedente; luego:

$$\frac{3}{5}+\frac{6}{7}+\frac{2}{3}=\frac{63}{105}+\frac{90}{105}+\frac{70}{105}=\frac{223}{105} \text{ ó } 2\,\frac{13}{105}.$$

REGLA.—Para sumar varios quebrados que tienen distintos denominadores, se los reduce a un común denominador, y se opera como en el caso precedente.

222. Suma de números mixtos.—Súmense:

$$5\,\frac{3}{5},\ 7\,\frac{8}{9} \text{ y } \frac{6}{7}.$$

Sumemos los quebrados:

$$\frac{3}{5} + \frac{8}{9} + \frac{6}{7} = \frac{189}{315} + \frac{280}{315} + \frac{270}{315} = \frac{739}{315}.$$

Saquemos los enteros: $\frac{739}{315} = 2\,\frac{109}{315}$.

Añadamos estos 2 enteros a los dados:

$$5 + 7 + 2 = 14.$$

Suma total: $5\,\frac{3}{5} + 7\,\frac{8}{9} + \frac{6}{7} = 14\,\frac{109}{315}$.

REGLA.—Para sumar números mixtos, se suman separadamente los quebrados y los enteros; la suma de estas dos sumas parciales da la suma total.

También pueden transformarse los números mixtos en expresión fraccionaria y la operación queda reducida a una suma de quebrados; pero no se suele hacer así, por resultar más largos los cálculos.

§ II. SUSTRACCIÓN

Para restar un quebrado de otro, es preciso que tengan igual denominador.

223. Resta de dos quebrados de igual denominador.—De $\frac{8}{9}$ réstese $\frac{5}{9}$.

Si de 8 *novenos* se restan 5 *novenos*, claro está que la diferencia será 8 — 5 = 3 *novenos*; luego:

$$\frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{3}{9} \text{ o } \frac{1}{3}.$$

REGLA.—Para restar dos quebrados homogéneos, esto es, que tienen igual denominador, se restan sus numeradores y a la diferencia se le pone por denominador denominador común.

224. Resta de dos quebrados cualesquiera.— De $\frac{3}{4}$ réstese $\frac{2}{5}$.

Reduciendo estos quebrados a un común denominador, resulta: $\frac{15}{20}$ y $\frac{8}{20}$; así se vuelve al caso precedente; luego:

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{15}{20}-\frac{8}{20}=\frac{7}{20}.$$

REGLA.—Para restar dos quebrados que tienen distinto denominador, se los reduce a un común denominador y se aplica la regla precedente.

225. Resta de números mixtos.—De $6\frac{7}{9}$ réstese $3\frac{5}{11}$.

Primero hay que reducir los quebrados a un común denominador; tenemos:

$$\frac{7}{9}=\frac{77}{99};\ \frac{5}{11}=\frac{45}{99}.$$

La resta que se ha de efectuar es:

$$6\frac{77}{99}-3\frac{45}{99}.$$

Restemos respectivamente los quebrados y los enteros:

$$\frac{77}{99} - \frac{45}{99} = \frac{32}{99}$$

$$6 - 3 = 3$$

Luego: $6\frac{7}{9} - 3\frac{5}{11} = 3 + \frac{32}{99}$ ó $3\frac{32}{99}$.

REGLA.—Para restar un número mixto de otro, se resta el primer quebrado del segundo, y el primer entero del segundo; luego se suman las restas.

También se pueden reducir los enteros a quebrados impropios, y se vuelve el caso precedente.

226. Nota: Si el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo, se añade una unidad a éste, para lo cual se suma el numerador con el denominador. Para que no se altere la diferencia, se añade una unidad a la parte entera del sustraendo.

Ejemplo: *¿Qué diferencia hay entre* $19\frac{1}{5}$ *y* $12\frac{3}{7}$*?*

Los quebrados reducidos a un común denominador, dan:

$$\frac{7}{35} \text{ y } \frac{15}{35}$$

Como 15 no puede restarse de 7, a 7 añadimos una unidad, o sea $\frac{35}{35}$, y resulta $\frac{7}{35} + \frac{35}{35} = \frac{42}{35}$.

Resta de los quebrados: $\frac{42}{35} - \frac{15}{35} = \frac{27}{35}$.

Para que no se altere la diferencia, hay que añadir una unidad a 12, o restarla de 19:

$$19 - 13 = 6 \text{ ó } 18 - 12 = 6.$$

Luego $19\frac{1}{5} - 12\frac{3}{7} = 6\frac{27}{35}$.

227. Restar un quebrado de un número entero.

De 7 réstese $\frac{3}{8}$.

De 7 tomo una unidad que vale $\frac{8}{8}$; el 7 queda sólo en 6, y la operación se reduce a

$$6\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = 6\frac{5}{8}.$$

REGLA.—Para restar un quebrado de un entero, se toma de éste una unidad que se divide en tantas partes cuantas indica el denominador del quebrado, y se restan los numeradores. La resta final se compone del número entero menos 1, más la diferencia de los quebrados.

§ III. MULTIPLICACIÓN

228. La *multiplicación* de quebrados es, como la de enteros, una operación que tiene por objeto buscar un número que sea, respecto del multiplicando, lo que el multiplicador es respecto de la unidad.

Así, multiplicar 18 por $\frac{2}{3}$ es buscar un número que sea los $\frac{2}{3}$ de 18 (**56**), ya que el multiplicador es los $\frac{2}{3}$ de la unidad.

Del propio modo, multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ es tomar los $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, etc.

229. Multiplicación de un quebrado por un entero.—Multiplíquese $\frac{11}{14}$ por 7.

Ya sabemos (**201**, 1°) que hay dos procedimientos:

1er procedimiento: $\frac{11}{14} \times 7 = \frac{11 \times 7}{14} = \frac{77}{14}$.

2° procedimiento: $\frac{11}{14} \times 7 = \frac{11}{14 : 7} = \frac{11}{2}$.

REGLA.—Para multiplicar un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por el entero, y al producto se le pone por denominador el denominador del quebrado; o se divide el denominador por el entero, cuando éste es factor del denominador, conservando por numerador el del quebrado.

230. Multiplicación de un entero por un quebrado.—Multiplíquese 21 por $\frac{4}{7}$.

Multiplicar 21 por $\frac{4}{7}$ es tomar los $\frac{4}{7}$ de 21. (**228**)

Ahora bien, 1 séptimo de 21 vale $\frac{21}{7}$;

los 4 séptimos valdrán $\frac{21 \times 4}{7} = \frac{84}{7}$.

REGLA.—Para multiplicar un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el numerador, y al producto se le pone por denominador el mismo del quebrado.

231. Multiplicación de un quebrado por otro. Multiplíquese $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$.

Multiplicar $\frac{5}{7}$ por $\frac{3}{4}$ es tomar los $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$. (**228**)

Ahora bien, 1 cuarto de $\frac{5}{7}$ vale $\frac{5}{7 \times 4}$;

los 3 cuartos valdrán $\frac{5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{15}{28}$.

REGLA.—Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican entre sí los numeradores, y al producto se le pone por denominador el producto de los denominadores.

232. Multiplicación de un número mixto por otro.—Para multiplicar entre sí dos números mixtos, se los suele reducir a quebrados impropios, y así se vuelve al caso precedente.

Multiplíquese $3\frac{2}{5}$ por $4\frac{6}{7}$.

$$3\frac{2}{5} \times 4\frac{6}{7} = \frac{17}{5} \times \frac{34}{7} = \frac{17 \times 34}{5 \times 7} = \frac{578}{35} = 16\frac{18}{35}.$$

233. NOTA: 1° El producto de varios quebrados, llamado *quebrado de quebrados*, es siempre menor que cada uno de estos quebrados (**228**).

2° Siendo los numeradores y denominadores números enteros, se infiere que no se altera el producto de dos o más quebrados aunque se invierta el orden de los factores.

Así, $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{5 \times 3}{7 \times 4} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$;

y $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 6 \times 7} = \frac{2 \times 4 \times 5}{3 \times 7 \times 6} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{5}{6}$.

§ IV. DIVISIÓN

234. La *división* de quebrados es, como la de enteros, una operación en que, dados dos números, llamados *dividendo y divisor*, se busca otro llamado *cociente*, que multiplicado por el divisor dé el dividendo.

Así, dividir 12 por $\frac{3}{4}$, es buscar el factor que debe multiplicarse por $\frac{3}{4}$ para que resulte 12 en el producto.

Del mismo modo, dividir $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, es buscar el factor que debe multiplicarse por $\frac{4}{5}$ para que resulte $\frac{2}{3}$ en el producto.

235. División de un quebrado por un entero. Divídase $\frac{21}{25}$ por 3.

Ya sabemos (**201,** 2°) que hay dos procedimientos:

1^er^ procedimiento: $\frac{21}{25} : 3 = \frac{21}{25 \times 3} = \frac{21}{75}$.

2° procedimiento: $\frac{21}{25} : 3 = \frac{21 : 3}{25} = \frac{7}{25}$.

REGLA.—Para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador por el entero, quedando por numerador el del quebrado; o se divide el numerador por el entero, cuando éste es factor del numerador, quedando por denominador el del quebrado.

236. División de un entero por un quebrado. Divídase 15 por $\frac{3}{7}$.

Dividir 15 por $\frac{3}{7}$ es buscar un cociente c que, multiplicado por $\frac{3}{7}$, dé 15: (**234**)

$$c \times \frac{3}{7} = 15.$$

Por lo tanto, los $\frac{3}{7}$ del cociente = 15;

un séptimo del cociente valdrá $\frac{15}{3}$,

y los siete séptimos, o el cociente entero, valdrá $\frac{15 \times 7}{3}$

Luego $$15 : \frac{3}{7} = \frac{15 \times 7}{3} = 15 \times \frac{7}{3}.$$

REGLA.—Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el quebrado invertido.

237. División de un quebrado por otro.—Divídase: $\frac{7}{8}$ por $\frac{2}{3}$.

Dividir $\frac{7}{8}$ por $\frac{2}{3}$ es buscar un cociente c que, multiplicado por $\frac{2}{3}$, dé $\frac{7}{8}$: (**234**)

$$c \times \frac{2}{3} = \frac{7}{8}.$$

Por lo tanto, los $\frac{2}{3}$ del cociente $= \frac{7}{8}$;

un tercio valdrá $\frac{7}{8 \times 2}$

y los 3 tercios valdrán $\frac{7 \times 3}{8 \times 2}$

Luego: $\frac{7}{8} : \frac{2}{3} = \frac{7 \times 3}{8 \times 2} = \frac{7}{8} \times \frac{3}{2}$.

REGLA.—Para dividir un quebrado por otro, se multiplica el quebrado dividendo por el quebrado divisor invertido.

Se puede también dividir los numeradores entre sí, y los denominadores entre sí, cuando los términos del dividendo son múltiplos de sus correspondientes en el divisor.

EJEMPLO: Dividir $\frac{15}{64}$ por $\frac{3}{8}$.

Tenemos: $\frac{15}{64} : \frac{3}{8} = \frac{15 : 3}{64 : 8} = \frac{5}{8}$.

NOTA: Los dos casos precedentes pueden reducirse a éste, ya que $3 = \frac{3}{1}$ y $15 = \frac{15}{1}$.

238. División de un número mixto por otro.—**Para dividir entre sí dos números mixtos, se los suele reducir a quebrados impropios, para volver así al caso precedente.**

EJEMPLO: Divídase $5\frac{2}{3}$ por $3\frac{4}{5}$.

Tenemos: $5\frac{2}{3} : 3\frac{4}{5} = \frac{17}{3} : \frac{19}{5}$;

o
$$\frac{17}{3} : \frac{19}{5} = \frac{17}{3} \times \frac{5}{19} = \frac{85}{57}$$

239. NOTA: Dos números son inversos uno de otro cuando su producto es igual a la unidad.

Así, 4 y $\frac{1}{4}$ son *inversos*, pues $4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

$\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$ lo son también, ya que $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$.

PROBLEMAS RAZONADOS SOBRE LOS QUEBRADOS

I. Un pozo lleno de agua puede vaciarse con una bomba en 87 horas, y con otra en 57; si se hacen funcionar ambas a un mismo tiempo, ¿en cuántas horas quedará vacío el pozo?

ANÁLISIS: En una hora la primera bomba vaciará $\frac{1}{87}$ del pozo, y la segunda, $\frac{1}{57}$.

Ambas juntas vaciarán $\frac{1}{87} + \frac{1}{57}$ o $\frac{144}{4959}$ del pozo;

para vaciar los $\frac{144}{4959}$ del pozo, necesitan las bombas una hora;

para vaciar $\frac{1}{4959}$ emplearán $\frac{1}{144}$ de hora,

para vaciar los $\frac{4959}{4959}$, o todo el pozo, emplearán:

$$\frac{1 \times 4959}{144} = 34 \text{ horas } \frac{7}{16}$$

RESPUESTA: 34 horas $\frac{7}{16}$

II. ¿Cuál es el número cuya mitad, duplo, tercera parte y triple da 1 435?

ANÁLISIS. — Sea 1 el número pedido; según los datos,

$$\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{3} + 3 = 5\frac{5}{6} \text{ ó } \frac{35}{6}.$$

Los $\frac{35}{6}$ del número valen 1 435.

1 sexto valdrá $\frac{1\,435}{35}$

y los 6 sextos, o todo el número, valdrán

$$\frac{1\,435 \times 6}{35} = 246.$$

RESPUESTA: 246.

III. Durante 4 años la fortuna de un negociante se ha aumentado cada año de la cuarta parte de lo que era el año anterior; al cabo de este tiempo posee el negociante Bs. 78 125; ¿cuánto tenía al principio y al fin de cada uno de los tres primeros años?

ANÁLISIS: Según los datos del problema, la fortuna del negociante era al fin de cada año los $\frac{5}{4}$ de lo que era al fin del año anterior:

Luego 78 125 son los $\frac{5}{4}$ de lo que era la fortuna al fin del 3er. año.

Si los $\frac{5}{4}$ valen Bs. 78 125, 1 cuarto valdrá $\frac{78\,125}{5}$

y los 4 cuartos valdrán $\frac{78\,125 \times 4}{5}$ = Bs. 62 500.

Se ve pues que basta multiplicar por $\frac{4}{5}$ la fortuna al fin de un año, para encontrar lo que era al fin del año anterior.

Al fin del 2° año la fortuna era de $62\,500 \times \frac{4}{5}$ = Bs. 50 000

Al fin del 1er año la fortuna era de $50\,000 \times \frac{4}{5} = \quad 40\,000$

Y al principio del 1er ,, $\quad 40\,000 \times \frac{4}{5} = \quad 32\,000$

IV. Un niño que tenía una caja de lápices, gasta los $\frac{2}{7}$ de ella más 4 lápices $\frac{4}{7}$, y entonces no le quedan más que los $\frac{2}{3}$ de lo que tenía al principio. ¿Cuántos lápices tenía el niño?

Análisis: Ya que después de haber gastado el niño algunos lápices, le quedan los $\frac{2}{3}$ de los que tenía antes, es claro que los gastados igualan a un tercio; luego los $\frac{2}{7}$ del número total más 4 lápices $\frac{4}{7}$ igualan a un tercio de la caja; por consiguiente, lo que falta a los $\frac{2}{7}$ del número para igualar a $\frac{1}{3}$ del mismo son precisamente los 4 lápices $\frac{4}{7}$ o $\frac{32}{7}$ de lápiz.

Ahora bien $\qquad \frac{1}{3} - \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$;

si $\frac{1}{21}$ del número iguala a $\frac{32}{7}$ de lápiz, los $\frac{21}{21}$ valdrán

$$\frac{32 \times 21}{7} = 96.$$

Resp: 96 lápices tenía el niño en su caja.

V. Raimundo compra $\frac{2}{3}$ de una pieza de tela, menos 15

metros; Toribio compra la $\frac{1}{4}$ parte de la misma pieza, más 4 metros, con lo cual recibe 21 metros menos que el primero; ¿cuál es la longitud de la pieza?

ANÁLISIS: Si Toribio hubiera comprado sólo la $\frac{1}{4}$ parte de la pieza, habría recibido 4 metros menos, y entonces Raimundo hubiera tenido 21 + 4, ó 25 m. más que aquél.

Del propio modo, si Raimundo hubiese tomado los $\frac{2}{3}$ cabales de la pieza, habría comprado 15 m. más y por consiguiente hubiera recibido 25 + 15, ó 40 m. más que Toribio.

Luego la diferencia entre los $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$ de la pieza es de 40 metros:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}.$$

Ya que $\frac{5}{12}$ valen 40 m., $\frac{1}{12}$ valdrá $\frac{40}{5}$

y $\frac{12}{12}$ valdrán $\frac{40 \times 12}{5} = 96.$

RESP: 96 metros.

VI. Una vendedora de huevos vende los $\frac{2}{9}$ de un canasto, menos 55 huevos; si añadiera 37 a los que le quedan el número primitivo quedaría aumentado de $\frac{1}{6}$. ¿Cuántos huevos había en el canasto?

ANÁLISIS: Si la vendedora hubiese vendido 5 huevos más, habría vendido exactamente los $\frac{2}{9}$ de su canasto, y entonces habría sido menester añadir 37 + 5 o 42 huevos a lo que le queda, para aumentar de $\frac{1}{6}$ el número primitivo.

Luego 42 huevos igualan a los $\frac{2}{9}$ que se han vendido, más $\frac{1}{6}$ del canasto:

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{12 + 9}{54} = \frac{21}{54} = \frac{7}{18}$$

Los $\frac{7}{18}$ del canasto valen 42 huevos, $\frac{1}{18}$ valdrá $\frac{42}{7}$,

y los $\frac{18}{18}$ valdrán $$\frac{42 \times 18}{7} = 108.$$

RESP.: 108 huevos.

VII. Sebastián tiene 45 años, y su hijo 21. ¿Dentro de cuánto será la edad del hijo los $\frac{4}{7}$ de la de su padre?

ANÁLISIS: El padre pasa a su hijo con 45 — 21 o 24 años, y siempre habrá la misma diferencia entre ambas edades. Pero cuando el hijo tenga los $\frac{4}{7}$ de la del padre, estos 24 años serán evidentemente los $\frac{3}{7}$ de la edad del padre; por lo tanto, si los $\frac{3}{7}$ de la edad del padre son 24 años, $\frac{1}{7}$ será los $\frac{24}{3}$, y los $\frac{7}{7}$

serán $$\frac{24 \times 7}{3} = 56.$$

RESP.: El tiempo pedido es de 56 — 45 = 11 años.

VIII. Dos acequias juntas llenan una cisterna en 10 horas; ¿cuánto tiempo necesitará la primera sola, si la segunda necesita 18 horas para llenarla?

ANÁLISIS: Ambas acequias en diez horas llenan una vez la cisterna; en 1 hora llenarán $\frac{1}{10}$ de la cisterna.

La 2º sola en 18 horas llena una vez la cisterna, en 1 hora llenará $\frac{1}{18}$.

La 1ª acequia, por consiguiente, llenará en 1 hora:

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{18} = \frac{18}{180} - \frac{10}{180} = \frac{8}{180} \text{ o } \frac{2}{45}.$$

Para llenar los $\frac{2}{45}$ de la cisterna, la 1ª acequia emplea 1 hora;

para llenar $\frac{1}{45}$, empleará $\frac{1}{2}$ de hora;

y para llenar los $\frac{45}{45}$, o toda la cisterna, empleará:

$$\frac{1 \times 45}{2} = 22 \text{ horas } \frac{1}{2}.$$

RESP: La 1ª acequia sola necesitará 22 horas $\frac{1}{2}$ para llenar la cisterna.

IX. Una zorra que da 2 saltos $\frac{1}{3}$ por segundo, tiene ya dados 30 saltos $\frac{3}{4}$ cuando se suelta en pos de ella un galgo que da 4 saltos $\frac{1}{2}$ por segundo ¿cuánto tardará este en alcanzar a aquélla?

ANÁLISIS: Averigüemos primero cuántos saltos más que la zorra da por segundo el galgo:

$$4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = \frac{9}{2} - \frac{7}{3} = \frac{27}{6} - \frac{14}{6} = \frac{13}{6}.$$

Ahora bien, el galgo debe ganar 30 pasos $\frac{3}{4}$, o $\frac{123}{4}$ de paso para alcanzar a la zorra. Por lo tanto, necesita tantos segundos como lo que gana en 1 segundo, o $\frac{13}{6}$, esté contenido en lo que ya tiene caminado la zorra, o sea $\frac{123}{4}$.

Luego tendremos:

$$\frac{123}{4} : \frac{13}{6} = \frac{123 \times 6}{4 \times 13} = 14\frac{5}{26}.$$

RESP.: El galgo tardará 14 segundos $\frac{5}{26}$ en alcanzar a la zorra

X. Dos compañías de segadores se presentan para cosechar un campo: la primera podría concluir el trabajo en 7 días y la segunda en 5. Si sólo se toma la $\frac{1}{3}$ parte de la primera compañía y los $\frac{3}{4}$ de la segunda, ¿en cuántos días se concluirá el trabajo?

ANÁLISIS: La 1ª compañía puede concluir el trabajo en 7 días; pero si sólo se toma la $\frac{1}{3}$ parte de ella necesitará $7 \times 3 = 21$ días.

La 2ª puede hacerlo en 5 días; si se tomara sólo $\frac{1}{4}$ parte, se tardaría $5 \times 4 = 20$ días; pero tomando los $\frac{3}{4}$, necesitará $\frac{20}{3}$ de día.

Ahora bien, si la fracción que se toma de la 1ª compañía tardara 21 días en cosechar el campo, claro está que en 1 día no cosecharía más que $\frac{1}{21}$ de él.

Del propio modo la 2ª, en 1 día cosecharía $\frac{3}{20}$ del campo.

Luego, las dos fracciones de las compañías en 1 día cosechan

$$\frac{1}{21} + \frac{3}{20} \text{ o } \frac{20}{420} + \frac{63}{420} = \frac{83}{420} \text{ del campo.}$$

Para cosechar los $\frac{83}{420}$, tardan 1 día; para cosechar $\frac{1}{120}$ tardarán $\frac{1}{83}$ de día.

y para cosechar los $\frac{420}{420}$, tardarán 420 veces más, esto es,

$$\frac{1 \times 420}{83} = 5 \text{ días} + \frac{5}{83} \text{ de día.}$$

Resp.: 5 días $+ \frac{5}{83}$ de día.

XI. Venancio tiene cierto número de manzanas, y las reparte del modo siguiente: da a Silverio la $\frac{1}{4}$ parte del número, más 1 manzana $\frac{1}{4}$; a Remigio, la $\frac{1}{5}$ parte del número total, más $\frac{2}{5}$ de manzana; a Heliodoro, los $\frac{2}{7}$ del número total, más 2 manzanas $\frac{3}{7}$, y le quedan 2 para él. Pregúntese cuántas manzanas tenía, y cuántas ha dado a cada uno de sus compañeros, sabiendo que no ha partido ninguna.

Análisis: Sumemos primero las partes del número total:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7} = \frac{103}{140}.$$

Sumemos además las manzanas y partes de manzana:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + 2 + \frac{3}{7} + 2 = 5 + \frac{151}{140} = \frac{851}{140} \text{ de manzana.}$$

A los $\frac{103}{140}$ del número total faltan $\frac{37}{140}$ para completarlo; luego los $\frac{37}{140}$ del número valen los $\frac{851}{140}$ de manzana; $\frac{1}{140}$ valdrá

$$\frac{851}{140 \times 37},$$

y los $\frac{140}{140}$, o todo el número, valdrán $\frac{851 \times 140}{140 \times 37} = 23$ manzanas.

A Silverio	le toca $\frac{23}{4} + 1\,\frac{1}{4}$,	sean 7	manzanas.
A Remigio	,, $\frac{23}{5} + \frac{2}{5}$,	,, 5	,,
A Heliodoro	,, $\frac{23 \times 2}{7} + 2\,\frac{3}{7}$	,, 9	,,
	Le quedan	2	,,
		Total = 23	manzanas.

XII. Un jugador ha perdido los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de Bs. 45; ¿a cuánto asciende su pérdida?

Análisis. — Busquemos los $\frac{4}{5}$ de Bs. 45.

Si los $\frac{5}{5}$ = Bs. 45, $\frac{1}{5}$ valdrá $\frac{45}{5}$, y los $\frac{4}{5}$, $\frac{45 \times 4}{5}$.

Esta última expresión equivale, según el sentido del problema, a $\frac{3}{3}$; $\frac{1}{3}$ valdrá $\frac{45 \times 4}{5 \times 3}$, y los $\frac{2}{3}$,

$$\frac{45 \times 4 \times 2}{5 \times 3} = \text{Bs. } 24.$$

Resp.: La pérdida del jugador asciende a Bs. 24.

EJERCICIOS ORALES

338. ¿Qué es quebrado?

339. ¿Cuál es el mayor de dos quebrados que tienen el mismo denominador, y por qué?

340. ¿Cuál de los dos quebrados 1/6 y 1/8 es mayor, y por qué?

341. ¿Cuál es el mayor de dos quebrados que tienen el mismo numerador; y por qué?

342. ¿Qué quebrado debe añadirse a 2/9 para igualarlo a 1?

343. ¿A qué quebrado le faltan 5/9 para que sea igual a la unidad?

344. Si se añade 2 al numerador de un quebrado, por ejemplo 3/7, ¿de cuánto se aumenta el quebrado? Lo mismo a la expresión 6/5.

345. Si se resta 5 del numerador de un quebrado, 7/9 por ejemplo, ¿de cuánto se disminuye el quebrado? Lo mismo de la expresión 11/5.

346. Si se añade 3 al denominador de un quebrado, 1/7 por ejemplo, ¿de cuánto se disminuye el quebrado?

347. Si se resta 5 del denominador de un quebrado, por ejemplo 1/11, ¿de cuánto se aumenta el quebrado?

348. ¿Qué alteración ocurre en una expresión fraccionaria, tal como 15/7: 1º si se añade 3 al denominador; 2º si se resta 3 del denominador?

349. ¿Qué viene a ser un quebrado cuando se añade un mismo número a sus dos términos? ¿Sucede lo mismo con un quebrado impropio?

350. ¿Qué viene a ser un quebrado, cuando se resta un mismo número de sus dos términos? ¿Sucede lo mismo con un quebrado impropio?

351. ¿Depende el valor de un quebrado del valor de sus términos?

352. ¿Qué viene a ser un quebrado cuando se multiplica el numerador por un número?

353. ¿Qué viene a ser un quebrado cuando se divide su numerador por un número?

354. ¿Qué viene a ser un quebrado común o un quebrado impropio: 1º si se multiplica su denominador por un número; 2º si se divide su denominador por un número?

355. ¿De cuántos modos puede multiplicarse un quebrado común o un quebrado impropio?

356. Multiplíquese por 2/3 el quebrado 5/18, operando con uno solo de sus términos.

357. Divídase por 3/4 el quebrado 12/17, operando con uno solo de sus términos.

358. ¿Se puede dividir el quebrado 8/15 por 2/5 sin multiplicar el primero por el segundo invertido? ¿Cómo hay que proceder, y por qué?

359. ¿Cómo se encontrarán todos los quebrados iguales a otro dado, por ejemplo 1/3?

EJERCICIOS ESCRITOS

Efectuar las sumas siguientes:

360. $\frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{4}{9}$

361. $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$

362. $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{2}{7}$

363. $\frac{3}{5} + \frac{5}{6} + \frac{4}{7} + \frac{2}{5} + \frac{2}{3}$

364. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + 6\frac{2}{3} + \frac{2}{9}$

365. $\frac{5}{6} + 9\frac{2}{5} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}$

366. $12\frac{1}{5} + 3\frac{1}{5} + 14\frac{7}{18}$

367. $2\frac{5}{8} + 9\frac{5}{9} + 10\frac{3}{10}$

368. $11\frac{3}{4} + 7\frac{1}{2} + 21\frac{1}{5} + 19\frac{3}{8}$

369. $26\frac{2}{5} + 8\frac{5}{24} + 15\frac{2}{15} + 10\frac{8}{9}$

370. $31\frac{1}{2} + 11\frac{1}{4} + 28\frac{5}{12} + 9\frac{9}{15}$

Efectuar las sustracciones siguientes:

371. $\frac{7}{9} - \frac{2}{5}$

372. $\frac{11}{12} - \frac{3}{7}$

373. $\frac{17}{18} - \frac{9}{10}$

374. $1\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$

375. $18\frac{4}{11} - 2\frac{8}{9}$

376. $7\frac{1}{5} - 6\frac{2}{3}$

377. $11\frac{8}{9} - 10\frac{3}{7}$

378. $7\frac{2}{7} - 1\frac{8}{11}$

379. $3\frac{17}{21} - 2\frac{19}{23}$

Efectuar las multiplicaciones siguientes:

380. $\frac{5}{6} \times 5$

381. $\frac{11}{13} \times 26$

382. $\frac{9}{21} \times 7$

383. $49 \times \frac{2}{7}$

384. $54 \times \frac{5}{9}$

385. $108 \times \frac{7}{12}$

386. $\frac{2}{7} \times \frac{6}{7}$	**390.** $\frac{5}{8} \times \frac{12}{25}$	**394.** $1\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{8}$
387. $\frac{3}{5} \times \frac{5}{24}$	**391.** $\frac{9}{14} \times \frac{1}{7}$	**395.** $7\frac{2}{9} \times 9\frac{5}{17}$
388. $\frac{1}{8} \times \frac{2}{3}$	**392.** $4\frac{2}{7} \times 3\frac{2}{5}$	**396.** $14\frac{5}{13} \times 12\frac{2}{7}$
389. $\frac{7}{8} \times \frac{15}{16}$	**393.** $6\frac{9}{10} \times 7\frac{3}{4}$	**397.** $2\frac{4}{15} \times 4\frac{2}{7}$

Efectuar las divisiones siguientes:

398. $\frac{5}{8} : \frac{3}{4}$	**403.** $6 : \frac{2}{5}$	**408.** $7\frac{1}{5} : 4\frac{1}{4}$
399. $\frac{7}{9} : \frac{1}{12}$	**404.** $5 : \frac{4}{9}$	**409.** $11\frac{2}{3} : 9\frac{1}{8}$
400. $\frac{14}{15} : \frac{7}{10}$	**405.** $4 : \frac{3}{11}$	**410.** $15\frac{5}{6} : 19\frac{10}{11}$
401. $\frac{15}{17} : \frac{5}{7}$	**406.** $12 : \frac{12}{23}$	**411.** $18\frac{4}{11} : 1\frac{3}{8}$
402. $\frac{9}{14} : \frac{3}{5}$	**407.** $9 : \frac{3}{2}$	**412.** $104\frac{1}{2} : 11\frac{4}{9}$

PROBLEMAS

(Los problemas precedidos de un asterisco deben resolverse mentalmente).

* **413.** ¿Cuál es el número cuyos 3/4 igualan a 33?

* **414.** ¿Cuál es el número cuyos 7/5 igualan a 42?

* **415.** ¿Cuál es el número que se disminuye de 12 al multiplicarlo por 3/5?

* **416.** ¿Cuál es el número que se aumenta de 16 al multiplicarlo por 5/3?

* **417.** ¿Cuál es el número que se aumenta de su 1/12 añadiéndole 6?

* **418.** ¿Cuál es el número que disminuye de su 1/7 restándole 6?

* **419.** ¿Cuál es el número que se disminuye de 35 dividiéndolo por 6?

* **420.** ¿Por qué quebrado hay que multiplicar 12 para obtener 6/7?

* **421.** ¿Por qué número hay que dividir 12 para obtener 3/4?

* **422.** ¿Por qué quebrado hay que dividir 9 para que resulte lo mismo que al añadir 3 a este número?

423. ¿Por qué número se multiplica 3/5 cuando se añade 5 a cada uno de sus términos?

424. ¿Por qué fracción se multiplica 11/11 cuando se resta 5 de cada uno de sus términos?

425. ¿Por qué fracción se divide 18/13 cuando se resta 9 de cada uno de sus términos?

426. ¿Por qué fracción se divide 5/7 cuando se añade 5 a cada uno de sus términos?

427. El lunes ha tejido una máquina la 1/4 parte de una pieza de tela, y el martes los 2/7; ¿qué parte de la pieza ha tejido en ambos días?

428. Leoncio ha realizado 2 ventas: la 1ª de 3 costales 2/5 de harina, la 2ª de 2 y 3/4; ¿cuánto ha vendido en todo?

429. Dos obreros han trabajado el uno 18 días y 1/2 y el otro 15 y 3/4; ¿cuántos días han trabajado entrambos?

430. Maximiliano ha vendido en una ocasión 34 metros 4/5 de merino, y 32 3/4 de tafetán; ¿cuántos metros de tela ha vendido en todo?

431. ¿Cuántas notas buenas tiene Wenceslao, si un tercio y un cuarto de las que le han dado igualan a 28?

432. Los 2/7 y 1/5 de una pieza de paño miden juntos 34 metros; ¿cuál es la longitud de la pieza?

433. Patricio da los 3/5 del dinero que tenía en su caja; recibe en seguida Bs. 2 674, y así su caudal primitivo queda aumentado de un tercio; ¿qué suma tenía al principio?

434. ¿Cuánto tiempo necesitan dos canales para llenar de agua un pozo, si el primero necesita 4 horas, y 6 el segundo?

435. Un trasatlántico camina 37 km. 1/3 en 1 hora 3/5. ¿Cuánto tiempo empleará para ir de El Havre a Nueva York, siendo la distancia de estas ciudades de 5 800 km.?

436. He recibido Bs. 42 después de haber gastado los 2/5 de lo que tenía, y tengo ahora Bs. 2 más que al principio. ¿Cuánto tenía entonces?

437. Preguntado un profesor por el número de sus alumnos, responde: Si el número de mis alumnos se aumentara de sus 2/3 y de 15, tendría 165. Hállese el número de sus alumnos.

438. Preguntado el pastor Eulogio por el número de sus ovejas, responde: Si agregara 1/3 a las que tengo y 12 más, llegarían a 132, decidme el número cabal de ellas.

439. Dos partidas de obreros se conciertan para construir un camino; la 1ª sola podría hacerlo en 8 días de 10 horas de trabajo, la 2ª, en 12 días de 9 horas; ¿cuánto tiempo emplearán ambas juntas, si trabajan sólo 8 horas diarias?

440. ¿Qué hora es cuando la parte transcurrida del día es igual a los 3/5 de lo que falta para acabarse?

441. Tres albañiles se proponen construir una obra: el 1º puede acabarla en 1/5 de día, el 2º en 1/4, y el 3º en 1/3; si se reúnen los tres, ¿en cuánto tiempo la concluirán, contándose de 10 horas el día de trabajo?

442. De un tonel de vino de 224 litros de capacidad se han sacado 180; ¿qué parte del tonel queda vaciada?

443. Los 2/5 y 1/3 de una estaca están plantados en tierra; ¿qué parte de la estaca se halla fuera?

444. ¿Cuánto debe agregarse a una longitud de 29 metros 2/5 para que resulten 64 metros 3/4?

445. Si de los 3/4 de una suma se restan Bs. 39, resultan los 3/7 de la misma, más Bs. 6. ¿Cuál es esta suma?

446. Para trabajar los 3/7 de una puerta, un carpintero necesita 12 horas; ¿cuánto tiempo gastará para hacer lo demás?

447. Nazario compra una quinta, y con Bs. 8 595 paga al contado los 3/7 de su valor; ¿cuál es el precio de esa quinta?

448. Después de haber vendido los 5/9 de una pieza de paño, queda 1/7 de ella más 26 metros; ¿cuál era la longitud de la pieza?

449. El asta de una bandera está pintada de diversos colores, del modo siguiente: 1/3 de negro, 1/4 de blanco, 1/5 de azul, y los 65 centímetros restantes de colorado; ¿cuál es la longitud del asta?

450. ¿Cuál es el número que tiene 14 de diferencia entre sus 3/4 y sus 2/5?

451. Aparicio hace 3 metros de una obra en 4 horas, y Virgilio 5 metros en 7 horas; ¿cuál de los dos trabaja más, y cuánto por hora?

452. A un pozo dan 3 canales; el 1° lo llena en 1 hora 2/5; el 2° en 2 horas 3/4; y el 3° en 4 horas 5/8. Un desaguadero lo vacía en 1 hora 2/3; ¿cuánto tardará el pozo en llenarse, si se abren a un tiempo los canales y el desaguadero?

453. A una cuba dan tres grifos: el primero la llenaría en 1 h. 1/4; el segundo, en 2 hs. 2/3; el tercero, en 4 hs. 4/7. Un desaguadero la vaciaría en 2 hs. 2/5. ¿Cuánto tardará la cuba en llenarse, abriendo los grifos y el desaguadero, si está llena hasta los 7/16?

454. Dos correos van a su encuentro; el primero camina 1/5 más que el segundo que corre 8 km. por hora. ¿A qué hora se encontrarán si han salido a las 6 de la mañana de dos ciudades distantes 44 km.?

455. Preguntada Tomasa por su edad, responde: Los 5/7 de mi edad menos 4 años dan lo que tenía yo hace 12 años; haced la cuenta, y lo sabréis.

456. Para hacer 1 vara de cierta obra, Maximino gasta 2 horas 3/4; ¿cuánto tiempo necesitará para hacer 12 varas 2/5?

457. ¿Cuál es la longitud de una pieza de tela, cuyas 3/4 partes dan un corte de 72 metros?

458. Vicente, que cuenta 12 años 1/2 tiene los 2/5 de la edad de Cristóbal; ¿cuántos años tiene este último?

459. ¿Cuáles son los 2/3 de los 3/4 de Bs. 20?

460. Cecilia encuentra 3 pobres huerfanitos y 5 pordioseros, y da a cada uno de los primeros 3/5 de bolívar, y a cada uno de los segundos 4/5 de bolívar, y le quedan a ella Bs. 4; ¿qué suma tenía al principio?

461. Una persona a quien se pregunta qué hora es, contesta: Son los 2/3 de los 3/4 de los 5/6 de 24 horas. Hállese la respuesta.

462. Un reloj que señala la hora exacta el domingo a mediodía, adelanta 2/3 de minuto por hora. ¿Qué hora será el martes cuando el reloj señale las 9 y 45 de la noche?

463. ¿Qué hora es cuando las dos manecillas de un reloj se hallan la una sobre la otra: 1° entre las 3 y las 4; 2° entre las 10 y las 11?

464. ¿Qué hora es cuando las dos manecillas se hallan en línea recta entre las 4 y las 5?

465. Un reloj atrasa 5 minutos 1/3 en 3 días 3/4; ¿cuánto atrasará en un día?

466. He comprado una mula por Bs. 260, y la revendo por los 7/5 de lo que me costó; ¿cuánto he ganado en el negocio?

467. Serían menester 1 800 metros de paño para vestir a un batallón, si el paño tuviera 6/4 de metro de ancho; pero sucede que siendo más angosto el paño, el vendedor da 2 000 metros; ¿cuál fué el ancho de este último?

468. Un obrero hace 2 metros 3/5 de una obra en 2 horas 1/4; ¿cuántos hará en 5 horas 1/2?

469. Una plaza que no tiene víveres más que para 8 días no puede ser socorrida sino al cabo de 12; ¿a cuánto debe reducirse la ración diaria de cada hombre?

470. Una diligencia recorre 15 kilómetros 1/2 en 1 hora, mientras que un coche no recorre más que 7 kilómetros 1/4; si salen ambos a un tiempo de un mismo lugar, con dirección a una ciudad distante 60 kilómetros 3/4, pregúntase cuántas horas antes que el coche llegará la diligencia.

471. Una bola cae de una altura de 80 centímetros sobre una mesa de mármol; cada vez que toca a la mesa, rebota y se eleva a una altura igual a la tercera parte de aquella de que cayó. ¿A qué altura se elevará la bola al tercer bote?

472. La fortuna de un comerciante se ha aumentado de la manera siguiente: durante el primer año, de la mitad; durante el segundo año, de la tercera parte de lo que era a principios de este segundo año. Siendo entonces Bs. 180 000, hállese la fortuna al principio del primer año.

473. Una suma se ha repartido entre 5 personas: la 1ª ha recibido 1/4 de la suma; la 2ª, los 3/8 de la parte de la 1ª; la 3ª, los 4/9 de lo que quedaba después de servir las dos primeras; la 4ª ha recibido los 3/10 de la suma de las tres primeras partes; la 5ª ha recibido los Bs. 1 670 que quedaban. ¿Cuál fué la suma repartida?

474. Un escolar reparte entre 3 de sus condiscípulos cierto número de avellanas. El primero recibe los 4/11 más 3 avellanas 8/11; el segundo, los 5/9 del resto, más 7/9 de avellanas; el tercero ha recibido las 25 avellanas que quedan. ¿Cuántas avellanas les tocaron a los dos primeros?

475. Dos porciones de terreno que miden juntas 8 200 m² de superficie se vendieron por Bs. 7 410. Los 5/6 de la primera igualan a los 7/8 de la segunda, y 5 m² de la primera valen tanto como 7 m² de la segunda. Hállese la superficie de cada una de las porciones de dicho terreno, y el precio del área de cada una de ellas.

CAPÍTULO III

FRACCIONES Y NÚMEROS DECIMALES

I. NUMERACIÓN Y PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS DECIMALES

240. Definición.—Llámase *quebrado* o *fracción decimal* una o varias partes de la unidad dividida en 10, 100, 1 000, etc., partes iguales;

o de otro modo:

Fracciones decimales son las que tienen por denominador una potencia de 10, o sea la unidad seguida de uno o varios ceros.

Así, $\frac{1}{10}$, $\frac{57}{100}$, $\frac{349}{1\,000}$ son quebrados decimales.

241. *Número decimal* es un número entero seguido de una fracción decimal, o también una fracción decimal aislada.

Por ejemplo, $15{,}325$ ó $15\frac{325}{1\,000}$

y $0{,}42$ ó $\frac{42}{100}$

242. Numeración de los números decimales.—Las partes contenidas 10 veces en la unidad se llaman *décimas*.

Las décimas partes de las décimas se llaman *centésimas*, porque están contenidas *cien* veces en la unidad.

Las décimas partes de las centésimas se denominan *milésimas*, porque están contenidas *mil* veces en la *unidad*.

A las partes decimales de la unidad se aplica la convención fundamental de la numeración escrita (**24**) a saber: *que toda cifra escrita a la derecha de otra representa unidades* 10 *veces menores que las que expresa ésta.* De donde resulta que la cifra escrita a la derecha de las unidades representa *décimas*, la cifra escrita a la derecha de las décimas representa *centésimas*, etc.

243. ESCRITURA DE UN NÚMERO DECIMAL.—Para representar un número decimal, se escribe primero la parte entera, si la hay, seguida de una coma. Cuando no hubiere parte entera, se la reemplaza con un cero, seguido de la coma. Después de la coma se escribe de izquierda a derecha las decimales, cuidando de colocar cada cifra en el lugar correspondiente al orden que representa, y si algún orden decimal carece de unidades se escribe un cero en el lugar correspondiente a estas unidades...

Así la expresión *catorce unidades novecientas catorce diezmilésimas*, se escribirá: 14,0914, poniendo un cero para reemplazar las décimas que faltan.

Así también la fracción $\frac{349}{1000}$ que es igual a $\frac{300}{1000} + \frac{40}{1000} + \frac{9}{1000}$ ó $\frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{9}{1000}$, se escribirá poniendo un cero en el lugar de las unidades, y una coma: 0,349.

244. LECTURA DE UN NÚMERO DECIMAL. Para leer un número decimal, se enuncia su parte entera, y en seguida la parte decimal como si fuese entera, expresando el orden decimal que la última cifra de la derecha representa.

Así, 0,35, 6,465, 142,3 se leerán:
cero unidades 35 *centésimas*, o sólo 35 *centésimas*.
6 unidades 465 *milésimas*.
142 unidades 3 *décimas*.

Cuando hay un gran número de cifras decimales, es preferible dividirlas en grupos de a tres, de izquierda a derecha, los cuales se leen separadamente.

Por ejemplo: 3,141 592 65 se lee: 3 unidades 141 *milésimas* 592 *millonésimas* 65 *cienmillonésimas*.

245 Reducción de un número decimal a quebrado común.—Sean los números decimales 40,5, 6,07, 0,375.

Estos números pueden escribirse:

$$40{,}5 = \frac{405}{10} = 40 + \frac{5}{10} \text{ ó } 40\,\frac{5}{10}\,;$$

$$6{,}07 = \frac{607}{100} = 6 + \frac{7}{100} \text{ ó } 6\,\frac{7}{100}\,;$$

$$0{,}375 = \frac{375}{1\,000}\,.$$

REGLA.—Para reducir un número decimal a quebrado común, se pone por numerador la cantidad dada, sin hacer caso de la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas son las cifras decimales.

246. Propiedades de los números decimales.—1º Un número decimal no se altera si se le agregan o quitan ceros a la derecha.

Por ejemplo, los números 6,45, 6,450, 6,4500 son iguales, pues cada uno se compone de 6 unidades, 4 décimas y 5 centésimas.

En los dos últimos, los ceros indican sólo que hay *cero milésimas, cero diezmilésimas.*

De donde se infiere que, sin alterar el valor de los números decimales, se los puede siempre representar con el mismo número de decimales.

Así 672, 25,7, 4,1911, se pueden escribir 6,7200, 25,7000, 4,1911, teniendo así el mismo número de cifras decimales.

247. 2º Para multiplicar un número decimal por 10, 100, 1000, etc., basta correr la coma uno, dos, tres, etc., lugares, hacia la derecha

Sea el número 2,573; corramos la coma, por ejemplo, dos lugares hacia la derecha, y demostremos que el número resultante 275,3 es 100 veces mayor que 2,573.

En efecto, los valores absolutos de las cifras son iguales en ambos números; pero el valor relativo de cada cifra se ha hecho *cien veces mayor*, luego el número entero se ha hecho también 100 veces mayor.

Del propio modo se demostraría que para dividir *un número decimal por* 10, 100, 1000, *etc., basta correr la coma* uno, dos, tres, etc., *lugares, hacia la izquierda.*

NOTA: Si el número que se ha de multiplicar o dividir no tuviere bastantes cifras, se agrega un número suficiente de ceros a la derecha o a la izquierda.

Así, $37{,}23 \times 1\,000 = 37\,230$

$$2{,}37 : 1\,000 = \frac{237}{100} : 1\,000, \text{ o bien } \frac{237}{100\,000} = 0{,}00237.$$

II. OPERACIONES CON LOS NÚMEROS DECIMALES

ADICIÓN

248. REGLA.—Para sumar números decimales, se colocan los sumandos unos debajo de otros, de modo que las unidades vayan debajo de las unidades, las décimas debajo de las décimas, las centésimas debajo de las centésimas, etc., y luego se suman como los números enteros, teniendo cuidado de poner la coma en el total a la derecha de las unidades.

EJEMPLO: Súmense las cantidades siguientes:

$$\begin{array}{rr} & 4{,}037 \\ & 1\,709{,}34 \\ & 40\,004{,}003\,079 \\ \hline \textit{Total:} & 41\,717{,}380\,079 \end{array}$$

SUSTRACCIÓN

249. REGLA.—Para restar números decimales, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que las unidades vayan debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc., las décimas debajo de las décimas, las centésimas debajo de las centésimas, etc.

Si el minuendo no tuviere igual número de cifras decimales que el sustraendo, se le agregan a la derecha tantos ceros como fueren menester, y se ejecuta la operación como en los enteros.

En la diferencia se pone la coma debajo de la de los dos números.

EJEMPLO: De 3 456,7 réstese 2 986,354.

$$\begin{array}{rr} & 3\,456{,}700 \\ & 2\,986{,}354 \\ \hline \textit{Diferencia:} & 470{,}346 \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN

250. REGLA.—Para multiplicar números decimales, se busca el producto de ellos como si fuesen números enteros, sin hacer caso de la coma; pero teniendo cuidado de separar a la derecha del producto tantas cifras decimales como hay en ambos factores juntos.

EJEMPLO: Multiplicar 32,25 por 13,47.

Tenemos:
$$32{,}25 = \frac{3\,225}{100}$$

$$13{,}47 = \frac{1\,347}{100}$$

Multiplicando miembro por miembro, resulta:

$$32{,}25 \times 13{,}47 = \frac{3\,225}{100} \times \frac{1\,347}{100} = \frac{3\,225 \times 1\,347}{10\,000}$$

Por donde se ve que, después de haber multiplicado 3 225 por 1 347, habrá que separar, con una coma, 4 guarismos a la derecha del producto. Lo que dará 4 cifras decimales, esto es, tantas como hay en ambos factores juntos.

251. NOTA PARA EL CALCULO MENTAL: 1° *Para multiplicar por* 0,50, *se toma la mitad del multiplicando*;

$$24 \times 0{,}50 = \frac{24}{2} = 12.$$

2° *Para multiplicar por* 0,05, *se divide el multiplicando*

$$24 \times 0{,}05 = \frac{24}{20} = 1{,}2.$$

3º *Para multiplicar por 1,5, se añade al multiplicando su mitad:*

$$24 \times 1,5 = 24 + 12 = 36.$$

4º *Para multiplicar por 0,25, se divide el multiplicando por 4:*

$$24 \times 0,25 = \frac{24}{4} = 6.$$

5º *Para multiplicar por 0,75, se toman los $^3/_4$ del multiplicando, o se resta de éste su cuarta parte.*

$$24 \times 0,75 = 24 \times \frac{3}{4} = 18.$$

$$24 \times 0,75 = 24 - \frac{24}{4} = 18.$$

DIVISIÓN

252. COCIENTE CON UNA UNIDAD DE APROXIMACIÓN.—1º El divisor es entero. — El cociente, con una unidad de aproximación de un número decimal por un número entero, es igual cociente, con una unidad de aproximación, de la parte entera del número decimal por el divisor.

Divídase 6 256,85 por 215.

Se dispone la operación como si fuesen enteros los números. El cociente en menos de una unidad es 29, y el residuo 21,85.

$$\begin{array}{r|l} 6\,256,85 & 215 \\ \cline{2-2} 1\,956 & 29 \\ 21,85 & \end{array}$$

253. 2º EL DIVIDENDO Y EL DIVISOR SON DECIMALES.—Para encontrar el cociente, en menos de una unidad por defecto, se multiplican dividendo y divisor por una potencia de 10 suficiente para hacer entero el divisor y el caso, queda reducido a una división de enteros, o a la división de un número decimal por un número entero.

Para obtener el residuo, se corre la coma hacia la izquierda en el residuo hallado, tantos lugares como se había corrido a la derecha en el dividendo.

EJEMPLO: Divídase 68 756,584 por 3 245,56.

68 756 58,4	324 556
3 845 38	21
599,824	

Hemos multiplicado por 100 dividendo y divisor.

Para obtener el *residuo* se corre la coma dos lugares a la izquierda.

El *cociente* en menos de una unidad es 21, y el *residuo* 599,824.

254. COCIENTE EN MENOS DE 0,1 0,01, 0,001.—Para calcular el cociente en menos de 0,1, 0,01, 0,001, etc. por defecto, de dos números decimales, se hace entero el divisor y se parte el dividendo por el divisor, sacando tantas cifras decimales cuantas indique la aproximación que se pida.

EJEMPLO: Calcúlese el cociente de 7,1756 por 2,54 en menos de 0,001.

717,56	254
209 5	2,825
6 36	
1 280	
0,010	

255. NOTA PARA EL CALCULO MENTAL: 1° *Para dividir por* 0,50 *se multiplica el dividendo por* 2:

$$24 : 0{,}5 = 24 \times 2 = 48.$$

2° *Para dividir por* 0,05, *se multiplica el dividendo por* 20.

$$24 : 0{,}05 = 24 \times 20 = 480.$$

3° *Para dividir por* 1,5, *se toma los* 2/3 *del dividendo*:

$$24 : 1{,}5 = 24 \times \frac{2}{3} = 16.$$

4° *Para dividir por* 0,25, *se multiplica el dividendo por* 4:

$$24 : 0{,}25 = 24 \times 4 = 96.$$

5º *Para dividir por 0,75, se toman los 4/3 del dividendo, o se añade a éste su tercio.*

$$24 : 0{,}75 = 24 \times \frac{4}{3} = 32.$$

$$24 : 0{,}75 = 24 + \frac{24}{3} = 32.$$

III. REDUCCIÓN DE QUEBRADOS COMUNES A FRACCIONES DECIMALES

256. Definición.—*Reducir un quebrado común a fracción decimal* es buscar una fracción decimal equivalente al quebrado común, o que difiera de él en menos de una unidad de un orden decimal dado.

EJEMPLO: Reducir $\frac{7}{32}$ a fracción decimal.

Como todo quebrado común es el cociente indicado de la división de su numerador por su denominador (**205**), para encontrar la fracción decimal pedida hay que dividir 7 por 32.

$$\begin{array}{r|l} 70 & 32 \\ \cline{2-2} 60 & 0{,}218 \\ 280 & \\ 24 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & 32 \\ \cline{2-2} 60 & 0{,}21875 \\ 280 & \\ 240 & \\ 160 & \\ 0 & \end{array}$$

Con 3 cifras decimales, tengo el cociente en menos de un *milésimo*; con 5 cifras, resulta el cociente *exacto*.

Sean también los quebrados $\frac{16}{125}$ y $\frac{7}{22}$.

$$\begin{array}{r|l} 160 & 125 \\ \cline{2-2} 350 & 0{,}128 \\ 1000 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 70 & 22 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}31818\ldots \\ 180 & \\ 40 & \\ 18 & \\ \vdots & \end{array}$$

257. REGLA.—Para reducir un quebrado común a fracción decimal, se divide el numerador por el denominador; así resulta una fracción decimal equivalente al quebrado común (cuando el cociente es exacto); o que difiere de él en menos de un décimo, de un centésimo, de un milésimo, etc. (cuando no es exacto el cociente).

258. NOTA: De lo que antecede se deduce que, al reducir un quebrado común a decimal, pueden resultar fracciones con un número limitado de cifras; y otras en que el número de cifras es ilimitado habiendo un grupo de ellas que se repite periódica e indefinidamente.

Las primeras se llaman fracciones *limitadas* o *exactas*, y las segundas, fracciones *periódicas*.

259. CONDICIÓN PARA QUE UN QUEBRADO COMÚN SE CONVIERTA EN FRACCIÓN DECIMAL LIMITADA.—Para que un quebrado común irreducible pueda convertirse exactamente en fracción decimal, es necesario y suficiente que el denominador no contenga más factores primos que 2 y 5.

1° *Esta condición es necesaria.*—Sea el quebrado común irreducible $\frac{7}{20}$ que suponemos puede reducirse exactamente á fracción decimal, y sea $\frac{a}{10^n}$ la fracción decimal equivalente; tendremos:

$$\frac{7}{20} = \frac{a}{10^n}.$$

Ahora bien, los términos de la fracción $\frac{a}{10^n}$ son equimúltiplos (**216**) de los términos del quebrado $\frac{7}{20}$; además, siendo el denominador 10^n una potencia de 10, no contiene más que los factores 2 y 5. Luego el denominador 20, su divisor, no puede contener otros factores que 2 y 5.

2° *Esta condición es suficiente.*— Sea el quebrado $\frac{7}{20}$ cuyo denominador no contiene más que los factores 2 y 5; se lo podemos convertir en fracción decimal exacta.

En efecto, tenemos $\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2 \times 5}$; multiplicando por 5 ambos términos de este quebrado, resulta:

$$\frac{7 \times 5}{2^2 \times 5 \times 5} = \frac{35}{2^2 \times 5^2} = \frac{35}{10^2} = 0{,}35.$$

Asimismo, $\frac{9}{16} = \frac{9}{2^4} = \frac{a}{10^4}$.

En efecto, multiplicando por 5^4 o 625 los dos términos del quebrado $\frac{9}{16}$, tendremos:

$$\frac{9 \times 625}{16 \times 625} = \frac{9 \times 625}{2^4 \times 5^4} = \frac{5\,625}{10^4} = 0{,}5625.$$

260. Nota.—De lo desmostrado se deduce: **1° que el exponente de 10 es igual al mayor de los exponentes de los factores**

2 o 5 del denominador del quebrado irreducible; 2º que el número de cifras decimales es también igual al mayor de los exponentes de los factores 2 o 5.

IV. FRACCIONES PERIÓDICAS

261. Definición.—Llámanse *fracciones periódicas* las fracciones decimales en las cuales las mismas cifras se reproducen indefinidamente y en el mismo orden.

Período es la serie de cifras que se reproducen.

262. Las fracciones periódicas se dividen en *puras* y *mixtas*.

La fracción periódica es pura cuando el período principia en las décimas, como en

0,356 356 356...

La fracción periódica es mixta cuando el período no principia en las décimas, como en

0,37 456 456 456...

37 es la *parte irregular o no periódica.*

263. TEOREMA.—Un quebrado común reducido a decimal da origen a una fracción periódica cuando no produce una fracción decimal exacta.

Sea el quebrado $\frac{4}{7}$.

Dividiendo el numerador por el denominador, los residuos han de ser siempre menores que el divisor, y por consiguiente, estos residuos diferentes, a lo más, son 6.

$$
\begin{array}{l|l}
40 & 7 \\ \hline
\;50 & 0{,}571\ 428\ 571\ 428\ldots \\
\;\;10 & \\
\;\;\;30 & \\
\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;4 & \\
\;\;\;\;\;\;\cdot & \\
\;\;\;\;\;\;\cdot & \\
\;\;\;\;\;\;\cdot &
\end{array}
$$

Habiendo aparecido todos estos residuos, claro está que en la divisón parcial siguiente aparecerá uno de los anteriores, y entonces los cocientes y los residuos se reproducirán en el mismo orden, e indefinidamente.

El período tiene 6 cifras; luego:

$$\frac{4}{7} = 0{,}571\ 428\ 571\ 428\ldots$$

Para el quebrado $\frac{7}{22}$ se encuentra, después de 3 divisiones parciales, un residuo ya obtenido.

$$\begin{array}{r|l} 70 & 22 \\ \cline{2-2} 40 & 0{,}3\ 18\ 18\ 18\ldots \\ 180 & \\ 4 & \end{array}$$

El período tiene 2 cifras;

luego $\frac{7}{22} = 0{,}3\ 18\ 18\ 18\ldots$

Si se encuentra un residuo igual al dividendo primitivo, el período es *simple* (como en la fracción $\frac{4}{7}$) ; y si es igual a un residuo ya obtenido, el período es *mixto* (como en la fracción $\frac{7}{22}$).

264. NOTAS: El número de cifras del período es, a lo sumo, igual al número de unidades que tenga el divisor, menos una.

I. Los quebrados $\frac{4}{7}$ y $\frac{7}{22}$ se llaman *quebrados generadores* de las fracciones periódicas.

II. Cuanto mayor es el número de períodos que se tomen, tanto más la fracción decimal se acerca al valor del quebrado generador (**256**); luego el quebrado generador es el *límite* al cual se acerca la fracción decimal periódica cuando el número de períodos aumenta indefinidamente.

REDUCCIÓN DE FRACCIONES PERIÓDICAS A QUEBRADOS COMUNES

265. I. **Hallar el quebrado generador de una fracción periódica pura.**—Sea la fracción periódica pura

$$0{,}375\ 375\ 375\ 375\ldots$$

Designemos por a el conjunto de los 4 primeros períodos:

$$a = 0{,}375\ 375\ 375\ 375 \qquad (1)$$

Multipliquemos por 1 000 ambos miembros, para que resulte entero el primer período:

$$1\ 000\ a = 375{,}375\ 375\ 375 \qquad (2)$$

Como en esta igualdad no quedan más que tres períodos en la parte decimal, añadamos el cuarto período a ambos miembros:

$$1\ 000\ a + \frac{375}{1\ 000^4} = 375{,}375\ 375\ 375\ 375 \qquad (3)$$

Restemos ordenadamente la igualdad (1) de la igualdad (3):

$$999\ a + \frac{375}{1\ 000^4} = 375$$

Si en vez de tomar 4 períodos se toman 10, 20, 100, etcétera, el valor del último período que es igual sucesivamente a

$$\frac{375}{1\,000^{10}},\ \frac{375}{1\,000^{20}},\ \frac{375}{1\,000^{100}},\ \text{etc.}$$

disminuye indefinidamente y se acerca a cero, mientras *a* se acerca al valor F de la fracción generatriz; por lo tanto,

$$999\,F = 375 \quad \text{o} \quad F = \frac{375}{999}.$$

Como *comprobación* se puede simplificar el quebrado $\frac{375}{999}$, y reducirlo a decimales; resulta:

$$\frac{375}{999} = \frac{125}{333} = 0{,}375\ 375\ 375\ldots$$

266. REGLA.—El quebrado generador de una fracción decimal periódica pura tiene por numerador el período, y por denominador un número compuesto de tantos nueves como cifras tiene el período.

267. II. **Hallar el quebrado generador de una fracción periódica mixta.**

Sea la fracción 0,36 981 981 981 . . .

Llamando *a* al conjunto de la parte no periódica y de los 4 primeros períodos, se tendrá:

$$a = 0{,}36\ 981\ 981\ 981\ 981$$

Multiplicando esta igualdad sucesivamente por 100 y por 100 000, de modo que la coma quede corrida, primero más allá de la parte no periódica, y después más allá del primer período, resultarán las dos igualdades:

$$100a = 36{,}981\ 981\ 981\ 981 \qquad (1)$$

$$100\,000\,a = 36\,981{,}981\ 981\ 981 \qquad (2)$$

Añadiendo el cuarto período a los dos miembros de la igualdad (2), resulta:

$$100\,000\,a + \frac{981}{1\,000^4} = 36\,981,\,981\,981\,981\,981 \qquad (3)$$

Restando ordenadamente la igualdad (1) de la igualdad (3), y razonando como en el problema anterior, tendremos:

$$99\,900\,a + \frac{981}{1\,000^4} = 36\,981 - 36$$

o sea $$99\,900\,\mathrm{F} = 36\,981 - 36$$

y $$\mathrm{F} = \frac{36\,981 - 36}{99\,900}$$

268. REGLA.—El quebrado generador de una fracción periódica mixta tiene por numerador el número formado por la parte no periódica, seguida del primer período, menos la parte no periódica; y por denominador un número formado de tantos nueves como cifras tiene el período, seguidos de tantos ceros cuantas cifras tiene la parte no periódica.

269. TEOREMA.—Todo quebrado común irreducible da origen a una fracción periódica pura cuando su denominador no es divisible por los factores primos 2 y 5.

Sea el quebrado $\frac{a}{b} = 0{,}375\,375\,375\ldots$; tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{375}{999} \qquad (\mathbf{266})$$

El denominador 999 no es divisible por el factor 2 ni por el factor 5, y como b ha de dividir a 999 (**216**), tampoco será b divisible por los factores 2 y 5.

270. TEOREMA.—Todo quebrado irreducible da origen a una fracción periódica mixta cuando su denominador, además

de ser divisible por 2, por 5, o por 2 y 5 a la vez, tiene algún otro divisor primo.

La parte no periódica tendrá tantas cifras como unidades tenga el mayor exponente de 2 o 5 en el denominador.

Sea $\frac{a}{b}$ el quebrado irreducible que da origen a la fracción 0,36 981 981 . . .; tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{36\,981 - 36}{99\,900} = \frac{36\,981 - 36}{999 \times 100} = \frac{36\,981 - 36}{999 \times 2^2 \times 5^2}$$

Notemos primero que efectuando la resta indicada en el numerador de este último quebrado, el número que resulte no terminará en cero, porque se necesitaría que la última cifra de la parte no periódica fuese igual a la última cifra del período, y entonces el período hubiera debido comenzar en aquella cifra. Luego dicho numerador no es divisible por 10, o lo que es lo mismo, por 2 y 5 a la vez.

Simplificando este quebrado cuanto sea posible, siempre quedará, en el denominador del quebrado irreducible que resulte, el factor 2 o el 5 (o los dos en el caso de que el numerador no sea divisible por 2 ni 5), con el exponente 2, esto es, con *un exponente que tiene tantas unidades como cifras tiene la parte no periódica.*

NOTA: 100 descompuesto en sus factores primos es igual a $2^2 \times 5^2$. *En general todo número formado por la unidad seguida de ceros, descompuesto en sus factores primos se compone del factor* 2 *y del factor* 5, *elevados a una potencia que tiene tantas unidades como ceros siguen a la unidad.*

REDUCCIÓN DE UNA FRACCIÓN DECIMAL LIMITADA A QUEBRADO COMUN

Sea la fracción decimal limitada 0,56.

El valor de este quebrado es 56 centésimas; se ha dividido la unidad en 100 partes y se han tomado 56 de ellas. Luego se escribirá (**193**):

$$0{,}56 = \frac{56}{100} \text{ o } \frac{14}{25}$$

271. REGLA.—Para reducir una fracción decimal limitada a quebrado común, se prescinde de la coma, y se ponen todas las cifras como numerador; y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tenga la parte decimal.

Así,
$$0{,}485 = \frac{485}{1\,000} \text{ o } \frac{97}{200}$$

$$0{,}0019 = \frac{19}{10\,000},$$

$$6{,}25 = \frac{625}{100} \text{ o } \frac{25}{4}.$$

EJERCICIOS ORALES

476. ¿Qué es fracción decimal?

477. ¿Cómo se reducen a decimales los quebrados comunes?

478. ¿Todos los quebrados comunes son exactamente reducibles a quebrados decimales?

479. ¿Cómo se reducen a quebrados comunes las fracciones decimales?

480. ¿Todos los quebrados decimales son exactamente reducibles a quebrados ordinarios?

481. ¿Cómo se llama la fracción decimal que no es limitada?

482. ¿Cuándo se reduce a fracción decimal limitada un quebrado ordinario?

483. ¿Cuándo, de un quebrado ordinario irreducible, resulta una fracción periódica pura?

484. ¿Puede reducirse el quebrado 2/5 a quebrado decimal limitado?

485. ¿El quebrado 18/30 es reducible exactamente a quebrado decimal?

486. Pregúntase lo mismo de los quebrados 3/5, 1/7, 5/6, 9/12, 5/8, 41/64, 3/14, y explíquese el porqué. Si son irreducibles, ¿a qué clase de quebrado periódico dan origen?

487. ¿Cuántas cifras tendrá después de la coma el quebrado decimal equivalente a 12/25?

488. Pregúntase lo mismo de los quebrados 5/8, 3/40, 17/200 y 15/96.

489. ¿Cuántas cifras tendrá la parte no periódica del quebrado decimal equivalente a 5/24, y por qué?

490. Pregúntase lo mismó de los quebrados 3/14, 2/15, 2/28, 4/55, 7/75.

EJERCICIOS ESCRITOS

Reducir a decimales los quebrados siguientes:

491.	$\frac{1}{5}$	**495.**	$\frac{2}{3}$	**499.**	$\frac{5}{6}$	**503.**	$\frac{7}{64}$
492.	$\frac{1}{8}$	**496.**	$\frac{1}{7}$	**500.**	$\frac{4}{13}$	**504.**	$\frac{7}{60}$
493.	$\frac{12}{15}$	**497.**	$\frac{1}{9}$	**501.**	$\frac{4}{45}$	**505.**	$\frac{6}{25}$
494.	$\frac{7}{8}$	**498.**	$\frac{10}{11}$	**502.**	$\frac{11}{24}$	**506.**	$\frac{6}{75}$

Búsquese la fracción generatriz de las fracciones periódicas siguientes:

507.	0,3333....	**515.**	0,254 33333....
508.	0,6666....	**516.**	0,01 6666....
509.	0,7777....	**517.**	0,32 548 548....
510.	0,23 23 23....	**518**	0,345678 3333....
511.	0,45 45 45....	**519.**	0,000 432 432 432....
512.	0,91 91 91....	**520.**	0,198 198 198 198....
513.	0,108 108 108....	**521.**	22,45 45 45 45....
514.	0,18 18 18....	**522.**	254,394 75 75 75....

Escribir las fracciones decimales siguientes en forma de fracciones ordinarias reducidas a su más simple expresión:

523.	0,45	**527.**	0,24	**531.**	0,064
524.	0,185	**528.**	0,125	**532.**	0,195
525.	0,5	**529.**	0,0625	**533.**	0,4532
526.	0,25	**530.**	0,3244	**534.**	0,625

Hállese la suma de las cantidades siguientes:

535. $\frac{2}{3} + 0{,}448$

536. $\frac{4}{7} + 0{,}91$

537. $2{,}36 + 5\,\frac{1}{9}$

538. $2\,\frac{4}{7} + 8{,}45 + 0{,}625$

539. $5\,\frac{3}{4} + 2\,\frac{7}{8} + 9{,}75$

540. $2{,}66 + 1\,\frac{3}{7} + 8\,\frac{4}{9}$

Hállese la diferencia de las cantidades siguientes:

541. $\frac{5}{7} - 0{,}225$

542. $\frac{11}{12} - 0{,}495$

543. $4{,}28 - \frac{2}{9}$

544. $5{,}016 - 1\,\frac{3}{7}$

Efectuar las multiplicaciones siguientes:

545. $\frac{5}{7} \times 0{,}156$

546. $1\,\frac{3}{7} \times 3{,}458$

547. $0{,}572 \times 5\,\frac{2}{11}$

548. $8{,}35 \times 4\,\frac{5}{6}$

549. $0{,}45\ 45\ 45\ 45.... \times 3{,}276\ 666....$

Calcular en menos de un milésimo el cociente de las divisiones siguientes:

550. $\frac{2}{3} : 0{,}16$

551. $1\frac{5}{7} : 0{,}96$

552. $1{,}96 : 1\frac{6}{7}$

553. $3{,}45 : 5\frac{5}{11}$

554. $2\ 42\ 54\ 54\ 54.... : 0{,}27\ 27\ 27\ 27....$

555. Demostrar, sin reducirlas a un mismo denominador, que las fracciones siguientes son equivalentes:

1° $\frac{5}{9}$ $\frac{55}{99}$ $\frac{555}{999}$ $\frac{5\,555}{9\,999}$

3° $\frac{160}{999}$ $\frac{160\,160}{999\,999}$

2° $\frac{8}{37}$ $\frac{808}{3\,737}$ $\frac{80\,808}{373\,737}$

4° $\frac{3}{11}$ $\frac{303}{1\,111}$ $\frac{30\,303}{111\,111}$

CÁLCULO MENTAL

556. 1° A Bs. 0,50 un libro, ¿cuánto valen 24 libros? ¿15 libros? ¿127 libros? ¿273 libros?

A Bs. 0,25 un espejo, ¿cuánto importan 12 espejos? ¿70 espejos? ¿125 espejos? ¿239 espejos?

A Bs. 4,50 una caja de cigarros, ¿cuánto valen 10 cajas? ¿75 cajas? ¿154 cajas? ¿327 cajas?

A Bs. 0,75 un folleto, ¿cuánto importan 10 folletos? ¿12 folletos? ¿56 folletos? ¿75 folletos? ¿152 folletos?

2° ¿Cuántas horas ha trabajado un obrero que recibe Bs. 41, ganando Bs. 0,50 por hora?

Dividir por 0,05 los números siguientes: 12, 35, 76, 137, 328.

Dividir por 0,25 los números siguientes: 10, 25, 71, 127, 348.

¿Cuántas botellas de 0 lit. 75 se podrán llenar con un barril de 36 lit.? ¿de 75 lit.? ¿de 228 lit.?

PROBLEMAS

557. Un encuadernador ha comprado 5 docenas de badanas, a Bs. 40 docena, y 2 docenas de cabritillas; la docena de esta última especie de piel importa el triple de la primera, menos Bs. 0,80; ¿qué cantidad de dinero debe gastar el encuadernador?

558. Un taller que trabaja 10 horas por día, tiene obra para 16 días; si se quiere que el trabajo dure 20 días, ¿qué parte deberá disminuirse del trabajo diario?

559. Andrés compra 12 volúmenes a Bs. 2,60 cada uno, y recibe 13 en lugar de 12 ¿a cuánto le sale el volumen?

560. ¿Cuál es la longitud de una pieza de paño que ha costado Bs. 877,50, sabiendo que al revender 25 metros por Bs. 437,50 se han ganado Bs. 2,50 por metro?

561. Sebastián promete dar a los pobres Bs. 0,25 cada vez que gane Bs. 9,25; ¿cuánto le queda a él, cuando su limosna asciende a Bs. 5,25?

562. Cada vez que un joven gana Bs. 9,25, su padre le da cierta suma; ¿cuál es esta suma, sabiendo que cuando el don del padre es de Bs. 12,23 el hijo tiene por todo Bs. 77?

563. Una bujía de 0m23 de largo se disminuye de 0m0011 por minuto, al estar encendida; ¿cuántas horas tardará en acabarse?

564. Una pieza de paño se vendería en Bs. 431,20 si tuviera 1/6 más de largo; dígase el largo que tiene la pieza si el metro vale Bs. 15,40.

565. Un pedazo de carne de vaca de 6 kg. se compró a Bs. 1,50 el kg.; siendo los huesos 1/7 del peso total, dígase el precio del kilogramo de carne.

566. Un obrero ha trabajado 4 días 2/3, más 8 días 3/4, más 3 días 5/9 y 7 días 7/12, a razón de Bs. 3,25 por día. ¿Qué suma ha recibido ese obrero?

567. Leoncio ha comprado género a Bs. 63 los 9 metros y lo vende a Bs. 52,50 los 7 metros; siendo su beneficio de Bs. 234, hállese el número de metros comprados.

568. En 1 kilogramo de agua de mar hay 0 kg. 035 de sal. ¿Cuánta sal hay en 1 500 litros de agua de mar, si el litro de dicha agua pesa 1 kg. 026?

569. Un especiero quiere comprar azúcar y café en cantidades iguales por Bs. 391. ¿Cuántos kilogramos tendrá de cada clase, si el azúcar vale Bs. 1,25 y el café Bs. 0,50 el kilogramo?

570. Pablo ha comprado 6 barriles de aceite, cada uno de 1 hectolit. 25, y por Bs. 180 los 100 kilogramos. Si el litro de aceite pesa 915 gramos, dígase el precio de compra. ¿A cómo tendrá que vender el kilogramo para ganar Bs. 274,50 al vender todo este aceite?

571. Cirilo dice a uno de sus condiscípulos: "Si yo comprara 40 chirimoyas, me faltarían Bs. 0,15; pero si no comprara más qué 15, me sobrarían Bs. 0,35; dime: 1° cuánto importa cada fruta, y 2° qué suma tengo en mi poder."

572. Una diligencia camina 16 km. 50 por hora, mientras que un coche no camina más que 7 km. 25. Ambos salen a la vez de una misma ciudad para ir a otra, distante 60 km. 75 de la 1ª; pregúntase: 1° cuántas horas antes que el coche llegará la diligencia; 2° a qué distancia de ésta se hallará el coche 2 h. 45′ después de que se pusieron en marcha.

573. Jerónimo compra cierto número de manzanas, la mitad a 4 por 5 Bs., y la otra mitad a 3 por 5 Bs. Revende los 2/3 a 2 por 5 Bs., y el resto a 4 por 11 Bs. ¿Cuánto habrá ganado al vender las manzanas por Bs. 155?

574. Leoncio compra manzanas, la mitad del número a 5 por 6 Bs., y la otra mitad a 6 por 7 Bs. Revende los 3/5 del número a 3 por 5 Bs., y lo demás a 4 por 7 Bs. ¿Cuántas manzanas habrá vendido cuando gane Bs. 93?

POTENCIAS Y RAICES

CAPÍTULO I

CUADRADO Y RAÍZ CUADRADA

§ I. DEFINICIONES Y TEOREMAS

272. Cuadrado de un número.—Llámase *cuadrado* de un número el producto de este número por sí mismo.

Así, el cuadrado de 4 es 4×4 ó 16.

Para indicar el cuadrado de un número, se escribe este número una sola vez, y se coloca a la derecha y en la parte superior la cifra 2, que se llama *exponente*.

Así, 4^2 es el cuadrado de 4; 10^2 es el cuadrado de 10.

273. Cuadrado de los 10 primeros números.

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

274. Cuadrado de un quebrado.—*Cuadrado de un quebrado* es el producto de este quebrado por sí mismo.

Así, el cuadrado de $\frac{1}{5}$ es $\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$. Por donde se ve que el cuadrado de un quebrado es igual al cuadrado del numerador dividido por el cuadrado del denominador.

El cuadrado de un quebrado es siempre menor que dicho quebrado.

275. Raíz cuadrada.—*Raíz cuadrada* de un número es una cantidad, que, multiplicada por sí misma, da el número propuesto.

La extracción de la raíz cuadrada se indica por medio del signo $\sqrt{}$ llamado *radical.*

Por definición, el cuadrado de una cantidad colocada bajo el signo radical se obtiene suprimiendo dicho signo.

Así, el cuadrado de $\sqrt{3}$ es 3, el de $\sqrt{4}$ es 4, porque

$$\sqrt{4} \times \sqrt{4} = 4.$$

276. Raíz cuadrada exacta.—Se dice que un número es *cuadrado perfecto* cuando es el cuadrado de otro número.

Así, 16 es cuadrado perfecto, ya que es el cuadrado de 4; 0,49 es cuadrado perfecto, pues es el cuadrado de 0,7.

Extraer la raíz cuadrada de un número que es cuadrado perfecto es encontrar el número del cual es cuadrado.

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 64 es 8, pues 64 es el cuadrado de 8; y se escribe: $\sqrt{64} = 8.$

Raíz cuadrada de un quebrado es otro quebrado que, multiplicado por sí mismo, da por producto el primero. Es la raíz cuadrada del numerador dividida por la del denominador.

La raíz cuadrada de un quebrado es siempre mayor que el quebrado mismo.

277. Raíz cuadrada aproximada.—Llámase *raíz cuadrada aproximada en menos de una unidad* de un número, el mayor número entero cuyo cuadrado está contenido en el número dado.

Así, la raíz cuadrada de 70 en menos de una unidad de aproximación es 8, ya que el cuadrado de 8 es 64, mayor cuadrado perfecto contenido en 70.

Llámase *raíz cuadrada aproximada en menos de* 0,1, 0,01, 0,001 *por defecto*, el mayor número decimal de 1, 2, 3 cifras decimales, cuyo cuadrado está contenido en el número dado.

Por ejemplo, la raíz cuadrada aproximada por defecto en menos de 0,01 de 0,0135 es 0,11, pues el cuadrado de 0,11 es 0,0121, mayor número decimal cuadrado contenido en 0,0135, porque el cuadrado de 0,12 es 0,0144, número mayor que 0,0135.

278. Residuo.—Llámase *residuo* de la raíz cuadrada de un número, el exceso del número sobre el cuadrado de su raíz cuadrada aproximada.

En el ejemplo anterior, el residuo es

$$0{,}0135 - 0{,}11^2 = 0{,}0135 - 0{,}0121 = 0{,}0014.$$

Por lo tanto el número es igual al cuadrado de su raíz cuadrada, más el residuo.

No hay residuo cuando el número es cuadrado perfecto.

279. TEOREMA.—El cuadrado de la suma de dos números se compone: 1º del cuadrado del primero; 2º del doble producto del primero por el segundo; 3º del cuadrado del segundo.

Hágase el cuadrado de $4 + 3$.

Tendremos: $(4 + 3)^2 = (4 + 3)\,(4 + 3)$

Ejecutando el producto indicado, resulta:

$$(4 + 3)^2 = 4^2 + 2\,(4 + 3) + 3^2 \qquad \textbf{(65)}$$

280. COROLARIO.—Si un número consta de decenas y unidades: su cuadrado se compone: 1º del cuadrado de las decenas; 2º del doble producto de las decenas por las unidades; 3º del cuadrado de las unidades.

Sea el número 26; tendremos:

$$26^2 = (20 + 6)^2 = 20^2 + 2\,(20 \times 6) + 6^2$$

Para *generalizar* llamando d a las decenas, u a las unidades de un número N, se tendrá:

$$N^2 = (d + u)^2 = d^2 + 2du + u^2$$

281. TEOREMA.—La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual al duplo del menor, más 1.

En efecto,

$$(18 + 1)^2 - 18^2 = [18^2 + 2(18 \times 1) + 1^2] - 18^2 = 2 \times 18 + 1$$

En general, siendo N y N + 1 dos números consecutivos,

$$(N + 1)^2 - N^2 = 2N + 1$$

Este teorema puede también expresarse como sigue:

Si se aumenta 1 a un número, el cuadrado de él se aumenta del duplo de dicho número más 1.

282. COROLARIO.—Cuando se conoce el cuadrado de un número entero cualquiera, se puede encontrar inmediatamente el cuadrado del número que le precede y del que le sigue.

Así, ya que el cuadrado de 20 es 400,
el de 21 será, $400 + (2 \times 20 + 1) = 400 + 41 = 441$
el de 19 será, $400 - (2 \times 19 + 1) = 400 - 39 = 361$

283. TEOREMA.—Para que un número sea cuadrado perfecto, es menester y suficiente que los exponentes de sus factores primos sean pares.

1° *Esta condición es necesaria.*

Sea: $A = 2^3 \times 5^7$

Cuadrando ambos miembros, tendremos:

$$A^2 = 2^{3\times2} \times 5^{7\times2} = 2^6 \times 5^{14}$$

Luego, los exponentes de los factores primos del cuadrado de A son pares.

2° *Esta condición es suficiente.*

Pues, si se la supone cumplida, como en

$$A = 2^6 \times 5^6$$

este número puede transformarse en dos productos iguales:

$$(2^3 \times 5^3) \times (2^3 \times 5^3)$$

y cada uno de ellos será la raíz cuadrada de A.

Luego los exponentes pares indican cuadrados perfectos.

284. COROLARIO.—Un número cuadrado perfecto, es un producto de factores cuadrados perfectos.

285. TEOREMA.—Un número que remata en 2, 3, 7 u 8 no puede ser cuadrado perfecto.

En efecto, el cuadrado de un número cualquiera remata siempre como el cuadrado del guarismo de sus unidades (**280**). Pero los cuadrados de los nueve primeros números rematan en 1, 4, 9, 6, 5; y si el número remata en cero, su cuadrado rematará también en cero; por tanto, un número que remata en 2, 3, 7 u 8 no puede ser cuadrado perfecto.

286. COROLARIO.—Un número que remata en ceros no puede ser cuadrado perfecto a no ser que el número de ceros sea par.

En efecto, como los números que rematan en ceros son los únicos cuyos cuadrados rematan también en ceros (**285**), si consideramos los números 360 y 700, tendremos:

$$360^2 = (36 \times 10)^2 = 36^2 \times 10^2 = 36^2 \times 100$$
$$700^2 = (7 \times 100)^2 = 7^2 \times 100^2 = 7^2 \times 10\,000$$

y cada uno de estos cuadrados tiene un número de ceros doble que el número propuesto.

§ II. PRÁCTICA DE LA EXTRACCIÓN DE LA RAÍZ CUADRADA

287. Los números enteros son o no cuadrados perfectos; en el primer caso la raíz cuadrada es *exacta*, y *aproximada* en el segundo.

Así, la raíz cuadrada de 16 es 4, la de 64 es 8.

Pero 40 tiene por raíz cuadrada 6 y 7, *con una unidad de aproximación*; la primera por *defecto*, y la segunda por *exceso*. Lo que se representa como sigue:

$$36 < 40 < 49$$
$$6 < \sqrt{40} < 7.$$

288. *Extraer la raíz cuadrada* de un número que no es cuadrado perfecto, *con aproximación de una unidad*, es buscar la raíz del mayor cuadrado contenido en el número propuesto.

289. Raíz cuadrada de un número de dos cifras, con aproximación de una unidad.—La raíz cuadrada, con aproximación de una unidad, de un número de dos cifras, esto es de un número menor que 100, es menor que 10, ya que el cuadrado de 10 es 100. Luego tiene sólo una cifra.

290. REGLA.—Para extraer la raíz cuadrada, con aproximación de una unidad, de un número menor que 100, se busca en la tabla de los cuadrados de los números menores que 10, el mayor cuadrado contenido en el número dado.

La raíz cuadrada de este cuadrado es la raíz buscada, y el residuo es el exceso del número dado sobre este cuadrado.

EJEMPLO: Extraer la raíz cuadrada de 53.

Desde luego se ve que 53 está comprendido entre 49 y 64.

$$49 < 53 < 64$$

Por lo tanto, $$7 < \sqrt{53} < 8$$

Los números 7 y 8 son la raíz cuadrada de 57 (**287**) pero 7 sólo corresponde a la definición dada (**288**).

291. Raíz cuadrada, con una unidad de aproximación, de un número entero mayor que 100.—Sea el número 7 358.

Estando este número comprendido entre 100 y 10 000, su raíz cuadrada lo estará entre 10 y 100; por lo tanto constará de decenas y de unidades. Ahora bien, siendo el cuadrado de las decenas un número exacto de centenas, no puede encontrarse sino en las 73 centenas del número propuesto; luego la raíz cuadrada, *con una unidad de aproximación*, de este número de centenas, será la cifra de las decenas de la raíz buscada.

En efecto, tenemos: $8^2 < 73 < 9^2$.

Pero los dos últimos números, difieren evidentemente, por lo menos, de una unidad; multiplicando por 100, tendremos:

$$8^2 \times 100 < 7300 < 9^2 \times 100.$$

Así, los dos últimos números diferirán, a lo menos, de una centena; luego se pueden añadir 58 unidades al menor, sin alterar las desigualdades, y tendremos:

$$8^2 \times 10^2 < \quad 7\,358 < 9^2 \times 10^2$$
$$8 \times 10 < \sqrt{7\,358} < 9 \times 10.$$

Por lo tanto, la raíz cuadrada de 7 358 está comprendida entre 8 decenas y 9 decenas, y 8 es la cifra de las decenas.

El cuadrado de un número que consta de decenas y de unidades componiéndose del cuadrado de las decenas, del doble producto de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades, podemos escribir:

$$7\,358 = d^2 + 2du + u^2$$

más el residuo, si lo hay.

Disposición de la operación

$$\begin{array}{r|lr}
73.58 & \underline{85} & \\
\underline{64} & 165 & 2d + u \\
9\,58 & 5 & u \\
\underline{8\,25} & & \\
1\,33 & \multicolumn{2}{l}{\overline{825 = 2du + u^2}}
\end{array}$$

Si de este cuadro se resta d^2 o 64 centenas, el residuo 958 contendrá todavía el doble producto de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades, esto es, $2du + u^2$ o $u\ (2d + u)$, más el residuo de la operación, si lo hay. Luego, al dividir 958 por $2d$, esto es, por el duplo de las decenas, resultará la cifra de las unidades, o una cifra mayor, porque al dividir sólo por $2d$ cuando el divisor real es $(2d + u)$, puede resultar demasiado grande el cociente. Ahora bien, el doble producto de las decenas por las unidades proporciona decenas; dividiendo las 95 decenas del residuo por 2×8 ó 16, resulta 5 por cociente. Se prueba esta cifra, ora haciendo el cuadrado de 85 para cerciorarse de que se lo puede restar de 7 358, ora formando las dos partes indicadas $2du + u^2$; si esta suma puede restarse de 958, la cifra 5 es la cifra de las unidades, lo que ocurre en el presente caso.

292. REGLA.—Para extraer, en menos de una unidad, la raíz cuadrada de un número entero mayor que 100, se lo divide en períodos de dos cifras, de derecha a izquierda; el último período puede constar de sólo una cifra.

La raíz cuadrada del primer período de la izquierda da la primera cifra de la raíz que se escribe en la galera; se cuadra esta cifra y se resta su cuadrado del primer período; la diferencia da el primer residuo parcial.

A la derecha de este residuo, si lo hay, se escribe el período siguiente y se separa con un punto la primera cifra de la derecha; se divide la parte de la izquierda por el duplo de la cifra escrita en la raíz: el cociente es la cifra de la raíz o una cifra demasiado grande. Para probarla se la escribe en la raíz y también a la derecha del duplo de la raíz hallada; se multiplica el número así formado por la cifra que se ha de probar. Si el producto puede restarse del número formado por el primer residuo parcial y el segundo período, la cifra probada es exacta; en caso contrario se le disminiye una unidad, hasta que pueda efectuarse la resta; así resulta el segundo residuo parcial.

A la derecha de este residuo se escribe el período siguiente, y se repiten las mismas operaciones, hasta que se hayan escrito todos los períodos del número propuesto y que esté concluída la operación.

El resultado de la última resta da el residuo.

EJEMPLO: Extráigase la raíz cuadrada de 453 458.

Dividamos el número en períodos de dos cifras, empezando por la derecha. La raíz cuadrada de 45 es 6, cuyo cuadrado es 36. Restando 36 de 45 resulta 9; escribamos al lado de este primer residuo el período siguiente 34.

Disposición de la operación

45 34.58	673	
	127	1343
36		
93.4	7	3
88 9	889	4029
4 55.8		
4 02.9		
52 9		

En el número 934, separemos por un punto la última cifra 4. Formemos el duplo de la cifra 6 y dividamos 93 por 12. Después de haber escrito el cociente 7 en la raíz y a la derecha de 12, multipliquemos 127 por 7. Como al restar de 934 el producto 889, resulta 45, se infiere que 7 es la segunda cifra de la raíz.

A la derecha de 45 escribamos el período siguiente 58, separemos la última cifra 8 y dividamos 455 por el duplo de 67 que es 134; el cociente es 3. Escribamos este cociente a la derecha de 67 y de 134. Multipliquemos 1 343 por 3, y restemos el producto 4 029 de 4558. El residuo 529 indica que 3 es la tercera cifra de la raíz.

Por consiguiente, la raíz cuadrada de 453 458, con aproximación de una unidad, es 673, y el residuo 529.

Como *comprobación*, se puede verificar que

453 458 = $673^2 + 529$

673	
673	
2 019	
47 11	
403 8	
452 929	= 673^2
529	*residuo*
453 458	*número dado*

293. Procedimiento abreviado para la extracción de la raíz cuadrada.—Cuando se ha hallado más de la mitad de las cifras de la raíz cuadrada de un número, se pueden encontrar las demás, dividiendo el residuo por el duplo del número formado por la parte hallada, seguida de tantos ceros como cifras queden por determinar.

Ejemplo: Extraer la raíz cuadrada de 2 135 578 946.

Método ordinario		**Método por división.**	
21.35.57.89.46	46 212	21.35.57.89.46	46 2
53.5	86	53.5	86
195.7	92 2	195.7	92 2
1138.9	92 41 *residuo.*	1138946	92 400 *divisor*
21484.6		212946	12
3000.2	924 22	28146	

En ambos casos la raíz es 46 212.

294. Notas: I. En la práctica se simplifica la escritura efectuando las restas sin escribir los sustraendos, como en la operación adjunta.

	45.34.58	673	
	93.4	127	1343
	4 55 8	7	3
Residuo	52 9	889	4029

II. Para obtener, en el curso de la operación, el duplo de la cantidad ya escrita en la raíz, basta agregar la cifra que se acaba de encontrar, al número por el cual se la ha multiplicado para probarla.

Así, en el ejemplo precedente se puede obtener el duplo de 67 agregando 7 a 127.

III. Si una de las divisiones indicadas diese cero por cociente, se escribiría el cero en la raíz y en el duplo de ella, y se bajaría el período siguiente.

IV. El residuo de la raíz cuadrada de un número entero es siempre menor que el duplo de la raíz cuadrada entera más 1 (**281**).

295. RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO DECIMAL, CON APROXIMACIÓN DE UNA UNIDAD.—Para extraer la raíz cuadrada de un número decimal, con aproximación de una unidad, se extrae la raíz cuadrada de la parte entera con aproximación de una unidad.

Se encuentra el residuo, escribiendo la parte decimal del número a la derecha del residuo de la raíz de la parte entera.

EJEMPLO: Calcúlese, con aproximación de una unidad, la raíz cuadrada de 258,126.

Basta extraer la raíz cuadrada de 258:

2.5 8, 126	16	
1 5.8	27	26
2, 126	7	6
	189	156

Para encontrar la segunda cifra de la raíz, hemos probado el 7, y hemos visto que es demasiado grande.

La raíz cuadrada es 16, y el residuo, 2,126.

296. Raíz cuadrada de cualquier número, en menos de 0,1, 0,01, 0,001, etc.—Nos contentaremos con dar la regla práctica, y unos ejemplos de aplicación.

REGLA.—Para extraer la raíz cuadrada de un número (entero o decimal) **en menos de 0,1, 0,01, 0,001 etc., se le divide en períodos de dos cifras desde la coma a derecha y a izquierda. El último período de la izquierda puede constar de sólo una cifra.**

A la derecha de la coma se toman tantos períodos de dos cifras, cuantas cifras decimales se quiera en la raíz, añadiendo uno o varios ceros si faltaren cifras decimales.

Se extrae la raíz cuadrada del número que resulte, como si fuese entero, cuidando de separar con una coma, de la derecha de la raíz obtenida, la mitad del número de decimales que tenga el número dado, o poniendo la coma en la raíz cuando se baja el primer período decimal.

1er. EJEMPLO: Extraer la raíz cuadrada de 2, en menos de 0,001.

Para que se puedan separar tres períodos a la derecha de la coma, hay que añadir 6 ceros, y considerar el número 2,000 000.

2 00.00.00	1.414		
1 0.0	24	281	2 824
4 0.0	4	1	4
1 1 9 0.0			
0,0 0 0 6 0 4	96	281	11 296

La raíz cuadrada es 1,414, y el residuo 0,000 604.

2º Ejemplo: Extraer la raíz cuadrada de 465,8452, en menos de 0,01.

4.65,84.52	21,58		
6.5	41	425	4 308
2 4 8.4	1	5	8
3 5 9 5.2			
0,1 4 8 8	41	2 125	34 464

La raíz cuadrada es 21,58 y el residuo 0,1488.

3er. Ejemplo: Extraer la raíz cuadrada de 0,305, en menos de 0,001.

0,3 0.5 0.0 0	0,552	
5 5.0	105	1 102
2 5 0.0	5	2
0,0 0 0 2 9 6		
	525	2 204

La raíz cuadrada es 0,552, y el residuo, 0,000 296.

§ III. RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO CUALQUIERA, CON UNA APROXIMACIÓN DADA

297. Extraer la raíz cuadrada de 42 con $\frac{1}{5}$ de aproximación.

La raíz buscada ha de ser un quebrado cuyo denominador sea 5 y cuyo numerador sea un número con una unidad de aproximación.

Multipliquemos y dividamos 42 por 25, cuadrado del denominador de $\frac{1}{5}$; tendremos:

$$\frac{42 \times 25}{25} \text{ ó } \frac{1\,050}{25}, \text{ expresión igual a 42.}$$

La raíz cuadrada de 1 050 siendo 32 ó 33, con una unidad de aproximación, la raíz cuadrada de $\frac{1\,050}{25}$

estará comprendida entre $\frac{32}{5}$ y $\frac{33}{5}$; por donde se ve que estos dos valores difieren de la raíz, en menos de $\frac{1}{5}$.

El mismo raciocinio puede hacerse con cualquier aproximación indicada por un quebrado cuyo numerador sea 1.

Así, la raíz cuadrada de 24 con $\frac{1}{11}$ de aproximación, es:

$$\frac{\sqrt{24 \times 121}}{11}, \text{ esto es, } \frac{53}{11} \text{ ó } \frac{54}{11};$$

y la de 7, con $\frac{1}{4}$ de aproximación, es:

$$\sqrt{\frac{7 \times 16}{4}}, \text{ es decir } \frac{10}{4} \text{ u } \frac{11}{4}.$$

298. REGLA.—Para extraer la raíz cuadrada de un número cualquiera con $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, y en general $\frac{1}{n}$ de aproximación, se multiplica el número por el cuadrado del denominador de la aproximación, se extrae, con una unidad de aproximación, la raíz cuadrada de ese producto, y a esta raíz se le da por denominador el denominador de la aproximación.

299. Nota: Cuando el numerador de la aproximación es diferente de 1, se escribe esta aproximación en forma de quebrado que tenga 1 por numerador, y por denominador el quebrado de la aproximación, pero invertido; de este modo se vuelve al caso precedente.

Así, para encontrar la raíz cuadrada de 21, con $\frac{3}{7}$ de aproximación, se buscará la aproximación con $\frac{1}{7/3}$ ya que $\frac{3}{7} = \frac{1}{7/3}$.

Multiplico 21 por el cuadrado de $\frac{7}{3}$, y tengo $\frac{1029}{9}$ ó 114,33.

La raíz cuadrada de 114,33 es 10 u 11, con una unidad de aproximación. Luego la raíz cuadrada pedida estará comprendida entre

$\frac{10}{7/3}$ y $\frac{11}{7/3}$ esto es, entre $\frac{30}{7}$ y $\frac{33}{7}$; por donde se ve que estos

dos valores difieren de la verdadera raíz en menos de $\frac{3}{7}$.

Luego, para extraer la raíz cuadrada de un número con $\frac{m}{n}$ de aproximación, se multiplica el número por el cuadrado $\frac{n^2}{m^2}$ de la aproximación invertida; se extrae, con una unidad de aproximación, la raíz cuadrada de la parte entera del número obtenido y se multiplica esta raíz por el quebrado que denota la aproximación.

§ IV. RAÍZ CUADRADA DE LOS QUEBRADOS COMUNES

300. REGLA GENERAL.—Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado, se divide la raíz cuadrada del numerador por la raíz cuadrada del denominador (276).

La raíz cuadrada de los quebrados comunes presenta tres casos:

301. Caso I: Ambos términos son cuadrados perfectos.

Sea el quebrado $\frac{36}{49}$.

Tendremos (**276**): $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$.

302. CASO II: **Sólo el denominador es cuadrado perfecto.**

Sea el quebrado $\frac{51}{64}$.

En este caso, se suele extraer la raíz cuadrada del numerador, con una unidad de aproximación, y se la divide por la del denominador.

Así, $\sqrt{\frac{51}{64}} = \frac{\sqrt{51}}{8}$ o $\frac{7}{8}$, en menos de $\frac{1}{8}$.

303. CASO III: **El denominador no es cuadrado perfecto.**

Sea el quebrado $\frac{23}{60}$.

Un procedimiento consiste en hacer el denominador cuadrado perfecto, multiplicando ambos términos por este denominador; luego se extrae la raíz cuadrada como en el caso precedente.

Para $\sqrt{\frac{23}{60}}$, resulta $\sqrt{\frac{23 \times 60}{60^2}} = \frac{\sqrt{1380}}{60} = \frac{37}{60}$.

La raíz cuadrada de $\frac{23}{60}$ es $\frac{37}{60}$ en menos de $\frac{1}{60}$.

304. NOTA: En los dos últimos casos se puede también reducir a decimal el quebrado dado, y luego aplicar la regla conocida, y así resulta la raíz cuadrada con la aproximación que se quiere.

Así, el quebrado $\frac{15}{16} = 0{,}9375$.

La raíz cuadrada de 0,9375 es 0,96 en menos de un centésimo.

EJERCICIOS ORALES

575. ¿A qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos?

576. Ya que el cuadrado de 25 es 625, dígase según esto: 1° cuál es el cuadrado de 24; 2° cuál es el cuadrado de 26.

577. ¿Cuáles son los cuadrados de los números siguientes: 19, 21, 29, 31, 99, 101?

578. ¿De qué se compone el cuadrado de un número formado de decenas y unidades?

579. ¿A qué es igual el cuadrado: 1° de una decena; 2° de un centésimo; 3° de un décimo; 4° de una centena?

580. ¿Pueden ser cuadrados los números terminados por 2, 3, 7, 8? ¿Por qué?

581. ¿Puede ser cuadrado un número terminado por un número impar de ceros? ¿Por qué?

582. ¿Cuándo puede ser cuadrado un número que remata en 5? ¿Por qué?

583. ¿Cuántos números enteros de dos cifras son cuadrados perfectos?

584. ¿Cuántos números enteros de tres cifras son cuadrados perfectos?

585. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener el residuo en la extracción de la raíz cuadrada de un número? ¿Por qué?

586. ¿A qué es igual la diferencia de los cuadrados de dos números que tienen entre sí dos unidades de diferencia? Ejemplos, 25 y 27.

587. ¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado?

588. ¿Cómo se extrae la raíz cuadrada de un quebrado cuando el denominador no es cuadrado?

PROBLEMAS

589. Hállese el cuadrado de las cantidades siguientes: 1° 346; 2° 5,25; 3° 0,38; 4° 0,015; 5° 5/12; 6° 3 4/7.

590. Hállese la raíz cuadrada de cada uno de los números siguientes: 1° 196; 2° 729; 3° 15 876; 4° 283 024; 5° 4 460 544.

591. ¿Cuál es la raíz cuadrada de cada uno de los números siguientes: 1° 2,0164; 2° 0,0361; 3° 16,5649; 4° 0,005929; 5° 0,416025?

592. Hállese la raíz cuadrada de cada uno de los valores siguientes:

$$1^{\circ}\ \frac{121}{144};\ 2^{\circ}\ \frac{625}{1\,681};\ 3^{\circ}\ \frac{3\,249}{131\,044};\ 4^{\circ}\ \frac{225\times121}{64\times49};\ 5^{\circ}\ \frac{250\times72\times80}{27\times507\times256}$$

593. ¿Cuál es, en menos de un décimo, la raíz cuadrada de cada una de las cantidades siguientes: 1° 345; 2° 45 689; 3° 945,8, 4° 12 560,5; 5° $\frac{17\,424}{76}$?

594. ¿Cuál es, en menos de 0,01, la raíz cuadrada de cada una de las cantidades siguientes: 1° 496; 2° 52,743; 3° 7,25; 4° 811,394; 5° 0,036?

595. Extraer, en menos de 0,01, la raíz cuadrada de las cantidades siguientes: 1° 23,5; 2° 1,45327; 3° 0,323541; 4° 4/5; 5° 7/9.

596. Extraer, en menos de 0,0001, la raíz cuadrada de las cantidades siguientes: 1° 2; 2° 3; 3° 8; 4° 1/5; 5° 1/11.

597. Hállese, en menos de 1/2, la raíz cuadrada de los números siguientes: 1° 1 899; 2° 3 540; 3° 5 050; 4° 7 915; 5° 219 492.

598. Hállese en menos de 1/5, la raíz cuadrada de las cantidades siguientes: 1° 48; 2° 325; 3° 834; 4° 0,524; 5° 9/11.

599. Hállese, en menos de 2/3, la raíz cuadrada de los números siguientes: 1° 56; 2° 87; 3° 92; 4° 911; 5° 895.

600. ¿Cuáles son los dos números consecutivos que tienen por diferencia de sus cuadrados: 1° 49; 2° 85; 3° 439; 4° 723?

601. ¿Cuáles son los dos números pares consecutivos que tienen por diferencia de sus cuadrados: 1° 36; 2° 52, 3° 412; 4° 2 084?

602. La suma de los cuadrados de dos números es 1 625, y el mayor de ellos 40; ¿cuál es el menor?

603. Un jardín que mide 90 metros de longitud por 40 de latitud debe ser cambiado por otro de igual valor, y cuadrado; ¿qué dimensiones debe tener este último?

604. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo de 9 408 metros cuadrados de superficie, si su longitud es el triple de la latitud?

605. Si se resta 12 de un número entero, resulta el mayor cuadrado que contiene este número; pero si se le añade 77, resulta el cuadrado inmediatamente superior al mismo número. ¿Cuál es éste?

606. Bonifacio quiere plantar árboles a igual distancia, en un terreno cuadrado. ¿Cuántos debe plantar en cada lado para que entren 15 129?

607. El producto de dos números es 3 645; uno de ellos es los 5/9 del otro. ¿Cuáles son estos números?

608. La superficie de un rectángulo es de 405,60 metros cuadrados; uno de los lados del rectángulo es los 5/12 del otro. ¿Cuáles son sus dimensiones?

609. Búsquese 1° un número que, aumentado de su cuadrado, dé 272; 2° un número que, al restarlo de su cuadrado, dé 600; 3° un número cuyo duplo y cuadrado den 195 363.

610. Un campo cuadrado contiene 12 544 pies de árboles plantados en cuadro a 4 metros uno de otro; pregúntase cuántas hileras van a dar a cada uno de los cuatro lados.

611. Se trata de murar un terreno cuadrado que tiene 3 600 metros cuadrados de superficie; ¿cuál será la longitud de cada muro?

612. Se trata de cuadrar un terreno que mide 625 metros de longitud por 400 de ancho; pregúntase cuánto se debe disminuir a la longitud y aumentar al ancho para que el terreno tenga la misma superficie.

613. Un jovencito preguntaba a un labrador cuáles eran las dimensiones de su terreno. "Caballero, dijo el labrador, el largo excede al ancho en dos metros, y la superficie del terreno es de 20 163 m²; busque Ud. lo que me pregunta".

614. Preguntado un profesor por el número de sus alumnos, contesta que el número de ellos es tal, que multiplicado 1/3 del mismo, da 2 523; ¿cuántos alumnos tiene?

615. ¿Cuánto importa el cercado de alambre de un potrero cuadrado de 36 áreas, a Bs. 0,50 el medio decámetro?

616. ¿Cuál es el número que, multiplicado por su tercera parte, da 108?

617. La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 729 457; ¿cuáles son estos números?

618. Un jardinero quiere plantar un cuadro de dalias; a este efecto pone los tubérculos a igual distancia unos de otros, tanto a lo largo como a lo ancho; la 1ª vez, le faltan 15; la 2ª pone 1 menos en todo sentido, y entonces le sobran 34; ¿cuántos tubérculos tenía?

619. Un general quiere formar, con 1 152 hombres, un cuadrado de centro vacío que pueda contener 42 hombres en cada lado; ¿cuántos hombres hay en la columna exterior, y cuántas son las columnas?

620. Un labrador, nada versado en matemáticas, debe hacer una plantación de café en un campo de forma cuadrada; después de concluída su tarea, nota que le sobran 132 pies, y se pone a plantar uno más en cada hilera, y entonces le faltan 29 pies para completar el cuadrado; pregúntase: 1º cuántos fueron los pies de café; 2º cuántos entraron en cada fila la 1ª y la 2ª vez.

CAPÍTULO II

CUBO Y RAÍZ CÚBICA

§ I. DEFINICIONES Y TEOREMAS

305. Cubo.—Llámase *cubo* de un número el producto de tres factores iguales a dicho número.

Así, 216 es el *cubo* de 6, pues $216 = 6 \times 6 \times 6$.

El cubo de un número se representa escribiendo una sola vez este número, dándole por exponente el número 3.

Así, 6^3 es el *cubo* de 6; $0{,}01^3$ es el *cubo* de 0,01.

Cubo de un quebrado es el producto de tres factores iguales a este quebrado.

Así, el *cubo* de $\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$; de donde se ve que *el cubo de un quebrado es igual al cubo del numerador dividido por el del denominador.*

306. Cubo de los 10 primeros números.

Números:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos:	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1 000.

307. Raíz cúbica.—*Raíz cúbica* de un número es otro número que, elevado al cubo, da el primero.

La raíz cúbica de 216 es 6, pues $6 \times 6 \times 6 = 216$.

Raíz cúbica de un quebrado es otro quebrado que, elevado al cubo, reproduce el primero. Es la *raíz cúbica del numerador* dividida por la *del denominador.*

La raíz cúbica se indica con el signo $\sqrt[3]{}$, llamado radical de tercer grado; el 3, puesto en la abertura del radical, es el índice de la raíz.

Así, $\sqrt[3]{64}$ indica que se debe extraer la raíz cúbica de 64.

Por definición, el cubo de $\sqrt[3]{2}$ es 2; el de $\sqrt[3]{25}$ es 25. Por donde se ve que para obtener el cubo de un número que está bajo un radical de tercer grado, basta suprimir el radical.

308. Raíz cúbica exacta.—Dícese que un número es *cubo perfecto*, cuando es el cubo de otro número.

Por ejemplo, 64 es cubo perfecto, pues es el cubo de 4.

Por lo tanto, *extraer la raíz cúbica de un número cubo perfecto, es hallar el número del cual es el cubo.*

309. Raíz cúbica aproximada.—Llámase raíz cúbica *con una unidad de aproximación por defecto* de un número, el mayor número entero cuyo cubo está contenido en el número dado.

Así, la raíz cúbica, con una unidad de aproximación, de 242, es 6, pues el cubo de 6 que es 216 (**306**) está contenido en 242, y el cubo de 7, que es 343, es mayor que 242; luego 6 es el mayor número entero cuyo cubo está contenido en 242.

Llámase *raíz cúbica con* 0,1, 0,01, 0,001 *de aproximación por defecto* de un número, el mayor número decimal de 1, 2, 3 cifras decimales, cuyo cubo está contenido en el número dado.

Por ejemplo, la raíz cúbica por defecto, con 0,1 de aproximación, de 0,5, es 0,7, ya que el cubo de 0,7 es 0,343, mayor cubo contenido en 0,5.

310. Residuo.—Llámase *residuo* de la raíz cúbica de un número, el exceso de este número sobre el cubo de su raíz cúbica aproximada.

Así, en el ejemplo precedente, el *residuo* es

$$0{,}5 - 0{,}7^3 = 0{,}5 - 0{,}343 = 0{,}157.$$

311. TEOREMA.—El cubo de la suma de dos números se compone: 1º del cubo del primero; 2º del triple producto

del cuadrado del primero por el segundo; 3° del triple producto del primero por el cuadrado del segundo; 4° del cubo del segundo.

Hágase el cubo de $4 + 3$.

Se forma el cubo de una suma, multiplicando su cuadrado por esta misma suma.

Para el cuadrado, tenemos (**279**):

$$4^2 + 2\,(4 \times 3) + 3^2$$

Luego, basta multiplicar este resultado por $4 + 3$.

$$\begin{array}{l}
4^2 + 2\,(4 \times 3) + 3^2 \\
4 + 3 \\
\hline
4^3 + 2\,(4^2 \times 3) + 4 \times 3^2 \\
\qquad\qquad 4^2 \times 3 + 2\,(4 \times 3^2) + 3^3 \\
\hline
\end{array}$$

$$(4 + 3)^3 = 4^3 + 3\,(4^2 \times 3) + 3\,(4 \times 3^2) + 3^3$$

312. **COROLARIO.—El cubo de todo número que consta de decenas y unidades, se compone: 1° del cubo de las decenas; 2° del triple producto del cuadrado de las decenas por las unidades; 3° del triple producto de las decenas por el cuadrado de las unidades; 4° del cubo de las unidades.**

Llamando N el número, *d* las decenas, *u* las unidades, tendremos:

$$N^3 = (d + u)^3 = d^3 + 3d^2u + 3du^2 + u^3.$$

313. **TEOREMA.—La diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triple del cuadrado del menor, más el triple de este número, más 1.**

Pues tenemos:

$$(18 + 1)^3 - 18^3 = (18^3 + 3.18^2 + 3.18 + 1) - 18^3$$
$$(18 + 1)^3 - 18^3 = 3.18^2 + 3.18 + 1$$

Para generalizar, llamemos N y $N + 1$ dos números consecutivos; tendremos:

$$(N+1)^3 - N^3 = (N^3 + 3N^2 + 3N + 1) - N^3 = 3N^2 + 3N + 1.$$

314. Los números enteros son o no cubos perfectos; en el primer caso, la raíz cúbica es *exacta y aproximada* en el segundo.

Así, la raíz cúbica de 343 es 7, la de 729 es 9; pero la de 420 es 7 y 8, con una *unidad de aproximación*, la primera por defecto, y la segunda por exceso, pues

$$343 < 420 < 524$$
$$7 < \sqrt[3]{420} < 8$$

Extraer la raíz cúbica con aproximación de una unidad, de un número que no es cubo perfecto, es buscar la raíz cúbica del mayor cubo contenido en el número propuesto.

§ II. PRÁCTICA DE LA RAÍZ CÚBICA

315. Raíz cúbica, con una unidad de aproximación, de un número menor que 1000.—La raíz cúbica de un número menor que 1000, esto es, de un número de tres o menos de tres cifras, es menor que 10, ya que el cubo de 10 es 1000. Luego esta raíz consta de sólo una cifra.

REGLA.—Para obtener la raíz cúbica de un número menor que 1000 se busca en la tabla (306) el mayor cubo contenido en el número dado. La raíz cúbica de este cubo será la raíz, pedida, con una mitad de aproximación.

Así, la raíz cúbica de 612 es 8, pues 512, cubo de 8, es el mayor cubo contenido en 612.

El residuo es $612 - 512 = 100$.

316. Raíz cúbica, con una unidad de aproximación, de un número mayor que 1000.—Nos contentaremos con dar la regla para efectuar la operación, y varios ejemplos de aplicación.

REGLA.—Para extraer la raíz cúbica, con una unidad de aproximación, de un número entero mayor que 1.000 se divide, este número en períodos de a tres cifras, empezando por la derecha; el último período de la izquierda puede tener sólo una o dos cifras.

Se extrae la raíz cúbica del primer período de la izquierda para obtener la primera cifra de la raíz. Se resta del primer período el cubo de esta cifra, y resulta el primer residuo parcial.

A la derecha de este residuo se escribe el segundo período y se separan con un punto las dos primeras cifras de la dere-

cha. Se divide el número que queda a la izquierda por el triple cuadrado de la cifra ya escrita en la raíz. El cociente es la segunda cifra de la raíz o una cifra mayor. Para probarla se eleva al cubo el número formado por las dos primeras cifras de la raíz; si el producto puede restarse del número formado por los dos primeros períodos, la segunda cifra de la raíz es exacta; cuando no, se disminuye una unidad a esta cifra, y se prueba del mismo modo hasta que pueda efectuarse la sustracción. Así resulta el segundo residuo parcial.

A la derecha de este residuo se escribe el tercer período, se separan las dos primeras cifras de la derecha, y se divide el número que queda a la izquierda por el triple del cuadrado del número formado por las dos primeras cifras de la raíz. Así resulta la tercera cifra de la raíz o una cifra mayor; se la prueba como la precedente. Se continúa hasta haber escrito todos los períodos del número propuesto; hecho lo cual queda acabada la operación.

1er. Ejemplo: Extráigase la raíz cúbica de 177 697 529 con una unidad de aproximación.

Disposición de la operación

	1 77.6 97.5 29	562 *raíz cúbica*
		$5^2.3 = 75$ 1er. *divisor*
	1 25	
1er. *residuo*	52 6.97	$56^2.3 = 9408$ 2º *divisor*
$56^3 =$	1.75 6 16	
2º *residuo*	2 0 815.29	
$562^3 =$	1 77 5 043 28	
Residuo	1 932 01	

Dividido el número en períodos de a tres cifras, empezando por la derecha. La raíz cúbica del primer período, 177, es 5. De 177 resto $5^3 = 125$, lo que da 52 por residuo parcial. Escribo el período siguiente, 697, y separo dos cifras por la derecha. Divido la parte de la izquierda, 526, por $5^2.3 = 75$. El cociente es 6. Elevo 56 al cubo para probar el 6; $56^3 = 175\,616$, número que puede restarse de 177 697: luego 6 es la segunda cifra de la raíz. El segundo residuo es 2 081; escribo a la derecha el período 529 y separo las dos primeras cifras de la derecha. Divido 20 815 por $56^2.3 = 9.408$, triple cuadrado de la raíz. El cociente es 2. Elevo 562 al cubo; $562^3 = 177\,504\,328$, número menor que 177 697 529. Luego 2 es la tercera cifra de la raíz.

La *raíz cúbica* es 562, y el *residuo* 193 201.

2º Ejemplo: Extráigase la raíz cúbica de 130 745 640 724, con una unidad de aproximación.

$$\begin{array}{rr|l}
 & 130.7\,45.6\,40.7\,24 & 5075 \\ \cline{3-3}
 & 125 & 5^2.3 = 75 \\ \cline{2-2}
 & 5\,7.45\,6\,40 & 50^2.3 = 7500 \\
507^3 = & 130\,3\,23\,8\,43 & 507^2.3 = 771147 \\ \cline{2-2}
 & 4\,21\,7\,97\,7\,24 & \\
5075^3 = & 130\,7\,09\,7\,96\,8\,75 & \\ \cline{2-2}
 & 35\,8\,43\,8\,49 &
\end{array}$$

En el cálculo de la segunda cifra se ve que $50^2.3 = 7\,500$ no está contenido en 57; se escribe un cero en la raíz y se baja el período siguiente. Se divide 57436 por $50^2.3 = 7\,500$; el cociente es 7, etc.

La *raíz cúbica* es 5 075, y el *residuo*, 35 843 849.

317. Raíz cúbica de un número decimal, con una unidad de aproximación.—Para extraer, con una unidad de aproximación, la raíz cúbica de un número decimal, se extrae la raíz cúbica de la parte entera, con una unidad de aproximación.

Se obtiene el residuo agregando la parte decimal al residuo de la parte entera.

Ejemplo: Extraer, con una unidad de aproximación, la raíz cúbica de 15 825,37.

Extraigamos la raíz cúbica de la parte entera:

$$\begin{array}{rr|l}
 & 15\,8\,25{,}37 & 25 \\ \cline{3-3}
 & 8 & 2^2.3 = 12 \\ \cline{2-2}
 & 7\,8\,25 & \\
25^3 = & 15\,6\,25 & \\ \cline{2-2}
 & 2\,00{,}37 &
\end{array}$$

La *raíz* es 25, y el *residuo*, 200,37.

318. Raíz cúbica de cualquier número, en menos de 0,1, 0,01, 0,001, etc.—Nos contentaremos con dar la regla que se ha de seguir, y varios ejemplos de aplicación.

REGLA.—Para extraer la raíz cúbica de un número (entero o decimal) **en menos de 0,1, 0,01, 0,001, etc., se lo divide en períodos de a tres cifras desde la coma derecha y a izquierda. El último período de la izquierda puede constar de sólo una o dos cifras.**

A la derecha de la coma se toman tantos períodos de a tres cifras como cifras decimales se quiera en la raíz, añadiendo uno o varios ceros si faltaren cifras decimales.

Se extrae la raíz cúbica del número que resulta como si fuera entero, cuidando de poner una coma en la raíz cuando se baja el primer período decimal.

El residuo es la última diferencia, en la cual se separan por la derecha tantas cifras decimales como hay en el número.

1er. EJEMPLO: Extráigase la raíz cúbica de 26 en menos de 0,1.

$$
\begin{array}{r r|l}
 & 26{,}0\,0\,0 & 2.9 \\
\cline{3-3}
 & 8 & 2^2.3 = 12 \\
\cline{2-2}
 & 18\,0\,0\,0 & \\
29^3 = & 24\,3\,8\,9 & \\
\cline{2-2}
 & 1{,}611 &
\end{array}
$$

La *raíz cúbica* es 2,9, y el *residuo* 1,611.

2º EJEMPLO: Extráigase la raíz cúbica de 7,015, en menos de 0,01.

$$
\begin{array}{r l|l}
 & 7{,}015\,0\,0\,0 & 1{,}91 \\
\cline{3-3}
 & 1 & 1^2.3 = 3 \\
\cline{2-2}
 & 60{,}15 & 19^2.3 = 1\,083 \\
19^3 = & 68\,59 & \\
\cline{2-2}
 & \;\;1\,560.0\,0 & \\
191^3 = & 6\,9678\,7\,1 & \\
\cline{2-2}
 & 0{,}04\,7\,121 &
\end{array}
$$

La *raíz cúbica* es 1,91, y el *residuo,* 0,047 121.

3er. EJEMPLO: Extráigase la raíz cúbica de 0,000 12492, en menos de 0,001.

0,000.124.920	0,049
64	$4^2.3 = 48$
609.20	
$49^3 = 1176\ 49$	
0,000 0072 71	

La *raíz cúbica* es 0,049, y el *residuo*, 0,000 007201í

319. NOTA.—De lo que antecede se infiere que **la raíz cúbica de un número tiene tantos guarismos cuantos períodos de tres cifras contenga dicho número,** pudiendo el último período tener sólo una o dos cifras.

320. Prueba.—Para comprobar la raíz obtenida, se la eleva al cubo, al producto se le agrega el residuo, y debe resultar el número propuesto.

§ III. RAÍZ CÚBICA DE LOS QUEBRADOS COMUNES

Ocurren tres casos en la raíz cúbica de los quebrados comunes:

321. CASO I: Ambos términos son cubos perfectos.

REGLA.—Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuando sus dos términos son cubos perfectos, basta extraer separadamente la raíz cúbica de cada uno de ellos (307).

Así, $$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{3}{4}.$$

322. CASO II: Sólo el denominador es cubo perfecto.

REGLA.—Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuando sólo el denominador es cubo perfecto, se extrae la raíz cúbica del numerador, con la aproximación que se quiera, y se divide el resultado por la raíz cúbica del denominador.

EJEMPLO: $$\sqrt[3]{\frac{13}{64}} = \frac{\sqrt[3]{13}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{13}}{4} = \frac{3,666}{4}.$$

323. Caso III: El denominador no es cubo perfecto.

REGLA.—Para extraer la raíz cúbica de un quebrado cuando el denominador no es cubo perfecto, se extrae la raíz cúbica del producto del numerador, por el cuadrado del denominador, y se divide el resultado por el denominador.

Sea el quebrado $\frac{3}{5}$. Multipliquemos ambos términos por 5 para hacer el denominador cubo perfecto:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 5^2}{5 \times 5^2} = \frac{3 \times 5^2}{5^3}$$

Extrayendo la raíz cúbica de ambos miembros, resulta:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 5^2}}{5} \qquad (\textit{Caso II})$$

324. RAÍZ CÚBICA DE UN NÚMERO MIXTO.—Para extraer la raíz cúbica de un número mixto, se lo reduce a quebrado impropio, y se extrae su raíz como la de los quebrados comunes.

Sea el número mixto $15\frac{3}{7}$. Tenemos:

$$15\frac{3}{7} = \frac{108}{7} = \frac{108 \times 7^2}{7^3};$$

de donde

$$\sqrt[3]{15\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[3]{108 \times 7^2}}{7}. \qquad (323)$$

EJERCICIOS ORALES

621. ¿A qué es igual la diferencia de los cubos de dos números consecutivos?

622. ¿Cómo se reconoce que un número dado es la diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos? Búsquense estos números, y hágase la aplicación con 751 501.

623. ¿Cuándo puede ser cubo un número que remata en ceros?

624. ¿Se puede conocer si un número es o no cubo perfecto, por la última cifra de la derecha?

PROBLEMAS

625. ¿Cuáles son los cubos de las cantidades siguientes:
1° 19; 2° 138; 3° 1,50; 4° 0,185; 5° 2/7; 6° 11/17?

626. ¿Cuál es la raíz cúbica de cada uno de los números siguientes: 1° 1 331; 2° 3 375; 3° 12 167; 4° 32 768; 5° 110 592?

627. ¿Cuál es la raíz cúbica de cada uno de los números siguientes:

1° 1 367 631; 2° 9 938 375; 3° 41 781 923; 4° 96 071 912; 5° 184 220 009; 6° 300 763 000; 7° 476 379 541; 8° 709 732 288; 9° 736 314 327; 10° 977 002 999?

628. Extraer la raíz cúbica de las fracciones decimales siguientes, con aproximación de 0,01:

1° 0,0046; 2° 0,10904; 3° 0,002; 4° 304376.

629. ¿Cuál es la raíz cúbica de los quebrados siguientes:

$$1^\circ\ \frac{1\,331}{357\,911};\quad 2^\circ\ \frac{17\,576}{373\,248};\quad 3^\circ\ \frac{103\,823}{23\,149\,135}?$$

630. Búsquese la raíz cúbica de los quebrados siguientes, haciendo que el denominador sea cubo perfecto:

$$1^\circ\ \frac{17}{21};\quad 2^\circ\ \frac{1\,248}{2\,800};\quad 3^\circ\ \frac{84}{12\,648}$$

631. ¿Cuál es el número cuya raíz cúbica disminuída de 3 da 24?

632. ¿Cuál es el número cuya mitad, tercera y cuarta parte multiplicadas entre sí, dan 9 por producto?

633. Encuéntrese el número cuya tercera parte multiplicada por el cuadrado del mismo, dé por producto 1 944.

634. Con Bs. 164,64 he comprado cajas de sardinas en cierto número de cajones, cada uno de los cuales contiene un número de cajas triples del de los cajones; cada caja de sardinas importa un número de céntimos doble del de los cajones; ¿cuántas son las cajas de sardinas y los cajones en que están guardadas?

635. Búsquese: 1° un número cuyo cubo y cuadrado den 252; 2° un número cuyo cubo menos su cuadrado dé 448; 3° un número cuyo cubo, triple cuadrado y triplo den 39 303.

PARTE III

SISTEMA METRICO DECIMAL

NOTA HISTÓRICA

Antes de la creación del sistema métrico decimal, existía en las diferentes naciones, y a veces en las varias provincias de un mismo país, un gran número de medidas que se diferenciaban ya por el valor de la unidad principal, ya por la ley en virtud de la cual se formaban los múltiplos y submúltiplos de cada una de las unidades principales. La falta de uniformidad dificultaba las transacciones comerciales, y los cálculos resultaban largos y muy complicados.

Para acabar con estas dificultades, Francia decidió la creación de un sistema métrico que tuviera una base fundamental como unidad de longitud, que siguiera la ley decimal y tuviese relación directa con las dimensiones del globo terrestre.

Con tal motivo, en 1792, la Academia de Ciencias designó a Mechain y a Delambre para que midiesen el arco del meridiano comprendido entre Dunkerque, ciudad de Francia, y Barcelona, ciudad de España, que es la cuarta parte de la distancia del polo norte al Ecuador.

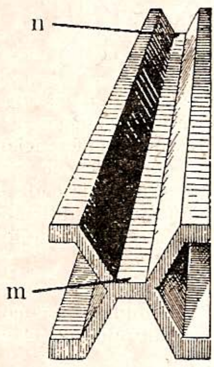
Los dos astrónomos calcularon la distancia que media entre Lieusaint y Melun, ciudades vecinas de París, y la hallaron igual a 6 075,98 toesas (1), y por el cálculo encontraron 551 583 toesas para la distancia de Dunkerque a Barcelona.

Habiendo determinado la latitud de estas dos ciudades, la diferencia dió el valor del arco cuya longitud acababan de medir; con estos datos, calcularon la longitud de la cuarta parte del meridiano, la cual resultó igual a 5 130 740 toesas. La diezmillonésima

(1) La *toesa*, medida francesa, se dividía en 6 *pies*, el pie en 12 *pulgadas*, y la pulgada en 12 *líneas*.

parte de esta longitud, esto es, 0 *toesas* 3 *pies* 0 *pulgadas* 11 *líneas*, y 295 *milésimas de línea* fué adoptada para unidad de las medidas de longitud. En seguida se formó una regla de platino de la extensión de una de estas partes, y a dicha regla dieron el nombre de *metro*, del griego *metrón*, que quiere decir medida.

Mediciones más recientes han demostrado que la longitud de un cuadrante de meridiano terrestre es de 10 002 208 de metros actuales. Por eso debemos decir que el metro es *aproximadamente* la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre.



Metro prototipo.
mn longitud del metro.

Para determinar la unidad de las medidas de peso, se labró un cilindro de latón cuyo volumen se calculó con precisión; se pesó este cilindro en el aire; se añadió a su peso el del aire desalojado para obtener su peso en el vacío; en seguida se lo pesó en agua destilada, y la diferencia de los dos resultados dió el peso de igual volumen de agua. Dividiendo este peso por el volumen del cilindro que se halló igual a 11 dm^3 290, resultó el peso de un centímetro cúbico de agua destilada, al cual dieron el nombre de gramo.

Una regla de platino (patrón original del metro) y un cilindro del mismo metal (patrón del kilogramo) fueron depositados en los "Archivos del Estado".

La *Conferencia internacional de Pesas y Medidas* que se verificó en París, en 1889, decidió que el *metro legal* es la longitud a 0°, de una regla patrón de platino iridiado, que se depositó en el *Pabellón de Breteuil*, en Sevres, cerca de París.

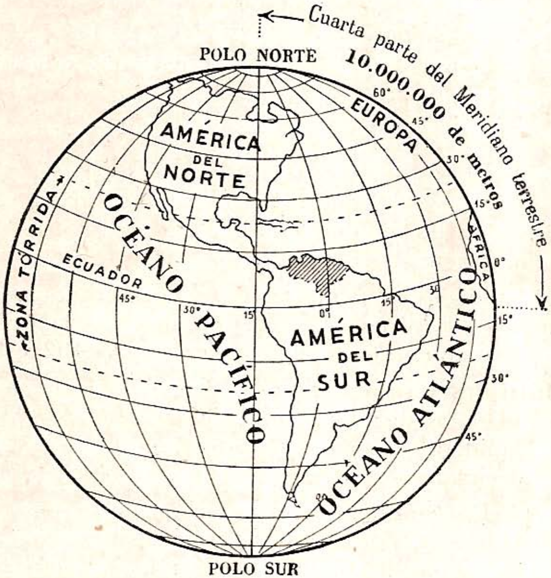
La misma comisión internacional fijó los signos abreviativos oficiales para designar las unidades del sistema métrico. Estos signos son los que emplearemos a continuación.

La mayor parte de las naciones, tanto de América como de Europa, han adoptado el sistema métrico francés a fin de facilitar sus recíprocas relaciones comerciales; las que no lo han adoptado oficialmente (*Inglaterra*, *Rusia*, *Estados Unidos de América*) no prohiben se haga uso de él.

PRELIMINARES

325. Definición.—*Sistema métrico* es el conjunto de las medidas que se derivan del metro.

Este sistema se llama *métrico* porque su base es el metro, y *decimal*, porque los múltiplos y submúltiplos de las varias unidades siguen la misma relación que los del sistema de numeración décupla.



El círculo exterior de la figura representa el meridiano de París, pasando por Dunkerque y Barcelona.

326. Metro es una longitud aproximadamente igual a la diezmillonésima parte de un cuadrante de meridiano terrestre.

327. Un meridiano terrestre es un círculo máximo trazado en la esfera terrestre, y cuyo diámetro es la línea de los polos AB.

El número de meridianos terrestres puede considerarse como infinito.

328. Clases de magnitudes y sus unidades principales.—En las medidas usuales se consideran ordinariamente seis clases de magnitudes, a saber: de *longitud*, de *superficie*, de *volumen*, de *capacidad*, de *peso* y de *moneda*.

El sistema métrico debe pues contener seis especies de unidades:

1° El *metro*, para las longitudes;

2° El *metro cuadrado* o el *área*, para las superficies;

3° El *metro cúbico*, para los volúmenes;

4° El *litro*, para las capacidades;

5° El *gramo*, para los pesos;

6° El *bolívar* en Venezuela, la *peseta* en España, el *peso* en varias de las repúblicas latinas de América, el *franco* en Francia, etc.

Las unidades de tiempo y las que sirven para medir los arcos y los ángulos, no están sujetas a la división decimal, y no entran en el sistema métrico (**402** y **403**).

Múltiplos y submúltiplos.—Para valuar con mayor comodidad las diversas cantidades, se emplean, a más de las unidades principales, varios múltiplos y submúltiplos decimales de estas mismas unidades.

329. Los múltiplos se expresan, menos en las medidas de moneda, por medio de las siguientes voces griegas, antepuestas al nombre de la unidad principal:

Deca,	que significa	10;
Hecto,	—	100;
Kilo,	—	1 000;
Miria,	—	10 000;

Así,	Decámetro	significa	10 *metros*;
	Hectolitro	—	100 *litros*;
	Kilogramo	—	1 000 *gramos*;
	Miriámetro	—	10 000 *metros*.

330. Los submúltiplos se expresan por medio de las siguientes voces latinas, antepuestas al nombre de la unidad principal:

Deci, que significa *décima parte*;
Centi, — *centésima* —
Mili, — *milésima* —

Así, Decímetro significa $\frac{1}{10}$ *de metro*;

Centilitro — $\frac{1}{100}$ *de litro*;

Miligramo — $\frac{1}{1\,000}$ *de gramo*.

331. Medidas efectivas y ficticias.—Las medidas métricas se dividen en efectivas y en ficticias.

Las *medidas efectivas* son las que existen realmente, como: el metro, el litro, el kilogramo, etc.

Las medidas efectivas comprenden la unidad, su duplo y su mitad.

Las *medidas ficticias* o de *cuenta* no existen en realidad, y se emplean en el cálculo, como: el metro cuadrado, el área, etc.

CAPÍTULO I

MEDIDAS DE LONGITUD [1]

332. Definición.—Llámanse *medidas de longitud*, las que sirven para determinar la extensión en una sola dimensión.

Por ejemplo, la longitud de una calle, la altura de un árbol, el espesor de una pared, etc.

La unidad de las medidas de longitud es el *metro*.

[1] Al estudiar las varias medidas del sistema métrico decimal, véase en la página 239 el cuadro de correspondencia.

333. Múltiplos y submúltiplos del metro.—Los múltiplos del metro son:

El *decámetro*,	o *dam.*	que vale	10	metros
El *hectómetro*,	o *hm.*	—	100	—
El *kilómetro*,	o *km.*	—	1 000	—
El *miriámetro*,	o *Mm.*	—	10 000	—

Los submúltiplos del metro son:

El *decímetro*, o *dm.* que vale $\frac{1}{10}$ del metro

El *centímetro*, o *cm.* — $\frac{1}{100}$ —

El *milímetro*, o *mm.* — $\frac{1}{1\,000}$

El número 2 hectómetros 5 decámetros 8 metros 4 decímetros 3 milímetros se escribe: 258,403 metros.

334. Las medidas de longitud se dividen en *medidas de longitud propiamente dichas*, y en *medidas itinerarias*.

§ I. MEDIDAS DE LONGITUD PROPIAMENTE DICHAS

335. Definición.—Llámanse *medidas de longitud propiamente dichas*, las que sirven para valuar las longitudes poco considerables, como la altura de una casa, el ancho de una calle, etc.

336. Las medidas efectivas de longitud propiamente dichas son:

1° El *doble decámetro*, o 20 *m.*
2° El *decámetro*, o 10 *m.*
3° El *medio decámetro*, o 5 *m.*
4° El *doble metro*, o 2 *m.*
5° El *metro*, o 1 *m.*
6° El *medio metro*, o 0,50 *m.*
7° El *doble decímetro*, o 0,20 *m.*
8° El *decímetro*, o 0,10 *m.*

A estas medidas se les da la forma más conveniente para sus aplicaciones.

Las más usadas son:

1º El *doble decámetro* y el *decámetro*, fabricados en forma de cadena de agrimensor (fig. adjunta).

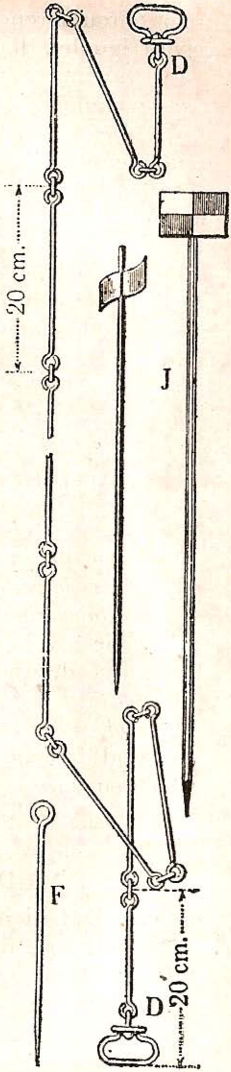
2º El *doble metro de madera*, dividido en decímetros y centímetros.

3º El *metro de madera*, en forma de *regla plana*.

4º Los *metros plegadizos*, de madera, cobre, hueso, marfil, formados de dos, cinco o diez partes.

5º El *metro* para el uso de los mercaderes de paño, tela, etc., en forma de regla cuadrada.

6º El *doble decímetro* y el *decímetro*, de cobre, marfil, madera, etc.



§ II. MEDIDAS ITINERARIAS

337. Definición. — Llámanse *medidas itinerarias* las que sirven para determinar las distancias geográficas, como la de Madrid a París.

La unidad de estas medidas es el *kilómetro*.

338. Las medidas itinerarias son: el *hectómetro*, el *kilómetro* y el *miriámetro*.

En las carreteras se suele indicar los kilómetros por mojones principales, y los hectómetros por mojones más pequeños.

339. Observación.—La cuarta parte del meridiano es igual a 10 millones de metros aproximadamente, luego el meridiano equivale a 40 millones de metros.

La circunferencia del meridiano se divide en 360 partes iguales, llamadas grados, y la longitud de un *grado* es igual a $\frac{40\ 000\ 000}{360} = 111\ 111$ metros aproximadamente.

340. Unidades marítima y terrestre.—Las unidades marítima y terrestre son la legua marina y la legua terrestre.

La *legua marina* o *geográfica* es de 20 al grado, es decir, que en la longitud de un grado, 111 111 metros, hay 20 leguas marinas; por lo tanto, la legua marina vale $\frac{111\ 111}{20} = 5\ 555$ metros.

La *legua terrestre* es de 25 al grado, y por consiguiente vale $\frac{111\ 111}{25} = 4\ 444$ metros.

En España, la *legua terrestre* es de 5 572 metros.

La *legua de posta*, o legua común, es de 4 kilómetros.

La *milla marina*, o tercera parte de la legua geográfica, tiene 1 852 metros aproximadamente; es la longitud de un arco de un minuto.

La *milla inglesa* es de 1 609 metros.

El *nudo* (que sirve a los marineros para apreciar la velocidad de los navíos) es la cientoveinteava parte de la milla marina, o sea 15,42 metros.

CAPÍTULO II

MEDIDAS DE SUPERFICIE

341. Definición.—Las *medidas de superficie* son las que sirven para determinar la extensión considerada en dos dimensiones, *largo y ancho*.

La unidad de superficie es el *metro cuadrado* (m^2), que es un cuadrado de un metro de lado.

Para valuar las superficies no hay medidas efectivas; nos valemos de las medidas efectivas de longitud.

342. Múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado.—Los múltiplos del metro cuadrado son:

1º El *decámetro cuadrado*, o *dam²*, que vale 100 metros cuadrados.

2º El *hectómetro cuadrado*, o *hm²* — 10 000 metros cuadrados.

3º El *kilómetro cuadrado*, o *km²*, — 1 000 000 de metros cuadrados.

4º El *miriámetro cuadrado*, o *Mm²*, — 100 000 000 de metros cuadrados.

343. Los submúltiplos son:

1º El *decímetro cuadrado*, o *dm²*, que vale la centésima parte del metro cuadrado.

2º El *centímetro cuadrado*, o *cm²*, que vale la diezmilésima parte del metro cuadrado.

3º El *milímetro cuadrado*, o *mm²*, que vale la millonésima parte del metro cuadrado.

344. Los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado son sucesivamente 100 veces mayores o menores unos que otros.

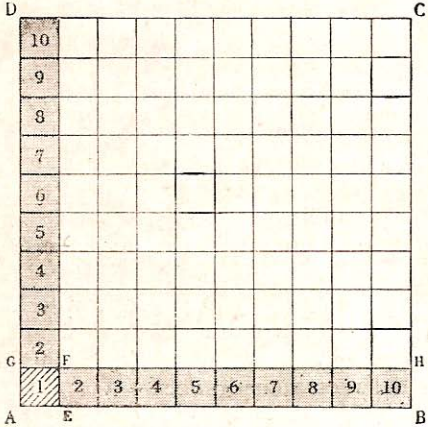
Para demostrar, por ejemplo, que *el metro cuadrado vale* 100 *decímetros cuadrados*, se pueden emplear dos métodos:

1º MÉTODO SINTÉTICO: Supongamos que tengo cierto número de decímetros cuadrados; pongo diez de ellos en línea recta unos a continuación de otros, y resulta el rectángulo ABHG, de un metro de largo y de un decímetro de ancho. Puedo poner al lado de este rectángulo otro igual, y también un tercero, un cuarto, etc.; cuando haya puesto 10 rectángulos tendré un cuadrado de un metro de lado, es decir, *un metro cuadrado*.

Ahora bien, cada rectángulo contiene 10 decímetros cuadrados, los diez rectángulos contendrán 10×10 ó 100 decímetros cuadrados. Luego *se necesitan* 100 *decímetros cuadrados para formar un metro cuadrado*.

2º MÉTODO ANALÍTICO: Sea ABCD un cuadrado de un metro de lado, esto es un metro cuadrado.

Dividamos el lado AD en diez partes iguales, y por los puntos de división tracemos paralelas al lado AB; el cuadrado ABCD quedará dividido en diez rectángulos iguales a ABHG, de 1 metro de largo y 1 decímetro de alto. Dividamos AB en diez partes



Area del cuadrado.

iguales, y por los puntos de división tracemos paralelas a AD, cada uno de los rectángulos que antes hemos formado, quedará dividido en 10 cuadrados iguales al cuadrado 1, y cuyo lado tiene un decímetro.

Teniendo cada rectángulo 10 decímetros cuadrados, los diez rectángulos tendrán 10×10, o sea 100 decímetros cuadrados.

Del propio modo se demostraría que el decámetro cuadrado vale 100 metros cuadrados o 10 000 decímetros cuadrados, y así sucesivamente.

345. NOTA: De lo que antecede, se infiere que si, en un número, la unidad es el metro cuadrado, el decámetro cuadrado ocupará el orden de las centenas, el hectómetro cuadrado el de las decenas de millar, etc.;

el decímetro cuadrado ocupará el orden de las centésimas, el centímetro cuadrado el de las diezmilésimas, etc.

Luego se necesitan dos cifras para representar cada orden de unidad de superficie.

Así, 1dam² 5m² 25 cm² escribirán: 105m² 0025.

346. División de las medidas de superficie.—Las medidas de superficie son de tres clases:

1° Las *medidas de superficie propiamente dichas*;
2° Las *medidas topográficas*;
3° Las *medidas agrarias*.

347. Medidas de superficie propiamente dichas.—Las *medidas de superficie propiamente dichas* se emplean en la valuación de las superficies de corta extensión, como la de una pared, de un patio, etc.

La unidad es el *metro cuadrado*.

348. Medidas topográficas.—Las *medidas topográficas* tienen por objeto la valuación de las superficies considerables, como la de una provincia, de un estado, etc.

La unidad es el *kilómetro cuadrado* o el *miriámetro cuadrado*.

Así, se dice, por ejemplo, la República de Venezuela tiene 912 000 kilómetros cuadrados de superficie.

349. Medidas agrarias.—*Medidas agrarias* son las que tienen por objeto la valuación de la superficie de los terrenos, como campos, cañaverales, cacaotales, etc.

La unidad es el *decámetro cuadrado* que entonces recibe el nombre de *área* (*a*).

El área tiene un múltiplo, la *hectárea* (*ha*) que vale 100 áreas o un hectómetro cuadrado; y un submúltiplo, la *centiárea* (*ca*) que es la centésima parte del área, o un metro cuadrado.

Lo que se puede resumir como sigue:

$$\begin{aligned} ha &= hm^2 &&= 10\,000 \text{ m}^2 \\ a &= dam^2 &&= 100 \text{ m}^2 \\ ca &= m^2 &&= 1 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Así, 15 hectáreas 7 áreas 28 centiáreas se escribirán:

150 728ca, o 150 728m².

SUPERFICIE DE ALGUNAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

350. Cuadrado.—La superficie de un cuadrado es igual al producto del lado l por sí mismo:

$$S = l \times l = l^2$$

351. Rectángulo.—La superficie de un rectángulo es igual al producto de la base B por la altura a:

$$S = B \times a.$$

352. Triángulo.—La superficie de un triángulo es igual al semiproducto de la base B por la altura a:

$$S = \frac{B \times a}{2}$$

353. Trapecio.—La superficie de un trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases B, b por la altura a:

$$S = \frac{B + b}{2} \times a.$$

354. Polígono regular.—La superficie de un polígono regular es igual al semiproducto de su perímetro p por la apotema a:

$$S = \frac{p \times a}{2}$$

355. Círculo.—La superficie de un círculo es igual al producto del número π (*pi*) por el cuadrado del radio R, o al producto de la cuarta parte de π por el cuadrado del diámetro D:

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

CAPÍTULO III

MEDIDAS DE VOLUMEN

356. Definición.—*Medidas de volumen* son las que sirven para valuar la extensión considerada en sus tres dimensiones: *longitud*, *latitud*, *altura* (*espesor o profundidad*).

357. División.—Las medidas de volumen se dividen en dos clases:

1° *Las medidas de volumen propiamente dichas;*
2° Las *medidas para la leña.*

§ I. MEDIDAS DE VOLUMEN PROPIAMENTE DICHAS

La unidad de las medidas de volumen es el *metro cúbico.*

358. Metro cúbico (**m^3**) es un cubo que tiene por caras seis cuadrados iguales, y cuyos lados miden un metro de longitud.

359. Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico. —Prácticamente no se emplean los *múltiplos* del metro cúbico; se dice diez, cien, mil, diez mil metros cúbicos.

Los *submúltiplos* son:

1° El *decímetro cúbico*, o *dm^3*, que es un cubo de un decímetro de lado, y vale $\frac{1}{1\,000}$ del metro cúbico.

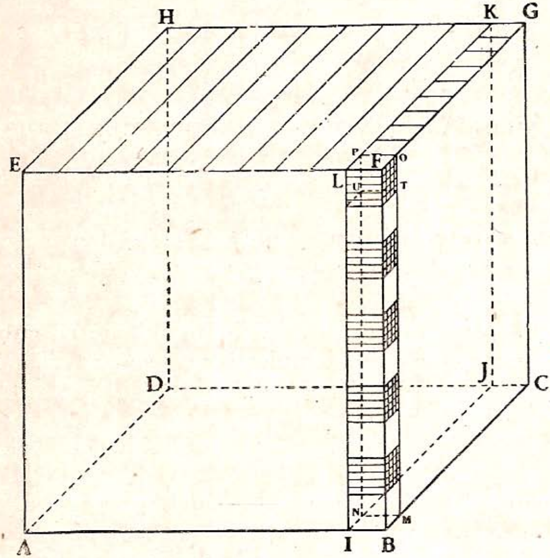
2° El *centímetro cúbico*, o *cm^3*, que es un cubo de un centímetro de lado, y vale $\frac{1}{1\,000\,000}$ del metro cúbico.

3° El *milímetro cúbico*, o *mm^3*, que es un cubo de un milímetro de lado, y vale $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$ del metro cúbico

360. Así pues:

El *metro cúbico* vale:	1 000	dm^3
	1 000 000 de	cm^3
	1 000 000 000 de	mm^3
El *decímetro cúbico* vale:	1 000	cm^3
	1 000 000 de	mm^3
El *centímetro cúbico* vale:	1 000	mm^3

Para demostrar que el metro cúbico vale 1 000 decímetros cúbicos, se emplean dos procedimientos:



Volumen del cubo.

1º Método sintético: Puede representarse el *metro cúbico* por medio de un cajón cuyo interior tenga un metro de profundidad, un metro de largo y un metro de ancho. El fondo de este cajón tiene un metro cuadrado o 100 decímetros cuadrados, y puede recibir 100 cubos de un decímetro de lado, lo que forma un piso de un decímetro de alto; dos pisos se elevarán a 2 decímetros de alto y contendrán dos veces 100 dm^3 o sea $100 \times 2 = 200$ dm^3.

Tres pisos, $100 \times 3 = 300$ dm³... y 10 pisos o el metro cúbico, $100 \times 10 = 1\ 000$ dm³.

2° Método analítico: Sea ABCDEFGH un metro cúbico. Por medio de secciones paralelas a una cara, podemos descomponerlo en diez capas semejantes a BCGFLIJK, la cual tiene 1 decímetro de espesor; siendo la cara BCGF un metro cuadrado, esta capa contiene 100 decímetros cúbicos (**344**). Luego las diez capas, o el metro cúbico, contendrán 100×10 o sea 1 000 decímetros cúbicos.

Por lo tanto, el *metro cúbico* vale 1 000 *decímetros cúbicos.*

Del propio modo puede probarse que el *decímetro cúbico* vale 1 000 cm³, y que el *centímetro cúbico* vale 1 000 mm³.

361. Nota: De lo que antecede se infiere que si, en un número, la unidad es el metro cúbico, el decímetro cúbico ocupa el orden de las milésimas, el centímetro cúbico el de las millonésimas, etc.

Luego se necesitan tres cifras para representar cada orden de unidad de volumen.

Así, 2m³ 25dm³ 7cm³ se escribirán: 2m³025 007.

No hay medidas efectivas para los volúmenes propiamente dichos. Para valuarlos, nos valemos de las propiedades geométricas y de las medidas efectivas de longitud.

VOLUMEN DE ALGUNOS SÓLIDOS

362. Cubo.—El volumen de un cubo es igual al cubo del lado l:

$$V = l \times l \times l = l^3.$$

363. Prisma.—El volumen de un prisma es igual al producto de la base B por la altura a:

$$V = B \times a.$$

364. Cilindro.—El volumen de un cilindro es igual al producto de la base B por la altura a:

$$V = B \times a.$$

365. Pirámide.—El volumen de una pirámide es igual al tercio del producto de la base B por la altura a:

$$V = \frac{1}{3} B \times a.$$

366. Cono.—El volumen de un cono es igual al tercio del producto de la base B por la altura a:

$$V = \frac{1}{3} B \times a.$$

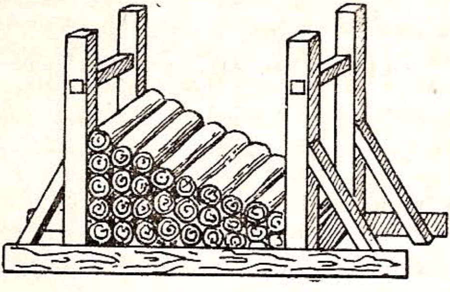
367. Esfera.—El volumen de una esfera es igual al tercio del producto de su superficie S por su radio r:

$$V = \frac{1}{3} S \times r.$$

§ II. MEDIDAS PARA LA LEÑA

368. La unidad de las medidas para la leña es el *estéreo* (*s*), que equivale a un *metro cúbico*.

El estéreo tiene un múltiplo que es el *decastéreo* (*das*), volumen de 10 estéreos, y un submúltiplo que es el *decistéreo* (*ds*), igual a la décima parte del estéreo.



Estéreo.

369. Las medidas efectivas para la leña son tres:

1° El *estéreo*.

2° El *doble estéreo*, medida de 2 estéreos.

3° El *medio decastéreo*, medida de 5 estéreos.

Nota: I. La altura varía según la longitud de la leña; de modo que el producto de las tres dimensiones dé siempre 1 estéreo, 2 estéreos, ó 5 estéreos.

La distancia entre los montantes es de 1 metro para el estéreo, 2 metros para el doble estéreo, y 3 para el medio decastéreo.

Ejemplo: Si la leña mide 1,08 metro de largo, y si quiero un medio decastéreo, diré: La distancia entre los montantes, 3 metros, multiplicada por 1,08 m., longitud de la leña, y por x la altura, o $3 \times 1{,}08 \times x = 5$ estéreos;

luego, $$x = \frac{5}{3 \times 1{,}08} = 1{,}54 \text{ metro.}$$

La altura será 1,54 metro.

II. La leña se vende también al peso y sobre todo por carretadas.

CAPÍTULO IV

MEDIDAS DE CAPACIDAD

370. Definición.—Llámanse *medidas de capacidad* las que sirven para medir *líquidos* como el vino, el alcohol, y *áridos* como el maíz, el trigo.

Su unidad principal es el *litro.*

371. Litro es una medida cuya capacidad es igual a un decímetro cúbico.

No acomodándose bien la forma cúbica a las necesidades del comercio, al litro y a las demás medidas de capacidad se les suele dar forma cilíndrica.

372. Múltiplos y submúltiplos del litro.—Los múltiplos del litro son:

1°	El *decalitro*, o *dal.*,	que vale	10 litros.
2°	El *hectolitro*, o *hl.*,	—	100 —
3°	El *kilolitro*, o *kl.*,	—	1 000 —

Este último se usa poco, y se dice más bien 100 decalitros, 10 hectolitros.

373. Los submúltiplos del litro son:

1° El *decilitro*, o *dl.*, que vale 0,1 de litro.
2° El *centilitro*, o *cl.*, — 0,01 —

El número 6 dal. 7 cl. se escribirá: 60,07 litros.

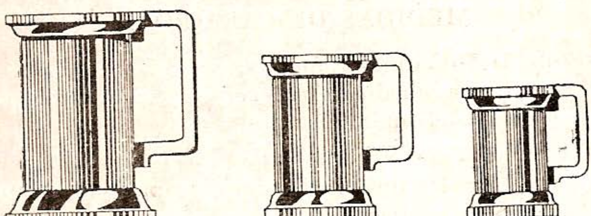
MEDIDAS EFECTIVAS DE CAPACIDAD

374. I. **Medidas efectivas para líquidos.**—Las medidas efectivas para líquidos se dividen en tres clases:

1° *Grandes medidas*: Las grandes medidas para líquidos tienen forma cilíndrica y la profundidad es igual al diámetro; se fabrican de cobre y de hierro fundido estañados.

Estas medidas se emplean en el comercio al por mayor y son cinco: *hectolitro, medio hectolitro, doble decalitro, decalitro, medio decalitro.*

Medidas para vino y licores



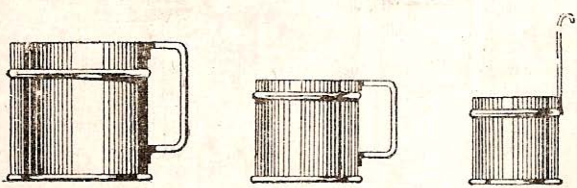
Doble litro. Litro. ½ litro.

Doble dl. dl. ½ dl. 2 cl. cl.

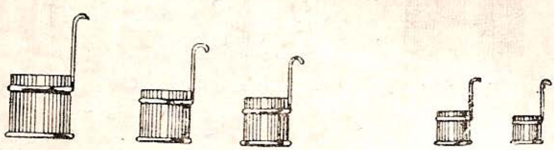
2° *Medidas para vino y licores*: Estas medidas, que se fabrican de estaño, hoja de lata, níquel, etc. (el cobre exceptuado), son cilindros cuya profundidad es el doble del diámetro; se emplean en el comercio al por menor y comprenden desde el *doble litro* hasta el *centilitro* inclusive.

3° *Medidas para el aceite y la leche*: Estas medidas, de hoja de lata, tienen forma cilíndrica, y su profundidad es igual al diámetro.

Medidas para el aceite



Doble litro. Litro. ½ litro.



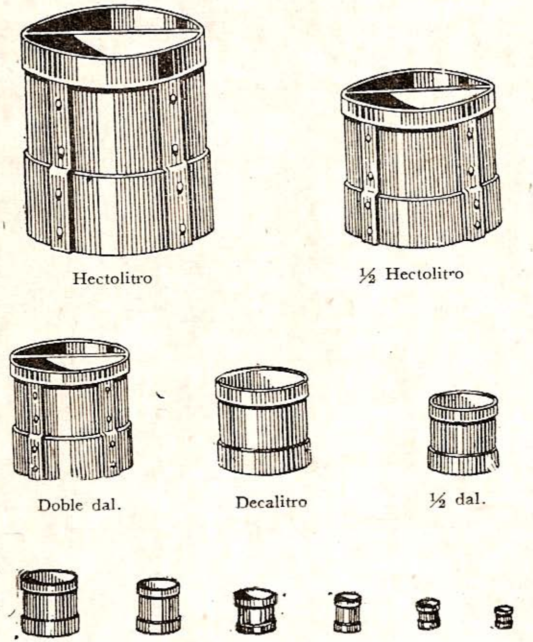
Doble dl. dl. ½ dl. 2 cl. [illegible] cl.

La serie de estas medidas comprende desde el *hectolitro* hasta el *centilitro* inclusive; pero en el comercio al por menor se usan tan sólo desde el *doble litro* inclusive.

II. **Medidas efectivas para áridos.**—Las medidas efectivas para *áridos* se construyen con madera de encina, de haya o de nogal; también pueden ser de cobre o de hierro fundido.

Estas medidas tienen forma cilíndrica y el diámetro es igual a la profundidad.

Medidas para áridos



Estas medidas son once: *hectolitro, medio hectolitro*; *doble decalitro, decalitro, medio decalitro*; *doble litro, litro, medio litro*; *doble decilitro, decilitro, medio decilitro.*

CAPÍTULO V

MEDIDAS DE PESO

375. Definición.—*Medidas de peso* o simplemente *pesas* son las que sirven para determinar el peso de los cuerpos.

Su unidad principal es el *gramo* (*gr.*).

376. Gramo es el peso que tiene, en el vacío, un centímetro cúbico de agua destilada, tomada a su mayor densidad, esto es, a la temperatura de 4 grados del termómetro centígrado.

377. Múltiplos y submúltiplos del gramo.—Los múltiplos del gramo son:

1°	El *decagramo*, o *dag.*,	que vale	10 gramos.
2°	El *hectogramo*, o *hg.*,	—	100 gramos.
3°	El *kilogramo*, o *kg.*,	—	1 000 gramos.
4°	El *quintal métrico*, o *q.*,	—	100 kg.
5°	La *tonelada métrica*, o *t.*,	—	10 q.

378. Los submúltiplos del gramo son:

1°	El *decigramo*, o *dg.*,	que vale	la 0,1 parte del gr.
2°	El *centigramo*, o *cg.*,	—	la 0,01 parte del gr.
3°	El *miligramo*, o *mg.*,	—	la 0,001 parte del gr.

El número 2 hectogramos 25 gramos 7 centigramos se escribirá: 225,07 gramos.

En el comercio al por menor se toma como unidad usual el *kilogramo*.

El *quintal métrico* y la *tonelada métrica* se emplean constantemente en los ferrocarriles, en los buques, etc., para las pesas muy grandes (1).

En la marina mercante, se dice, por ejemplo, buque de 300 toneladas para significar que la carga puede alcanzar hasta 300 000 kg.

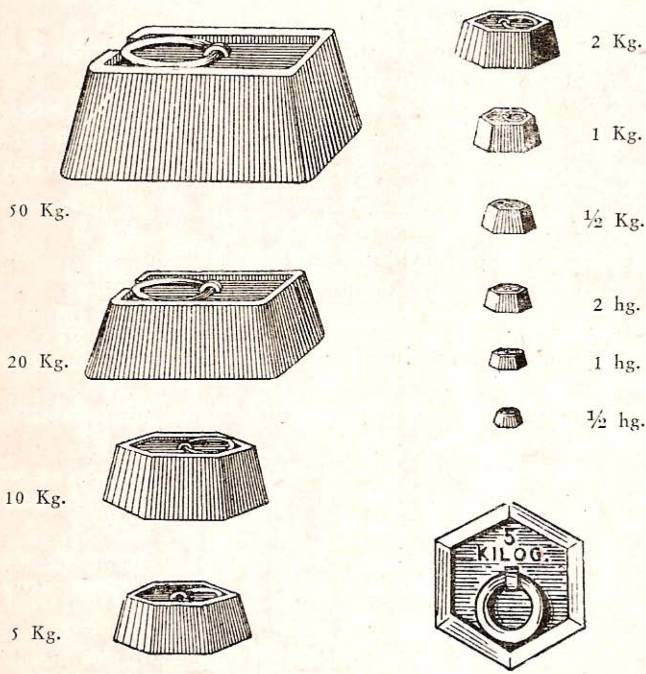
(1) En varias comarcas se emplea todavía el *quintal antiguo*, que vale 50 kg., y que no debe confundirse con el *quintal métrico*.

MEDIDAS EFECTIVAS DE PESO

379. Pesas de hierro fundido.—Hay 10 pesas de *hierro fundido*, a saber: 50 kg., 20 kg., 10 kg., 5 kg., 2 kg., 1 kg., medio kg., 2 hg., medio hg.

Pesas de hierro fundido

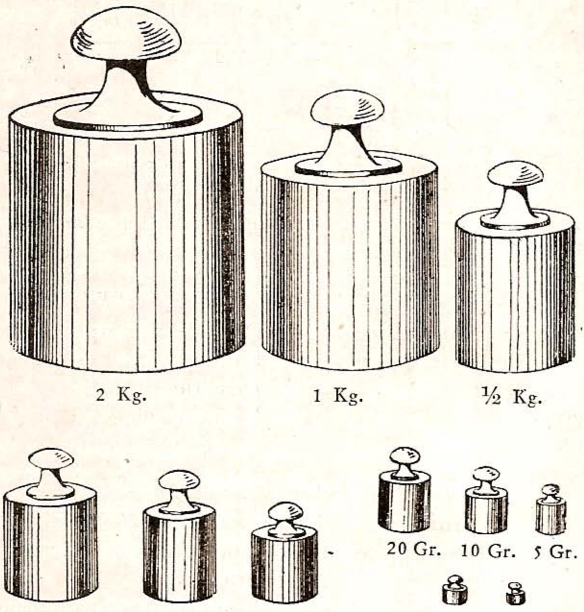
Tienen la forma de una pirámide truncada, y de aristas amortiguadas; su base es un rectángulo en las pesas de 50 y de 20 kg., y un exágono regular en las demás.



Para su fácil manejo, estas pesas están provistas de una anilla en su parte superior.

380. Pesas de latón.—Hay 14 pesas de latón, a saber: 20 kg., 10 kg., 5 kg., 2 kg., 1 kg., 500 gr., 200 gr., 100 gr., 50 gr., 20 gr., 10 gr., 5 gr., 2 gr., 1 gr. Tienen la forma de un cilindro, que remata en un botón.

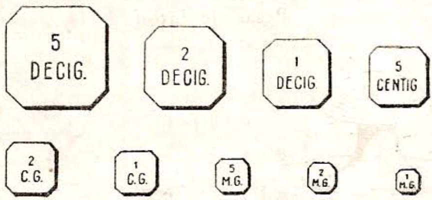
Pesas de latón



Hay también pesas huecas de forma troncónica, contenidas unas dentro de otras; la mayor es como una caja que da cabida a todas las demás.

381. Hay 9 pesas menores que 1 gramo que se fabrican de chapa de latón, de plata o de níquel, y que sirven para pesar el oro, la plata, las perlas, los diamantes, etc. También se emplean en los laboratorios químicos, farmacias, etc.

Pesas de chapa de latón



(Estas pesas están representadas en su tamaño natural).

Todas las pesas llevan grabadas en su parte superior la indicación de su peso.

382. Un juego de pesas medias comprende:

Una de 500 gramos	Dos de 10 gramos
Una de 200 —	Una de 5 —
Dos de 100 —	Dos de 2 —
Una de 50 —	Una de 1 —
Una de 20 —	

Densidad de los cuerpos

383. Definición.—Llámase *densidad de un cuerpo*, o peso específico, el cociente del peso de este cuerpo por el peso de igual volumen de agua.

Así, decir que la densidad de un cuerpo es de 6,5, significa que este cuerpo pesa seis veces y medio más que un volumen igual de agua.

EJEMPLO: *Búsquese el peso de una barra de hierro de 3 dm^3, siendo la densidad del hierro* 7,788.

Ya que un decímetro cúbico de hierro pesa 7 kg. 788, 3 decímetros cúbicos pesarán 3 veces más o 23 kg. 364.

384. Luego, el peso de un cuerpo es igual al producto de su volumen por su densidad.

Llamando P el peso de un cuerpo, V su volumen y D su densidad, tendremos:

$$P = VD \qquad (1)$$

El peso resulta en toneladas, si el volumen está expresado en metros cúbicos; en kilogramos, si se da el volumen en decímetros cúbicos; en gramos, si se da el volumen en centímetros cúbicos.

EJEMPLO: *¿Cuál es el peso de un cuerpo cuya densidad es* 19,25, *y su volumen,* 35 *cm³?*

$$P = 35 \times 19{,}25 = 673{,}75 \text{ gramos.}$$

385. Para encontrar el volumen de un cuerpo, se divide su peso por su densidad.

Dividamos por D los dos miembros de la igualdad (1).

$$\frac{P}{D} = V \qquad (2)$$

El volumen resulta en metros cúbicos, decímetros cúbicos o centímetros cúbicos, según se dé el peso en toneladas, en kilogramos o en gramos.

EJEMPLO: *¿Cuál es el volumen de un cuerpo que pesa* 17 *kg.* 400, *y cuya densidad es* 2,9?

$$V = \frac{17{,}400}{2{,}9} = 6 \text{ dm}^3.$$

386. Para encontrar la densidad de un cuerpo, se divide el peso por el volumen.

Dividamos por V los dos miembros de la igualdad (1).

$$\frac{P}{V} = D \qquad (3)$$

EJEMPLO: *¿Cuál es la densidad del azufre, sabiendo que* 25 *cm³ de este cuerpo pesan* 52 *gramos?*

$$D = \frac{52}{25} = 2{,}08.$$

Densidad de algunos cuerpos

Cuerpos	Densidad	Cuerpos	Densidad
Agua	1	Aluminio.........	2,56
Mercurio.........	13,596	Vidrio	2,52
Alcohol	0,792	Cristal	3,33
Agua de mar.....	1,026	Azufre	2,086
Leche	1,03	Granito*	2,70
Aceite de olivas ...	0,915	Basalto*..........	2,60
Vino	0,99	Mármol*	2,70
Hielo a 0°	0,916	Porcelana	2,24
Oro fundido......	19,26	Piedra de constr.* .	1,80
Plata fundida.....	10,47	Pórfido	2,71
Platino	21,53	Diamante*	3,515
Plomo fundido....	11,35	Acero............	7,765
Cobre	8,85	Latón	8,427
Hierro	7,788	Bronce*	8,838
Zinc	7,19	Fundición	7,200
Estaño	7,291	Petróleo..........	0,847
Antimonio	6,72	Aire	0,001293

Las densidades precedidas del signo * son densidades medias.

CAPÍTULO VI

MEDIDAS MONETARIAS

387. Definición.—Llámanse *medidas monetarias* o simplemente *monedas*, las que sirven para valuar el precio de las cosas.

En Venezuela el patrón monetario es el *Bolívar Oro* con un equivalente de doscientos noventa mil trescientos veintitrés millonésimos de gramo (gr. 0,290323) de *oro puro*.

La unidad comercial es el *Bolívar de Plata* que pesa 5 gramos y contiene 0,835 de *plata pura* y 0,165 de *cobre.*

388. Múltiplos y submúltiplos del bolívar.—Los *múltiplos* del bolívar no tienen nombres particulares; se dice 10 bolívares, 100 bolívares, etc.

El *submúltiplo* es:

El *céntimo* o la centésima parte del bolívar.

389. Clases de monedas.—Las monedas de Venezuela son de tres clases: de *oro*, de *plata*, y de *níquel.*

Al oro y a la plata se les agrega cierta cantidad de cobre para dar a las monedas mayor consistencia. Esto es lo que constituye la *liga.*

Monedas efectivas de Venezuela

MONEDAS	Valor	Ley	Diámetro	Peso exacto	Tolerancia En la ley	Tolerancia En el peso
ORO	100 Bs.	0,900	35 mm.	32g258	0,002	0,001
	20	0,900	21	6 4516	0,002	0,002
	10	0,900	19	3 2258	0,002	0,002
PLATA	5	0,900	37 mm.	25g	0,002	0,003
	2	0,835	27	10	0,003	0,005
	1	0,835	23	5	0,003	0,005
	0,50	0,835	18	2 500	0,003	0,007
	0,25	0,835	16	1 250	0,003	0,010
NIQUEL	12½ cms.	0,250	23 mm.	5g		
	5	0,250	19	2		

390. Ley de la moneda.—Llámase *ley de la moneda* a la proporción en que entran en la ligación el oro o la plata con el cobre, y el cobre con el estaño o el zinc.

También puede decirse que *ley de una ligación* es el cociente del peso de su metal fino por el peso total de dicha ligación.

Llamando L la ley, P′ el peso del metal fino, P el peso total, tendremos:

$$L = \frac{P'}{P} \qquad (1)$$

Multipliquemos por P los dos miembros de esta igualdad:

$$PL = P' \qquad (2)$$

391. Así para encontrar el peso del metal fino, se multiplica el peso total por la ley.

Dividamos por L los dos miembros de la igualdad (2):

$$P = \frac{P'}{L} \qquad (3)$$

392. Luego, para encontrar el peso total, se divide el peso del metal fino por la ley.

393. Monedas de oro.—La ley de las monedas de oro es de 900 milésimas; es decir que de las 1 000 partes en que se supone dividido el peso de una moneda hay 900 partes de *oro* y 100 de *cobre*.

394. Monedas de plata.—La ley de las monedas de plata es de 900 milésimas para la moneda de 5 Bs., y de 835 milésimas para las demás.

395. Monedas de bronce.—La ley de las monedas de bronce es de 950 milésimas de *cobre*, 40 de *estaño* y 10 de *zinc*.

Esta ley es la que rige también en *España*, *Francia*, *Italia*, *Bélgica*, *Grecia* y *Suiza*, pero sin convenio de circulación.

396. Tolerancia en ley y peso.—Como es muy difícil obtener con rigurosa exactitud el peso de las monedas, y la ley a que deben ajustarse, se admite una *tolerancia* en más y en menos. La tolerancia en más se llama en *fuerte*, y la en menos, en *feble*.

Para esta tolerancia, véase el cuadro precedente.

397. Talla de las monedas.—*Talla de las monedas* es el número de monedas que han de acuñarse del kilogramo de ligación monetaria.

La talla de cualquier moneda se halla dividiendo el *kilogramo* por el *peso* de esta moneda; o dividiendo el *valor* de un kilogramo de metal aleado por el *valor* de la misma moneda.

MONEDAS DE ORO	MONEDAS DE PLATA
De 100 Bs. hay 31 en el kg.	De 5 Bs. hay 40 en el kg.
,, 20 ,, ,, 155 ,, ,, ,,	,, 2 ,, ,, 100 ,, ,, ,,
,, 10 ,, ,, 310 ,, ,,	,, 1 ,, ,, 200 ,, ,, ,,
	,, 0,50 ,, ,, 400 ,, ,, ,,
	,, 0,25 ,, ,, 800 ,, ,, ,,

398. Valor relativo de las monedas.—El valor relativo de las monedas se funda en la siguiente convención:

En *igualdad de peso*:

El *oro* vale: { 1° 15½ veces más que la *plata*. 2° 124 veces más que el *níquel*.

La *plata* ,, { 1° 15½ veces menos que el *oro*. 2° 8 veces más que el *níquel*.

El *níquel* ,, { 1° 124 veces menos que el *oro*. 2° 8 veces menos que la *plata*.

Ya que 5 gramos de plata amonedada valen 1 Bolívar, 1 gramo vale $\frac{1}{5}$ de bolívar, y 1 kilogramo $\frac{1 \times 1\,000}{5}$ o sea 200 Bs.

Por consiguiente 1 kilogramo de *oro* amonedado vale 200 × 15,5 o sea 3 100 Bs., y 1 gramo 3,10 Bs.

1 kilogramo de *níquel* vale $\frac{200}{8}$, es decir 25 Bs., y 1 gramo vale $2\frac{1}{2}$ céntimos.

399. De lo que precede se deduce que, en *igualdad de valor*:

El *oro* pesa:
- 1° 15½ veces menos que la *plata*.
- 2° 124 veces menos que el *níquel*.

La *plata* ,,
- 1° 15½ veces más que el *oro*.
- 2° 8 veces menos que el *níquel*.

El *níquel* ,,
- 1° 8 veces más que la *plata*.
- 2° 124 veces más que el *oro*.

1 bolívar en *plata* pesa 5 gramos; 1 bolívar en *oro* pesará $\frac{5}{15,5}$, o sea 0 gr. 322 580; y 1 bolívar en *níquel* pesará 5 × 8, esto es 40 gramos.

RELACIONES ENTRE LAS MEDIDAS METRICAS ([1])

MEDIDAS DE SUPERFICIE

Relación de las medidas de superficie entre sí

El m^2	iguala a	1 *centiárea*
El dam^2	—	1 *área*
El hm^2	—	1 *hectárea*
El km^2	—	100 *hectáreas*
El Mm^2	—	10 000 *hectáreas*

Y recíprocamente:

La *centiárea*	iguala a			1 m^2.
El *área*	—	1 dam^2	o	100 m^2.
La *hectárea*	—	1 hm^2	o	10 000 m^2.

MEDIDAS DE VOLUMEN

Relación del metro cúbico con las medidas para la leña y con las de capacidad y de peso

Ya que	1 m^3	iguala	a 1 *estéreo*,
	10 m^3	igualan	a 1 *decastéreo*,
	100 dm^3	—	1 *decistéreo*.

Como el litro es igual a 1 dm^3, y 1 dm^3 de agua pesa 1 *kilo*,

1 *dl.*	iguala a	100 cm^3	y pesa	100 *gr.*
1 *cl.*	—	10 cm^3	—	10 *gr.*
1 *ml.*	—	1 cm^3	—	1 *gr.*
1 *dal.*	—	10 dm^3	—	10 *kg.*
1 *hl.*	—	100 dm^3	—	100 *kg.*
1 *kl.*	—	1 000 dm^3 ó 1 m^3	—	1 000 *kg.*

([2]) Consúltese el *Cuadro del sistema métrico decimal* (109×131 cm) de la colección G. M. Bruño, en el cual van representadas las medidas en su tamaño natural, y se da la correspondencia que tienen entre sí.

636. ¿Cuál sería, en metros, el largo de un alambre que daría la vuelta al globo terrestre, pasando por los polos?

637. ¿Cuál sería su longitud, en kilómetros?

638. ¿Cuántas veces mayor sería el metro, si se lo hubiera tomado igual a la diezmillonésima parte: 1º del semimeridiano, 2º del meridiano?

639. ¿Cuáles son las unidades principales del sistema métrico?

640. ¿Cuáles son las medidas que no están sujetas a la ley decimal?

641. Dígase las ventajas del sistema métrico decimal.

642. ¿Cuáles son las medidas efectivas de longitud?

643. ¿Cuál es la longitud media de un grado del meridiano, y cómo se encuentra?

644. ¿En qué lugar se escriben; 1º los decámetros cuadrados; 2º los hectómetros cuadrados; 3º los décimos del centímetro cuadrado; 4º las decenas del decímetro cuadrado?

645. Con relación al decámetro cuadrado, ¿qué son: 1º los décimos del hectómetro cuadrado; 2º las decenas del kilómetro cuadrado; 3º las decenas del decímetro cuadrado?

646. ¿Qué fracción del hectómetro cuadrado representan: 1º 1 250 m^2; 2º 75 dam^2; 3º 50 dm^2?

647. ¿Cuál es la unidad de las medidas agrarias?

648. ¿A qué múltiplo del metro cuadrado equivale el área, la hectárea, la centiárea?

649. ¿Qué parte de la hectárea representan: 1º 1 250 m^2; 2º 25 dm^2; 3º 1/10 de m^2?

650. ¿Qué parte del decámetro cuadrado representan: 1º 50 áreas; 2º 0 a. 005; 3º 20 cm^2?

651. ¿Cuáles son las medidas efectivas que se usan para medir las superficies?

652. ¿Cuál es la unidad de las medidas de volumen?

653. Con relación al metro cúbico, ¿qué son: 1º los decímetros cúbicos; 2º los centímetros cúbicos; 3º los milímetros cúbicos?

654. ¿Cuáles son las medidas efectivas que se usan para valuar los volúmenes?

655. ¿Cuál es la unidad de las medidas de capacidad?

656. ¿Qué son, respecto al metro cúbico, cada uno de los múltiplos y submúltiplos del litro?

657. ¿Cuáles son las medidas efectivas de capacidad?

658. ¿Cuál es la unidad usual de peso?

659. ¿Cuál es la mayor unidad de peso?

660. ¿El peso de qué volumen de agua pura representa cada uno de los múltiplos del gramo?

661. ¿Qué volumen de agua pura pesa: 1° un quintal métrico; 2° una tonelada métrica?

662. ¿Qué se llama densidad de un cuerpo?

663. ¿Cómo se encuentra la densidad de un cuerpo, siendo dados su volumen y su peso?

664. ¿Cómo se encuentra el peso de un cuerpo, cuando se conoce su volumen y su densidad?

665. ¿Cómo se encuentra el volumen de un cuerpo, conociendo su densidad y su peso?

666. ¿Cuál es la unidad de las medidas monetarias?

667. ¿Qué es ley, en las monedas?

668. En igualdad de valor: ¿1° cuántas veces más pesa la moneda de plata que la de oro; 2° cuántas veces más pesa la moneda de bronce que la moneda de oro y la de plata?

669. En igualdad de peso, ¿1° cuántas veces más vale la moneda de oro que la de plata; 2° cuántas veces más vale la moneda de oro que la de bronce?

PROBLEMAS

1° Medidas de longitud

670. Cuando el metro de paño vale Bs. 4,20, ¿a cómo se vende: 1° el decímetro; 2° el centímetro; 3° 60 centímetros?

671. Se ha medido la distancia de dos pueblos con un decámetro que tiene 10m052, y se ha encontrado de 4 350 m. Calcúlese la verdadera distancia.

672. Se ha medido una pieza de tela con un metro ya gastado, y que no tenía más que 98 cm.; la longitud encontrada es de 94m50. ¿Qué pérdida sufre el comprador, si la tela le ha sido dada a Bs. 4 el metro?

673. Las ruedas de una locomotora miden 5m65 de circunferencia; las de los vagones tienen 2m60. ¿Cuántas vueltas dará cada una de estas ruedas al recorrer una distancia de 315 km?

674. Hernando ha andado durante 15 minutos al paso gimnástico y durante 45 minutos al paso ordinario. Se pregunta qué camino ha recorrido, sabiendo que el paso gimnástico equivale a 0m 80 y el paso ordinario 0m 75; se sabe además que en un minuto se dan 170 pasos gimnásticos o 115 pasos ordinarios.

675. En 4 minutos un peón recorre 5 hm mientras otro recorre 6 en 5 minutos. ¿Cuál de los dos anda más ligero, y qué distancia los separará al cabo de 8 horas de marcha, si ambos salen del mismo punto y andan en la misma dirección?

676. Un automóvil recorre 8hm 9dam 4m por minuto. ¿Cuál es, en metros, su velocidad por segundo, y cuántos kilómetros habrá recorrido al cabo de 6 h. 5?

677. Se ha trazado un mapa en la escala de $\frac{1}{320\,000}$. ¿Qué distancia en el terreno representa una longitud de 0m70 en el mapa; y qué longitud representará en el mapa un viaje de 240 kilómetros?

678. Una de las ruedas de una bicicleta ha dado 5 490 vueltas y tiene 0m75 de diámetro; dígase el camino recorrido.

2º Medidas de superficie

679. Ambrosio compra una quinta de 5 hectáreas 7 centiáreas en Bs. 5 600; ¿a cómo le sale el metro cuadrado?

680. Los 5/7 de una hectárea de terreno importan Bs. 680; ¿cuánto costarán 28 áreas 6 centiáreas?

681. Un terreno de 5 hectáreas 75 centiáreas, que ha sido vendido a razón de 80 céntimos el metro cuadrado, había costado Bs. 1 527 la hectárea. ¿Cuánto se ha ganado en esta venta?

682. Se ha abierto un sendero de 450 metros de largo por 0m40 de ancho en un terreno tasado en Bs. 40 el área; ¿cuánto vale el sendero?

683. Un sendero de 0m50 de ancho ha sido abierto en un terreno tasado en Bs. 35 el área, y se han pagado por él Bs. 75,60. ¿Cuál es el largo de este sendero?

684. Para edificar una casa, se ha comprado un terreno por Bs. 9 000, a razón de Bs. 4 el metro cuadrado. Uno de los lados de este terreno rectangular mide 72 metros. ¿Cuál es la otra dimensión?

685. Se han pintado al óleo las 4 paredes de una sala de 3m80 de alto y de 5m60 de ancho. Se han pagado Bs. 34,47 por este trabajo, a razón de 24 céntimos el metro cuadrado. ¿Cuál es la longitud de la sala?

686. Habiéndose medido un campo con una cadena de agrimensor que sólo tenía 9m96, han resultado 3 hectáreas 16 áreas 20 centiáreas. ¿Cuál es la extensión real del campo?

687. Los cinco lagos mayores de los EE. UU. tienen las superficies siguientes: el lago Superior, 32 000 millas cuadradas; el lago Míchigan, 23 000 millas cuadradas; el lago Hurón, 24 000 millas cuadradas; el lago Erie, 7 800 millas cuadradas, y el lago Ontario, 6 900 millas cuadradas. Sabiendo que la milla cuadrada equivale a 259 hectáreas, dígase, en km², en cuánto la superficie del mar Caspio, que es de 400.000 km², pasa la de los 5 lagos.

688. Para entarimar un cuarto de 3m50 de largo por 4 m. de ancho, se emplean tablas de 3 m. de largo por 0m 10 de ancho. ¿Cuántas tablas se necesitarán, y cuál será el precio del metro cuadrado, si el entarimado importa Bs. 50?

689. Un campo rectangular de 155 m. por 38,5 que vale Bs. 7 el área ha de trocarse por un terreno que vale Bs. 500 la hectárea. ¿Cuál será la longitud de este terreno si se lo toma en un campo de 84 m. de ancho?

690. Leoncio ha comprado, a razón de Bs. 12 el área, un terreno rectangular cuya longitud es el doble de la anchura, y cuyo perímetro tiene 600 m. Hállese el precio del terreno.

691. Hállese el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen 8m25 y 2m50.

692. El área de un trapecio es de 2 040m²60; su altura tiene 15m y la base inferior 56m20. Calcúlese la base superior.

693. Un prado de forma rectangular, que tiene 530m40 por 248m50, se vendió a Bs. 28 75 los 500 metros cuadrados. Hállese el precio de ese prado.

694. Se quiere pintar las paredes de una sala que tiene 18 m. de largo, 9m50 de ancho y 4m50 de alto; dicha sala tiene 6 ventanas de 2 m. por 1m40. ¿Cuál será el importe del trabajo, si el metro cuadrado se paga a Bs. 0,35?

695. ¿Cuántas baldosas en forma de exágono regular de 0m80 de lado se necesitan para embaldosar una habitación de 6m50 por 4m 72?

3º Medidas de volumen

696. Una viga de 108 decímetros cúbicos de volumen ha costado, Bs. 15; ¿a cómo sale el metro cúbico?

697. ¿Cuál es el volumen de una pared que tiene 4m 50 de largo, 25 cm. de espesor y 3m 20 de alto?

698. Para construir una pared de $683m^3\,595$ se emplean ladrillos que. comprendidas las junturas tienen $1\,022$ cm³. ¿Cuántos millares se necesitarán y cuál será el gasto, si el ciento importa Bs. 1,40?

699. Un trozo cúbico de hielo tiene 1m 20 de lado; ¿qué peso será menester poner sobre el trozo para que su superficie superior venga a flor de agua, siendo la densidad de la nieve de 0,92?

700. Las dimensiones de un ladrillo son las siguientes: largo 23 cm., ancho 10 cm., alto 58 mm.; ¿cuántos ladrillos hay en un montón de 34 m^3?

701. En un patio rectangular, que tiene 14 m. por 8m 75, debe extenderse una capa de arena de 3 cm. de espesor. Calcúlese el número de metros cúbicos de arena que se necesitarán, y el gasto, en el supuesto de que 735 dm^3 de arena cuesten Bs. 0,95.

702. Hállese el volumen de un aljibe de forma cilíndrica, siendo de 4m 50 el radio de la base, y de 3m 60 la altura.

703. Tres bolas metálicas que tienen por diámetro, respectivamente 1m 20, 30 cm. y 40 cm., han de fundirse en una sola. ¿Cuál será su diámetro?

704. Una barra cilíndrica de hierro de 2 m. de largo termina por sus extremos en punta cónica. Cada uno de estos conos tiene 25 cm. de altura y su diámetro, que es el de la parte cilíndrica, tiene 9 cm. Hállese el volumen de la barra.

705. La más alta de las pirámides de Egipto tiene por base un cuadrado de 233 m. de lado, y su altura es de 146 m. Calcúlese: 1° su volumen; 2° la longitud de la pared que se podría edificar con sus materiales, siendo de 4 m. la altura de esta pared, y de 35 cm. su espesor.

4° Medidas de capacidad y de peso

706. Un mechero consume un hl. de gas por hora. Si el m^3 de gas importa Bs. 0,30, ¿cuál será el gasto anual de 3 mecheros encendidos 4 horas por día?

707. ¿Cuántos dobles decilitros de líquido hay que verter en un decalitro para llenarlo hasta la mitad?

708. Tres grifos dan a un aljibe: el primero da 3 litros por minuto, el segundo 12 litros cada 5 minutos; y el tercero, medio hectolitro cada 16 minutos. El aljibe se llena en 10 horas por los tres grifos simultáneamente. Dígase su capacidad en metros cúbicos.

709. Una vasija llena de aceite pesa 17 kg. 250; vacía pesa 2 kg. 610. ¿Cuál es su capacidad, siendo la densidad del aceite de 0,915?

710. La densidad del petróleo es de 0,847. ¿Cuál es la capacidad de un bote que, lleno de este aceite, pesa 40 kg. 840, y vacío, 9 kg. 300?

711. Si un litro de alcohol importa 76 céntimos, ¿cuánto vale un kilogramo, siendo la densidad del alcohol de 0,84?

712. Un trozo de hierro fundido, sumergido en una vasija llena de agua, desaloja 2 lit. 35 centil. ¿Cuánto pesa el trozo de hierro, si su densidad es de 7,200?

713. ¿Cuánto pesa un trozo de hielo de $12m^3640$, si la densidad del hielo es de 0,92?

714. Se ha puesto un pedazo de plomo en una vasija llena de agua pura. El peso del agua derramada es de 650 gr. La vasija con todo su contenido pesa ahora 6 kg. 7288 más que antes. ¿Cuál es la densidad del plomo?

715. Braulio vende 1 958 kg. de patatas a razón de Bs. 4,50 el quintal métrico; ¿qué suma recibirá en pago?

716. Se sabe que el aire pesa 770 veces menos que el agua, y que la densidad del oxígeno es igual a 1,1057 vez la del aire. ¿Cuánto pesa un litro de este gas?

717. ¿Cuál es la densidad de la plata amonedada a la ley de 0,835, sabiendo que la densidad de la plata es de 10,47, y la del cobre, de 8,85?

718. Un lechero vende cada día 20 litros de leche que pesan 20 kg. 510. Si la densidad de la leche es de 1,03, dígase el fraude cometido por el lechero.

719. No se conoce la capacidad de un barril, pero se sabe que lleno de vino de Málaga, pesa 81 kg. 860, y lleno de alcohol, pesa 69 kg. 098. Calcúlese: 1° la capacidad del barril; 2° su peso, vacío. Densidad del Málaga: 0,99; densidad del alcohol: 0,81.

720. Se gasta una suma de Bs. 158,10 para comprar fríjoles en Bs. 3,40 el doble dal.; ¿a cómo debe venderse el litro para ganar Bs. 65,10?

721. Un comerciante ha vendido por Bs. 3 528 el trigo que había comprado por Bs. 2 572,50; ¿cuántos hl. tenía, si ha ganado Bs. 3,25 por 100 kg. y si el hl. de trigo pesa 75 kg.?

5º Medidas monetarias

722. ¿Cuántos gramos de cobre deben añadirse a 200 gr. de plata para obtener una ligación de 0,9 de ley?

723. ¿Cuántos gramos de cobre deben añadirse a 200 gr. de plata para obtener una ligación con 0,835 de ley?

724. ¿Qué cantidad de plata pura se debe emplear para acuñar: 1º 250 piezas de 5 bolívares; 2º 500 piezas de 2 bolívares?

725. ¿Cuánto vale una barra de oro que tiene la ley de 0,900, y en la que han entrado 12 gramos de cobre?

726. Un cáliz de plata, ley de 0,800, pesa 950 gr.; ¿cuál es el peso del metal fino que entra en la liga?

727. Hállese la ley de una liga formada de 11 gr. 2/3 de oro, y de 2 gr. 5/7 de cobre.

728. ¿Cuál es el valor de la corona de plata, moneda de Inglaterra, cuyo peso es de 28 gr. 250, y la ley 0,925?

729. Una cadenilla de oro pesa 250 gramos y encierra 40 gr. de cobre; ¿cuál es su ley, y cuál su valor al precio del oro amonedado?

730. Una vasija cuyo peso es de 123 gramos y la capacidad 35 centilitros, se llena de agua destilada. ¿Qué suma en plata se necesita para equilibrarla?

731. Una suma en piezas de plata pesa 2 978 gr. 03; ¿cuál es el peso de la misma suma en monedas de oro?

732. Se han fundido juntos 100 duros de España con 100 táleres de Prusia. El duro, a la ley de 0,9, pesa 25 gr., y el táler, a la ley de 0,750 pesa 22 gr. 271. Hállese la ley de la liga resultante.

733. En el supuesto de que un hombre puede llevar 75 kg., ¿qué suma podría llevar: 1º en oro; 2º en plata?

734. Un obrero cuyo jornal es de Bs. 3,80 trabaja 6 días por semana; después de haber trabajado 52 semanas ha recibido una suma en plata que pesa 5 396 gr. Hállese el número de días en que no trabajó, y cuál fué la suma que ahorró si sus gastos diarios alcanzaron Bs. 1,50.

NUMEROS COMPLEJOS

NOCIONES GENERALES

401. Definición.—Números complejos son los concretos que constan de varias partes de diferente especie, pero que se refieren a una misma medida, y cuyo sistema de numeración no es decimal.

Así 3 años 4 meses 15 días; y 43 grados 18 minutos 17 segundos son números complejos.

Los números complejos se emplean en los pesos y medidas de los países que aún no han adoptado el sistema métrico, y sobre todo en la *medida del tiempo*, y en la *división de la circunferencia y valuación de los ángulos* (1).

402. Medida del tiempo.—El año civil se divide en 365 *días* repartidos en 12 *meses*; el día se divide en 24 *horas*; la hora, en 60 *minutos*, y el minuto, en 60 *segundos*.

Las subdivisiones de los segundos se escriben ordinariamente en quebrado decimal. Los días, horas, minutos y segundos se indican respectivamente por las letras *d*, *h*, *m*, *s*; así, 3 días 15 horas 20 minutos y 30 segundos, se escriben: 3d 15h 20m 30s. El año *bisiesto* tiene 366 días; por convención, son bisiestos los años cuyo milésimo es divisible por 4. Los *años seculares* no son bisiestos sino cuando las centenas del milésimo son divisibles por 4. Así, los años 1800 y 1900 no fueron bisiestos porque 18 y 19 no son divisibles por 4; pero lo será el año 2000.

Entre comerciantes, se suele considerar el año de 360 días; entonces se llama *año comercial*.

(1) Para las medidas antiguas y extranjeras, véanse los cuadros de la página 239, y al fin de la obra.

403. División de la circunferencia.—1° *División sexagesimal*: En geometría se divide la circunferencia en 4 *cuadrantes*; el cuadrante, en 90 *grados*; el grado, en 60 *minutos*, y el minuto, en 60 *segundos*. Las fracciones de segundos se escriben en forma de quebrados comunes o decimales.

Los grados, minutos y segundos se indican respectivamente por los signos °, ′, ″; así 17 grados 32 minutos 19 segundos, se escriben: 17° 32′ 19″.

404. 2° *División centesimal*: Hoy día tiende a generalizarse el dividir la circunferencia en 400 partes iguales, llamadas *grados centesimales*; cada grado se divide en 100 *minutos de* 100 *segundos decimales*.

Luego 1 grado sexag. vale $\frac{400}{360}$ o $\frac{10}{9}$ de grado centesimal.

1 minuto o 1 segundo sexag. vale $\frac{100}{60}$ o $\frac{5}{3}$ de min. o de seg. cent.

REGLA.—1° Para pasar del sistema ordinario al sistema centesimal, se multiplica por $\frac{10}{9}$ el número de grados, y por $\frac{5}{3}$ el número de minutos o de segundos sexagesimales.

2°. Inversamente para pasar del sistema centesimal al sistema sexagesimal, se multiplica respectivamente por $\frac{9}{10}$ y $\frac{3}{50}$.

EJEMPLO: *Transformar* 18° 15′ 47″ *sexagesimales en grados, minutos y segundos centesimales.*

$$18° = 18 \times \frac{10}{9} = 20 \text{ grados centesimales.}$$

$$15' = 15 \times \frac{5}{3} = 25 \text{ minutos centesimales.}$$

$$47'' = 47 \times \frac{5}{3} = 78 \text{ segundos centesimales } 1/3.$$

Luego $18^\circ\ 15'\ 47'' =$ 20 grados 25 minutos 78 segundos 1/3 centesimales.

§ I. TRANSFORMACIONES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

405. 1ª **Transformación.**—Convertir un número complejo a incomplejo equivalente, de orden inferior.

Redúzcanse a segundos $13^\circ\ 17'\ 18''$.

Como 1 grado vale $60'$, los 13° valdrán $60 \times 13 = 780'$; $780 + 17' = 797'$;

1 minuto vale $60''$, los $797'$ valdrán $60 \times 797 = 47\,820''$,

y añadiendo los $18''$ dados, tenemos $47\,838''$.

$$\begin{array}{r} 13^\circ \\ \times\ 60 \\ \hline 780' \\ +\ 17' \\ \hline 797' \\ \times\ 60 \\ \hline 47\,820'' \\ +\ 18'' \\ \hline 47\,838'' \end{array}$$

406. NOTA: También puede expresarse este resultado en quebrado ordinario de grados o de minutos: en efecto, puesto que 1 grado vale 60×60 ó 3 600 segundos, podemos escribir $47\,838''$ bajo la forma de

$\frac{47\,838}{3\,600}$ de grado, o también $\frac{47\,838}{60}$ de minuto.

407. REGLA.—Para convertir un número complejo a incomplejo equivalente de orden inferior, se reducen sus unidades de orden superior al orden inferior inmediato, y se suman con las de este orden que haya en el complejo; se hace lo mismo con esta suma, y así sucesivamente.

Aplicación.—Reducir a onzas, 10 arrobas, 15 libras, 10 onzas.

1 arroba vale 25 libras, 10 arrobas valdrán $25 \times 10 = 250$; $250 + 15 = 265$; 1 libra vale 16 onzas, 265 libras valdrán $16 \times 265 = 4\,240$; $4\,240 + 10 = 4\,250$.

$$\begin{array}{rl}
10 & \textit{arrobas} \\
\times\ 25 & \\
\hline
250 & \textit{libras} \\
+\ 15 & \\
\hline
265 & \\
\times\ 16 & \\
\hline
1590 & \\
265 & \\
\hline
4240 & \textit{onzas} \\
+\ 10 & \\
\hline
4250 & \textit{onzas}
\end{array}$$

408. Transformación.—Convertir un número incomplejo de especie inferior a complejo equivalente.

Conviértanse 3 745 314 segundos a días, horas, minutos y segundos.

3 745 314	60		
145	62 421	60	
25 3	2 42	104	24
1 31			4 d
114			
Residuo 54 s	*Residuo* 21 m	*Residuo* 8 h	

Este número contendrá tantos minutos cuantas veces 60 segundos estén contenidos en 3 745 314 segundos; resultan 62 421 m. con un residuo de 54 s. Del mismo modo, encontraremos tantas horas cuantas veces 60 minutos estén contenidos en 62 421; resultan 104 h. con un residuo de 21 m. En fin, habrá tantos días cuantas veces 24 horas estén contenidas en 104; resultan 4 días con un residuo de 8 h.

Luego, 3 745 314 s = $4^d\ 8^h\ 21^m\ 54^s$.

409. REGLA.—Para reducir un número incomplejo a complejo equivalente, se reduce el incomplejo propuesto a la especie superior inmediata; el cociente se reduce a la especie inmediata superior siguiente, y así sucesivamente, hasta obtener un cociente de la especie superior del complejo, o bien un cociente cero. El último cociente y los residuos de las divisiones

respectivas componen el complejo equivalente al incomplejo propuesto.

Aplicación.—Reducir 56 845 farthings a complejo.

Ya que 4 farthings valen 1 penique, que 12 peniques valen 1 chelín, y que 20 chelines valen 1 libra esterlina, tendremos:

56 845	4		
16	14 211	12	
8	2 2	1 184	20
			59 £
4	1 01	184	
5	51	4*ch.*	
1*f.*	3*p.*		

Luego, 56 845 f. = 59 £ 4 ch. 3 p. 1 f.

§ II. OPERACIONES CON LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Con los números complejos se ejecutan las mismas operaciones que con los números ordinarios, con tal que aquéllos se conviertan previamente en unidades de la menor denominación.

En la suma y en la resta, los datos han de ser homogéneos.

ADICIÓN

410. *Háganse las sumas siguientes:*

1er. Ejemplo

(1	(1	
17^{d}	14^{h}	35^{m}
39	8	50
53	13	23
110^{d}	12^{h}	48^{m}

2° Ejemplo

(1	(2	
17°	$35'$	$38''$
31	18	58
13	47	54
62°	$42'$	$30''$

En el 1er ejemplo, empecemos por la derecha. La suma de los minutos da 108^{m} que valen 1 hora que se lleva a la columna siguiente, y 48 minutos que se escriben; la suma de las horas da 36^h, que valen 1 día que se lleva a la columna siguiente, y 12^h que se escriben; la suma de los días da 110^d.

La operación es idéntica en el 2° ejemplo.

411. REGLA.—Para sumar los números complejos, se colocan unos debajo de otros de modo que se correspondan las unidades de igual denominación. En seguida, empezando por la derecha, se suman las unidades de cada columna; del total de la primera columna se sacan las unidades de la denominación inmediatamente superior, si las hubiere, para agregárselas; se escriben debajo de la raya las que sobren, o cero en el caso de no quedar ninguna. Se continúa hasta la última columna, con lo cual se termina la operación.

SUSTRACCIÓN

412. *Efectúense las sustracciones siguientes:*

1er. Ejemplo

$$\begin{array}{rrr} 131^\circ & 17' & 49'' \\ 19^\circ & 12' & 34'' \\ \hline 112^\circ & 5' & 15'' \end{array}$$

2° Ejemplo

$$\begin{array}{rrrr} 36^{sem} & 3^d & 12^h & 43^m \\ 9^{sem} & 3^d & 15^h & 47^m \\ \hline 26^{sem} & 6^d & 20^h & 56^m \end{array}$$

Para el 1er. ejemplo no hay dificultad alguna.

Análisis del 2° ejemplo. Empezando por la derecha, noto desde luego que 47 m., no pueden restarse de 43, por lo cual tomo de 12 horas 1 hora, que vale 60 minutos, los cuales añadidos a los 43, dan 103; $103 - 47 = 56$. Pasando a las horas, veo que no se pueden restar 15 horas de las 11 que quedan. Tomo de 3 días 1 día, que vale 24 h., las cuales añadidas a 11 dan 35 h.; $35 - 15 = 20$ h., y así sucesivamente.

Luego la resta es $26^{sem}\ 6^d\ 20^h\ 56^m$.

413. REGLA.—Para restar los números complejos, se escribe el sustraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las unidades de la misma denominación, y empezando por la derecha, se restan sucesivamente las unidades del sustraendo de sus correspondientes del minuendo. Si un número del sustraendo fuere mayor que su correspondiente del minuen-

do, se agrega a éste una unidad de la denominación inmediata superior, reduciéndola a unidades de la denominación que se resta; y al restar la denominación siguiente, se quita del minuendo la unidad tomada ya, o se la añade al sustraendo para que haya compensación. Se continúa del mismo modo la operación hasta que se hayan restado todos los términos.

MULTIPLICACIÓN

414. *Multiplíquense* 4 *años* 10 *meses* 18 *días por* 7.

4^a	10^m	18^d
		7
34^a	2^m	6^d

Empezando la operación por la derecha, digo: 7 veces 18 días dan 126^d, que valen 4^m 6^d; escribo 6 y llevo 4; 7 veces 10 meses dan 70^m más 4 que llevo, son 74 o 6 años 2 meses; escribo 2 y llevo 6; por fin, 7 veces 4 años dan 28^a, y 6 que llevo son 34 años, que completan el producto.

415. REGLA.—Para multiplicar un número complejo por otro incomplejo, se multiplica cada especie de unidad del multiplicando por el multiplicador, se sacan de cada producto las unidades que contenga de la especie inmediatamente superior, partiendo dicho producto por el número de unidades que contiene ésta de la especie inferior. Si queda residuo, se lo escribe debajo de la raya en su columna respectiva, y se lleva el cociente para sumarlo con el producto de la especie siguiente.

416. NOTA: Cuando se ha de multiplicar un número complejo por otro, se suele reducir los dos números a incomplejos de la última especie. Entonces el multiplicando es un número entero, y el multiplicador un número fraccionario cuyo denominador indica cuántas veces el orden menor está contenido en el mayor.

EJEMPLO: *Multiplíquense* 6 *horas* 25 *minutos* 4 *segundos por* 3° 42′.

6h 25m 4s valen 23 104 segundos.

$3^\circ\ 42'$ valen $3 \times 60' + 42'$, o sea $\frac{222}{60}$ de grados.

Multiplicando 23 104 por $\frac{222}{60}$, el producto representará segundos.

Se puede también reducir ambos números a quebrado impropio de la unidad principal (406); luego se multiplican entre sí los dos quebrados, y se transforma el resultado en número complejo, si es necesario.

DIVISIÓN

417. *Hállese el cociente de* 309° 27′ 52″ *por* 25.

$$
\begin{array}{llr|l}
309^\circ & 27' & 52'' & 25 \\
\cline{4-4}
\ \ 59^\circ & \quad :' & : & \\
\ \ \ 9\ \times 60 = & 540 & . & 12^\circ\, 22'\, 42''\, \frac{22}{25} \text{ de segundo.} \\
 & 567' & : & \\
 & \ \ 67 & : & \\
 & \ \ 17\ \times 60 = & 1020 & \\
\cline{3-3}
 & & 1072'' & \\
 & & 72 & \\
 & & 22 & \\
\end{array}
$$

Dividiendo 309° por 25, resultan 12° en el cociente y 9 de residuo; como un grado vale 60′, los 9° valdrán $60 \times 9 = 540'$, más los 27 del dividendo, lo que da 567′, que, divididos por 25, dan 22′ en el cociente, y así en adelante. El cociente pedido es $12^\circ\, 22'\, 42''\, \frac{22}{25}$ de segundo.

418. REGLA.—Para dividir un número complejo por un incomplejo, se empieza, como en la división ordinaria, por las unidades de orden superior, dividiendo cada unidad por el divisor.

Si hay residuo, se lo reduce a la unidad del orden inferior inmediato y se añaden al producto las de la misma denominación que haya en el dividendo, cuyo total se divide por el divisor.

Se continúa la operación del mismo modo hasta la última denominación dada.

419. NOTAS: I. Por medio de esta operación se pueden reducir a número complejo los quebrados ordinarios, como $\frac{47\,838}{3\,600}$ de grado, o $\frac{54\,784}{185}$ de hora.

EJEMPLO: *Divídanse* $12^d\ 15^h\ 30^m$ *por* $5\frac{8}{9}$.

Para ello basta reducir a quebrado $5\frac{8}{9}$, lo que da $\frac{53}{9}$;

multiplicar en seguida 12d 15h 30m por 9 y dividir el producto encontrado por 53.

II. Cuando se ha de dividir un número entero o decimal por un número complejo, se puede reducir el divisor a unidades del orden inferior; el número obtenido es el numerador de una fracción cuyo denominador es el número que indica cuántas veces el orden inferior está contenido en el mayor. Luego basta dividir el número dado por esta fracción.

EJEMPLO *Divídanse*: 546 *años por* 2 *años* 183 *días.*

2 años y 183 días dan 913 días; la cuestión se reduce a dividir

546 por $\frac{913}{365}$, lo que da por cociente:

$$\frac{546 \times 365}{913} = 218 + \frac{256}{913}.$$

III. Si hubiera que dividir un número complejo por otro, se podrían reducir ambos a unidades del orden inferior; en seguida, 1° si las unidades son de la misma especie, se hace la división con los números obtenidos; 2° si las unidades no son de la misma especie, la cuestión se convierte en la división de un quebrado por otro, siendo los denominadores respectivamente el número que indica cuántas veces el orden menor está contenido en el mayor.

1er. EJEMPLO: *Divídanse* $80^\circ\ 15'\ 25''$ *por* $12^\circ\ 3'\ 20''$.

Los dos números reducidos a segundos dan respectivamente 288 925 y 43 400; hay que dividir $\frac{288\,925}{3\,600}$ por $\frac{43\,400}{3\,600}$

$$\frac{288\,925}{3\,600} : \frac{43\,400}{3\,600} = \frac{288\,925 \times 3\,600}{43\,400 \times 3\,600} = 6 + \frac{163}{248}.$$

2° EJEMPLO: *Divídanse* 6 *horas* 25 *minutos* 4 *segundos por* 2° 25′.

6h 25m 4s dan 23 104 segundos.
2° 25′ dan 145 minutos.

Hay que dividir $\frac{23\,104}{3\,600}$ por $\frac{145}{60}$.

$$\frac{23\,104}{3\,600} : \frac{145}{60} = \frac{23\,104 \times 60}{3\,600 \times 145} = 2 + \frac{1\,426}{2\,175}.$$

CORRESPONDENCIA DE LAS MEDIDAS MÉTRICAS CON LAS ANTIGUAS MEDIDAS CASTELLANAS, Y VICEVERSA [1]

§ I. MEDIDAS DE LONGITUD

1 *legua* = 3 millas.
1 *cuadra* = 100 varas.
1 *milla* = $33\frac{1}{3}$ cuadras.
1 *vara* = 3 pies.

1 *pie* = 12 pulgadas.
1 *palmo* = 9 pulgadas.
1 *pulgada* = 12 líneas.
1 *dedo* = 9 líneas.
1 *línea* = 12 puntos.

MÉTRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	MÉTRICAS
1 kilómetro.	11 cuadras 968.	1 legua españ.	5 km. 572 m.
1 hectómetro.	1 cuadra 1968.	1 legua métrica.	5 km.
1 decámetro.	11 varas 968.	1 cuadra.	83 m. 60.
1 metro.	3p. 7 pul. 0,758 lín.	1 vara.	0,836 m.
1 decímetro.	4 pul. 3,7236 lín.	1 pie.	0,2786 m.
1 centímetro.	5,1679 lín.	1 pulgada.	0,0232 m.
1 milímetro.	0,5167 lín.	1 línea.	0,001935 m.

§ II. MEDIDAS AGRARIAS Y DE SUPERFICIE

1 *leg. cuad.* = 10 000 cuad².
1 *yugada* = 50 fanegadas.
1 *fanegada* = 576 estad².
1 *celemín* = 48 —
1 *cuartillo* = 12 —
1 *aranzada* = 400 —
1 *estadal cuad.* = 16 varas².

1 *caballería* = 16 cuadras².
1 *cuadra²* = 4 solares.
1 *solar* = 2 500 varas².
1 *vara²* = 9 pies².
1 *pie²* = 144 pulgs².
1 *pulgada²* = 144 líneas².
1 *línea²* = 144 puntos².

[1] Las antiguas medidas castellanas han sido tomadas de las leyes 1, 2, 3 y 4 del tít. 13, lib. 9° de la *Recopilación Castellana*; o leyes 1, 2, 3, 4 y 5 del tít. 9, lib. 9° de la *Novísima Recopilación*.

La vara de Burgos, que equivale a 0 m. 836, sirve de base al cálculo de estas tablas.

MÉTRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	MÉTRICAS
1 Mm^2	3,22 $leguas^2$.	1 $legua^2$.	3105,5 hectáreas.
1 km^2.	155,289 fans.	1 yugada.	32,298 hectár.
1 hm^2 o hectárea	894,469 estad.	1 caballería.	11,1798 hectár.
1 dam^2. o área.	143,0828 var^2.	1 $cuadra^2$.	69,8737 áreas.
1 m^2. o centiárea.	1,4308 var^2.	1 fanegada.	64,596 áreas.
1 dm^2.	1,1288 pie^2	1 aranzada.	44,729 áreas.
1 cm^2.	0,1854 $pul.^2$	1 solar.	17,4684 áreas.
1 mm^2.	0,2670 $lín^2$.	1 $vara^2$.	0,6988 m^2.

III. MEDIDAS DE VOLUMEN

1 *vara cúbica* = 27 pies cúbicos.
1 *pie cúbico* = 1 728 pulgadas cúbicas.
1 *pulgada cúbica* = 1 728 líneas cúbicas.

MÉTRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	MÉTRICAS
1 m^3.	1,711516 var^3.	1 $vara^3$.	0,584277 m^3.
1 dm^3.	79,8527 pul^3.	1 pie^3.	0,021624 m^3.
1 cm^3.	0,079852 pul^3.	1 $pulgada^3$.	0,012519 dm^3.
1 mm^3.	0,137985 $lín^3$.		

IV. MEDIDAS DE CAPACIDAD

(Para áridos)

1 *cahiz* = 12 fanegas.
1 *fanega* = 4 cuartillas.
1 *cuartilla* = 3 celemines.

1 *celemín* = 4 cuartillos.
1 *cuartillo* = 4 ochavos.
1 *ochavo* = 4 ochavillos.

(Para líquidos)

1 *moyo* = 16 cántaras.
1 *cántara* = 8 azumbres.

1 *azumbre* = 4 cuartillas.
1 *cuartillo* = 4 copas.

MÉTRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	MÉTRICAS
1 litro.	3,46 ochavos.	1 cahiz.	666 lit.
1 decalitro.	2,162 celem.	1 fanega.	55,5 lit.
1 hectolitro.	1,801 faneg.	1 cuartilla.	13,875 lit.
1 kilolitro.	1 cah. 6 fan. 018	1 celemín.	4,625 lit.
1 decilitro.	0,346 ochavos.	1 cuartillo.	1,156 lit.
1 centilitro.	0,0346 ochavos.	1 ochavo.	0,289 lit.
2,5824 hl.	1 moyo.	1 azumbre.	2,016 lit.
16,140 lit.	1 cántara.	1 cuartillo.	0,504 lit.

V. MEDIDAS DE PESO

MÉTRICAS	ANTIGUAS	ANTIGUAS	MÉTRICAS
1 gramo.	20,025 granos.	1 tonelada.	920 kg.
1 decagramo.	0,3478 onz.	1 quintal.	46 kg.
1 hectogramo.	3,478 onz.	1 arroba.	11,5 kg.
1 kilogramo.	2,173 lib.	1 libra.	460 gr.
1 miriagramo.	21,738 lib.	1 onza.	28,75 gr.
1 quint. mét.	2,1738 quint.	1 adarme.	1,796 gr.
1 tonelad. métr.	21,738 quint.	1 grano.	0,0499 gr.
1 decigramo.	2,002 gran.		
1 centigramo.	0,2 gran.		
1 miligramo.	0,02 gran.	1 onza.	37,8337 gr.
		1 dracma.	4,7292 gr.
		1 escrúpulo.	1,5764 gr.
		1 óbolo.	0,7882 gr.
		1 grano.	0,0657 gr.

Libra inglesa (*avoirdupois*) = 453 gr. 59.

Quintal inglés = 112 libr. ingl. = 50 kg. 80.

Tonelada inglesa de 20 quint. ingl. = 10 quint. métr. 16.

(Ordinarias)

1 *tonelada* = 20 quintales.
1 *quintal* = 4 arrobas.
1 *arroba* = 25 libras.
1 *libra* = 16 onzas.

1 *onza* = 16 adarmes.
1 *adarme* = 3 tomines.
1 *tomín* = 12 granos.

(Para el aceite)

1 *arroba* = 25 libras.
1 *cuartilla* = $6\frac{1}{4}$ libras.
1 *libra* = 4 panillas.

(Pesas de las farmacias)

1 *libra* = 12 onzas.
1 *onza* = 8 dracmas.
1 *dracma* = 3 escrúpulos.
1 *escrúpulo* = 2 óbolos.
1 *óbolo* = 12 granos.

(Para el oro)

1 *libra* = 2 marcos.
1 *marco* = 8 onzas.
1 *onza* = $6\frac{1}{4}$ castell.
1 *castellano* = 8 tomines.
1 *tomín* = 3 quilates.
1 *quilate* = 4 granos.

(Para la plata)

1 *libra* = 2 marcos.
1 *marco* = 8 onzas.
1 *onza* = 8 ochavos.
1 *ochavo* = 2 adarmes.
1 *adarme* = 3 tomines.
1 *tomín* = 12 granos.

(Para las piedras preciosas y las perlas)

1 *onza castellana* = 140 quilates.
1 *quilate* = 4 granos.

RELACIÓN ENTRE LA VARA, EL METRO Y LA YARDA

La *vara*, antigua unidad lineal en España, se usa todavía a menudo en aquel país y en los Estados Hispano-Americanos.

El *metro* es la unidad lineal en Francia y en los países que han adoptado el sistema métrico decimal.

La *yarda* es la medida lineal en Inglaterra y sus colonias y en los Estados Unidos de América.

1 vara = 0m836 = 0 yardas 914.
1 metro = 1 vara 196 = 1 yarda 09.
1 yarda = 0m914 = 1 vara 09.

Reducción de metros a varas y viceversa.—1° *Se reducen metros a varas,* multiplicando el número de metros por 1,196, porque un metro iguala a 1 vara 196.

Así, en 100 metros hay $100 \times 1{,}196 = 119$ varas 60.

Por lo tanto, en cada 100 metros hay un aumento de 19 varas 60, o sea un 19,60 %, y por exceso el 20 %, como se acostumbra en el comercio, para mayor facilidad.

Luego, *para reducir metros a varas, se añade al número de metros el* 20 % *o* 1/5 *de los mismos.*

Así pues, en 500 metros, por ejemplo, hay:

$$500 + \frac{500}{5} = 600 \text{ varas.}$$

2° *Se reducen varas a metros,* multiplicando el número de varas por 0m836, porque una vara iguala a 0m836.

Así en 600 varas, hay:

$$600 \times 0{,}836 = 501\text{m}60.$$

Sentado ya el principio de que en 100 metros hay 120 varas, por medio de una regla de tres se pueden encontrar los metros que hay en 600 varas.

En 120 varas hay 100 m.
600 — — x

de donde $x = \dfrac{100 \times 600}{120} = 500$ m., resultando una diferencia de 1m60 por las decimales despreciadas.

Luego, *para reducir varas a metros,* se multiplican las varas por $\dfrac{100}{120}$ o $\dfrac{5}{6}$.

Reducción de metros a yardas y viceversa.—1° *Se reducen metros a yardas,* multiplicando el número de metros por 1,09 porque en un metro hay 1 yarda 09.

Así, en 100 metros hay $100 \times 1{,}09 = 109$ yardas.

Por consiguiente, en cada 100 metros hay un aumento de 9 yardas, o sea un 9 %.

Luego, *para reducir metros a yardas,* se añade al número de *metros el* 9 % *de los mismos.*

Así pues, en 500 metros, por ejemplo, hay $500 + (5 \times 9) = 545$ yardas.

2° *Se reducen yardas a metros*, multiplicando el número de yardas por 0m914 que vale una yarda.

Así, en 545 yardas hay 545 $\times$ 0,914 = 498m13, resultando una diferencia de 1m87 por haber prescindido de las decimales.

Sentado el principio de que en 100 metros hay 109 yardas, para saber el número de metros contenidos en 545 yardas, por ejemplo, diremos:

En 109 yardas hay 100 m.
545 — — x

de donde $$x = \frac{100 \times 545}{109} = 500 \text{ m.}$$

Luego, *para reducir yardas a metros, se multiplica el número de yardas por* 100, *y se divide el producto por* 109.

Reducción de yardas a varas y viceversa.—1° *Se reducen yardas a varas*, multiplicando el número de yardas por 1,09 porque una yarda vale 1 vara 09.

Así, en 100 yardas hay 100 $\times$ 1,09 = 109 varas.

De donde resulta que en cada 100 yardas hay un aumento de 9 varas, o sea un 9 %.

Luego, *para reducir yardas a varas se puede añadir al número de yardas su* 9 %.

Así, en 500 yardas, por ejemplo, hay

$$500 + (5 \times 9) = 545 \text{ varas;}$$

o lo que es lo mismo, multiplicar el número de yardas por 109 y dividir el producto por 100.

$$500 \times \frac{109}{100} = 545 \text{ varas.}$$

2° *Se reducen varas a yardas*, multiplicando el número de varas por 0 yardas 914 que vale una vara.

Así, en 545 varas hay 545 $\times$ 0,914 = 498 yardas 13, con una diferencia de 1 yarda 87 por haber prescindido de las decimales.

Sentado el principio de que en 100 yardas hay 109 varas, para encontrar el número de yardas que hay en 545 varas, por ejemplo, diremos;

En 109 varas hay 100 yardas
545 — — x

de donde $$x = \frac{100 \times 545}{109} = 500 \text{ yardas.}$$

Luego, *para reducir varas a yardas, se multiplica el número de varas por* 100, *y se divide el producto por* 109.

Nota.—Por lo expuesto, se observa a primera vista que es enteramente idéntico el modo de reducir metros a yardas y yardas a varas, y viceversa el de reducir yardas a metros y varas a yardas. Esto proviene de que es una misma la relación entre el metro y la yarda, y entre la yarda y la vara.

En resumen, *para reducir*:

1º *Metros a varas*, se añade al número de metros el 20 % o 1/5 de los mismos.

2º *Varas a metros* se multiplican las varas por $\frac{100}{120}$, o 5/6.

3º *Metros a yardas, o yardas a varas*, se añade al número de metros o de yardas el 9 % de este número.

4º *Yardas a metros, o varas a yardas*, se multiplican las yardas o las varas por $\frac{100}{109}$.

PROBLEMAS

735. ¿Cuántos minutos hay en 1a 7m 28d 16h 37m?

736. Redúzcanse los valores siguientes a la especie superior: 1º 16 452 segundos a *grados*; 2º 78 692 horas a *años* comunes; 3º 90 060 segundos a *días*.

737. ¿Cuál es el total de las cantidades siguientes: 1º 12 años 10d 13h 42m 27s; 2º 16 años 102d 18h 24m 36s; 3º 19 años 8d 21h 54m 57s; 4º 23 años 13d 19h 49m 48s; 5º 29 años 18d 23h 58m 56s?

738. ¿Cuánto tiempo transcurrió entre el descubrimiento de América por Cristóbal Colón, el 12 de Octubre de 1492, y la muerte de este grande hombre, acaecida en Valladolid el 20 de mayo de 1506?

739. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido desde el 28 de Dbre. de 1856, a las 10 A. M. (antes del mediodía), hasta el 16 de enero de 1888, a las 4 P. M. (después del mediodía)?

740. ¿Cuántos días hay desde el 10 de marzo hasta el 8 de noviembre?

741. ¿Cuántos días hay desde el 15 de julio hasta el 23 de enero?

742. Una persona nacida el 29 de febrero de 1824, murió el 18 de marzo de 1864; ¿de qué edad murió, y cuántos aniversarios vió desde el día de su nacimiento?

743. Suponiendo que una persona nació en 29 de febrero de 1788, ¿cuántos aniversarios de su cumpleaños hubo hasta el 29 de febrero de 1840?

744. ¿Cuál es el producto de 7a 264d 23h 47m por 8?

745. Un sastre emplea 8h 46m 50s en hacer un vestido; ¿cuánto tiempo se tardará en hacer 11 vestidos semejantes?

746. Redúzcanse 6d 7h 10m 45s a decimales de semana.

747. ¿Cuál es el valor de los 0,367 de año, en días, etc.?

748. ¿Qué parte de 1 segundo es $\frac{1}{103\,608}$ de día?

749. ¿Cuántas horas, minutos y segundos dan los 9/75 de un día?

750. ¿Cuáles son los 5/13 de un año?

751. De los 3/7 de 1 día réstense los 7/9 de 1 hora.

752. Nueva York tiene 73°57′45″ de longitud O (meridiano de Greenwich); Brest 4°29′45″ también O. Si se manda un cable de Brest a Nueva York a las 4 de la tarde, ¿qué hora será en Nueva York cuando se entregue el cable al destinatario, en el supuesto de que transcurre 1 hora 1/2 entre la expedición del cable y su entrega al destinatario?

753. Con las mismas condiciones, ¿a qué hora llegaría a Brest un cable enviado de Nueva York a las 9 y 45 de la mañana?

754. Nápoles y Nueva York tienen más o menos la misma latitud, y a esta distancia del polo la longitud del paralelo es de 30.332 km. aproximadamente. ¿Cuál es la distancia que media entre ambas ciudades, sabiendo que la longitud de Nueva York es de 73°57′45″ O, y la de Nápoles, de 14°15′12″ E (meridiano de Greenwich)?

755. ¿Qué hora es en Nápoles y en Nueva York cuando es mediodía en Greenwich? (Véase el problema precedente).

756. ¿Qué hora es en Greenwich y en Nápoles cuando es mediodía en Nueva York?

757. ¿Qué hora es en Nueva York cuando son las 11 de la noche en Nápoles?

758. ¿Cuál es la suma de los dos ángulos siguientes: de 27°35′44″ y 19°50′28″?

759. La suma de dos ángulos es 90°; uno de ellos vale 18° 1 /2; ¿cuánto vale el otro?

760. Si catorce ángulos iguales tienen juntos 867°17′45″; ¿cuánto vale cada uno?

761. Se ha dividido una circunferencia en 17 partes iguales; ¿cuántos segundos tiene cada una de estas partes?

762. El año solar es de 365d 5h 48m 47s; una lunación dura 29d 12h 44m 3s. ¿Cuántas lunaciones hay en 18 años 11 días?

763. Si 30 cuartillas de trigo importan Bs. 46,50, ¿a cómo resulta el hectolitro?

764. Redúzcanse 45 metros: 1° a varas; 2° a yardas.

765. Redúzcanse 1308 varas: 1° a metros; 2° a yardas.

766. Redúzcanse 1962 yardas: 1° a metros; 2° a varas.

767. La compra de 5 arrobas 2 libras 9 onzas de una mercadería ha importado Bs. 138; ¿cuánto vale una arroba?

PARTE IV

NUMEROS PROPORCIONALES

CAPÍTULO I

RAZONES Y PROPORCIONES

I. RAZONES

420. Definición.—Llámase *razón* o *relación* de dos números de la misma especie, el cociente de la división del primero por el segundo.

Así, la relación de 15 a 5 es $\frac{15}{5} = 3$;

la relación de 4 a 20 es $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

421. *Relación de dos magnitudes* de la misma especie es la medida de la primera, si se toma la segunda como unidad.

Así, cuando se dice que la relación de dos cantidades es 5, esto significa que la primera contiene 5 veces a la segunda. Si la relación entre dos cantidades es 7/8, la primera no vale más que 7 veces la octava parte de la segunda, o los 7/8 de la segunda.

422. Términos de la razón.—Los dos números que se comparan son los términos de la razón. El primer término se llama *antecedente*, y el segundo, *consecuente*.

Por ejemplo, en la razón $\frac{7}{8}$, 7 es el *antecedente*, y 8 el *consecuente*.

Como se escribe una razón en forma de *quebrado*, se llaman también sus términos: *numerador y denominador*.

423. Razones inversas.—Dos razones son *inversas*, cuando los términos de la una son los mismos que los de la otra, pero dispuestos en orden inverso.

Así, $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{4}$ son razones inversas, lo mismo que $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$.

Según esto, *el producto de dos razones inversas es* 1.

424. Propiedades de las razones.—Las propiedades de las razones son las mismas de los quebrados, y las operaciones de cálculo se ejecutan del mismo modo. Así:

Para multiplicar una razón por un número, se multiplica su antecedente o se divide su consecuente por este número (201, 1°).

Para dividir una razón por un número, se multiplica su consecuente o se divide su antecedente por este número (201, 2°).

No se altera el valor de una razón cuando se multiplica o dividen sus dos términos por un mismo número (202).

Para multiplicar una razón por otra, se multiplican entre sí los antecedentes y los consecuentes (231).

Para dividir una razón por otra se multiplica la razón del dividendo por la razón del divisor invertida (237).

II. PROPORCIONES

425. Definición.—Llámase *proporción* la expresión de la igualdad de dos razones.

Por ejemplo, $\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$ en que cada razón es igual a 5.

426. Términos de la proporción.—Una proporción consta de 4 *términos*. El antecedente de la primera razón y el consecuente de la segunda son los *extremos*; el consecuente de la primera razón y el antecedente de la segunda son los *medios*.

En la proporción $\frac{15}{3} = \frac{20}{4}$, 15 y 4 son los *extremos*; 3 y 20 son los *medios*.

427. Representación y lectura de una proporción.—Para representar una proporción se escribe una razón a continuación de la otra, separadas entre sí con el signo = (**425**); o también del modo siguiente:

$$15 : 3 : : 20 : 4,$$

y se lee: 15 es a 3 como 20 es a 4.

428. PROPIEDAD FUNDAMENTAL.—En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Sea la proporción $\frac{4}{6} = \frac{14}{21}$; demostremos que

$$4 \times 21 = 6 \times 14.$$

En efecto, multipliquemos estas dos razones iguales por 6×21, *producto de los consecuentes*; resulta:

$$\frac{4 \times 6 \times 21}{6} = \frac{14 \times 6 \times 21}{21}$$

Simplifiquemos:

$$4 \times 21 = 6 \times 14.$$

429. RECÍPROCAMENTE, si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, estos cuatro números pueden formar una proporción.

Sean los productos iguales $3 \times 8 = 4 \times 6$; demostremos que los cuatro números, 3, 8, 4 y 6 pueden formar una proporción.

En efecto, dividamos los dos productos iguales por 4×8; los resultados serán iguales aún:

$$\frac{3 \times 8}{4 \times 8} = \frac{4 \times 6}{4 \times 8}$$

Simplifiquemos: $$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

430. Cuarta proporcional.—Llámase *cuarta proporcional* cualquiera de los cuatro términos de una proporción, cuando todos ellos son diferentes.

En la proporción $\frac{14}{21} = \frac{18}{27}$, cada uno de los cuatro términos es una *cuarta proporcional* con respecto a los otros tres.

De la propiedad fundamental se deduce el medio de encontrar un término cualquiera de una proporción cuando se conocen los otros tres:

1º **Si el término desconocido es un extremo, se multiplican los dos medios, y se divide el producto por el extremo conocido.**

Sea la proporción $$\frac{18}{15} = \frac{42}{x}.$$

Tenemos (**428**): $$18x = 15 \times 42;$$

luego $$x = \frac{15 \times 42}{18} = 35.$$

2º **Si el término desconocido es un medio, se multiplican los dos extremos, y se divide el producto por el medio conocido.**

Sea la proporción $$\frac{18}{x} = \frac{42}{35}.$$

Tenemos (**428**): $$42x = 18 \times 35;$$

luego $$x = \frac{18 \times 35}{42} = 15.$$

431. Media proporcional.—Se llama *media proporcional* cada uno de los medios de una proporción, cuando éstos son iguales. En este caso la proporción se llama *continua*.

En la proporción $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$, 6 es una *media proporcional* entre 4 y 9.

La media proporcional se llama también *media geométrica*.

Sea la proporción $\frac{8}{x} = \frac{x}{18}$, en la cual x es media proporcional entre 8 y 18.

La propiedad fundamental da:

$$x^2 = 8 \times 18 \text{ ó } 144;$$

luego $$x = \sqrt{144} = 12.$$

Por lo tanto, **en toda proporción continua, el término medio es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos;** o de otro modo:

La media geométrica entre dos números es igual a la raíz cuadrada del producto de estos números.

432. Tercia proporcional.—Llámase *tercia proporcional* el primero o el cuarto término de una proporción continua.

En la proporción $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$, 9 es una *tercia proporcional* con respecto a los otros términos; lo mismo es el 4.

Sea la proporción $\frac{5}{10} = \frac{10}{x}$.

Tenemos (**428**) $5x = 10 \times 10;$

de donde $$x = \frac{100}{5} = 20.$$

Luego, **para encontrar una tercia proporcional se divide el cuadrado de un medio por el extremo conocido.**

433. Transposición de los términos de una proporción.—La propiedad fundamental permite escribir una proporción de ocho maneras distintas, a saber:

(1) $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ $\qquad$ $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ (5)

(2) $\frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ $\qquad$ $\frac{6}{3} = \frac{8}{4}$ (6)

(3) $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$ $\qquad$ $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ (7)

(4) $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$ $\qquad$ $\frac{8}{4} = \frac{6}{3}$ (8)

En estas distintas formas hay proporción, pues el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Las igualdades (1) y (2) manifiestan que, *en una proporción, se pueden alternar los medios.*

Las igualdades (1) y (8) hacen constar que, *en una proporción, se pueden alternar los extremos.*

En fin, las igualdades (1) y (3) manifiestan que, *en una proporción, se pueden invertir los términos.*

434. PROPIEDAD.—En toda proporción se puede agregar o quitar a cada antecedente su consecuente, y resulta todavía una proporción.

Sea la proporción $\frac{12}{8} = \frac{9}{6}$; demostremos que

$$\frac{12+8}{8} = \frac{9+6}{6} \text{ y } \frac{12-8}{8} = \frac{9-6}{6}.$$

1° Si se agrega una unidad a cada una de las razones, resulta la igualdad:

$$\frac{12}{8} + 1 = \frac{9}{6} + 1.$$

Reduciendo a quebrado impropio, se tiene:

$$\frac{12 + 8}{8} = \frac{9 + 6}{6}. \qquad (1)$$

2° Restando una unidad de cada razón, tendremos del mismo modo:

$$\frac{12}{8} - 1 = \frac{9}{6} - 1.$$

o

$$\frac{12 - 8}{8} = \frac{9 - 6}{6}. \qquad (2)$$

Esta propiedad puede también enunciarse del modo siguiente: *En toda proporción, la suma o la diferencia de los dos primeros términos es al segundo, como la suma o la diferencia de los dos últimos es al cuarto.*

435. Consecuencias.—I. En las proporciones (1) y (2) alternemos los medios:

$$\frac{12 + 8}{9 + 6} = \frac{8}{6} \quad (3) \quad \text{y} \quad \frac{12 - 8}{9 - 6} = \frac{8}{6}. \quad (4)$$

Luego, **en toda proporción la suma o la diferencia de los dos primeros términos es a la suma o a la diferencia de los dos últimos, como el segundo término es al cuarto.**

II. De las proporciones (3) y (4) se deduce que

$$\frac{12 + 8}{9 + 6} = \frac{12 - 8}{9 - 6}. \qquad (5)$$

Así, pues, **en toda proporción, la suma de los dos primeros términos es a la suma de los dos últimos, como la diferencia de los dos primeros es a la diferencia de los dos últimos.**

III. Si en la proporción (5) se alternan los medios, resulta:

$$\frac{12+8}{12-8}=\frac{9+6}{9-6} \qquad (6)$$

Luego, **en toda proporción, la suma de los dos primeros términos es a su diferencia, como la suma de los dos últimos es a su diferencia.**

436. PROPIEDAD.—En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente es a su consecuente.

Sean las razones iguales $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{10}{5}$; demostremos que $\frac{4+6+10}{2+3+5}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{10}{5}$:

Llamando q el valor común de las razones dadas, tendremos:

$$\frac{4}{2}=q;\ \frac{6}{3}=q;\ \frac{10}{5}=q;$$

de donde

$$4=q\times 2$$
$$6=q\times 3$$
$$10=q\times 5.$$

Sumando estas 3 igualdades, y sacando q como factor común, resulta:

$$4+6+10=q\times(2+3+5).$$

Dividamos los dos miembros de esta igualdad por $2+3+5$:

$$\frac{4+6+10}{2+3+5}=q.$$

Pero q es el valor común de cada una de las razones dadas, luego:

$$\frac{4+6+10}{2+3+5}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}=\frac{10}{5}.$$

III. MAGNITUDES PROPORCIONALES

437. Magnitudes directamente proporcionales.— Dos magnitudes variables son *directamente proporcionales* cuando, haciéndose una de ellas 2, 3, 4..., m veces mayor o menor, la otra se hace también 2, 3, 4..., m veces mayor o menor.

Son directamente proporcionales:

El salario de un obrero y la duración de su trabajo;

El precio de una mercancía y su peso, si esta mercancía se vende según el peso;

El trabajo ejecutado y el número de obreros empleados en él;

El camino recorrido por un móvil que marche siempre con igual velocidad, y el tiempo; etc.

438. Magnitudes inversamente proporcionales.— Dos magnitudes variables son *inversamente proporcionales* cuando, haciéndose la primera 2, 3, 4..., m veces mayor o menor, la segunda se hace 2, 3, 4..., m veces menor o mayor.

Son inversamente proporcionales:

El número de obreros y el tiempo que emplean en ejecutar un trabajo dado;

La velocidad de un tren y el tiempo empleado para recorrer un espacio dado;

El largo y ancho de una pieza de tela en que se ha empleado igual cantidad de hilo; etc.

439. NOTA: Sucede a menudo que una cantidad es directamente proporcional a una o más, e inversamente proporcional a otras.

Así, el tiempo que se emplea en construir una casa es *directamente proporcional* a las dimensiones de las paredes, e *inversamente proporcional* al número de operarios que trabajen, y al número de horas de trabajo diario.

CAPÍTULO II

REGLA DE TRES

440. Definiciones.— Llámase *regla de tres* un problema en que, dados los valores correspondientes de varias magnitudes directa o inversamente proporcionales, se trata de buscar una de ellas, cuando se conocen todas las demás; o en otros términos:

Regla de tres es una operación por medio de la cual se busca el cuarto término de una proporción, de la cual se conocen los otros tres.

La regla de tres es *simple* cuando cada término de la proporción está representado por un solo número, o sólo se consideran dos especies de magnitudes.

Es *simple y directa* cuando las dos magnitudes son *directamente* proporcionales.

Es *simple e inversa* cuando las dos magnitudes son *inversamente* proporcionales.

La regla de tres es *compuesta* cuando se aplica a más de dos magnitudes.

Las reglas de tres pueden resolverse por el método de *reducción a la unidad* o por las *proporciones*.

REGLA DE TRES SIMPLE Y DIRECTA

441. PROBLEMA.—Un ciclista ha recorrido 150 kilómetros en 5 horas; ¿cuántos recorrerá en 7 horas?

Disposición de los datos

150 km.	5 horas
x	7 —

1° *Método de reducción a la unidad*: Si en 5 horas el ciclista recorre 150 kilómetros, en *una* hora, recorrerá un número de km. 5 veces menor, o $\frac{150}{5}$, y en 7 horas, un número 7 veces mayor, o $\frac{150 \times 7}{5}$.

Luego: $x = \frac{150 \times 7}{5} = 210$ km.

2° *Método de las proporciones*: Ya que las horas y los kilómetros son magnitudes *directamente* proporcionales, tenemos la proporción:

$$\frac{150}{x} = \frac{5}{7} \text{ o } x = \frac{150 \times 7}{5} = 210 \text{ km.}$$

442. REGLA.—En una regla de tres simple y directa, el valor de la incógnita es igual al valor de la magnitud de la misma especie, multiplicado por la razón directa de los otros dos números, esto es, por la relación del segundo con el primero.

REGLA DE TRES SIMPLE E INVERSA

443. PROBLEMA.—Si 12 obreros tardan 30 días en acabar una obra, ¿cuántos obreros serán menester para acabar la misma obra en 24 días?

Disposición de los datos

12 obreros	30 días
x	24 —

1° *Método de reducción a la unidad*: Si para acabar la obra en 30 días se necesitan 12 obreros, para acabarla en *un* día, se necesitarán 30 veces más obreros, ó 12×30, y para acabarla en 24 días, 24 veces menos, ó $\frac{12 \times 30}{24}$.

Luego, $x = \frac{12 \times 30}{24} = 15$ obreros.

2° *Método de las proporciones*: Siendo los obreros y los días magnitudes *inversamente* proporcionales, tenemos la proporción:

$$\frac{12}{x} = \frac{24}{30} \text{ ó } x = \frac{12 \times 30}{24} = 15 \text{ obreros.}$$

444. REGLA.—En una regla de tres simple e inversa, el valor de la incógnita es igual al primer valor de esta magnitud, multiplicado por la razón inversa de los otros dos números, esto es, por la relación del primero con el segundo.

REGLA DE TRES COMPUESTA

445. PROBLEMA.—Para hacer 180 metros de una obra, 15 obreros han trabajado 12 días, a razón de 10 horas por día; ¿cuántos días de 8 horas necesitarán 32 obreros, para hacer 600 metros de la misma obra?

Disposición de los datos

15 *obreros*	10 *horas*	180 *met.*	12 *días*
32	8	600	x

1° *Método de reducción a la unidad*: 15 obreros, trabajando 10 horas por día, para hacer 180 metros necesitan 12 días. *Uno* solo, en las mismas condiciones, necesitará 15 veces más tiempo, y 32 obreros, 32 veces menos o

$$12 \times \frac{15}{32}.$$

Si en vez de trabajar 10 horas por día, los obreros trabajan sólo una hora, se necesitará un número de días 10 veces mayor, y si trabajan 8 horas, un número 8 veces menor, o

$$12 \times \frac{15 \times 10}{32 \times 8}.$$

Éste es el tiempo empleado para hacer 180 metros; para hacer un metro, se necesitará un tiempo 180 veces menor, y para hacer 600 metros, 600 veces mayor,

$$12 \times \frac{15 \times 10 \times 600}{32 \times 8 \times 180}.$$

$$\text{Luego: } x = 12 \times \frac{15 \times 10 \times 600}{32 \times 8 \times 180} = 23 \text{ días } \frac{7}{16}.$$

2º *Método de las proporciones*: Consideremos primero solamente los obreros, y llamemos x' los días que necesitarán para hacer el trabajo, en el supuesto de que las demás magnitudes queden fijas. La proporción evidentemente será *inversa*, y tendremos:

$$\begin{matrix} 12 \text{ d} & 15 \text{ ob.} \\ x' & 32 \end{matrix} \quad \text{o} \quad \frac{12}{x'} = \frac{32}{15}; \quad x' = 12 \times \frac{15}{32}. \qquad (1)$$

Conocido el número de días, x', consideremos ahora el número de horas que trabajan diariamente, y es claro que se modificará el número de días. Llamemos x'' este nuevo número de días. Las razones son también *inversas*, y tendremos:

$$\begin{matrix} x' & 10 \\ x'' & 8 \end{matrix} \quad \text{o} \quad \frac{x'}{x''} = \frac{8}{10}; \qquad x'' = x' \times \frac{10}{8} \qquad (2)$$

Por fin, si comparamos los días con la cantidad de trabajo, y si los llamamos x, como la proporción en este caso es *directa*, tendremos:

$$\begin{matrix} 180 & x'' \\ 600 & x \end{matrix} \quad \text{o} \quad \frac{180}{600} = \frac{x''}{x}; \quad x = x' \times \frac{600}{180} \qquad (3)$$

Multipliquemos miembro por miembro las igualdades (1), (2) y (3):

$$x' \times x'' \times x = 12 \times \frac{15}{32} \times x' \times \frac{10}{8} \times x'' \times \frac{600}{180}.$$

Simplifiquemos:

$$x = 12 \times \frac{15 \times 10 \times 600}{32 \times 8 \times 180} = 23 \text{ días } \frac{7}{16}.$$

446. REGLA.—En una regla de tres compuesta, el valor de la incógnita es igual al producto del número que es de la misma especie que la incógnita, por las razones directas de las magnitudes que le son directamente proporcionales, y por las razones inversas de las magnitudes que le son inversamente proporcionales.

PROBLEMAS

768. Seis obreros ganan Bs. 76,80; ¿cuánto ganarán: 1º 10 obreros, 2º 36 obreros?

769. Por 17 2/3 días de trabajo, he pagado a mi dependiente Bs. 225,40; ¿cuánto le pagaré: 1º por 1 día; 2º por 45 1/2 días; 3º por 89 1/3 días?

770. Si 60 metros de tela importan lo mismo que 15 de paño, ¿cuántos metros de aquélla valdrán lo mismo que 75 de éste?

771. Durante 20 días de trabajo Héctor ha ganado Bs. 144; ¿cuánto habría ganado si hubiera trabajado 6 días más?

772. Suponiendo que 5 duraznos cuestan lo mismo que 7 manzanas, ¿cuántas frutas de éstas costarán lo mismo: 1º que 35 duraznos; 2º 280 duraznos?

773. Si 3 hombres pueden concluir un trabajo en 51 días, ¿cuántos deberán añadirse a éstos para concluirlo: 1º en 17 días; 2º en 9 días?

774. Habiendo hecho bancarrota, Néstor conviene con sus acreedores en pagarles Bs. 0,64 por cada bolívar; ¿cuánto recibirán todos ellos sobre una deuda de Bs. 2 563,50?

775. Dos piezas de paño de igual calidad cuestan: la una Bs. 335 y la otra Bs. 390; pregúntase la longitud de cada una, sabiendo que la 2ª tiene 11 metros más que la 1ª.

776. He comprado 4 950 cuadernos con la condición de recibir 6 más en cada ciento; ¿cuántos debe darme el vendedor?

777. Al revender ciertas mercaderías por Bs. 5 600, pierdo Bs. 4,50 por cada Bs. 100; ¿en cuánto las había comprado?

778. Si una docena de plumas de acero importa 61/4 céntimos, ¿cuánto costarán: 1° 10 3/4 gruesas; 2° 16 1/6 gruesas; 3° 25 2/3 gruesas?

779. ¿Cuántos metros de paño debe vender un comerciante para realizar una ganancia de Bs. 850, si gana Bs. 50 por cada 100 metros?

780. Dos números son entre sí como 5 es a 7 1/2, y el menor es 164,50; ¿cuál es el mayor?

781. Se trata de mandar hacer un capote para cada uno de los soldados de un batallón de 1 000 hombres: en cada capote entran 3 3/4 metros de un paño de 1 7/8 metros de ancho; el forro mide 1 1/4 de ancho; ¿cuántos metros de este último serán menester para forrar todos los capotes?

782. Para atraer la bendición de Dios sobre mis negocios me propongo dar Bs. 5 a los pobres siempre que gane Bs. 150; ¿cuánto habré ganado al ascender mi limosna a Bs. 100?

783. Para empapelar una sala, han sido menester 20 rollos de papel de 0m60 de ancho; ¿cuántos rollos habrían sido necesarios, a tener cada uno 0m75 de ancho?

784. Al respirar, un hombre vicia por día 7m^3 1/2 de aire; ¿qué cantidad de aire vicia en 15 horas?

785. Un hombre de 1m70 de estatura da 0m60 de sombra; ¿cuál es la altura de un campanario que en el mismo momento da 24m60 de sombra?

786. En una plaza hay 1 500 hombres provistos de víveres para 6 meses; ¿cuántos habrá que despedir, para que los víveres duren dos meses más, dando a cada hombre la misma ración?

787. ¿Cuántos hombres son menester para concluir una obra en 9 días, si 36 hombres pueden concluirla en 20?

788. Se han pagado Bs. 36 por el transporte de 450 kg. a 450 km.; ¿a qué distancia se habrán transportado 2 250 kg. por la misma suma?

789. Veinticuatro hombres han necesitado 15 días para concluir 1 575 metros de una obra; ¿cuántos días hubieran necesitado 16 operarios?

790. En 6 días, 16 obreros han construído una pared de 18 metros de largo, 6 de alto y 95cm de espesor; ¿cuánto hubieran tardado, siendo sólo 12 los obreros?

791. Nicéforo tarda 9 días 2/3 para tejer 69m 11/15 de tela; ¿cuánto tardará para tejer 52m 1/5?

792. Un tejedor ha labrado 41m 5/24 de tela en 5 días 3/4; ¿cuál es la longitud de la pieza, si necesita el tejedor 9 días 1/4 para la tejedura de toda ella?

793. La destreza de dos obreros está en razón de 7 a 12. ¿Cuántos metros de una obra puede hacer el segundo mientras el primero hace 175?

794. La suma de dos números es 490; su relación es 3/7; ¿cuáles son estos números?

795. Dos números están en la relación de 2 a 5; si se añade 175 a uno de ellos, y 115 al otro, ambos se hacen iguales; ¿cuáles son estos números?

796. Dos números son entre sí como 4 y 9, su diferencia es 1 205; ¿cuáles son estos números?

797. Se hacen disolver 250 gramos de azúcar en 5 litros de agua; ¿cuántos litros de agua deben añadirse a esta mezcla para que un litro de la nueva mezcla no contenga más que 8 gramos de azúcar?

798. Con Bs. 288 000 pueden mantenerse 500 hombres durante 6 meses, dándoles a cada uno Bs. 3,20 diarios; ¿a cuánto debe reducirse la ración para que los fondos duren 2 meses más?

799. Quince albañiles trabajaron juntos en la construcción de un puente, durante 12 días, e hicieron los 3/4 de él, después de esto se retiraron 7 de ellos; ¿en cuánto tiempo la concluyeron los restantes?

800. Para tejer 46 1/4 metros de liencillo, han sido menester 11 obreros que trabajaron 10 2/3 horas por día; ¿cuántos obreros que trabajan 8 4/5 horas por día, serán necesarios para tejer 41 5/8 metros del mismo liencillo?

801. Una plaza fuerte tiene 13 500 hombres de guarnición, vituallados para 8 meses; el comandante recibe orden de despedir tal número de hombres que los víveres puedan durar 4 meses más, dándoles la misma ración; ¿cuántos hombres deberá despedir el comandante?

802. Un agrimensor que ha trabajado durante 20 días, 8 horas diarias, ha recibido Bs. 120; ¿cuántas horas habrá empleado diariamente en otro trabajo de la misma especie, que ha durado 30 días, y por el cual ha recibido Bs. 225?

803. Andando 14 horas por día, un viajero camina 1 500 km. en 20 días; ¿cuántos km. caminará en 14 días, andando con la misma velocidad, sólo 12 horas por día?

804. Para cavar un pozo se han empleado 10 hombres que han trabajado durante 84 días y 13 horas por día; ¿cuántos días serían menester a 15 hombres para el mismo trabajo, si se ocupan 12 horas diarias?

805. Cuatro caballos, cuya fuerza respectiva está representada por 150 kg., tiran de un coche que pesa 1 640 kg.; ¿cuántos caballos serían menester para tirar del mismo coche, si su fuerza estuviera representada por 100 kg.?

806. Una pared de 60 metros de largo, 6 de alto y 75 cm. de espesor, ha sido construída en 12 días por 9 hombres que trabajan 12 horas por día; pregúntase qué altura tendrá otra pared que debe ser construída en 18 días por 16 hombres que trabajen 13 horas por día, si ha de tener 65 metros de largo y 1 metro de espesor.

807. Se sabe que en 12 días 11 obreros, que trabajan 10 horas 1 /2 por día, han hecho 152m46; como aún quedaban 80m85, 4 obreros los han concluído en 15 días, trabajando 12 horas 1 /4 por día; ¿cuáles obreros han sido más diestros?

808. Dos artesanos que trabajan juntos han ganado Bs. 352; el 1°, que ha trabajado durante 30 días y 12 horas por día, ha recibido Bs. 132; ¿cuántos días de 9 horas 1 /2 de trabajo ha debido emplear el 2° para ganar lo demás?

809. Si se conviene en que la gran muralla del Imperio Chino haya tenido 2 600 km. de longitud, 6m50 de latitud y 6 m. de altura, ¿qué espesor tendría un muro de 2m50 de altura que se pudiera construir con estos materiales alrededor de la tierra?

CAPÍTULO III

REGLA DE INTERÉS

447. Definiciones.—*Regla de interés* es una operación por medio de la cual se calcula la ganancia que produce una suma prestada, con arreglo a un tanto por ciento y un tiempo determinados.

448. En una regla de interés, se consideran el *capital*, el *interés* o *rédito*, el *tanto por ciento* y el *tiempo*.

Capital es la suma prestada; el que presta un capital se llama *prestamista*.

Interés o rédito es el beneficio que saca el prestamista.

Tanto por ciento es el interés que se paga por cada Bs. 100 ó 100 pesetas, etc., que se han recibido en préstamo, durante la unidad de tiempo, que por lo regular es un año.

Tiempo es el número de años, de meses o de días que queda impuesto un capital.

El año se considera como de 360 días, y los meses de 30 días. Sin embargo, para valuar el tiempo que ha transcurrido entre dos fechas, se cuentan todos los días, incluso el primero, y excluso el último.

449. Interés simple.—El interés se llama *simple* cuando, al fin de cada año, no se acumula al capital para devengar interés en los años siguientes.

450. Interés compuesto.—El interés se llama *compuesto* cuando, al fin de cada año, el interés se agrega al capital para devengar nuevos intereses.

En este capítulo, sólo trataremos del *interés simple*, dejando el *interés compuesto* para la *Parte comercial*.

451. NOTA: Los problemas de interés no son otra cosa que reglas de tres compuestas, y se resuelven según la regla dada (**446**).

Para resolver cualquiera de los cuatro casos de la regla de interés por medio de las proporciones, se admite que los intereses son directamente proporcionales a los capitales y al tiempo de colocación.

El interés se representa por I; el capital, por C; el tanto, por T; y el tiempo, por **t**.

452. CÁLCULO DE INTERÉS.—Problema.—¿Qué interés producirá un capital de Bs. 12 000 colocado al 5 % durante 4 años?

Disposición de los datos

Capital.	Tanto e interés.	Tiempo.
Bs. 100	Bs. 5	1 año
12 000	x	4 años

1° *Reducción a la unidad*: Si Bs. 100, en 1 año, producen Bs. 5 de interés, 1 bolívar producirá 100 veces menos, o $\frac{5}{100}$, y Bs.

12 000, 12 000 veces más, o $\frac{5 \times 12\,000}{100}$;

eso en 1 año; en 4 años, 4 veces más, o $\frac{5 \times 12\,000 \times 4}{100}$,

$$\text{Luego} \qquad x = \frac{5 \times 12\,000 \times 4}{100} = \text{Bs. } 2\,400.$$

2° *Por la cuarta proporcional*: Tenemos (**446**):

$$x = 5 \times \frac{12\,000}{100} \times \frac{4}{1} = \text{Bs. } 2\,400.$$

453. REGLA.—Para encontrar el interés, cuando se conoce el capital, el tanto y el tiempo, basta multiplicar la centésima parte del capital por el tanto por ciento y el tiempo expresado en años y fracción de año.

$$I = \frac{CTt}{100} \qquad (1)$$

454. CÁLCULO DEL CAPITAL.—Problema.—¿Cuál es el capital que, impuesto al 6 % ha producido Bs. 1 593,40 en 4 años 3 meses 12 días?

Disposición de los datos

Capital.	Tanto e interés.	Tiempo.
Bs. 100	Bs. 6	360 días
x	1 593,40	1 542

1° *Reducción a la unidad*: Si Bs. 6 de interés, en 360 días, provienen de un capital de Bs. 100, 1 bolívar de interés provendrá de un capital 6 veces menor, o $\frac{100}{6}$,

y Bs. 1 593,40, de un capital 1 593,40 veces mayor, o

$$\frac{100 \times 1\,593{,}40}{6};$$

Eso en 360 días; en 1 día, se necesitará un capital 360 veces mayor, o $\frac{100 \times 1\,593{,}40 \times 360}{6}$, y en 1 542 días, un capital 1 542 veces menor, o

$$\frac{100 \times 1\,593{,}40 \times 360}{6 \times 1\,542}.$$

Luego $$x = \frac{100 \times 1\,593{,}40 \times 360}{6 \times 1\,542} = \text{Bs. } 6\,200.$$

2° *Por la cuarta proporcional*: El capital y los intereses son directamente proporcionales; el capital y el tiempo lo son inversamente; luego (**446**):

$$x = 100 \times \frac{1\,593{,}40}{6} \times \frac{360}{1\,542} = \text{Bs. } 6\,200.$$

455. REGLA.—Para encontrar el capital, conociendo el interés, el tanto y el tiempo de colocación, se multiplica el interés por 100, y se divide este producto por el producto del tanto por el tiempo expresado en años y fracción de año.

De la fórmula (1) se puede sacar el valor de C.

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{CT}t}{100} \text{ o } \mathrm{CT}t = 100\ \mathrm{I}$$

y $$\mathrm{C} = \frac{100\ \mathrm{I}}{\mathrm{T}t} \qquad (2)$$

456. CÁLCULO DEL TANTO.—Problema.—¿A qué tanto deben imponerse Bs. 2 580, para que den un interés de Bs. 40 en 124 días?

Disposición de los datos

Bs. 2 580	124 días	Bs. 40
100	360	x

1° *Reducción a la unidad*: Si Bs. 2 580, en 124 días producen Bs. 40 de interés, 1 bolívar, en el mismo tiempo, producirá 2 580 veces menos, o $\frac{40}{2\,580}$,

y Bs. 100, 100 veces más, o $\frac{40 \times 100}{2\,580}$.

Si en 124 días resulta este interés, en 1 día resultará 124 veces menos, o $\frac{40 \times 100}{2\,580 \times 124}$,

y en 360 días, 360 veces más, o $\frac{40 \times 100 \times 360}{2\,580 \times 124}$

$$\text{Luego} \quad x = \frac{40 \times 100 \times 360}{2\,580 \times 124} = 4{,}5\ \%.$$

2º *Por la cuarta proporcional*: Siendo el interés directamente proporcional al capital y al tiempo, tendremos (**446**):

$$x = 40 \times \frac{100}{2\,580} \times \frac{360}{124} = 4{,}5\ \%.$$

457. REGLA.—Para encontrar el tanto cuando se conocen el capital, el interés y el tiempo, se multiplica el interés por 100, y se divide el producto por el capital multiplicado por el tiempo expresado en años y fracción de año.

De la fórmula (1) se saca el valor de T.

$$I = \frac{CTt}{100} \text{ o } CTt = 100\ I$$

y

$$T = \frac{100\ I}{Ct} \qquad (3)$$

458. CÁLCULO DEL TIEMPO.—Problema.—¿Durante cuánto tiempo deben imponerse a intereses Bs. 4 950 al 6 % para que produzcan Bs. 782?

Disposición de los datos

Bs. 100	Bs. 6	1 año
4 950	782	x

1º *Reducción a la unidad*: Si Bs. 100 para producir Bs. 6 de interés tardan 1 año, 1 bolívar tardará 100 veces más, o 1×100,

y Bs. 4 950, 4 950 veces menos, o $\frac{1 \times 100}{4\,950}$

Se tarda este tiempo para producir Bs. 6 de interés; para producir 1 bolívar, se tardará 6 veces menos, o $\frac{1 \times 100}{4\,950 \times 6}$, y para producir Bs. 782, 782 veces más, o $\frac{1 \times 100 \times 782}{4\,950 \times 6}$.

Luego $$x = \frac{1 \times 100 \times 782}{4\,950 \times 6} = 2 \text{ años } 7 \text{ meses } 18 \text{ días.}$$

2º *Por la cuarta proporcional*: El capital y el tiempo son inversamente proporcionales; el interés y el tiempo lo son directamente; luego (**446**):

$$x = 1 \times \frac{100}{4\,950} \times \frac{782}{6} = 2\text{a. } 7\text{m. } 18\text{d.}$$

459. REGLA.—Para encontrar el tiempo, cuando se conoce el capital, el interés y el tanto, se multiplica el interés por 100, y se divide el producto por el capital multiplicado por el tanto.

De la fórmula (1) se saca el valor de t.

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{CT}t}{100} \text{ o } \mathrm{CT}t = 100\,\mathrm{I}$$

y $$t = \frac{100\,\mathrm{I}}{\mathrm{CT}} \qquad (4)$$

460. Caso particular.—Este caso consiste en buscar el capital líquido o sólo el interés, cuando se conocen estos dos términos juntos, o *monto*, y todos los demás términos.

Para resolver los problemas de este género, hay que efectuar dos operaciones distintas: 1º buscar el interés de Bs. 100 por el tiempo dado, y añadir este interés a Bs. 100; 2º calcular el capital pedido.

EJEMPLO.—¿Cuál es el capital que, impuesto en 9 años al 8 %, da un monto de Bs. 860?

1º *Interés de Bs.* 100 *en* 9 *años*: Este interés es igual a

$$8 \times 9 = \text{Bs. } 72.$$

2º *Cálculo del capital*: Agregando Bs. 72 a Bs. 100, resultará un número de la misma especie que Bs. 860.

Disposición de los datos

Monto.	Cap. líquido.
Bs. 100×72	Bs. 100
860	x

Si Bs. 172 provienen de un capital líquido de Bs. 100, 1 bolívar provendrá de un capital 172 veces menor, o $\frac{100}{172}$,

y Bs. 860, provendrán de $\frac{100 \times 860}{172}$

Luego $$x = \frac{100 \times 860}{172} = \text{Bs. } 500.$$

461. Nota: Si en la fórmula (I) $I = \frac{CTt}{100}$ hacemos $\frac{T}{100} = r$, (la letra r representa el tanto o rédito de un peso) y sustituimos este valor, tenemos:

$$I = Crt; \text{ de donde: } C = \frac{I}{rt}; \ r = \frac{I}{Ct}; \ t = \frac{I}{Cr}.$$

Añadiendo C a ambos miembros de la igualdad $I = Crt$, resulta:

$$C + I = C + Crt = C(1 + rt)$$

Poniendo el monto, $M = C + I$, esto es, el *capital aumentado de sus intereses*, se podrá escribir:

$$M = C(1 + rt) \qquad (5)$$

Esta fórmula es muy útil en los problemas de *descuento*.

Métodos abreviados para el cálculo del interés.— Véase la Parte *comercial* (**528**).

PROBLEMAS

810. Búsquense los intereses:

1°	De Bs.	796,28	en 3 años,	al 6 %.
2°		750,75	„ 4 años, 8 meses,	al 5 %
3°		972,40	„ 1 año, 7 meses, 18 días,	al 7 %
4°		336	„ 5 meses, 15 días,	al 5 %
5°		1 560	desde el 9 de abril, hasta el 10 de Sep., al 5 ½ %.	
6°		1 728,19	desde el 7 de mayo de 1888, hasta el 17 de julio de 1889, al 5 ¼ %.	

811. Búsquese el capital:

1°	que al 4 %,	produce Bs.	2 048	de interés en	5 años	4 meses.
2°	„ 5¼ %	„	288	„	3 „	5 „ 18 días.
3°	„ 5¾ %	„	1 451,52	„	3 „	5 „ 17 „

812. Búsquese el tiempo en que han sido colocados los capitales siguientes:

1°	Bs. 625	al 6 %	para dar Bs.	262,50	de interés.
2°	1 779	„ 5 %	„	296,50	„
3°	2 178	„ 4 1/6 %	„	632,25	„

813. ¿A qué tanto deben colocarse los capitales siguientes:

1°	Bs. 978,20,	para alcanzar Bs.	48,91	de interés en	1 año.
2°	1 290	„ „	19,99½	„ „	124 días.
3°	675	„ „	142,31¼	„ „	44 meses.

814. He comprado una casa en Bs. 7 356, y la arriendo en Bs. 295; ¿a qué tanto por ciento he impuesto mi dinero?

815. ¿Qué negocio es más ventajoso entre colocar Bs. 3 374 al 4½ %, o comprar una quinta que se puede arrendar en Bs. 151,83?

816. Andrés ha impuesto los 4/5 de su capital al 4%, y el resto al 5 %; cada año saca con que pagar los jaeces y el alimento de su caballo, gasto que asciende a Bs. 117,60; ¿qué suma ha colocado en todo?

817. Si Braulio impuso Bs. 1 756,75 a intereses, el 29 de julio de 1908, ¿cuál fué el monto debido el 12 de Febrero de 1911, al 7 %?

818. Anselmo ha impuesto al 5 % cierto capital; al cabo de 4 años recibe, tanto por el capital como por los intereses, la suma de Bs. 10 305; ¿cuál fué dicho capital?

819. Indalecio ha impuesto Bs. 13 200 a intereses, parte al $5\frac{1}{4}\%$, y parte al $6\frac{1}{2}\%$, y ha recibido por los intereses al fin del año, Bs. 805,50; ¿qué parte del capital fué impuesta a cada uno de los tantos señalados?

820. Quintín ha impuesto a réditos una suma de dinero al $4\frac{1}{2}\%$, y en 10 años le ha producido Bs. 900; ¿cuál fué dicha suma?

821. Un dependiente, habiendo hecho algunos ahorros, quiere gozar de un rédito anual de Bs. 140; ¿qué capital necesita para ello, si lo impone al 5 %?

822. Pedro pide prestada la suma de Bs. 4 690, perteneciente a un menor de 15 años 3 meses 20 días de edad; se sirve de ella hasta que el dueño tenga 21 años; ¿qué cantidad deberá entonces a éste, al 6 % de interés simple?

823. Una docena de silletas importa Bs. 60; ¿en cuánto debe revenderse para que el dinero se halle colocado al 5 %?

824. Cristóbal vende por Bs. 350 un piano que le costó Bs. 280; ¿a qué tanto por ciento impone su dinero?

825. Marcos impone la mitad de su capital al 6 %, la tercera parte al 5 %, y lo demás al 4 %, y resulta así un rédito anual de Bs. 1 600; ¿cuál es este capital?

826. Antonio dice que la ganancia que ha obtenido durante los 9 años de sus negocios equivale al precio de 3 659 m. de paño estimado a Bs. 20,80 el metro, y desea saber qué beneficio anual le ha resultado, habiendo impuesto su capital al 5 %.

827. Fulgencio ha hecho una imposición de Bs. 35 680 en el Banco, y saca mensualmente un rédito de Bs. 223; ¿cuál es el tanto por ciento anual del interés que recibe?

828. Cirilo impone Bs. 4 000 a intereses, una parte al 4 %, y la otra al 3 %; la 1ª parte le produce Bs. 104 de interés anual más que la 2ª; ¿cuáles son estas dos partes?

829. Hilario ha vendido una hacienda por Bs. 14 150, con las condiciones siguientes: el comprador le paga Bs. 4 000 al contado, Bs. 4 375 al cabo de 6 meses, Bs. 3 125 al cabo de 10 meses, y el resto al cabo de 1 año 3 meses, con los intereses al 7 %; ¿a cuánto asciende todo lo que le ha pagado el comprador?

830. Habiendo ahorrado Mario, durante los 6 años de su tráfico, un capital de Bs. 2 965,10, desea saber al cabo de cuánto tiempo recibirá Bs. 889,53, suponiendo que ha impuesto su capital al 5 %.

831. Vicente tiene empleado en sus negocios un capital de Bs. 21 840 que le produce un $12\frac{1}{2}\%$ al año; pero por motivos de salud, deja el tráfico y presta su dinero al 7 $^3/_4$ %; ¿cuánto pierde a causa de este cambio en 2 años 5 meses 10 días?

832. ¿Cuál es el capital cuyas 4/5 partes impuestas al 6 %, y el resto al 7 %, dan Bs. 4 340 de interés?

833. Una suma de dinero impuesta durante 8 meses vale, junto con sus intereses, Bs. 1 277,20; la misma, impuesta durante 1 año 3 meses, al mismo tanto %, vale con los intereses simples Bs. 1 309,75; ¿cuál es la suma impuesta, y cuál el tanto del interés?

834. El capital de Bs.480 000 junto con sus intereses, vale al cabo de 3 años 7 meses Bs. 583 200; pregúntase a qué tanto fué impuesto este capital.

835. ¿Qué suma debo imponer en este momento para recibir dentro de 3 meses 18 días el valor de Bs. 875 de monto, siendo el tanto al 5 %?

836. El 1º de julio, un comerciante coloca en el Banco la suma de Bs. 2 476 al 3 % anual. Si el comerciante saca su dinero el 25 de octubre siguiente, ¿qué suma recibirá?

837. Ambrosio ha comprado una casa por Bs. 9 000; paga a buena cuenta Bs. 2 500. Pregúntase qué suma debe imponer al 5 % para pagar los intereses de lo que debe todavía, si el vendedor le cobra sólo el 4 %, de interés al año.

838. Una quinta, por la que se paga anualmente un rédito de Bs. 98, ha sido comprada por Bs. 37 200; ¿cuánto produce por 100, si se arrienda en Bs. 1 400 por año?

839. Braulio impone un capital de Bs. 5 800 durante 4 años; al cabo de este tiempo debe recibir, por el capital y los intereses simples, Bs. 6 278; ¿a qué tanto impuso su dinero?

840. Ramiro impone cierta suma al 3,5 %; al cabo de 8 años 3 meses saca esta suma y la impone con los intereses producidos al 5,5% ; ¿qué suma había impuesto al 3,5 %, sabiendo que recibe ahora un rédito anual de Bs. 200?

841. Un rentero impone la 1/3 parte de su capital al 6 % y lo demás al 4 %; ¿en qué relación se encuentran los intereses anuales producidos por ambas sumas impuestas?

842. Debo los intereses de Bs. 1 000 en 6 meses al 5 %; ¿durante cuánto tiempo debo prestar Bs. 920 al 4 % para compensar los intereses que debo?

843. Un capital impuesto a cierto tanto en 1 año y 5 meses valdría, con sus intereses, Bs. 4 497,50. Al cabo de 3 años y 2 meses valdría Bs. 4 865. Hállese el capital y el tanto.

844. La fortuna de Filiberto, está dividida en dos partes: la 1ª que es los 2/3, da Bs. 4,75 %; la 2ª da Bs. 360. Como los réditos anuales de Filiberto son de Bs. 1 200, se pregunta: 1° cuánto % da la 2ª parte; 2° cuál es la fortuna de Filiberto.

845. Patricio impone la 1/5 parte de su capital al 5 %, los 2/3 del resto al 4,5 % y lo demás al 5,5 %. Si el rédito anual asciende a Bs. 907,72, ¿cuál es el capital total y el valor de cada una de las imposiciones?

846. Los 3/7 de un capital se han impuesto al 4 %, los 3/5 del resto al 5 %, y lo demás al 5,5 %. Al cabo de 4 años, se sacan, tanto por el capital como por los intereses simples, Bs. 1 967,29; ¿cuál es el capital y cuáles las sumas impuestas a cada tanto?

847. La diferencia entre la fortuna de dos individuos es de Bs. 1 181,82. El uno ha impuesto su capital al 5 %, el otro ha comprado un fondo de comercio que le produce el 12 % neto. Siendo iguales los intereses de ambos, ¿cuál es la fortuna de cada uno?

848. Tres personas han impuesto juntas una suma de Bs. 2 400; al cabo de 8 años han sacado, por capital e intereses reunidos: la 1ª Bs. 1 008, la 2ª Bs. 1 152, y la 3ª Bs. 1 296; pregúntase a qué tanto impusieron la suma, y cuál es la imposición de cada una.

RESUÉLVANSE POR LOS MÉTODOS ABREVIADOS
LOS PROBLEMAS SIGUIENTES

849. Búsquese (por el método de las partes alícuotas del capital) el interés de las sumas siguientes:

1° de Bs. 2 000 al 6 % en 118 días;
2° de Bs. 5 400 al 5 % en 150 —
3° de Bs. 4 800 al $4\frac{1}{2}$ % en 95 —

850. Búsquese (por el método de las partes alícuotas de los días) el interés de Bs. 2 850:

1° al 6 % en 146 días;
2° al 5 % en 45 —
3° al 4 % en 120 —

851. Búsquese (por los divisores fijos) el interés de Bs. 5 400 en 150 días al 6 %, 5 %, $4\frac{1}{2}$ % y 4 %.

852. Calcúlese (por el método del 6%) el interés de Bs. 4 700, al $4\frac{1}{2}$ %, en 112 días.

853. Calcúlese al 3 % el interés total de las sumas siguientes:

Bs. 4 275	colocados del	3 de febrero al	4 de junio;
Bs. 24 850	—	6 de marzo —	25 de septiembre;
Bs. 5 000	—	15 de abril —	18 de agosto;
Bs. 1 245	—	4 de mayo —	8 de diciembre.

854. Calcúlese el interés de Bs. 15 420, al 5 % por 34 días.

855. ¿Cuál es el interés de Bs. 4 500 durante 62 días al 5 %?

856. Se ha impuesto la suma de Bs. 3 784,70 el 7 de octubre; ¿qué interés se sacará el 4 de abril siguiente, siendo el tanto al 6 %? (Los meses con su número propio de días.)

857. Ildefonso toma prestados Bs. 2 000 al 5 % el 30 de mayo; ¿qué suma debe volver, con capital e intereses, el 2 de agosto siguiente?

858. Un comerciante pide prestadas al 6 % las cantidades siguientes: Bs. 2 800 durante 140 días, Bs. 1 850 durante 42 días, y Bs. 2 000 durante 3 meses; ¿qué intereses debe pagar?

CAPÍTULO IV

REGLA DE DESCUENTO

462. Definiciones.—*Descuento*, en general, es una rebaja que se hace sobre una suma que quiere cobrarse antes de su vencimiento.

En el comercio, el *descuento* es la rebaja que hace un banquero por un *documento de comercio* (letra, pagaré), que paga antes de su vencimiento.

463. Por *vencimiento* de una letra, pagaré, etc., se entiende el cumplimiento del plazo en que deben ser pagados.

Ejemplo: Fulgencio tiene un pagaré de Bs. 400, con plazo de 3 meses; queriendo procurarse dinero, se dirige a un banquero que toma el pagaré y entrega al portador Bs. 400, *menos el descuento*.

En este ejemplo, Fulgencio, poseedor o *tenedor* del documento, ha vendido o *negociado* el pagaré; el banquero, *comprador* del documento, ha *descontado* el mismo pagaré.

464. En los documentos comerciales se consideran dos valores: el *nominal* y el *efectivo*.

854. Calcúlese el interés de Bs. 15 420, al 5 % por 34 días.

855. ¿Cuál es el interés de Bs. 4 500 durante 62 días al 5 %?

856. Se ha impuesto la suma de Bs. 3 784,70 el 7 de octubre; ¿qué interés se sacará el 4 de abril siguiente, siendo el tanto al 6 %? (Los meses con su número propio de días.)

857. Ildefonso toma prestados Bs. 2 000 al 5 % el 30 de mayo; ¿qué suma debe volver, con capital e intereses, el 2 de agosto siguiente?

858. Un comerciante pide prestadas al 6 % las cantidades siguientes: Bs. 2 800 durante 140 días, Bs. 1 850 durante 42 días, y Bs. 2 000 durante 3 meses; ¿qué intereses debe pagar?

CAPÍTULO IV

REGLA DE DESCUENTO

462. Definiciones.—*Descuento*, en general, es una rebaja que se hace sobre una suma que quiere cobrarse antes de su vencimiento.

En el comercio, el *descuento* es la rebaja que hace un banquero por un *documento de comercio* (letra, pagaré), que paga antes de su vencimiento.

463. Por *vencimiento* de una letra, pagaré, etc., se entiende el cumplimiento del plazo en que deben ser pagados.

Ejemplo: Fulgencio tiene un pagaré de Bs. 400, con plazo de 3 meses; queriendo procurarse dinero, se dirige a un banquero que toma el pagaré y entrega al portador Bs. 400, *menos el descuento*.

En este ejemplo, Fulgencio, poseedor o *tenedor* del documento, ha vendido o *negociado* el pagaré; el banquero, *comprador* del documento, ha *descontado* el mismo pagaré.

464. En los documentos comerciales se consideran dos valores: el *nominal* y el *efectivo*.

El valor nominal es la suma inscrita en el documento, esto es, la que debe ser pagada al vencimiento del plazo.

En el ejemplo anterior, Bs. 400 es el valor *nominal*.

El valor efectivo o actual es la suma pagada antes del vencimiento, esto es, la que se diera en cambio del documento si fuese negociado actualmente.

En el mismo ejemplo, el valor *efectivo* es Bs. 400 menos el descuento que ha cobrado el banquero.

465. El descuento de los documentos comerciales se calcula proporcionalmente a la suma y al tiempo indicados en ellos; si sólo se dice que el descuento está, v. gr., al 6 %, se entiende que es para un año.

A más del descuento, los banqueros, para cubrir sus gastos de escritura y sus riesgos, suelen cobrar un *derecho de comisión* proporcional al valor nominal del efecto. Este derecho puede variar de $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{2}$ %.

En fin, si el efecto es pagadero en otra ciudad que aquella en que se hace el descuento, el banquero hace otra rebaja, llamada *cambio de plaza*, que puede variar de $\frac{1}{20}$ a 2 %.

466. Clases de descuentos.—Hay dos clases de descuentos: el descuento *comercial* y el descuento *racional*.

I. DESCUENTO COMERCIAL

467. Definición.—*Descuento comercial* es el interés simple del valor nominal del documento, el cual valor se considera como capital.

Conviene observar que el *descuento comercial* y el *interés* se parecen sólo en el modo de calcularse: la suma que cobra el banquero sobre el importe del documento no es un interés, sino una remuneración determinada por el uso.

Los problemas de descuento comercial se resuelven como los de interés por medio de la fórmula

$$I = \frac{C\,T\,t}{100} \text{ o } Crt \ (\mathbf{461})$$

y de las que de ella se deducen; I representa aquí el descuento, C el valor nominal del efecto, T el tanto por ciento, t el tiempo en años, y r el tanto por 1 peso.

468. CÁLCULO DEL DESCUENTO Y DEL VALOR ACTUAL.—Problema.—¿Cuál es el descuento comercial y el valor actual de una letra de Bs. 1 487, pagadera dentro de 30 días al 6 %?

Disposición de los datos

Bs.	100	Bs. 6	360 días
	1 487	x	30

$$x = \frac{6 \times 1\,487 \times 30}{100 \times 360} = \text{Bs. } 7{,}435.$$

REDUCCIÓN A LA UNIDAD: Si sobre Bs. 100, por 360 días, se descuentan Bs. 6, sobre 1 bolívar se descontarán 100 veces menos, o $\frac{6}{100}$; y sobre Bs. 1 487, se descontarán $\frac{6 \times 1\,487}{100}$.

Por 1 día, en vez de 360, se descontará 360 veces menos, y por 30 días, 30 veces más, o $\frac{6 \times 1\,487 \times 30}{100 \times 360}$.

Luego: $$x = \frac{6 \times 1\,487 \times 30}{100 \times 360} = \text{Bs. } 7{,}435.$$

El valor *actual* de la letra será:

$$\text{Bs. } 1\,487 - 7{,}435 = \text{Bs. } 1\,479{,}565.$$

469. CÁLCULO DEL VALOR NOMINAL.—Problema.—¿Cuál es el valor nominal de una letra que, descontada por 8 meses, al 6 % de descuento externo, da por valor Bs. 768?

Hay dos operaciones:

1° Encontrar el descuento de Bs. 100 por 8 meses, al 6 %.

$$\begin{array}{cc} 12 & 6 \\ 8 & x \end{array} \qquad x = \frac{6 \times 8}{12} = \text{Bs. } 4.$$

2° Hallar el valor de la letra.

Disposición de los datos

Bs. 96 *de valor actual*	Bs. 100 *de valor nominal*
768	x

Si Bs. 96 de valor actual provienen de Bs. 100 de valor nominal, 1 bolívar de valor actual provendrá de un valor nominal 96 veces menor, y 768 provendrá de $\frac{100 \times 768}{96}$.

Luego: $$x = \frac{100 \times 768}{96} = \text{Bs. } 800.$$

470. Observación.—El descuento comercial no puede cobrarse sino sobre documentos de vencimiento corto, porque de otro modo saldrían resultados evidentemente erróneos; por ejemplo, el descuento de Bs. 1 000 en 20 años al 5 % sería $\frac{1\,000 \times 5 \times 20}{100} = 1\,000$; por tanto esta suma nada valdría actualmente, lo que es inadmisible.

II. DESCUENTO RACIONAL

471. Definición. — *Descuento racional* es el interés simple del valor actual del documento, según el tanto convenido.

En el descuento racional, *el valor actual* es la suma que, colocada actualmente a intereses simples y al mismo tanto, llegará a ser en el momento del vencimiento, el *valor nominal*. Por consiguiente, en esta clase de descuento se debe considerar el valor nominal como un capital unido a sus intereses, o como el *monto*.

472. Este descuento se llama *racional*, porque la suma descontada, impuesta a intereses el día en que se hace el descuento, llega a ser, en el momento mismo del vencimiento, igual al valor nominal de la letra, lo que no sucede en el descuento comercial.

Así, en el descuento *comercial*, Bs. 100 es una suma que debe *descontarse*; en el descuento racional, Bs. 100 sería una suma *descontada*, y Bs. 105, la suma que se debe descontar, supuesto el vencimiento de 1 año, y el tanto 5 %.

Ya que en el descuento racional debe considerarse el valor nominal como un capital unido a sus intereses, si llamamos C el valor actual, I sus intereses, el valor nominal o *monto* será C + I o M; la fórmula (5) dada ya para los intereses, es $M = C(1 + rt)$ (**461**)

de donde $$C = \frac{M}{1 + rt}.$$

El interés simple de esta suma será el *descuento racional* del valor nominal M; tenemos pues:

$$I = \frac{M\,rt}{1 + rt}.$$

Observemos que Mrt sería el descuento comercial del valor nominal M; así, pues, el *descuento racional es el cociente del descuento comercial por* $1 + rt$.

Este descuento no se usa en el comercio; por lo tanto nos contentaremos con indicar la marcha que se ha de seguir para calcularlo.

473. CÁLCULO DEL VALOR ACTUAL Y DEL DESCUENTO RACIONAL.—Problema.—¿Cuál es el valor actual y el descuento racional de una letra de Bs. 2 500, pagadera en 120 días, al 6 %?

Hay dos operaciones:

1° Encontrar el interés de Bs. 100 en 120 días, al 6 %.

360	6
120	x

$$x = \frac{6 \times 120}{360} = \text{Bs. } 2.$$

2° Hallar el valor actual de Bs. 2 500.

Disposición de los datos

Bs. 102 *valor nominal*	Bs. 100 *valor actual*
2 500	x

Si Bs. 102 de valor nominal corresponden a un valor actual de Bs. 100, 1 bolívar corresponderá a un valor 102 veces menor, y Bs. 2 500 corresponderán a $\frac{100 \times 2\,500}{102}$.

Luego: $x = \frac{100 \times 2\,500}{102}$ = Bs. 2 450,98 *valor actual.*

El *descuento racional* es:

Bs. 2 500 — 2 450,98 = Bs. 49,02.

474. NOTA: El descuento comercial es más elevado que el racional, y también menos exacto y menos equitativo. Sin embargo se suele emplear el descuento comercial por ser más rápido y fácil su cálculo.

475. COMPARACIÓN DEL DESCUENTO COMERCIAL CON EL RACIONAL.—Ejemplo 1°.—Búsquese el descuento de una letra de Bs. 5 300, pagadera en un año, al 6 % anual.

Para el descuento comercial, se deben descontar Bs. 6 sobre Bs. 100; sobre Bs. 5 300, se descontarán:

$$\frac{6 \times 5\,300}{100} = \text{Bs. } 318.$$

Para el descuento racional analizamos así: Bs. 100 impuestos al 6 %, valen al cabo de un año Bs. 106; y recíprocamente, una letra de Bs. 106 pagadera en un año, representa un valor actual de Bs. 100, y no debe sufrir sino Bs. 6 de descuento.

En esto precisamente se diferencian los dos descuentos: en el comercial, se descuentan Bs. 6 sobre Bs. 100, y en el racional sólo se descuentan Bs. 6 sobre Bs. 106. Si sobre Bs. 106 se descuentan 6, sobre Bs. 5 300 se descontarán:

$$\frac{6 \times 5\,300}{106} = \text{Bs. } 300.$$

Como acabamos de ver, el descuento comercial es superior al racional, porque se compone del interés verdadero del valor actual de la letra, esto es, del descuento comercial, más el interés de este mismo interés. En efecto, calculemos el interés de Bs. 300 al 6 %

y tendremos $\frac{6 \times 300}{100}$ = Bs. 18, que añadidos a los Bs. 300, que

son el descuento racional, dan Bs. 318, esto es, el descuento comercial.

Ejemplo 2° — **Una letra de Bs. 1 500 es pagadera al cabo de 90 días; si se quiere pagarla al contado, búsquese: 1° el descuento comercial, 2° el racional, siendo el tanto 6 %.**

Descuento comercial.—Como el descuento comercial es el interés simple del valor nominal, será pues el interés de Bs. 1 500

al 6 % durante 90 días, o $\frac{6 \times 1\,500 \times 90}{100 \times 360}$ = Bs. 22,50.

Descuento racional.—El descuento racional es el interés simple del valor *actual*. El valor nominal es igual al valor actual aumentado de los intereses de este último.

Ahora bien, Bs. 100 en 90 días al 6 % dan $\frac{6 \times 90}{360}$ o Bs. 1,50;

por consiguiente, un valor actual de Bs. 100 corresponderá a un valor nominal de Bs. 101,50. Luego sobre una suma de Bs. 101,50 hay Bs. 1,50 de descuento, sobre Bs. 1 500 el descuento será de

$$\frac{1{,}5 \times 1\,500}{101{,}5} = \text{Bs. } 22{,}16.$$

Ejemplo 3° — **Se han dado Bs. 1 800 en pago de una letra descontada al 5 % por 2 años; ¿cuál era el valor nominal de la letra, suponiendo 1° el descuento comercial, 2° el racional?**

Notemos primero que Bs. 100 al 5 % dan 5 × 2 = Bs. 10 en 2 años.

Descuento comercial.—Este descuento es el interés del valor nominal.

Cuando este valor es de Bs. 100, el valor actual es de 100 — 10 o Bs. 90.

Luego, con Bs. 90 se pagan Bs. 100, con Bs. 1 se pagarán $\frac{100}{90}$,

y con Bs. 1 800, $\frac{100 \times 1\,800}{90}$ = Bs. 2 000, valor de la letra.

DESCUENTO RACIONAL.—El descuento racional es el interés del valor actual; cuando éste es de Bs. 100, el valor nominal es de

$$100 + 10 = \text{Bs. } 110.$$

Luego con Bs. 100 se pagan Bs. 110, con Bs. 1 se pagarán $\frac{110}{100}$,

y con Bs. 1 800, $\frac{110 \times 1\,800}{100}$ = Bs. 1 980, valor de la letra.

EJEMPLO 4º — **Una letra de cambio pagadera a 36 días ha sido presentada a un banquero que, a más del descuento al 6 %, ha cobrado una comisión de ½ %. El banquero ha pagado Bs. 2 749,42; ¿cuál era el valor nominal de la letra?**

El descuento por 36 días será de $\frac{6 \times 36}{360}$ o 0,6. Si se añaden 0,5 de comisión, resultan por descuento total sobre Bs. 100,

$$0{,}60 + 0{,}50 = \text{Bs. } 1{,}10.$$

Por un valor nominal de Bs. 100 se reciben sólo 100 — 1,1 ó 98,9; por consiguiente, la letra valdrá tantas veces Bs. 100 como lo indica el cociente $\frac{2749{,}42}{98{,}9}$, esto es:

$$\frac{2749{,}42 \times 100}{98{,}9} = \text{Bs. } 2780.$$

DESCUENTO DE FACTURAS

476. Aplicado a las *facturas*, el descuento es una simple *rebaja* arreglada por convenio de las partes, o por los usos del comercio relativos a la mercadería vendida.

El descuento de una factura se calcula por lo regular a un tanto % de su valor, sin hacer caso del tiempo.

Decir que una factura de Bs. 4 560, por ejemplo, es pagadera, bien a 6 meses plazo, o bien al contado, con un descuento del 3 %, quiere decir que el comprador, queda libre de pagar 6 meses después de la fecha indicada en la factura (en cuyo caso debe pagar los Bs. 4 560 íntegros), o de pagar inmediatamente, con una rebaja del 3 %, esto es, $\frac{4\,560 \times 3}{100}$ = Bs. 136,80; en este caso, satisface al acreedor pagándole Bs. 4 560 — 136,80 = Bs. 4 423,20.

III. VENCIMIENTO COMÚN DE PAGOS

477. Objeto de esta regla.—Esta regla tiene por objeto hallar la fecha en que debe efectuarse un solo pago, en vez de hacer varios en distintos tiempos, o buscar cuánto debe diferirse un pago para compensar los adelantos que se han hecho, sin que resulte pérdida o beneficio para el cobrador ni el pagador.

478. PROBLEMA I.—Un obrero debe Bs. 24 pagaderos como sigue: Bs. 4 al cabo de 2 meses, Bs. 8 al cabo de 5 meses, y Bs. 12 al cabo de 8 meses. Se conviene con su acreedor en hacerle un solo pago; ¿en que tiempo debe efectuarlo para que haya compensación?

Operación

Bs. 4×2 =	Bs. 8
8×5 =	40
12×8 =	96
24	144

Bs. 144 : 24 = 6 meses.

La razón de esta operación es que se supone que el dinero aprovecha en manos del poseedor en proporción del tiempo que lo tiene a su disposición. Así es como se gana, por ejemplo, tanto con Bs. 2 en 3 meses, como con Bs. 6 en 1 mes. Por esto, en este ejemplo, multiplico 4 por 2, y me da Bs. 8, que, por la misma razón, producirán durante 1 mes tanto como los Bs. 4 durante 2 meses.

Del propio modo multiplico las demás sumas por su tiempo respectivo; y como la suma de los productos se forma de la multiplicación de todas las sumas por los distintos tiempos, es evidente que al dividirla por la suma debida, debe encontrarse el tiempo medio del pago.

PROBLEMA II.—¿Cuál es el vencimiento medio de los 4 pagarés siguientes: el 1º de Bs. 3 000 el 15 de marzo; el 2º de Bs. 2 500 el 18 de abril; el 3º de Bs. 5 000 el 1º de mayo, y el 4º de Bs. 3 400 el 25 de junio?

Operación

Bs. 3 000	al 15 de Marzo	0 días	
2 500	al 18 de Abril	$\times$ 34 días =	85 000
5 000	al 1° de Mayo	$\times$ 47 días =	235 000
3 400	al 25 de Junio	$\times$ 102 días =	346 800
13 900			666 800

$$666\,800 : 13\,900 = 47\frac{135}{139}, \text{ o sea } 48 \text{ días.}$$

El vencimiento buscado debe ser tal que un solo pagaré de Bs. 13 900 en este vencimiento dé el mismo descuento que los 4 juntos, si fueran negociados en un mismo día.

Multiplicando cada suma por el tiempo de su crédito y sumando los productos, tenemos 666 800, cantidad que, dividida por la suma de los pagarés, Bs. 13 900, da por cociente $47\frac{135}{139}$, o sea 48 días; el vencimiento medio caerá pues 48 días después del 15 de marzo, esto es, el 2 de mayo.

479. REGLA.—Para encontrar el vencimiento común de varias cantidades, se multiplica el valor de cada una por el tiempo que media entre la fecha de su vencimiento y la en que debía efectuarse el primer pago. El cociente, añadido a la fecha del primer vencimiento, da el vencimiento común.

480. PROBLEMA III.—Pablo compra Bs. 180 de mercaderías a 8 meses plazo; al cabo de 4 meses paga Bs. 30, y 2 meses después, Bs. 40; ¿cuánto tiempo puede guardar lo demás para compensar los adelantos que ha hecho?

Operación

Sumas adelantadas:

$30 \times 4 = 120$		*Suma debida*	$180 \times 8 =$	1 440
$40 \times 6 = 240$		*Suma adelantada*	70	360
70	360	Diferencia	110	1 080

$$1\,080 : 110 = 9\frac{9}{11} \text{ meses.}$$

Según las convenciones, Pablo podía guardar Bs. 180 durante 8 meses; luego habría sacado un interés igual al de 180×8 o Bs. 1 440 en 1 mes; pero ha guardado Bs. 30 durante 4 meses y Bs. 40 durante 6 meses.

La primera suma le ha producido un interés igual al de 30 × 4 ó Bs. 120 durante 1 mes, y la segunda, un interés igual al de 40 × 6 ó Bs. 240 durante 1 mes. Por lo tanto ha sacado un interés igual al de 120 + 240 ó Bs. 360 durante 1 mes.

De los Bs. 110 que no ha pagado todavía es de donde ha de sacar los intereses restantes. Luego, el cociente de 1 080 por 110 representará el número de meses durante los cuales Pablo puede guardar los Bs. 110.

El cociente $9\frac{9}{11}$ meses dice que este tercer pago podrá efectuarse 3 meses $\frac{9}{11}$ después del segundo.

PROBLEMA IV.—Sobre una suma de Bs. 2 800 pagaderos el 20 de mayo, se han dado a buena cuenta Bs. 1 800 el 15 de abril; se pregunta en qué época deberán pagarse los Bs. 1 000 restantes para que haya compensación en los intereses.

El interés perdido por el deudor sobre los Bs. 1 800 pagados el 15 de abril, esto es, 35 días antes del vencimiento, se halla representado por 1 800 × 35 = Bs. 63 000; y como los Bs. 1 000 restantes deben producir al deudor un interés igual, encontraremos el número de días necesarios para esto, partiendo 63 000 por 1 000, esto es, 63 días; luego, los Bs. 1 000 serán pagaderos 63 días después del 20 de mayo, esto es, el 22 de julio.

Si en vez de un solo pago efectuado el 15 de abril, hubiera dado el deudor Bs. 1 000 el 15 de abril, y Bs. 800 el 30 del mismo mes, habríamos tenido por intereses de los pagos anticipados:

Bs. 1 000	el 15 de abril × 35 días	35 000
800	el 30 de — × 20 días	16 000
Bs. 1 800		51 000

y por vencimiento del último pago, 51 000 : 1 000, esto es, 51 días que están por pagarse, después del 20 de mayo, o sea el 10 de julio.

481. REGLA.—Cuando de una suma pagadera a una fecha conocida se han adelantado uno o varios pagos, para encontrar el tiempo en que debe efectuarse el último pago, se multiplica cada pago anticipado por el tiempo que lo separa del vencimiento primitivamente fijado.

El cociente de la suma de estos productos por lo que se debe pagar aún, da el tiempo que se debe añadir a la fecha del primer vencimiento para obtener la fecha en que debe pagarse el resto de la deuda.

PROBLEMAS

Descuento

859. ¿Cuál es el valor actual de las letras siguientes, según el descuento externo o comercial:

1° Del 16 de julio de Bs. 626,85, a 5 meses, descontada el 12 de Obre., al $4\frac{3}{4}$ %.

2° Del 17 de mayo, de Bs. 1 310,25, a 3 meses, descontada el 22 de junio al $5\frac{1}{2}$ %.

3° Del 11 de Nbre., de Bs. 525,90, a 7 meses, descontada el 4 de mayo al 6 %?

860. Patricio desea sacar Bs. 5 000 del banco; ¿cuál debe ser el valor nominal de su letra, a 90 días, siendo el descuento de 6 %?

861. Hernando compra mercaderías por Bs. 1 486,90, y da en cambio de ellas su pagaré a 4 meses, con $7\frac{1}{2}$ % de descuento; ¿qué cantidad debe inscribir en el pagaré?

862. Con Bs. 1 800 se ha pagado una letra descontada al 5 % en 2 años; ¿cuál era el valor nominal de dicha letra según el descuento comercial?

863. He negociado en el banco el 12 de marzo, al 6 %, una letra de Bs. 705,60, pagadera el 28 de junio; ¿qué suma he recibido?

864. Debo la suma de Bs. 514,22, bajo las condiciones siguientes: Bs. 208,32 pagaderos dentro de 10 meses, más Bs. 123,20 pagaderos dentro de 18 meses, y el resto dentro de 22 meses; si logro poder pagar al contado con el descuento comercial del 4 % anual, ¿qué suma debo desembolsar?

865. He comprado dos relojes en Bs. 505, a 16 meses plazo; pero habiéndolos pagado antes del vencimiento, he obtenido un descuento de Bs. 18,05, al 5 % anual; ¿en qué época hice el pago?

866. ¿Cuál es el valor nominal de una letra que, descontada por 211 días al 6 %, se reduce a Bs. 1 350,25?

867. ¿Cuál es la suma que, descontada por 1 año al 5%, queda disminuída de Bs. 62?

868. ¿A qué tanto % anual debe descontarse una letra de Bs. 900 para que resulte un descuento de Bs. 36?

869. Una letra de Bs. 1 000, descontada por 9 meses, se reduce a Bs. 973,75; ¿cuál es el tanto del descuento?

870. ¿Cuál es el valor actual de Bs. 117,60 pagaderos al cabo de un año al 12 % de descuento?

871. Una letra de Bs. 139,94 es pagadera al cabo de 9 meses; ¿cuál es su valor actual, si el descuento es de 5 % al año?

872. ¿Cuál es el valor actual de un pagaré de Bs. 429,98, debido dentro de un año 6 meses 1 día, al 5½ %?

873. Una casa me ha costado Bs. 20 964,12, y la he vendido por Bs. 30 665,20, pagaderos al cabo de un año y medio; ¿cuál fuera mi ganancia si concedo un 8 % de descuento, con tal que me paguen al contado?

874. He comprado Bs. 5 464 de mercaderías, a 15 meses plazo; pero si pago antes, me conceden un descuento del 5 % anual; ¿en qué época deberé pagar para no desembolsar más que Bs. 5 204?

875. Un negociante ha dado dos letras: la 1ª de Bs. 243,16, pagadera el 6 de mayo de 1944; la 2ª de Bs. 178,64, pagadera el 25 de Sbre. del mismo año: ¿qué suma fué menester para descontar ambas letras el 11 de Obre. de 1943, siendo el tanto del descuento al 7 %?

876. He pagado Bs. 370 por una suma que debía; ¿qué suma era ésta, sabiendo que me han concedido un descuento del 5¼% ?

877. ¿Qué es más ventajoso entre comprar harina a Bs. 62,50 barril y a 6 meses plazo, o a Bs. 65, a 9 meses de plazo, debiendo ser el descuento al 8 %?

878. ¿Cuál era el valor nominal de un pagaré que descontado por 210 días al 6 % anual, se ha reducido a Bs. 640?

879. Un pagaré de Bs. 721, descontado por 9 meses, se ha reducido a Bs. 700; ¿cuál fué el tanto del descuento?

880. Una factura asciende a Bs. 528; se concede una rebaja de 5½ % al contado; ¿cuál es el precio neto de dicha factura?

881. Estoy debiendo la suma de Bs. 2 571,10, a saber: Bs. 800 pagaderos dentro de 10 meses, Bs. 616 dentro de 9 meses, y lo demás al cabo de 12 meses: si pagando al contado, me conceden un descuento del 4 % anual, ¿cuánto tendré que pagar?

882. El precio neto de un piano es de Bs. 3 640; dos aficionados se presentan, y el uno ofrece Bs. 4 000 con tal que le den el 12 % de descuento; el otro, Bs. 3 880 y pide el 8 % de descuento. ¿Qué oferta es más ventajosa, y cuáles en ambos casos el beneficio o la pérdida?

883. Un mercader compra jabón en Bs. 708 los 100 kg. ¿A cómo debe vender el kg. para realizar un beneficio de 19 % sobre el precio de venta?

884. ¿A cómo sale al fabricante un reloj marcado Bs. 400, sabiendo que al hacer una rebaja de 10 % sobre este precio, ese fabricante gana todavía 20 %?

885. Un mercader compra un mueble por Bs. 600; ¿a cómo debe venderlo, para que haciendo una rebaja de 8 %, su beneficio sea todavía del 15 % sobre el precio de compra?

886. ¿Cuál es el valor actual de una letra de Bs. 1 100, pagadera dentro de un año, sabiendo que este valor, colocado hoy a intereses, vendría a ser al cabo de un año Bs. 1 100, siendo el tanto 6 %?

887. Se han recibido Bs. 5 917 por dos letras de cambio que valen juntas Bs. 5 970, y que se han descontado al 6 %; la 1ª pagadera en 1 mes ½, la 2ª en 2 meses 25 días; ¿cuál es el valor de cada una?

888. Búsquese el valor actual, según el descuento racional, de las letras siguientes, en la época en que han sido descontadas, a saber:

1° Del 3 de febrero, de Bs. 313,80, a 5 meses, descontada el 6 de junio, al 5 %.

2° Del 2 de abril, de Bs. 618,45, a 4 meses, descontada el 30 de mayo, al 4½ %.

3° Del 14 de junio, de Bs. 4 682,70, a 3 meses, descontada el 2 de agosto, al 6% .

889. La diferencia entre el descuento racional y el comercial de un pagaré descontado por 180 días, al 6 %, es de Bs. 5,40; ¿cuál es el valor nominal?

890. La diferencia entre el descuento racional y el comercial de un pagaré descontado por 200 días, al 6 %, es de Bs. 9,80; ¿cuál es su valor actual?

Vencimiento común de pagos

891. La suma de Bs. 1 710 debe ser pagada en dos dividendos, la mitad al cabo de 6 meses, y lo demás dentro de 10; si se quiere hacer un solo pago, ¿cuándo deberá verificarse?

892. Veinticinco toneles de vino han costado Bs. 1 125 pagaderos en dos plazos, a saber: Bs. 525 dentro de 6 meses, y lo demás 3 meses después; el comprador desea hacer un solo pago; ¿cuándo deberá efectuarlo?

893. El 1° de enero de 1944 dió un mercader tres libranzas: la 1ª de Bs. 500, pagaderos al cabo de 30 días; la 2ª de Bs. 400, pagaderos al cabo de 60 días, y la 3ª de Bs. 600, pagaderos dentro de 90 días; ¿cuál ha sido el tiempo medio del pago?

894. ¿Dentro de cuánto tiempo habrá que pagar Bs. 1 560 en vez de pagar la mitad de la suma al cabo de 8 meses, y lo demás al cabo de 10, para que la pérdida compense la ganancia?

895. El pago de una compra de Bs. 18 000 debe hacerse como sigue: ¼ al cabo de 6 meses, 1/5 al cabo de 8 meses y lo demás al cabo de 10. ¿Cuándo tendrá que verificarse un pago único?

896. Feliciano ha hecho el 15 de mayo de 1944 una compra de varios artículos por Bs. 8 000, cuya 1/5 parte debería pagar al cabo de 6 meses, otra 1/5 dentro de 8 meses, y lo demás al cabo de 10 meses; pero como desea hacer un solo pago, pregunta cuándo debe verificarlo.

897. Silverio debe Bs. 1 895,20, por 236 galones de coñac, pagaderos dentro de 12 meses; pero como ha pagado 633 galones al cabo de 10 meses, se pregunta cuándo deberá pagar el resto.

898. He comprado a Celestino Bs. 432 de mercaderías, a 6 meses plazo. Al cabo de 1 mes le he dado Bs. 75 y 5 meses después Bs. 200; ¿cuánto tiempo después de los 6 meses, deberé pagar el resto?

899. Vicente compra Bs. 2 829,75 de café, y desea pagarlos en tres dividendos: el 1° es al 2° como 4 es a 5, y el 3° es igual a la mitad del 2°; el 1° debe satisfacerse al cabo de 4 meses; el 2° al cabo de 7 meses, y el 3° dentro de 1 año. Si paga Bs. 975 al cabo de 6 meses, ¿durante cuánto tiempo puede guardar lo demás?

900. Un empresario ha construído una casa por Bs. 24 140 pagaderos al cabo de 15 meses; pero como necesita fondos, el propietario le adelanta Bs. 11 388 de 8 meses; ¿cuánto tiempo debe guardar el resto para compensar el adelanto que ha hecho?

901. Anselmo ha vendido Bs. 8 400 de mercaderías a 12 meses plazo, y ha recibido 1/3 de esta suma al cabo de 5 meses; ¿en qué tiempo recibió los 2/3 de la misma?

902. Eusebio debía Bs. 150 pagaderos al cabo de 13 meses; ha pagado los 2/3 antes del vencimiento, de modo que puede guardar el resto 2 años sin perjudicar a su acreedor; ¿cuándo pagó los 2/3?

903. Un negociante debe 3 pagarés de igual valor, y vencibles, el 1° al cabo de 5 meses, el 2° al cabo de 9 meses y el 3° al cabo de 1 año 3 meses. Los paga dando al contado Bs. 1 780, y firmando un pagaré de Bs. 865 vencible al cabo de 3 meses; ¿cuál era el valor de los 3 pagarés, si el tanto del descuento es el 6 %?

904. Julián compra mercaderías por Bs. 3 600 pagaderos al cabo de 15 meses, pero habiendo pagado Bs. 2 400 antes del vencimiento, guarda los Bs. 1 299 restantes durante 3 años 9 meses; ¿en qué época hizo el primer pago?

905. ¿Cuál es el vencimiento medio de las cuatro letras siguientes: la 1ª de Bs. 500 pagaderos el 1° de abril; la 2ª de Bs. 640, el 4 de junio; la 3ª de Bs. 860, el 1° de agosto; la 4ª de Bs. 900, el 5 de septiembre?

906. Una deuda de Bs. 6 127,50 debe ser satisfecha por quintas partes: la 1ª al contado, la 2ª al cabo de 4 meses, la 3ª al cabo de 8 meses, la 4ª al cabo de 12 meses, y la 5ª al cabo de 15 meses; si el deudor quiere hacer un solo pago, ¿en qué época debe verificarlo?

CAPÍTULO V

REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES
REGLA DE COMPAÑÍA

I. REPARTIMIENTOS PROPORCIONALES

482. Definición.—Llámase regla de *repartimientos proporcionales* aquella por medio de la cual se divide un número en partes proporcionales a otros números dados.

Los repartimientos proporcionales son *simples* cuando las partes buscadas son proporcionales a números simples; son *compuestos* cuando estas partes son proporcionales a los productos de varios números.

Repartimientos proporcionales simples

483. PROBLEMA I.—Divídanse Bs. 600 proporcionalmente, a los números 3, 5 y 7.

Dividir Bs. 600 proporcionalmente a 3, 5 y 7 es hallar tres números respectivamente proporcionales a 3, 5, 7, y cuya suma sea igual a 600.

Representemos por x, y, z, los tres números, y tendremos:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}.$$

Por consiguiente:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = \frac{x+y+z}{3+5+7} = \frac{600}{15}.$$

Lo que manifiesta que x, y, z son cuartas proporcionales:

$$\frac{x}{3} = \frac{600}{15}, \qquad x = \frac{600}{15} \times 3 = \text{Bs. } 120.$$

$$\frac{y}{5} = \frac{600}{15}, \qquad y = \frac{600}{15} \times 5 = \text{Bs. } 200.$$

$$\frac{z}{7} = \frac{600}{15}, \qquad z = \frac{600}{15} \times 7 = \text{Bs. } 280.$$

Reducción a la unidad: Tenemos:

$$3 + 5 + 7 = 15.$$

Si hubiera que repartir Bs. 15, las partes serían 3, 5, 7; si el número que se debe repartir fuese Bs. 1, las partes serían 15 veces menores, o $\frac{3}{15}, \frac{5}{15}, \frac{7}{15}$.

Pero como el número que se ha de repartir es Bs. 600, las partes resultarán 600 veces mayores, o

$$\frac{3}{15} \times 600 = \text{Bs. } 120; \quad \frac{5}{15} \times 600 = \text{Bs. } 200; \quad \frac{7}{15} \times 600 = \text{Bs. } 280.$$

484. REGLA.—Para dividir una cantidad en partes proporcionales a números dados, se multiplica el número que debe dividirse por cada uno de los números proporcionales, y se dividen los productos por la suma de dichos números.

485. PROBLEMA II.—Divídase el número 540 en partes proporcionales a los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$.

Representemos por x, y, z, las tres partes, y tendremos:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{z}{\frac{5}{6}}.$$

Reduciendo los quebrados a un común denominador, resulta:

$$\frac{x}{\frac{6}{12}} = \frac{y}{\frac{8}{12}} = \frac{z}{\frac{10}{12}}.$$

Estas razones no se alteran si multiplicamos los quebrados por el denominador común 12, suprimiéndolo, y resultará, como en el problema I:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{z}{10} = \frac{x + y + z}{6 + 8 + 10} = \frac{540}{24};$$

de donde:
$$x = \frac{540}{24} \times 6 = 135.$$

$$y = \frac{540}{24} \times 8 = 180.$$

$$z = \frac{540}{24} \times 10 = 225.$$

486. REGLA.—Para dividir una cantidad en partes proporcionales a números quebrados, se reducen los quebrados a un común denominador, y se divide el número proporcionalmente a los numeradores.

487. NOTA: Cuando se ha de dividir un número en partes inversamente proporcionales a números dados, se buscan las razones inversas de estos números, y se procede como lo acabamos de ver.

EJEMPLO.—Un testador deja en herencia Bs. 4 550 a cuatro sobrinos suyos, que tienen respectivamente 18, 15, 10 y 6 años, con la condición de que se dividan esta suma en partes inversamente proporcionales a la edad que tienen; ¿ a cómo debe caberle a cada uno?

Las razones directas de las edades son evidentemente:

$$\frac{18}{1}, \frac{15}{1}, \frac{10}{1}, \frac{6}{1}.$$

Pero como al mayor debe tocarle menor suma, las razones inversas serán:

$$\frac{1}{18}, \frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{6}.$$

Si llamamos v, x, y, z las partes respectivas, tendremos:

$$\frac{v}{\frac{1}{18}} = \frac{x}{\frac{1}{15}} = \frac{y}{\frac{1}{10}} = \frac{z}{\frac{1}{6}}.$$

o reduciendo los quebrados a un común denominador:

$$\frac{v}{\frac{5}{90}}, \quad \frac{x}{\frac{6}{90}}, \quad \frac{y}{\frac{9}{90}}, \quad \frac{z}{\frac{15}{90}},$$

y suprimiendo los denominadores:

$$\frac{v}{5} = \frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{15} = \frac{v + x + y + z}{5 + 6 + 9 + 15} = \frac{4\,550}{35};$$

de donde:

$$v = \frac{4\,550}{35} \times 5 = \text{Bs. } 650; \qquad x = \frac{4\,550}{35} \times 6 = \text{Bs. } 780;$$

$$y = \frac{4\,550}{35} \times 9 = \text{Bs. } 1\,170; \qquad z = \frac{4\,550}{35} \times 15 = \text{Bs. } 1\,950.$$

Repartimientos proporcionales compuestos

488. **PROBLEMA I.—Cuatro obreros han empleado 6 días de 10 horas en cierto trabajo; otros tres han empleado 5 días de 11 horas en el mismo trabajo: ¿que suma recibirá cada grupo de obreros, si el trabajo se estima en Bs. 180?**

Solución

$$\begin{array}{lll} 1^{\text{er}} \text{ grupo} & 10 \times 6 \times 4 = 240 & \text{horas} \\ 2^{\text{o}} \quad ,, & 11 \times 5 \times 3 = 165 & — \\ & \text{Total } 405 & — \end{array}$$

Claro está que el producto de los días por las horas será el número de horas de trabajo; y el problema se reduce a una regla de repartimientos proporcionales simples, repartiendo los Bs. 180 entre los dos grupos, según las horas de trabajo.

Llamemos x, y las dos partes, y tendremos:

$$\frac{x}{240} = \frac{y}{165} = \frac{180}{405},$$

de donde:

$$x = \frac{180}{405} \times 240 = \text{Bs. } 106\,\frac{2}{3};$$

$$y = \frac{180}{405} \times 165 = \text{Bs. } 73\,\frac{1}{3}.$$

489. PROBLEMA II.—Repartir una gratificación de Bs. 570 entre 3 servidores, en partes directamente proporcionales a sus años de servicio, e inversamente a su sueldo. El primero tiene 18 años de servicio, y Bs. 2 000 de sueldo: el segundo, 15 años de servicio y Bs. 1 800 de sueldo; el tercero, 12 años de servicio y Bs. 1 500 de sueldo.

Para satisfacer las condiciones de los datos, se deben repartir Bs. 570 proporcionalmente a 18, 15, 12 y a los quebrados $\frac{1}{2\,000}$, $\frac{1}{1\,800}$ y $\frac{1}{1\,500}$; esto es, proporcionalmente a los productos $\frac{18}{2\,000}$, $\frac{15}{1\,800}$ y $\frac{12}{1\,500}$.

Simplifiquemos estos quebrados: $\frac{9}{1\,000}$, $\frac{1}{120}$ y $\frac{1}{125}$.

Reduzcamos a un común denominador:

$$\frac{27}{3\,000},\ \frac{25}{3\,000}\ \text{y}\ \frac{24}{3\,000}.$$

El 1er. servidor recibirá: $\frac{570 \times 27}{76}$ = Bs. 202,50;

El 2° — — $\frac{570 \times 25}{76}$ = Bs. 187,50;

El 3er. — — $\frac{570 \times 24}{76}$ = Bs. 180.

II. REGLA DE COMPAÑÍA

490. Definición.—La *regla de compañía* tiene por objeto dividir entre varios socios la ganancia o pérdida que resulta de sus negocios.

Esta regla es la misma que la de los repartimientos proporcionales, aplicada a un caso particular.

491. Las ganancias y pérdidas deben repartirse proporcionalmente a los capitales y al tiempo durante el cual han estado impuestos en el negocio.

La cantidad repartible entre los socios se llama *dividendo*; y la suma de las imposiciones, *capital social*.

492. PROBLEMA I.—Tres socios han ganado en sus negocios Bs. 18 000; ¿qué parte le toca a cada uno, sabiendo que la imposición del primero fué de Bs. 20 000; la del segundo de Bs. 30 000, y la del tercero de Bs. 36.000?

Representemos las ganancias por x, y, z, y tendremos:

$$\frac{x}{20\,000} = \frac{y}{30\,000} = \frac{z}{36\,000};$$

o simplificando $$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{18} = \frac{18\,000}{43};$$

de donde: $$x = \frac{18\,000}{43} \times 10 = \text{Bs. } 4\,186\,\frac{2}{43};$$

$$y = \frac{18\,000}{43} \times 15 = \text{Bs. } 6\,279\,\frac{3}{43};$$

$$z = \frac{18\,000}{43} \times 18 = \text{Bs. } 7\,534\,\frac{38}{43}.$$

493. PROBLEMA II.—Dos negociantes tratan de repartirse una ganancia de Bs. 3 450; se desea saber cuánto le toca a cada uno, habiendo impuesto el primero Bs. 3 000 durante 15 meses, y Bs. 1 200 el segundo, durante 20 meses.

Como el primero impuso Bs. 3 000 durante 15 meses, debe gozar del mismo beneficio que si hubiera impuesto

$3\,000 \times 15 =$ Bs. 45 000 *durante* 1 *mes*

y el segundo, $1\,200 \times 20 =$ Bs. 24 000 ,, ,,

Por consiguiente: $$\frac{x}{45\,000} = \frac{y}{24\,000} = \frac{3\,450}{69\,000};$$

o simplificando, $$\frac{x}{45} = \frac{y}{24} = \frac{3\,450}{69};$$

de donde: $$x = \frac{3\,450}{69} \times 45 = \text{Bs. } 2\,250.$$

$$y = \frac{3\,450}{69} \times 24 = \text{Bs. } 1\,200.$$

PROBLEMAS

Repartimientos proporcionales

907. Divídanse Bs. 810 en partes proporcionales a 3, 6 y 9.

908. Habiéndose reunido 3 jardineros para cultivar un jardín, han ganado juntos Bs. 650: el 1º ha trabajado durante 15 días; el 2º, durante 12 días, y el 3º, durante 25 días; pregúntase qué parte de la ganancia le toca a cada uno en proporción del tiempo de su trabajo.

909. Queriéndose gratificar a 3 oficiales veteranos, se destina anualmente la suma de Bs. 8 000; ¿cuánto le tocará a cada uno, sabiendo que deben recibir en proporción de su edad, y que el 1º cuenta 65 años; el 2º, 70, y el 3º, 75?

910. Divídase el número 255 en tres partes, de modo que la 1ª sea a la 2ª como 5 es a 4, y la 1ª a la 3ª como 4 es a 3.

911. Una persona da Bs. 12 a 5 pobres repartiéndoselos proporcionalmente a los números siguientes: 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6; ¿qué suma recibe cada uno?

912. Repártanse Bs. 21 500 entre tres personas de modo que la parte de la 1ª sea a la de la 2ª como 4 es a 5, y la de la 2ª a la de la 3ª como 7 es a 8.

913. Divídase el número 858 proporcionalmente a los quebrados: 3/4, 5/6, 4/5.

914. Divídase la suma de Bs. 72 entre dos personas de modo que la 2ª tenga los 4/5 de lo que tuviere la 1ª.

915. Se trata de repartir Bs. 360 entre tres personas, de modo que la 2ª tenga el triple de la 1ª; y la 3ª, la mitad de lo que tengan juntas la 1ª y la 2ª; ¿cuánto recibirá cada una?

916. Máximo muere dejando en su testamento una herencia de Bs. 84 000 a un hermano que se halla en un país lejano, y del cual no ha tenido noticias mucho tiempo ha. El tenor del testamento es el siguiente: "Si mi hermano tiene una hija, dejo para ella los 2/3 de la herencia, y 1/3 para el padre; pero si tiene un hijo, a éste le tocará el 1/3 de la herencia, y los 2/3 para el padre". Sucede que el hermano de Máximo tiene un hijo y una hija; ¿cómo deberá hacerse la repartición?

917. Repártanse Bs. 494 entre tres personas de modo que la parte de la 1ª sea a la de la 2ª como 2/3 es a 1/2, y la parte de la 2ª sea a la de la 3ª como 5/6 es a 4/5.

918. Un hacendado tiene en su corral 126 aves, de las cuales hay 2 veces más gallinas que patos, y 2 veces más patos que gansos; ¿cuántas aves hay de cada una de las tres especies?

919. En la puerta de una iglesia se encuentran habitualmente dos mendigos, a saber: una pobre mujer todos los días, y alternativamente un ciego y un cojo. Una señora caritativa envía a su hijo con 52 bolívares, y le dice: "Si encuentras a la pobre mujer y al ciego, le darás a éste los 3/4 de la suma, y a la mujer 1/4; pero si está allí el cojo, no le darás a él más que 1/4 de la suma, y los 3/4 a la mujer". Sucede casualmente que aquel día los tres mendigos se hallan a la puerta de la iglesia; ¿qué limosna recibirá cada uno?

920. Tres obreros empleados en un taller han ganado 1 240 bolívares: el 1° ha trabajado durante 10 días de 8 horas de trabajo; el 2°, durante 9 días de 12 horas, y el 3°, durante 6 días de 10 horas; ¿cuál será la parte de cada uno, en proporción de su trabajo?

921. Dos maestros carpinteros han emprendido la construcción del entablado de una sala: el 1° ha empleado 8 oficiales durante 15 días, y el 2°, 10 durante 14 días; pregúntase qué parte le toca a cada uno, en proporción de su gasto, sobre Bs. 15 000 destinados a esta obra.

922. Dos hacendados arriendan una dehesa en Bs. 650; el 1° pone en ella 150 bueyes durante 180 días y 10 horas por día; y el 2°, 80 durante 260 días y 8 horas por día; ¿cuánto debe pagar cada uno?

923. Valerio al morir deja su fortuna a 6 parientes, 3 de los cuales son del 4° grado, 2 del 5° y 1 del 6°, con la condición de que el repartimiento se hará en razón inversa del grado de parentesco. Siendo de Bs. 395 000 la suma que debe dividirse, ¿a cómo le cabe a cada uno?

924. Con Bs. 1 500 se han comprado dos caballos que han sido pagados en razón directa de su fuerza, la cual es proporcional a los números 121 y 144, y en razón inversa a la edad que tienen, y que es proporcional a los números 5 4/9 y 6 1/4; ¿cuál es el precio de cada caballo?

925. Dos obreros quieren dividirse la suma de Bs. 364 que han ganado; pregúntase cuál será la parte de cada uno, sabiendo que el primero ha trabajado 10 horas por día durante 18 días, y el segundo 11 horas diarias durante 25 días.

926. Doscientos noventa hectolitros 25 litros de vino deben ser divididos en tres partes, siendo la menor y la mediana respectivamente los 7/8 y los 15/16 de la mayor. Calcúlese en litros cada una de ellas.

927. Un profesor quiere repartir 75 buenas notas a 4 alumnos por una oposición de ortografía; el 1° tiene una falta; el 2° dos, el 3° tres y el 4° cuatro; ¿cuántas notas le corresponden a cada uno en proporción de su mérito?

928. Un testador deja Bs. 11 100 a 2 sobrinos, 3 sobrinas y 5 primos, advirtiendo que la parte de cada primo es los 3/4 de la de una sobrina, y que la de cada sobrina no es más que los 4/5 de la de un sobrino; ¿cuánto le cabe a cada uno de los particioneros?

929. Divídase 156 en tres partes tales que la 1ª sea a la 2ª como 5 es a 4, y la 1ª a la 3ª como 7 es a 3.

930. En una fábrica se emplean hombres, mujeres y niños; se han pagado Bs. 1 320 por 25 jornales de hombres, 21 de mujer y 26 de niños. Los precios son tales que 9 jornales de mujer cuestan lo mismo que 16 de niño, y 8 jornales de hombre tanto como 15 de mujer; ¿cuál es el jornal de cada hombre, mujer y niño?

931. Un rentista divide su capital en dos partes que son entre sí como 3 es a 4; la 1ª impuesta es al 5 % y la 2ª, al 4,50 %; el rédito anual es de Bs. 1 650; ¿cuál es el capital y cuáles las partes?

932. Feliciano divide su capital en tres partes, que son entre sí como los números 2, 5 y 8; la 1ª impuesta al 6 %; la 2ª, al 5 %, y la 3ª, al 4 %; esta última le produce anualmente Bs. 2 400; ¿cuál es el capital?

933. Un banquero impone los 2/5 de un capital al 5 % y los deja durante 18 meses; impone lo demás al 4,50 % y lo deja durante 20 meses, ambas partes le producen Bs. 2 250; ¿cuál es el capital total, y cuáles las partes?

Regla de compañía

934. Habiéndose asociado cuatro comerciantes han formado un capital de Bs. 45 000, para el cual han contribuído de igual modo; al disolverse la sociedad se encuentran con una ganancia de Bs. 26 877. Al 1° le tocan 13 partes; al 2°, 11; al 3°, 8, y al 4°, 7; ¿qué suma recibirá cada comerciante, tanto por su imposición como por la ganancia?

935. Cinco hacendados se han concertado para un negocio; el 1° ha puesto Bs. 800; el 2°, Bs. 100 más que el primero; el 3°, Bs. 100 más que el 2°, y así sucesivamente, aumentando siempre Bs. 100; habiendo ganado entre todos Bs. 1 800; ¿cuánto le toca a cada uno?

936. Tres comerciantes han formado un capital de Bs. 4 928, que les ha producido Bs. 616: al 1°, le han cabido Bs. 150; al 2°, Bs. 206, y al 3°, Bs. 260; ¿qué suma impuso cada uno?

937. Dos especuladores embarcaron 6 000 toneles de trigo para Cuba; en el trayecto un huracán obligó a echar 650 al mar, y resultaron 250 dañados; pregúntase cuántos toneles perdió cada uno de ellos, sabiendo que el 1° había embarcado 3 500.

938. Habiendo hecho bancarrota Fabio, resulta deudor de Bs. 21 000 a Norberto, a Valeriano y a Vicente; el crédito del 1° y del 2° es como 2 es a 3, el del 2° y del 3°, como 4 es a 5; ¿qué suma le corresponde a cada acreedor?

939. Una compañía de 4 personas ha ganado, en 6 años, Bs. 25 000 sobre un capital de Bs. 54 980; la suma impuesta por la 1ª es a la de la 2ª como 3 es a 4; la de la 2ª a la de la 3ª como 6 es a 7; por último la de la 3ª es a la de la 4ª como 5 es a 6. Pregúntase cuál es la suma impuesta por cada persona, y cuál su ganancia.

940. Tres empresarios se han concertado para un negocio; el 1° ha impuesto Bs. 4 000 por 3 años; el 2° Bs. 7 000 por 2 años, y el 3° Bs. 4 500 por 4 años; si han realizado un beneficio de Bs. 3 600, ¿cuánto recibirá cada uno?

941. Dos personas se han asociado para un negocio: la 1ª ha puesto Bs. 2 300 por dos años; y la 2ª, Bs. 1 500 por 18 meses; dígase qué parte de la ganancia de Bs. 1 400 le corresponde a cada una de ellas.

942. La suma de las imposiciones de dos socios es de Bs. 24 600, y la del 1° excede a la del 2° en Bs. 2 400; ¿qué parte le toca a cada uno, sobre un beneficio de Bs. 8 610?

943. Fabricio y Valentín han realizado un beneficio igual al 4% del fondo social; la parte del beneficio del 1° es de Bs. 2 600, la del 2°, de Bs. 1 840; calcúlese la suma impuesta por cada uno de ellos.

944. Marcelino ha puesto en un negocio Bs. 1 260; Norberto, Bs. 1 840, y Basilio, Bs. 2 520; han realizado un beneficio de Bs. 0,80 por bolívar; ¿qué parte del beneficio le toca a cada uno?

945. Tres personas han realizado un beneficio de Bs. 600; la 3ª ha recibido por su parte Bs. 150; la 1ª y la 2ª han recibido tanto por la suma que impusieron como por los beneficios Bs. 540 y Bs. 810; ¿cuál fué la suma impuesta y la ganancia de cada persona?

946. Tres sobrinos se reparten una herencia: el 1° toma los 5/9 de ella; el 2°, los 2/7, y el resto se divide en tres partes iguales. Después de la división han puesto sus capitales en sociedad, y en 4 años han realizado Bs. 18 144 de beneficios. Sabiendo que al 2° le tocaron Bs. 19 200 por su parte de la herencia, se pregunta: 1° cuál fué la parte del 1er. y 3er. sobrino; 2° la ganancia de cada uno, y 3° a qué % han impuesto su dinero.

947. Una empresa iniciada por tres personas ha producido Bs. 915 de beneficio neto. Una de ellas recibió por su parte de la ganancia Bs. 345; las otras dos recibieron tanto por su imposición como por su parte de la ganancia, respectivamente Bs. 2 365 y Bs. 3 905; ¿cuál fué la imposición de cada una?

948. Cuatro personas formaron una compañía para 3 años: la 1ª impuso al principio Bs. 350, y 5 meses después Bs. 2 400; la 2ª impuso al principio Bs. 8 000, y al cabo de 20 meses sacó la mitad, y 5 meses después Bs. 2 400; la 3ª impuso Bs. 1 500 al principio, y Bs. 5 000 al cabo de 2 años; la 4ª impuso al principio Bs. 600, y cada 6 meses aumentaba su imposición de igual suma. Dígase cuánto le toca a cada una sobre la ganancia que es de Bs. 80 000.

CAPÍTULO VI

TÉRMINO MEDIO — MEZCLA O ALIGACIÓN — LIGACIÓN

I. TÉRMINO MEDIO

494. **Definición.**—*Regla del término medio* es la operación por la cual se busca un número medio entre varios otros números de la misma especie.

495. Llámase *media aritmética* entre dos números la semisuma de estos números.

La media aritmética entre varias cantidades es el cociente de su suma por su número.

Así, la *media aritmética* entre los números 16 y 12 es:

$$\frac{16 + 12}{2} = \frac{28}{2} = 14.$$

La media aritmética entre los números 12, 27, 20, 23, es:

$$\frac{12 + 27 + 20 + 23}{4} = \frac{82}{4} = 20,5.$$

496. PROBLEMA.—Un obrero que ha trabajado durante 4 días ha ganado el 1er día Bs. 0,90; el 2° Bs. 1,50; el 3° Bs. 2,75 y el 4° Bs. 3,25; ¿cuál es el término medio de su ganancia diaria?

En los 4 días el obrero ha ganado:

Bs. $0,90 + 1,50 + 2,75 + 3,25 = 8,40$

En 1 día ganará $8,40 : 4 =$ Bs. 2,10.

497. REGLA.—Para encontrar la media aritmética entre varios números, se suman estos números, y se divide el total por el número de ellos.

II. MEZCLA O ALIGACIÓN

498. Definición.—*Mezcla o aligación* es una operación que tiene por objeto resolver los problemas referentes a la combinación o mixtura de varias sustancias.

Ocurren dos casos distintos en la regla de mezcla:

1° Buscar el precio medio de una mezcla, cuando se conocen las cantidades y los precios respectivos, de las sustancias que la componen.

2° Determinar qué cantidad debe tomarse de cada una de las sustancias que componen la mezcla, cuando se conoce el valor de cada una de ellas y el precio medio de la mezcla.

499. 1er CASO.—Problema I.—Un comerciante tiene vino a Bs. 1, a Bs. 2, a Bs. 5 y a Bs. 6 botella; ¿a cuánto le sale cada una?

Tenemos (**495**): $\frac{1 + 2 + 5 + 6}{4} =$ Bs. 3,5 la botella.

PROBLEMA II.—Se han mezclado 80 litros de aceite a Bs. 1,80, 95 lit. a Bs. 2,10 y 120 lit. a Bs. 1,90; ¿cuál es el precio medio del litro de esta mezcla?

Disposición de la operación

80 lit.	a Bs. 1,80,	importan	$80 \times 1,80 =$	Bs. 144
95 —	2,10	—	$95 \times 2,10 =$	199,50
120 —	1,90	—	$120 \times 1,90 =$	228
295 —		—		Bs. 571,50

Ya que 295 lit. importan Bs. 571,50, uno solo importará 295 veces menos, o $\frac{571,50}{295}$ = Bs. 1,937.

500. REGLA.—Para encontrar el precio medio de una mezcla, se busca el precio total, y se lo divide por el número de unidades que componen la mezcla.

501. 2º CASO.—Problema I.—Un especiero tiene té a 55 y a 80 cents. la libra; ¿cuánto debe tomar de cada calidad para poder vender la libra al precio medio de 70 cents.?

Operación

55		15 *ganancia.*
	70	
80		10 *pérdida.*
		25

Después de haber escrito los precios de los objetos mezclados en una columna vertical, y el precio medio un poco a la derecha, entre el precio superior y el inferior, digo:

Al vender en 70 cents. una libra que no cuesta más que 55 cents., se ganan 15 cents.; sobre 10 *lbs.* se ganan $15 \times 10 = 150$ cents.; al vender en 70 cents. una libra que importa 80, se pierden 10 cents.; y sobre 15 libs. se pierden $10 \times 15 = 150$ cents. De este modo *la ganancia es igual a la pérdida,* y se puede formar la cantidad pedida tomando 10 *lbs.* de a 55 cents., y 15 *lbs.* de a 80 cents.

PROBLEMA II.—¿Qué cantidad debe mezclarse de un licor de a 24 cents. el litro con 100 lit. de licor de a 30 cents., para que pueda venderse el litro de mezcla en 26 cents. sin perder ni ganar?

Disposición de los datos

24		2 *ganancia.*
	26	
30		4 *pérdida.*

Vendiendo en 26 cents. lo que importa 24, se ganan 2 cents. y vendiendo en 26 cents. lo que importa 30, se pierden 4 cents. Cuando se toman 2 lit. de a 30 cents., para que la ganancia compense a la pérdida, se deben tomar 4 lit. de a 24 cents.; si sólo se tomara 1 lit. de a 30 cents. debería tomarse una cantidad 2 veces menor de a 24 cents.; esto es, $\frac{4}{2}$; y como se toman 100 lit. de a 30 cents., deberá tomarse una cantidad 100 veces mayor de a 24 cents.; a saber $\frac{4 \times 100}{2} = 200$ litros.

Bastan estos dos ejemplos para dar a conocer la marcha que se ha de seguir.

502. **REGLA.—Las dos cantidades buscadas son inversamente proporcionales a las diferencias de sus precios respectivos con el precio medio.**

Si se quiere saber qué cantidad de sustancias deben mezclarse para tener una cantidad dada, basta dividir esta cantidad en la relación que se acaba de encontrar.

503. Nota: Cuando se trata de mezclar más de dos sustancias sucede ordinariamente que el problema es *indeterminado*; esto quiere decir que admite varias soluciones, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO.—Baldomero tiene trigo de a Bs. 18, Bs. 19, Bs. 20, Bs. 50, Bs. 21,50 y de a Bs. 23 el hectolitro; quiere vender 650 hectolitros al precio medio de Bs. 20, de modo que ni pierda ni gane; ¿cuántos debe vender de cada especie?

Disposición de los datos

$$
\begin{array}{lll}
\text{Precios.} & \text{Diferencias.} & \\
\left\{\begin{array}{l} 18 \\ 19 \\ \quad 20 \\ 20{,}50 \\ 21{,}50 \\ 23 \end{array}\right. &
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array}\right\} \\ \\ \left.\begin{array}{l} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ 3 \end{array}\right\} \end{array} &
\begin{array}{l} = 3 \textit{ ganancia}.\ 3 \times 3 = 9 \\ \\ = 5 \textit{ pérdida}.\quad 5 \times 2 = \dfrac{10}{19} \end{array}
\end{array}
$$

Como al tomar un hectolitro de cada especie, el beneficio total en los precios inferiores es 3, y la pérdida total en los precios superiores es 5, si se toman cinco medidas de cada uno de los precios inferiores, y tres de cada uno de los precios superiores, el beneficio será igual a la pérdida.

Por consiguiente, si, sobre 19 medidas de mezcla, se necesitan 3 de cada uno de los precios superiores, sobre 650, se necesitarán:

$$\frac{3 \times 650}{19} = 102\,\frac{12}{19}\,.$$

Del mismo modo, si sobre 19 medidas de mezcla se necesitan 5 de cada uno de los precios inferiores, sobre 650 se necesitarán:

$$\frac{5 \times 650}{19} = 171\,\frac{1}{19}\,.$$

III. LIGACIÓN

504. Definición.—*Regla de ligación* es la misma regla de mezcla aplicada a la combinación de metales fundidos entre sí.

Cuando uno de los metales es precioso, como el oro, la plata, se lo llama metal *fino*.

La mezcla toma el nombre de *amalgama* cuando entra en ella el mercurio o azogue.

Dase el nombre de *liga* a la porción pequeña de cobre que se mezcla con el oro o la plata, cuando se bate moneda, para darle más consistencia.

Véanse los N°. 390, 391, 392 sobre lo qué es *ley* de una ligación, y el modo de obtener el *peso del metal fino*, y el *peso total* de la ligación.

505. PROBLEMA I.—Se derriten juntamente 560 gramos de oro de 0,950 de ley, y 450 gramos de 0,580 de ley; ¿cuál es la ley de la nueva barra?

Ya que la ley de una ligación (**390**) es el cociente del peso del metal precioso por el peso total, se obtiene el peso del metal fino multiplicando el peso total de la ligación por la ley.

Los 560 gr. de la primera barra contienen pues:

$$560 \times 0{,}950 = 532 \text{ gr. de oro puro,}$$

y los 450 gr. de la segunda contienen:

$$450 \times 0{,}580 = 261 \text{ gr. de oro puro.}$$

Así pues, sobre 560 + 450, ó 1 010 gr. de ligación, hay 532 + 261 ó 793 gr. de oro puro; la ley de la nueva barra es de $\frac{793}{1\,010}$, o 0,785 por defecto.

506. PROBLEMA II.—Una barra de plata de 0,835 de ley pesa 1 250 gramos. ¿Qué peso de otra barra de 0,950 de ley se le debe añadir para que resulte una barra de 0,900 de ley?

Disposición de los datos

0,835		0,065
	0,900	
0,950		0,050

Se pueden mezclar 50 gr. de 0,835 de ley con 65 gr. de 0,950 de ley. En efecto, al tomar 50 gr. de la ley de 0,835, resultan 50 veces 0 gr. 065 de plata menos que lo que indica la ley de 0,900; y al tomar 65 gr. de la ley de 0,950, resultan 65 veces 0 gr. 050 de plata más que lo que indica la ley 0,900; luego hay compensación.

Si 50 gr. de 0,835 de ley exigen 65 gr. de 0,950 de ley, 1 250 gr. exigirán:

$$\frac{65 \times 1\,250}{50} = 1\,625 \text{ gramos.}$$

507. PROBLEMA III.— Un platero tiene 5 barras de oro, cuya ley es: 1º 0,675; 2º 0,750; 3º 0,805; 4º 0,885 y 5º 0,915; ¿qué cantidad debe tomar de cada una para formar otra barra que pese 758 gramos, y sea de 0,840 de ley?

Disposición de la operación

Tomando las milésimas por unidad, tenemos:

$$\begin{array}{lll} 675 & & 165 \\ 750 & & 90 \\ 805 & & 35 \end{array}\Bigg\} = 290;\ 29 \times 2 = 58;\ \frac{12 \times 758}{94} = 96 \text{ gr. } 766.$$

$$\quad 840$$

$$\begin{array}{lll} 885 & & 45 \\ 915 & & 75 \end{array}\Bigg\} = 120;\ 12 \times 3 = \frac{36}{94};\ \frac{29 \times 758}{94} = 233 \text{ gr. } 851.$$

Tomando 1 gramo de cada una de las barras de ley inferior, tenemos que sus diferencias con la ley media dan:

$$165 + 90 + 35 = 290 \text{ milés.}$$

Tomando 1 gramo de cada una de las otras barras, tenemos un total de $45 + 75 = 120$ milés., de sus diferencias con la ley media. Así, pues, cuando se toman 120 gr. de cada una de las leyes inferiores, se deben tomar 290 gr. de cada una de las superiores. Para abreviar, dividamos 120 y 290 por 10, lo que da 12 y 29.

Cuando se toman 29 gr. de cada una de las barras de a 0,885 y 0,915, se deben tomar 12 de cada una de las otras tres; y se toman por consiguiente $12 \times 3 = 36$ gr. de las leyes inferiores, y $29 \times 2 = 58$ de las superiores, formando así 94 gr. de ligación de 0,840 de ley.

Si para obtener 94 gr. de liga, se toman 12 gr. de cada una de las leyes inferiores, para obtener 758 gr. de liga, se tomarán:

$$\frac{12 \times 758}{94} = 96 \text{ gr. } 766.$$

Del propio modo encontraremos que de cada una de las leyes superiores deberán tomarse 233 gr. 851.

508. PROBLEMA IV.—Una barra de plata pesa 3 500 gr. y tiene 0,815 de ley; ¿qué cantidad de plata pura se le debe añadir para darle la ley de 0,835?

Como la cantidad de cobre no varía, el que está contenido en la barra dada es los $\frac{185}{1\,000}$ del peso total, y pesa por consiguiente:

$$\frac{3\,500 \times 185}{1\,000} = 647 \text{ gr. } 50.$$

En la nueva barra que se pide, el cobre debe representar los $\frac{165}{1\,000}$ del peso total; luego los $\frac{165}{1\,000}$ igualan a 647 gr. 50; $\frac{1}{1\,000}$ será $\frac{647{,}50}{165}$, y los $\frac{1\,000}{1\,000}$ serán:

$$\frac{647{,}50 \times 1\,000}{165} = 3\,924{,}24, \text{ peso total.}$$

Por consiguiente, 3 924,24 — 3 500 = 424 gr. 24, será la cantidad de plata que debe añadirse.

PROBLEMAS

1º Término medio

949. Un regimiento ha caminado durante 6 días como sigue: el 1er día 24 millas; el 2º, 29; el 3º, 26; el 4º, 30; el 5º, 22; el 6º, 25; ¿cuál es el término medio de su marcha diaria?

950. Para probar un cañón de artillería se han disparado 25 tiros; 10 de ellos han alcanzado a 2 560 metros; 5 a 2 590 m.; 6 a 2 600 m., y 4 a 2 550 m.; ¿cuál es el alcance medio de dicho cañón?

951. Ocho obreros durante 5 meses se han empleado en tres obras distintas: la 1ª era de 40 metros, la 2ª de 50, y la 3ª de 80; por la 1ª obra recibieron Bs. 240; por la 2ª, Bs. 200; por la 3ª, Bs. 240. Se les propone otra obra de 350 metros, al precio medio de las tres primeras; ¿cuál será el precio de estos 350 metros, y la parte de cada uno?

952. Teodosio hace desmontar 4 hectáreas de terreno; como éste no ofrece en todas partes una misma dificultad, el precio ha sido distinto; por la 1ª se pagan Bs. 250; por la 2ª Bs. 175; por la 3ª, Bs. 163,75, y por la 4ª, Bs. 158,25; ¿cuál es el precio medio, y cuánto se ha gastado por todo?

953. Máximo compra 850 metros de tela a Bs. 3,19; ha vendido 350 a Bs. 3,56, 220 a Bs. 3,70, y los demás a Bs. 3,80; ¿cuánto ha ganado por metro, término medio?

954. Ramiro recibe Bs. 1 364,00 por semana para pagar a 18 obreros que tiene a sus órdenes; ¿cuánto le quedará para él, al fin del año, si a 5 de los obreros les da Bs. 16,00 por día; a 4 obreros, Bs. 12,00; a 6 de ellos, Bs. 6,00, y a los 3 restantes, Bs. 4,00?

955. Víctor compra té de dos calidades: paga la menor parte a Bs. 9,00 la libra, y lo demás a Bs. 6,30; ¿cuál es el precio medio de la libra, sabiendo que la diferencia entre la cantidad de a Bs. 9,00 y la de a Bs. 6,30 es de 3 060 lbrs., y que el cociente de ellas es 260?

2º Mezcla

956. Habiendo vaciado Dámaso los 3/4 de un tonel de 240 litros, lo llena con vino de Bs. 3,50; ¿a cuánto le sale el litro de mezcla, sabiendo que el primero era de Bs. 6,00 el litro?

957. ¿Qué cantidad de agua se debe añadir a 25 lit. de vino de a Bs. 6,00 el lit. para que la mezcla no valga más que Bs. 5,00 el litro?

958. Un mercader tiene diversas especies de maíz a Bs. 1,20, Bs. 1,60, Bs. 2,40, Bs. 3, Bs. 3,60; quiere vender 650 kilos a Bs. 2, de modo que no pierda ni gane; ¿cuántos debe vender de cada especie?

959. Fulgencio tiene 3 barriles de vino; el 1º contiene 230 lit. a Bs. 3,50 el lit.; el 2º, 280 lit., e importa Bs. 960, y el 3º, 195 lit. a Bs. 5,00 el lit.; si mezcla estos vinos, añadiendo 45 lit. de agua, ¿a cómo le sale el litro de mezcla?

960. Un consumidor pregunta qué cantidad de agua debe añadir a una botella de vino de a Bs. 7,50 para que le salga sólo a Bs. 6,00.

961. Mauricio quiere comprar café a 48 cents., a 50 y a 60 la libra; ¿cuántas debe tomar de cada precio para completar 850 lbs. al precio medio de 58 cents. cada una?

962. ¿En qué proporción debe comprarse un líquido de a Bs. 25 y Bs. 19 el hl. para que salga al precio medio de Bs. 21 cada uno?

963. Feliciano ha comprado 2 barriles de trementina en Bs. 45,60; el 1° cuesta Bs. 7,20 más que el 2°, y cada uno de ellos tiene 48 galones; le quieren comprar 70 galones al precio medio de Bs. 0,45; ¿cuántos debe vender de cada barril?

964. Esperidión ha comprado 48 libs. de té, que sale al precio medio de Bs. 6,00 la lib.; resulta que treinta de ellas importan Bs. 0,75; ¿cuál era el precio de cada una de las demás?

965. Crescencia quiere comprar 646 lbs. de cuatro especies distintas de queso; la 1ª importa Bs. 1,30; la 2ª, Bs. 2,30; la 3ª, Bs. 2,50, y la 4ª, Bs. 2,90; ¿cuántos debe tomar de cada calidad para que la libra le salga a Bs. 1,90?

966. Vicente tiene tabacos de a Bs. 50, Bs. 36, Bs. 30 y Bs. 28 el kilo; ¿qué cantidad debe tomar de cada especie para formar 20 kilos a Bs. 32 cada uno?

967. Anastasio ha vendido 7 kg. de azúcar y 2 de café por Bs. 24,50; en otra ocasión, vendió 5 kg. del mismo azúcar y 8 del mismo café por Bs. 40,50; ¿cuánto importa el kg. de cada uno de estos artículos?

968. Las sustancias que entran en la composición del vidrio son las siguientes, según sus proporciones: 1° arena, 100 partes; 2° sulfato de sosa, 44; 3° carbón en polvo, 5; 4° cal apagada, 6; 5° pedazos de vidrio, 20; ¿qué peso de cada sustancia será menester, para 832 kg. de arena?

969. ¿Cuánto aceite a Bs. 2,40 kg. debe mezclarse con 100 kg. a Bs. 3, para poder vender el kg. a Bs. 2,65 sin perder ni ganar?

970. El mismo problema, si se quiere ganar Bs. 0,10 por kg.

971. Un comerciante tiene vinos a Bs. 270, a Bs. 320 y a Bs. 360 el hectolitro; ¿cuántos hectolitros deben tomarse de cada precio para formar una mezcla de 350, que puedan venderse a Bs. 345 cada uno, ganando el 15 %?

972. Romualdo tiene vinagre a Bs. 7,20, Bs. 6,70, Bs. 6,50, Bs. 5,00 y Bs. 4,50 el litro; quiere formar una mezcla de 480 litros, de modo que pueda venderlos a Bs. 6,00 sin perder ni ganar; ¿cuántos debe tomar de cada calidad, sabiendo que deben entrar sólo 50 lit. a Bs. 7,20 en esta mezcla?

973. Sinforiano ha comprado 80 hectol. de trigo a Bs. 48, y 49 hectol. a Bs. 42; si mezcla ambas especies, ¿cuál será el precio medio del hectol., y cuál la ganancia del mercader si revende su trigo a Bs. 9,60 el doble decalitro.

974. Norberto saca los 4/5 de un barril de vino que contiene 228 litros, y vuelve a llenarlo con vino de a Bs. 4,50. ¿A cómo sale un litro de vino mezclado, sabiendo que el primero era de a Bs. 6,00?

975. Patricio compra 3 barriles de vino para su uso: el 1° contiene 250 litros a Bs. 3,50 c/u.; el 2°, 228 lit. y cuesta Bs. 9,00, y el 3°, 195 lit. a Bs. 4,50 c/u. Si mezcla estos vinos y agrega 40 lit. de agua, ¿a cómo le saldrá el litro de mezcla?

976. A 215 lit. de un vino que importa a Bs. 4,00 c/u., se añaden 5 lit. de alcohol, a Bs. 2,50 el litro; ¿en cuánto debe venderse el litro de mezcla para ganar el 20 % sobre el precio de compra?

977. Valentín tiene 150 hectol. de trigo a Bs. 42, y 140 a Bs. 52; ¿cuántos deben tomarse de cada precio para formar 250 hectolitros al precio medio de Bs. 46?

978. Un especiero tiene aceite a Bs. 0,95, a Bs. 0,85, a Bs. 0,75 y a Bs. 0,65 el litro; quisiera ganar en término medio Bs. 0,10 por litro. ¿Cuántos litros debe tomar de cada especie para formar una mezcla de 240 lit. al precio medio de Bs. 0,80?

979. Fernando tiene coñac a Bs. 7,00, a Bs. 8,00, a Bs. 9,00 y a Bs. 11 el litro; quiere formar una mezcla que pueda vender a Bs. 10 el litro ganando Bs. 1,40 por litro; ¿cuánto tomará de cada calidad para 1 litro de mezcla?

3° Ligación

980. Un platero tiene dos barras de plata: la una de 0,920 de ley, y la otra de 0,840; si liga un peso igual de cada una de las barras, ¿cuál será la ley de la nueva aleación?

981. Si se ligan dos barras de plata, la una de 27 kg. 50 de peso y 0,940 de ley, y la otra de 8 kg. 75 de peso y 0,870 de ley, ¿qué ley tiene la nueva barra?

982. Si se ligan 3 kg. 200 de plata pura y 5 de una aleación que tiene 0,650 de ley, ¿qué ley tiene la nueva liga?

983. Se derriten tres barras de plata, de 0,750, 0,840 y 0,950 de ley, respectivamente, que pesan: la 1ª 5 kg., la 2ª 3 kg. 800 y la 3ª 3 kg. 500; ¿cuál es la ley de la aleación que resulta?

984. Un platero tiene dos barras de oro de 95 decagramos cada una, la 1ª de 0,920 y la 2ª de 0,750 de ley; ¿cuántos gramos de la 2ª deben añadirse a la 1ª para reducirla a la ley de 0,840?

985. ¿Qué cantidad de cobre debe añadirse a una barra de plata que pesa 635 gr. y tiene 0,920 de ley para que resulte una aleación de 0,835 de ley?

986. ¿Qué cantidad de oro puro debe añadirse a una barra de oro de 548 gr. y de 0,840 de ley, para que resulte una barra de 0,900 de ley?

987. ¿Qué cantidad de dos barras de plata de 0,800 y de 0,950 de ley, respectivamente, debe alearse para acuñar 225 piezas de 5 bolívares?

988. ¿Qué cantidad de plata de 0,920, 0,850, 0,740 y de 0,720 de ley es menester para formar 4 kg. 65 de aleación, de 0,800 de ley?

989. Una barra de plata de 0,875 de ley pesa 2 340 gr.; pregúntase qué cantidad de cobre se le debe añadir para reducirla a la ley de 0,835.

990. Con los mismos datos, se pregunta qué cantidad de plata debería quitarse de la barra, para reducirla también a 0,835 de ley.

991. Con tres barras de 0,720, 0,840 y 0,950 de ley se trata de formar una aleación de 0,900 de ley que pese 5 100 gr.; ¿qué cantidad debe tomarse de cada barra?

CAPÍTULO VII

REGLA CONJUNTA

509. Definición.—La *regla conjunta* tiene por objeto determinar la relación de igualdad o equivalencia que hay entre una cantidad dada y otra cantidad unida a la primera por una serie de relaciones conocidas.

510. REGLA.—Para resolver una regla conjunta, se representa por x la cantidad buscada y se escribe primero la igualdad que expresa el objeto de la cuestión; debajo se escriben las demás igualdades dadas por las relaciones conocidas, con la condición de que el primer miembro de una igualdad exprese unidades de la misma especie que las del segundo miembro de la igualdad precedente, hasta llegar a tener en el segundo miembro las mismas unidades que en el primer miembro de la primera igualdad; multiplicando miembro por miembro, haciendo caso omiso de la naturaleza de las unidades, resulta una igualdad de la cual se deduce el valor de x.

511. EJEMPLO I.—Si 20 lbs. de los Estados Unidos equivalen a 12 lbs. de España; y 15 lbs. de España, a 20 lbs. de Dinamarca y 40 lbs. de Dinamarca, a 60 lbs. de Rusia, ¿cuántas lbs. de Rusia equivalen a 100 lbs. de los Estados Unidos?

Operación.

x *lbs.* de Rusia	= 100 *lbs.* de los EE. UU.
20 *lbs.* de los EE. UU.	= 12 *lbs.* de España
15 *lbs.* de España	= 20 *lbs.* de Dinamarca
40 *lbs.* de Dinamarca	= 60 *lbs.* de Rusia

Multiplicando miembro por miembro, tendremos:

$$x \times 20 \times 15 \times 40 = 100 \times 12 \times 20 \times 60.$$

De donde: $$x = \frac{100 \times 12 \times 20 \times 60}{20 \times 15 \times 40} = 120 \text{ } lbs.$$

512. **EJEMPLO II.—Calcúlese el peso de la moneda de oro alemana de 10 marcos, sabiendo que el marco vale exactamente 1/3 thaler de Prusia, que estas dos monedas tienen 0,900 de ley, y que la relación del oro, a la plata es de 15,5 a 1. Se sabe además que con 500 gramos de plata pura se acuñan 30 monedas de 1 thaler.**

En cuanto al *peso* tenemos:

x gramos de moneda	= 10 marcos en oro.
15,5 marcos en oro	= 1 marco en plata.
3 marcos en plata	= 1 thaler.
30 thaleres	= 500 gr. de plata pura.
9 gr. de plata pura	= 10 gramos de moneda.

Multiplicando y reduciendo, resulta:

$$x \times 15{,}5 \times 3 \times 30 \times 9 = 10 \times 1 \times 1 \times 500 \times 10.$$

De donde: $$x = \frac{10 \times 1 \times 1 \times 500 \times 10}{15{,}5 \times 3 \times 30 \times 9} = 3 \text{ gr. } 982.$$

PROBLEMAS

992. Cuando 100 lbs. de los EE. UU. valen 95 de Italia, y 19 lbs. de Italia equivalen a 25 de Persia; ¿cuántas lbs. de los EE. UU. son menester para igualar a 50 lbs. de Persia?

993. ¿Cuánto costarán 150 gruesas de plumas, suponiendo que 12 gruesas de plumas valen como 6 litros de vino; 9 litros de vino valen lo mismo que 4 kg. de café; 15 kg. de café, lo mismo que 5 pañuelos; y 8 pañuelos importan 40 francos?

994. Expresar en federicos de Prusia el valor de 60 duros de España, sabiendo que 10 duros de España importan 47 chelines de Inglaterra, que 65 chelines de Inglaterra valen 33 florines de Holanda; y 40 florines de Holanda, lo mismo que 21 rublos de Rusia; y 156 rublos de Rusia, lo mismo que 30 federicos de Prusia.

995. Como 10 libras esterlinas de Inglaterra valen 102,15 florines de Viena, y 50 florines valen 100 marcos de Alemania, y 81 marcos importan 100 francos, se pregunta a cuántos francos equivalen 200 libras esterlinas.

996. Si 11 metros igualan a 12 yardas, y con 314 francos se compran 58 m. de tela, y 32 francos valen 25 chelines, ¿cuántas yardas se podrán comprar con 55 chelines?

997. ¿Cuánto costarán 16 varas de tela, sabiendo que 6 varas equivalen a 5 met., que 8 m. importan 27 francos, y que 1 franco vale Bs. 0,20?

998. Si con Bs. 111 se compran 87 cántaras, y si Bs. 48 valen 15 dólares americanos, y 24 dólares igualan a 5 libras esterlinas; ¿cuántos galones americanos podrán comprarse con 35 lbs. esterlinas, sabiendo que 81 galones equivalen a 19 cántaras?

999. ¿Qué suma necesitaría un Gobierno para pagar el sueldo a 7 generales, suponiendo que el de 4 generales es igual al de 9 coroneles, el de 5 coroneles al de 8 comandantes, el de 6 comandantes al de 10 capitanes, el de 12 capitanes al de 16 oficiales, el de 10 oficiales al de 15 sargentos; el de 3 sargentos al de 4 cabos, el de 2 cabos al de 3 soldados, si el de un soldado es de Bs. 60?

CAPÍTULO VIII

MÉTODO DE FALSA POSICIÓN

513. Definición.—*Método de falsa posición*, o mejor dicho de *falsa suposición*, es el procedimiento por medio del cual se determina la incógnita de un problema por medio de una o más hipótesis.

Los problemas de falsa posición se resuelven con mucha facilidad por el álgebra.

514. El método de falsa posición es de dos especies: *simple* y *compuesto o doble*.

La falsa posición es *simple* cuando se supone un solo número para encontrar el verdadero, y *doble* cuando son dos los números supuestos.

515. **REGLA.**—Para resolver la falsa posición simple, **se supone un número cualquiera en lugar de la incógnita; se hacen con el número supuesto todas las operaciones indicadas en el problema; con el número que así resulte y los demás datos conocidos formúlese la proporción siguiente:**

El resultado obtenido es al número que se da en el problema como el número supuesto es al incógnito.

EJEMPLO.—Una persona ha vendido $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ **de una pieza de paño, y le sobran todavía 6 metros; ¿cuál era la longitud de dicha pieza?**

Operación.

Número supuesto, 12 m., divisible por los denominadores.

$$\frac{1}{3} = 4 \qquad 12 - 9 = 3;$$

$$\frac{1}{4} = 3 \qquad \frac{3}{6} = \frac{12}{x};$$

$$\frac{1}{6} = \frac{2}{9} \qquad x = \frac{12 \times 6}{3} = 24 \text{ m.}$$

Supongo que la longitud de la pieza era de 12 mets., número con el cual puedo ejecutar las operaciones indicadas; sumando las partes tomadas de 12, resultan 9; ahora bien, restando 9 de 12 encuentro 3 en lugar de 6 que dice el problema. Entonces, planteo la proporción como lo indica la regla, y resultan 24 metros.

NOTA: También puede resolverse este problema y muchísimos otros sin la falsa posición, conforme a los que van analizados en las lecciones referentes a los números quebrados.

516. **REGLA.**—Para resolver la falsa posición doble, se supone primero un número, con el cual se observan todas las condiciones expresadas en el problema; si el resultado da el número que se busca, la operación queda terminada; si el resultado no fuere el pedido, se busca la diferencia que hay entre los resultados encontrados. Se supone otro número con el cual se hacen las mismas operaciones indicadas, y se busca también la diferencia que hay entre los resultados; las diferencias en ambas suposiciones se llaman errores.

En seguida se restan los dos errores, y por último, se plantea la proporción siguiente:

La diferencia de las suposiciones es a la diferencia de los errores como x (o el número que se debe aumentar o disminuir a la 1ª suposición) es al primer error.

EJEMPLO.—Un profesor quiere repartir entre algunos de sus alumnos cierto número de naranjas, pero con la condición de que ellos mismos encuentren cuántos alumnos deben ser recompensados así, y cuántas naranjas les destina. Díceles, pues, que si les da 7 a cada uno, le sobrarán 9; y si les da 10 a cada uno, le faltarán 6; ¿cuántos serán los alumnos recompensados, y cuántas las naranjas que les destinó el profesor?

Primera suposición, 12 alumnos.

$$\left.\begin{array}{ll} 7 \times 12 = 84; & 84 + 9 = 93 \\ 10 \times 12 = 120; & 120 - 6 = 114 \end{array}\right\} \quad \text{Error } 21.$$

Segunda suposición, 10 alumnos.

$$\left.\begin{array}{ll} 7 \times 10 = 70; & 70 + 9 = 79 \\ 10 \times 10 = 100; & 100 - 6 = 94 \end{array}\right\} \quad \text{Error } 15.$$

Diferencia de los errores: $21 - 15 = 6$.
Diferencia de las suposiciones. $12 - 10 = 2$.

$$\text{Proporción: } \frac{2}{6} = \frac{x}{21}; \qquad x = \frac{21 \times 2}{6} = 7.$$

Debe restarse 7 de 12, 1ª suposición; $12 - 7 = 5$ al.

Comprobación.

$$\begin{array}{ll} 7 \times 5 = 35; & 35 + 9 = 44 \text{ naranjas.} \\ 10 \times 5 = 50; & 50 - 6 = 44 \quad — \end{array}$$

517. Claro está que cada número supuesto da una diferencia tanto mayor cuanto más dista este número del verdadero. También es evidente que la diferencia que hay entre los dos errores no proviene sino de la diferencia de los dos números supuestos, y que esta diferencia de los errores es tanto mayor, cuanto más distan entre sí los dos números supuestos: hay, pues, la misma relación entre la diferencia de los errores y la de los números supuestos, que entre la que ha producido uno de los números, y la diferencia que hay de este mismo número al verdadero.

EJEMPLO.—Queriendo recompensar un capitán a algunos de sus soldados que se habían distinguido en una acción, les destinó cierto número de bolívares; de modo que en la repartición, cuando cada uno tomaba 8, sobraban 45, y cuando tomaba cada uno 11, faltaban 27; pregúntase cuál era el número de soldados y qué suma les repartió el capitán.

Primera suposición, 14 soldados.

$$\left.\begin{array}{ll} 8 \times 14 = 112; & 112 + 45 = 157 \\ 11 \times 14 = 154; & 154 - 27 = 127 \end{array}\right\} \text{Error } 30.$$

Segunda suposición, 18 soldados.

$$\left.\begin{array}{ll} 8 \times 18 = 144; & 144 + 45 = 189 \\ 11 \times 18 = 198; & 198 - 27 = 171 \end{array}\right\} \text{Error } 18.$$

Diferencia de los errores: $30 - 18 = 12$.

Diferencia de las suposiciones: $18 - 14 = 4$.

$$\text{Proporción: } \frac{4}{12} = \frac{x}{30}; \qquad x = \frac{4 \times 30}{12} = 10.$$

Debe añadirse 10 a la 1ª suposición, lo que da

$$14 + 10 = 24 \text{ soldados.}$$

Comprobación.

$$\begin{array}{lll} 8 \times 24 = 192; & 192 + 45 = \text{Bs. } 237 & \text{repartidos.} \\ 11 \times 24 = 264; & 264 - 27 = \text{Bs. } 237 & \text{—} \end{array}$$

PROBLEMAS

1000. Un negociante que tiene vino a Bs. 500 y a Bs. 600 el hectolitro, quiere hacer una mezcla de 30 hl. que pueda vender a Bs. 525 el hl. ¿Qué cantidad debe tomar de cada clase?

1001. ¿Qué cantidad debe tomarse de 2 ligas de 0,920 y 0,750 de ley para obtener otra de 500 g. y de 0,840 de ley?

1002. Ignacio quiere pagar una deuda de 147 Bs. con 39 monedas, de 5 y de 2 Bs. ¿Cuántas monedas de cada clase tendrá que dar?

1003. Habiendo perdido un jugador la mitad de su dinero, volvió al juego, y perdió $\frac{1}{2}$ de lo que le quedaba; repitió lo mismo por tercera y cuarta vez, hasta que no le quedaron más que Bs. 6; ¿cuánto dinero tenía al principiar el juego?

1004. Tres personas tienen juntas 150 años: la 3ª tiene el duplo de la edad de la 2ª, la 2ª tiene el triple de la 1ª; ¿cuál es la edad de cada una?

1005. Dos números cuya suma es 70 se hallan en cierta relación, la cual resulta inversa si se añade 14 al primero y si se quita 14 al segundo; ¿cuáles son estos números?

1006. La relación de la edad de un padre con la de su hijo es de 9 a 5; ¿qué edad tienen ambos, si el padre cuenta 28 años más que su hijo?

1007. Un holgazán pasó su vida del modo siguiente, desde los 18 años: los 3/8 de ella, durmiendo; 1/16 comiendo y bebiendo; 1/4 paseándose; los 3/16 jugando; 1/16 en su silla poltrona, y el resto, que son 2 años, trabajó; ¿qué edad tuvo al morir?

1008. Feliciano se conviene con un peón en darle 12 Bs. por cada día que trabaje, con tal que él le dé 15 por cada día que no trabaje, a causa del perjuicio que le ocasiona; sucede que al cabo de 63 días no le queda nada por recibir al peón, pero tampoco tiene nada que dar a su patrón; se pregunta cuántos días ha trabajado.

1009. Un niño que tenía cierto número de manzanas las reparte del modo siguiente: da a uno de sus condiscípulos la 1/4 parte del número total, más una manzana y 1/2; a otro los 2/7 del número total, más 6/7 de manzana; por último, a otro la 1/8 parte del número total, más 3/4 de manzana, y le quedan 3 para él; ¿cuántas manzanas tenía el niño, y cuántas dió a cada uno de sus condiscípulos?

1010. Un maestro propone 9 problemas a su alumno, y le promete 6 buenas notas por cada problema bien resuelto pero debiendo devolverle 3 el alumno por cada problema errado; resulta por fin que el maestro y el alumno no se deben nada; ¿cuántos fueron los problemas bien resueltos?

1011. Luis dice a Antonio: "Dame 5 de tus manzanas, y tendremos ambos el mismo número"; Antonio le responde: "Dame tú 10 de las tuyas, y tendré el duplo de las que te queden"; ¿cuántas manzanas tiene cada uno?

1012. Preguntaron a un individuo qué suma tenía en el bolsillo, y contestó: "Si a la suma que tengo añadís su mitad, cuarto y quinto, resultarán Bs. 78". ¿Qué suma tenía?

1013. Una liebre perseguida por un perro lleva ya adelantados 90 saltos, y da 5 saltos mientras el perro da 4; y como 7 saltos de la liebre igualan a 5 del perro, ¿cuántos tendrá que dar éste para alcanzarla?

1014. Un padre de familia reparte la suma de Bs. 3 900 entre sus 3 hijos: el primero recibe 3 veces más que el segundo, y éste la mitad de lo que corresponde al tercero. Dígase lo que recibe cada uno.

1015. La suma de dos números es 47, su cociente 5, y el residuo de su división también 5; ¿cuáles son estos números?

1016. Una familia constaba de varios niños y niñas; alguien les preguntó cuántos eran, y la niña mayor respondió que tenía tantas hermanas como hermanos; pero el niño mayor dijo que tenía dos veces más hermanas que hermanos. ¿Cuántos niños y niñas había?

1017. Tres toneles llenos de aguardiente, contienen: el primero, 40 litros más que el segundo; el tercero, tanto como los otros dos juntos. Dígase la capacidad de cada uno, sabiendo que los tres juntos contienen 440 litros.

PARTE COMERCIAL [1]

CAPÍTULO I

EFECTOS DE COMERCIO

518. Definición.—Llámanse *efectos* o *documentos de comercio* los valores transmisibles que sirven para el arreglo de las operaciones a plazo.

Fuera del caso de la venta al por menor, raras veces se verifica en metálico el pago de las mercaderías compradas.

Cuando el comprador no quiere o no puede librarse inmediatamente, suscribe al vendedor un *pagaré a la orden*, o le autoriza a que gire contra él una *letra de cambio*.

Estos efectos son *transmisibles por endoso*, y pagaderos en metálico a una fecha llamada *fecha del vencimiento*.

El plazo suele estar comprendido entre uno y seis meses, a contar desde el día del giro.

Los efectos de comercio son garantizados por el crédito del comerciante o del banquero que los ha suscrito o aceptado. Hasta el día del vencimiento, *puédese hacer circular dichos efectos*, pudiendo los portadores entregarlos en cambio de numerario o de mercaderías, en una palabra, *negociarlos*.

Los documentos de giro llevan un *timbre* que corresponde a la cuantía de la cantidad girada.

519. Ventajas de los efectos de comercio.—Las principales ventajas son las siguientes:

1° Permiten al deudor demorar el pago de sus obligaciones, sin privar al acreedor de la suma que le es debida;

2° Evitan los gastos y riesgos del transporte de metálico;

(1) Para más detalles, véase nuestra obra: *Contabilidad Comercial*.

3° Disminuyen la circulación de numerario, pues con los efectos se saldan las deudas lo mismo que con el dinero.

520. Principales efectos de comercio.—Los principales efectos de comercio son: la *letra de cambio*, el *pagaré a la orden* y el *cheque*.

LETRA DE CAMBIO

521. Definición.—La *letra de cambio* es un efecto transmisible por el cual una persona manda a otra pague a la orden de sí misma o de un tercero, una cantidad determinada, en un tiempo también determinado.

El que crea el documento y ordena que se pague se llama *girador*; el a quien va dirigida la letra es el *girado*; y el *tenedor* es la persona a cuya orden debe hacerse el pago.

522. Forma de la letra de cambio.—La letra de cambio, para que surta efecto en juicio, ha de contener:

1° La designación del lugar y fecha del giro;

2° El vencimiento;

3° El nombre del tenedor;

4° La cantidad en letras y números que se manda pagar, expresada en moneda efectiva;

5° La expresión del valor recibido;

6° El nombre del girado y su domicilio;

7° La firma del girador.

523. Endoso.—El *endoso* es la transmisión de la propiedad de una letra a favor de otro o a su orden.

El endoso se extiende en el dorso de la letra en la forma siguiente:

Páguese a la orden de Librería Mundial, valor recibido.

Caracas, 10 *de febrero de* 1945.

Emilio Ramos.

ACEPTACION

A C E P T A D A

San Cristóbal, Enero 25 de 1945

Roberto Gómez & Cía.

ENDOSO

Páguese a la orden del Banco de Venezuela, valor al cobro. San Cristóbal, Enero 25 de 1945.

José María Vargas Camacho.

CANCELACION

C A N C E L A D A

San Cristóbal, 20 de Febrero de 1945.

BANCO DE VENEZUELA

San Cristóbal.

MODELO DE UNA LETRA DE CAMBIO

Caracas 20 de enero de 1949 Por Bs.2000.oo

A 30 días vista se servirán Uds mandar pagar

por esta única de Cambio a la orden de José

María Vargas Camacho

la cantidad de dos mil Bolívares.

Valor Recibido que anotarán Uds. en cuenta

nuestra según aviso de

A Roberto Gómez & Cía. S. S. S.

No. 285 San Cristobal. Carlos A. Vivas y Cía.

TIP. GARRIDO

MODELO DE UN PAGARÉ

Por Bs. 10.000.00

Yo, Antonio Pérez, mayor de edad y vecino de esta ciudad de Caracas, y hábil para todos los actos de la vida civil, declaro que debo y pagaré al señor Carlos Fernández, mayor de edad y vecino de esta misma ciudad la suma de diez mil bolívares (Bs. 10.000.00*), valor que he recibido a mi entera satisfacción. Me comprometo a pagar a mi acreedor esta suma el día quince de septiembre próximo. En caso de mora en el pago de este pagaré, reconoceré a mi acreedor el interés del uno por ciento* (1 %) *mensual, sin perjuicio de la ejecución. Quedan afectos al pago de esta suma mi persona y mis bienes. Renuncio domicilio, vecindad y leyes que pudieren favorecerme para eludir el pago. En constancia de lo expuesto, firmo el presente documento, ante testigos, en Caracas, a quince de marzo de mil novecientos cuarenta y cinco.*

(Estampilla y firma)

Testigo, Testigo,

524. Vencimiento.—El vencimiento de una letra de cambio puede fijarse por uno de estos términos:

1° *A la vista*; en cuyo caso debe pagarse en el acto de su presentación.

2° *A uno o más días vista*, el día en que se cumplan los señalados contándolos desde el día siguiente al de la aceptación.

3° *A día fijo o determinado*, es el mismo día.

VALE O PAGARÉ A LA ORDEN

525. Definición.—El *vale o pagaré a la orden* es un documento por el cual un deudor se compromete a pagar una cantidad a la orden del acreedor, en una fecha determinada.

526. Forma del pagaré.—El pagaré contiene:

1° El nombre específico de *pagaré*;
2° La época del pago;
3° El nombre de la persona a cuya orden se habrá de hacer el pago;
4° La cantidad en letra;
5° El origen y especie del valor que represente;
6° La fecha de la expedición;
7° La firma y la dirección del que contrae la obligación de pagar.

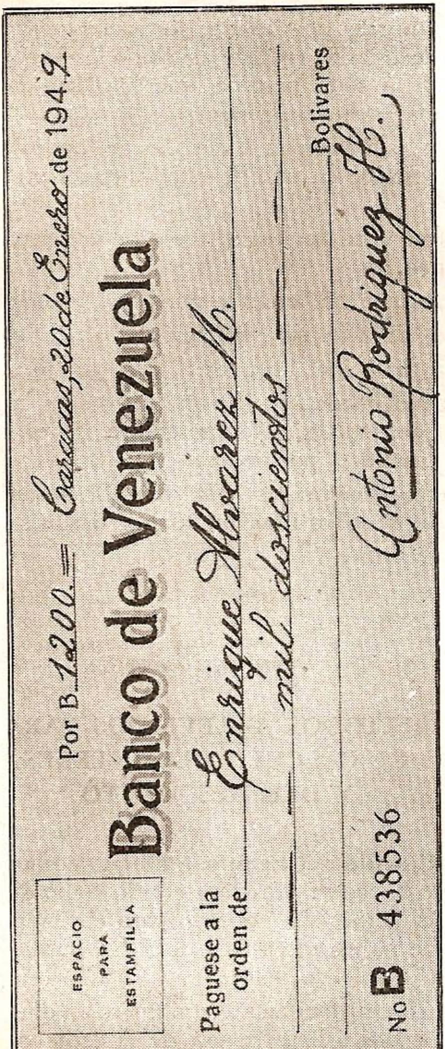
Los vales que hayan de pagarse en distinto lugar del de la residencia del pagador, indicarán un domicilio para el pago.

El *endoso* y el *vencimiento*, como para la letra de cambio.

CHEQUE

527. Definición.—Llámase *cheque* un documento por el cual el librador manda al librado pague al portador parte o todos los fondos que tiene depositados y dis-

MODELO DE UN CHEQUE



ESPACIO PARA ESTAMPILLA

Por B. 1200.= Caracas, 20 de Enero de 1942

Banco de Venezuela

Paguese a la orden de Enrique Alvarez M.

mil doscientos Bolivares

Antonio Rodriguez H.

No B 438536

ponibles en poder del librado, que suele ser un banquero.

Las sociedades de crédito, así como los banqueros, suelen remitir a toda persona que hace un depósito de fondos, una libreta de cheques.

Cuando esta persona quiere sacar fondos o efectuar un pago, escribe en uno de estos cheques preparados al efecto:

1º El nombre del *tenedor*, o sea de la persona a quien se debe pagar;

2º La suma en letras y números;

3º La fecha de su expedición;

4º La firma del librador.

El cheque puede ser al *portador*, esto es, pagadero a cualquier persona que lo presentare. Si es *a la orden*, puede transmitirse por endoso.

El cheque siempre es *a la vista*. El portador puede presentarlo al cobro inmediatamente después de girado.

CAPÍTULO II

MÉTODOS ABREVIADOS PARA EL CÁLCULO DEL INTERÉS Y DEL DESCUENTO

528. **Cálculo del tiempo**.—En las cuestiones comerciales y de banco se considera el año como de 360 días, y los meses de 30; sin embargo para el tiempo de colocación, que no excede nunca de 3 ó 6 meses, se cuenta el número exacto de días.

Para encontrar fácilmente el número de días comprendidos entre dos fechas, se usa de la tabla de los días:

Tabla que indica el número de días que hay desde cualquier fecha de un mes, hasta la misma fecha de cualquier otro del mismo año

Desde un día cualquiera del mes de	HASTA EL MISMO DÍA DEL MES DE											
	Enero.	Febrero.	Marzo.	Abril.	Mayo.	Junio.	Julio.	Agosto.	Septiembre.	Octubre.	Noviembre.	Diciembre.
Enero	365	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334
Febrero ...	334	365	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
Marzo	306	337	365	31	61	92	122	153	184	214	245	275
Abril	275	306	334	365	30	61	91	122	153	183	214	244
Mayo......	245	276	304	335	365	31	61	92	123	153	184	214
Junio	214	245	273	304	334	365	30	61	92	122	153	183
Julio	184	215	243	274	304	335	365	31	62	92	123	153
Agosto	153	184	212	243	273	304	334	365	31	61	92	122
Septiembre .	122	153	181	212	242	273	303	334	365	30	61	91
Octubre ..	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365	31	61
Noviembre .	61	92	120	151	181	212	242	273	304	334	365	30
Diciembre .	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

Para encontrar, por ejemplo, cuántos días hay desde el 15 de marzo hasta el 15 de octubre, busco el mes de marzo en la hilera vertical de la izquierda, y el de octubre en la fila horizontal de encima, y en el punto de unión de ambas líneas, leo 214, que es el número buscado.

Del propio modo, para buscar cuántos días hay desde el 10 de junio hasta el 16 de noviembre, debo averiguar primero la diferencia que hay entre el 10 de junio y el 10 de noviembre, como ya queda indicado, y encuentro 153 días, a los que debo añadir los 6 que faltan del 10 al 16 de noviembre; luego, la diferencia exacta es de 159 días.

En los años bisiestos debe añadirse 1 día más al mes de febrero.

Cuando el tiempo pedido pasa de 1 año, se deberán añadir 365 días más por cada año de aumento.

MÉTODO DE LOS DIVISORES FIJOS

529. En la fórmula $I = \frac{C\,T\,t}{100}$ (**453**) sustituyamos el valor de t en días, o sea $\frac{n}{360}$, representando n el tiempo de colocación.

$$I = \frac{CTn}{36\,000} \text{ o } I = \frac{Crn}{360} \quad (\mathbf{461})$$

Cuando el tanto es submúltiplo de 360, como, por ejemplo, 12, 10, 9, 6, etc., se simplifica la fórmula, y viene a ser:

$$I = \frac{Cn}{3\,000} \ldots \frac{Cn}{3\,600} \ldots \frac{Cn}{4\,000} \ldots \frac{Cn}{4\,500} \ldots \frac{Cn}{6\,000} \ldots \frac{Cn}{7\,200} \ldots$$

Los números 3 000, 3 600, 4 000, etc., se llaman *divisores fijos*.

El numerador constante Cn, producto del capital por el número de días, se llama *número*.

Si se designa el número Cn por N, y el divisor fijo por D, tendremos la fórmula general:

$$I = \frac{N}{D}$$

530. REGLA.—El interés producido por un capital durante cierto número de días se encuentra dividiendo el número por el divisor fijo correspondiente al tanto dado.

531. Divisores fijos.—Para encontrar el divisor fijo, se parte 36 000 por el tanto del interés.

Así, al	2 %	el divisor fijo es	18 000
—	3	——	12 000
—	4	——	9 000
—	4 ½	——	8 000
—	5	——	7 200
—	6	——	6 000
—	8	——	4 500
—	9	——	4 000
—	10	——	3 600
—	12	——	3 000

Aplicación.—*Búsquese el interés de Bs.* 5 400 *durante* 150 *días al* 12 %, 10 %, 6 %, 5 %, 4 ½ %.

$$Cn = 5\,400 \times 150 = 810\,000.$$

El interés al 12 % será $\dfrac{810\,000}{3\,000} = \text{Bs. } 270$

— 10 % — $\dfrac{810\,000}{3\,600} = 225$

— 6 % — $\dfrac{810\,000}{6\,000} = 135$

— 5 % — $\dfrac{810\,000}{7\,200} = 112{,}50$

— 4½ % — $\dfrac{810\,000}{8\,000} = 101{,}25$

532. Cálculo simultáneo de varios intereses.—El método de divisores fijos es ventajoso sobre todo cuando se tiene que calcular el interés de varias sumas impuestas por tiempos diferentes y al mismo tanto, como ocurre en las cuentas corrientes y en las facturas de descuento, porque entonces basta *dividir la suma de los números por el divisor fijo correspondiente al tanto.*

EJEMPLO: *Calcúlese el interés total al 3 % de las sumas siguientes*:

Bs. 2 300	impuestos del	4 de Febrero	al 16 de	Mayo.
Bs. 750,60	—	2 de Marzo	al 6 de	Octubre.
Bs. 5 500	—	10 de Mayo	al 4 de	Julio.
Bs. 1 452,40	—	15 de Junio	al 10 de	Noviembre.

Solución

Capitales	*Días*	*Números*
2 300	101	232 300
750	215	161 250
5 500	55	302 500
1 452	148	215 296
	Total de los números:	911 346

El interés total será:

$$I = \frac{911\,346}{12\,000} = \text{Bs. } 75{,}94.$$

533. NOTAS: I. En el cálculo de los números no se tiene en cuenta la parte decimal de las sumas.

Para simplificar el cálculo del interés, los banqueros suprimen las dos últimas cifras de las sumas antes de multiplicarlas por el número de días, pero suprimen también las dos últimas cifras del divisor. Así haremos a continuación.

II. Cuando el tanto no da divisor fijo exacto, por ejemplo para el $3\frac{1}{2}$ %, se calcula primero al 3 %, y se añade al resultado $1/6$, porque $\frac{1}{2} = 1/6$ de 3; para el $4\,3/4$ % se calcula al 5 % el interés, y de él se resta $\frac{1}{20}$, etc.

III. Si se cuenta el año de 365 días, el método de los números para *n* días es también aplicable a los tantos 10 % y 5 % que dividen exactamente a 365; pero el divisor fijo es entonces 3 650 para el primero y 7 300 para el segundo.

MÉTODO DE LAS PARTES ALÍCUOTAS

Parte alícuota, submúltiplo y divisor son expresiones equivalentes.

534. 1° *Partes alícuotas del número de días necesarios para producir un interés igual a* $\frac{1}{100}$ *del capital.*

En la fórmula $I = \frac{Cn}{3\,000} \cdots \frac{Cn}{3\,600} \cdots \frac{Cn}{6\,000}$ (**529**)

podemos reemplazar los divisores fijos por

$$100 \times 30, \quad 100 \times 36, \quad 100 \times 60, \text{ etc.},$$

en que las cantidades 30, 36, 60, etc., son respectivamente iguales al cociente de 360 por el tanto, o sea $\frac{360}{T}$, y tendremos:

$$I = \frac{Cn}{100 \times 30} \cdots \frac{Cn}{100 \times 36} \cdots \frac{Cn}{100 \times 60} \cdots$$

Si hacemos n igual a $\frac{360}{T}$, tendremos $I = \frac{C}{100}$; entonces, según el tanto, un capital cualquiera producirá un interés igual a la 100ª parte de este capital, en 30, 36, etc., días. De donde se deduce la regla siguiente.

535. REGLA.—Para encontrar el interés de una suma durante n días al 12 %, 10 %, 9 %, 8 %, 6 %, etc., se deben tomar las partes alícuotas de 30, 36, 40, 45, 60, etc., días que son necesarias para formar los días dados n; las partes alícuotas correspondientes al centésimo del capital darán el interés buscado.

EJEMPLOS: *Búsquese el interés*:

1° De Bs. 2 650 al 12 % en 166 días;
2° — 10 % en 188 —
3° — 9 % en 224 —

1° *Intereses de Bs.* 2 650, *al* 12 % *en* 166 *días*:

En 30 días,	Bs. 2 650	producen	. Bs. 26,50	
En 120 días	—	—	4 veces 26,50 o	106,00
En 40 —	—	—	$\frac{1}{3}$ de 106 o	35,33
En 6 —	—	—	$\frac{1}{5}$ de 26,50 o	5,30
Luego, en 166 —	Bs. 2 650	—	.....	Bs. 146,63

2° *Intereses de Bs.* 2 650, *al* 10 % *en* 188 *días*:

En 36 días,	Bs. 2 650	producen	. Bs. 26,50	
En 108 —	—	—	3 veces 26,50 o	79,50
En 72 —	—	—	2 veces 26,50 o	53,00
En 8 —	—	—	$\frac{1}{9}$ de 53 o	5,88
Luego, en 188 —	Bs. 2 650	—	.....	Bs. 138,38

3° *Intereses de Bs.* 2 650, *al* 9 % *en* 224 *días*:

En 30 días,	Bs. 2 650	producen	. Bs. 26,50	
En 200 días,	—	—	5 veces 26,50 o	132,50
En 20 —	—	—	$\frac{1}{10}$ de 132,50 o	13,25
En 4 —	—	—	$\frac{1}{5}$ de 13,25 o	2,65
Luego, en 224 —	Bs. 2 650	—	.....	Bs. 148,40

536. 2° Partes alícuotas del capital que produce Bs. 1 de interés por día.

Si en la fórmula $I = \frac{Cn}{3\,000} \ldots \frac{Cn}{3\,600} \ldots \frac{Cn}{6\,000} \ldots$

$\frac{7\,200}{Cn}$ (**529**) aconteciere que C sea igual al divisor fijo correspondiente al tanto, tendremos que $I = n$; entonces el capital 3 000, 3 600, 6 000, etc., produce Bs. 1 de interés por día. De donde se deduce la siguiente regla.

537. REGLA.—Cuando el capital cuyo interés se busca está en relación simple con el divisor fijo, se tomarán de este último las partes alícuotas que sean necesarias para formar el capital cuyo interés se pide, y las correspondientes partes alícuotas de los días, consideradas como bolívares darán el interés pedido.

EJEMPLOS: *Búsquese el interés*:

1° De Bs. 1 500 al 12 % en 118 días;
2° — Bs. 2 400 al 9 % en 150 —
3° — Bs. 4 000 al 6 % en 95 —

1° *Intereses de Bs.* 1 500 *al* 12 % *en* 118 *días*:

Bs. 3 000 en 118 días dan .... Bs. 118

Bs. 1 500 dan la $\frac{1}{2}$ de 118, o .... Bs. 59

2° *Intereses de Bs.* 2 400 *al* 9 % *en* 150 *días*:

Bs. 4 000 en 150 días dan .... Bs. 150

Bs. 2 000 dan la $\frac{1}{2}$ de 150, o .... Bs. 75

Bs. 400 dan la $\frac{1}{5}$ parte de 75, o .... Bs. 15

Luego Bs. 2 400 dan .... **Bs. 90**

3° *Intereses de Bs. 4 000 al 6 % en 95 días:*

Bs. 6 000 en 95 días dan .... Bs. 95

Bs. 3 000 dan la $\frac{1}{2}$ de 95 o .... Bs. 47,50

Bs. 1 000 dan la $\frac{1}{6}$ parte de 95, o .... Bs. 15,83

Luego Bs. 4 000 dan .... Bs. 63,33

538. Nota: Cuando el tanto no divide exactamente a 360, los métodos de los números y de las partes alícuotas no son directamente aplicables. Se puede entonces buscar el interés a uno de los tantos submúltiplos de 360, y deducir de él el interés al tanto pedido.

Se encontrará, por ejemplo, el interés al $5\frac{1}{2}$ %, tomando el interés al 5 %, y añadiéndole su décima parte; o calculándolo al 6 %, y restando de éste su $\frac{1}{12}$.

MÉTODO DEL 6 %

539. El cálculo del interés al 6 % se hace con mucha rapidez; pues, por el método de los divisores, el divisor 6 000 es simple, y las partes alícuotas de 6 000 se encuentran muy fácilmente, ya que:

$$\frac{6\,000}{2} = 3\,000,\quad \frac{6\,000}{3} = 2\,000,\quad \frac{6\,000}{4} = 1\,500,$$

$$\frac{6\,000}{5} = 1\,200,\quad \frac{6\,000}{6} = 1\,000,\quad \frac{6\,000}{10} = 600, \text{ etc.}$$

Conociendo el interés al 6 %, se encontrará el interés:

al 1 %	tomado el	1/6	de aquel	interés.
,, 2 %	,,	1/3		,,
,, 3 %	,,	1/2		,,
,, 4 %	restando	1/3		,,
,, 4 ½ %	,,	1/4		,,
,, 5 %	,,	1/6		,,
,, 7 %	añadiendo	1/6		,,

etcétera.

Ejemplo: *Hállese el interés de Bs.* 3 400 *por* 116 *días, al* 4 ½ %, *al* 5 %, *al* 3 %.

Por medio de uno de los métodos precedentes, se puede calcular el interés al 6 %; este interés es igual a Bs. 65,73.

El interés al 4 ½ % será $65{,}73 - \dfrac{65{,}73}{6} =$ Bs. 49,30.

El interés al 5 % será $65{,}73 - \dfrac{65{,}73}{6} =$ Bs. 54,77.

El interés al 3 % será: $\dfrac{65{,}73}{2} =$ Bs. 32,86.

540. Nota: El método de las partes alícuotas del capital se usa poco, por ser difícil la división del capital en partes alícuotas del divisor. El método por las partes alícuotas del tiempo es muy generalizado.

Pero los calculadores en los bancos suelen combinar el método de las partes alícuotas del tiempo con el de las partes alícuotas del tanto, calculando el interés al 6 % por el método de las partes alícuotas del tiempo, y pasando al interés real por el método de las partes alícuotas del tanto.

EJEMPLO: *Calcular el interés de Bs. 4 685 al 4 ½ %, por 75 días.*

Interés al 6 % por 60 días			Bs. 46,85
,,	,, 15 ,,	(¼ de 46,85)	11,71
	75		58,56
Interés al 4 ½ %: al 3 %		(½ de 58,56)	Bs. 29,28
,,	1 ½ %	(½ de 29,28)	14,64
Interés de Bs. 4 685:			Bs. 43,92

FACTURA DE DESCUENTO

541. Definición.—Llámase *factura de descuento* la nota detallada que acompaña los documentos de crédito que se descuentan en un Banco.

La factura que va a continuación manifiesta que los días se cuentan de la fecha de la negociación a la del vencimiento, y que el descuento se ha calculado por los divisores fijos, del mismo modo que el interés. Al descuento se han añadido el cambio y la comisión. Por lo tanto, en el presente caso, el banquero D. V. García no remitirá al portador sino 8 839,32 bolívares.

Factura de los efectos presentados por **D. Pablo Dubón** al banquero **D. Víctor García**, para su negociación y cobro, al descuento del 6 % en el día de la fecha, 17 de mayo de 1944.

Clases de efectos	Sumas		Vencimientos	Días	Números
Letra	5 000	,,	2 junio.	16	800
—	800	,,	17 —	31	248
Pagaré	2 550	50	25 —	39	975
Letra	560	,,	5 julio.	49	245
	8 910	50			
					2 268
	71	18	37,80 Descuento al 6 %: $\frac{2\,268}{60} = 37{,}80$ 11,11 Cambio 1/8 % 22,27 Comisión 1/4 %		

8 839, 32 Bs. Líquido a pagar.

Caracas, 17 *de mayo de* 1944

NOTA: Hoy día, por la concurrencia, son pocos los Bancos que cobran un derecho de comisión.

DESCUENTO DE FACTURAS

542. Ya hemos dicho (**476**) que el descuento de facturas se calcula a un tanto % convenido. Pero puede suceder que un parroquiano, por causa de sus muchos negocios con una casa de comercio tenga, a más del descuento ordinario, otro descuento o sobrerrebaja. No se debe confundir esta sobrerrebaja con el primer descuento.

En efecto, éste se calcula sobre el importe de la factura, y aquélla, sobre el mismo importe, pero descontado. Es lo que vamos a poner de manifiesto en los ejemplos siguientes:

1er. EJEMPLO, CON 1 SOBRERREBAJA.—Calcúlese el precio neto de una factura de Bs. 400, sobre la cual se hace el descuento del 20 % y 5 %.

No se debe descontar al 25 % (20 + 5) la suma de Bs. 400, pues tendríamos 400 — 100 = Bs. 300 neto a pagar.

El procedimiento que se debe emplear consiste en descontar primero Bs. 400 al 20 %, y en seguida el número obtenido al 5 %.

1° Descuento de Bs. 400 al 20 %:

	Bs. 400
Descuento al 20 %	80
	Bs. 320

2° Descuento de Bs. 320 al 5 %:

	Bs. 320
Descuento al 5 %	16
Neto a pagar	Bs. 304

Por este ejemplo se ve que el vendedor que hubiese calculado el descuento al 25 % (20 + 5), haciendo sólo una operación, habría perdido Bs. 4, pues el descuento del 5 % no debe afectar sino Bs. 320.

2° EJEMPLO, CON 2 SOBRERREBAJAS.—Calcúlese el valor neto de una factura de Bs. 200, sobre la cual se hace el descuento del 20 %, 5 % y 2 %.

1° El descuento de Bs. 200 al 27 % (20 + 5 + 2) sería de Bs. 54, por lo tanto, el importe neto de la factura, de 200 — 54 = Bs. 146.

2° Descuento de Bs. 200 al 20 %:

	Bs. 200
Descuento al 20 %	40
	Bs. 160

Descuento de Bs. 160 al 5 %:

	Bs. 160
Descuento al 5 %	8
	Bs. 152

Descuento de Bs. 152 al 2 %:

	Bs. 152
Descuento al 2 %	3,04
Neto a pagar	Bs. 148,96

La factura descontada es de Bs. 148,96 en vez de Bs. 146.

DETERMINACIÓN DE LOS BENEFICIOS Y DE LA VALORACIÓN

543. *Beneficio bruto* es el excedente del precio de venta sobre el precio de compra.

Beneficio neto o líquido es el beneficio bruto disminuído de los gastos.

Por *valoración*, entendemos aquí la suma añadida al precio de compra para obtener el precio de venta.

Los gastos (sueldo del personal, alquiler, alumbrado, etc.) se calculan sobre el precio total de venta, y no sobre el de compra; por lo tanto, *el beneficio neto debe calcularse sobre el precio de venta.*

Luego, es de suma importancia, para un comerciante, conocer el modo de proceder para valorar el precio de compra de sus mercaderías, a fin de que le resulte, en beneficio neto, un tanto % determinado.

Así, para tener 20 % de beneficio neto sobre mercancías compradas en Bs. 1 000, no basta decir: Si sobre Bs. 100 tengo Bs. 20 de ganancias, sobre Bs. 1 000 tendré 20 × 10 o sea 200, pues este 20 % no es más que una valoración: de este beneficio bruto hay que restar los gastos generales.

Por el cálculo se encuentra que a un beneficio neto de 20 % corresponde una valoración de 25 %. Luego, para el ejemplo precedente, tendremos:

Valoración		*Beneficio*	
Precio de compra	Bs. 1 000	Precio de venta	Bs. 1 250
Valoración 25 %	250	Beneficio 20 %	250
Precio de venta	Bs. 1 250	Precio de compra	Bs. 1 000

544. Consecuencias prácticas.—1° Para calcular la valoración correspondiente a un beneficio neto determinado, se multiplica por 100 este beneficio, y se divide el producto obtenido por 100 menos este beneficio.

EJEMPLO.—¿Cuál ha de ser la voloración para que resulte un beneficio neto de 10 %?

$$10 \times 100 = 1\,000; \quad \frac{1\,000}{100 - 10} = 11\ 1/9$$

Luego, hay que valorar de 11 1/9 para obtener un 10 % de beneficio neto.

2° Para calcular el beneficio %, conociendo los precios de compra y de venta, hay que restar el precio de compra del precio de venta, multiplicar la diferencia por 100, y dividir el resultado por el precio de venta.

EJEMPLO.—¿Cuál será el beneficio % realizado sobre mercaderías compradas en Bs. 100 y vendidas en Bs. 120?

$$(120 - 100)100 = 2\,000; \quad \frac{2\,000}{120} = 16\ 2/3\ \%.$$

El beneficio % será de 16 2/3.

3° Para encontrar el precio de venta, conociendo el precio de compra y el tanto % del beneficio neto que se quiere realizar, hay que multiplicar por 100 el precio de compra y dividir el producto por 100 menos el tanto del beneficio.

EJEMPLO.—Hállese el precio de venta de una mercancía comprada en Bs. 60, si se quiere realizar un 20 % de beneficio.

$$\frac{60 \times 100}{100 - 20} = 75.$$

El precio de venta será de 75.

4° Para encontrar cualquier beneficio neto, se multiplica por 100 la valoración correspondiente a este beneficio, y se divide el producto por la valoración más 100.

EJEMPLO.—Hállese el beneficio neto que corresponde a la valoración de 15 %.

$$\frac{15 \times 100}{15 + 100} = 13\frac{1}{23}\,\%.$$

El beneficio neto será $13\frac{1}{23}$ %.

CAPÍTULO III

CUENTAS CORRIENTES CON INTERÉS

545. Cuentas corrientes.—*Cuenta corriente* es el estado detallado de las deudas recíprocas de dos personas.

Las cuentas corrientes son *sin interés* o *con interés*.

Para saldar una cuenta *sin interés*, basta hacer la diferencia de las sumas del débito y del crédito.

546. Cuenta corriente con interés.—En estas cuentas, se calculan los intereses devengados por todas las sumas del débito y del crédito.

Cada una de las cuentas personales ocupa dos páginas del libro de las cuentas corrientes: la izquierda llamada *Debe*, y la derecha, *Haber*. En el *Debe* se anotan todas las cantidades entregadas; en el *Haber* se anotan las cantidades recibidas.

Para hallar la verdadera situación de la cuenta, se hace el *balance de las sumas, con sus intereses*, del *Haber* y del *Debe*.

Se suelen calcular los intereses por los *divisores fijos*. Éste es el procedimiento que empleamos en las cuentas corrientes adjuntas.

MÉTODO DIRECTO

547. Este método consiste en determinar, para cada suma, los intereses desde el día de la operación hasta el del cierre de la cuenta, y en escribir en el *Debe* o en el *Haber* el balance de los intereses.

En vez de calcular separadamente los intereses *deudores* y *acreedores* y buscar luego su diferencia, más fácil y rápido es hacer el balance (diferencia) de los *números*, y calcular el interés de este balance para asentarlo, según el caso, en el *Haber* o en el *Debe*.

El interés se escribe en la página *opuesta* a la que lleva el balance de los números.

Por último se hace el *balance de las sumas*, el cual representa el *saldo de la cuenta*.

En la cuenta que damos, todos los vencimientos son anteriores al cierre de la cuenta. Para el caso en que uno o varios vencimientos sean posteriores al cierre, véase nuestra *Contabilidad Comercial*.

MÉTODO INDIRECTO

548. Este método difiere del precedente por el modo de contar los días y el de verificar el cierre.

El día de la apertura de la cuenta se llama época. Los días se cuentan de la *época* a la fecha del vencimiento.

CUENTA CORRIENTE

MÉTODO INDIRECTO

D. Eusebio Gutiérrez, de Málaga

Debe — s/ cuenta corriente al 6 % anual, cerrada el 30 de Junio de 1911. — Haber

EECHAS		SUMAS			Días	Números	FECHAS		SUMAS			Días	Números
Enero	12	3 700	»	Mi entrega en efectivo	3	111	Enero	9	4 000	»	Su entrega en efectivo	Época.	
Febrero	5	500	»	Cheque 975	27	135	—	31	550	»	Suendosoam/o,c. Tomás	22	110
—	25	800	»	Mi endoso a s/o,c. Levy	47	376	Mayo	15	2 500	»	Su entrega en efectivo	65	1 625
Mayo	15	650	»	Cheque 976	126	756			34	18	*Interés sobre balance de*		
				Balance de las sumas							*los números*		2 051
				1 400	172	2 408							
		1 434	18	*Saldo a m/ cargo*									
		7 084	18			3 786			7 084	18			3 786
							Junio	30	1 434	18	*Saldo a cuenta nueva.*		

CUENTA CORRIENTE

MÉTODO DIRECTO

D. Eusebio Gutiérrez, de Málaga

Debe **s/ cuenta corriente al 6 % anual, cerrada el 30 de Junio de 1911.** *Haber*

FECHAS		SUMAS			Días	Números	FECHAS		SUMAS			Días.	Números
Enero	12	3 700	»	Mi entrega en efectivo	169	6 253	Enero	9	4 000	»	Su entrega en efectivo	172	6 880
Febrero	5	500	»	Cheque 975	145	725	—	31	550	»	Su endoso a m/o, c/Tomás	150	750
—	25	800	»	Mi endoso a s/o, c. Levy	125	1 000	Mayo	15	2 500	»	Su entrega en efectivo	107	2 675
Mayo	15	650	»	Cheque 976	46	276			34	18	*Interés s/ 2 051*		
				Balance de los números		2051							
		1 434	18	*Saldo a m/ cargo*									
		7 084	18			10 305			7 084	18			10305
							Junio	30	1 434	18	*Saldo a cuenta nueva.*		

Después de haber encontrado los *números*, se hace el balance de las sumas y se busca el número que le corresponde, contando los días que median entre la época y la fecha del cierre; este número se asienta en el lado donde se escribiría este balance.

Se hace el balance de todos los números, y se lleva el interés que le corresponde a la columna de las sumas y del lado en que haya menor suma de números.

En fin se hace el *balance de las sumas*, el cual representa el *saldo de la cuenta*.

Este método es el más usado, por tener la grandísima ventaja de evitar los números rojos, y la de poder preparar una cuenta, sin necesidad de conocer la fecha del cierre. Pero ambos métodos, como se ve, dan el mismo resultado.

MÉTODO HAMBURGUÉS

Este método es llama *hamburgués* por haberse usado y generalizado más particularmente en Hamburgo.

Consiste en hacer el balance de dos operaciones sucesivas después de haberlas reducido al mismo vencimiento, comparando luego con la operación siguiente el resultado obtenido, y así sucesivamente hasta el cierre de la cuenta.

Explicación de la cuenta adjunta: Como ya queda dicho, antes de comparar dos sumas consecutivas, hay que hacer que tengan el mismo vencimiento; para ello multiplico la primera por el número de días que median entre los dos vencimientos y escribo el producto en la columna de los números en el *Debe* o en el *Haber* según sea el saldo deudor o acreedor.

Recibido de Cordero Bs. 600, valor 5 de febrero
Entregado a — Bs. 500, — 9 de —

El 9 de febrero, la primera suma vale Bs. 600, más los intereses desde el 5 hasta el 9 de dicho mes.

En vez de agregar en el acto dichos intereses a Bs. 600, escribo en la columna del Haber el número 600×4, o sea 2 400.

CUENTA CORRIENTE

MÉTODO HAMBURGUÉS

D. José Cordero

Debe s/ cuenta corriente al 6 % anual, cerrada el 31 de Agosto. *Haber*

VENCIMIENTOS		DEBE O HABER	SUMAS		DÍAS	NÚMEROS DEBE	NÚMEROS HABER
Febrero	5	H	600	»	4		2 400
—	9	D	500	»			
—	9	H	100	»	28		2 800
Marzo	9	H	700	»			
—	9	H	800	»	10		8 000
—	19	D	1 200	»			
—	19	D	400	»	36	14 400	
Abril	24	D	800	»			
—	24	D	1 200	»	20	24 000	
Mayo	14	H	2 000	»			
—	14	H	800	»	21		16 800
Junio	4	H	1 600	»			
—	4	H	2 400	»	13		31 200
—	17	D	1 400	»			
		H	1 000	»	75		75 000
		Interés H	16	30		38 400	136 200
		Saldo H	1 016	30	207		
Septiembre	1	H	1 016	30			

Recibido de Cordero Bs. 700, valor 9 de marzo.

El 9 de marzo el saldo de Bs. 100 valdrá Bs. 100, más los intereses del 9 de febrero al 9 de marzo, esto es, de 28 días. El número 2 800 se escribe en el Haber.

Y así sucesivamente.

El último saldo manifiesta que debo a Cordero Bs. 1 000, valor 17 de junio.

Pero como la fecha del cierre es el 31 de agosto, a más de Bs. 1 000, tendré que pagar los intereses del 17 de junio al 31 de agosto, o sea de 75 días. Asiento en la columna del Haber el número 1 000 $\times$ 75 ó 75 000.

Hago el balance de los números:

Números del Haber	136 200
— — Debe	38 400
Saldo acreedor	97 800

Divido 97 800 por 6 000, divisor fijo que corresponde al 6 %, y resultan Bs. 16,30 de interés acreedor.

Luego, el 31 de agosto debo a Cordero Bs. 1 016,30.

Sumando los días encuentro 207 que representa el número cabal de días entre el 5 de febrero y el 31 de agosto, lo que prueba que no ha habido equivocación al contar los días que median entre los varios vencimientos.

NOTA: El método hamburgués se usa sobre todo cuando el interés no es recíproco, esto es, cuando el tanto del *Debe* no es el mismo que el del *Haber*.

En este caso, después de haber formalizado la cuenta como lo acabamos de decir, se calculan separadamente los intereses del *Haber* y del *Debe* y se hace la diferencia de resultados.

En la presente cuenta, *supongamos que el interés del Debe sea al* 6 % *y el del Haber al* 5 %. Tendremos:

$$\text{Interés del Haber } \frac{136\,200}{7\,200} = \text{Bs. } 18{,}91$$

$$\text{— — Debe } \frac{38\,400}{6\,000} = \text{Bs. } 6{,}40$$

Diferencia acreedora Bs. 12,51

Saldo acreedor: 1 000 + 12,51 = Bs. 1 012,51

Este método es el único que da un resultado exacto cuando el interés no es recíproco.

CAPÍTULO IV

CAMBIO

549. Definición.—*Cambio*, en su acepción más general, es el trueque o permuta de una cosa por otra, o también la permuta de monedas de un país por las de otro; pero en término de banco, cambio es una operación que tiene por objeto la cesión de fondos o permuta de créditos en monedas de un país por monedas de otros países, o la liquidación de las deudas de comerciantes de distintos países.

Para liquidar una deuda en lugar distinto al en que el deudor reside, ya porque el transporte del numerario sea difícil o por ser caro, ya porque éste pudiera faltar, se sustituye por letras de cambio, cheques, mandatos a la orden, etc., con lo cual se evita el transporte de las monedas.

Hay dos clases de cambio: el cambio *interno o nacional*, y el cambio *externo, extranjero o internacional*.

550. Cambio nacional.—Llámase cambio *nacional* el que se hace entre plazas de una misma nación; como entre Madrid y Barcelona, entre Caracas y Maracaibo.

551. Cotización de los cambios.—Los tipos de cotizaciones del cambio nacional se indican con las expresiones de *cambio a la par*, *cambio con premio* y *cambio con daño*.

Se dice que el cambio entre dos plazas está *a la par* cuando se hace sin premio, porque entonces el tomador de la letra entrega al tenedor un valor equivalente al que está expresado en la misma.

Como, por ejemplo, entregando Bs. 100 de moneda en Caracas, recibimos una *letra* de igual valor pagadera en Maracaibo.

El cambio está *a beneficio* cuando un efecto sobre una plaza determinada nos cuesta más en metálico en la plaza de nuestra residencia.

El cambio está *a daño* cuando el mismo efecto nos cuesta menos en metálico en la plaza de nuestra residencia.

Las expresiones *a beneficio* y *a daño* afectan siempre el papel, esto es, se refieren al tenedor o vendedor; por lo tanto, el comprador con beneficio pierde en realidad, ya que da más dinero que el representado por el efecto; y el que compra con daño, gana.

El que compra *a la par* ni pierde ni gana, y esto suele acontecer con los efectos a corto plazo.

Precio corriente del cambio es el valor que se paga en una plaza por una letra o libranza, según la suma girada sobre otra plaza.

Según la abundancia o escasez del dinero o del papel, hay beneficio o daño en el cambio para las respectivas partes contratantes.

552. Cambio extranjero.—Cambio *exterior* o *extranjero* es el que se efectúa entre plazas de distintos países; como entre Caracas y Nueva York, entre México y Londres.

Cambio directo es el que se hace entre dos plazas que directamente tienen cambio abierto o convenido, sin intermedio de una tercera.

Cambio indirecto es el que se hace entre dos plazas que no tienen directamente cambio abierto o conocido, por lo cual es indispensable valerse de otra tercera plaza, que tenga cambio abierto conocido con las dos primeras.

553. Principio del cambio extranjero.—Para demostrar este principio supongamos un *Inglés* comprador de vinos de Jerez; representamos el primero por I, y el vendedor de vinos españoles por E. Por otra parte, supongamos también que otro *Español* E′ compre tejidos a otro *Inglés*, I′.

Supuestas iguales las dos deudas, el comprador I pagará a su compatriota vendedor I′, *por cuenta* del comprador de tejidos E′; el comprador de tejidos E′ pagará a su compatriota vendedor E *por cuenta* del comprador de vinos I.

Así, se liquidan ambas deudas sin necesidad de transporte metálico.

Este ejemplo da una idea completa de la operación de cambio, pues las complicaciones que pueden ocurrir, porque los créditos, no siendo iguales no salden las deudas, podrán afectar el papel, sin afectar este principio fundamental.

554. Cotización de las monedas extranjeras.—El precio de los cambios extranjeros se determina en razón de dos términos, de los cuales el uno es siempre *fijo*, y el otro *variable*. El término fijo se llama *el cierto*, y el término variable se llama *el incierto*.

Cuando se dice que una plaza da el cierto a otra, entendemos que da una cantidad fija e invariable de moneda nacional por una cantidad variable de moneda extranjera, según el estado de la oferta y la demanda. La cantidad fija será *el cierto*, y la variable *el incierto*.

Por ejemplo, en el cambio de Venezuela con Nueva York, esta plaza da 1 dólar por Bs. 3,35, *más o menos*. El dólar es el término *fijo*, es *el cierto*; y el bolívar es el término *variable*, es *el incierto*, puesto que habrá que dar más o menos bolívares, según esté la balanza de los cambios entre Nueva York y Venezuela. *El fijo*, es, pues, siempre conocido para el cambista; *el incierto* es el que se trata de determinar para las operaciones de cambio; por esto, en las cotizaciones se indica sólo este último.

La variación del precio del cambio sobre o bajo *la par* del valor intrínseco de las monedas de cambio, da por resultado el *alza* o *baja* del precio de cambio.

El *alza* del cambio con Nueva York, por ejemplo, significa aumento del beneficio al papel o disminución del daño; la *baja*, por el contrario, es disminución del beneficio o aumento del daño.

La cotización de las monedas extranjeras o de los valores que en el comercio las sustituyen, se hace en los Bancos, publicándose cada día los cambios en los *Boletines* oficiales o particulares.

555. Arbitrajes.—Llámase *arbitraje* la operación que tiene por objeto determinar el medio más ventajoso de efectuar el pago de una deuda o el cobro de un crédito sobre plazas extranjeras.

Pueden ser los arbitrajes sobre mercaderías, valores mobiliarios y fondos públicos, monedas y metales preciosos, letras de cambio, etc.

El arbitraje es *simple* o *compuesto.*

ARBITRAJE SIMPLE: El arbitraje es *simple* o *directo* cuando sólo tiene lugar entre dos plazas.

EJEMPLO 1°: *Martín de París debe* 100 *marcos a Deutsch de Berlín. Si París gira a la vista sobre Berlín a fr.* $123\frac{1}{4}$, *y Berlín sobre París a Rm.* 80,05 8 *días vista* 3 %, *¿cuál será la forma de pago más ventajosa para Martín?*

Hagamos que las cotizaciones estén a la vista.

París cotiza a Berlín fr. 123,25.

Berlín cotiza a París:

$$\text{Rm. } 80{,}05 + \frac{80{,}05 \times 8 \times 3}{36\,000} = \text{Rm. } 80{,}104.$$

Si Martín paga con una remesa sobre Berlín, comprará un documento de Rm. 100 por fr. 123,25.

Si gira sobre Berlín, pagará:

fr. x	Rm.	100	vista.
Rm. 80,104	fr.	100	

$$x = \frac{100 \times 100}{80{,}104} = \text{fr. } 124{,}83.$$

Por lo tanto, a Martín le conviene más comprar una remesa sobre Berlín.

EJEMPLO 2º: *Fernández de Barcelona debe £ 100 a Brown de Londres. Si en Barcelona el papel sobre Londres está al cambio de 26,20 y en Londres el papel sobre Barcelona se cotiza al cambio de 46, dígase el medio más ventajoso de efectuar el pago.*

En Barcelona, una letra sobre Londres costará:

$$100 \times 26{,}20 = 2\,620 \text{ ptas.}$$

Si Brown libra a cargo de Fernández al cambio de 46, esto es, 46 peniques por 5 pesetas, la letra será de:

$$\frac{5 \times 24\,000}{46} = 2\,608{,}70 \text{ ptas.}$$

Luego, a Fernández le conviene más este medio.

ARBITRAJE COMPUESTO: El arbitraje es *compuesto* o *indirecto* cuando el cambio entre dos plazas se efectúa por mediación de otra en que existe el mismo valor.

EJEMPLO: *Dupuis de París debe a Gómez de Buenos Aires* 2 478 *pesos oro. Pregúntase si para satisfacer la deuda le es más ventajoso tomar en París una letra sobre Buenos Aires al cambio de fr.* 4,95 *por peso oro, o comprar en París una letra en libras esterlinas sobre Londres, para enviarla a esa plaza a fin de obtener, con su negociación, una letra sobre Buenos Aires: Londres cotiza sobre Buenos Aires al cambio de* 4,80 *pesos oro por libra esterlina, y París sobre Londres a fr.* 25,10 *por libra esterlina:*

1ª combinación:

$$4{,}95 \times 2\,478 = \text{fr. } 12\,266{,}10.$$

2ª combinación:

$$\begin{array}{ll} \text{fr. } x & \$\ 2\,478 \\ \$\ 4{,}80 & £\ 1 \\ £\ 1 & \text{fr. } 25{,}10 \end{array}$$

$$x = \frac{2\,478 \times 25{,}10}{4{,}8} = \text{fr. } 12\,957{,}87.$$

Luego, la 1ª combinación es más ventajosa.

Problemas de cambio.—Los problemas de cambio tienen por objeto determinar la suma que se abona por el interés de una letra que debe recibirse o pagarse en lugar distinto de aquel en que se gira. Cuando estos problemas están complicados, se los suele resolver por la regla conjunta.

La regla de cambio presenta tres casos principales:

1° Dada la suma que se entrega al librador de la letra, y conociendo el tanto %, determinar el valor de la letra en la plaza a donde se remite.

Este caso acontece cuando la remesa se hace por cuenta de la persona que debe recibirla; y entonces el valor de la letra será igual a la suma entregada más el cambio, si hay premio, o menos el cambio, si hay pérdida.

2° Determinar lo que debe entregarse al librador de la letra para que éste pague en otra plaza una suma determinada, conociendo el tanto %.

Este caso ocurre cuando se hace la remesa por cuenta del que la envía, pagando éste el cambio de su bolsillo para que la cantidad sea entregada íntegra, y entonces, la suma que debe entregarse es igual a la suma determinada menos el cambio, si hay premio, o más el cambio, si hay pérdida.

3° Conocido el valor nominal de la letra y la suma por ella pagada, buscar a qué tanto % se ha tomado la letra.

Este caso puede ocurrir con cualquiera de los dos anteriores.

Ejemplo 1°—*¿Cuántos bolívares importan* 210 *libras esterlinas al* 13,50 *de cambio?*

Como al 13,50, cada libra cuesta Bs. 13,50, basta multiplicar 13,50 por 210:

$$13{,}50 \times 210 = 2.835 \text{ Bs.}$$

Ejemplo 2°—*¿Cuántos bolívares se pagarán por una letra de* 2.250 *dólares, al* 3,35 *de cambio?*

Como cada dólar vale Bs. 3,35, basta multiplicar 2.250 por 3,35:

$$2.250 \times 3{,}35 = 7.537{,}50 \text{ Bs.}$$

Ejemplo 3°—*¿Cuántos dólares puedo comprar con Bs.* 4.355, *sabiendo que el tipo de cambio es del* 3,35?

Como cada dólar me cuesta Bs. 3,35, dividiendo 4.355 por 3,35 sabré cuántos dólares puedo comprar:

$$\frac{4.355}{3.35} = \text{Dls. } 1.300$$

Ejemplo 4°—*El Banco de Venezuela me ha vendido un cheque sobre Nueva York por Dls.* 195.00. *He pagado al Banco por este cheque Bs.* 651,30. *¿A qué tipo de cambio he comprado los dólares?*

Basta dividir a 651,30 por 195 para saber cuánto he pagado por un dólar, o sea el tipo de cambio:

$$\frac{651,30}{195} = 3,34$$

PROBLEMAS

1018. ¿De cuántos dólares será una letra sobre Nueva York, que al 3,35 importa en Caracas Bs. 286,76?

1019. ¿Cuántos francos importarán en Francia Bs. 448 librados desde Caracas al cambio del 0,12?

1020. ¿Cuántos bolívares deberán entregarse en Caracas para que, al cambio de 13,40 se reciban en Londres, £ 40, 18 chelines, 6 peniques?

1021. ¿Cuántos bolívares debo pagar en Caracas, para recibir en París 1 600 francos, estando el cambio al 0,12?

1022. ¿Cuánto debo pagar de premio por una letra sobre Mérida, valor de Bs. 850, sabiendo que el cambio está al 3 % de premio?

1023. ¿Cuántas libras, chelines y peniques importan en Liverpool Bs. 691 remitidos desde Maracaibo, al cambio de 13,40?

1024. ¿Cuántos francos importarán en París Bs. 1 518 librados desde Loja al cambio de 0,12?

1025. ¿Cuántos bolívares deberán entregarse en Caracas para que al cambio del 13,40, se reciban en Inglaterra £ 129, 11 chelines, 3 peniques?

1026. ¿Qué cantidad debe entregarse en bolívares para que en Nueva York importe 6 952,44 dólares una letra girada desde Caracas, al 3,35 de cambio?

1027. Un comerciante de Maracaibo entrega 140 arrobas de tabaco, a Bs. 25 cada una, por una letra contra Johnson, de Londres, al 13,40; ¿cuántas libras valdrá esta letra?

1028. ¿Cuánto debe darse en Caracas, por una letra de 3 000 francos girada contra Garnier, de París, al 0,12?

1029. Ambrosio desea remitir la suma de Bs. 1 500 a un hijo suyo que se educa en Nueva York; ¿cuál será el valor de la letra en dólares americanos, estando el cambio al 3,35?

1030. ¿Cuánto vale en Caracas una letra de cambio sobre Londres, de £ 390, 10 chel., al 13,40?

1031. ¿Cuál será en Inglaterra el valor nominal de una letra por la cual se dan Bs. 7 125,50, estando el cambio al 13,40?

1032. ¿Cuántos bolívares me costará una letra de fcos. 975,60, al 0,12 de cambio?

1033. Una letra de cambio de 44 064 francos, sobre París, cuesta Bs. 5 508; ¿cuál es la prima del cambio?

1034. Se han pagado en Caracas Bs. 40 500 por una letra de cambio de £ 3 000 sobre Inglaterra; ¿a qué cambio ha sido comprada dicha letra?

1035. ¿Cuánto debo pagar en Caracas por una letra contra Regnault, de Burdeos, de 5 000 fr. si está el cambio al 0,12?

1036. He tomado una letra de 2 500 fr. sobre París contra Bruño, y he pagado Bs. 287,50; ¿a qué cambio la he comprado?

1037. Con Bs. 700 he comprado una letra sobre Londres; ¿de cuántas libras esterlinas será ésta, estando el cambio al 13,40?

1038. ¿A qué cambio sale una letra de 200 libras esterlinas, por la que se ha pagado Bs. 2 670?

1039. ¿Cuántas arrobas de cacao pueden comprarse con 800 libras esterlinas, si el cambio se halla al 13,50, y cada arroba importa Bs. 50?

1040. ¿Pregúntase cuánto importará en Caracas una letra de £ 240, 15 chelines, 11 peniques, contra Brown, de Londres, estando el cambio entre ambas plazas al 13,50?

1041. Un comerciante de Londres gira a favor de otro de Caracas una letra de £ 124, 16 chelines y 5 peniques; ¿qué suma debe entregar en Caracas el aceptante, si el cambio se halla al 13,50?

CAPÍTULO V

COMISIÓN Y CORRETAJE

556. Llámase comisión el tanto % que se paga a un agente o *comisionista*, por la compra o venta de mercaderías, el cobro de deudas, o cualquiera otra operación comercial, por cuenta de otra persona llamada *comitente*.

Aplicada a los documentos comerciales, la *comisión* es un tanto por ciento que cobran los banqueros para cubrir sus gastos de escritura y sus riesgos.

La comisión que percibe el comisionista por la compra o venta de géneros suele ser de 2 % sobre el valor de

1033. Una letra de cambio de 44 064 francos, sobre París, cuesta Bs. 5 508; ¿cuál es la prima del cambio?

1034. Se han pagado en Caracas Bs. 40 500 por una letra de cambio de £ 3 000 sobre Inglaterra; ¿a qué cambio ha sido comprada dicha letra?

1035. ¿Cuánto debo pagar en Caracas por una letra contra Regnault, de Burdeos, de 5 000 fr. si está el cambio al 0,12?

1036. He tomado una letra de 2 500 fr. sobre París contra Bruño, y he pagado Bs. 287,50; ¿a qué cambio la he comprado?

1037. Con Bs. 700 he comprado una letra sobre Londres: ¿de cuántas libras esterlinas será ésta, estando el cambio al 13,40?

1038. ¿A qué cambio sale una letra de 200 libras esterlinas, por la que se ha pagado Bs. 2 670?

1039. ¿Cuántas arrobas de cacao pueden comprarse con 800 libras esterlinas, si el cambio se halla al 13,50, y cada arroba importa Bs. 50?

1040. ¿Pregúntase cuánto importará en Caracas una letra de £ 240, 15 chelines, 11 peniques, contra Brown, de Londres, estando el cambio entre ambas plazas al 13,50?

1041. Un comerciante de Londres gira a favor de otro de Caracas una letra de £ 124, 16 chelines y 5 peniques; ¿qué suma debe entregar en Caracas el aceptante, si el cambio se halla al 13,50?

CAPÍTULO V

COMISIÓN Y CORRETAJE

556. Llámase comisión el tanto % que se paga a un agente o *comisionista*, por la compra o venta de mercaderías, el cobro de deudas, o cualquiera otra operación comercial, por cuenta de otra persona llamada *comitente*.

Aplicada a los documentos comerciales, la *comisión* es un tanto por ciento que cobran los banqueros para cubrir sus gastos de escritura y sus riesgos.

La comisión que percibe el comisionista por la compra o venta de géneros suele ser de 2 % sobre el valor de la operación, pero varía según la clase de géneros, la responsabilidad del comisionista, etc.

Los banqueros perciben una comisión de 1/8 a 1/4 % del valor nominal del efecto. Esta comisión puede variar con cada Banco y con la naturaleza de su clientela.

557. Corretaje es el tanto % que se paga como premio y estipendio al *comisionista* o *corredor*, por su diligencia.

El corredor sirve de intermediario entre el vendedor y el comprador de mercaderías, letras, valores públicos, etcétera.

En los puertos hay *corredores intérpretes de buques*, que traducen los documentos de los buques extranjeros, e intervienen en los contratos de fletamiento, de seguros marítimos, etc.

El tanto por ciento cobrado por el corredor varía desde ½ % arriba, según la clase de operaciones, su responsabilidad, etc.

558. Producto neto de una venta, etc., es lo que resulta líquido en la suma, precio o valor, después de deducir la comisión y demás gastos.

PROBLEMA I.—Mi corresponsal en Burdeos ha comprado Bs. 9 375 de mercaderías para remitírmelas; deseo saber qué comisión le toca a él, al 3 %.

Disposición de la operación

Bs. 100 Bs. 3 comisión
9 375 x

$$x = \frac{3 \times 9\,375}{100} = \text{Bs. } 281{,}25.$$

PROBLEMA II.—Braulio remite Bs. 4 740 a su agente de La Guayra para la compra de arroz y de café; después de haber deducido su comisión al 2 %, ¿cuánto gastará el agente para su comitente, y cuánto tomará por su comisión?

Disposición de la operación

$$\begin{array}{ll} \text{Bs. } 102 & 100 \\ 4\,740 & x \end{array}$$

$$x = \frac{100 \times 4\,740}{102} = \text{Bs. } 4\,647{,}05\ \frac{45}{51}.$$

$$\text{Comisión} = 4\,740 - 4\,647{,}05\ \frac{45}{51} = \text{Bs. } 92{,}94\ \frac{6}{51}.$$

Para tener una cantidad de la misma especie que Bs. 4 740, que representa el *monto*, sumo con el capital Bs. 100 la comisión 2, lo que da Bs. 102.

Para encontrar la comisión, resto Bs. 4 647,05 $\frac{45}{51}$ de 4 740, y resultan Bs. 92,94 $\frac{6}{51}$.

PROBLEMA III.—Un agente ha vendido inmuebles al 4 % de comisión, y ha remitido al dueño, como producto neto, la suma de Bs. 10 095,36; ¿en cuánto ha vendido los inmuebles, y qué comisión le corresponde a él?

Disposición de la operación

$$\begin{array}{ll} \text{Bs. } 96 & \text{Bs. } 100 \\ 10\,095{,}36 & x \end{array}$$

$$x = \frac{100 \times 10\,095{,}36}{96} = \text{Bs. } 10\,516.$$

$$\text{Comisión} = 10\,516 - 10\,095{,}36 = \text{Bs. } 420{,}64.$$

PROBLEMAS

1042. Búsquese la comisión: 1º sobre Bs. 874 al 2 1/4 %; 2º sobre Bs. 71,50 al 3 1/2 %; 3º sobre Bs. 1 580,70 al 4 3/4 %; 4º sobre Bs. 309,10 al 5 1/2 %; 5º sobre Bs. 4 705,20 al 6 %.

1043. ¿Qué suma pagaré por el corretaje: 1° de Bs. 750 al 1/4 %; 2° de Bs. 1 540,40, al 1/2 %; 3° de Bs. 3 610,80 al 1 ½ % ; 4° de Bs. 823,50 al 3/4 %; 5° de Bs. 1 560,70 al 1 1/4 %?

1044. ¿Cuál será mi corretaje total por el cambio de las siguientes letras: 1° de Bs. 590 a 26 cents. %; 2° de Bs. 745,30 a 28 cents. %; 3° de Bs. 1 615,72 a 30 cents. %; 4° de Bs. 4 532,09 a 32 cents. %; 5° de Bs. 87,30 a 29 cents. %?

1045. Casimiro ha recibido Bs. 63 por el cobro de una deuda de Bs. 1 575; ¿cuál es el tanto de su comisión?

1046. Carlos ha vendido una consignación de algodón por Bs. 12 686. Pide Bs. 66 por almacenaje, y 6 1/4 % de comisión; ¿cuál fué el producto neto de la venta?

1047. Un arquitecto pide a Romualdo 3/8 % por planos y diseños, y 12 1/2 % por la dirección de los trabajos de la casa que acaba de hacer edificar, y que le cuesta Bs. 24 000; ¿cuánto recibirá el arquitecto?

1048. Teniendo que cobrar una deuda de Bs. 1 570, Ildefonso transige con el deudor a razón de Bs. 90 %; ¿cuál es su comisión al 5 1/2 %?

1049. He pagado a Raimundo Bs. 5,46 por cambio de Bs. 364 en plata de los Estados Unidos; ¿cuál es el tanto del corretaje?

1050. He comprado en Caracas un cargamento de 9 500 quintales de cacao, a Bs. 60 ql., y los he remitido en seguida a mi agente de Panamá, quien los ha vendido a razón de Bs. 75 cada uno; ¿qué beneficio ha realizado después de haber pagado Bs. 1 512 por varios gastos, y la comisión al 3 1/2 %?

1051. Mi corresponsal de La Guayra ha tomado en pago de su comisión Bs. 379,60, por 365 quintales de arroz a Bs. 52,00 cada uno; ¿cuál es el tanto de su comisión?

1052. Se ha vendido un terreno en Bs. 3 925, y el dueño ha recibido por producto neto Bs. 3 866, 12 1/2 %; ¿a qué tanto se ha calculado la comisión?

1053. Miguel cobra 1 1/2 % por imposición de cierta suma a intereses, y ha realizado Bs. 285 por su corretaje; ¿cuál es la suma impuesta?

1054. He recibido de Sinforiano la suma de Bs. 700 en plata; para cambiarlos en oro he pagado 3 1/2 %; y después de haber tomado 2 % de comisión, he empleado lo restante en la compra de azúcares; ¿cuánto he pagado por estos últimos, y cuál es mi comisión?

1055. Un especulador ha recibido Bs. 4 112,50 por producto neto de una venta, después de deducida la comisión al 5 %; ¿cuál era el valor de la propiedad vendida?

CAPÍTULO VI

SEGUROS — TRANSPORTES — CUENTAS DE ALMACENAJE — DERECHOS DE ADUANA

SEGUROS

559. **Definición.**—Por *seguro* o *aseguración* se entiende el contrato o escritura en que un capitalista o una sociedad se comprometen a pagar a un propietario las pérdidas que éste puede sufrir sobre sus mercaderías o caudales, que corren algún riesgo de mar o tierra.

560. **Asegurador y asegurado.**—Se da el nombre de *asegurador* al que responde, mediante cierto interés, del riesgo que pueden correr las mercaderías o caudales.

Llámase *asegurado* el que es protegido por la Compañía de seguros.

561. **Póliza.**—*Póliza de seguros* es el contrato escrito del asegurador y del asegurado.

562. **Prima.**—*Prima o premio de seguros* es el tanto por ciento que cobra el asegurador, al fin de cada año o al terminar un viaje, sobre el valor de los artículos que asegura.

563. **Clases de seguros.**—Según el objeto que los motiva, los seguros se dividen en *marítimos*, *terrestres*, *contra el incendio*, etc.

Aseguración marítima es una fianza contra los riesgos y daños que puedan recibir en el mar los caudales o mercaderías embarcadas, y los buques en que se conducen.

Aseguración terrestre es una fianza contra los riesgos de incendio u otras contingencias, que pueden correr las casas, los almacenes, las cosechas, etc.

El valor de las propiedades, resguardado por la aseguración, es el que representa la *diferencia* entre la suma asegurada y la prima o premio que se paga.

En la aseguración terrestre se paga cada año; en la marítima, generalmente la prima se paga por el tiempo que dura el viaje.

A más de la prima, el asegurado debe pagar los gastos de póliza y timbre.

Problemas.—Los problemas de aseguración pueden considerarse como casos particulares de la regla de interés.

EJEMPLO I: *¿Qué prima se pagará, al* 2 ½ % *por la aseguración de mercaderías tasadas en Bs.* 4 500?

Disposición de la operación

$$\begin{array}{ll} \text{Bs. } 100 & \text{Bs. } 2{,}50 \\ \phantom{\text{Bs. }}4\,500 & \phantom{\text{Bs. }}x \end{array}$$

$$x = \frac{2{,}50 \times 4\,500}{100} = \text{Bs. } 112{,}50.$$

EJEMPLO II: *¿En qué suma debe asegurarse una troj al* 2 % *de modo que se ponga a salvo la pérdida del trigo, valuado en Bs.* 1 617 *con la prima?*

Disposición de la operación

$$\begin{array}{ll} \text{Bs. } 100 - 2 & \text{Bs. } 100 \\ \phantom{\text{Bs. }}1\,617 & \phantom{\text{Bs. }}x \end{array}$$

$$x = \frac{100 \times 1\,617}{98} = \text{Bs. } 1\,650.$$

Como Bs. 1 617 representan la diferencia que hay entre la suma asegurada y el premio que se paga, debo buscar otro número de la misma especie, restando de 100 la prima estipulada, esto es, 100 — 2 = 98. La suma asegurada resulta de Bs. 1 650.

COMPROBACIÓN

Bs. 1 650 × 0,2 = Bs. 33 de premio; Bs. 1 650 — Bs. 33 = Bs. 1 617, la suma resguardada.

TRANSPORTES

564. Definición.—El *transporte* es un contrato por el cual una persona se compromete a conducir mercaderías de un lugar a otro, por un precio convenido.

565. Clases de transportes.—Los transportes se verifican por tierra, por mar, por ríos o canales y por aire.

Transporte terrestre es el que se verifica por tierra con toda clase de vehículos.

Transporte marítimo es el que se verifica por mar con toda clase de barcos.

Transporte aéreo es el que se verifica por aire por medio de aviones.

566. Documentos que acompañan a las mercaderías.—A las mercaderías transportadas por tierra las acompañan *la carta de porte*, la cual, es un documento que expresa las condiciones del transporte, y que firman por duplicado el cargador y el porteador o empresario de transporte.

A las mercaderías transportadas por mar, las acompaña el *conocimiento*, el cual es un escrito que da el comandante de un buque mercante, y en el que declara tener embarcadas ciertas mercancías que entregará en el puerto y a las personas designadas por el remitente.

El contrato de transporte marítimo, para que sea obligatorio, a más del conocimiento, ha de extenderse por duplicado en una *póliza de fletamiento* en que se consignan las condiciones estipuladas entre el capitán de un barco y el fletador del mismo.

CUENTAS DE ALMACENAJE

567. Definición.—*Almacenaje* es el derecho que se paga por conservar las mercaderías en un depósito o almacén.

568. Cálculo del almacenaje.—Las *cuentas de almacenaje* contienen el número de artículos recibidos y entregados, con la fecha de cada transacción o ajuste.

El almacenaje se calcula ordinariamente por meses de 30 días, y a cierto precio por barril, fardo, cajón, etc.

El número de artículos sometidos al almacenaje durante un mes u otro tiempo convenido, que determina generalmente a un término medio.

569. Para encontrar el término medio de almacenaje durante un mes o cualquier otro tiempo, **hay que escribir separadamente el número de artículos recibidos y el de los entregados, con sus respectivas fechas;**

Multiplicar el número de artículos recibidos o entregados por los días transcurridos desde la fecha de cada recibo o entrega, hasta la fecha de la última entrega;

Del total de los productos de los recibos se resta el de los productos de las entregas, y la diferencia se divide por 30, o por el número de días convenido; el cociente dará el número de los artículos por los cuales debe pagarse el almacenaje durante el tiempo indicado.

Ejemplo: *¿Cuánto costará el almacenaje de harinas, a* 60 *cents. barril, que se han recibido y entregado como sigue: Recibido el* 1° *de mayo de* 1 910, 1 000 *barriles; en mayo* 26, 1 000 *bbls. Entregado en mayo* 16, 500 *bbls.; en junio* 1°, 1 000 *bbls.; en junio* 12, 1 100, *y en julio* 2, 400?

Operación

1910			*barriles*		*días*		*prod.*		
Mayo	1°	Recibido	1 000	×	62	=	62 000	} =	136 000
—	26	—	2 000	×	37	=	74 000		
—	16	Entregado	500	×	47	=	33 500	} =	76 500
Junio	1°	—	1 000	×	31	=	31 000		
—	12	—	1 100	×	20	=	22 000		
Julio	2	—	400	×	0	=	0		
						Diferencia		=	59 500

59 500 : 30 = 1 983 barriles 34 que se deben pagar por 1 mes; 1 983,34 × 0,60 = $ Bs. 1 190, importe del almacenaje.

El almacenaje que debiera pagarse por los 3 000 bbls. recibidos hasta la última fecha, equivale al que se pagaría por 136 000 en 1 día, si todos hubieran quedado depositados en el almacén durante todo el tiempo; pero como han sido entregados en distintas fechas, no debe pagarse sino por el tiempo medio que han permanecido en depósito, lo cual se conoce dividiendo por 30 días la diferencia que hay entre las sumas de los productos de los barriles recibidos y las de los entregados.

NOTA: Cuando el número de artículos puestos en almacenaje contiene un quebrado *menor que un medio*, se suele, en la práctica, prescindir del quebrado; pero si éste es *mayor que un medio*, se lo considera como un artículo completo.

Derechos de Aduana

570. Definición.—Por *derechos de Aduana* se entiende el tanto que se paga, con arreglo a arancel o tarifa oficial, por la introducción de mercaderías.

571. Aduana.—En cada puerto de entrada (puertos *marítimos*, *fluviales* o *secos*) los gobiernos tienen una oficina pública, llamada *Aduana*, destinada para registrar los géneros y mercaderías, y cobrar los derechos que adeudan.

572. Cobro de derechos de Aduana.—Para el cobro de derechos de Aduana, se atiende generalmente al peso de las mercaderías, por kilogramo, comprendido el del embalaje y de los fardos o cajones en que se transportan, y el del envase para los líquidos.

573. Llámase tara la parte de peso que se rebaja en los géneros o mercaderías por razón de la caja, saco o cosa semejante en que vienen incluídos o cerrados.

574. Peso bruto y peso neto.—Llámase *peso bruto* el de las mercaderías antes que se haya hecho la rebaja de la tara u otra deducción.

Peso neto es el peso real de las mercaderías después de hechas todas las rebajas o deducciones.

575. Dase el nombre de **aforo** al reconocimiento y valuación de los géneros de comercio para el pago de derechos.

EJEMPLO: *¿A cuánto ascenderá una liquidación de Aduana, por* 5 *barriles de vino, de* 45 *kg. de peso bruto cada uno, y* 8 *cajas de coñac de* 25 *kg. cada una, si el vino paga Bs.* 1,00 *por kg. y el coñac* 4,50?

Solución

	Peso	*Aforo*
5 barriles /vino, de 45 kg. c /u. = 225 kg.;	225 kg. × 1,00 =	225,00
8 c / de coñac, de 25 kg. c /u. = 200 kg.;	200 kg. × 4,50 =	900,00
	Total de la liquidación Bs.	1 125,00

PROBLEMAS

Aseguraciones

1056. ¿Qué premio debe pagarse al 1 3 /4 % por la aseguración de una casa valuada en Bs. 5 728?

1057. Una goleta, asegurada en Bs. 5 000, al 2 1 /4 %, ha sufrido naufragio; ¿qué parte de la pérdida se halla resguardada por la aseguración?

1058. Un almacén con sus mercaderías vale Bs. 6 370; ¿en qué suma debe asegurarse, al 2 %, para poder cubrir la propiedad y el premio?

1059. Pago anualmente Bs. 45 por la seguración de mi biblioteca, esto es, el 3 % de la suma convenida en la póliza; ¿por cuánto estoy asegurado?

1060. Gervasio tiene Bs. 12 000 en mercaderías, y las hace asegurar por los 4 /5 de su valor, a los 3 /4 % de premio; si en un incendio no puede salvar más que Bs. 2 000, ¿a cuánto asciende la pérdida actual que sufre?

1061. ¿En qué suma debe hacerse asegurar al 1 1 /2 % una casa estimada en Bs. 8 274, para que no se pierda nada, si se destruye dicha casa?

1062. El premio de seguros de una casa al 1 1/4 %, es de Bs. 50; ¿en cuánto está asegurada?

1063. Una compañía de seguros después de haber asegurado todas las casas de un barrio en Bs. 36 000, al 2 1/2 %, reasegura la mitad de ellas al 3 %; ¿qué diferencia hay entre ambas primas?

1064. Un bergantín tasado en Bs. 40 000 ha sido asegurado por los 3/4 de su valor al 1 1/2 %, y el cargamento, estimado en Bs. 36 000, a los 4/5 %; ¿cuánto importa la aseguración?

1065. Máximo ha pagado Bs. 1 450 de premio por la aseguración de un cargamento de algodón; siendo el tanto de aseguración el 2 1/2 %; ¿cuál era el valor del cargamento?

1066. He pagado Bs. 18 por una aseguración de Bs. 1 200; ¿cuál es el tanto del premio?

1067. Un comerciante ha hecho asegurar un cargamento de 500 barriles de harina por el 80 % de su valor, al 3 1/4 %, y ha pagado Bs. 107,25 de premio; ¿cuánto le había costado el barril?

1068. Mi casa estaba asegurada en Bs. 45 000 durante 5 años. El 1er. año pagué Bs. 1,50 por póliza y planos, y los 5/8 % de premio; y cada uno de los otros años 1/2 % de premio. Como la casa se quemó en el quinto año, pregunto cuál fué la pérdida de la aseguración, no habiéndose abonado ningún interés.

1069. Un hacendado había hecho asegurar su casa y sus cosechas, cuyo valor total ascendía a Bs. 75 400. Han pasado 3 años 9 meses sin pagar el premio, cuyo tanto era el 1,40 por mil; ¿qué suma debe a la compañía?

Almacenaje

1070. ¿Cuánto se pagará por el almacenaje de sal, a 25 cents. carga, recibida y entregada como sigue: el 6 de junio de 1910, 120 cargas; el 16 de junio, 140; el 26 de junio, 600; el 5 de julio, 300; el 16 de julio, 180; el 20 de julio, 160; todas las cuales han sido entregadas el 1° de agosto?

1071. ¿Cuál será el almacenaje de algodón, a 60 cents. fardo, por mes, recibido y remitido como sigue: Recibido el 1° de julio de 1910, 400 fardos; el 15 de julio, 350; el 26 de julio, 450. Remitido el 12 de julio, 200 fardos; el 20 de julio, 400; el 1° de agosto, 200, y el 8 de agosto, 400?

1072. Recibido y remitido a cuenta de Patricio varios bultos de algodón como sigue: Recibido el 1° de enero de 1911, 1848 bultos; el 16 de enero, 96; el 1° de febrero, 240. Remitido el 12 de febrero, 800; el 1° de marzo, 480; el 3 de abril, 320; el 10 de abril, 250. Búsquese cuántos bultos quedan en el almacén el 1° de mayo, y el importe del almacenaje hasta dicho día, a razón de 60 cents. por bulto y por mes.

1073. Recibido en almacenaje el 3 de julio de 1910, **256** barriles de vino, y el 15 de julio siguiente, 381 bbls. más; el 18 de julio, remitido 261 bbls., y el 26, 312; el 30 de julio recibido 321 bbls., y el 8 de agosto, 163; el 16 de agosto, remitido 208 bbls; el 18, 103, y el 19, 115 bbls.; el 1° de Sbre., recibido 320 bbls.; el 2, 206, y el 7, 342; el 12 de Sbre., remitido 250 bbls.; el 18, 321; el 21, 133, y el resto el 27; ¿cuál ha sido el importe del almacenaje, a 60 cents. mensuales por barril?

Derechos de Aduana

1074. ¿Qué derechos deben pagarse por las mercads. siguientes: 3 cajones de libros, de 10 kg. de peso c/u., a 40 cents. de aforo por kg.; 2 cajas de floreros de loza, de 45 kg. c/u., a Bs. 1,00; 2 cajas de instrumentos de física, de 27 kg. c/u., a 50 cents.?

1075. Un comerciante de Caracas recibe de Londres: 10 pieza de lino, de 30 kg. c/u., a Bs. 5 de derechos; 6 doc. de pañuelos de lino, de 4 kg. doc., a 45 cent.; 6 doc. de sombreros de fieltro, de 16 kg. doc., a Bs. 51; 10 doc. de medias de lana, de 5 óg. doc., a Bs. 16; pregúntase a cuánto ascenderán los derechos, según los aforos indicados.

1076. Liquídese la cuenta siguiente, calculando los derechos que por ella deben pagarse: 4 botes de aceite para máquina, de 2,50 kg. c/u., a 0,32 de aforo; 2 doc. de cajitas de betún, de 3 kg. doc., a 1,45; 6 botes de tinta de 1 kg. c/u., a Bs. 2,00.

1077. Ubaldo recibe las mercads. siguientes, que le importan Bs. 1200: 1 cajón de pizarras para escribir, de 25 kg. de peso, a 0,25 de kg.; 10 kg. de lápices de pizarra, a 0,25 el kg.; 1 fardo de papel de escribir, de 30 kg., a 2,90; 2 500 sobres de cartas, de 1/2 kg., a 7,20 kg.; 6 gruesas de lápices de 1/2 kg. la gruesa, a Bs. 2; 190 cajas de plumas de acero, de 50 kg. de peso, a Bs. 2. ¿A cuánto ascenderá el valor total de ellas, después de pagados los derechos, si quiere el dueño ganar el 25 % sobre el precio de compra?

1078. Venancio Escobar ha importado de París: 5 relojes de pared, de 9 1/2 kg. de peso c/u., a Bs. 1,25 de derechos; 20 íd. de bolsillo, de 1/10 kg. c/u., a Bs. 1,50; 400 tinteros de plomo, de 29 kg. en todo, a 2,00; 1 armonio de 77 kg., a 1,45. Búsquese el monto de los derechos que adeuda.

1079. ¿Cuánto debe pagar Teófilo a su corresponsal de La Guaira, por los derechos de las siguientes mercancías, que saca por su cuenta de la Aduana: 3 doc. de navajas de barba, de 2 kg. doc., a 2,00 de aforo; 3 kg. de agujas y alfileres, a 4,50 kg.; 6 doc. de cortaplumas, de 2 kg., a 2,00; 6 escopetas, de 3 kg. c/u., a Bs. 12,80?

1080. ¿Cuál será el monto de una letra sobre La Guaira, al 3 % de premio, a la orden de Orrantia y Cía., por los derechos que ellos pagan en lugar de S. Gómez, de Caracas, por las mercancías siguientes: 12 cajas de cerveza, de 25 kg. c/u., a 1,20; 6 íd. de ginebra, de 25 kg. c/u., a 5,00; 10 barriles de vino, de 45 kg. c/u., a 2,00?

1081. ¿Qué liquidación tendrá que formar el Interventor de la aduana, por los derechos que causan las mercancías siguientes: 10 doc. de carteras, de 3 kg. doc., de Bs. 12,80 de aforo; 15 gruesas de plumas, de 1 kg. la gr., a 2,00; 3 000 cuadernos en blanco, de 32 kg. el mil, a 2,90?

1082. Tres comerciantes reciben una remesa de: 36 pares de calzado, de 1,50 kg. el par, a 52,00 de derechos; 36 pantalones de paño, de 1 kg. c u., a 65,00; 3 cajones de frazadas de algodón, de 55 kg. cajón, a 5,00; 6 doc. de medias de algodón, de 2 kg. doc., a 36,00. ¿Cuánto le corresponde pagar a cada uno por los derechos?

1083. ¿Qué suma queda debiendo C. Gómez, de Valencia, por los derechos que causan las mercancías siguientes: 4 doc. de cajas de sardinas, de 2,50 kg. doc., a 0,40; 4 kg. de nueces, a 1,45; 6 kg. de fideos, a 2,00; 12 cajas de pasas de 1/2 kg. c/u., a 1,45; 3 kg. de almendras, a 1,45?

1084. Liquídese la cuenta siguiente, calculando los derechos que por ella se deben: 2 cajas de perfumería, de 2 kg. c/u., a 12,80 de aforo; 4 doc. de peines, de 1 kg. en todo, a 10,00; 1 doc. de paraguas de seda, de 4 kg. en todo, a 12,80.

CAPÍTULO VII

PROGRESIONES, LOGARITMOS INTERESES COMPUESTOS

§ I. PROGRESIONES

576. Definición.—Llámase *progresión* una serie de términos tales, que la relación o razón de dos términos consecutivos es constantemente igual.

Hay dos clases de progresiones: las progresiones *aritméticas* o por diferencia, y las progresiones *geométricas* o por cociente.

Progresiones aritméticas

577. Definición.—Progresión *aritmética* es una serie de términos que aumentan o disminuyen en una cantidad constante, llamada *razón* de la progresión.

Una progresión aritmética es *creciente* o *ascendente* cuando la razón es positiva, y *decreciente* o *descendente* cuando la razón es negativa.

EJEMPLOS: $\div$ 2. 4. 6. 8.10.12.14.16...
$\div$ 96.92.88.84.80.76.72.68...

que se leen: como 2 es a 4, es a 6, es a 8, etc.
como 96 es a 92, es a 88, es a 84, etc.

La primera progresión es *creciente*; su razón es $+2$.
La segunda es *decreciente*: su razón es -4.

578. Hallar un término cualquiera de una progresión aritmética.—En la progresión aritmética *creciente*:

$\div$ 1.5.9.13.17.21

se encuentra un término cualquiera, el sexto por ejemplo, añadiendo al primero el producto de la diferencia común por el número de términos menos uno, o $1 + (4 \times 5)$, esto es, 21.

En la progresión aritmética *decreciente*:

$$\div\ 50.46.42.38.34.30.26$$

se encuentra un término cualquiera, el séptimo por ejemplo, restando del primer término el producto de la diferencia común por el número de términos menos uno, o $50 - (4 \times 6)$, esto es, 26.

579. **REGLA.—Para hallar un término cualquiera de una progresión aritmética se multiplica la razón por el número de términos que hay antes de él, y se agrega este producto al primer término si la progresión es creciente, y se lo resta de él si es decreciente.**

Llamando l al *enésimo* término de una progresión, a al primer término, y r a la razón, tendremos la fórmula:

$$l = a + (n - 1)r$$

EJEMPLOS: 1° Hallar *el* 25° *número impar.*

Los números impares forman una progresión:

$$\div\ 1.3.5.7.9\ldots$$

cuya razón es 2.

Luego, tendremos:
Término 25° $= 1 + (2 \times 24)$ o sea 49.

2° *Búsquese el* 31° *término de la progresión*

$$\div\ 75.72.69.66\ldots$$

Se tendrá:
Término 31° $= 75 + (-3 \times 30)$ o sea -15.

580. **Suma de los términos de una progresión aritmética.**—Sea la progresión $\div\ 3.6.9.12.15.18$.

Designando la suma por S, se tiene:

$$S = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18$$
$$S = 18 + 15 + 12 + 9 + 6 + 3$$

Sumemos ordenadamente:

$$2\,S = 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21$$

Luego, $$S = \frac{21 \times 6}{2} = \frac{(3 + 18)6}{2}$$

581. REGLA.—Para encontrar la suma de los términos de una progresión aritmética limitada, hay que multiplicar la semisuma de los extremos por el número de términos.

Llamando a y l a los términos extremos, y n al número de términos, tendremos la fórmula:

$$S = \frac{(a + l)n}{2} \qquad (1)$$

Si en esta fórmula se sustituye el valor $a + (n - 1)r$ del *enésimo* término l, resultará:

$$S = \frac{[a + a + (n - 1)r]n}{2} \text{ o } \frac{n}{2}[2a + (n - 1)r]. \qquad (2)$$

Por medio de esta fórmula se puede calcular la suma de los términos de una progresión, en función de a, n y r.

EJEMPLOS: 1° *¿Cuál es la suma de los términos de la progresión* $\div$ 3.8.13.18 . . . , *compuesta de* 41 *términos?*

Busquemos primero el 41° término.

Este término es igual a $3 + (5 \times 40) = 203$.

Luego (1) $$S = \frac{(3 \times 203)\,41}{2} = 4\,223.$$

La fórmula (2) inmediatamente:

$$S = \frac{41}{2}(6 + 40 \times 5) = 4\,223.$$

2° *¿Cuál es la suma de los* 100 *primeros números* 1.2.3.4.... 100?

Estos números forman una progresión aritmética cuya razón es 1. Luego:

$$S = \frac{(1 + 100)100}{2} = 5\,050.$$

Progresiones geométricas

582. Definición.—Llámase *progresión geométrica* una serie de términos tales, que cada uno de ellos es igual al que le precede multiplicado por una cantidad constante, llamada *razón* de la progresión.

Una progresión geométrica es *creciente* cuando la razón es mayor que 1, y *decreciente* cuando la razón es un quebrado.

EJEMPLOS: $\div$ 1 : 2 :4 :8 : 16 :32 :64....

$$\div\ 81 : 27 : 9 : 3 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} \ldots.$$

que se leen:

Como 1 es a 2, es a 4, es a 8, etc.
Como 81 es a 27, es a 9, es a 3, etc.

La primera progresión es *creciente*; su razón es 2.

La segunda es *decreciente*; su razón es $\frac{1}{3}$.

583. Hallar un término cualquiera de una progresión geométrica.—En la progresión geométrica

$$\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96$$

el segundo término es igual a 3×2; el tercero es igual a 3×2^2; el cuarto es 3×2^3, etc. De donde se deduce la siguiente regla:

584. REGLA.—Para encontrar un término cualquiera de una progresión geométrica se multiplica el primer término por una potencia de la razón expresada por el número de términos que le preceden.

Representando por l el último término, o sea el que ocupa el lugar n, por a el primero, y por q la razón, tendremos:

$$l = aq^{n-1}.$$

EJEMPLOS: 1° *Hallar el noveno término de la progresión* $\div 1 : 2 : 4 : 8 \ldots$

El 9° término $= 1 \times 2^8$, o sea 256.

2° *Búsquese el* 11° *término de la progresión:*

$$\div 27 : 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3} \ldots$$

El 11° término $= 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$, o sea $\frac{1}{2187}$.

585. Suma de los términos de una progresión geométrica.—En la progresión geométrica

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162$$

la suma de los términos es:

$$S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162 \qquad (1)$$

Multipliquemos esta suma por la razón 3:

$$3\,S = 6 + 18 + 54 + 162 + 486. \qquad (2)$$

Restemos la igualdad (1) de la igualdad (2):

$$\begin{array}{rl} 3\,S = & \phantom{2 + {}} 6 + 18 + 54 + 162 + 486 \\ S = & 2 + 6 + 18 + 54 + 162 \\ \hline 2\,S = & 486 - 2 \end{array}$$

Luego $$S = \frac{486 - 2}{2}$$

El numerador es la **diferencia** entre el **producto** del último término por la razón, y el primero; el denominador es la razón menos uno. De donde se deduce la siguiente regla.

586. **REGLA.—Para hallar la suma de los términos de una progresión geométrica, hay que multiplicar el último término por la razón, restar del producto el primer término, y dividir la diferencia por la razón menos 1.**

Si la razón es menor que 1, se multiplica el último término por esta razón; el producto se resta del primer término, y se divide la diferencia por 1 menos la razón.

Representando el primer término por a, por l el último, por q la razón, tendremos:

$$S = \frac{lq - a}{q - 1} \tag{1}$$

y

$$S = \frac{a - lq}{1 - q} \tag{2}$$

En la fórmula (1) sustituyamos l con su valor aq^{n-1}; esta fórmula se convierte en la siguiente:

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \tag{3}$$

Por medio de esta fórmula se puede calcular la suma de los términos en función de a, de q y de n.

EJEMPLOS: 1° *¿Cuál es la suma de los nueve primeros términos de la progresión* $\div$ 2 :4 :8 :16... ?

La fórmula (3) da: $S = \frac{2(2^3 - 1)}{2 - 1} = 1\,022.$

2° *¿Cuál es la suma de los términos de la progresión* $\div$ 128 :64 :32... *compuesta de* 12 *términos?*

La fórmula (3) da:

$$S = \frac{128\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{128\left(1-\frac{1}{4\,096}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{256\times 4\,095}{4\,096} = 255\,\frac{51}{61}.$$

§ II. LOGARITMOS

587. Definición.—Llámanse *logaritmos* los términos de una progresión aritmética, que principia por cero, correspondientes a los de una progresión geométrica que principia por la unidad. Cada término de la progresión aritmética es el logaritmo del término correspondiente en la geométrica.

Estas dos progresiones pueden continuarse indefinidamente en ambos sentidos; la una contiene el término uno, la otra el término cero y estos dos términos deben corresponderse.

Sean las progresiones:

$\div\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048 : 4096
$\div$ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12

0 es el logaritmo de 1; 1 es el de 2; 2 el de 4; 5 el de 32; 10 el de 1024, etc.

588. De la definición anterior (**587**) parece inferirse que sólo los números que forman la progresión geométrica tienen un logaritmo. Sin embargo, si se interpolan muchos medios geométricos entre los varios términos de la primera progresión, e *igual número* de medios aritméticos entre los diferentes términos de la segunda, cada término de la progresión aritmética *será también el logaritmo del término correspondiente* de la progresión geométrica.

Propiedades de los logaritmos

589. 1ª PROPIEDAD.—El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores de este producto.

Sean las progresiones:

$\div\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048 : 4096$
$\div 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12$

1° *Hagamos el producto de* 4 *por* 128.

Siendo los logaritmos de 4 y de 128, 2 y 7, los sumo: $2 + 7 = 9$; el número 9, que corresponde a 512, es el logaritmo de 512 y 512 es el producto de 4 por 128.

2° *Hagamos el producto de* 4 *por* 16 *y por* 64.

Los logaritmos de 4, de 16 y de 64 son 2, 4 y 6, cuya suma es 12, 12 que corresponde a 4 096 es el logaritmo de este número, y 4 096 es el producto de 4 por 16 y por 64.

590. 2ª PROPIEDAD.—El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

Sea $7 = \dfrac{56}{8}$; tenemos $7 \times 8 = 56$.

Luego (**589**): $\log 7 + \log 8 = \log 56$;
de donde $\log 7 = \log 56 - \log 8$.

591. 3ª PROPIEDAD.—El logaritmo de cualquier potencia de un número es igual al exponente de la potencia multiplicado por el logaritmo de dicho número.

Sea 5^3; tenemos $5^3 = 5 \times 5 \times 5$

Luego (**589**) $\log 5^3 = \log 5 + \log 5 + \log 5$
o $\log 5^3 = 3 \log 5$.

592. 4ª PROPIEDAD.—El logaritmo de la raíz de un número es igual al logaritmo de este número dividido por el índice de la raíz.

Sea $4 = \sqrt[3]{64}$.

Elevemos al cubo los dos miembros: $4^3 = 64$.

Luego (**591**) $3 \log 4 = \log 64$;

de donde $\log 4 = \dfrac{\log 64}{3}$.

593. Nota: Según las propiedades anteriores, el cálculo por logaritmos facilita mucho las operaciones, ya que *la multiplicación se convierte en adición, la división en sustracción, la elevación a potencias en multiplicación, y la extracción de raíces en división.*

Logaritmos vulgares o decimales

594. De la definición del Nº **587** resulta que el número de sistemas de logaritmos que pueden imaginarse es ilimitado, ya que q y r son arbitrarios, y un mismo número tendrá necesariamente logaritmos diversos en sistemas también diferentes.

Los sistemas se distinguen unos de otros según el número que tiene por logaritmo la unidad, el cual recibe el nombre de *base.*

595. Logaritmos vulgares.—Los *logaritmos vulgares* o de *Briggs* tienen por base el número 10 (por eso se llaman también *decimales*), de manera que las progresiones fundamentales de su sistema son las siguientes:

$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1\,000 : 10\,000 : 100\,000 : 1\,000\,000$$
$$\div\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6$$

En este sistema se ve: 1º que el logaritmo de 1 es 0; el de 10 es 1; el de 100 es 2; el de 1 000 es 3; etc.

2º Que todo número comprendido entre 1 y 10 tiene su logaritmo mayor que 0 y menor que 1; que todo número comprendido entre 10 y 100 tiene su logaritmo mayor que 1 y menor que 2; que todo número comprendido entre 100 y 1 000 tiene su logaritmo mayor que 2 y menor que 3, y así sucesivamente; de donde se infiere que el logaritmo de un número mayor que 10 consta de una parte entera llamada *característica* y de una parte decimal llamada *mantisa* salvo los logaritmos de los números 100, 1 000, 10 000, etc., que no tienen parte decimal; además se ve que *la característica de un logaritmo* *consta de tantas unidades cuantas cifras tiene el número en su parte entera, menos una.*

596. Nota I: Si se prolongan indefinidamente a derecha e izquierda las progresiones del Nº **595**, resulta:

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots 0{,}001 & : 0{,}01 & : 0{,}1 & : 1 & : 10 & : 100 & : 1\,000 \\ -3 & . -2 & . -1 & . \; 0 & . \; 1 & . \; 2 & . \; 3 \end{array}$$

En estas progresiones, todo número comprendido entre 0,1 y 1 tiene su logaritmo comprendido entre -1 y 0; este logaritmo puede representarse por $-1 +$ una fracción. Asimismo, todo número comprendido entre 0,01 y 0,1 tiene su logaritmo mayor que -2 y menor que -1; este logaritmo puede representarse por $-2+$ una fracción, etc. Luego el logaritmo de un número menor que 1 tiene su característica negativa y su parte decimal positiva.

El signo *menos* de la característica negativa se coloca encima de dicha característica: $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{1}$.

Estas progresiones manifiestan también que la *característica negativa* del logaritmo de un número menor que 1 tiene tantas unidades *como ceros hay antes de la primera cifra significativa, incluso el que precede la coma.*

597. Nota II: No teniendo términos negativos, la progresión geométrica precedente, se infiere que *los números negativos no tienen logaritmos.*

598. PROPOSICIÓN.—En los logaritmos vulgares, el logaritmo de un número 10 veces, 100 veces, 1000 veces, etc., mayor o menor que otro, tiene la misma parte decimal que este otro, y no difiere de él sino por la característica.

En efecto, sea 3,54295 el logaritmo de un número. El logaritmo de un número 10, 100, 1 000 veces mayor o menor que el número dado, se obtendrá añadiendo a 3,54295 o restando de él los logaritmos de 10, de 100, de 1 000, etc. (**589** y **590**), que no tienen parte decimal, luego habrá que operar sólo sobre la característica; y no se alterará la parte decimal.

De las tablas de logaritmos

599. Clases de tablas de logaritmos.—Hay diferentes clases de tablas de logaritmos, las unas, llamadas grandes tablas, dan los logaritmos de los 100 000 ó 108 000 primeros números, con 7 cifras decimales; las otras dan los logaritmos de los 10 000 ó 20 000 primeros números, con 5 cifras decimales. Estas últimas, aunque den menor aproximación en los cálculos, se usan más que las primeras.

600. Uso de las tablas.—Para servirse de una tabla de logaritmos, hay que saber resolver las dos operaciones siguientes:

1° Encontrar el logaritmo de un número dado;

2° Encontrar el número que corresponde a un logaritmo dado.

601. Encontrar el logaritmo de un número dado.—Supondremos que tenemos las tablas con 5 decimales.

1er. Caso: *El número se halla en las tablas.* En este caso se lee inmediatamente el logaritmo correspondiente.

Así, el log de 6 843 es 3,835 25.

El log de 6,843 es 0,835 25, pues no difiere del 6 843 sino por la característica.

2° Caso: *El número no se encuentra en las tablas.*

Se determina primero la característica; en seguida se multiplica o divide el número por 10, 100 o por 1 000, etc., de modo que resulte un número entero, y el mayor que sea posible, contenido en las tablas; por último se busca la mantisa del logaritmo del número obtenido, *teniendo en cuenta las diferencias tabulares.*

Ejemplos: 1° *Calcúlese el logaritmo de* 24 647.

Dividamos 24 647 por 10, lo que da 2 464,7.

La característica es 4, por tener el número 5 cifras.

Busquemos en las tablas la mantisa del logaritmo de 2 464: se encuentra 0,391 64.

Siendo de 18 unidades del quinto orden la diferencia tabular entre los logaritmos de 2 464 y 2 465, se dirá, *considerando el aumento de los logaritmos como sensiblemente proporcional al aumento de los números*:

Por 1 entero de diferencia en los números hay un aumento de 18 en los logaritmos; por una diferencia de 0,7 en los números, habrá un aumento de x en los logaritmos, o sea:

$$\frac{1}{18} = \frac{0{,}7}{x};$$

de donde $x = 13$, en menos de una unidad de quinto orden.

Se añaden estas 13 cienmilésimas a 0,391 64, y resulta 1,391 77 como logaritmo del número 24 647.

2° *Búsquese el logaritmo de* 0,0478533.

La característica será $\overline{2}$.

Multiplicando por 100 000, tendremos 4 785,33.

El logaritmo de 4 785 tiene por mantisa 0,679 88.

Siendo de 9 unidades del quinto orden la diferencia entre los logaritmos de los números 4 785 y 4 786, se dirá:

Por 1 entero de diferencia en los números hay un aumento de 9 en los logaritmos; por una diferencia de 0,33 en los números habrá un aumento de x en los logaritmos, o sea:

$$\frac{1}{9} = \frac{0{,}33}{x};$$

de donde $x = 3$, en menos de una unidad de quinto orden; el logaritmo de 0,0478533 será $\overline{2}{,}679\ 91$.

En ciertas tablas el cálculo de las partes proporcionales va indicado en una columna especial.

602. Encontrar el número que corresponde a un logaritmo dado.

1$^{er.}$ CASO: *La mantisa del logaritmo se halla exactamente en las tablas.*

Se lee en las tablas el número correspondiente a esta mantisa, que se busca siempre como si estuviera precedida de la característica 3.

Por ejemplo, se ve que 7 655 es el número correspondiente al logaritmo $\bar{2},883\ 95$. La característica $\bar{2}$ indica que la parte entera del número tiene 3 cifras: por lo tanto el número es 765,5.

Asimismo, el número correspondiente a la parte decimal del logaritmo $\bar{2},18808$ es 1542; la característica $\bar{2}$ indica que la primera cifra significativa del número pedido ocupa el segundo lugar después de la coma (**596**); luego este número es 0,01542.

2° Caso: *La mantisa del logaritmo no se halla en las tablas.*

Para encontrar, por ejemplo, el número correspondiente al logaritmo 4,555 75, se busca en las tablas la parte decimal del logaritmo como si estuviera precedida de la característica 3. No se encuentra en las tablas, pero se ve que está comprendida entre 3,555 70, log. de 3 595, y 3,555 82 log. de 3 596.

La diferencia tabular es 12, y la que existe entre 555 75 y el logaritmo inmediatamente inferior 555 70, es 5.

Se dirá: si teniendo el logaritmo 555 70, 12 unidades más, de quinto orden, el número 3 595 se aumenta con 1, al tener el logaritmo 5 unidades más, el número se aumentará con x,

o sea: $$\frac{12}{1} = \frac{5}{x};$$

$x = 0{,}41$, que se añaden a 3 595, lo que da 359 541.

La característica 4 indica que el número pedido tiene 5 cifras en su parte entera; por lo tanto, este número será 35 954,1.

Ejemplos de cálculo con logaritmos

1° *Súmese log* 3,872 45 *con log* $\bar{2},954\ 19$

$$\begin{array}{rr} log & 3,872\ 45 \\ log & \bar{2},954\ 19 \\ \hline \text{Suma} = & 2,826\ 64 \end{array}$$

Después de haber dicho en la columna de las décimas: 1 que llevo y 8 son 9, y 9 son 18, se escribe 8 y se lleva 1; 1 y 3 son 4, 4 y — 2 son + 2; luego el resultado es 2,826 64.

2° *De log* 0,936 76
réstese log 3,111 90

$$\begin{array}{rr} & log\ 0{,}936\ 76 \\ & log\ \underline{3{,}111\ 90} \\ \text{Diferencia} = & \bar{3}{,}824\ 86 \end{array}$$

Después de haber dicho en la columna de las décimas: 1 de 9 da 8, se añade: 3 de 0 da — 3.

3° *Del log de* 1, *o sea* 0,000 00
réstese log $\bar{3}$,391 93

$$\begin{array}{rr} & log\ 0{,}000\ 00 \\ & log\ \underline{\bar{3}{,}391\ 93} \\ \text{Diferencia} = & 2{,}608\ 07 \end{array}$$

Después de haber dicho en la columna de las décimas: 1 que llevo y 3 son 4; de 10 da 6, se añade: 1 que llevo y — 3 son — 2; — 2 de 0 da + 2.

4° *Multiplíquese por* 3 *log* $\bar{4}$,902 00

$$\begin{array}{rr} & \bar{4}{,}902\ 00 \\ & \underline{3} \\ \text{Producto} = & 10{,}706\ 00 \end{array}$$

Después de haber dicho: 9 por 3 son 27, escribo 7 y llevo 2 se añade: — 4 por 3 son — 12, — 12 y más 2 que llevo son — 10.

5° *Divídase por* 2 *log* $\bar{1}$,428 46.

Se añade — 1 a la característica *para que sea divisible por* 2; luego por compensación, se añade + 1 a la mantisa, y se dice: la mitad de $\bar{2}$ es $\bar{1}$, la mitad de 14 es 7, la mitad de 2 es 1.... Luego el cociente es $\bar{1}$,71423.

6° *Calcúlese el logaritmo de la expresión*

$$x = \frac{64 \times 0{,}0826 \times 16{,}57}{13{,}48 \times 0{,}0017 \times 9{,}467}$$

Cálculo del numerador.	*Cálculo del denominador.*
Log 64 = 1,806 18	Log 13,48 = 1,129 69
Log 0,0826 = $\bar{2}$,916 98	Log 0,0017 = $\bar{3}$,230 45
Log 16,57 = 1,219 32	Log 9,467 = 0,976 21
Total = 1,942 48	Total = $\bar{1}$,336 35

$$\begin{array}{rr} \text{Log del numerador} & 1{,}942\ 48 \\ \text{Log del denominador} & \underline{1{,}336\ 35} \\ \text{Diferencia} = & 2{,}606\ 13 \end{array}$$

Luego, $\log x = 2{,}606\ 13.$

603. Problema de aplicación.—*En una fábrica hay* 127 *mecheros que quedan encendidos* 2 *horas* 3/7 *cada día, término medio, y por* 187 *días. Cada mechero consume* 143 *litros por hora, y el metro cúbico de gas vale Bs.* 0,37. *Calcúlese el gasto por los* 187 *días, si se hace la rebaja de los* 7/123 *del precio total.*

Un mechero consume por día $\dfrac{143 \times 17}{7}$ litros, o $\dfrac{143 \times 17}{7\ 000}$ metros cúbicos; en 187 días un mechero consumirá

$\dfrac{143 \times 17 \times 187}{7\ 000}$ metros cúbicos, y 127 mecheros,

$$\frac{143 \times 17 \times 187 \times 127}{7\ 000}.$$

El gasto será de Bs. $\dfrac{143 \times 17 \times 187 \times 127 \times 0{,}37}{7\ 000}.$

Siendo la rebaja de $\dfrac{7}{123}$. el gasto será por lo tanto los $\dfrac{116}{123}$ de número precedente, o sea:

$$\text{Bs. } \frac{143 \times 17 \times 187 \times 127 \times 0{,}37 \times 116}{7\ 000 \times 123}.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Log } 143 = 2{,}155\ 34 & \text{Log } 7\ 000 = 3{,}845\ 10 \\ \text{Log } 17 = 1{,}230\ 45 & \text{Log } 123 = \underline{2{,}089\ 91} \\ \text{Log } 187 = 2{,}271\ 84 & \text{Total} = 5{,}935\ 01 \\ \text{Log } 127 = 2{,}103\ 80 & \\ \text{Log } 0{,}37 = \overline{1}{,}568\ 20 & 9{,}394\ 09 \\ \text{Log } 116 = \underline{2{,}064\ 46} & \underline{5{,}935\ 01} \\ \text{Total} = 9{,}394\ 09 & \text{Diferencia} = 3{,}459\ 08 \end{array}$$

El número correspondiente al log 3,459 08 es 2 877,9.

***Respuesta*: El gasto es de Bs. 2 877,9 por exceso.**

§ III. INTERÉS COMPUESTO

Una aplicación importante de los logaritmos es el cálculo de los *intereses compuestos.*

604. Definición.—*Interés compuesto* es el producido por el capital sumado con los intereses que se le van acumulando al fin de un período convenido.

Si uno presta, por ejemplo, Bs. 1 000 al 5 % de interés compuesto, esta suma el primer año produce Bs. 50 que no perciben entonces, sino que se *capitalizan* o acumulan al capital primitivo; de modo que éste, al principio del segundo año es de Bs. 1 050. En el segundo año este capital produce Bs. 52,5 que se capitalizan de nuevo, y así sucesivamente, hasta el fin del tiempo estipulado.

605. Fórmula general.—Llamemos:

a un capital impuesto.

r el interés anual de un bolívar, o sea $\frac{1}{100}$ del tanto por ciento.

n el tiempo.

A el capital con sus intereses, o el monto.

Al fin del primer año 1 bolívar llega a valer $1 + r$, y a pesos valdrán $a(1 + r)$; de manera que para saber en qué se convierte un capital a con sus intereses capitalizados en un año, basta multiplicarlo por $(1 + r)$.

Luego al fin del segundo año, el capital con sus intereses valdrá:

$$a(1 + r)\ (1 + r) = a(1 + r)^2;$$

al fin del tercero $\quad a(1 + r)^3,$

y así sucesivamente.

Luego, después de n años, el valor A del capital con sus intereses compuestos será:

$$A = a(1 + r)^n. \tag{1}$$

606. NOTA: Ésta es la *fórmula general* de interés compuesto; contiene las cuatro cantidades variables: A, a, n

y r, cada una de las cuales puede determinarse, siendo conocidas las otras tres.

Para despejar la a hay que dividir ambos miembros por $(1 + r)^n$,

y resulta:
$$a = \frac{A}{(1 + r)^n}. \tag{2}$$

Para despejar la r, se dividirán por a ambos miembros de la ecuación (1) y se extraerá la raíz n^{ma} del cociente.

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

de donde:
$$r = \sqrt[n]{\frac{a}{A}} - 1. \tag{3}$$

Para despejar la n, se emplean los logaritmos y se escribe:

$$\log A = \log a + n \log (1 + r);$$

de donde
$$n = \frac{\log A - \log a}{\log (1 + r)} \tag{4}$$

Todas estas fórmulas pueden calcularse por logaritmos. Cuando el logaritmo de $(1 + r)$ ha de repetirse n veces (comprendiéndose n ordinariamente entre 1 y 100), conviene tomarlo con ocho o nueve decimales; pues, como en las tablas, la última cifra es solamente aproximada, el producto del log por n podría dar un error o diferencia considerable; entonces, después de multiplicado por n el log de $(1 + r)$, no se conservan en el producto sino cinco o siete cifras decimales, según las tablas de que uno se ha servido, cuidando de aumentar por exceso una unidad a la última cifra, si la siguiente fuere mayor que 4.

APLICACIONES: 1° *¿Cuál es el monto de una suma de Bs.* 30 000, *impuesta a interés compuesto durante* 12 *años, al* 4,5 *por ciento?*

Valiéndose de la fórmula (1), se tendrá:

$$A = 30\,000\,(1{,}045)^{12},$$
$$\begin{aligned} \log 30\,000 &= 4{,}477\,12 \\ +\ 12 \log 1{,}045 &= \underline{0{,}229\,40} \\ \log A &= 4{,}706\,52 \end{aligned}$$

El número que corresponde al log 4,706 52 es 50 876,7.
Luego: $A =$ Bs. 50 876,7.

2° *¿Qué cantidad se necesita imponer a interés compuesto para percibir, al cabo de* 10 *años, Bs.* 12 640 *por capital e intereses, siendo* 5 *el tanto por ciento?*

Empleando la fórmula (2), resultará:

$$a = \frac{12\,640}{(1{,}05)^{10}}$$

$$\begin{aligned} \log 12\,640 &= 4{,}101\,75, \\ 10 \log 1{,}05 &= \underline{0{,}211\,89,} \\ \log a &= 3{,}889\,86; \end{aligned}$$

de donde: $a =$ Bs. 7 760.

Hubiéramos podido encontrar la respuesta, dividiendo 12 640 por 1,628 894, valor de Bs. 1 al cabo de 10 años, al 5 %. (Véase la tabla, pág. 389.)

3° *La suma de Bs.* 10 000 *colocada a interés compuesto, durante* 15 *años, llega a valer Bs.* 20 360. *¿Cuál ha sido el tanto por ciento?*

La fórmula (3) da:

$$r = \sqrt[15]{\frac{20\,360}{10\,000}} - 1.$$

$$\begin{aligned} \log 20\,360 &= 4{,}308\,78, \\ \log 10\,000 &= \underline{4{,}000\,00.} \\ \text{Diferencia:}\ & 0{,}308\,78. \end{aligned}$$

El $\frac{1}{15}$ de 0,308 78 es 0,020 58, que corresponde a 1,049;

de donde: $r = 0{,}049$,
luego, el tanto por ciento es 4,90.

4° *¿En cuántos años un capital de Bs.* 40 000, *colocado a interés compuesto llega a valer Bs.* 67 835,7 *siendo* 4,5 *el tanto por* 100?

La fórmula (4) da:

$$n = \frac{\log 67\,835{,}7 - \log 40\,000}{\log 1{,}045}$$

$$\begin{aligned} \log 67\,835{,}7 &= 4{,}831\,46, \\ \log 40\,000 &= \underline{4{,}602\,06,} \\ \text{Diferencia: } & 0{,}229\,40, \end{aligned}$$

que se ha de dividir por 0,019 12, log de 1,045. El cociente es 12 años.

5º *¿En cuántos años se duplicará un capital colocado a interés compuesto, siendo* 5 *el tanto por ciento?*

Si en la fórmula (1) se hace $A = 2a$, resulta:

$$2a = a(1 + r)^n \text{ o bien } 2 = (1 + r)^n$$

$$\log 2 = n \log (1 + r);$$

de donde: $$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = \frac{0\ 301\ 03}{0\ 021\ 19}.$$

El cociente da algo más de 14 años.

Tabla que indica el valor de Bs. 1, o de 1 fr., o de £ 1, impuestos a interés compuesto al 2½, 3, 3½, 4, 5, 6, 7 y 8 % desde 1 año hasta 40

Años	2½ %	3 %	3½ %	4 %	5 %	6 %	7 %	8 %
1	1,025000	1,030000	1,035000	1,040000	1,050000	1,060000	1.070000	1.080000
2	1,050625	1,060900	1,071225	1,081600	1,102500	1,123600	1.144900	1.166400
3	1,076891	1,092727	1,108718	1,124864	1,157625	1,191016	1,225043	1,259712
4	1,103813	1,125509	1,147523	1,169859	1,215506	1,262477	1,310796	1,360489
5	1,131408	1,159274	1,187686	1,216653	1,276282	1,338226	1,402552	1,469328
6	1,159693	1,194052	1,229255	1,265319	1,340096	1,418519	1,500730	1,586874
7	1,188686	1,229874	1,272279	1,315932	1,407100	1,503630	1,605782	1,713824
8	1,218403	1,266770	1,316809	1,368569	1,477455	1,593848	1.718186	1,850930
9	1,218863	1,304773	1,362897	1,423314	1,551328	1,689479	1,838459	1,999005
10	1,280085	1,343916	1,410599	1,480244	1,628885	1,790848	1,967151	2,158925
11	1,312087	1,384234	1,459970	1,539454	1,710339	1,898299	2,104852	2,331639
12	1,344889	1,425761	1,511069	1,601032	1,795856	2,012197	2,252192	2,518170
13	1,378511	1,468534	1,563956	1,665074	1,885649	2,132928	2,409845	2,719624
14	1,412974	1,512590	1,618695	1,731676	1,979932	2,260904	2,578534	2,937194
15	1,448298	1,557967	1,675349	1,800944	2,078928	2,396558	2,759032	3,172169
16	1,484506	1,604706	1,733986	1,872981	2,182875	2,540352	2,952164	3,425943
17	1,521618	1,652848	1,794676	1,947901	2,292018	2,692773	3,158815	3,700018
18	1,559659	1,702433	1,857489	2,025817	2,406619	2,854339	3,379932	3,996020
19	1,598650	1,753506	1,922501	2,106849	2,526950	3,025600	3,616528	4,315701
20	1,638616	1,806111	1,989789	2,191123	2,653298	3,207135	3,869685	4,660957
21	1,679582	1,860295	2,059431	2,278768	2,785963	3,399564	4,140562	5,033834
22	1,721571	1,916103	2,131512	2,369919	2,925261	3,603537	4,430402	5,436540
23	1,764611	1,973587	2,206114	2,464716	3,071524	3,819750	4,740530	5,871464
24	1,808726	2,032794	2,283328	2,563304	3,225100	4,048935	5,072367	6,341181
25	1,853944	2,093778	2,363245	2,665836	3,386355	4,291871	5,427433	6,848475
26	1,900293	2,156591	2,445959	2,772470	3,555673	4,549383	5,807353	7,396353
27	1,947800	2,221289	2,531567	2,883369	3,733456	4,822346	6,213868	7,988062
28	1,996495	2,287928	2,620172	2,998703	3,920129	5,111687	6,648838	8,627106
29	2,046407	2,356566	2,711878	3,118651	4,116136	5,418368	7,114257	9,317275
30	2,097568	2,427262	2,806794	3,243398	4,321942	5,743491	7,612255	10,062657
31	2,150007	2,500080	2,905031	3,373133	4,538040	6,088101	8,145113	10,867669
32	2,203757	2,575083	3,006708	3,508059	4,764942	6,453387	8,715271	11,737083
33	2,258851	2,652335	3,111942	3,648381	5,003189	6,840590	9,325340	12,676050
34	2,315322	2,731905	3,220860	3,794316	5,253348	7,251025	9,978114	13,690134
35	2,373205	2,813862	3,333590	3,946089	5,516015	7,686087	10,676582	14,785344
36	2,432535	2,898278	3,450266	4,103933	5,791816	8,147252	11,423942	15,968172
37	2,493349	2,985227	3,571025	4,268090	6,081407	8,636087	12,223618	17,245626
38	2,555682	3,074783	3,696011	4,438813	6,385477	9,154252	13,079271	18,625276
39	2,619574	3,167027	3,825372	4,616366	6,704751	9,703508	13,994820	20,115298
40	2,685064	3,262038	3,959260	4,801021	7,039989	10,285718	14,974458	21,724522

Nota I. De una vez se puede buscar en la tabla el monto de Bs. 1 en el tiempo y al tanto dados, cuyo valor se multiplica por el capital señalado. El producto será el **monto** pedido. Réstese de este último el capital dado, y la diferencia será el **interés compuesto.**

II. Restando una unidad de cada número de la tabla, la diferencia indicará el interés compuesto de Bs. 1, o de 1 fr., o de £ 1.

EJERCICIOS

Progresiones

1085. Búsquese el 36° término de la progresión ÷ 1.4.7.10...

1086. ¿Cuál es el 81° término de la progresión ÷ 200.198.196.194...?

1087. Búsquese la suma de los términos de la progresión ÷ 2.5.8.11..., que tiene 54 términos.

1088. Calcúlese la suma de los 64 primeros números pares 2.4.6...

1089. ¿Cuál es el 8° término de una progresión geométrica, si el primero es 4 y la razón 3?

1090. Se desea saber cuál es el primer término de una progresión geométrica cuya razón es 3, y 324 el quinto y último término.

1091. El primer término de una progresión geométrica es 4, la razón 3, y el último término 324; ¿cuál es la suma de los términos?

1092. Habiendo perdido 5 cents. un jugador en la primera mano, quiso jugar otras cuatro, que perdió también, triplicando la apuesta en cada una; ¿cuánto perdió en la quinta mano?

1093. ¿Cuál es el 11° término de la progresión
÷÷ 3 : 6 : 12 : 24...?

1094. ¿Cuál es el 17° término de la progresión
÷÷ 4 096 : 2 048 : 1 024 : 512...?

1095. Búsquese la suma de los diez primeros términos de la progresión ÷÷ 2 : 4 : 8 : 16...

1096. ¿Cuál es la suma de los ocho primeros términos de la progresión ÷÷ 27 : 9 : 3...?

1097. ¿Cuál es la suma de los términos de la progresión ÷÷ 3 : 12 : 48..., compuesta de 15 términos?

1098. Búsquese la suma de los términos de la progresión ÷÷ 27 : 9 : 3... compuesta de 12 términos.

1099. Buscar los cuatro ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que dichos ángulos están en progresión geométrica, y que el último es igual a 9 veces el segundo.

1100. Un rey de la India, llamado Shehram, queriendo premiar a Sessa-Ebn-Daher, inventor del ajedrez, le propuso que él mismo escogiese su premio. Este le pidió la cantidad de granos de trigo que resultara poniendo en el primer cuadrado del tablero un grano, dos en el 2º, cuatro en el 3º, y así sucesivamente, duplicando siempre el número de granos para cada uno de los 64 cuadrados del tablero; pregúntase qué numero de granos resulta de este cálculo.

1101. Un avaro pregunta a un herrador cuánto le cobrará por herrar su bestia; el herrador le contesta que Bs. 3 por las 4 herraduras; o que no le cobrará nada por las 2 primeras, si le paga 1 centavo por el primer clavo, 2 por el segundo, 4 por el tercero, y así sucesivamente, duplicando hasta los 16 que tienen las 2 herraduras. ¿Cuánto tendrá que pagar el avaro, si acepta esta última propuesta?

Logaritmos

1102. Búsquese en las tablas el log de cada uno de los números siguientes: 1º 520; 2º 146; 3º 1 450; 4º 1,59; 5º 2 034; 6º 16 995; 7º 10 724; 8º 3 244; 9º 258,70; 10º 567 521; 11º 5 784; 12º 1 296; 13º 6 843; 14º 24 647.

1103. ¿A qué número de las tablas corresponden los logaritmos siguientes: 1º 0,301 03; 2º 4 602,06; 3º 4,101 75; 4º 0,491 50; 5º 2,594 61; 6º 5,693 29; 7º 0,088 49; 8º 2,542 40; 9º 5,445 56; 10º 2,510 33; 11º 3,685 96; 12º 4,555 75; 13º 2,883 95?

Ejecutar, por medio de los logaritmos, las operaciones siguientes:

1104. Multiplicar:

1º	976 por 27	4º	48 966 por 7 649
2º	697 por 34	5º	96 824 por 4 696
3º	8 386 por 57	6º	76 496 por 87 969

1105. Dividir:

1º	6 375 por 5	4º	11 440 por 572
2º	173 469 por 36	5º	28 968 por 213
3º	8 760 por 365	6º	6 536 por 8

1106. Elevar los números siguientes a la potencia indicada:

1º	$1\,868^2$	4º	$2\,158^5$
2º	$43\,805^3$	5º	$1\,528^6$
3º	$1\,238^4$	6º	$6\,769^6$

1107. Extraer de los números siguientes la raíz indicada:

1º	R. cuad. de 108 241	4º	R. quinta de 759 375
2º	R. cúb. de 571 787	5º	R. sexta de 117 649
3º	R. cuarta de 614 656	6º	R. octava de 65 536

Intereses compuestos

1108. ¿Cuál es el interés compuesto de Bs. 8 000 durante 4 años, al 6 % anual?

1109. ¿Cuánto valdrán Bs. 24 000 impuestos a intereses compuestos durante 3 años, al 5 %?

1110. Búsquese el monto y el interés compuesto de Bs. 790,83 en 2 años 11 meses, al 7 %.

1111. ¿Cuál es el interés compuesto de Bs. 8 000 impuestos durante 4 años 4 meses, al 6 % anual?

1112. ¿Cuánto importan Bs. 1 000 al cabo de 3 años, impuestos al 5 % de intereses compuestos?

1113. ¿Cuánto valdrán Bs. 9.500 impuestos durante 2 años y 7 meses, al 6 % de intereses compuestos por año?

1114. ¿Cuánto importan Bs. 720 en 10 años 9 meses 4 días al 6 % de interés compuesto?

1115. ¿Cuál es el interés compuesto de Bs. 236 en 4 años 7 meses 6 días: 1° al 6 %; 2° al 7 %, 3° al 5 %?

1116. ¿Cuánto importarán Bs. 1 840 al 8 % de intereses, capitalizados cada seis meses: 1° al cabo de 4 años 1 /2; 2° al cabo de 7 años 10 meses 20 días?

1117. ¿Cuál es el interés compuesto de Bs. 1 400 en 10 años 3 meses, al 8 % anual, pagaderos: 1° por trimestre; 2° por semestre?

1118. ¿Cuál es el capital que, impuesto al 5 % de interés compuesto, valdrá Bs. 1 183,77 en 5 años?

1119. ¿Cuál es el capital que, impuesto al 5 % de interés compuesto durante 3 años, ha llegado a valer Bs. 18 522?

1120. ¿Qué capital debe imponerse a interés compuesto, a razón del 6 % por semestre, para que produzca Bs. 857,25 en 15 años y medio, junto con los intereses?

1121. ¿Cuál es el capital que en 4 años, al 6 % de interés compuesto, dará un monto de Bs. 8 644,62?

1122. Al cabo de 10 años 5 meses un capital, impuesto al 6 % de interés compuesto, importa Bs. 26 772,96; ¿cuál es dicho capital?

1123. ¿A qué tanto % habrán de imponerse Bs. 1 500 a intereses compuestos, para que valgan Bs. 2 110,65 al cabo de 7 años?

1124. ¿A qué tanto % de interés compuesto será menester imponer Bs. 800 para que valgan: 1° Bs. 1 280,81 en 12 años; 2° 1 560 en 17 1/2 años?

1125. ¿A qué tanto % será menester imponer a interés compuesto Bs. 12 500 para que den un monto: 1° de Bs. 39 485,18 en 17 años; 2° de Bs. 39 652,115 en 15 años?

1126. ¿Dentro de cuánto tiempo valdrá Bs. 25 299,67 la suma de Bs. 5 428, impuesta al 8 % de interés compuesto?

1127. ¿Al cabo de cuántos años importará Bs. 2 560,82 la suma de Bs. 1 600, impuesta al 4 % de interés compuesto?

1128. ¿Al cabo de qué tiempo se triplicará cualquier suma: 1° al 4 %, y 2° al 7 % de interés compuesto?

1129. ¿Durante cuánto tiempo deberá quedar impuesta la suma de Bs. 2 865 para producir un monto compuesto de Bs. 5 956,13: 1° al 5 %; 2° al 6 %; y 3° al 7 %?

1130. ¿Cuál es el valor actual de Bs. 62 500, debidos dentro de 16 años, al 9 % de interés compuesto pagadero anualmente?

1131. Para saldar una cuenta de Bs. 8 160, da un negociante una letra de cambio de Bs. 10 285,31, pagaderos dentro de 5 años, con los intereses compuestos al 6 %; ¿cuánto debe todavía al contado?

1132. Dentro de 3 años deben pagarse Bs. 450 por 75 metros de raso de 4/5 de metro de ancho; ¿cuánto se debería pagar al cabo de 5 años por 60 metros de raso de la misma calidad, pero de 5/6 de metro de ancho, calculándose el interés compuesto al 6 %?

1133. ¿Qué tiempo será menester para que una suma impuesta a intereses compuestos al 4 %, 5 % y 6 % reciba un aumento de la mitad de su valor?

1134. ¿Cuál es el capital que, colocado a intereses compuestos, durante 10 años al 5 %, llega a valer Bs. 12 640?

1135. Un capital de Bs. 40 000, colocado al 4,5 % de intereses compuestos, importa Bs. 67 835,70; ¿durante cuántos años ha quedado impuesto?

1136. ¿A qué tanto ha sido impuesta una suma de Bs. 10 000, si después de 15 años de imposición ha llegado a importar Bs. 20 360?

1137. Se impone al 4 % de interés compuesto, durante 25 años, la suma de Bs. 5 000. ¿Durante cuánto tiempo debería imponerse la misma suma, al 5 % de interés simple, para que reciba el mismo aumento que en el 1er. caso?

PROBLEMAS DE REPASO

OPERACIONES FUNDAMENTALES

1138. Tres jugadores convienen en que el que pierda una mano tendrá que duplicar el dinero de los otros dos. Juegan 3 manos, y cada uno pierde una; entonces tienen respectivamente Bs. 60, Bs. 28 y Bs. 16. ¿Cuánto tenían al empezar el juego?

1139. Hállense tres números, sabiendo que la suma de los dos primeros es de 45; la del primero y del tercero es de 50; y la de los dos últimos, de 55.

1140. Tres bolsas encierran dinero; las dos primeras tienen juntas Bs. 795; la 1ª y la 3ª, Bs. 851; en fin, la 2ª y la 3ª, Bs. 1 012. ¿Cuánto hay en cada bolsa?

1141. Una suma se ha repartido entre 4 personas; la parte de la 1ª más la de la 2ª vale Bs. 2 690,40; la de la 2ª y de la 3ª, Bs. 3 090,45; la de la 3ª y de la 4ª, Bs. 3 319,60; en fin, la de la 2ª y de la 4ª Bs. 3 189,95. Dígase la suma repartida y cuánto le toca a cada persona.

1142. Tres cajones de un mueble encierran dinero; en los dos primeros juntos hay Bs. 8 023; en el 1º y 3º Bs. 9 134; en el 2º y 3º Bs. 10 245. Dígase la cantidad que hay en cada cajón.

1143. Por el trabajo de 90 días se promete a un obrero Bs. 120 y un vestido. Al cabo de 60 días su patrón le despide dándole Bs. 120, sin el vestido. Calcúlese el valor de este vestido.

1144. Al tomar un criado, Fulgencio le promete, por un año, Bs. 240 y una bicicleta; al cabo de 8 meses, el amo despide al criado, remitiéndole Bs. 120 y la bicicleta. Hállese el precio de ésta.

1145. Un empresario tiene dos operarios a quienes paga el mismo jornal. Al cabo de 56 días, da al primero 4 costales de maíz y Bs. 57; al segundo, $7\frac{1}{2}$ costales y Bs. 69 por 84 días. ¿A cómo sale el costal de maíz?

1146. Un mercader compra 15 bueyes y 20 carneros por Bs. 6 800. Si hubiera comprado 20 bueyes y 15 carneros, habría gastado Bs. 8 600. Dígase el precio de un buey y el de un carnero.

1147. Un mercader compra 18 caballos y 14 bueyes en Bs. 15 000; otra vez, 12 caballos y 26 bueyes, al mismo precio que los primeros, y paga también Bs. 15 000. ¿A cómo le sale un buey y un caballo?

1148. Por 12 jornales de obreros y 7 de aprendiz se pagan Bs. 109,25; por 11 jornales del obrero y 6 del aprendiz se pagan Bs. 99. Calcúlese el jornal del obrero y el del aprendiz.

1149. Un labrador vende 10 hectolitros de trigo y 8 hectolitros de maíz en Bs. 198. Si hubiera vendido 20 hl. de trigo y 4 hl. de maíz habría recibido Bs. 324. Calcúlese a cómo se ha vendido el hectolitro de trigo y el de maíz.

1150. Donato emplea a dos obreros, el primero de los cuales recibe un jornal doble del segundo. Por 12 jornales se da al primero Bs. 40 y 10 libras de café; por 9 jornales, el segundo recibe Bs. 16,40 y 2 libras de café. Calcúlese el valor de una libra de café.

1151. Queriendo hacer tres vestidos, un sastre compró una pieza de paño y otra de tela para forrar. El primero necesitó 4 m. de paño y 4 de forro; el segundo, 3 m. de paño y 2 de forro. Sabiendo que el valor del primero es de Bs. 69,40 y el del segundo Bs. 49,60, calcúlese el precio del tercer vestido, si se emplean 5 m. de paño y 4 m. de forro.

1152. Un negociante pagó una primera vez Bs. 2 038 por 125 m. de paño y 80 m. de tela; otra vez, por 10 m. de paño cuyo ancho era los 7/5 de la 1ª, dió Bs. 66,40 más que por 18 m. de tela de ancho doble de la 1ª. Calcúlese el precio del metro de paño y del metro de tela de cada calidad.

1153. Una persona compra 10 m. de terciopelo y 12 de seda por Bs. 93,04 con 2 % de descuento. Otra vez, 4 m. de terciopelo y 6 m. de seda de la misma calidad, por Bs. 40,8 con 4 % de descuento. Calcúlese el precio del metro de terciopelo y de seda.

1154. Un profesor propone 16 problemas a su discípulo y le promete 5 vales por cada respuesta exacta, con la condición que el alumno dará al maestro 3 vales por cada respuesta errada. Sabiendo que no se deben nada recíprocamente, dígase el número de problemas en que acertó el alumno.

1155. Un obrero ha trabajado 30 días con dos empresarios: el primero le ha dado Bs. 2 diarios, y el segundo, Bs. 2,50;

las dos cantidades sumadas dan Bs. 66. ¿Cuántos días trabajó con cada empresario?

1156. Juanito tiene 46 vales en las manos, 8 más en la derecha que en la izquierda; ¿cuántos tiene en cada mano?

1157. En un colegio hay dos categorías de alumnos. Los unos pagan Bs. 2,50 diarios, y los demás Bs. 1,25. El número de alumnos de la segunda categoría pasa de 11 al de la primera; sabiendo además que el director del colegio ha recibido Bs. 115 por un día, dígase el número total de alumnos.

1158. Para hacer una saya y un peinador, una señora compra géneros de dos calidades: en Bs. 3,50 el metro para la saya, y en Bs. 2 para el peinador. Sabiendo que ha pagado Bs. 76,50 y que ha comprado 3 metros más para la saya, calcúlese el número de metros comprados para la saya y para el peinador.

1159. Un comerciante en vinos compra 78 hl. 60 de cierta calidad y 104 hl. 50 de otra por Bs. 5 761,75. Sabiendo que un hectolitro de la segunda calidad vale Bs. 5,20 más que un hectolitro de la primera, calcúlese: 1º el precio del hectolitro de cada calidad; 2º el beneficio que realizará el comerciante al vender el todo en Bs. 35 el hectolitro.

1160. La distancia que media entre dos ciudades A y B es de 225 kilómetros. En A, los 100 kg. de hulla valen Bs. 3,75. y en B, Bs. 4,25; hállese entre A y B un punto en que la hulla cueste el mismo precio, que venga de A o de B, sabiendo que el acarreo de una tonelada importa Bs. 0,08 cada kilómetro.

1161. Un maestro quiere premiar a algunos de sus alumnos: si da 5 vales a cada uno, le faltarán 3; si les da 4 vales a cada uno, le sobrarán 7. Dígase el número de vales y el número de alumnos.

1162. Catalina quiere dar limosna a unos pobres: dándoles Bs. 0,50 a cada uno, le sobran Bs. 1,00; y dándoles Bs. 0,70, le faltan Bs. 1,60. Dígase el número de pobres y la suma que esta persona quiere repartirles.

1163. Fulgencio, queriendo comprar una hacienda, pide a sus deudores la suma necesaria. Si de cada uno recibiese Bs. 1 250, le faltarían Bs. 10 000; recibiendo Bs. 1 600, le sobrarían Bs. 1 200. Calcúlese el número de deudores, y cuánto debe darle cada uno.

1164. Eusebio habiendo cesado sus pagos, sus acreedores no pueden conseguir sino los 31 %. Si Eusebio tuviera Bs. 5 000 más, podría pagar los 4/7 de lo que debe. Dígase su activo y su pasivo.

1165. Al revender una pieza de género en Bs. 2 los 2/3 de metro, Donato gana Bs. 19,50; pero revendiéndola en Bs. 1,75 los 5/6 de metro, pierde Bs. 9,75. Calcúlese la longitud de la pieza y el precio de compra de un metro.

1166. Para pagar una deuda, Raimundo pide una misma suma a cada uno de sus deudores. Si cada uno le diese Bs. 1 520, le faltarían todavía Bs. 3 110; y si cada uno le diese Bs. 1 715, le sobrarían Bs. 205. Hállese a cuánto alcanza la deuda y el número de deudores.

1167. Para subir una pendiente ando 3 km. por hora, y 6 para bajar. Sabiendo que para subir y bajar he gastado 1 ½ hora, dígase a qué distancia he ido.

1168. Para ir a una aldea, Pedro anda 6 km. por hora, y 5 km. para volver. Sabiendo que para ir y volver ha gastado 4 horas, calcúlese la distancia de la aldea.

1169. Dos trenes salen a las 3 de la tarde de dos ciudades A y B distantes de 100 km. y andan el uno hacia el otro. El primero, que sale de A, anda 30 km. por hora; el otro, 20 km. Dígase: 1° dentro de cuánto tiempo se encontrarán; 2° a qué distancia estarán del punto de partida; 3° la hora que será.

1170. Para ir de París a Niza un tren necesita 15 h. 40 m.; otro tren necesita 22 h. 20 m. para ir de Niza a París. En una hora el primero recorre 18 km. ½ más que el segundo. Calcular: 1° la velocidad de cada uno de estos trenes; 2° la distancia de París a Niza; 3° la hora de su encuentro, si salen a las 6 de la tarde, el uno de París y el otro de Niza.

1171. Dos trenes salen de dos ciudades A y B, distantes de 190 km. y van a su encuentro. El de A anda 30 km. por hora, y el de B, que sale 2 h. antes, anda sólo 20. ¿Dentro de cuánto tiempo se cruzarán, y a qué distancia de B?

1172. Dígase el precio de compra de una mercancía que, vendida en Bs. 600, da: 1° 20 % de beneficio sobre el precio de compra; 2° 20 % de beneficio sobre el precio de venta.

1173. Un negociante ha comprado 12 piezas de paño de 40 metros cada una, en Bs. 11 el metro, y al vender el todo quiere sacar un beneficio de 20 % sobre el precio de compra. Después de haber vendido 230 m. en Bs. 12,50 el metro, ¿a cómo tiene que vender el metro de lo que le queda para que resulte un 20 % del beneficio total, y cuál será el beneficio por ciento en el precio de venta?

1174. Leoncio ha comprado 12 volúmenes marcados Bs. 2,60. Sabiendo que le han hecho un 15 % de descuento y que le han dado un ejemplar gratuitamente, calcúlese el precio de compra de un volumen; ¿cuánto se ganará vendiendo el ejemplar al precio de catálogo?

1175. Un cuchillero ha comprado al por mayor 144 docenas de cuchillos que ha vendido en Bs. 4 536. Si no los hubiera vendido más que en Bs. 4 082,40 habría ganado un 12,5 % sobre el precio de compra. Calcúlese a cómo se compró la docena, y el beneficio realizado.

1176. Teresa fabrica medias de lana que vende a Bs. 6,50 el par; el kilogramo de lana le cuesta Bs. 7,50, y 17 pares pesan 2 kg. 657. Pregúntase lo que gana por par de medias y lo que habrá ganado al cabo de 3 años ½, sabiendo que fabrica 9 pares cada dos semanas.

1177. Una mercadera hace fabricar 5 docenas ½ de camisas con una tela que vale Bs, 6,50 el metro. Se necesitan 7 m. 20 para hacer 4 camisas, y se paga a la costurera Bs. 25 por 6 días de trabajo. Sabiendo que la obrera fabrica 9 camisas cada 7 días, dígase lo que cuestan las 5 docenas ½ de camisas, y en cuánto habría de venderlas para hacer un beneficio total de Bs. 108.

1178. Una máquina de vapor que trabaja día y noche ha necesitado 851 050 kg. de hulla por 103 días. Por medio de un perfeccionamiento se ha alcanzado, dando la máquina la misma fuerza, el no quemar sino 2 860 kg. por 37 horas. Calcúlese a cuánto alcanza la economía anual en carbón, supuesto de 330 días el trabajo, y de Bs. 3,75 los 100 kg. el precio del carbón.

1179. Fernández ha vendido en Bs. 1 800 cierta cantidad de arroz que había comprado en Bs. 800. Dígase el número de hectolitros, sabiendo que el beneficio ha resultado de Bs. 0,65 por 100 kg. y que el hectolitro pesa 75 kg.

1180. Por Bs. 600 se han comprado 138 m. de paño. ¿Cuántos metros de otra calidad superior se podrían comprar por la misma suma, si 3 m. de esta calidad valen tanto como 5 de aquélla?

1181. Eusebio compra una cesta de manzanas y otra de peras. Sabiendo que cada cesta contiene el mismo número de frutos, y que las manzanas cuestan Bs. 1,50 menos que las peras, calcúlese el número de manzanas y de peras, si 7 manzanas y 5 peras valen Bs. 0,70 y si 5 peras importan tanto como 7 manzanas.

1182. Manuel, que dispone de Bs. 45 000, compra 26 bueyes en Bs. 240 cada uno, y 15 caballos en Bs. 270 cada uno. Dígase lo que le quedaría después de haber comprado el mayor número posible de carneros en Bs. 45 cada uno.

1183. Raimundo compra libros por una suma de Bs. 115; al venderlos por Bs. 161 resulta un beneficio de Bs. 6 por docena. Dígase el número de libros comprados y a cómo el volumen.

1184. Un comerciante quiere ganar un 12 % sobre las mercaderías que compra. ¿En cuánto tendrá que vender una pieza de 60 m. que compró en Bs. 15 el metro, sabiendo que su comisionista tiene un 6 % sobre las sumas que cobra?

FRACCIONES

1185. Tres obreros deben hacer un foso: el 1° y el 2° lo harían en 1 día 5/7; el 2° y el 3°, en 2 días 2/9; el 1° y el 3°, en 1 día 7/8. Dígase el tiempo que cada obrero necesitaría para hacer solo el trabajo.

1186. Cuatro peones se han comprometido a hacer un trabajo: el 1°, el 2° y el 3° lo harían juntos en 1 día 2/3; el 2°, el 3° y el 4°, en 2 días 1/7; el 3°, el 4° y el 1° en 1 día 14/15; el 4°, el 2° y el 1°, en 1 día 9/11. Hállese el tiempo que necesitaría cada peón para hacer solo el trabajo.

1187. Un galgo persigue una liebre que lleva 90 saltos de adelanto. Sabiendo que da 7 saltos mientras que la liebre da 6, y que 4 de la liebre valen 3 del galgo, dígase después de cuántos saltos el galgo habrá alcanzado a la liebre.

1188. Dos morteros arrojan bombas en una ciudad: el 1° ha arrojado 36 antes que el 2° haya disparado, y arroja 8 mientras el 2° arroja 7, pero éste gasta en 3 descargas la misma cantidad de pólvora que el 1° en 4. Calcúlese el número de bombas que debe arrojar el 2° mortero para gastar la misma cantidad de pólvora que el 1°.

1189. Las dos manecillas de un reloj señalan mediodía; ¿a qué hora volverán a encontrarse, y cuántas veces en 12 horas?

1190. Es mediodía; ¿a qué hora las manecillas de un reloj se hallarán en línea recta?

1191. Un reloj de bolsillo tiene tres manecillas, y señala mediodía; ¿a qué hora la saetilla de los segundos encontrará: 1° la de las horas, 2° la de los minutos?

1192. He comprado por Bs. 4,20 una cesta con 100 peras y manzanas, y hay 1 vez ½ más manzanas que peras. Al venderlas ha resultado un beneficio de 10 %; dígase a cómo he vendido cada fruto, sabiendo que una pera se vendió sólo en los 2/3 del precio de una manzana.

1193. Una bomba puede vaciar un baño en 7 horas $\frac{1}{2}$; otra lo vaciaría en 5 horas; ¿cuánto tiempo necesitarán juntas?

1194. Un trabajo puede hacerse en 2 horas 6/7 por una persona, y en 1 hora 6/11 por otra. Calcúlese el tiempo que estas personas necesitarían, trabajando juntas, para acabar una obra 3 veces más difícil.

1195. Un obrero puede hacer los 2/3 de un trabajo en 7 días, trabajando 5 horas por día; otro obrero haría los 3/5 en 8 días, trabajando 8 horas por día. ¿Cuántos días necesitarán los dos obreros, si trabajan 6 horas por día?

1196. Un propietario se dirige a tres empresarios para la ejecución de una obra: los operarios del primero harían el trabajo en 10 días 5/12; los del segundo, en 15 días; los del tercero, en 18 días 3/4. En el supuesto de que se emplee la mitad del primer grupo, 1/3 del segundo y 1/4 del tercero, dígase el tiempo que necesitarían, trabajando juntos, para ejecutar la obra proyectada.

1197. Una fuente llenaría un baño en 3 horas 1/2, otra en 2 horas 1/7, y una tercera en 4 horas 1/3. Cuando juntas hayan llenado el baño, ¿qué fracción de éste habrá llenado cada una?

1198. Un aljibe lleno de agua puede vaciarse por medio de dos llaves A y B, la primera colocada en el fondo, y la segunda a media altura. La llave A vaciaría el aljibe en 6 horas, y la llave B, vaciaría en 4 horas el agua que está encima de ella. Si se abren simultáneamente las dos llaves, dígase el tiempo que necesitarán para vaciar el aljibe.

1199. Tres grifos pueden llenar un baño: el 1° en 12 horas; el 2° en 10 horas; el 3° en 8 horas; un cuarto puede vaciarlo en 6 horas. Calcular: 1° la fracción del baño llenada en 1 hora estando abiertos los 4 grifos; 2° dentro de cuánto tiempo estará lleno el baño.

1200. Un aljibe está lleno de agua: sabiendo que un 1er. grifo puede vaciarlo en 2 h. 1/3, un 2° en 3 h. 1/4, y un 3° en 5 horas, y que un 4° puede vaciarlo en 1/2 hora, dígase el tiempo necesario para vaciar el aljibe si se abren los 4 grifos.

1201. Una fuente puede llenar un baño en 7 horas, y una llave puede vaciarlo en 11 horas. Estando ya lleno el 1/3 del baño, se abre la fuente y la llave. ¿Al cabo de cuántas horas estaría lleno el baño hasta los 3/4?

1202. Dos fuentes llenan un baño, la 1ª en 2 h. 3/4, y la 2ª en 1 hora 2/3; una bomba vacia 40 litros por minuto. Estando lleno 1 /3 del baño, se hacen funcionar 1 h. 1 /4 las dos fuentes y la bomba; al cabo de este tiempo el baño queda lleno hasta los 7 /9. Dígase su capacidad en litros.

1203. Dos operarios emplearían 3 días para hacer un trabajo. Después de 1 día, el 2° operario sigue solo y necesita 6 días para acabar el trabajo. Calcúlese el tiempo que necesitaría cada operario, trabajando solo, para hacer todo el trabajo.

1204. Dos fuentes juntas llenarían un aljibe en 15 horas; la 1ª sola lo llenaría en 23 h. Calcúlese el tiempo que necesitaría la 2ª.

1205. Una madre y su hija trabajan en un bordado; juntas lo acabarían en 15 días. Después de haber trabajado juntas 6 días, la hija acaba sola la obra en 30 días. ¿Cuánto tiempo hubiera necesitado cada una de esas personas, trabajando separadamente?

1206. Fabriciano trabajando solo haría una obra en 13 días 1 /3; trabajaba en ella desde 3 días 1 /5 cuando se le dió un compañero que tenía 1 /9 más de habilidad. Habiendo importado el trabajo Bs. 56,76, ¿a cómo le sale a cada uno?

1207. Dos obreros se ofrecen para desmontar un campo. El 1° lo haría solo en 12 días 1 /2; el 2°, en 10 días. Empiezan el trabajo juntos, pero al cabo de 2 días 1 /2 el 1° no puede trabajar sino los 3 /4 del tiempo del día. Dígase cuándo se acabará el desmonte.

1208. Una pelota elástica rebota hasta una altura que es los 2 /9 de la de donde ha caído; después de haber rebotado 4 veces, sube hasta 1 decímetro. ¿De qué altura ha caído esta pelota?

1209. ¿De qué altura se ha dejado caer una pelota que, después de tocar 5 veces el suelo, rebota a una altura igual a 0m80? Se admite que, después de cada caída, la pelota rebota hasta los 4 /5 de la altura de que cayó.

1210. Paquito tiene un litro de vino: vierte la mitad y la reemplaza por agua; luego vierte la mitad de la mezcla y llena otra vez la botella con agua. Después de haber hecho lo mismo por tercera vez, dígase la cantidad de vino que queda todavía en la botella.

1211. Fulgencio ha vendido sucesivamente los 2 /5 de una cesta de naranjas, en seguida la 1 /2 del resto y los 2 /3 del nuevo resto. Si quedan todavía 15 naranjas, dígase el número que había en la cesta.

1212. Doroteo ha vendido los 3/4 de una pieza de género, y luego los 2/3 del resto. En el supuesto de que el retal sea de 2m45, que se venden por Bs. 35, calcúlese la longitud de la pieza y en cuánto se vendió, según el precio del retal.

1213. Una herencia se reparte del modo siguiente: la 1ª persona recibe 1/3, la 2ª 1/4 del resto y la 3ª 1/5 de lo que queda todavía. Dígase la parte que cabe a cada persona, sabiendo que a la 4ª le cupo la suma de Bs. 30 000, que representan la suma que sobró después de haber servido a las tres primeras personas.

1214. Sebastián, en un primer año, aumenta su hacienda de 1/3 de lo que era; al fin del segundo año queda aumentada de 1/4 de lo que ha llegado a ser al cabo del primero; en fin, después de un tercer año, la aumenta de 1/5 de lo que era al cabo de los dos primeros. Si tiene entonces Bs. 57 800, dígase su hacienda al principio del primer año.

1215. En 5 años un comerciante ha economizado Bs. 54 000. Sabiendo que el 2° año economiza 2/9 más que el 1er. año; el 3er. año Bs. 12 855; el 4° año 1/11 menos que el 2°; y, en fin, el 5° año tanto como el 2°, más Bs. 115; dígase lo que ha economizado cada año.

1216. Un padre de familia gasta 1/5 de su rédito anual para su alojamiento, los 3/8 del resto para la manutención de la familia; los 2/5 del nuevo resto para sus vestidos, y los 2/3 de lo que le queda para la instrucción de sus hijos; en fin, 1/4 de lo que le queda todavía para gastos imprevistos. Sabiendo que sus economías al fin del año son de Bs. 975, calcúlese su rédito anual, y dígase el presupuesto de sus gastos.

1217. Se ha repartido una suma entre 4 personas: la 1ª ha recibido 1/5 de esta suma; la 2ª los 4/9 del resto; la 3ª los 2/5 del segundo resto, y la 4ª Bs. 2 400 que representan el último resto. Dígase cuál fué la suma repartida, y cuál la que cupo a cada persona.

1218. Una herencia se repartió del modo siguiente: el 1er. heredero recibió Bs. 2 400 y 1/4 del resto; el 2° Bs. 2 850 y 1/3 del resto; el 3° Bs. 4 506 y la 1/2 del resto; los Bs. 5 097 que representaban el último resto se dieron a un hospicio. Calcúlese qué suma representa la herencia, y lo que recibió cada heredero.

1219. Dos personas tienen juntas Bs. 100; la 1/2 de lo que tiene la primera vale tanto como 1/3 de lo de la segunda; ¿cuál es la suma que tiene cada persona?

1220. Dos obreros economizan el uno 1/3, y el otro 1/4 de su salario. Al cabo de un año sus economías juntas alcanzan a Bs. 400. Calcúlese lo que ha ganado cada uno en el año, si sus jornales juntos alcanzan a Bs. 1 350.

1221. Dos empleados han recibido juntos Bs. 6 000 por un año. El 1º ha gastado los 2/3 de lo que ha ganado; el 2º, los 3/4; a los dos juntos les queda todavía Bs. 1 965. Calcúlese lo que cada uno gana en un año.

1222. Un castillo sitiado está defendido por 500 hombres que tienen víveres para 90 días; después de 25 días de sitio ejecutan una salida que no tiene buen éxito, y en la cual las bajas alcanzan el número de 75. Pensando entonces que el sitio durará 100 días, ¿qué habrá de ser en adelante la ración de cada soldado?

1223. Dionisio reparte entre sus condiscípulos, y sin dividirlas, cierto número de naranjas, del modo siguiente: al 1º da 1/4 del número total menos 1/4 de naranja; al 2º da 1/7 del número total más 3/7 de naranja; al 3º, 1/6 del número total menos 1/6 de naranja; entonces le quedan 11 naranjas. ¿Cuántas tenía Dionisio al principio, y cuántas ha recibido cada alumno?

1224. Cirilo reparte entre tres pobres, y sin cortarlas, una cesta de manzanas; al 1º da 1/4 del número más 3/4 de manzana; al 2º los 2/5 del número más 2/5 de manzana; el 3º recibe las dos manzanas que quedan. Dígase el número de manzanas repartidas y cuántas recibió cada pobre.

1225. Gabriel ha comprado dos caballos por Bs. 980; sabiendo que el precio del primero es los 3/4 del precio del segundo, dígase su precio respectivo.

1226. Una casa se puede vender por Bs. 10 000; pero esta suma no representa más que los 4/5 del valor que tendría la casa si fuese restaurada. Sabiendo que los gastos para ello alcanzan Bs. 1 500, dígase si hay ventaja en hacerlos.

1227. Dígase la fracción que se debe restar de 37/48 para que la fracción que resulte no sea más que los 2/15 de la mitad de 3/4.

1228. ¿Qué hora es cuando las dos manecillas de un reloj están superpuestas entre las 8 y las 9?

1229. Los 3/4 del menor de dos números igualan a 3/4, y los 3/4 de su diferencia igualan a 3/14. Calcúlese el número mayor.

1230. Un viajero habiendo perdido la diligencia, toma un automóvil que recorre 3 leguas 1 /7 por hora, mientras que la diligencia no recorre más que 1 legua 3 /5 en 3 /4 de hora. Llevando ésta 8 km. 1 /3 de adelanto, calcúlese el tiempo que necesitará el automóvil para alcanzarla. Se tomará la legua igual a 4 km.

1231. Después de haber perdido sucesivamente los 3/8 de su hacienda, 1 /9 del resto y los 5 /12 del nuevo resto, una persona hereda Bs. 60 800; de este modo, la pérdida se halla reducida a la mitad de la fortuna primitiva. ¿Cuál era aquella fortuna?

1232. Una suma se reparte entre 3 personas del modo siguiente: la parte de la 1ª es los 2 /5 de la segunda; la parte de la 3ª es 1 /4 del conjunto de las partes de las otras dos, y es igual a Bs. 2 000. Calcúlese la suma repartida y las partes.

1233. Un grupo de obreros, compuesto de 15 hombres, 12 mujeres y 8 niños trabajando juntos, ha recibido Bs. 968. Repartir esta suma entre los hombres, las mujeres y los niños, sabiendo que la parte de un niño es los 1 /12 de la de una mujer; y la de una mujer, los 12 /25 de la parte de un hombre y de un niño juntos.

1234. El tiempo de la infancia de Diofante representa la sexta parte de su vida; el de la adolescencia, la duodécima parte; el de su matrimonio, la séptima parte más 5 años antes de tener un hijo a quien sobrevivió de 4 años. Sabiendo que este hijo no alcanzó sino la mitad de la edad que alcanzó su padre, dígase la edad que tenía Diofante cuando murió.

1235. Tres personas han heredado una suma: la herencia de la 1ª es de Bs. 7 500, y esta suma es los 4 /11 de la segunda; lo que cabe a la 3ª es los 5 /6 de lo que tienen juntas las dos primeras. Calcular la suma que le sale a la 2ª persona y a la 3ª.

1236. Dos personas tienen juntas Bs. 18 300; habiendo gastado la primera los 2 /5 de su fortuna, y la segunda los 3 /7 de la suya, queda a la primera dos veces más que a la segunda. Dígase lo que tenía cada una al principio.

SISTEMA MÉTRICO

1237. La distancia recorrida por un biciclista es tal que la rueda menor ha dado 1 500 vueltas más que la mayor. Sabiendo que las circunferencias de las ruedas son entre sí como 5 es a 6, y que la circunferencia de la menor tiene 1 m. 2 /3, calcúlese la distancia recorrida.

1238. Dos personas A y B separadas por una distancia de 3 600 m. salen a la misma hora y van al encuentro una de otra. El encuentro ocurre a los 2 000 m. de uno de los puntos de partida. Si, con las mismas velocidades, la persona que anda más despacio hubiera salido 6 minutos antes que la otra, el encuentro habría ocurrido en el punto medio del camino. Dígase, en metros y por minuto, el camino recorrido por cada persona.

1239. Una pieza de género se compra por Bs. 404,70; al revender 1/3 al precio de compra, y lo demás con un beneficio de Bs. 1,25 por metro, resulta una suma de Bs. 440,20. Calcúlese la longitud de la pieza y el precio de compra de un metro.

1240. Bernardo recorre, a bicicleta y por día, 96 km., término medio; habiéndole sucedido una desgracia, ha tenido que acabar su viaje a pie, recorriendo sólo 32 km. por día, y sin embargo ha llegado al término en el tiempo de que disponía. ¿Cuál es el espacio recorrido, sabiendo que si hubiera ido sólo a bicicleta habría podido recorrer 384 km. más que el número que debía recorrer, y que si, al contrario, hubiera andado a pie se habría quedado a 576 km. atrás del término?

1241. Para ir de una ciudad a otra, las ruedas menores de un coche dan 1 200 vueltas más que las mayores. Siendo las circunferencia de las ruedas respectivamente de 2m6 y de 3m4, ¿cuál es la distancia de las dos ciudades?

1242. Un terreno medido con un metro al cual faltaban 2 cm., se encontró de 125 áreas. Dígase en m² la superficie exacta.

1243. Una persona ha comprado 25 m. de género a Bs. 2,25 el metro; pero el metro con que se midió se halló de sólo 988 mm. Calcúlese la pérdida de esta persona, en género y en dinero.

1244. Un sastre compró una pieza de género a Bs. 5,50 el metro; pero al llegar a su casa halló que el metro con que se había medido era demasiado corto. Entonces sacó la cuenta, y en vez de pagar Bs. 495, pagó sólo Bs. 475,20. Dígase cuánto faltaba al metro.

1245. Una persona compra dos propiedades: la superficie de la 1ª es a la de la 2ª como 7 es a 21; pero 25 m² de la 1ª valen tanto como un área de la 2ª. Calcúlese el precio del área de cada propiedad, sabiendo que su superficie total es de 4.ha 32ª 16.ca, y que se han comprado juntas en Bs. 15.125,60.

1246. Una propiedad se dividió en tres partes iguales: la 1ª comprende una porción de 25m60 por 37m75; la 2ª otra porción de 17m20 por 35m5, más otra porción de un campo; la 3ª comprende lo que quedó de este último campo. Dígase la superficie de éste.

1247. Por una propiedad se pagó Bs. 185 480, a razón de Bs. 2 la centiárea. La forma de la propiedad es la de un rectángulo en el cual una de las dimensiones es igual a los 2/7 y medio de un kilómetro. ¿Cuáles son en decámetros las dos dimensiones?

1248. ¿A cuánto alcanzó el precio de un campo de 50 áreas 75 centiáreas, sabiendo que los 2/5 se pagaron a razón de Bs. 12,50 el área, y lo demás a Bs. 1,50 los 10 m²?

1249. ¿Qué superficie es preciso sembrar para cosechar el trigo que necesita un individuo en un año (no bisiesto)? Sábese que come, término medio, 3 kg. de pan cada 5 días, que 125 kg. de harina dan 150 kg. de pan, que 100 kg. de trigo dan 82 kg. de harina, que un hectolitro de harina pesa 75 kg., y que se cosechan 25 hl. de trigo por hectárea.

1250. Admítese que la remolacha da un 7 % de su peso de azúcar, y que un m² de terreno produce, término medio, 3 kg., 750 de remolacha. Pagándose la remolacha Bs. 54,70 los 1 000 kg., calcúlese: 1° la superficie de terreno que sería preciso sembrar para suministrar a una fábrica la remolacha necesaria para la producción anual de 12 125 quintales métricos de azúcar; 2° ¿cuánto valdría la remolacha obtenida?

1251. Siete hectáreas 9 áreas de viña valen tanto como 15 ha. 33 a. de pradera, y 28 ha. de pradera valen tanto como 62 ha. 65 a. de bosque. ¿Cuál es el precio de una hectárea de bosque, sabiendo que la hectárea de viña vale Bs. 1 300?

1252. El hectolitro de patatas pesa 80 kg., más o menos, y el 1/2 quintal vale Bs. 3,25. Calcúlese el precio de la cosecha de un campo de 1^{ha} 37^{a} 83^{ca}, sabiendo que la cosecha ha resultado de 104 litros 65 por área.

1253. Los 3/5 de un campo están sembrados de maíz, 1/3 de patatas, y lo demás de viña; la segunda parte tiene 16 áreas, 6 centiáreas más que la tercera. Calcúlese la extensión de cada una de estas partes.

1254. Un patio rectangular tiene 15m6 de longitud, y su latitud es los 2/3 de este número. Si se lo quiere cubrir con piedras cuadradas de 0m18 de lado, dígase el gasto, sabiendo que el millar de estas piedras vale Bs. 140, y que el trabajo cuesta Bs. 5,15 el m².

1255. Un campo rectangular tiene 239m07 de largo por 174m08 de ancho. Pregúntase: 1° la superficie de este campo; 2° el gasto para esparcir 3 litros 1/2 de cal por metro cuadrado, si la cal vale Bs. 3,75 el cm^3.

1256. En el supuesto de que un aula debe tener 1m²25 por alumno, calcúlese de cuánto se debe aumentar la longitud de una sala de clase de 46m²90 de superficie y cuya latitud es de 6m50, para dar cabida a 50 alumnos.

1257. Feliciano compra dos terrenos rectangulares: el 1° que tiene 95 m. de longitud se compró por Bs. 7 125, a razón de Bs. 300 el área; el 2° tiene 57 m. de largo, y su precio es igual a los 24/25 del 1°. Sabiendo que a superficie igual se habría pagado el segundo terreno dos veces tanto como el primero, calcúlese la latitud de cada uno.

1258. Un jardín rectangular tiene 12m50 de largo. Dos pasillos perpendiculares entre sí y de 1m10 de ancho, el uno en dirección del largo, y el otro, del ancho, tienen juntos 21m²56 de superficie. Calcúlese el precio del jardín, descontando la superficie de los pasillos, a razón de Bs. 5 000 la hectárea.

1259. Una persona compra una alfombra rectangular cuyo ancho es los 3/5 de largo, y quiere ponerle un galón que vale Bs. 1,25 el metro. Sabiendo que el galón representa los 2/7 del precio de compra de la alfombra, y que ésta concluída cuesta Bs. 20,25, calcúlense las dimensiones.

1260. Un tapete tiene 8m50 de contorno, y su largo pasa al ancho en 0m75. Dígase el precio del forro, si el género empleado tiene 0m90 de ancho y vale Bs. 0,85 el metro lineal.

1261. Un jardín rectangular tiene 64 m. de longitud por 22 m. de latitud; a 2 m. del borde, se planta una línea de rosales; otras dos líneas se cruzan en medio del jardín. Si el espacio que media entre dos rosales es de 1m50, ¿cuánto costarán estos rosales a Bs. 8 la docena?

1262. Un campo rectangular cuya latitud es los 7/11 de la longitud, se compra por Bs. 5 el área. El nuevo propietario lo hace cercar con una palizada a razón de Bs. 1,15 por metro y que importa Bs. 621. ¿A cómo tiene que vender este campo para ganar un 20 % sobre todo lo que ha gastado?

1263. Un jardín rectangular de 50 m. de longitud pasa de 257 m^2 otro que tiene la misma forma, de 42 m de longitud y cuya latitud pasa de 1m50 la del primero. Calcúlese la latitud de cada uno de estos jardines.

1264. Con Bs. 8 756 se han comprado tres terrenos que tienen de superficie juntos 2 170 m², y el precio del metro es igual para los tres. Calcúlese el precio de cada terreno, sabiendo que el primero tiene cuatro áreas más que el segundo, y que la superficie del segundo es los 3/4 de la del tercero.

1265. Disponiendo cierto número de árboles en cuadrado, de modo que resulten hileras paralelas y equidistantes en ambos sentidos, sobran 92 árboles; poniendo un árbol más en cada hilera, de modo que resulte siempre un cuadrado, faltan 37 árboles para acabar el cuadrado. ¿Cuántos árboles se tiene?

1266. Un terreno cuya forma es la de un trapecio vale Bs. 450,45 a Bs. 3,50 el área; la altura del trapecio es de 104 metros. Calcúlense las bases, sabiendo que su relación es igual a 4/7.

1267. Un prado que proporciona anualmente 79.488 kg. de heno tiene la forma de un trapecio cuya altura es de 480 m. Sábese que la suma de las bases es igual a 690 m., y que la base mayor pasa a la menor en 510 m. Calcular: 1° la producción de cada área del prado; 2° a cómo sería preciso vender la hectárea para obtener la suma necesaria para el pago de otro prado de forma triangular cuya base es de 1 260 m., y la altura, de 70 m., sabiendo que el precio del área de este prado es tal, que aumentado de su mitad, vale Bs. 69.

1268. Dos vasos cilíndricos tienen: el mayor 1 metro de profundidad, y el menor, 1/2 metro. En el supuesto de que el volumen del vaso menor es de 1/8 del volumen del mayor, y que la diferencia de capacidad de los dos vasos es de 27 lt. 489, calcúlense los radios de sus bases.

1269. Un jardín rectangular tiene 350 m. de perímetro, y la latitud es los 2/5 de la longitud. En el interior y siguiendo el límite, hay un pasillo de 1m50 de ancho. Otros dos pasillos de igual anchura se cruzan perpendicularmente, el uno en dirección de la longitud, el otro en dirección de la latitud. En estos pasillos se esparcen uniformemente 61m³ 380 de arena. Dígase cuál será el espesor de la capa.

1270. ¿De cuánto hay que levantar el techo de un aula que mide 7m25 de longitud, 4m9 de latitud, por 3m80 de alto, si el número de alumnos es de 30, y se desea que cada uno tenga 5m³ de aire?

1271. Un aljibe rectangular tiene 5m20 de longitud y 3m50 de latitud. Calcúlese su profundidad, sabiendo que para llenarlo es preciso abrir durante 9 horas 6 min. un grifo que da 7 425 litros de agua cada 2 horas 3/4.

1272. En una pila cuyo ancho es los 2/5 de largo, se vierte agua, hasta 0m28 de alto. ¿Cuál es el largo y el ancho, sabiendo que entonces la pila contiene 2 940 litros?

1273. Un depósito de agua de forma cilíndrica tiene 1m06 de profundidad y 7m42 de diámetro. Calcúlese la superficie interior, junto con la del fondo.

1274. Se cava un pozo de 18 m. de profundidad y de 1m75 de diámetro. La tierra que se extrae pesa, término medio, 3.280 kg. el m^3. Dígase el peso de la tierra extraída.

1275. ¿Cuál es el precio de 4.000 m. de alambre de 0m0018 de diámetro a razón de Bs. 4,90 los 5 kg.? La densidad del hierro es de 7,8.

1276. Fabriciano ha comprado vino por Bs. 1 580 en Bs. 147 los 215 litros. Dígase cuántas botellas de 0 lt. 85 se podrán llenar, y lo que sobra.

1277. Un vaso vacío pesa 1 kg. 320; lleno de agua pesa 5 kg. 374. Dígase su capacidad, y lo que pesaría lleno de un líquido de 0,8 de densidad.

1278. Un vaso lleno de agua pesa 3 550 gr.; lleno de balas metálicas pesó 11 kg. 520. Si, lleno de estas balas, se vierte agua para llenar los vacíos, el vaso pesa entonces 12 500 gr. Dígase el peso del vaso vacío, si la densidad del metal es de 8,15.

1279. Una ampolla de vidrio, llena de mercurio, pesa 1 kg. 59 422; vacía pesa 56 gr. 545. Siendo la densidad del mercurio 13,596, calcúlese en menos de un mm^3, la capacidad de esta ampolla.

1280. Dígase la cabida de un vaso, sabiendo que el aceite que lo llena hasta los 5/7 pesa tanto como la moneda de plata que vale 385,50 pts. El hectolitro de aceite pesa 90 kg.

1281. Un vaso lleno de agua pura a 4° pesa 9 kg. 68; lleno de un líquido cuyo peso es los 0,91 del peso del agua, pesa 9 kg. 266. Pregúntase: 1° su capacidad, 2° su peso cuando vacío.

1282. Con 492 gr. de ácido sulfúrico y 345 gr. de zinc se fabrican 10 gr. de hidrógeno. Calcúlese cuánto ácido se necesitará para llenar de gas un globo de 100 m^3, en el supuesto de que 1 dm^3 de aire pesa 1 gr. 3, y que la densidad del hidrógeno, respecto al aire, es de 0,069.

1283. Se reparte una suma entre cuatro personas: la 1ª recibe los 3/10; la 2ª, 1/4; la 3ª, 1/3, y la 4ª los 4 998 Bs. que sobran. Calcúlese: 1° la suma repartida; 2° su peso, sabiendo que los 3/4 se componen de monedas de oro, y el último cuarto de monedas de plata.

1284. Un platero tiene 100 Bs. en monedas de 1 y de 2 Bs. ¿Cuál es el peso de metal fino que se debe añadir para que resulte una liga con la ley de 0,9, y cuántas monedas de 5 Bs. se podrán acuñar con la liga obtenida?

1285. Un lingote de oro pesa 250 gr.; si se le añadiese 14 gr. 528 de metal fino, resultaría un lingote con 0,9 de ley. Calcúlese la ley del primero.

1286. ¿Cuál es la suma en oro que encierra dos veces más cobre que 420 Bs. en plata? Ley común: 0,9.

1287. Dos lingotes de oro tienen de ley respectivamente 0,900 y 0,820, y pesan 12 kg. 7, y 3 kg. 5. Después de haberlos fundido juntos, se quiere obtener un nuevo lingote con 0,850 de ley. Dígase la cantidad de oro o de cobre que se ha de añadir.

1288. Un lingote de oro de 1 348 gr. contiene 147 gr. de cobre. Pregúntase el número de gramos de oro puro, que se le debe añadir para obtener la ley 0,9 y cuántas monedas de 5 bolívares se podrán acuñar con este nuevo lingote; hállese también la ley del primero.

1289. ¿Cuál es la suma: 1° en monedas de oro; 2° en monedas de plata, cuyo peso es igual al de 3 lit. 25 de agua tomada en las condiciones adoptadas para la determinación del gramo? ¿Cuál es el peso del oro puro contenido en la primera, y el de la plata pura contenida en la segunda, si la ley es de 0,835?

1290. Se funde un dm^3 de plata con un volumen de cobre suficiente para formar una liga de 0,9 de ley. Calcular, en centímetros cúbicos, el volumen de este cobre, sabiendo que 1 cm^3 de plata pesa 10 gr. 47, y 1 cm^3 de cobre, 8 gr. 85.

1291 En uno de los platillos de una balanza se pone un vaso que pesa vacío 1 kg. 875, y en él se vierte 1 lit. 5 de agua. En el otro platillo se ponen 400 Bs. en plata. ¿Qué suma en bronce hay que añadir para establecer el equilibrio?

1292. Lleno de vino, un vaso equilibra una suma de 7,754 Bs. compuesta de 7,750 Bs. en oro y 4 Bs. en plata. Lleno de aceite, el mismo vaso pesa 2 kg. 44. Sabiendo que un litro de vino pesa 950 gramos, y un litro de aceite 900 gramos, calcúlese la capacidad del vaso y el peso del vino y del aceite que puede caber en él.

1293. Una barra de plata pura pesa 2 kg. 468. Con ella se quiere acuñar el mismo número de monedas de 5 y de 2 Bs. Calcular el peso de cobre que se debe añadir, y el valor total de las monedas acuñadas.

NÚMEROS COMPLEJOS

1294. Un ciclista ha ido y vuelto de A a B por el mismo camino. Al salir a las 6 y 5 min. de la mañana, habría vuelto a las 11 y 26 min. Sabiendo que en la ida ha andado con la velocidad de 18 km. por hora, y en la vuelta con la velocidad de 16 km., sabiendo además que se ha parado 1/4 de hora en B, calcúlese la distancia de A a B.

1295. Un viajero anda 6 km. por hora, y otro 6 km. en 80 minutos; ¿cuál de los dos anda con mayor velocidad, y cuántos kilómetros más que el otro recorre en 2 h. 30 m.?

1296. Un posta, recorriendo 10 km. 1/2 por hora, ha salido hace ya 3 horas, cuando en su persecución sale otro que recorre 13 km. por hora; ¿cuántas horas y minutos necesitará el segundo para alcanzar al primero?

1297. Dos trenes salen de Madrid, el uno a las 6 de la mañana, y el otro a las 7 y 16 min. Sabiendo que el 1° anda 32 km. por hora, y el 2° 40 km., dígase a qué hora y a qué distancia de Madrid el segundo tren alcanzará al primero.

1298. Fulgencio sale a pie a las 5 y 50 min. de la madrugada, andando 5800 m. por hora; 2 h. y 5 min. más tarde, a caballo, sale en pos de él, Fernando, que recorre 10 020 m. por hora. ¿A qué distancia del punto de partida y a qué hora Fernando alcanzará a Fulgencio?

1299. Un jinete y un ciclista van de A a B. El primero sale 50 min. antes que el segundo y anda 10 km. por hora. El ciclista anda 12 km. por hora y llega 5 min. después del jinete. Dígase la distancia de las ciudades A y B.

1300. Dos jinetes andan en un hipódromo de 900 m. de circunferencia, y en el mismo sentido. El 1° que tiene 18 m. de adelanto anda 2m90 por segundo, y el 2° 2m54. Calcular el tiempo que transcurrirá hasta su encuentro, y la distancia que cada jinete habrá recorrido.

1301. Un reloj que adelanta 3 min. por día, señala la hora exacta a mediodía. Dígase la hora exacta que será cuando este reloj señale las 7 y 12 min. de la tarde.

1302. Un reloj que adelanta 11 min. en 24 horas señala la hora exacta a mediodía. ¿Cuál será la hora verdadera cuando, el día siguiente, señale las 7 a. m.?

1303. Un reloj que adelanta 5 min. en 24 h. señala la hora verdadera el lunes a mediodía. Dígase la hora exacta que será el domingo siguiente cuando señale las 10 y 35 min. a. m.

1304. Dígase el ángulo que forman las dos manecillas de un reloj, cuando éste señala las 12 y 20 min.

1305. Siendo la suma de los ángulos de un polígono igual a tantas veces dos rectos como lados, menos dos, tiene este polígono, calcúlese el valor de un ángulo de un polígono de 7 lados, y cuyos ángulos son iguales entre sí.

1306. Un hombre recorre 10 metros, dando 15 pasos. ¿Cuántos kilómetros recorre en una hora, si da 100 pasos por minuto?

INTERÉS — DESCUENTO Y REGLAS VARIAS

1307. Una persona impone Bs. 60 000, parte al 4,5 % y parte al 5,25 %, y resulta así un interés total de Bs. 2 880. ¿Qué parte del capital fué impuesta a cada uno de los tantos señalados?

1308. Carlos impone los 4/7 de su hacienda al 4 %, y el resto al 5 %, y resulta un interés anual de Bs. 3 100. Dígase cuál es la suma impuesta a cada uno de los tantos.

1309. Un capital ha suministrado tres imposiciones: los 2/3 al 4 %, 1/6 al 4 1/2 %, y el resto al 5 %. Al cabo de 16 meses, el capital, junto con los intereses, vale Bs. 38 991. Calcular: 1° el capital primitivo, 2° a qué tanto hubiera sido preciso colocarlo todo para tener el mismo interés en el mismo tiempo.

1310. Un capital se impone del modo siguiente: 1/3 al 5 1/4 %, los 2/5 al 6 1/2 %, los 3/4 del resto al 4 1/2 %, y el último resto al 3 2/3 %. Siendo el interés anual de Bs. 5 460, calcúlese el capital impuesto.

1311. Una persona dividió su capital en 3 partes. Colocó la 1ª al 4,5 % por 3 años 8 meses; la 2ª, que es doble de la 1ª, la colocó al 5 % por 3 años 6 meses; la 3ª, que es triple de la segunda, se impuso al 4 % por 3 años 9 meses. Siendo el total de los intereses igual a Bs. 14 150, calcúlese el capital entero y cada una de las partes.

1312. Una persona impone cierto capital al 5 %. Al cabo de 2 años, saca los 2/5; 6 meses después saca los 3/10, y el resto al fin del tercer año. Siendo la suma de los intereses igual a Bs. 11 243, calcular la suma impuesta.

1313. Se impone la mitad de una suma al 4 %, y 5 meses más tarde un 1/3 del resto al 4,5 %. Al cabo de 2 años, contados desde la primera imposición, los intereses juntos alcanzan a Bs. 1 867,50. Calcúlese la suma total primitiva.

1314. Marcelo ha impuesto al 5 % cierto capital por 2 años; en seguida saca 1/5; 9 meses después, saca 1/10 del resto y 3 meses más tarde el último resto. A cada reducción de su capital, y cuando lo ha sacado por completo, todos los intereses los ha repartido entre los pobres, que han recibido Bs. 13 900 en 3 años. Determínese el capital primitivo.

1315. Dos personas han impuesto su fortuna: la 1ª al 5 %; la 2ª al 6 %. El interés de la 2ª pasa al de la 1ª en Bs. 1 559,60, y su fortuna pasa a la de la 1ª en Bs. 22 120. Calcular las fortunas respectivas.

1316. Dos comerciantes han impuesto juntos Bs. 10.000, el 1° al 5 % durante 6 meses, y el 2° al 4 % durante 9 meses. Calcúlese el interés de cada uno, si el del primero es los 5/24 del segundo; calcúlese también la suma impuesta por cada comerciante.

1317. Una persona impone los 3/7 de su fortuna al 5 %, y divide el resto en dos partes iguales; la 1ª, la impone al 6 %, y la 2ª al 3 %. Así resulta un interés total de 18 600 francos. Calcular la suma de que disponía esta persona, y valuarla en moneda inglesa, sabiendo que la libra esterlina vale 25,22 francos o 20 chelines, y el chelín, 12 peniques.

1318. Un capital impuesto a cierto tanto y durante 2 años y 6 meses, valdría Bs. 44 000, con sus intereses. Después de 3 años 1/4, valdría Bs. 45 200. ¿Cuál es el capital impuesto, y a qué tanto?

1319. Un capital aumentado con los intereses que ha producido en 10 meses, es igual a Bs. 29 760. El mismo capital, disminuído en sus intereses en 17 meses y al mismo tanto, sería igual a Bs. 27 168. ¿Cuáles son el capital y el tanto?

1320. Calixto presta una suma por 8 meses al 3 1/2 %; entonces recibe Bs. 13 350 por el capital y los intereses juntos. ¿Cuál es la suma prestada, y a qué tanto habría sido colocada, si Calixto hubiera recibido, al cabo de 8 meses, Bs. 15 400 en vez de Bs. 15 350?

1321. Patricio impone, al principio del año, Bs. 6 000 a cierto tanto; 3 meses después impone Bs. 2 500 a un tanto que pasa de Bs. 2 el tanto precedente. Dígase el primer tanto, sabiendo que al fin del año los intereses alcanzan Bs. 352,50.

1322. Cierto capital se impuso por 30 meses, y resultaron Bs. 43 000 por el capital junto con los 3/4 de los intereses. Si hubiera impuesto este capital durante 3 años y 3 meses, el interés habría llegado a ser los 13/100 del capital. Calcular el capital y el tanto.

1323. La diferencia entre la fortuna, de dos personas es de Bs. 8 000. La 1ª impone su dinero al 4 %, y la 2ª al 5 %. ¿Cuál es la fortuna de cada persona, sabiendo que los intereses resultan iguales?

1324. Dos empleados, teniendo que calcular el interés de un capital al 5 % y por 75 días, cuentan el año el uno de 360 días, y el otro de 365. Así resulta una diferencia de Bs. 7,50. Calcúlese ese capital.

1325. Feliciano impone su fortuna, parte al 5 % y parte al 4 %, y resulta un interés anual de Bs. 3 700; el interés sería de Bs. 3 860 si la suma impuesta al 4 % lo hubiese sido al 5 % y recíprocamente. Calcular el capital y las dos partes.

1326. Braulio impone un capital, parte al 5 % y parte al 4 %, y resulta un interés de Bs. 1 980. Si la parte impuesta al 5 % lo hubiera sido al 4 % y recíprocamente, el interés se disminuiría de Bs. 90. ¿Cuáles son la sumas impuestas?

1327. Dos capitales han sido impuestos durante 2 meses, el uno al 3 %, y el otro al 5 %, y la suma de los intereses es de Bs. 106. Si los hubieran impuesto durante 4 meses, el 1º al 5 % y el 2º al 3 %, la suma de los intereses habría sido de Bs. 204. Calcular los dos capitales.

1328. Se han impuesto a tantos diferentes, dos sumas proporcionales a 9 y a 10. Los tantos son tales que la 1ª suma impuesta durante 3 meses y 9 días da un interés igual a sus 11/800, y la 2ª en 4 meses y 8 días produce un interés igual a sus 2/125. Además, las dos sumas impuestas durante 36 días, la 1ª al tanto de la 2ª y recíprocamente, han dado Bs. 36,20 de interés total, y tal que el de la 2ª suma pasa al de la 1ª en Bs. 3,80. Calcular: 1º el tanto a que cada suma se impuso la primera vez; 2º las sumas impuestas; 3º los intereses dados en la primera imposición.

1329. Antonio ha comprado un mueble por Bs. 600. ¿A cómo hay que venderlo para que, pagando al contado, se pueda conceder un 10 % de descuento, ganando todavía un 20 % sobre el precio de compra?

1330. Un negociante compra una mercadería y la revende con un beneficio de 8 % sobre el precio de compra. Si ganara 8 % sobre el precio de venta, resultaría un beneficio de Bs. 8 más. Hállese el precio de compra y el precio de venta.

1331. Un librero compra 8 docenas de libros por Bs. 3,50 cada uno. Pagando al contado le hacen una rebaja de 3 % y le dan gratuitamente un volumen más por docena. ¿A cómo tiene que vender cada libro para tener Bs. 98 de beneficio sobre el todo?

1332. Un pagaré pagadero el 8 de noviembre, se descuenta el 16 de junio precedente al 5,5 %. A más del descuento, el banquero cobra 1/4 % de comisión sobre el valor nominal del pagaré, y Bs. 8,50 por varios gastos. Si el portador ha recibido Bs. 715,35, dígase el valor nominal del pagaré, habiendo contado los meses con su número de días.

1333. Se presentan a un banquero dos pagarés a 50 días el uno, y a 120 el otro. El banquero cobra un 6 % de descuento que representa una suma de Bs. 260. Si los pagarés hubieran sido negociados 20 días más tarde, el banquero habría cobrado Bs. 66 2/3 menos. Calcúlese el valor nominal de cada uno de los pagarés.

1334. Un terreno rectangular que tiene 354m20 de longitud se vende por Bs. 15,50 el área, y se paga con un pagaré a 80 días. El vendedor lo negocia el mismo día de la venta a un banquero que le remite Bs. 3 541 después de cobrar un 4 1/2 %. ¿Cuál es la superficie del terreno, y cuál la latitud?

1335. Dos personas entran en un bando, la primera con una letra de Bs. 1 500 pagadera dentro de 6 meses, la segunda con una letra de Bs. 1 470 pagadera dentro de 10 días; el banquero descuenta las dos letras a un mismo tiempo y remite a la segunda persona Bs. 12,55 más que a la primera. ¿Cuál es el tanto?

1336. Dos comerciantes que tienen cada uno una factura, la 1ª de Bs. 980 a 20 días; la 2ª de Bs. 1 000 a 255 días, las truecan con la condición de que la 2ª se aumentará de Bs. 12,70. Dígase el tanto del descuento.

1337. Dos comerciantes entran en un banco, el 1° con una letra de Bs. 1 200 pagadera dentro de 1 año, el 2° con un pagaré de Bs. 1 000 a 6 meses. El banquero descuenta los dos efectos al mismo tanto y remite a la 1ª persona Bs. 165 más que a la 2ª. Calcúlese el tanto.

1338. ¿Cuál ha de ser el valor nominal de una letra pagadera al cabo de 162 días, para que la diferencia entre el descuento racional y el descuento comercial, al 6 %, sea de Bs. 4,05 año de 365 días?

1339. Una suma de Bs. 2 100 se reparte entre 3 personas: la parte de la primera debe ser los 2/3 de la parte de la segunda, la parte de la segunda, los 4/5 de la parte de la tercera. ¿Cuánto le corresponde a cada persona?

1340. Dos personas tienen juntas Bs. 167 280: la primera que impone su dinero al 4 % durante 3 meses recibe un interés doble del que tendría la segunda imponiendo el suyo al 5 % durante 7 meses. Dígase la suma que le corresponde a cada persona.

1341. En una fábrica se emplean 12 hombres, 7 mujeres, y 5 niños; el jornal de los hombres es de Bs. 3,40; el de las mujeres, de Bs. 1,80; y el de los niños, de Bs. 1,10. El patrón se propone repartirles Bs. 1 200, proporcionalmente a sus jornales. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno de sus empleados?

1342. Una hacienda se vende por Bs. 200 000, y esta suma se reparte entre 3 acreedores a quienes se deben Bs. 100 000, Bs. 150 000 y Bs. 250 000. Siendo los gastos de venta, etc., de un 15 % del precio de venta, ¿cuánto recibirá cada acreedor?

1343. Se han trocado 5 carneros por burros, 10 burros por 3 bueyes, 12 bueyes por 5 caballos y 7 caballos por 8 camellos que valen cada uno Bs. 315. ¿Cuál es el precio de un carnero?

1344. A un lingote de oro que tiene 8 cm^3 de volumen, se le quiere ligar la cantidad de plata necesaria para que 1 cm^3 de la liga pese 12 gr. 50. Calcular el volumen de esta plata, si un cm^3 pesa 10 gr. 40, y 1 cm^3 de oro pesa 19 gr. 20.

1345. Tres hortelanos tienen que repartirse Bs. 950,85 de gastos para la construcción de un canal de riego de que aprovechan desigualmente: el 1° riega 1 ha. 45 a. y tiene derecho a 8 días mensuales de riego; el 2° riega 69 áreas y tiene derecho a 12 días mensuales de riego; el 3° riega 92 a. 65 ca. durante el resto del mes. Calcular lo que cada uno tendrá que pagar.

1346. Una persona hace repartir Bs. 300 entre 3 familias pobres, proporcionalmente al número de hijos de cada familia. Si la 1ª tiene 3 hijos; la 2ª, 4, y la 3ª, 5, dígase lo que le corresponde a cada una.

1347. Tres personas que tienen que recorrer 65 km. se entienden para alquilar un coche con otras dos que van a 23 km., siguiendo el mismo camino. Si se paga por el coche Bs. 28,50, dígase lo que paga cada persona, proporcionalmente a la distancia recorrida.

1348. Cinco empresarios se han asociado para la construcción de un ferrocarril: el 1° construye 1 /6; el 2°, 1 /8; el 3° construye la media aritmética entre los dos primeros; el 4°, la media aritmética entre los 3 primeros; y el 5° construye el resto, esto es, 6 400 metros. Siendo los gastos de Bs. 11 200 000 calcúlese el gasto de cada empresario y la longitud de la vía férrea.

1349. Repartir Bs. 9 400 entre tres personas, e inversamente a sus edades: la primera tiene 30 años; la 2ª, 40, y la 3ª, 50.

1350. Repartir Bs. 20 500 entre tres personas de modo que la parte de la 1ª sea a la de la 2ª como es 2 a 3; y que la de la 2ª sea a la de la 3ª como 4 es a 7.

1351. Un capital de Bs. 36 000 se ha dividido en 3 partes: la relación de la 1ª a la 2ª es 7/4; la de la 2ª a la 3ª, de 20/17. Las tres sumas se han impuesto a interés simple; la 1ª durante 6 meses, la 2ª durante 18 meses, la 3ª durante 2 años, y el total de los intereses es igual a Bs. 1 426,25. Calcular: 1º lo que representa cada parte; 2º el tanto de las imposiciones.

1352. Dos personas se han asociado para formar un capital: la 1ª ha puesto Bs. 360 por 2 años, y la 2ª, Bs. 400 por 18 meses. Siendo el beneficio de Bs. 132, ¿cuánto le toca a cada persona?

1353. En una empresa 3 socios han ganado Bs. 407,10. El primero, que había puesto Bs. 8 400 por 64 días, ha sacado Bs. 8 534,40, capital y ganancia juntos. La imposición del segundo fué por 84 días, y la del tercero, igual a los 3/4 de la del segundo, por 90 días. Calcular la suma impuesta por el segundo y por el tercero, y también la ganancia de cada uno de ellos.

1354. Dos personas se han asociado para una empresa en la cual han puesto: la 1ª Bs. 45 000, y la 2ª Bs. 32 000. Al cabo de 9 meses una tercera persona ha puesto en la misma empresa Bs. 25 000. Los trabajos habiendo durado 18 meses en todo, han producido una ganancia de Bs. 14 320, pregúntase: 1º la ganancia de cada uno de los socios, sabiendo que el primero toma, ante todo, los 2/5 del beneficio total como remuneración por la dirección de los trabajos; 2º el tanto de la imposición del dinero en esta empresa.

1355. Leoncio ha comprado mercaderías por Bs. 800 pagaderas: 1/2 al cabo de 3 meses, 1/4 dentro de 4 meses, y el resto dentro de 2 meses. Deseando hacer un solo pago, ¿cuándo debe verificarlo?

1356. Un comerciante suscribe dos pagarés, el uno de Bs. 1 500 pagadero dentro de 30 días, el otro de Bs. 2 000 pagadero dentro de 90 días. Le conceden reemplazarlos por uno solo de valor igual a la suma de los otros dos. Pregúntase el vencimiento de este pagaré.

1357. Celestino debía Bs. 200 pagaderos dentro de 2 meses; Bs. 400, dentro de 3 meses, y Bs. 500 dentro de 4 meses. Pagando Bs. 600 al cabo de un mes, ¿cuánto tiempo puede guardar el resto?

1358. Julián reemplaza por un pagaré único de Bs. 1 300, pagadero dentro de 48 días, 3 pagarés: el uno de Bs. 500, a 5 días; el 2º de Bs. 300, a 60 días; y el 3º de Bs. 500. Siendo el descuento comercial de 6 %, calcular el vencimiento del último pagaré.

1359. El 4 de junio, un deudor reemplaza un pagaré de Bs. 540 pagadero el 5 de agosto, y otro de Bs. 720 pagadero el 15 de agosto, por uno solo pagadero el 4 de septiembre del mismo año, y de un valor de Bs. 1 264,25. Dígase a qué tanto el acreedor presta su dinero.

1360. Silvio debe Bs. 1 820 pagaderos dentro de 6 meses, Bs. 980 dentro de 4 meses, y Bs. 1 200, dentro de 10 meses. Queriendo librarse por medio de un solo pago de Bs. 4 083 dentro de 1 año, dígase a qué tanto se calculará el interés.

1361. Saturnino ha comprado 350 litros de aguardiente por Bs. 1,35 el litro. ¿Qué cantidad de agua hay que añadirle para que, vendiendo el litro a Bs. 1,75, resulte un 30 % de ganancia?

1362. Se han mezclado 125 litros de vino que vale Bs. 120 el hectolitro, con 65 litros de otro que vale Bs. 80 el hl. Calcular cuántos litros se deben añadir de la primera calidad, para que en 84 litros de la nueva mezcla no haya más que 15 litros de la segunda calidad. Calcular también el precio del hl. de la segunda mezcla.

1363. Un tonel de 275 dm^3 de capacidad contiene 225 litros de un vino que vale Bs. 0,45 7/9 el litro. Se lo llena con vino que vale Bs. 0,539 1/2 el litro; en seguida se sacan 25 litros de la mezcla y se lo reemplaza por agua. Hállese la cantidad de cada clase de líquido contenida en un litro de la última mezcla. Calcular también el precio en que se debe vender el litro de esta mezcla para ganar un 18 % sobre el precio de venta.

1364. Ramón tiene vino a Bs. 25, a Bs. 32 y a Bs. 35 el hectolitro; ¿cuántos hectolitros debe tomar de cada clase para obtener una mezcla de 34 hl. que pueda vender en Bs. 33 el hl., ganando un 10 %?

1365. Un comerciante en vinos ha comprado 3 barriles de varias calidades para mezclarlas. Las capacidades de los barriles son entre sí como 3, 4 y 5, y los precios del hl., como 6, 7 y 8. La venta de la mezcla ha dado Bs. 227,90 con un beneficio de 6 % sobre el precio de compra, o de Bs. 2,15 por hectolitro. Calcular el número de hectolitros y el precio del litro de cada calidad.

1366. ¿Cuál ha de ser la ley de una liga de plata que pesa 3 kg. 750, para que al fundirla con 5 kg. de plata pura, resulte una liga con 0,835 de ley?

1367. Un platero tiene dos lingotes de plata: el uno con 0,798 de ley, el otro con 0,867. ¿Qué cantidad debe tomar de cada uno para formar otro de 0,800 de ley?

1368. Un lingote de plata de 0,800 de ley pesa 1 200 gr.; ¿qué peso de otro de 0,900 de ley hay que añadirle para obtener un lingote de 0,860 de ley?

1369. Se ha compuesto una liga de plata de 325 gr. y de 0,835 de ley, con 450 gr. de otra liga de 0,950 de ley. ¿Qué peso hay que añadirle de una tercera de 0,840 de ley, para que resulte una cuarta liga de 0,866 de ley?

1370. Se derriten juntas dos barras de oro, la 1ª de 0,920 de ley, la 2ª de 0,750, y resulta otra de 2 175 gr. y de 0,810 de ley. ¿Cuál es el peso de cada una de estas barras?

1371. Si se ligan dos barras de plata, la 1ª de 526 gr. y 0,920 de ley, y la 2ª de 438 gr. y 0,750 de ley, dígase cuánto se debe añadir de plata o de cobre para obtener una liga de 0,850 de ley.

1372. Se han ligado tres barras de plata de 0,9, 0,8, 0,6 de ley, y cuyos pesos respectivos son inversamente proporcionales a su ley. Siendo el peso total de la liga de 1 682 gr., calcúlese: 1º el peso de cada una de las tres barras; 2º la ley de la liga.

1373. Al ligar dos lingotes de oro, de 0,950 y de 0,700 de ley, resultan 600 gr. con 0,800 de ley. Calcular: 1º los pesos respectivos de los dos primeros lingotes; 2º el peso del oro que se debe añadir a los 600 gr., para que esta liga tenga la ley de 0,900.

1374. Un platero tiene 3 barras de plata, la 1ª de 0,75 de ley; la 2ª de 0,67, y la 3ª de 0,56. Se mezclan las dos primeras en la relación de 1 a 3, luego con la liga que resulta y la 3ª se quiere componer una nueva liga de 0,62 de ley. Calcular el peso de cada una de las 3 barras que contendrá 1 kg. de la última liga.

1375. Se derriten juntas 3 barras de oro 0,700, 0,800 y 0,900 de ley. ¿Cuál es el peso que se debe tomar de cada una para obtener una liga de 2 000 gr. de 0,795 de ley, con la condición de tomar de las dos primeras, pesos proporcionales a los números 3 y 4?

1376. El 5 de Febrero, P. Zelaya presenta al descuento las letras siguientes, al 4 %:

L/ de Bs. 4 000 al 8 de Marzo.
— de — 2 500 — 15 de Mayo.
— de — 1 650 — 29 de —

Formalícese la factura de descuento, hallando el líquido a pagar.

1377. El 15 de Mayo, J. Gómez presenta al descuento los documentos siguientes, al 2 %:

L/ de Bs. 400 el 8 de Septiembre.
— de — 250 — 12 de —
— de — 1 500 — 11 de Octubre.
Pagaré de — 300 — 27 de —

Formalícese la factura de descuento, hallando el líquido a pagar.

1378. El 18 de Junio, P. Fernández presenta al descuento los documentos siguientes:

L/ de Bs. 800 al 25 de Junio.
L/ de — 520 — 1º de Julio.
Pagaré de — 160 — 19 de Agosto.
— de — 280 — 2 de Septiembre.

Redáctese la factura de descuento, y calcúlese el líquido a pagar, siendo el descuento 2 %; el cambio 1/5 % y la comisión 1/4 %.

1379. Redáctese la cuenta corriente siguiente, por los métodos directo, indirecto y hamburgués, y dígase el saldo a cuenta nueva.

Debe el Sr. D. Pablo Navarro, s. cta. cte. al 4 %, cerrada el 30 de Mayo de 1911.

Enero	6	su entrega en efectivo	Bs. 500
—	28	m/ endoso a s/ o/ c/ Gómez	Bs. 250
Febrero	14	s/ endoso a m/ o/ c/ Tomás	Bs. 120
—	27	Pagado cheque 645	Bs. 80
Marzo	20	„ „ 646	Bs. 110
Abril	19	su entrega en efectivo	Bs. 1 000
Mayo	25	mi entrega a Soler por s/c	Bs. 900

1380. Continúan las operaciones comerciales entre P. Navarro y su banquero.

Sumas entregadas por P. Navarro:

Bs. 500 el 5 de Junio
— 1 000 — 24 de —
— 300 — 2 de Julio
— 2 000 — 15 de —

Sumas entregadas por el banquero a P. Navarro:

Bs. 1 000 el 15 de Junio
— 2 000 — 28 de —

Redáctese la cuenta corriente por los métodos directo, indirecto y hamburgués, al 4 %, cerrada el 5 de Agosto, y dígase el saldo a cuenta nueva.

APÉNDICE PARA VENEZUELA

ALGUNOS DATOS REFERENTES A MEDIDAS QUE NO SE AJUSTAN AL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL

En Venezuela obliga el uso del sistema métrico decimal por lo menos en los actos oficiales. Sin embargo es del todo necesario conocer ciertas medidas que no siguen a dicho sistema. Enumeraremos las usuales en ciertos negocios.

La vara.—Medida de longitud que equivale aproximadamente a 80 ctms. Es igual a los 4/5 de un metro o a los 8/9 de una yarda.

Reducción de metros a varas: Para reducir metros a varas se multiplica el número de metros por el quebrado 5/4.

EJEMPLO: *Reducir* 80 *metros a varas.*

Multiplicamos a 80 por 5/4: $\frac{80 \times 5}{4} = 100$ varas.

Reducción de varas a metros: Para reducir varas a metros se multiplica el número de varas por el quebrado 4/5.

EJEMPLO: *Reducir* 150 *varas a metros.*

Multiplicamos a 150 por 4/5: $\frac{150 \times 4}{5} = 120$ metros.

La yarda.—Medida de longitud que equivale a 90 ctms. Es igual a los 9/10 de un metro o a los 9/8 de una vara.

Reducción de metros a yardas: Para reducir metros a yardas se multiplica el número de metros por el quebrado 10/9.

EJEMPLO: *Reducir* 150 *metros a yardas.*

Multiplico a 150 por 10/9: $\frac{150 \times 10}{9} = 166{,}66$ yardas.

Reducción de yardas a metros: Para reducir yardas a metros se multiplica el número de yardas por el quebrado 9/10.

EJEMPLO: *Reducir* 60 *yardas a metros.*

Multiplico a 60 por 9/10: $\frac{60 \times 9}{10} = 54.$ metros.

Reducción de varas a yardas: Para reducir varas a yardas se multiplica el número de varas por el quebrado 8/9.

EJEMPLO: *Reducir* 45 *varas a yardas.*

Multiplicamos a 45 por 8/9: $\frac{45 \times 8}{9} = 40$ yardas.

Reducción de yardas a varas: Para reducir yardas a varas se multiplica el número de yardas por el quebrado 9/8.

EJEMPLO: *Reducir* 80 *yardas a varas.*

Multiplicamos a 80 por 9/8: $\frac{80 \times 9}{8} = 90$ varas.

El pie.—Medida de longitud equivalente a 27,8 ctms. El pie inglés equivale a 30 centímetros, medida comúnmente aceptada.

La pulgada.—Medida de longitud equivalente a 2,5 ctms.

La braza.—Medida de longitud equivalente a 1,672 metros.

La cuadra.—Medida de longitud equivalente a 80 metros o a 100 varas.

La legua métrica.—Medida de longitud equivalente a 5000 metros.

La milla.—Medida de longitud equivalente a la tercera parte de una legua.

Medidas de superficie.—**La fanegada.**—Medida de superficie equivalente a 6400 metros cuadrados.

Medidas de capacidad.—La cuartilla equivale a 4 puchas o a 4,5 litros.

El palito equivale a 2 cuartillas o a 9 litros.
El almud equivale a 2 palitos o a 18 litros.
La fanega equivale a 12 almudes o 216 litros.

Medidas de peso.—La onza equivale a 30 gramos.
La libra equivale a 16 onzas o a 500 gramos.
La arroba equivale a 25 libras o a 12,5 kilogramos.
El quintal equivale a 4 arrobas o a 50 kilogramos.
La tonelada equivale a 20 quintales o a 1000 kilogramos.

NOTA: Téngase en cuenta que el quintal métrico es igual a 100 kilogramos.

Medidas de peso para metales finos.—El castellano equivale a 5 gramos.

El quilate es igual a la quinta parte de un gramo. Si se dice que un pedazo de oro es de 15 quilates esto quiere decir que sobre 24 partes de este oro 15 son de oro puro y 9 de liga.

Monedas.—En muchos casos es necesario saber reducir los chelines y peniques a fracciones decimales de libra esterlina.

Téngase en cuenta que la libra esterlina vale 20 chelines, el chelín 12 peniques y el penique 4 farthings. Si una libra esterlina equivale a 20 chelines, 2 chelines valdrán 0,1 de libra esterlina y 1 chelín será exactamente igual a 0,05 de libra esterlina; como 1 chelín equivale a 12 peniques la fracción decimal de libra esterlina equivalente a 1 penique será $\frac{0{,}05}{12} = 0{,}00416$.

Un farthing es aproximadamente igual a 0,001 de libra esterlina.

Según estos datos podemos formar el siguiente

Cuadro para reducir chelines y peniques a decimales de libra esterlina:

Chelines	PENIQUES											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0		004	008	012	016	020	025	029	033	037	041	045
1	050	054	058	062	066	070	075	079	083	087	091	095
2	100	104	108	112	116	120	125	129	133	137	141	145
3	150	154	158	162	166	170	175	179	183	187	191	195
4	200	204	238	212	216	220	225	229	203	237	241	245
5	250	254	258	262	266	270	275	279	283	287	291	295
6	300	304	308	312	316	320	325	329	333	337	341	345
7	350	354	358	362	366	370	375	379	383	387	391	395
8	400	404	408	412	416	420	425	429	433	437	441	445
9	450	454	458	462	466	470	475	479	483	487	491	495
10	500	504	508	512	516	520	525	529	533	537	541	545
11	550	554	558	562	566	570	575	579	583	587	591	595
12	600	604	608	612	616	620	625	629	633	637	641	645
13	650	654	658	662	666	670	675	679	683	687	691	695
14	700	704	708	712	716	720	725	729	733	737	741	745
15	750	754	758	762	766	770	775	779	783	787	791	795
16	800	804	808	812	816	820	825	829	833	837	841	845
17	850	854	858	862	866	870	875	879	883	887	891	895
18	900	904	908	912	916	920	925	929	933	937	941	945
19	950	954	958	962	966	970	975	979	983	987	991	995

Para emplear el cuadro anterior se busca en la primera columna de la izquierda el número de chelines y en la parte superior el número de peniques. El número en que ambas columnas formen ángulo recto nos indicará las milésimas de libra.

EJEMPLO: *Reducir* 10 *chelines y* 9 *peniques a milésimas de libra esterlina.*

Busco el número 10 en la columna titulada *chelines* y sigo horizontalmente hasta la columna de los *peniques* encabezada por 9; encuentro el número 537. Esto me indica que 10 chelines y 9 peniques equivalen a 537 milésimas de libra esterlina.

Si no nos queremos servir del cuadro anterior sigamos la siguiente regla:

REGLA: Para reducir chelines y peniques a milésimas de libra esterlina tómese la mitad del número de chelines y escríbase este resultado en el lugar de las décimas; si la cantidad de chelines es impar póngase un 5 en el lugar de las centésimas.

Redúzcanse luego los peniques a farthings y escríbase este resultado en el lugar de las milésimas; si dicho resultado es 24 o mayor que 24 se agrega 1 milésima.

EJEMPLO: *Tomando el anterior, decimos*: la mitad de 10 es 5 (cifra de las décimas); 9 peniques valen $9 \times 4 = 36$ farthings; como el resultado es mayor que 24 agregamos 1 unidad a 36 y tendremos 37 (número de milésimas). Luego 10 chelines y 9 peniques igualan a 5 décimas y 37 milésimas o sea un total de 537 milésimas.

MONEDAS EFECTIVAS EN ALGUNOS PAÍSES

Y SU EQUIVALENCIA CON EL *BOLÍVAR*, EL *FRANCO* FRANCÉS Y LA *PESETA* ESPAÑOLA (1)

FRANCIA *

Valor	Ley	Diámetro	Peso exacto	Tolerancia	
				En la ley	En el peso
		Piezas de Oro			
100 fr.	0,900	35 mm	32 g. 258	0,001	0,001
50	0,900	28	16 g. 129	0,001	0,001
20	0,900	21	6 g. 4516	0,001	0,002
10	0,900	19	3 g. 2258	0,001	0,002
5	0,900	17	1 g. 6129	0,001	0,003
		Piezas de Plata			
5 fr.	0,900	37 mm	25 g.	0,002	0,003
2	0,835	27	10 g.	0,003	0,005
1	0,835	23	5 g.	0,003	0,005
0,50	0,835	18	2 g. 5	0,003	0,007
0,20	0,835	16	1 g.	0,003	0,010
		Piezas de Bronce			
0,10	,,	30 mm	10 g.	,,	0,010
0,05	,,	25	5 g.	,,	0,010
0,02	,,	20	2 g.	,,	0,015
** 0,01	,,	15	1 g.	,,	0,015

* Italia, Bélgica, Suiza y Grecia usan también las mismas monedas de oro y plata.

** Desde 1903 se acuñan también monedas de a 0,25 de níquel.

(1) *A la par, un bolívar y una peseta* equivalen a *un franco.*

MÉXICO

(*Decreto del* 25 *de marzo de* 1905)

Unidad monetaria: el *peso de oro*, que contiene 75 centigramos de oro puro y vale a la par 2,58 bolívares.

Oro

10 pesos	peso : 8 g. 333;	ley : 0,900
5 —	— 4 g. 166;	— ,,

Plata

1 peso	peso : 27 g. 073;	ley : 0,9027
50 centavos	— 12 g. 50 ;	— 0,800
20 —	— 5 g. ;	— ,,
10 —	— 2 g. 50 ;	— ,,

Níquel	**Bronce**
5 centavos	2 centavos
	1 centavo

COLOMBIA

(*Ley de* 15 *de junio de* 1907)

Unidad monetaria: el *peso oro* de 100 centavos, equivalente a la quinta parte de la libra esterlina inglesa. A la par, vale 5,18 bolívares.

La unidad usual es el *peso papel*.

Oro

Cóndor	peso : 9 g. 940;	ley : 0,916 2/3
Medio cóndor	— 4 g. 970;	— ,,
Peso	— 1 g. 988;	— ,,

Plata

Peso	peso : 25 g. ;	ley : 0,900
50 centavos	— 12 g. 500;	— 0,835
20 —	— 5 g. ;	— 0,666
10 —	— 2 g. 500;	— ,,
5 —	— 1 g. 250;	— ,,

Níquel

5 centavos
2 —
1 centavo

ECUADOR

(*Ley de* 1° *de abril de* 1884)

Unidad monetaria: el *sucre plata*, que vale 5 bolívares a la par. El sucre se descompone en 10 reales o 10 décimos o 100 centavos.

Oro

Doble cóndor	peso : 32 g. 25806;	ley : 0,900
Cóndor	— 16 g. 12903;	— ”
Doblón (2/5 de cóndor)	— : 6 g. 45161;	— ”
Quinto de cóndor	— 3 g. 22580;	— ”
Décimo de cóndor	— 1 g. 61290;	— ”

Plata

Sucre	peso : 25 g. ;	ley : 0,900
Medio sucre	— 12 g. 50 ;	— ”
2 décim. de sucre	— 5 g. ;	— ”
Décimo de sucre	— 2 g. 50 ;	— ”
Medio décimo	— 1 g. 25 ;	— ”

Níquel

5 centavos
1 centavo
½ —

Bronce

2 centavos, 1 centavo
½ centavo

CUBA

(*Leyes monetarias de* 1915)

Unidad monetaria: el *peso de oro* que, a la par vale 5,18 bolívares. Las monedas de oro y plata de los EE. UU. tienen también curso legal.

Oro

20 pesos	peso : 33 g. 436;	ley : 0,900
10 —	— 16 g. 718;	— ”
5 —	— 8 g. 359;	— ”
4 —	— 6 g. 689;	— ”
2 —	— 3 g. 344;	— ”

Plata

1 peso	peso : 26 g. 7295;	ley : 0,900
40 centavos	— 10 g. ;	— ”
20 —	— : 5 g. ;	— ”
10 —	— 2 g. 5 ;	— ”

Níquel

5 centavos 2 centavos 1 centavo

CHILE

(*Ley de* 10 *de enero de* 1889)

Unidad monetaria: el *peso oro* de 100 centavos que a la par, vale 1,89 bolívares.

Oro

Cóndor (20 pesos)	peso : 11 g. 982;	ley : 0,916 2/3
Doblón (10 pesos)	— 5 g. 991;	— "
Escudo (5 pesos)	— 2 g. 9955;	— "

Plata

Peso	peso : 20 g. ;	ley : 0,400
40 centavos	— 8 g. ;	— "
20 —	— 4 g. ;	— "
10 —	— 2 g. ;	— "
5 —	— 1 g. ;	— "

Bronce

2 ½ centavos
2 —
1 centavo
½ —

ARGENTINA

(*Ley de* 5 *de noviembre de* 1881)

Unidad monetaria: el *peso oro* de 100 centavos que a la par, vale 5 bolívares. La unidad usual es el *peso papel*, que vale la mitad del peso oro.

Oro

Argentino (5 pesos)	peso : 8 g. 0645;	ley : 0,900
½ Argentino	— 4 g. 0322;	— "

Plata

Peso	peso : 25 g. ;	ley : 0,900
50 centavos	— 12 g. 50;	— 0,835
20 —	— 5 g. ;	— "
10 —	— 2 g. 50;	— "
5 —	— 1 g. 25;	— "

Níquel

20 centavos
10 —

Bronce

2 centavos
1 centavo

ESTADOS UNIDOS

(*Ley de* 14 *de mayo de* 1900)

Unidad monetaria: el *dollar oro* igual a 10 dimes o 100 centavos. El dollar vale, a la par, 5,18 bolívares.

Oro

Doble Aguila (20 dollars)	peso : 33 g. 436;	ley : 0,900
Aguila (10 dollars)	— 16 g. 718;	— ,,
½ Aguila	— 8 g. 359;	— ,,
¼ de Aguila (2 ½ dollars)	— 4 g. 179;	— ,,
Dollar	— 1 g. 672;	— ,,

Plata

Dollar (100 cents.)	peso : 26 g. 729;	ley : 0,900
½ dollar (50 cents.)	— 12 g. 500;	— ,,
¼ de dollar (25 cents.)	— 6 g. 250;	— ,,
Pieza (20 cents.)	— 5 g. ;	— ,,
Dime (10 cents.)	— 2 g. 500;	— ,,

Níquel. — 5 cents. *Bronce.* — 1 cent.

PANAMÁ

(*Decreto del* 27 *de junio de* 1904)

Unidad monetaria: el *balboa oro* que, a la par, vale 5,18 bolívares; legalmente equivale a 2 pesos plata.

El dollar norteamericano tiene curso legal, con un valor nominal equivalente al del balboa.

Oro

20 balboas	peso : 33 g. 44;	ley : 0,900
10 —	— 16 g. 72;	— ,,
5 —	— 8 g. 36;	— ,,
2 ½—	— 4 g. 68;	— ,,
1 balboa	— 1 g. 672;	— ,,

Plata

1 peso o ½ balboa	peso : 25 g. 729;	ley : 0,900
25 cents.	— 12 g. 50;	— ,,
10 —	— 5 g. ;	— ,,
5 —	— 2 g. 50;	— ,,
2 ½ —	— 1 g. 25;	— ,,

INGLATERRA

(*Ley de* 22 *de abril de* 1870)

Unidad monetaria: la *libra esterlina* (£) que se divide en 20 shillings (sh), el shilling se divide en 12 pence (d), y el penny en 4 farthings. La libra esterlina vale, a la par, 25,22 bolívares.

Oro

Sovereign (libra est.)	peso : 7 g. 988;	ley : 0,916 2/3
½ — (10 shill.)	— 3 g. 994;	— ,,
2 —	— 15 g. 976;	— ,,
5 —	— 39 g. 940;	— ,,

Plata

Corona (5 shill.)	peso : 28 g. 276;	ley : 0,925
2 Florines (4 shill.)	— 22 g. 620;	— ,,
½ Corona (2½ shill.)	— 14 g. 138;	— ,,
1 Shilling	— 5 g. 655;	— ,,
6 Pence	— 2 g. 828;	— ,,

Bronce.— penny . — ½ penny. — ¼ de penny.

ALEMANIA

(*Ley de* 1° *de junio de* 1909)

Unidad monetaria: el *reichmark oro* de 100 pfennige que, a la par, vale 1,235 bolívares.

Oro

Doble corona (20 marcos)	peso : 7 g. 965;	ley : 0,900
Corona (10 marcos)	— 3 g. 9825;	— ,,

Plata

5 marcos	peso : 27 g. 778;	ley : 0,900
3 —	— 16 g. 666;	— ,,
2 —	— 11 g. 111;	— ,,
1 —	— 5 g. 555;	— ,,
50 pfennige	— 2 g. 777;	— ,,
20 —	— 1 g. 111;	— ,,

Níquel	Bronce
25 pfennige	2 pfennige
10 —	1 pfennige
5 —	

VENEZUELA

Unidad monetaria: el *Bolívar oro* de 100 céntimos que, a la par, vale 1 franco.

Oro

100 bolívares	peso : 32 g. 258;	ley : 0,900
20 —	— 6 g. 4516;	— ,,
10 —	— 3 g. 2258;	— ,,

Plata

5 bolívares	peso : 25 g. ;	ley : 0,900
2 —	— 10 g. ;	— 0,835
1 —	— 5 g. ;	— ,,
50 céntimos	— 5 g. 500 ;	— ,,
25 —	— 1 g. 250 ;	— ,,

Níquel

12 ½ céntimos	peso : 5 g.	ley : 0,250
5 . —	— 2 g.	— 0,250

ESPAÑA

MONEDAS EXTRANJERAS Y SUS EQUIVALENCIAS

(a la par)

NACIONES	MONEDAS EXTRANJERAS	Equivalencia
Europa		**Bolívares**
Alemania	Marco de 100 pfennige	1,23
Austria-Hungría	Corona (oro)	1,05
Bélgica	Franco de 100 céntimos	1,00
Dinamarca	Corona de 100 ore	1,39
Francia	Franco de 100 céntimos	1,00
Grecia	Dracma de 100 lepta	1,00
Inglaterra	Libra esterlina	25,22
Italia	Lira de 100 céntimos	1,00
Países Bajos	Florín de 100 cents.	2,10
Portugal	Mil reis (oro)	5,60
Rusia	Rublo de 100 kopeks	2,66
Suecia y Noruega	Corona de 100 ore	1,39
Turquía	Piastra	0,28
América		
Brasil	Mil reis (oro)	2,83
Colombia	Peso (oro)	5,00
Chile	Peso (oro)	1,89
Estados Unidos	Dollar de 100 centavos	5,18
México	Peso (oro)	2,58
Perú	Sol de 100 céntimos (plata)	2,00
República Argentina	Peso (oro)	5,00
Uruguay	Peso (oro)	5,36
Venezuela	Bolívar (oro)	1,00
Asia		
Indias Inglesas	Rupia	2,38
Japón	Yen (oro)	2,58

MEDIDAS VARIAS

y sus equivalencias con las medidas métricas y las antiguas medidas castellanas

NOMBRE DE LAS MEDIDAS	EQUIVALENCIAS En medidas métricas	EQUIVALENCIAS En medidas castellanas
Lineales e Itinerarias		
Yarda = 3 pies = 36 pulgadas	91,4383 Centímetros	1,093883
Vara granadina = 4 cuartas = 40 pulgadas	80 Centímetros	0,957045
Vara española = 3 pies = 36 pulgadas	83,5906 Centímetros	1
Ana Hamburguesa = 2 pies = 24 pulgadas	57,31 Centímetros	0,685608
Ana Bremense = 2 pies = 24 pulgadas	57,87 Centímetros	0,692308
Ana Prusiana ≐ 25 1/2 pulgadas; 1 pie = 12 pulgadas	66,69 Centímetros	0,797823
Metro, unidad métrica	100 Centímetros	1,196308
———	**Metr. lineal**	**Varas lineal**
Kilómt. (unidad itineraria dml.)	1000	1196,31
Miriámetro (10 kilómetros)	10000	11963,08
Legua española (común)	5572,70	6666,66
— (de 20.000 pies geométricos)	5555,55	6646,15
— Venezuela (5 kilómetros)	5000	5981,54
Milla inglesa (común) 1760 yardas	1609,314	1925,23
Superficiales y Agrarias	**Metros cuad.**	**Varas cuad.**
Metro cuadrado	1	1,431153
Yarda cuadrada	0,836096	1,196581
Vara — (española)	0,69874	1
— — (granadina)	0,6400	0,915938
———	**Metros cuad.**	**Varas cuad.**
Area (cuadrado de 10 m. por lado)	100	143,115
Hectárea (100 áreas)	10000	14311,53

MEDIDAS DE VENEZUELA

(Continuación)

NOMBRE DE LAS MEDIDAS	EQUIVALENCIAS	
	En medidas métricas	En medidas castellanas
Superficiales y Agrarias	**Metros cuad.**	**Varas cuad.**
Fanegada de 100 v. cast. por lado ..	6987,39	10000
Fanegada de 100 v. gr. por lado	6400	9159,38
Acre (o 4840 yardas cuadradas)	4046,71	5791,45
Cúbicas y de capacidad	**Decím. cúb.**	**Med. cast.**
Litro (cubo de 1 dm. por lado)	1	80 pulg. cúb.
Hectolitro (o sea 100 litros)	100	1 cuart. y 4 cop. 6,198
Galón inglés, imperial = 4 quarts; cada uno = 2 pintas; cada una 4 gills.	4,543	0,281 cánt.
Galón norteamericano (íd.)	3,785	0,235
		Pies cúb.
Vara cúbica española (27 pies cúbicos)	584,079	27
Tonelada mensural decimal (m^3)	1000	46,226
Tonelada inglesa (40 pies cúbicos ingleses)	1132,612	52,536
Ponderales	**Gramos**	**En peso cast.**
Kilogramo o kilo = 2 lbs. decimales .	1000	2l., 2o. 12 2/5a.
Libra decimal = 1/2 kilogramo	500	1 1 6 1/5
Libra vienesa	560,01	1.217.178
Libra española del comercio, dividida en 16 onzas; cada una 16 adarmes; cada uno 36 granos	460,093	1
Libra española farmacéutica, dividida en 12 onzas; cada una 8 dracmas; cada una 3 escrúpulos, cada uno 24 granos.	345,069	1 on. = 29 gr. 1 dr. = 36 dg. 1 es. = 12 dg. 1 gr. = 50 mg.

MEDIDAS DE VENEZUELA

(Continuación)

NOMBRE DE LAS MEDIDAS	EQUIVALENCIAS	
	En medidas métricas	En medidas castellanas
Ponderales	**Gramos**	**En peso cast.**
Libra española de pesar oro (16 onzas) = 2 marcos; cada uno 50 castellanos; cada uno 8 tomines; cada uno 12 granos.	460,093	onza = 2875 cg. cast. = 4601 mg. tom. = 575 — grano = 48 —
Libra inglesa de comercio, dividida en 16 onzas; cada una 16 adarmes.	453,598	0,985883 o libs. 15 o. 1 2 1/3 a.
Libra inglesa (de Troya) para oro, etc. dividida en 12 onzas; cada una 20 pennyweights; cada uno 24 granos.	373,24	0,811233 81 cast. y 12 gr.
———	**Kilogramos**	**Libras cast.**
Quintal inglés = 112 lbs. inglesas	50,80	110,42
Quintal norteamericano = 100 lbs. inglesas	45,36	98,59
Tonelada inglesa = 20 quintales = 2240 lbs.	1016,06	2208,38
Tonelada norteamericana = 2000 lbs. inglesas	907,19	1971,75
Tonelada decimal	1000	2173,474

ÍNDICE

PARTE IV

NÚMEROS PROPORCIONALES

PARTE COMERCIAL

APÉNDICE PARA VENEZUELA

EDITORES:
LIBRERÍA MUNDIAL
CARACAS — VENEZUELA