G.-M. Bruño

Álgebra

Y

TRIGONOMETRÍA

CON

NUMEROSOS EJERCICIOS

PARIS
PROCURADURÍA GENERAL
78, rue de Sèvres, 78

M.D

N.º 478

Álgebra

y

Trigonometría

Nº 478

PROPIEDAD

DE LA SOCIEDAD DE EDICION

Álgebra

Y

Trigonometría

CON NUMEROSOS EJERCICIOS

Por G. M. BRUÑO

PARÍS
PROCURADURÍA GENERAL
78, RUE DE SÈVRES, 78

ADVERTENCIA

La presente obra se halla destinada á completar nuestra *Geometría* (Curso superior) en lo referente á los conocimientos necesarios para la resolución algebraica ó trigonométrica de los problemas de Geometría ó de Agrimensura.

Para facilitar más el estudio de los elementos de la ciencia algebraica y trigonométrica, se ha procurado exponer dichos elementos con la mayor precisión, sencillez y claridad posibles. Además, con el fin de adiestrar en el cálculo algebraico y trigonométrico, se han introducido numerosos ejercicios y problemas de aplicación.

Expuestas las teorías en un todo conformes con las de nuestro *Curso de Álgebra elemental*, con facilidad y provecho se podrá pasar á esta obra más completa.

ÁLGEBRA

PRELIMINARES

1. Objeto del Álgebra. — Álgebra es una ciencia que tiene por objeto generalizar todas las cuestiones que pueden proponerse acerca de las cantidades.

Para conseguir este resultado, se representan por *letras* los números que denotan las cantidades, y por *signos* las operaciones que se han de efectuar, ó las relaciones que entre sí tienen las cantidades.

Las primeras letras del alfabeto sirven para designar las cantidades *conocidas* ó *dadas*, y las últimas, las cantidades *incógnitas*.

Por lo tanto, puede decirse que el álgebra es la ciencia de las cantidades representadas por letras.

2. Signos de operaciones. — Los signos usados para indicar las operaciones son $+$, $-$, $\times$, $:$ y $\sqrt{\ }$.

El signo $+$ (léase *más*) indica una adición : $a+b$ indica que a se ha de sumar con b.

El signo $-$ (léase *menos*) indica una sustracción : $a-b$ expresa que de a se debe restar b.

El signo $\times$ (léase *multiplicado por*) indica una multiplicación : $a \times b$ expresa que se ha de multiplicar a por b. El signo $\times$ se sustituye á menudo con un punto (.), y aun puede suprimirse cuando los factores están representados por letras : $a.b.c$, ó abc expresa que se ha de multiplicar a por b, y el resultado por c.

El signo : (léase *dividido por*) indica una división; $a : b$ expresa que se ha de dividir a por b. La división se indica á menudo escribiendo el dividendo y el divisor en forma de quebrado : así $\frac{a}{b}$ (léase a sobre b) expresa lo mismo que $a : b$.

En fin el signo $\sqrt{\ }$, llamado ***radical,*** indica la extracción de una raíz. El índice, que denota el grado de la raíz, se coloca en la abertura del radical. Así las expresiones $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{2b}$, $\sqrt[4]{c}$, significan que se debe extraer la raíz cuadrada de a, la raíz cúbica de $2b$, y la raíz cuarta de c. El índice 2 se sobreentiende : $\sqrt[2]{a}$ es lo mismo que $\sqrt{a}$.

3. Signos de relaciones. — Los signos empleados para indicar relaciones entre dos cantidades son :

$$=,\ >,\ <\ \text{y}\ \neq.$$

El signo $=$ (léase *igual á*) indica la igualdad entre dos cantidades : $3a = b + c$ expresa que $3a$ iguala á b sumado con c. Las dos cantidades unidas por medio del signo $=$ son los *miembros* de la igualdad; la cantidad que está á la izquierda de él se llama primer miembro, y la que está á la derecha, segundo miembro de la igualdad.

El signo $>$ (léase *mayor que*) indica que la cantidad que está antes de él es mayor que la que está después : $a > b$ expresa que a es mayor que b.

El signo $<$ (léase *menor que*) indica que la cantidad que está antes de él es menor que la que está después : $b < a$ expresa que b es menor que a.

El signo $\neq$ (léase *diferente de*) indica que dos cantidades son desiguales.

Se combinan á veces estos signos; así

$a \geqq b$ se lee : a *mayor que* b *ó igual á* b;

$a \leqq b$ se lee : a *menor que* b *ó igual á* b.

4. Coeficiente. — Llámase *coeficiente* el número ó la letra que se coloca antes de una cantidad, é indica cuántas veces ha de repetirse esta cantidad; por ejemplo en las expresiones $4a$, mx y $\frac{3}{5}b$, 4, m y $\frac{3}{5}$ son coeficientes é indican que se ha de tomar 4 veces el valor de a, m veces el de x y 3 veces la quinta parte de b.

Nunca se escribe el coeficiente 1 : así a es lo mismo que $1a$.

5. Exponente. — Llámase *exponente* un número ó una letra que se coloca á la derecha y en la parte superior de una cantidad, é indica las veces que está repetida como factor : b^3 (léase *b tres* ó *b á la tercera potencia*) expresa que la cantidad b está tomada tres veces como factor; es la abreviatura de $b \times b \times b$; a^m expresa que a está tomada m veces como factor ; y $(a - b)^2$ expresa la segunda potencia de la diferencia que hay entre a y b.

Siempre se sobreentiende el exponente 1 ; así a es lo mismo que a^1.

6. Expresión algebraica. — Llámase *expresión algebraica* la indicación de las varias operaciones que han de efectuarse con números representados por letras :

$$6a^2b, \; a + b, \; \sqrt{5ab}, \; \frac{(p+d)n}{2}$$

son expresiones algebraicas.

Una expresión algebraica es *racional* cuando no tiene ningún radical, é *irracional* en caso contrario Es *entera* cuando no tiene denominador, y es *fraccionaria* cuando tiene denominador.

$6a^3b$ es una expresión entera y racional.

$\frac{8a^4b^2}{3}$ es una expresión fraccionaria y racional.

En fin $3a^2\sqrt{b}$ y $x\sqrt{3}$ son expresiones irracionales.

7. Término. — *Término* es toda expresión algebraica cuyas partes no están separadas por los signos $+$ ó $-$.

Asi $3a^2$, $5a^4b$, $\sqrt{ac}$ son términos.

Los términos precedidos del signo $+$ se llaman *positivos*, y los precedidos del signo $-$ se llaman *negativos*.

Se sobreentiende el signo $+$ delante de un término positivo solo ó que da principio á una serie de otros términos.

8. Grado de un término. — Llámase *grado* de un término *entero* la suma de los exponentes de las letras que contiene; si es *fraccionario*, es la diferencia entre el grado del antecedente y el del consecuente; en fin, si es *irracional*, el grado de la parte irracional es igual al cociente del grado de la cantidad subradical por el índice del radical; así los términos $3a^2b$, $\frac{5a^2b^3}{c^2}$ y $a^2\sqrt[4]{c^2b^4}$ son de tercer grado.

9. Términos semejantes. — Llámanse *términos semejantes* los que tienen las mismas letras con los mismos exponentes, sean cuales fueren sus coeficientes y signos; así, $3ab^2$ y $5ab^2$ son términos semejantes.

10. Reducción de los términos semejantes. — Esta operación consiste en sustituír varios términos con uno solo.

Para reducir varios términos semejantes á uno solo, se suman por una parte los coeficientes de todos los términos positivos, y por ótra los de todos los términos negativos; la diferencia de estas dos sumas, con el signo de la mayor, es el coeficiente del término único que debe reemplazar á todos los demás.

Así el polinomio $6a^3 - 2a^3 + a^3$ se convierte en $5a^3$.

Del mismo modo $5a^2b - 3ab^2 + 8a^2b + ab^2 - 7a^2b$ se convierte en $6a^2b - 2ab^2$.

11. Monomio, binomio, polinomio. — *Monomio* es la expresión algebraica que consta de un solo término.

EJEMPLO. $10ab^2c^3$.

Binomio es una expresión que tiene dos términos.

EJEMPLO. $3ab - 4c^2$.

Trinomio es una expresión que consta de tres términos.

EJEMPLO. $x^2 + px + q$.

Polinomio, en general, es toda expresión algebraica que consta de varios términos.

Un polinomio es *homogéneo* cuando todos sus términos son de un mismo grado.

EJEMPLO. $6ab^3 - 4a^2b^2 + 5a^3b - b^4$.

12. Ordenar un polinomio es escribir todos sus términos en tal orden que los exponentes de una letra llamada *letra ordenatriz* vayan aumentando ó disminuyendo.

Asi el polinomio $4a^5 - 3a^4b - 2a^3b^2 + 8a^2b^3 + ab^4 - b^5$ está ordenado con relación á las potencias descendentes de a, y también con relación á las potencias ascendentes de b.

13. Valor numérico de una expresión algebraica. — Llámase *valor numérico* de una expresión algebraica el número que resulta sustituyendo cada letra con el número que se le atribuye, y ejecutando las operaciones indicadas.

Así el valor numérico del monomio $4a^3b^2c$, en el supuesto de que $a = 2$, $b = 1$ y $c = 4$, será:

$$4 . 2^3 . 1^2 . 4 = 128.$$

Asimismo el polinomio $-3ab + 5a^2 + \sqrt{c}$, en el supuesto de que $a = 2$, $b = 4$ y $c = 9$, tendrá por valor numérico -1.

PARTE PRIMERA

CÁLCULO ALGEBRAICO

§ I. — Números algebraicos.

14. Nociones generales. —Hemos visto en Aritmética que *número* es el resultado de la comparación de una magnitud con ótra de su especie, llamada unidad; este resultado es la *medida* de la magnitud.

Pero, como hay magnitudes susceptibles de ser contadas en dos sentidos diferentes, ó de tener dos significados opuestos, no basta esta medida para determinar por completo la magnitud. — Asi ocurre en los ejemplos siguientes:

1º El *saldo* de las varias operaciones que efectúa un banquero puede ser ó una *entrada* ó una *salida.*

2º La *temperatura* de un cuerpo se mide con el termómetro, y se representa por cierto número de grados *sobre* ó *bajo* cero.

3º La *duración* puede contarse ya *antes* de una época determinada, ya *después.*

4º Una *distancia* puede señalarse en *dos sentidos opuestos,* con relación á un punto de origen determinado.

La fórmula que indicaria el valor de estas varias magnitudes, medidas con sólo los números que proporciona la aritmética, no daria más que su valor numérico y no su sentido. Asi, por ejemplo, no basta decir que el termómetro marca 8º, sino que se debe añadir que son grados *sobre* ó *bajo* cero.

De aqui resulta la necesidad de crear nuevos números que señalen no sólo el valor numérico de las cantidades que miden, sino también su sentido: lo que se consigue por medio de los signos *distintivos* (+) y (—). Los números, ó medidas de las magnitudes, precedidos del signo (+) ó (—), se llaman *números algebraicos* para distinguirlos de los *números aritméticos* que no llevan signo alguno.

15. Números positivos y números negativos. — Según una convención, se llaman *números positivos* á los números precedidos del signo (+), y *números negativos* á los precedidos del signo (—).

Preciso es tener presente que aquí no indican los signos (+) ó (—) una operación que debe efectuarse, sino que sirven tan sólo para *distinguir* las dos clases de números que constituyen los números algebraicos.

16. Valor absoluto y valor relativo. — *Valor absoluto* de un número algebraico es el número aritmético obtenido haciendo caso omiso de su signo; *valor relativo* es el del número tomado con su signo.

17. Números iguales, números desiguales. — Dos números algebraicos son *iguales* cuando tienen el mismo valor absoluto y el mismo signo; son *desiguales* en el caso contrario.

$$\left.\begin{array}{l}(+8)=(+8)\\(-5)=(-5)\end{array}\right\}\text{ números iguales.}$$

$$\left.\begin{array}{l}(-3)\neq(-5)\\(-5)\neq(+2)\end{array}\right\}\text{ números desiguales.}$$

18. Números opuestos. — Llámanse *números opuestos* los que tienen el mismo valor absoluto y signos contrarios.

Así $(+8)$ y (-8) son números opuestos.

19. Comparación de los números positivos y negativos. — Tomemos por término de comparación el *haber* de dos personas; llamemos A y B á estas personas, y consideremos los tres casos siguientes:

1º A *tiene* 5 *pesetas, y* B *no tiene nada, pero tampoco debe á nadie.* Entonces el haber de A es 5, y el de B, cero; tendremos:

$$5>0 \quad ó \quad 0<5.$$

2º *A no debe nada; B tiene una deuda de 5 pesetas.* Si el haber de A se representa por cero, — 5 representará, por convención, el de B, ya que en realidad tiene 5 pesetas menos que A; esto se expresa así:

$$-5 < 0 \quad \text{ó} \quad 0 > -5.$$

3º *A tiene una deuda de 5 pesetas, y B una deuda de 10 pesetas.* De igual modo podemos decir que el que tiene una deuda de 10 pesetas posee menos que aquél cuya deuda es de 5 pesetas; luego:

$$-10 < -5 \quad \text{ó} \quad -5 > -10.$$

20. Consecuencias. — 1º *Todo número positivo es mayor que cualquier número negativo;*

2º *De dos números negativos, el mayor es el que tiene menor valor absoluto;*

3º *Todo número positivo es mayor que cero, todo número negativo es menor que cero, y tanto más pequeño cuanto mayor sea su valor absoluto.*

21. Escala de los números. — Siendo ilimitada la serie de los números positivos, así como la de los números negativos, se representa por ∞ (infinito) el número infinitamente grande en valor absoluto; por lo tanto la escala de los números considerados en Álgebra se extiende desde $-\infty$ hasta $+\infty$, lo que puede representarse del modo siguiente:

$$-\infty < \ldots -10 < -1 < 0 < +1 < +10 \ldots < +\infty$$

§ II. — Adición.

22. Definición. — *Sumar varias expresiones algebraicas es buscar ótra tal, que su valor numérico sea igual á la suma de los valores numéricos de las expresiones dadas.*

Adición de dos monomios. — Como la adición de dos cantidades A y B se indica por $A + B$, así será cuando se trate de dos monomios.

Para sumar los dos monomios $A = 6ab^3$ y $B = 3ab$, se escribirá:

$$A + B = 6ab^3 + 3ab.$$

Adición de dos polinomios. — Sean los dos polinomios :

$$P = a - b + c,$$
$$Q = m + n - p.$$

La adición se indicará del modo siguiente :

$$P + Q = (a - b + c) + (m + n - p),$$

esto es $\quad P + Q = a - b + c + m + n - p.$

23. Regla. — *Para sumar varias cantidades algebraicas, se colocan únas á continuación de ótras con los signos de sus términos respectivos.* Si la suma contiene términos semejantes, se reducen.

Ejemplo. — *Sumar los polinomios :*

$$P = 3b^2 + 7ab - 2a^2,$$
$$Q = 2b^2 - 3ab + 5a^2.$$

Tenemos : $P + Q = 3b^2 + 7ab - 2a^2 + 2b^2 - 3ab + 5a^2,$

ó sea $\quad P + Q = 5b^2 + 4ab + 3a^2.$

Notas. — I. — Para facilitar la reducción de los términos semejantes, se colocan únos debajo de ótros.

Ejemplo. — *Sumar los tres polinomios :*

$$4a^2b^3 - 6a^3b^2 + 4ab$$
$$2a^3b^2 - 3a^2b^3 - 4ab$$
$$5ab \quad + 4a^2b^3 - 3a^3b^2$$

Se escribirá :

$$\begin{array}{r} 4a^2b^3 - 6a^3b^2 + 4ab \\ -\ 3a^2b^3 + 2a^3b^2 - 4ab \\ 4a^2b^3 - 3a^3b^2 + 5ab \\ \hline 5a^2b^3 - 7a^3b^2 + 5ab \end{array}$$

II. — Á menudo la adición de varios polinomios se indica sin efectuarla inmediatamente; para ello, cada polinomio se pone entre paréntesis, y se escriben estos paréntesis únos á continuación de ótros, uniéndolos con el signo $+$.

Para indicar la adición de $a + b$ con $c + d$ y con $-a + d - c$, escribiremos :

$$(a + b) + (c + d) + (-a + d - c).$$

§ III. — Sustracción.

24. Definición. — *Restar dos cantidades algebraicas es buscar ótra tal que su valor numérico sea igual á la diferencia de los valores numéricos de las dos expresiones dadas;*

ó de otro modo :

Sustracción algebraica es una operación que tiene por objeto, dadas dos expresiones algebraicas, encontrar ótra que, sumada con la segunda, dé la primera.

Sustracción de dos monomios. — Para restar una candidad B de otra candidad A, se escribe A — B; así haremos cuando se trate de dos monomios.

Réstese $B = 5b$ *de* $A = 8a$.

Tenemos : $A - B = 8a - 5b$, pues, al añadir á esta diferencia el sustraendo $5b$, resulta el minuendo $8a$:

$$8a - 5b + 5b = 8a.$$

Hay que operar del mismo modo cuando, de un polinomio, se debe restar un monomio.

Sustracción de dos polinomios. — Sea de restar el polinomio $B = m + n - p$
del polinomio $A = a - b + c$.

Para restar el polinomio B del polinomio A, basta escribir, á continuación de los términos del polinomio A, los términos del polinomio B, con los signos cambiados :

$$A - B = a - b + c - m - n + p.$$

En efecto, al añadir á esta diferencia el sustraendo B, resulta el minuendo A :

$$a - b + c - m - n + p + m + n - p = a - b + c.$$

25. Regla. — *Para restar una cantidad algebraica de ótra, se escribe primero el minuendo, y á continuación el sustraendo, cambiando los signos de sus términos.* En seguida, se reducen los términos semejantes, si los hay.

Ejemplo. — *Búsquese la diferencia de los polinomios :*

$$A = 4a^3bc - 3a^2b^2c + 2a^2b - a^2c$$
$$B = 3a^3bc - a^2c + a^2b - 3a^2b^2c.$$

Para facilitar la reducción de los términos semejantes, se los escribe únos debajo de ótros, cambiando los signos del sustraendo :

$$\begin{array}{r} 4a^3bc - 3a^2b^2c + 2a^2b - a^2c \\ -3a^3bc + 3a^2b^2c - a^2b + a^2c \\ \hline a^3bc \qquad\qquad + a^2b \end{array}$$

y resulta : $a^3bc + a^2b$

Notas. — I. — Á veces se indica una sustracción sin efectuarla inmediatamente. Para ello se pone entre paréntesis el sustraendo, y se lo escribe á continuación del minuendo, poniendo fuera del paréntesis y á su izquierda el signo —.

Un paréntesis precedido del signo — se llama *negativo ;* para quitar este paréntesis, hay que efectuar la sustracción indicada.

Ejemplos. — 1º *Del polinomio* $A = 4a^2 + b^2$ *réstese el polinomio* $B = 5b^2 - 2a^2 + c^2$.

Se indicará la sustracción escribiendo :

$$A - B = 4a^2 + b^2 - (5b^2 - 2a^2 + c^2).$$

Y para efectuarla, se suprimirá el paréntesis y se cambiarán los signos de los términos que encierra, teniendo presente que el término $5b^2$ es positivo.

Luego, se tendrá :

$$A - B = 4a^2 + b^2 - 5b^2 + 2a^2 - c^2,$$

y después de la reducción :

$$A - B = 6a^2 - 4b^2 - c^2.$$

2º *Del polinomio* $A = 6ax - b^2$ *réstese el polinomio* $B = 4ax - (3b^2 - 4c)$.

Se escribirá :

$$A - B = (6ax - b^2) - [4ax - (3b^2 - 4c)].$$

Para efectuar la operación, se quita primero el paréntesis que va entre corchetes :

$$[4ax - (3b^2 - 4c)] = 4ax - 3b^2 + 4c,$$

y así se vuelve al ejemplo precedente :

$$A - B = (6ax - b^2) - (4ax - 3b^2 + 4c),$$

ó sea $\quad A - B = 6ax - b^2 - 4ax + 3b^2 - 4c,$

y después de la reducción de los términos semejantes :

$$A - B = 2ax + 2b^2 - 4c.$$

II. — Siempre pueden ponerse entre paréntesis varios términos de un polinomio ; si el paréntesis ha de estar precedido del signo $+$, los términos que encierra conservan sus signos respectivos ; si ha de estar precedido del signo $-$, los términos cambian de signo.

Así el polinomio

$$a + b - c + d + e - f + g$$

puede escribirse :

$$(a + b) + (-c + d + e) - (+f - g);$$

pues, al suprimir los paréntesis, resulta el polinomio propuesto.

III. — En álgebra el vocablo *adición* no es sinónimo de aumento, ni el vocablo *sustracción* lo es de diminución. Al añadir un polinomio á otro polinomio, habrá aumento si el valor numérico de aquél es positivo, esto es, mayor que cero ; en caso contrario habrá diminución.

Asímismo, al restar un polinomio de ótro, habrá diminución sí el valor del sustraendo es positivo ; al contrario, habrá aumento si este valor es negativo.

§ IV. Multiplicación.

26. Definición. — *Multiplicar dos expresiones algebraicas es buscar ótra cuyo valor numérico sea igual al producto de los valores numéricos de las expresiones dadas ;*

ó de otro modo :

Llámase producto de dos números algebraicos un número *cuyo valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los números dados, cuyo signo es (+) ó (—) según que los dos números tengan ó no el mismo signo.*

De donde resulta la

27. Regla de los signos :

+	multiplicado por	+	da	+
—	»	+	»	—
+	»	—	»	—
—	»	—	»	+

Esta regla se enuncia del modo siguiente : *El producto de dos términos de igual signo es positivo, y el producto de dos términos de signo contrario es negativo.*

28. Multiplicación de dos potencias de una misma letra.

Sea $$a^3 \times a^2.$$

De la definición del exponente (nº 5) se infiere que

$$a^3 \times a^2 = a.\,a.\,a.\,a.\,a = a^5 = a^{3+2}.$$

Regla. — *Para multiplicar dos potencias de una misma letra, hay que escribir esta letra con la suma de sus exponentes.*

29. Multiplicación de un monomio por ótro.

Recordaremos este principio de aritmética :

No se altera el producto de varios factores, cuando se invierte el orden de ellos.

Sea de multiplicar $5a^4b^2c$ por $3a^2b$.

Tendremos : $5a^4b^2c \times 3a^2b = 5.a^4.b^2.c.3.a^2.b,$

é invirtiendo el orden de los factores,

$$5.3.a^4.a^2.b^2.b.c.$$

Efectuando los productos indicados, resultará :

$$15a^6b^3c.$$

Regla. — *Para multiplicar un monomio por otro monomio, se multiplican los coeficientes, y á continuación se escriben las diferentes letras que contienen, poniéndoles un exponente igual á la suma de los que tienen en ellos. Si una letra se halla sólo en un factor, se le da por exponente el mismo que tiene en este factor.*

30. Multiplicación de un polinomio por un monomio.

Sea de multiplicar $a + b - c$ por m.

Ya sabemos que para multiplicar una suma por una cantidad, se debe multiplicar sucesivamente cada úna de sus partes por esta cantidad y sumar los resultados.

Por lo tanto hay que repetir m veces cada término del polinomio dado; aplicando la regla anterior, resultará:

$$(a + b - c)\,m = am + bm - cm.$$

Regla. — *Para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada término del polinomio por el monomio, y se suman los resultados.*

Nota. — Si tuviéramos que multiplicar un monomio por un polinomio se invertiría el orden de los factores, volviendo así al caso precedente.

31. Multiplicación de un polinomio por ótro.

Sea de multiplicar $a - b$ por $c - d$.

Representemos por V el valor numérico de $a - b$, y tendremos por producto:

$$P = V(c - d) = Vc - Vd = Vc + V(-d) \text{ (nº 30)}.$$

En vez de V, pongamos la expresión equivalente $(a - b)$ y tendremos:

$$P = (a - b)\,c + (a - b)(-d).$$

Lo que manifiesta que para obtener el producto pedido, hay que multiplicar el multiplicando por cada término del multiplicador.

Apliquemos la regla precedente (nº 30) y la de los signos:

$$P = ac - bc - ad + bd.$$

De donde se deduce la siguiente

Regla. — *Para multiplicar un polinomio por ótro, se multiplica todo el multiplicando por cada término del multiplicador, observando la regla de los signos, y se suman los productos obtenidos.*

Apliquemos esta regla al ejemplo siguiente :

Multiplíquese $3a^3 - 4a^2b + 2ab^2 - b^3$

por $2a^2 + ab - 3b^2$.

La operación se dispone como se ve á continuación :

Multiplicando	$3a^3 - 4a^2b + 2ab^2 - b^3$
Multiplicador	$2a^2 + ab - 3b^2$
Producto por $2a^2$	$6a^5 - 8a^4b + 4a^3b^2 - 2a^2b^3$
Producto por ab	$+3a^4b - 4a^3b^2 + 2a^2b^3 - ab^4$
Producto por $-3b^2$	$-9a^3b^2 + 12a^2b^3 - 6ab^4 + 3b^5$
Producto total Reducido	$6a^5 - 5a^4b - 9a^3b^2 + 12a^2b^3 - 7ab^4 + 3b^5$.

Después de ordenados los dos polinomios con relación á las potencias ascendentes ó descendentes de una misma letra, para que la reducción de los términos semejantes se ejecute más fácilmente, y habiendo colocado el multiplicador debajo del multiplicando, se busca el producto de todos los términos del multiplicando por el 1er término del multiplicador, diciendo :

$+ 3a^3$	multiplicado por	$+ 2a^2$	da	$+ 6a^5$
$- 4a^2b$	»	$+ 2a^2$	»	$- 8a^4b$
$+ 2ab^2$	»	$+ 2a^2$	»	$+ 4a^3b^2$
$- b^3$	»	$+ 2a^2$	»	$- 2a^2b^3$.

Encontrado ya el primer producto parcial, se multiplican todos los términos del multiplicando por el segundo término del multiplicador, diciendo :

$+ 3a^3$ multiplicado por $+ ab$ da $+ 3a^4b$,

y así sucesivamente ; y resulta el segundo producto parcial :

$$3a^4b - 4a^3b^2 + 2a^2b^3 - ab^4,$$

que se puede colocar á continuación del primero ; pero, para facilitar la reducción, es preferible escribir los términos semejantes únos debajo de ótros.

Procediendo del mismo modo, resultará el tercer producto parcial :

$$-9a^3b^2+12a^2b^3-6ab^4+3b^5.$$

El producto total es la suma de los productos parciales ; después de reducidos los términos semejantes, resulta :

$$6a^5-5a^4b-9a^3b^2+12a^2b^3-7ab^4+3b^5.$$

32. Notas. — I. — Habiendo ordenado el multiplicando y el multiplicador con relación á las potencias descendentes de a, el primer término $6a^5$ del producto *es del grado mayor en* a, *por ser el producto de dos términos en los cuales la letra* a *tiene mayor exponente*. Por igual razón, el último término $3b^5$ del producto *es del grado mayor en* b.

Luego, *el primer término del producto, así como el último, no se reducen con ningún otro término.*

De donde se infiere que *el producto de dos polinomios ha de tener á lo menos dos términos, después de verificada la reducción de los términos semejantes.*

II. — Si no se quiere efectuar inmediatamente una multiplicación algebraica, se pone cada factor entre paréntesis y se colocan úno al lado de ótro, sin interposición de signo.

Así, para indicar la multiplicación de $a+b$ por $a-b$, se escribirá : $(a+b)(a-b)$.

33. Potencias. — Al multiplicar $-a$ por $-a$, resulta $+a^2$, segunda potencia de a; al multiplicar $+a^2$ por $-a$, resulta $-a^3$, tercera potencia de $-a$; al multiplicar $-a^3$ por $-a$, resulta $+a^4$, cuarta potencia de $-a$; y así sucesivamente.

Luego

$$\begin{aligned} -a &= -a, \\ (-a)^2 &= +a^2, \\ (-a)^3 &= -a^3, \\ (-a)^4 &= +a^4, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

De donde se infiere :

1º *Que las potencias pares de una cantidad negativa son positivas ;*

2º *Que las potencias impares de una cantidad negativa son negativas.*

34. Fórmulas notables. — Hay algunas multiplicaciones notables cuyo producto conviene tomar de memoria.

$$\begin{array}{rrr}
a+b & a-b & a+b \\
a+b & a-b & a-b \\
\hline
a^2+ab \qquad & a^2-ab \qquad & a^2+ab \qquad \\
+ab+b^2 & -ab+b^2 & -ab-b^2 \\
\hline
a^2+2ab+b^2 & a^2-2ab+b^2 & a^2 \quad - \quad b^2
\end{array}$$

Se suelen indicar estos resultados como sigue :

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab; \tag{1}$$

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab; \tag{2}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2. \tag{3}$$

Estas tres fórmulas se enuncian del modo siguiente :

El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más dos veces el producto del primero por el segundo.

El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, menos dos veces el producto del primero por el segundo.

El producto de la suma de dos números por su diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el cuadrado del segundo.

35. Nota. — De las tres fórmulas anteriores se infiere que puede sustituírse :

1º $\quad a^2+b^2+2ab \quad$ con $\quad (a+b)(a+b)$;

2º $\quad x^2+y^2-2xy \quad$ » $\quad (x-y)(x-y)$;

3º $\quad m^2-n^2 \quad$ » $\quad (m+n)(m-n)$.

Hay que notar también que puede sustituírse

$$(a-b)^2 \quad \text{con} \quad (b-a)^2,$$

pues en ambos casos el producto es :

$$a^2+b^2-2ab.$$

En el cálculo algebraico se usan muy á menudo estas transformaciones.

§ V. — División

36. Definición. — *Dividir dos expresiones algebraicas es buscar ótra cuyo valor numérico sea igual al cociente de los valores numéricos de las expresiones dadas.*

37. Nota. — Las reglas de la división se deducen de sus correspondientes de la multiplicación, por ser el dividendo el producto del divisor por el cociente.

Por lo tanto, si el dividendo es *positivo*, el divisor y el cociente tendrán un mismo signo; si el dividendo es *negativo*, el divisor y el cociente han de tener signos diferentes.

Luego,	$+$	dividido por	$+$	da	$+$
	$+$	»	$-$	»	$-$
	$-$	»	$+$	»	$-$
	$-$	»	$-$	»	$+$

Lo que se enuncia del modo siguiente: *El cociente de dos términos de igual signo es positivo, y el cociente de dos términos de signo contrario es negativo.*

38. División de dos potencias de una misma letra.

Sea de dividir a^5 por a^2.

El cociente será: $a^{5-2} = a^3$.

Para demostrarlo, basta averiguar que al multiplicar a^3 por el divisor a^2, resulta el dividendo a^5.

En efecto, tenemos (nº 28):

$$a^3 \times a^2 = a^5.$$

Regla. — *El cociente de dos potencias de una misma letra es igual á esta letra con un exponente igual al exponente del dividendo, menos el exponente del divisor.*

39. Exponente cero. — *Divídase* a³ *por* a³.

$$a^3 \text{ dividido por } a^3 \quad \text{da:} \quad a^{3-3}, \quad \text{ó sea} \quad a^0;$$

pero una cantidad dividida por sí misma da 1 por cociente; luego a^0 *es igual* á 1, es decir que *toda cantidad que tiene cero por exponente es igual á la unidad.*

40. Exponente negativo. — *Divídase* a^3 *por* a^5.

Aplicando la regla del nº 38, tendremos :

$$a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2},$$

lo que puede expresarse del modo siguiente :

$$a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3 \times a^2}.$$

Pero $\frac{a^3}{a^3} = 1$; luego el cociente será $\frac{1}{a^2}$, y por lo tanto, a^{-2} es lo mismo que $\frac{1}{a^2}$.

De donde se infiere que *toda letra cuyo exponente es negativo representa un quebrado que tiene* 1 *por numerador; y por denominador, la misma letra con igual exponente, pero positivo.*

41. División de un monomio por ótro.

Sea de dividir $12a^6b^2c$ por $4a^3b^2$.

Ya sabemos que $12a^6b^2c$ es el producto de $4a^3b^2$ por un factor tal que multiplicado por $4a^3b^2$ reproduzca $12a^6b^2c$

Pero el factor que multiplicado por 4 da 12, es 3;

»	»	a^3	»	a^6	»	a^3;
»	»	b^2	»	b^2	»	1.

Por último, la letra c que no está en el divisor tiene que hallarse en el cociente (nº 29).

Luego, el cociente será $3a^3c$, pues al multiplicarlo por $4a^3b^2$, resulta el dividendo $12a^6b^2c$.

Asimismo, $16a^3b^2$ dividido por $-8ab^2$ da $-2a^2$.

Regla. Para obtener el cociente de dos monomios :

1º *Se aplica la regla de los signos;*

2º *Se divide el coeficiente del dividendo por el del divisor;*

3º *Se escribe cada letra del dividendo, dándole por exponente la diferencia entre los exponentes que tiene en el dividendo y el divisor.* Si una letra se halla sólo en el dividendo, se escribe con el exponente que tiene en este término; y se omiten las letras que entran en ambos términos con igual exponente.

42. Nota. — Si la división se efectúa sin residuo, el cociente es un *monomio entero.*

La división de dos monomios será imposible:

1º Cuando el coeficiente del dividendo no sea múltiplo del coeficiente del divisor;

2º Cuando alguna letra tenga en el divisor mayor exponente que en el dividendo;

3º Cuando en el divisor haya alguna letra que no esté en el dividendo.

En estos casos, se indica solamente la operación, poniendo los dos monomios en forma de quebrado.

43. División de un polinomio por un monomio.

Sea de dividir por d el polinomio $A + B - C$.

El cociente será:

$$\frac{A}{d} + \frac{B}{d} - \frac{C}{d}.$$

En efecto, al multiplicar este cociente por d, resulta el dividendo $A + B - C$:

$$\left(\frac{A}{d} + \frac{B}{d} - \frac{C}{d}\right) d = A + B - C \text{ (nº 30).}$$

Por lo tanto $\frac{A}{d} + \frac{B}{d} - \frac{C}{d}$ representa el cociente pedido; lo que se escribe del modo siguiente:

$$\frac{A + B - C}{d} = \frac{A}{d} + \frac{B}{d} - \frac{C}{d}.$$

Regla. *Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio.*

Nota. — Raras veces es posible la división de un polinomio por un monomio; cuando no, basta escribir el dividendo y el divisor en forma de quebrado.

En cuanto á la división de un monomio por un polinomio, siempre es imposible, pues el cociente (aunque no tuviera sino un término), multiplicado por el divisor, daría un polinomio.

44. División de un polinomio por ótro.

Sea de dividir $15a^4 - 19a^3b + 11a^2b^2 - 3ab^3$ por $5a^2 - 3ab$.

Habiendo ordenado los dos polinomios, con relación á las potencias *descendentes* de una misma letra, lo que siempre puede hacerse, se tendrá presente que el primer término del dividendo *es el producto sin reducción* del primer término del divisor por el primer término del cociente (nº 32, I); luego se hallará el primer término del cociente dividiendo $15a^4$ por $5a^2$. Se multiplicará el divisor por el término obtenido, y el producto se restará del dividendo; así resultará un *resto ordenado* cuyo primer término será el *producto sin reducción* del primer término del divisor por el segundo término del cociente; luego se encontrará este término, dividiendo el primer término del resto por el primer término del divisor. En seguida se multiplicará el divisor por este segundo término, y del primer resto se sustraerá el producto. Y así sucesivamente.

Hé aquí los detalles de la operación :

$$
\begin{array}{llllll|l}
\text{Dividendo} & 15a^4 & -19a^3b & +11a^2b^2 & -3ab^3 & & 5a^2-3ab \\
\cline{7-7}
 & -15a^4 & +9a^3b & & & & 3a^2-2ab+b^2 \\
\cline{2-3}
1^{\text{er}}\ \text{resto} & 0 & -10a^3b & +11a^2b^2 & -3ab^3 & & \\
 & & +10a^3b & -6a^2b^2 & & & \\
\cline{3-4}
2^{\text{o}}\ \text{resto} & & 0 & +5a^2b^2 & -3ab^3 & & \\
 & & & -5a^2b^2 & +3ab^3 & & \\
\cline{4-5}
3^{\text{er}}\ \text{resto} & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Estando ordenados el dividendo y el divisor con relación á las potencias descendentes de a, se procede así : $+15a^4$ dividido por $+5a^2$ da $+3a^2$, que se escribe en el cociente. $+5a^2$ multiplicado por $+3a^2$ da $+15a^4$, y, para la sustracción, se cambia su signo y se escribe debajo de $15a^4$. $-3ab$ multiplicado por $+3a^2$ da $-9a^3b$, y, para la sustracción, se cambia su signo, y se escribe á continuación de $-15a^4$.

Reduciendo los términos semejantes, resulta el primer resto, ó sea :

$$-10a^3b+11a^2b^2-3ab^3.$$

Del mismo modo se divide $-10a^3b$ por $+5a^2$, y el cociente $-2ab$ será el segundo término del cociente.

Se multiplica el divisor por este término, se resta del mismo modo el producto del primer resto, y así resulta el segundo resto :

$$+5a^2b^2 - 3ab^3.$$

Se divide $+5a^2b^2$ por $+5a^2$, y el cociente $+b^2$ será el tercer término del cociente. Se multiplica el divisor por este término, y se sustrae el producto del segundo resto.

De que el resto es cero, se infiere que $3a^2 - 2ab + b^2$ es el cociente exacto de $15a^4 - 19a^3b + 11a^2b^2 - 3ab^3$ por $5a^2 - 3ab$.

45. Notas. — I. — *La división de dos polinomios es imposible :*

1º Cuando, ordenados los dos polinomios con relación á las potencias descendentes de una misma letra, el primer término del dividendo no es divisible por el primer término del divisor;

2º Cuando el último término del dividendo no es divisible por el último término del divisor ;

3º Cuando, en la operación, sucede que en un resto el exponente de la letra ordenatriz es menor que el de la misma letra en el divisor; pues entonces el primer término del resto no será divisible por el primer término del divisor.

Por lo tanto, la división de $7a^4 + a^3b - 6a^2b^2$ por $5a^3 + ab^2$ es imposible, porque $7a^4$ no es divisible por $5a^3$.

Lo mismo que la división de $8a^3b - 5a^2b^2 + 4ab^3$ por $4a^3 - 2a^2b$ no puede ejecutarse, porque el último término $4ab^3$ no es divisible por $-2a^2b$.

También es imposible la división siguiente, porque el primer término del resto no es divisible por el primer término del divisor.

$$\begin{array}{rrrr|l}
8a^3 & +2a^2b & -7ab^2 & +2b^3 & 4a^2+3ab-b^2 \\
\cline{5-5}
-8a^3 & -6a^2b & +2ab^2 & & 2a-b \\
\cline{1-3}
0 & -4a^2b & -5ab^2 & +2b^3 & \\
 & +4a^2b & +3ab^2 & -b^3 & \\
\cline{2-4}
 & 0 & -2ab^2 & +b^3 &
\end{array}$$

La operación manifiesta que si del polinomio propuesto se restara $-2ab^2+b^3$, resultaría un polinomio divisible por $4a^2+3ab-b^2$.

II. — Cuando no se puede ó no se quiere efectuar una división, se indica la operación poniendo el dividendo y el divisor en forma de quebrado.

División de un polinomio por un binomio de primer grado.

46. — *El resto de la división de un polinomio entero*[1] *ordenado con relación á* x, *por un binomio de la forma* x — a, *es igual al valor que toma el polinomio cuando se sustituye en él* x *con* a.

Así, el resto de la división del polinomio $x^3+ax^2-a^3$ por $x-a$ será: $a^3+a^3-a^3$, ó sea a^3.

Pero la división de $x^3-3ax^2+2a^3$ por $x-a$ será exacta, pues el resto $a^3-3a^3+2a^3$ es igual á cero.

47. Nota. — *Si el divisor fuera* x + a, *se sustituiría* x *con* — a.

48. Cocientes notables. — **1°** $x^m - a^m$ *siempre es divisible por* x — a.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{l|l} x^3-a^3 & x-a \\ \cline{2-2} +ax^2 & x^2+ax+a^2 \\ \quad +a^2x-a^3 & \\ \quad \underline{-a^2x+a^3} & \\ \qquad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^4-a^4 & x-a \\ \cline{2-2} +ax^3 & x^3+ax^2+a^2x+a^3 \\ \quad +a^2x^2 & \\ \qquad +a^3x-a^4 & \\ \qquad \underline{-a^3x+a^4} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

2° $x^m + a^m$ *nunca es divisible por* x — a.

EJEMPLO:

$$\begin{array}{l|l} x^3+a^3 & x-a \\ \cline{2-2} +ax^2 & x^2+ax+a^2 \\ \quad +a^2x+a^3 & \\ \quad \underline{-a^2x+a^3} & \\ \qquad +2a^3 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^4+a^4 & x-a \\ \cline{2-2} +ax^3 & x^3+ax^2+a^2x+a^3 \\ \quad +a^2x^2 & \\ \qquad +a^3x+a^4 & \\ \qquad \underline{-a^3x+a^4} & \\ \qquad\quad +2a^4 & \end{array}$$

---

[1] Un polinomio es *entero en x* cuando esta letra no se halla en el denominador y no tiene exponente fraccionario ni inconmensurable.

3° $x^m - a^m$ *es divisible por* $x + a$ *sólo cuando* m *es par.*

Ejemplo :

$$\begin{array}{l|l} x^3 - a^3 & x + a \\ \hline -ax^2 & x^2 - ax + a^2 \\ \quad + a^2x - a^3 & \\ \quad - a^2x - a^3 & \\ \hline \quad -2a^3 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^4 - a^4 & x + a \\ \hline -ax^3 & x^3 - ax^2 + a^2x - a^3 \\ \quad + a^2x^2 & \\ \qquad - a^3x - a^4 & \\ \qquad + a^3x + a^4 & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

4° $x^m + a^m$ *es divisible por* $x + a$ *sólo cuando* m *es impar.*

Ejemplo :

$$\begin{array}{l|l} x^3 + a^3 & x + a \\ \hline -ax^2 & x^2 - ax + a^2 \\ \quad + a^2x + a^3 & \\ \quad - a^2x - a^3 & \\ \hline \quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^4 + a^4 & x + a \\ \hline -ax^3 & x^3 - ax^2 + a^2x - a^3 \\ \quad + a^2x^2 & \\ \qquad - a^3x + a^4 & \\ \qquad + a^3x + a^4 & \\ \hline \qquad + 2a^4 & \end{array}$$

49. Nota. — Al examinar detenidamente estos cocientes, se ve :

1° Que todos los términos del cociente tienen la unidad por coeficiente ;

2° Que los exponentes de x van disminuyendo desde $m - 1$ hasta cero, y los de a van aumentando desde cero hasta $m - 1$.

3° Que los signos son positivos con $(x - a)$ por divisor, y alternan con $(x + a)$, principiando por el signo $+$.

50. Consecuencias de lo que antecede. — I. Separación de un factor común. — Cuando varios términos encierran un mismo factor, es útil á menudo hacerlo patente, esto es, sacarlo como *factor común.*

Para sacar un factor común, hay que dividir por este factor todos los términos que lo encierran, escribir el cociente entre paréntesis é indicar la multiplicación de este paréntesis por el factor común.

Ejemplos : $ax - bx + cx$ puede escribirse $x(a - b + c)$;

$\mathrm{RS} - \mathrm{S}$ » » $\mathrm{S}(\mathrm{R} - 1)$;

$\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$ » » $\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

51. — II. Descomposición de un polinomio en factores. — No existe regla fija para descomponer un polinomio en factores. Los ejercicios precedentes, una gran destreza en el cálculo algebraico, así como el conocer las fórmulas que van á continuación, ayudarán para hallar las transformaciones que se han de efectuar para separar los factores.

Fórmulas notables :

1° $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

2° $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

3° $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

4° $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

5° $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

6° $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$.

7° $(a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$.

52. Aplicaciones. — 1° *Descomponer en 2 factores :*

$$a^2 + b^2 - c^2 + 2ab.$$

$$a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = (a+b)^2 - c^2$$

Los factores buscados son : $a+b+c$ y $a+b-c$.

Luego $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = (a+b+c)(a+b-c)$.

2° *Descomponer en 2 factores:* $a^2 + a + \frac{1}{4}$.

Este polinomio es el cuadrado de $a + \frac{1}{2}$.

Luego $a^2 + a + \frac{1}{4} = \left(a + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(a + \frac{1}{2}\right)$.

3° *Descomponer en 2 factores :* $x^3 + 1$.

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

4° *Descomponer en 3 factores :* $x^3y - {}^3xy$.

$$x^3y - xy^3 = xy(x^2 - y^2) = xy(x+y)(x-y).$$

5° *Descomponer en 3 factores :* $a^4 - 1$.

$$a^4 - 1 = (a^2+1)(a^2-1) = (a^2+1)(a+1)(a-1).$$

6º *Descomponer en 3 factores :* $a^3 - 2a^2 - 3a$.

Tenemos : $$a(a^2 - 2a - 3),$$

ó $$a(a-3)(a+1).$$

Luego $$a^3 - 2a^2 - 3a = a(a-3)(a+1).$$

7º *Descomponer en factores :* $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2$.

Efectuemos los cuadrados indicados :

$$a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy + a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy,$$

ó sea $$a^2(x^2 + y^2) + b^2(x^2 + y^2).$$

Luego $$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2).$$

8º *Descomponer en factores :* $ac(a + c) + ab(a - b) - bc(b + c)$.

Efectuemos los productos :

$$a^2c + ac^2 + a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2.$$

Ordenemos con relación á a :

$$a^2(b + c) - a(b^2 - c^2) - bc(b + c),$$

ó $$(b + c)(a^2 - ab + ac - bc),$$

$$(b + c)[a(a - b) + c(a - b)],$$

ó en fin $$(b + c)(a - b)(a + c).$$

Luego $$ac(a+c) + ab(a-b) - bc(b+c) = (b+c)(a-b)(a+c).$$

§ VI. — Quebrados ó fracciones literales.

53. Definición. — Un quebrado algebraico ó literal, así como un quebrado numérico, representa el cociente de su numerador por su denominador.

Así los quebrados $\frac{a}{b}$ y $\frac{m-n}{3a}$ representan, el primero el cociente de a por b, el segundo el cociente de $m - n$ por $3a$.

Las propiedades de los quebrados numéricos convienen también á los quebrados algebraicos.

54. Propiedad importantísima. — *Se pueden multiplicar ó dividir por una misma cantidad los dos términos de un quebrado, sin que se altere el valor de este quebrado.*

1º Sea el quebrado $\frac{a}{b}$. Llamando q al cociente de a por b, tendremos :

$$\frac{a}{b}=q, \tag{1}$$

y por lo tanto $a=bq$.

Multiplicando los dos miembros de esta última igualdad por una misma cantidad m, resulta :

$$am=bmq;$$

dividiendo ambos miembros por bm, resulta :

$$\frac{am}{bm}=q. \tag{2}$$

De donde se infiere que $\frac{am}{bm}=q=\frac{a}{b}$.

2º **Recíprocamente,** si $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$, tenemos también :

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}.$$

Pero $\frac{a}{b}$ resulta de $\frac{am}{bm}$, dividiendo ambos términos por m.

Luego, *se pueden multiplicar ó dividir, por una misma cantidad, los dos términos de un quebrado, sin alterar el valor de este quebrado.*

Esta propiedad es muy usada en la simplificación de quebrados y para reducirlos á un común denominador.

55. Reducción á un común denominador. — *Para reducir varios quebrados á un común denominador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los denominadores de los demás.*

Así los quebrados $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{m}{n}$ vienen á ser :

$$\frac{adn}{bdn}+\frac{cbn}{bdn}-\frac{bdm}{bdn}.$$

No se ha alterado el valor de los quebrados, pues se han multiplicado los dos términos de cada úno por una misma cantidad.

Como en aritmética, se puede tomar por común denominador el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Sean los quebrados

$$\frac{a}{a+b} - \frac{b}{5(a-b)} + \frac{c^2}{a^2-b^2}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores, que será el común denominador, es $5(a^2-b^2)$, compuesto de los factores 5, $(a+b)$, $(a-b)$.

Ya se ve, sin que sea necesario efectuar la división de $5(a^2-b^2)$ por $a+b$, que los dos términos del primer quebrado $\frac{a}{a+b}$ han de multiplicarse por $5(a-b)$, los del segundo por $a+b$, y los del tercero por 5 :

Y así, dichos quebrados vienen á ser :

$$\frac{5a(a-b)}{5(a^2-b^2)} - \frac{b(a+b)}{5(a^2-b^2)} + \frac{5c^2}{5(a^2-b^2)}.$$

56. Adición y sustracción. — *Para sumar ó para restar varios quebrados, se reducen á un mismo denominador, luégo se suman ó se restan los numeradores, y al resultado se le da por denominador el denominador común.*

Los quebrados $\frac{a-b}{b}$, $\frac{a}{a+b}$, $-\frac{a+b}{a}$, reducidos á un mismo denominador, dan :

$$\frac{a(a+b)(a-b)}{ab(a+b)}, \quad \frac{a^2b}{ab(a+b)}, \quad -\frac{b(a+b)(a+b)}{ab(a+b)}.$$

1º Si se quiere sumar estos quebrados, resultará :

$$\frac{a(a+b)(a-b)+a^2b-b(a+b)(a+b)}{ab(a+b)};$$

efectuando las operaciones y reduciendo :

$$\frac{a^3-3ab^2-b^3}{ab(a+b)}.$$

2° Si del primero de estos quebrados se quiere restar los ótros dos, resulta :

$$\frac{a(a+b)(a-b)-a^2b+b(a+b)(a+b)}{ab(a+b)},$$

y después de la simplificación :

$$\frac{a^3+b^3+ab^2}{ab(a+b)}.$$

57. Multiplicación. — *Para multiplicar un quebrado por ótro, se multiplican los numeradores entre sí, lo mismo que los denominadores.*

Sea de multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$.

Llamando q al valor de $\frac{a}{b}$ y q' al de $\frac{c}{d}$, tendremos :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=qq'; \qquad (1)$$

pero de $\frac{a}{b}=q$ resulta $a=bq$, (2)

y de $\frac{c}{d}=q'$ resulta $c=dq'$. (3)

Multiplicando miembro por miembro las igualdades (2) y (3), tendremos : $ac=bdqq'$;

dividiendo ambos miembros por bd :

$$\frac{ac}{bd}=qq'.$$

Comparando este resultado con la igualdad (1), tenemos :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Luego...

58. División. — *Para dividir un quebrado por ótro, se multiplica el quebrado dividendo por el quebrado divisor invertido.*

Sea de dividir $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, Llamando q al valor de $\frac{a}{b}$ y q' al de $\frac{c}{d}$, tendremos :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{q}{q'}; \tag{1}$$

pero, de $\frac{a}{b} = q$ resulta $a = bq$, (2)

y de $\frac{c}{d} = q'$ resulta $dq' = c$. (3)

Multiplicando miembro por miembro las igualdades (2) y (3), tendremos : $adq' = bcq$;
dividiendo ambos miembros por bcq' y simplificando :

$$\frac{ad}{bc} = \frac{q}{q'}.$$

Comparando este resultado con la igualdad (1), tenemos :

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Luego...

59. Simplificación de un quebrado impropio. — Cuando todos los términos de una expresión fraccionaria tienen un factor común, puede simplificarse dicha expresión, suprimiendo este factor.

EJEMPLOS :

1º *La expresión* $\frac{15a^4b^2c^3}{10a^3bc^4}$ es igual á $\frac{5a^3bc^3 \times 3ab}{5a^3bc^3 \times 2c}$;
suprimiendo el factor $5a^3bc^3$, común á ambos términos, resulta : $\frac{3ab}{2c}$.

2º *La expresión* $\frac{4a^3b^2 - 8a^4b}{6a^2b^3}$ es igual á :

$$\frac{2a^2b(2ab - 4a^2)}{2a^2b \times 3b^2};$$

suprimiendo el factor común $2a^2b$, resulta :

$$\frac{2ab - 4a^2}{3b^2}, \text{ ó sea (nº 50) } \frac{2a(b - 2a)}{3b^2}.$$

3° *La expresión* $\dfrac{4a^2b^3 - 8a^3b^3}{12a^2b^4 + 4a^4b^4}$ es igual á

$$\frac{4a^2b^3(1 - 2a)}{4a^2b^3(3b + a^2b)};$$

suprimiendo el factor común $4a^2b^3$, resultará :

$$\frac{1 - 2a}{3b + a^2b}.$$

§ VII. — Razones.

60. Definiciones. — Llámase *razón* de dos cantidades el cociente que resulta de la división de la úna por la ótra.

Así la razón de m á n es $\dfrac{m}{n}$ que se lee m es á n.

Las razones se representan por dos términos, lo mismo que los quebrados; el primero se llama *antecedente*, y el segundo, *consecuente;* estos términos son las cantidades comparadas.

Todas las propiedades de los quebrados pueden aplicarse á las razones.

61. Proporción. — Llámase *proporción* la igualdad de dos razones.

Si el cociente de $\dfrac{a}{b}$ es igual al cociente de $\dfrac{c}{d}$, resultará la igualdad siguiente ó proporción :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

a y d son los *extremos* de la proporción, b y c los *medios*.

Cada úno de los cuatro términos de una proporción es una *cuarta proporcional* con relación á los ótros tres.

Cuando el segundo y el tercer término de una proporción son iguales, cada úno de ellos es una *media proporcional*, y los otros dos términos son una *tercia proporcional;* entonces se dice que la proporción es *continua*.

Hé aquí varias propiedades de las proporciones.

62. Propiedad fundamental. — *Dos razones iguales pueden escribirse en forma de dos productos iguales.*

En efecto, al multiplicar cada úna de las razones iguales $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ por bd, resulta: $\frac{abd}{b}=\frac{bcd}{d}$.

Simplificando, $ad=bc$.

Lo que se suele enunciar así: *el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

63. Recíprocamente, *dos productos iguales pueden ponerse en forma de dos razones iguales, y así formar una proporción.*

En efecto, al dividir por bd los dos productos iguales $ad=bc$, resulta: $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$, ó sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

64. Nota. — Según este principio, dada una proporción, se pueden: 1º *permutar sus extremos,* 2º *permutar sus medios;* 3º *invertir sus extremos y medios,* sin que estos términos dejen de formar una proporción.

Sea la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Podemos escribir:

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a},\quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{c}{d}=\frac{a}{b},\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

pues siempre tenemos los dos productos iguales $ad=bc$.

De la comparación de esta última forma con las razones dadas $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, se infiere que *se pueden invertir dos razones iguales, y resultan razones también iguales.*

65. Cuando se tienen dos razones iguales, *á cada antecedente se le puede añadir su consecuente, ó restarlo de él, y resultan todavía razones iguales.*

En efecto, si tenemos $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, añadiendo 1 á ambos miembros ó restándolo de ellos, resultará:

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$$

ó sea, reduciendo cada miembro á quebrado :

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

Luego...

66. *Cuando se multiplican ó dividen dos razones iguales respectivamente por otras dos razones iguales, resultan dos razones también iguales.*

1º Sean $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$.

Llamemos q al valor de cada úna de las razones iguales $\frac{m}{n}$ y $\frac{r}{s}$; tendremos :

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} = q. \qquad (1)$$

Multipliquemos por q cada úna de las razones iguales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$; los productos serán todavía iguales :

$$\frac{a}{b} \times q = \frac{c}{d} \times q.$$

En vez de q pongamos su valor (1), y resultará :

$$\frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \times \frac{r}{s}.$$

2º Sean $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$.

En vez de multiplicar por q, dividamos por esta misma letra ; y resultará :

$$\frac{\frac{a}{b}}{q} = \frac{\frac{c}{d}}{q} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{m}{n}} = \frac{\frac{c}{d}}{\frac{r}{s}}.$$

Luego...

67. *Cuando se tienen varias razones iguales, la suma ó la diferencia de los antecedentes y la suma ó la diferencia de los consecuentes forman otra razón igual á cada úna de las primeras.*

En efecto, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$, y suponiendo igual á q el valor de cada úna de estas razones, tendremos :

$$\frac{a}{b}=q; \quad \frac{c}{d}=q; \quad \frac{m}{n}=q;$$

de donde

$$a=bq,$$
$$c=dq,$$
$$m=nq.$$

Sumemos ordenadamente estas tres igualdades :

$$a+c+m=bq+dq+nq=q(b+d+n).$$

Dividamos ambos miembros por $b+d+n$; resultará :

$$\frac{a+c+m}{b+d+n}=q=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}.$$

Si, en vez de sumar ordenadamente las tres igualdades, hubiésemos restado las dos últimas de la primera, habría resultado :

$$\frac{a-c-m}{b-d-n}=q=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}.$$

Luego...

68. *Cuando dos razones son iguales, la suma de los antecedentes dividida por la suma de los consecuentes es igual á la diferencia de los antecedentes dividida por la diferencia de los consecuentes.*

Si

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

tendremos (nº 67) :

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}.$$

Y por lo tanto $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$.

Luego...

APLICACIONES

69. 1º *Simplificar* $\frac{b^2-2ab}{b-2a}$.

Saquemos b como factor común :

$$\frac{b(b-2a)}{b-2a}.$$

Dividamos ambos términos por $b-2a$, y resultará b por respuesta.

2º *Simplificar* $$\frac{6a^3b^3-3a^2b^3}{3a^3b^3-9ab^3}.$$

En el numerador saquemos como factor común $3a^2b^3$, y $3ab^3$ en el denominador

$$\frac{3a^2b^3(2a-1)}{3ab^3(a^2-3)}.$$

Suprimiendo en ambos términos el factor común $3ab^3$, resultará :

$$\frac{a(2a-1)}{a^2-3}.$$

3º *Simplificar* $$\frac{a^2-1}{2a+2}.$$

El numerador puede escribirse $(a+1)(a-1)$, y el denominador $2(a+1)$.

Entonces se tiene : $$\frac{(a+1)(a-1)}{2(a+1)}.$$

Dividiendo ambos términos por $a+1$, resulta :

$$\frac{a-1}{2}.$$

4º *Simplificar* $$\frac{a^3-x^3+ax(a-x)}{4(a^2-x^2)}.$$

Primero hay que suprimir el paréntesis del numerador y juntar los términos positivos así como los negativos.

$$a^3+a^2x-ax^2-x^3.$$

Coloquemos los dos últimos términos entre paréntesis precedido del signo — :

$$a^3+a^2x-(ax^2+x^3)$$

Saquemos a^2 como factor común en los dos primeros términos, y x^2 en los dos últimos :

$$a^2(a+x)-x^2(a+x).$$

Sacando como factor común $a+x$, tendremos :

$$\frac{(a+x)(a^2-x^2)}{4(a^2-x^2)}.$$

Dividamos ambos términos por a^2-x^2; y resultará :

$$\frac{a+x}{4}.$$

5º *Demostrar que todo número impar que sea cuadrado perfecto, disminuído de la unidad, es divisible por* 8.

Antes de principiar esta demostración, tengamos presente :

1º Que todo *número impar*, cuadrado perfecto, es el cuadrado de un número impar, y que recíprocamente, el cuadrado de todo número impar es un número impar ;

2º Que un *número par* se representa por $2n$; pues, cualquiera que sea el valor de n, que se supone entero, $2n$ será siempre múltiplo de 2;

3º Que un *número impar* se representa par $2n+1$, siendo entero el número n.

Sea N un número impar; tenemos :

$$N=2n+1.$$

Su cuadrado, también impar, será (nº 34) :

$$N^2=4n^2+4n+1.$$

Restemos 1 de cada miembro, y saquemos $4n$ como factor común en el segundo :

$$N^2-1=4n(n+1).$$

n es par ó impar. Si n es par, $4n$ será igual á 8, ó á un múltiplo de 8, y por lo tanto, el mismo producto $4n(n+1)$ será divisible por 8.

Si n es impar, $n+1$ será par, y el producto $4n(n+1)$ será divisible por 8.

PARTE PRIMERA

Ejercicios de aplicación.

Hallar el valor numérico de las cantidades siguientes :

1. $a^2 - 2ab + b^2$ si $a = 4$, $b = 2$.
2. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ si $a = 5$, $b = 4$.
3. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ si $a = 9$, $b = 7$.
4. $9a^2 + 30ab + 25b^2$ si $a = 3$, $b = 1$.
5. $3a^2b - 3ab^2 + 5b^3$ si $a = 8$, $b = 6$.
6. $5a^2b^3c - 3ab^4c^2 + a^2bc$ si $a = 6$, $b = 1$, $c = 2$.
7. $12a^3b^2 + 4a^2b^3 -$ [illegible] si $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$.
8. $6a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^4b$ si $a = 5$, $b = -2$.
9. $4a^3 - 3a^2b + 2ab^2 - b^3$ si $a = 3$, $b = -2$.
10. $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ si $a = 4$, $b = 1$.
11. $6a^3 - 10a^2b + 8b^3$ si $a = 7$, $b = \frac{1}{2}$.
12. $4a^4b - 3a^3b^2 + 6a^2b^3$ si $a = 3$, $b = \frac{1}{3}$.
13. $(a + b)(a - b) - (a^2 - b^2)$ si $a = 10$, $b = 5$.
14. $(2a + 3b - 4c)(2a - 3b + 4c)$ si $a = 5$, $b = 4$, $c = \frac{1}{2}$.
15. $(a + b)^2 - (a - b)^2 - ab$ si $a = 5$, $b = -4$.
16. $(a + b)^3 - (a - b)^3 + a^3 - b^3$ si $a = 6$, $b = 3$.
17. $\frac{5a^2b^3}{2} - \frac{4a^4b^2}{9} + \frac{a^5}{16}$ si $a = 2$, $b = 3$.
18. $\frac{7ab^3}{16} + \frac{3b^4}{18} - \frac{a^2b^2}{24}$ si $a = 8$, $b = 6$.
19. $\frac{h}{3}(a^2 + b^2 + \sqrt{ab})$ si $a = 27$, $b = 3$, $h = 10$.
20. $\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ si $a = 35$, $b = 28$, $c = 21$, $p = 42$.

Sumar los polinomios siguientes, ejecutar la reducción de los términos semejantes y hallar el valor numérico, si $a=4$, $b=3$, $c=1$.

21. $3a^3b^2+2a^2b^3$, $a^2b^3-5a^3b^2$.

22. $4a^2+9b^2+12ab$, $9a^2-12ab+4b^2$.

23. $4a^2b+3ab^2-b^3$, $2b^3-4a^2b-4ab^2$

24. a^3b-ab^3, $a^2b^2-b^4$, $a^4-a^2b^2$.

25. $3a^2b-5ab^2$, $3ab^2-5a^2b$, $8ab^2$.

26. $a^3b^2-a^2b^3$, $a^5+2a^2b^3-b^5$, $-a^3b^2$.

27. a^2-4ab, $4bc+9a^2-6ab$, $12bc$.

28. $3a^4b^3-4a^3b^4$, $-5a^3b^4$, $a^4b^3+2a^3b^4$.

29. $\frac{1}{3}a^3b^2+\frac{2}{5}a^2b^3$, $\frac{20}{3}a^3b^2+\frac{13}{5}a^2b^3$, $-a^3b^2-a^2b^3$.

30. $\frac{3}{4}a^3-\frac{2}{3}a^2b$, $\frac{3}{5}a^3-a^2b$, ab^2.

Efectuar las operaciones indicadas á continuación:

31. 1º De b^2+a^2 restar $b^2-2ab-a^2$.
    2º De a^2+b^2+2ab » a^2-b^2+2ab.
    3º De $3a^2b-5ab^2-b^3$ » $2a^2b+ab^2+b^3$.

32. 1º De $8a^3+2a^2b-6ab^2$ » $8a^3-6a^2b-2ab^2$.
    2º De $4a^2b+3ab^2-b^3$ » $3a^2b-3ab^2+2b^3$.
    3º De $15a^4-7a^3b+6a^2b^2$ » $12a^4-3a^3b-9a^2b^2$.
    4º De $6a^5-8a^4b-3a^3b^2$ » $3a^4b-6a^3b^2-a^5$.

33. Dados los polinomios:

$$P=4a^3-5a^2b+7b^3,$$
$$P'=2a^3+11a^2b-8b^3,$$
$$P''=4a^3+5a^2b-8b^3,$$

calcúlese: 1º $P-P'$; 2º $P+P'-P''$.

34. Dados los polinomios :

$$P = 5a^2 - 3ab + b^2 - 3ac + 2bc + c^2,$$
$$P' = 2a^2 + 5ab - 3b^2 + 2ac - 4bc + 3c^2,$$
$$P'' = 4a^2 - 7ab + 5b^2 - 4ac - 5bc + c^2,$$
$$P''' = 2a^2 + 9ab - 8b^2 + 3ac + 3bc + 2c^2,$$

calcúlese : $(P + P') - (P'' + P''')$.

35. Dados los polinomios :

$$P = 6a^2 - 3ab + 2b^2 - 5ac + 6bc - 2c^2,$$
$$P' = a^2 - ab + b^2 + ac - bc - c^2,$$
$$P'' = 2a^2 + 3ab - 2b^2 - 3ac - 4bc - 5c^2$$
$$P''' = 3a^2 - 6ab + 3b^2 - 4ac + 10bc + 4c^2,$$

calcúlese : $P - (P' + P'' + P''')$.

36. $a^3 - b^3 - (a^3 + b^3 - 3a^2b) - (b^3 + a^2b)$.

37. $a^2 + b^2 + 2ab - (a^2 - 2ab + b^2) - (a^2 - b^2)$.

38. $2p - (p - a) + 2p - (p - b) + 2p - (p - c)$.

39. $a - [b - (c - d)]$.

40. $(5a^2 - 3ax + x^2) - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 7ax + 5x^2)] - 7x^2$.

41. Multiplicar $a + b + c$ por $a + b - c$.

42. » $a - b - c$ por $a + b + c$.

43. » $a - b + c$ por $a - b - c$.

44. » $2ab - 3b^2$ por $2ab + 3b^2$.

45. » $2a^2b + 3ab^2 + b^3$ por $5a^2b - b^3$.

46. » $a^4 - a^3b - a^2b^2$ por $a + b$.

47. » $4a^2 + 3ab - b^2$ por $2a - b$.

48. » $a^2 - 2ab + 3b^2$ por $-3a^2 + ab + 5b^2$.

49. » $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ por $a - b$.

50. » $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ por $a + b$.

51. $(a+b)^2 - (a-b)^2$.

52. $(3a - 2b)^2 + (3a + 2b)^2$.

53. $(3a - 2b - 1)^2 - (3a - 2b + 1)^2$.

54. $(5a - 3b + 1)^2 - 25a^2 - (3b - 1)^2$.

55. $(a+b)(a+b)^2 - (a-b)(a-b)^2$.

56. Dividir $4a^4b - 6a^3b^2 - 8a^2b^3 + 2ab^4$ por $2ab$.

57. » $9a^5b - 12a^4b^2 + 3a^3b^3 - 6a^2b^4$ por $3a^2b$.

58. » $6a^5 - 5a^4b + a^3b^2$ por $2a^2 - ab$.

59. » $15a^4 - 7a^3b - 6a^2b^2 + 7ab^3 - 3b^4$ por $3a^2 - 2ab + b^2$.

60. » $6a^5 - 5a^4b - 9a^3b^2 + 12a^2b^3 - 7ab^4 + 3b^5$ por $2a^2 + ab - 3b^2$.

Hallar, sin efectuar las operaciones, el resto de las divisiones siguientes :

61. $(a^3 - 1) : (a - 1)$.

62. $(x^5 + 1) : (x - 1)$.

63. $(a^5 + b^5) : (a - b)$.

64. $(a^7 + b^7) : (a + b)$.

Escribir, sin efectuar las operaciones, el cociente de las divisiones siguientes :

65. $(x^4 - 1) : (x - 1)$.

66. $(a^4 - b^4) : (a + b)$.

67. $(a^5 + x^5) : (a + x)$

68. $(x^6 + a^6) : (x - a)$.

Descomponer en sus factores las expresiones siguientes :

69. $x^2 - 9.$

70. $a^2 + 2ax + x^2.$

71. $\frac{x^2}{4} - p^2.$

72. $a^3 - b^3.$

73. $a^4 - 1.$

74. $a^3 + a^2 - 4a - 4.$

75. $x^4 + x^3 - x^2 - x.$

Simplificar las expresiones siguientes :

76. $\frac{3a^2b^2 - ab^3}{2a^2b^2 + 4a^3b}.$

77. $\frac{25a^4b - 15a^3b^2 + 10a^2b^3}{8a^3b^2 - 4a^2b^3}.$

78. $\frac{a^2b^2 - b^2}{a^2 + 2a + 1}.$

79. $\frac{3a^3 - 6a^2b + 3ab^2}{6a^2 - 6ab}.$

80. $\frac{2a^2 + 2ab}{2a^3 + 4a^2b + 2ab^2}.$

81. $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{a^2b - ab^2}.$

82. $\frac{(a-1)(a+1)^2}{a^3 - a}.$

83. $\frac{a^2 - 1}{4a^2 - 8a + 4}.$

84. $\frac{(a+b)^2 - 4ab}{2a - 2b}.$

85. $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} + 1.$

Efectuar las operaciones indicadas y simplificar

86. $$\frac{a}{5}+\frac{a}{2}+\frac{3a}{10}+\frac{2a}{5}.$$

87. $$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}.$$

88. $$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}-\frac{2x}{1-x^2}.$$

89. $$\frac{15x-30}{2x}\times\frac{3x^2}{5x-10}.$$

90. $$\frac{(x-1)^2}{y^3}\times\frac{(x+1)y^2}{x-1}.$$

91. $$\frac{(x+y)^2}{x-y}:\frac{x+y}{(x-y)^2}.$$

92. $$\frac{x^2-x}{x-3}:\frac{x^2-5x}{x-3}.$$

93. — Demostrar que la suma de dos números impares consecutivos es siempre divisible por 4.

94. — Demostrar que nunca es divisible por 4 la suma de dos números pares consecutivos.

95. — Manifestar que la suma de tres números impares consecutivos es siempre divisible por 3.

96. — Demostrar que la suma de tres números pares consecutivos es siempre divisible por 6.

97. — Búsquese un número entero menor que 100, y tal que la suma de su cuarta y quinta parte sea un cuadrado.

98. — Búsquese un número entero menor que 1000, y tal que añadido á su séptima parte, la suma resulte un cubo.

99. — Probar que no se altera la expresión $\frac{(a-b)^2+(a+b)^2}{a^2+b^2}$, sean cuales fueren los valores de las letras a y b.

100. — El producto de dos números pares consecutivos es un cuadrado impar, si se le añade 1.

101. — El producto de dos números impares consecutivos es un cuadrado par, si se le añade 1.

102. — Un número se halla formado por dos cifras significativas pares; se invierte este número y se lo resta del número primitivo. ¿En qué caso resultará la diferencia un cuadrado?

103. — La suma de dos números, más ó menos su diferencia, es un cuadrado cuando úno de ellos es el producto de 2 por un cuadrado.

104. — Un número consta de tres cifras; demostrar que, si se invierte el orden de las cifras, nunca es un cuadrado la diferencia de los dos números.

105. — Un número consta de tres cifras consecutivas; demostrar que, si se invierte, la diferencia entre los dos números es siempre una misma, cualesquiera que sean las cifras que forman el primer número, con tal que sean consecutivas; calcular esta diferencia.

PARTE SEGUNDA

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

---

§ I. — Definiciones.

70. Igualdad, identidad. — Llámase *igualdad* la expresión de dos cantidades que tienen un mismo valor.

EJEMPLO : $8 = 5 + 3.$

Identidad es una igualdad independiente del valor que se da á las letras.

Así $$m + n = m + n$$
y $$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$
son identidades, pues, cualquiera que sea el valor numérico de las letras, la igualdad se verifica siempre.

71. Ecuación. — *Ecuación* es una igualdad que contiene una ó más letras que representan cantidades desconocidas ó *incógnitas*. Esta igualdad no se verifica sino con algunos valores de las incógnitas.

Las igualdades
$$3x + 12 = 5x - 8,$$
$$y^2 + 5 = 6y - 3,$$
en las cuales x, y representan cantidades desconocidas, son ecuaciones; la primera se verifica con sólo un valor, $x = 10$, y la segunda con dos valores, $y = 4$, $y = 2$.

72 Una ecuación es *literal* cuando las cantidades conocidas están representadas por letras, y *numérica* cuando las mismas cantidades van representadas por números.

De las dos ecuaciones

$$5x + 8 = 7x,$$
$$ax - ab = bx,$$

la primera es numérica, y la segunda literal.

Una ecuación es de *una, dos, tres,* etc., incógnitas según encierre *una, dos, tres*, etc., letras, cada úna de las cuales representa una cantidad desconocida.

El grado de una ecuación se determina por la mayor suma de los exponentes de las incógnitas en un mismo término.

Las ecuaciones $$x + y = 15,$$
$$a^2 - bx = x^2 - ab,$$
$$ab^2 - ax^2 = xy^2$$

son, la primera de 1er grado con dos incógnitas, la siguiente de segundo grado con una incógnita, la última de tercer grado con dos incógnitas.

73. *Resolver una ecuación* es buscar para las incógnitas los valores que hacen idénticos sus dos miembros; estos valores son las *raíces* ó *soluciones* de la ecuación.

Dos ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen las mismas soluciones.

74. Sistema de ecuaciones. — Llámase *sistema de ecuaciones* el conjunto de dos ó más ecuaciones que se verifican por los mismos valores de sus incógnitas.

Las ecuaciones que entran en un mismo sistema se llaman *simultáneas*.

PRINCIPIOS GENERALES RELATIVOS Á LAS ECUACIONES.

75. Claro está que si sobre dos cantidades iguales se ejecuta una misma operación, los resultados quedarán iguales.

Aplicando este axioma á la resolución de una ecuación, podemos formular los dos principios siguientes :

Primer principio. — *Sin alterar las soluciones de una ecuación, se puede añadir ó quitar una misma cantidad á sus dos miembros.*

Segundo principio. — *Sin alterar las soluciones de una ecuación, se pueden multiplicar ó dividir sus dos miembros por una cantidad finita* (*) *que no contenga incógnita alguna.*

76. Del primer principio resulta que *para transponer un término de un miembro á ótro, basta suprimirlo en el miembro en que está y escribirlo en el ótro con signo contrario.*

Sea la ecuación $5x - 4 = x + 12.$

Para transponer el término -4 del primer miembro al segundo, agreguemos 4 á ambos miembros, y resultará:

$$5x - 4 + 4 = x + 12 + 4,$$

ó sea

$$5x = x + 12 + 4.$$

Á veces se transponen al primer miembro todos los términos de una ecuación; entonces el segundo es cero.

La ecuación anterior puede escribirse:

$$5x - x - 12 - 4 = 0.$$

77. Del segundo principio resulta que, *para quitar los denominadores de una ecuación, basta multiplicar sus dos miembros por el producto de todos los denominadores ó por el mínimo común múltiplo de los mismos.*

Sea la ecuación $\dfrac{3x}{2} - 7 = \dfrac{4x}{5}.$

Reduzcamos sus términos á un mismo denominador:

$$\frac{3x \times 5}{2 \times 5} - \frac{7 \times 2 \times 5}{2 \times 5} = \frac{4x \times 2}{2 \times 5}.$$

Quitemos el denominador común, multiplicando cada término por 2×5, y resultará:

$$15x - 70 = 8x,$$

ecuación sin denominadores y equivalente á la primera.

78. Notas. — **I.** — En la práctica no se suele escribir el denominador común; basta multiplicar el numerador de

(*) Dícese que una cantidad es *finita* cuando no es nula ni infinita.

cada término por el producto de los denominadores de los demás términos.

79. — II. — Pueden mudarse los signos de todos los términos de una ecuación, *pues es como si se multiplicaran por — 1 ambos miembros.*

La ecuación $3x - 4 = 60 - 5x$ puede escribirse :

$$-3x + 4 = -60 + 5x.$$

80. — III. — Cuando se multiplican los dos miembros de una ecuación por una cantidad que contenga la incógnita, la nueva ecuación suele admitir una ó varias soluciones que no convienen á la primera.

Sea la ecuación $3x = 45$ ó $3x - 45 = 0$, cuya solución $x = 15$.

Al multiplicar sus dos miembros por $x - 4$, resulta la ecuación siguiente :

$$(x - 4)(3x - 45) = 0,$$

la cual, á más de la raiz de la primera, admite la solución $x = 4$; pues para $x = 4$ el primer factor es igual á cero, y el producto de $3x - 45$ por cero es nulo.

Asímismo si se dividieran los dos miembros de una ecuación por una cantidad que contenga á la incógnita, podrian suprimirse varias soluciones.

Luego, cuando se multiplican los dos miembros de una ecuación por una cantidad que contenga á la incógnita, se introducen raíces extrañas que no se deben admitir, para conservar sólo las que verifican la ecuación primitiva

Esta nota es importantísima.

§ II. — Resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita.

81. 1º *Resuélvase la ecuación numérica*

$$\frac{3(x-8)}{2} = \frac{x}{5} + 1.$$

Quitemos los denominadores (nº 77); tendremos :

$$15(x-8)=2x+10;$$

efectuando la multiplicación indicada, resultará :

$$15x-120=2x+10;$$

trasladando los términos desconocidos al primer miembro y los conocidos al segundo, tendremos :

$$15x-2x=10+120;$$

reduciendo los términos semejantes :

$$13x=130,$$

de donde $$x=\frac{130}{13}=10.$$

La solución buscada es 10; este valor sustituído hace iguales los dos miembros de la ecuación propuesta.

82. *Resuélvase la ecuación literal*

$$\frac{x+a-b}{b}=\frac{b-x}{a+b}.$$

Quitemos los denominadores, y resultará :

$$(a+b)(x+a-b)=b(b-x),$$

ó sea $$ax+a^2-ab+bx+ab-b^2=b^2-bx;$$

reduzcamos los términos semejantes y traslademos :

$$ax+2bx=2b^2-a^2;$$

saquemos x como factor común :

$$x(a+2b)=2b^2-a^2;$$

dividamos ambos miembros por $a+2b$, coeficiente de x:

$$x=\frac{2b^2-a^2}{2b+a}.$$

83. Regla. — De estos ejemplos se infiere que para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita :

1º *Se quitan los denominadores y los paréntesis, si los hay;* 2º *se trasladan al primer miembro todos los términos desconocidos y al segundo los conocidos ;* 3º *se reducen los términos semejantes;* 4º *se saca como factor común la incógnita, si la ecuación es literal;* 5º *se dividen ambos miembros por el coeficiente de la incógnita.*

§ III. — Discusión de la ecuación general de primer grado con una incógnita. — Símbolos.

84. Una ecuación de primer grado siempre puede reducirse á la forma

$$ax = b, \quad \text{de donde} \quad x = \frac{b}{a},$$

en que las letras a y b representan valores conocidos, positivos ó negativos, ó aun nulos.

Esta fórmula $x = \frac{b}{a}$ es la que vamos á discutir.

Discusión. — 1º Si a no es nulo, siempre resulta para x un valor positivo, negativo ó nulo que verifica la ecuación

$$ax = b \quad \text{ó} \quad x = \frac{b}{a}.$$

Este valor será *positivo* si b y a tienen un mismo signo, *negativo* si b y a tienen signo contrario, y *nulo* si $b = 0$.

2º Si $a = 0$, resulta $x = \frac{b}{0}$. Entonces la ecuación se convierte en

$$0 \times x = b,$$

pero no hay valor finito de x que, multiplicado por cero, dé un producto distinto de cero; por lo tanto no podrá verificarse la ecuación.

Luego, $\frac{b}{0}$ es el símbolo de la imposibilidad.

3º Si se tiene á un mismo tiempo $a = 0$ y $b = 0$, resulta $x = \frac{0}{0}$, pues la ecuación se convierte en

$$0 \times x = 0,$$

pero todo valor finito de x, multiplicado por 0, da 0; por lo tanto, la ecuación queda verificada, sea cual fuere el valor de x.

Luego $\frac{0}{0}$ es el símbolo de la indeterminación.

85. Notas. — I. — La expresión $\frac{b}{0}$ se representa por el símbolo ∞, llamado el *infinito.* Podemos darnos cuenta de este vocablo notando que una cantidad finita, dividida sucesivamente por cantidades más y más pequeñas, que se aproximán á cero, da por cociente cantidades más y más grandes que se aproximan al infinito.

El símbolo ∞ ha de ser precedido del signo $+$ ó $-$, según la misma cantidad b es positiva ó negativa (nº 21).

86. — II. — No siempre $\frac{0}{0}$ es el símbolo de una indeterminación absoluta, pues puede suceder que una expresión fraccionaria tome esta forma para *ciertos valores de la incógnita* y no para ótros, por haber en el numerador y denominador un factor común que se hace igual á 0 para los valores de que se trata. Suprimiendo este factor, desaparece la indeterminación.

EJEMPLOS. 1º *Sea el quebrado*

$$x = \frac{4y-8}{3y-6},$$

que se convierte en $x = \frac{0}{0}$ si $y = 2$.

Pero este quebrado puede escribirse así :

$$x = \frac{4(y-2)}{3(y-2)}.$$

Suprimiendo el factor $y-2$, común al numerador y denominador, resulta :

$$x = \frac{4}{3}.$$

2º *Sea el quebrado*

$$y = \frac{3x-9}{(x-3)^2},$$

que se convierte en $y = \frac{0}{0}$, si $x = 3$.

Este quebrado puede escribirse en la forma de

$$y = \frac{3(x-3)}{(x-3)^2}.$$

Suprimiendo el factor $x-3$, común á los dos términos, resulta :

$$y=\frac{3}{x-3}.$$

El valor de y es infinito si $x=3$, pues se tiene :

$$y=\frac{3}{0}.$$

§ IV. — Resolución de dos ecuaciones de 1er grado con dos incógnitas.

87. Cuando se presentan varias ecuaciones simultáneas, generalmente se pueden sumar ó restar ordenadamente, y resulta otra ecuación simultánea que permite eliminar una incógnita.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, hay que *eliminar* úna de las incógnitas, esto es, deducir de ambas ecuaciones ótra que no contenga á dicha incógnita, y resolverla como queda dicho.

Varios son los métodos de eliminación, pero debemos advertir que la forma particular de las ecuaciones que hayan de resolverse es la que determinará el que convenga emplear.

1º Eliminación por sustitución.

88. Este método consiste en despejar en úna de las ecuaciones la incógnita que se quiere eliminar, y en sustituir su valor en la ótra, como lo manifiestan los ejemplos siguientes :

Ejemplos.

1º *Sea de eliminar* x *en las dos ecuaciones*

$$3x+y=15, \qquad (1)$$

$$5x-4y=8. \qquad (2)$$

La ecuación (1) da :

$$x=\frac{15-y}{3}. \qquad (3)$$

Sustituyamos este valor en la ecuación (2) :

$$5\left(\frac{15-y}{3}\right)-4y=8.$$

Resolviendo esta ecuación, hallaremos sucesivamente :

$$75-5y-12y=24,$$
$$-17y=-51,$$

de donde $y=3.$

Si en la ecuación (3) sustituímos este valor, resultará :

$$x=\frac{15-3}{3} \quad \text{ó sea } 4.$$

Por lo tanto, los valores de las incógnitas son $x=4$, $y=3$.

2º *Apliquemos este método á la resolución del sistema literal siguiente :*

$$x-y=d, \tag{1}$$

$$\frac{x}{y}=q. \tag{2}$$

Despejemos la x en la ecuación (1),

$$x=d+y. \tag{3}$$

Sustituyamos este valor en la ecuación (2) :

$$\frac{d+y}{y}=q, \quad \text{ó sea} \quad d+y=qy.$$

Resolviendo esta ecuación, resulta :

$$qy-y=d,$$
$$y(q-1)=d,$$
$$y=\frac{d}{q-1}.$$

Sustituyamos este valor en la ecuación (3):

$$x=d+\frac{d}{q-1}.$$

Reduzcamos á un mismo denominador los dos términos del segundo miembro :

$$x=\frac{dq-d+d}{q-1}, \quad \text{ó sea} \quad x=\frac{dq}{q-1}.$$

Por lo tanto, los valores de las incógnitas serán :

$$x = \frac{dq}{q-1}, \quad y = \frac{d}{q-1}.$$

Nota. — Se usa ventajosamente el método por sustitución, cuando de úna de las ecuaciones se saca con facilidad el valor de la incógnita que se ha de eliminar, mientras la otra ecuación es complicada.

2º ELIMINACIÓN POR COMPARACIÓN.

89. Este método, llamado también de *igualación,* consiste en despejar una misma incógnita en ambas ecuaciones y en igualar sus valores.

EJEMPLOS.

1º *Resuélvase el sistema de dos ecuaciones :*

$$4x - y = -5, \tag{1}$$

$$5y + 8x = 32. \tag{2}$$

Despejemos la x en cada ecuación:

$$x = \frac{-5+y}{4}, \tag{3}$$

$$x = \frac{32-5y}{8}. \tag{4}$$

Por ser el valor de x igual en las dos ecuaciones (3) y (4), resulta :

$$\frac{-5+y}{4} = \frac{32-5y}{8}.$$

Esta ecuación, resuelta por el procedimiento ordinario, da :

$$y = 6.$$

Sustituyendo este valor en úna de las ecuaciones (3) y (4), tendremos :

$$x = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, los valores de las incógnitas serán :

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = 6.$$

2º *Apliquemos este método á la resolución del sistema literal siguiente:*

$$2x - y = a, \tag{1}$$

$$\frac{x}{2y} = m. \tag{2}$$

Despejemos la x en cada ecuación:

$$x = \frac{a + y}{2}, \tag{3}$$

$$x = 2my. \tag{4}$$

Igualando estos valores, tendremos sucesivamente:

$$2my = \frac{a + y}{2},$$

$$4my = a + y,$$

$$4my - y = a,$$

$$y(4m - 1) = a,$$

de donde
$$y = \frac{a}{4m - 1}.$$

Sustituyamos este valor en la ecuación (4):

$$x = 2m \times \frac{a}{4m - 1} = \frac{2am}{4m - 1}.$$

3º *Resuélvase el sistema siguiente:*

$$4x - 3y = 15, \tag{1}$$

$$5y + 4x = 39. \tag{2}$$

Podemos sacar el valor de $4x$ en las dos ecuaciones:

$$4x = 15 + 3y, \tag{3}$$

$$4x = 39 - 5y. \tag{4}$$

Igualemos estos valores:

$$15 + 3y = 39 - 5y,$$

$$8y = 24,$$

de donde
$$y = 3.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (3), resultará:

$$4x = 15 + 9 = 24,$$

de donde
$$x = \frac{24}{4} = 6.$$

3º Eliminación por reducción, llamada también eliminación por adición ó sustracción

90. Este método consiste en igualar el coeficiente de una misma incógnita en las dos ecuaciones ; en seguida :

1º Si la incógnita elegida tiene *signos contrarios* en los dos términos que la encierran, se suman ordenadamente las dos ecuaciones ;

2º Si la incógnita tiene *signos semejantes,* se resta la úna ecuación de la ótra. De este modo resulta una sola ecuación con una incógnita, que se resuelve por el procedimiento ordinario.

Ejemplos.

1º *Resuélvase el sistema de las dos ecuaciones :*

$$5x - y = 5, \qquad (1)$$

$$3y - 2x = 11. \qquad (2)$$

Para eliminar la x, multipliquemos por 2 los dos miembros de la primera ecuación y por 5 los de la segunda ; estas ecuaciones se transformarán en las siguientes :

$$10x - 2y = 10,$$

$$15y - 10x = 55.$$

Teniendo signos contrarios los términos que encierran la x, sumemos ordenadamente :

$$13y = 65,$$

de donde $y = 5.$

Sustituyendo este valor en úna de las ecuaciones (1) y (2), resultará :

$$5x - 5 = 5, \quad \text{de donde} \quad x = 2,$$

ó $$15 - 2x = 11, \quad \text{de donde} \quad x = 2.$$

Nota. — Este método es más rápido que los precedentes cuando úna incógnita tiene igual coeficiente en ambas ecuaciones, ó cuando con sólo una operación se lo puede igualar ; además tiene la ventaja de no introducir denominadores.

2º *Sean, por ejemplo, las ecuaciones :*

$$5x - 4y = 30,$$
$$8y + 5x = 90.$$

Restando la primera de la segunda, resulta :

$$12y = 60,$$

de donde $$y = 5.$$

Este valor, sustituído en la primera ecuación, da :

$$x = 10$$

3º *Sean las ecuaciones :*

$$6x - 5y = 8, \quad (1)$$
$$7y - 2x = 8. \quad (2)$$

Al multiplicar por 3 los dos miembros de la segunda, se convierte en

$$21y - 6x = 24. \quad (3)$$

Sumemos las ecuaciones (1) y (3) ; tenemos :

$$16y = 32,$$

de donde $$y = 2,$$

y, por lo tanto, $$x = 3.$$

4º *Apliquemos este método á la resolución del sistema siguiente :*

$$2x + y = s,$$
$$2x - y = d.$$

Sumemos las dos ecuaciones :

$$4x = s + d,$$

de donde $$x = \frac{s + d}{4}.$$

Restemos la segunda de la primera :

$$2y = s - d,$$

de donde $$y = \frac{s - d}{2}.$$

§ V. — Resolución de cualquier número de ecuaciones de 1er grado.

91. Para resolver tres ecuaciones con tres incógnitas, se despeja una incógnita en úna de las ecuaciones y se sustituye su valor en las ótras dos. Así resultan dos ecuaciones con dos incógnitas que se resuelven por los procedimientos ordinarios.

También puede despejarse una misma incógnita en las tres ecuaciones é igualar sus valores de dos en dos.

De un modo análogo hay que proceder para resolver cuatro, cinco, etc., ecuaciones, con cuatro, cinco, etc., incógnitas.

En la resolución de tres, cuatro, etc., ecuaciones con tres, cuatro, etc., incógnitas, pueden utilizarse indistintamente los varios métodos que acabamos de estudiar.

EJEMPLOS.

1º *Sea el sistema de tres ecuaciones :*

$$5x - y + 2z = 2, \quad (1)$$

$$3y - x + z = 15, \quad (2)$$

$$3x + 2y - z = -2. \quad (3)$$

Despejemos la x en úna de las ecuaciones, en la segunda por ejemplo, donde esta incógnita tiene -1 por coeficiente. Se tendrá :

$$x = -15 + 3y + z. \quad (4)$$

Sustituyendo este valor en las otras dos ecuaciones, resultará el sistema :

$$5(-15 + 3y + z) - y + 2z = 2,$$

$$3(-15 + 3y + z) + 2y - z = -2.$$

Simplifiquemos estas ecuaciones :

$$14y + 7z = 77,$$

$$11y + 2z = 43.$$

Resolviéndolas por medio de úno de los procedimientos conocidos, tendremos :

$$y = 3, \quad z = 5.$$

Estos valores sustituídos en úna de las ecuaciones (1), (2) ó (3) ó más sencillamente en (4), dan :

$$x = -1.$$

2º *Sea el sistema de tres ecuaciones :*

$$2x + 3y + 4z = 20, \qquad (1)$$

$$3x + 2z + 4y = 17, \qquad (2)$$

$$4x + 3z + 2y = 17. \qquad (3)$$

Despejemos la x en las tres ecuaciones :

$$x = \frac{20 - 3y - 4z}{2},$$

$$x = \frac{17 - 2z - 4y}{3},$$

$$x = \frac{17 - 3z - 2y}{4}.$$

Igualemos el primero de estos valores con el segundo y con el tercero :

$$\frac{20 - 3y - 4z}{2} = \frac{17 - 2z - 4y}{3},$$

$$\frac{20 - 3y - 4z}{2} = \frac{17 - 3z - 2y}{4}.$$

Simplifiquemos estas ecuaciones :

$$y + \ 8z = 26,$$

$$8y + 10z = 46.$$

Resolviendo este sistema por medio de úno de los métodos conocidos, resultará :

$$y = 2; \quad z = 3.$$

Sustituyendo estos valores en úna de las ecuaciones (1), (2) ó (3), se tiene :

$$x = 1.$$

92. Artificios de cálculo. — Siempre que se ha de resolver un sistema de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas, se pueden pasar por alto las reglas de eliminación para conseguir con mayor rapidez el resultado que se busca. Para ello, se suelen emplear varios artificios de cálculo que consisten : ora en la conveniente elección de las incógnitas que se deben eliminar, ora en la combinación de varias ecuaciones entre sí, ora en otros medios que sólo una larga práctica puede enseñar.

Hé aquí algunos ejemplos de estas simplificaciones.

1º *Sea de resolver el sistema siguiente :*

$$x - y = 30,$$

$$\frac{x}{40} = \frac{y}{30}.$$

Por ser la segunda ecuación compuesta de dos razones iguales, restemos los numeradores entre sí y los denomina dores también entre sí; la razón resultante será igual á cada úna de las primeras (nº 67) :

$$\frac{x-y}{10} = \frac{x}{40} = \frac{y}{30},$$

pero
$$x - y = 30,$$

luego
$$\frac{30}{10} = \frac{x}{40} = \frac{y}{30}.$$

Igualando la primera razón con cada úna de las ótras dos, tendremos :

$$x = 120, \quad y = 90.$$

2º *Sea de resolver las ecuaciones siguientes :*

$$x + y = 12,$$

$$x + z = 14,$$

$$y + z = 16.$$

Sumemos las tres ecuaciones, ordenadamente:

$$2x + 2y + 2z = 42,$$

ó sea
$$x + y + z = 21.$$

De esta última ecuación, restemos succsivamente cada úna de las tres primeras, y resultará :

$$z = 9, \quad y = 7, \quad x = 5.$$

3º *Sea de resolver el sistema siguiente :*

$$x + y = a, \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 = b^2. \quad (2)$$

La segunda ecuación puede ponerse (nº 34, 3º) en la forma siguiente :

$$(x + y)\ (x - y) = b^2. \quad (3)$$

Dividamos ordenadamente las ecuaciones (3) y (1) :

$$\frac{(x + y)\ (x - y)}{x + y} = \frac{b^2}{a}.$$

Suprimiendo el factor $x + y$, común al numerador y denominador del primer miembro, tendremos :

$$x - y = \frac{b^2}{a}. \quad (4)$$

Sumemos las ecuaciones (1) y (4) :

$$2x = a + \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + b^2}{a};$$

de donde
$$x = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Restemos la ecuación (4) de la ecuación (1) :

$$2y = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a};$$

de donde
$$y = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

§ VI. — Problemas de 1er grado.

93. La resolución de todo problema algebraico exige dos operaciones : 1º plantear el problema, ó sea expresar las condiciones del mismo, por medio de una ó más ecuaciones; 2º resolver la ecuación ó las ecuaciones que resultan.

Un problema es *determinado* cuando, según los datos, admite *tantas ecuaciones diferentes* como incógnitas contiene; é *indeterminado* en el caso contrario.

94. Planteo de los problemas. — No existe una regla general que facilite el hallar inmediatamente la ecuación ó las ecuaciones que corresponden á los datos de un problema.

Pero, en la mayor parte de los casos, puede adoptarse el procedimiento siguiente : suponer hallada la respuesta, é indicar, por medio de signos algebraicos, las operaciones que se han de efectuar para comprobar la exactitud del resultado.

PROBLEMA I. *¿ Cuál es el número que aumentado con 24 llega á ser cinco veces mayor de lo que era antes?*

Sea x este número.

Por hipótesis tenemos : $x + 24 = 5x$,

ó sea $24 = 4x$,

de donde $x = 6$.

PROBLEMA II. *La suma de las edades de 3 personas es de 85 años; calcular la edad de cada úna, sabiendo que la edad de la segunda es el doble de la edad de la primera, y que la tercera tiene 15 años menos que la segunda.*

Representando por x la edad de la primera, la edad de la segunda será $2x$, y la de la tercera $2x - 15$.

La suma de las tres edades es igual á 85; luego :

$$x + 2x + 2x - 15 = 85,$$

$$5x = 85 + 15,$$

$$x = \frac{100}{5} = 20.$$

La primera persona tiene 20 años, la segunda 40, y la tercera $40 - 15$, ó sea 25 años.

PROBLEMA III. *Un labrador que tenía 150 pesetas antes de recibir el precio de 7 costales de trigo, debe desembolsar los $^3/_4$ de su dinero por el arrendamiento de su casa, en seguida vende 5 costales más, y al mismo precio que los primeros; entonces tiene 159 pesetas. ¿Cuál es el precio de un costal de trigo?*

Sea x el precio del costal de trigo.

Después de recibir el precio de 7 costales, tendrá :

$$150 + 7x$$

al desembolsar los $^3/_4$ de su dinero, le quedará

$$\frac{150 + 7x}{4}.$$

Cuando haya vendido los 5 costales :

$$\frac{150 + 7x}{4} + 5x.$$

Pero tiene entonces 159 pts.; por lo tanto :

$$\frac{150 + 7x}{4} + 5x = 159.$$

Resolviendo esta ecuación, tendremos :

$$150 + 7x + 20x = 636,$$
$$27x = 636 - 150 = 486,$$
$$x = \frac{486}{27} = 18$$

Precio del costal : 18 pesetas.

Problema IV. *Dos jornaleros trabajan juntos; el primero gana un tercio más que el segundo. Al cabo de cierto tiempo, el primero, que ha trabajado 5 días más que el segundo, recibe 100 pts., el ótro 60. ¿ Cuánto gana cada úno de ellos por día?*

Llamando x lo que gana el segundo, lo que gana el primero será : $x + \frac{x}{3}$, ó sea $\frac{4x}{3}$.

Llamando y el tiempo durante el cual ha trabajado el segundo, tendremos las ecuaciones :

$$\frac{4x}{3}(y + 5) = 100,$$
$$xy = 60.$$

De la segunda se deduce que $y = \frac{60}{x}$.

Este valor, sustituído en la primera, nos da :

$$\left(\frac{60}{x} + 5\right)\frac{4x}{3} = 100,$$
$$\frac{60 + 5x}{x} \times \frac{4x}{3} = 100.$$

Quitemos x, común al numerador y denominador del primer miembro :

$$(60+5x)\frac{4}{3}=100,$$

$$240+20x=300,$$

$$x=\frac{300-240}{20}=3.$$

El segundo gana 3 pesetas, y 4 el primero. El segundo trabaja $\frac{60}{3}$ ó sea 20 días, y el primero 25 días.

Problema V. *Dado un triángulo* ABC, *¿ á qué distancia de* C, *sobre* CB, *hay que trazar una paralela á la base* AC *para que esta paralela resulte igual á la diferencia de los segmentos* EC *y* BE?

Sea $CE=x$; hemos de tener : $DE=EC-BE$.

Representando BC por a, y AC por b, tendremos :

$BE=a-x$, y $DE=x-(a-x)$,

ó sea $DE=2x-a$.

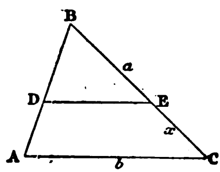

Fig. 1.

De la semejanza de los triángulos BDE y CBA resulta :

$$\frac{BE}{DE}=\frac{BC}{AC},$$

ó sea
$$\frac{a-x}{2x-a}=\frac{a}{b},$$

de donde
$$ab-bx=2ax-a^2,$$

$$2ax+bx=a^2+ab,$$

$$x(2a+b)=a(a+b),$$

$$x=\frac{a(a+b)}{2a+b}.$$

Problema VI. *Dada la suma* s *y la diferencia* d *de dos cantidades, hallar estas cantidades.*

1º *Con una incógnita.* Llamando x á la cantidad mayor, la menor será $x-d$, y la suma $x+x-d$; luego :

$$x+x-d=s,$$

de donde $$x = \frac{s+d}{2}.$$

La cantidad menor será :

$$x - d = \frac{s+d}{2} - d = \frac{s-d}{2}.$$

2º *Con dos incógnitas.* Llamando x á la cantidad mayor, y á la menor, tendremos :

$$x + y = s,$$
$$x - y = d.$$

Sumando ordenadamente :

$$2x = s + d,$$

de donde $$x = \frac{s+d}{2} = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}. \qquad (1)$$

Restando la segunda ecuación de la primera :

$$2y = s - d,$$

de donde $$y = \frac{s-d}{2} = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}. \qquad (2)$$

95. De las fórmulas (1) y (2) se infiere que cuando se conocen la suma y la diferencia de dos cantidades, *la cantidad mayor es igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia de ellas, y la menor á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia de las mismas.*

PROBLEMA VII. *Dados los tres lados de un triángulo:* $a = 14^m$, $b = 15^m$, $c = 13^m$; *por un punto de* a, *trazar paralelas á los otros dos lados, de modo que la suma de estas paralelas sea igual á la suma de los dos segmentos que quedan encima de la paralela á la base* b.

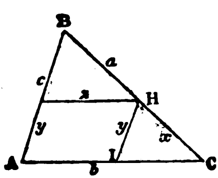

Fig. 2.

Sea $CH = x$; tracemos las paralelas z, y á los otros dos lados.

De la semejanza de los triángulos CHI y CBA, resulta :

$$\frac{CH}{CB} = \frac{HI}{BA} = \frac{IC}{AC},$$

ó sea $$\frac{x}{14}=\frac{y}{13}=\frac{15-z}{15}. \quad (1)$$

Por hipótesis tenemos también :

$$y+z=14-x+13-y,$$
$$2y+z+x=27. \quad (2)$$

Igualando la primera de las razones de (1) con cada úna de las ótras dos, resultará :

$$y=\frac{13x}{14} \quad \text{y} \quad z=\frac{210-15x}{14}.$$

Sustituyamos estos valores en la ecuación (2), y resolvamos :

$$\frac{26x}{14}+\frac{210-15x}{14}+x=27,$$
$$26x+210-15x+14x=378,$$
$$25x=168,$$
$$x=\frac{168}{25}=6^{\text{m}},72.$$

Entonces $$a-x=14-6,72=7,28,$$
$$y=\frac{13x}{14}=\frac{13\times 6,72}{14}=6,24,$$

por lo tanto $$c-y=6,76,$$

y $$z=\frac{210-15x}{14}=\frac{210-100,8}{14}=7,80.$$

PROBLEMA VIII. *Los tres lados de un triángulo son* a, b, c; *trazar una paralela á un lado cualquiera,* a *por ejemplo, de modo que el triángulo que resulte tenga igual perímetro que el trapecio restante.*

Sean $AD=x$, $AE=y$, $DE=z$ los lados determinados por la paralela DE.

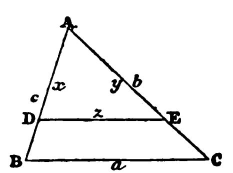

Fig. 8.

Tenemos :

$$x+y+z=a+z+c-x+b-y,$$

ó sea $$x+y=\frac{a+b+c}{2}. \quad (1)$$

Á causa de la paralela, tenemos también:

$$\frac{x}{y}=\frac{c}{b}. \tag{2}$$

De esta última ecuación resulta:

$$y=\frac{bx}{c}. \tag{3}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1) tenemos suce sivamente:

$$x+\frac{bx}{c}=\frac{a+b+c}{2},$$

$$2cx+2bx=c(a+b+c),$$

$$x(2b+2c)=c(a+b+c),$$

$$x=\frac{c(a+b+c)}{2(b+c)}. \tag{A}$$

Sustituyamos este valor en la ecuación (3):

$$y=\frac{bc(a+b+c)}{2c(b+c)}=\frac{b(a+b+c)}{2(b+c)}. \tag{B}$$

Nota. — Cuando el triángulo es equilátero,

$$a=b=c,$$

y las fórmulas A y B se convierten en

$$x=y=\frac{3a^2}{4a}, \quad \text{ó sea} \quad \frac{3a}{4}.$$

La ecuación (1) manifiesta que la suma de los lados x, y del triángulo pedido es igual al semiperímetro del triángulo dado.

Problema IX. *Un tío quiere repartir* 169550 pts. *entre sus tres sobrinos que tienen respectivamente* 15, 13 *y* 9 *años de edad; la repartición debe hacerse de modo que las partes, aumentadas con los intereses al* 4 % *al año, sean iguales cuando los sobrinos alcancen su mayoría; ¿ cuál es la suma que debe recibir cada úno de ellos ?*

Sean x, y, z las partes respectivas.

Para el primero, la suma x producirá interés durante 6 años y se convertirá en

$$x+\frac{4\times x\times 6}{100}, \quad \text{ó sea} \quad \frac{31x}{25}.$$

Para el segundo, la suma y producirá interés durante 8 años y se convertirá en

$$y+\frac{4\times y\times 8}{100}, \quad \text{ó sea} \quad \frac{33y}{25}.$$

Para el tercero, la suma z producirá interés durante 12 años y se convertirá en

$$z+\frac{4\times z\times 12}{100}, \quad \text{ó sea} \quad \frac{37z}{25}.$$

Entonces las partes serán iguales; luego

$$\frac{31x}{25}=\frac{33y}{25}=\frac{37z}{25}, \tag{1}$$

y

$$x+y+z=169550. \tag{2}$$

En la ecuación (1) igualemos la primera razón con cada úna de las ótras dos :

$$y=\frac{31x}{33} \quad \text{y} \quad z=\frac{31x}{37}. \tag{3}$$

Estos valores sustituídos en la ecuación (2) dan :

$$x+\frac{31x}{33}+\frac{31x}{37}=169550,$$

$$1221x+1147x+1023x=169550\times 1221,$$

$$3391x=169550\times 1221,$$

$$x=\frac{169550\times 1221}{3391}=61050.$$

Sustitúyamos este valor en las ecuaciones (3) :

$$y=\frac{31\times 61050}{37}=57350,$$

$$z=\frac{31\times 61050}{37}=51150.$$

Problema X. *Repartir* 25288 pts. *entre tres niños, en partes inversamente proporcionales á sus edades; el primero* *tiene* 8 *años y seis meses, el segundo* 6 *años y* 4 *meses, el tercero* 5 *años y* 3 *meses.*

8 años y 6 meses, ú 8 años $^1/_2$ son $\frac{17}{2}$,

6 años y 4 meses, ó 6 años $^1/_3$ son $\frac{19}{3}$,

5 años y 3 meses, ó 5 años $^1/_4$ son $\frac{21}{4}$.

Llamando $x, y, z,$ las partes respectivas, tendremos las razones iguales :

$$\frac{x}{\frac{2}{17}} = \frac{y}{\frac{3}{19}} = \frac{z}{\frac{4}{21}}. \qquad (A)$$

Los quebrados numéricos reducidos á un mismo denominador se convierten en los siguientes :

$$\frac{798}{6783}, \quad \frac{1071}{6783}, \quad \frac{1292}{6783}.$$

Las razones de la serie (A) pueden sustituirse con las razones iguales :

$$\frac{x}{798} = \frac{y}{1071} = \frac{z}{1292}.$$

Pero $x + y + z = 25288$ y $798 + 1071 + 1292 = 3161$.

Luego (nº 67) :

$$\frac{25288}{3161} = \frac{x}{798} = \frac{y}{1071} = \frac{z}{1292}.$$

Igualando la primera razón con cada úna de las ótras tres, resultará :

$$x = \frac{25288 \times 798}{3161} = 6384 \text{ pts};$$

$$y = \frac{25288 \times 1071}{3161} = 8568 \text{ pts};$$

$$z = \frac{25288 \times 1292}{3161} = 10336 \text{ pts}.$$

§ VII. — Interpretación de los valores negativos que se encuentran en la resolución de un problema.

96. La resolución de un problema conduce á veces á un valor negativo; puede decirse ordinariamente en este caso que hay incompatibilidad entre las condiciones del supuesto, y que el problema es imposible.

Sin embargo hay cantidades tales como la duración, el espacio, los grados de temperatura, etc., *que se pueden contar en dos sentidos, inverso úno de ótro* (nº 14); en este caso, la solución negativa indica que el valor encontrado por respuesta debe tomarse en sentido inverso de aquél en que primitivamente se le había considerado, á no ser que la pregunta propuesta no admita una solución de esta clase.

Sábese, por ejemplo, que el cero de la escala del termómetro centígrado corresponde á la temperatura del hielo, y que las divisiones colocadas sobre cero, en la escala, indican temperaturas superiores, en tanto que las que van indicadas bajo cero designan temperaturas inferiores. Un valor negativo de — 6º, por ejemplo, encontrado en un problema significa que se deben tomar seis divisiones *bajo cero* y no sobre cero.

De igual modo, si se trata de la duración, y la respuesta de un problema ha sido negativa, de — 14 años por ejemplo, habrá que contar 14 años antes de la época tomada por origen en el cálculo de la duración.

El espacio también puede contarse en ambos sentidos; si se conviene en considerar como *positivas* las distancias que en una línea indefinida, *xy* por ejemplo, se reco-

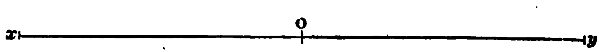

Fig. 4.

rren de *izquierda á derecha*, comenzando en un punto O, tomado por origen, se considerarán como *negativas* las recorridas de *derecha á izquierda* contando desde dicho punto.

97. Preciso es también recordar que los signos $+$ ó $-$ indican una adición ó una sustracción que debe efectuarse, y sólo en sentido lato se llama positiva la cantidad que va precedida del signo $+$, y negativa la precedida del signo $-$.

Débese, por lo tanto, distinguir en toda cantidad algebraica el valor absoluto y el relativo (nº 16). Así, -4 tiene por valor absoluto cuatro unidades, y por valor relativo cuatro unidades que se deben restar; de igual modo $+m$ tiene por valor absoluto m, que puede ser negativo ó positivo según esta letra represente un número positivo ó uno negativo; y su valor relativo es m, que se debe añadir.

Á continuación resolvemos algunos problemas que presentan soluciones negativas.

I. *Un padre de familia tiene 39 años de edad, y su hijo 15; ¿ dentro de cuánto tiempo será la edad del padre el triple de la de su hijo ?*

Sea x el tiempo pedido; después de x años la edad del padre será de $39+x$, y la del hijo de $15+x$.

Luego
$$39+x=3(15+x),$$
$$39+x=45+3x,$$
$$-6=2x,$$
$$x=-3 \text{ años}.$$

La respuesta negativa -3 manifiesta que el tiempo pedido no se hallará en lo venidero, sino en lo pasado. En efecto, hace tres años que el padre tenía tres veces la edad de su hijo, pues á la sazón, el primero tenía 36 años y el segundo 12.

Modificando el supuesto como lo hacemos á continuación, tendremos una solución positiva :

Un padre tiene 39 años y su hijo 15; ¿ cuánto tiempo hace que la edad del primero era el triple de la del segundo ?

Se tiene :
$$39-x=3(15-x),$$
de donde
$$x=3 \text{ años}.$$

II. *Un aljibe está provisto de tres llaves; la primera lo llenaría en 8 horas, la segunda en 12 horas, pero la tercera* *lo vaciaría en 3 horas. Si se abren á un mismo tiempo las tres llaves, ¿ cuánto tardará en llenarse ese aljibe ?*

Representemos por x el tiempo pedido y por 1 la capacidad del aljibe.

En 1 hora la primera llave llenará $\frac{1}{8}$ del aljibe.

» segunda » » $\frac{1}{12}$ »

» tercera » vaciará $\frac{1}{3}$ ».

Restando el tercer quebrado de la suma de los ótros dos, resultará :

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{3},$$

que representa la cantidad de agua que debería quedar en el aljibe al cabo de una hora. Multiplicando por x este resultado, tendremos la ecuación :

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)x=1,$$

ó sea

$$(3+2-8)x=24,$$

$$-3x=24,$$

$$x=-\frac{24}{3}=-8 \text{ horas.}$$

Este resultado negativo manifiesta que es imposible el problema.

En efecto, hay incompatibilidad en las condiciones del supuesto, pues la suma de los quebrados $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$ ó $\frac{5}{24}$ es menor que $\frac{1}{3}$ ú $\frac{8}{24}$. Por lo tanto, no se llenará el aljibe, siendo menor la cantidad de agua dada por las dos primeras llaves que la que deja vaciar la tercera.

Sería posible el problema, modificando el supuesto en la siguiente forma :

Un aljibe está provisto de tres llaves ; la primera lo llenaría en 8 horas, la segunda en 12 horas, pero la tercera lo vaciaría en 3 horas : ¿ cuánto tiempo tardará en vaciarse ese aljibe que se supone estar lleno de agua ?

La ecuación en este caso sería :

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)x=1,$$

de donde $x=8$ horas.

III. *Dos viajeros toman la dirección de la ciudad* D : *el primero que anda* 18 *km. por hora sale de* A; *el segundo sale de* B *á la misma hora y camina* 12 *km. por hora. ¿ Á qué distancia de* C *se encontrarán, sabiendo que* A *dista de* B 120 *km., y* B *de* C, 280?

Llamemos x esta distancia, y E el punto de encuentro que supondremos colocado más allá de C en el camino de D.

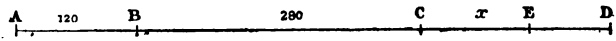

Fig. 5.

El viajero que sale de A caminará :

$$120+280+x \text{ km.};$$

el que sale de B caminará :

$$280+x \text{ km.}$$

Tiempo empleado por el primer viajero :

$$\frac{120+280+x}{18};$$

tiempo empleado por el segundo :

$$\frac{280+x}{12}.$$

Siendo iguales estos tiempos, tenemos la ecuación

$$\frac{120+280+x}{18}=\frac{280+x}{12},$$

de donde $x=-40$ km.

Esta respuesta negativa manifiesta que el punto E se hallará 40 km. antes de C.

El supuesto del problema, modificado como se ve á continuación, dará una solución positiva.

Dos viajeros toman la dirección de la ciudad D : *el primero que anda* 18 *km. por hora sale de* A; *el segundo sale de* B *á la misma hora y camina* 12 *km. por hora. ¿ Á qué* *distancia antes de C se encontrarán, sabiendo que A dista de B 120 km., y B de C, 280 ?*

La ecuación será :

$$\frac{120+280-x}{18}=\frac{280-x}{12},$$

de donde $x=40$ km.

98. Nota. — De los ejemplos que anteceden se infiere : 1º Que una solución negativa manifiesta á menudo que la cantidad hallada ha de tomarse en sentido contrario al que se lee en el supuesto; 2º que una solución negativa puede también manifestar la imposibilidad del problema.

99. Cuando la solución de un problema resulta negativa :

1º *Hay que cerciorarse de que no se ha hecho hipótesis falsa; pues en este caso hay que rectificar la ecuación;*

2º *Ver si el supuesto del problema no encierra alguna incompatibilidad en el sentido de las condiciones dadas.*

3º *Asegurarse de que la cantidad encontrada puede tomarse en sentido contrario al que se ha considerado en la preparación de la ecuación.*

100. Cuando en un problema la incógnita puede contarse en dos sentidos opuestos, hay que elegir *un sentido positivo* para esta incógnita, y designar por x su valor algebraico. En seguida se rectifica el supuesto en un sentido más general que admita la interpretación negativa de la respuesta encontrada.

§ VIII. — De varios casos de imposibilidad.

101. No es una solución negativa el único indicio de la imposibilidad de un problema, pues esta imposibilidad puede presentarse bajo otras formas que es muy útil conocer.

Un problema puede ser *imposible* :

1º En el caso en que las ecuaciones que se formulen no tengan solución ;

2º Cuando las soluciones de las ecuaciones no convengan al supuesto, porque las cantidades que se buscan han de satisfacer ciertas condiciones restrictivas

EJEMPLOS. I. *¿Cuántos alumnos hay en una aula, sabiendo que la tercera parte de ellos escriben, los dos quintos calculan, y los 9 restantes dibujan?*

Sea x el número de alumnos; tendremos la ecuación

$$\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}+9=x,$$

$$5x+6x+15\times 9=15x,$$

$$4x=135,$$

$$x=\frac{135}{4}=33{,}75.$$

El problema es imposible, por exigir la naturaleza de la cuestión que sea entero el valor de x.

II. *Hallar un número tal que su mitad más 6 sea igual á dos veces su cuarta parte más 4.*

Sea x este número; se tendrá :

$$\frac{x}{2}+6=2\left(\frac{x}{4}+4\right),$$

$$\frac{x}{2}+6=\frac{x}{2}+8,$$

$$x+12=x+16,$$

$$x-x=4, \quad \text{ó sea} \quad x(1-1)=4,$$

ó

$$0\times x=4.$$

Este problema es imposible, porque no tiene solución la ecuación obtenida.

III. *Hallar dos números tales que dos veces el primero menos tres veces el segundo igualen á 15, y que cuatro veces el primero menos seis veces el segundo igualen á 42.*

Tenemos por hipótesis :

$$2x-3y=15, \tag{1}$$

$$4x-6y=42. \tag{2}$$

Multiplicando por 2 los dos miembros de la ecuación (1), tendremos :

$$4x-6y=30.$$

Pero la misma cantidad $4x-6y$ no puede, á un mismo tiempo, ser igual á 30 y á 42 (2).

Luego las ecuaciones son incompatibles, y por lo tanto es imposible el problema.

IV. *Un jornalero tenía* 125 *pts. cuando se le pagaron* 15 *jornales; hizo entonces un gasto de* 50 *pts. y le quedaron* 30; *hallar el precio del jornal.*

Sea x el precio pedido; se tiene:

$$125 + 15x - 50 = 30,$$
$$15x = 30 + 50 - 125,$$
$$15x = -45,$$
$$x = \frac{-45}{15} = -3.$$

El problema es imposible, por exigir la naturaleza de la cuestión que sea positivo el valor de x.

§ IX. — Problemas indeterminados.

102. Ya hemos visto (nº 93) que un problema es *indeterminado* cuando su supuesto admite menos ecuaciones que incógnitas.

Sea de resolver la cuestión siguiente:

Hallar dos números de modo que la diferencia entre el duplo del primero y el triple del segundo sea 40.

Representando por x, y los números pedidos, se tiene la ecuación única

$$2x - 3y = 40,$$

de donde
$$x = \frac{40 + 3y}{2}.$$

Si se dan á y valores cualesquiera 1, 2, 3, 4..., se halla sucesivamente:

$$x = \frac{43}{2}, \quad x = 23, \quad x = \frac{49}{2}, \quad x = 26...$$

Luego, hay infinidad de soluciones, y el problema es indeterminado.

103. Sin embargo, hay problemas indeterminados en los que las condiciones del supuesto no autorizan sino un número limitado de soluciones; como por ejemplo los siguientes:

I. *Hallar dos números enteros en los que la diferencia de sus cuadrados sea* 15.

Sean x, y los números enteros pedidos.

Tenemos la ecuación única

$$x^2 - y^2 = 15,$$

que podemos escribir (nº 34) :

$$(x + y)(x - y) = 15.$$

Siendo enteros los números pedidos, la suma y la diferencia de los mismos serán números enteros.

Pero 15 es el producto de los números enteros 5 por 3, ó el de 15 por 1.

Escribamos :

$$\begin{aligned} x + y &= 5, \qquad \text{y} \qquad & x + y &= 15, \\ x - y &= 3, & x - y &= 1. \end{aligned}$$

Estos dos sistemas resueltos por la fórmula del nº 90 dan

1º $\qquad x = 4, \quad y = 1,$

2º $\qquad x = 8, \quad y = 7.$

El problema tiene sólo dos soluciones.

II. *Con monedas de* 5 *y* 10 *céntimos, cuyos diámetros respectivos son de* 25 *y* 30 *mm., representar la longitud de un metro colocándolas únas al lado de ótras.*

Llamando x el número de monedas de 10 céntimos, y el de las de 5 céntimos, tendremos la ecuación :

$$30x + 25y = 1000,$$

ó, dividiendo ambos miembros por 5 :

$$6x + 5y = 200, \tag{1}$$

de donde
$$x = \frac{200 - 5y}{6}. \tag{2}$$

La naturaleza de la cuestión exige que los valores de x y de y no sean nulos y que sean enteros; por lo tanto el número de soluciones es limitado. Para hallar estas soluciones, escribamos la ecuación (2) :

$$x = \frac{200}{6} - \frac{5y}{6}, \quad \text{ó} \quad x = 33 + \frac{2}{6} - \frac{5y}{6}, \tag{3}$$

pero no será entero el valor de x á menos que lo sea el de la expresión $\frac{2-5y}{6}$; escribamos:

$$\frac{2-5y}{6}=v,$$

siendo v un número entero.

La ecuación (3) puede tomar la forma

$$x=33+v. \tag{4}$$

De la ecuación $\frac{2-5y}{6}=v$ resulta:

$$y=\frac{2-6v}{5}=-v+\frac{2}{5}-\frac{v}{5}. \tag{5}$$

Debiendo ser entero el valor de y, la expresión $\frac{2-v}{5}$ ha de serlo también; luego, escribamos:

$$\frac{2-v}{5}=t.$$

Y la ecuacion (5) se convierte en

$$y=-v+t. \tag{6}$$

La ecuación $\frac{2-v}{5}=t$ da:

$$v=2-5t, \quad \text{expresión entera.}$$

Este valor de v sustituído en las ecuaciones (4) y (6), resulta:

$$x=33+2-5t=35-5t, \tag{7}$$
$$y=2+5t+t=6t-2. \tag{8}$$

Ya que x, y han de ser mayores que cero, escribamos:

$$33-5t>0, \quad \text{de donde} \quad t<7;$$

$$6t-2>0, \quad \text{de donde} \quad t>\frac{1}{3}.$$

Luego, debiendo t ser un número entero mayor que $\frac{1}{3}$ y menor que 7, valdrá 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Sustituyendo estos valores en cada úna de las ecuaciones (7) y (8), resultará:

Para $t=$	1,	2,	3,	4,	5,	6,
$x=$	30,	25,	20,	15,	10,	5,
$y=$	4,	10,	16,	22,	28,	34.

Puede comprobarse que estos valores de x, y proporcionan una solución de la cuestión.

104. El procedimiento que acabamos de indicar es general pero largo; en muchos casos, algunas relaciones entre las incógnitas facilitan las simplificaciones y conducen al resultado con mayor rapidez.

EJEMPLO. *Se han comprado* 100 *piezas de caza por* 100 *pts.; las liebres valen* 5 *pts., las perdices* 1 *pta., y las alondras* 5 *céntimos; ¿ cuántas hay de cada clase?*

Llamando x el número de liebres, y el de perdices y z el de alondras, tendremos las dos ecuaciones :

$$x+y+z=100, \tag{1}$$
$$5x+y+0{,}05z=100. \tag{2}$$

Restemos la primera de la segunda

$$4x+0{,}05z-z=0,$$

ó

$$80x=19z. \tag{3}$$

En vez de buscar el valor de x en función de z, y decir que este valor es entero, demos á la ecuación (3) la forma siguiente

$$\frac{x}{z}=\frac{19}{80}.$$

Siendo los números 19 y 80 primos entre sí, los valores de x y z serán 19 ú 80, ó múltiplos de estos números; pero todos los múltiplos de 80 son mayores que 100; luego 19 y 80 son los únicos valores que puedan admitirse para x y z:

$$x=19, \quad z=80, \quad \text{y por lo tanto,} \quad y=1.$$

Habrá 19 liebres, 1 perdiz y 80 alondras.

105. No sólo es *indeterminado* un problema cuando el supuesto no proporciona tantas ecuaciones como incógnitas encierra, sino también :

1º Cuando una ecuación aparente es en realidad una identidad;

2º Cuando una ecuación puede reproducir idénticamente á ótra, lo que ocurre, por ejemplo, cuando los términos de una ecuación son múltiplos de los de ótra.

EJEMPLO. *¿ Cuál es el número que, disminuído de su mitad y de* 8, *resulta igual á* 4 *veces su octava parte menos* 2?

Tenemos : $$x - \frac{x}{2} - 8 = 4\left(\frac{x}{8} - 2\right).$$

Esta ecuación resuelta, da :

$$8x - 4x - 64 = 4x - 64, \qquad (1)$$

$$8x - 8x = 64 - 64, \qquad (2)$$

$$0 \times x = 0,$$

$$x = \frac{0}{0}.$$

El problema es indeterminado.

No hay que maravillarse de este resultado si se nota, como lo manifiesta la ecuación (2), que la igualdad proporcionada por el supuesto es una *identidad.*

106. Nota. — El resultado $0 \times x = 0$ ó $x = \frac{0}{0}$, encontrado en la resolución de un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, indica que dos ó más de dichas ecuaciones expresan una misma condición.

EJEMPLO. *Hallar dos números tales que* 2 *veces el primero menos* 3 *veces el segundo den* 5, *y que* 10 *veces el primero menos* 25 *sea igual á* 15 *veces el segundo.*

Resulta $$2x - 3y = 5,$$

$$10x - 25 = 15y.$$

Despejemos la x en la primera ecuación :

$$x = \frac{5 + 3y}{2}.$$

Sustituyamos este valor en la segunda :

$$\frac{10(5+3y)}{2}-25=15y,$$

$$50+30y-50=30y,$$

$$50-50+30y-30y=0$$

$$0+y\,(30-30)=0$$

$$y\times 0=0$$

$$y=\frac{0}{0}$$

Hay indeterminación. Se ve, en efecto, que la segunda ecuación, que puede escribirse $10x-15y=25$, no es sino la primera cuyos términos se han multiplicado por 5.

§ X. — De las desigualdades.

107. Definición. — *Desigualdad* es la expresión de la falta de igualdad entre dos cantidades.

EJEMPLO $5x+4>4x+2.$

El primer miembro de una desigualdad es la cantidad que está á la izquierda del signo $>$ ó $<$; el segundo, la cantidad que está á la derecha.

En las desigualdades se pueden efectuar las más de las transformaciones que se efectúan en las ecuaciones.

108. Propiedades. I. — *Puédese, sin alterar una desigualdad, sumar ó restar una misma cantidad á sus dos miembros.*

En efecto, si tenemos $m>n,$ tendremos también :

$$m+p>n+p \quad \text{y} \quad m-p>n-p,$$

pues la diferencia entre m y n existe aun cuando se ha añadido p á sus dos miembros, ó restado de ellos la misma cantidad.

De donde se infiere que se puede trasladar un término de un miembro á ótro, cambiando su signo. No obstante no se pueden cambiar los signos de todos los términos de una desigualdad sino alterando el sentido de la misma (2ª propiedad).

Sea la desigualdad $9 > 4$.

Si mudamos los signos, los dos términos serán negativos, y ya sabemos (nº 20) que un número negativo es tanto menor cuanto mayor es su valor absoluto, luego hay que escribir $-9 < -4$.

109. II — *Puédese, sin alterar una desigualdad, multiplicar ó dividir todos sus términos por un mismo número positivo;* pues, si dos cantidades son desiguales, el duplo, el triple, la mitad, la décima parte, etc. de las mismas serán desiguales.

Pero si se multiplican ó dividen por un número *negativo* todos los términos de una desigualdad, se cambia el sentido de la misma.

110. III. — *Puédese sumar ordenadamente varias desigualdades de igual sentido, y resulta otra desigualdad del mismo sentido que las primeras;* pues, siendo por ejemplo los primeros miembros mayores que los segundos, la suma de aquéllos resultará aún mayor que la de éstos.

Pero si se suman desigualdades de sentido contrario, no puede conocerse el sentido de la desigualdad resultante, ni siquiera saberse si el resultado expresará una desigualdad.

Tampoco se pueden restar úna de ótra dos desigualdades de igual sentido.

111. IV — *Puédese elevar á una misma potencia los dos miembros de una desigualdad cuando son esencialmente positivos;* pues, si el primer miembro es mayor que el segundo, su cuadrado, por ejemplo, será también mayor que el del segundo.

EJERCICIO I. *Hallar un número entero tal, que sus* $^3/_5$ *menos* 12, *sean mayores que su mitad más* 2.

Llamando x al número, tenemos por hipótesis :

$$\frac{3x}{5} - 12 > \frac{x}{2} + 2.$$

Quitemos los denominadores, como si se tratara de una ecuación, y tendremos :

$$6x - 120 > 5x + 20,$$

ó sea $$x > 140.$$

Luego, todos los números enteros mayores que 140 cumplen la condición.

EJERCICIO II. *¿ Cuáles son los números enteros, positivos ó negativos, que verifican las dos desigualdades siguientes ?*

$$5x - 6 > 3x - 14,$$

$$\frac{7x + 6}{2} < x + 12.$$

De la primera, resulta $x > -4$,

de la segunda, $x < \frac{18}{5}$, ó sea $3 + \frac{3}{5}$.

Luego, los números pedidos serán :

$$-3 - 2 - 1 . 0 . 1 . 2 . 3,$$

pues todos están comprendidos entre -4 y $+3\frac{3}{5}$.

PARTE SEGUNDA

Resolver las ecuaciones siguientes :

1° Con una incógnita.

1. $9x + 8 = 7x + 16.$	**8.** $x + 17 = 3x + 1.$
2. $5x - 2 = 3x + 8.$	**9.** $13 + 23x = 49x - 13.$
3. $3x + 10 = 45 - 2x.$	**10.** $11x - 100 = 2x - 1.$
4. $9x - 11 = 8x - 2.$	**11.** $5x - 4 = 4x + 13.$
5. $47 - 2x = 5 + 12x.$	**12.** $8x - 11 = 7x + 3.$
6. $7x + 9 = 57 - x.$	**13.** $13x + 8 = 11x + 40$
7. $17x - 1 = 3 + 15x.$	**14.** $2x + 19 = x + 23.$

15. $7x + 1 = 9x - 29.$

16. $25 - 2x = 3x - 80.$

17. $33 - 2x = 4x - 63.$

18. $7x - 19 = 117 - x.$

19. $9x - 1 = 107 - 3x.$

20. $5x - 4 = 38 - x.$

21. $4x - 7 = 8x - 9.$

22. $9x + 1 = 9 - 3x.$

23. $16x - 3 = 3 - 8x.$

24. $9 + 5x = 15x + 7.$

25. $4x + 7 = 1 + 12x.$

26. $19 + 8x = 12x + 14.$

27. $7x - 3 = 21x - 9.$

28. $18x + 11 = 32 - 9x.$

29. $15x - 17 = 10x - 13.$

30. $21x + 1 = 30x - 11.$

31. $6x + 25 = 31 + 2x.$

32. $18x - 3 = 5 + 9x.$

33. $40x - 69 = 4x - 6.$

34. $1 + 80x = 8x + 46.$

35. $36x - 5 = 2 - 6x.$

36. $8x + 9 = 1 + 72x.$

37. $15 + 11x = 22x + 10.$

38. $5x - 11 = 15x - 33.$

39. $30x + 7 = 27 + 6x.$

40. $16x - 2 = 24x - 13.$

41. $3(x - 1) = x + 11.$

42. $3x + 7 = 2(8 + x).$

43. $5(4 + x) = 7x - 2.$

44. $x + 10 = 10(x - 8).$

45. $5(1 + 4x) = 7 + 12x.$

46. $4(3x + 5) - 70 = 2x.$

47. $3(3 + 4x) - 15 = 4x.$

48. $5x - 2 = 2(5 + 2x).$

49. $5x = 8(5x - 3) - 4.$

50. $7(7x - 24) - 16 = 3x.$

51. $6x = 9(3x - 1) - 5.$

52. $2(x - 6) = 3x - 19.$

53. $2(9x - 11) + 2 = 3x.$

54. $5 + 5(x - 13) = x.$

55. $2(3 + 2x) - 3 = 5x.$

56. $11(2x - 15) = x + 3.$

57. $7(2 + 9x) - 30 = 15x.$

58. $x - 2 = 3(2x - 19).$

59. $2(9x + 5) - 12 = 9x.$

60. $5(3 + 17x) - 93 = 7x.$

61. $\dfrac{x}{3} + 8 = 13.$

62. $\dfrac{2x}{5} - 1 = \dfrac{x}{4} + 2.$

63. $\dfrac{x + 4}{3} = x - 4.$

64. $3x - 12 = \dfrac{5x - 6}{4}.$

65. $\dfrac{5x + 1}{9} = 2x - 10.$

66. $3x - 8 = \dfrac{5x - 6}{2}.$

67. $\frac{15x-4}{2}=1+6x.$

68. $\frac{4x+5}{5}=2x-5.$

69. $3x-8=\frac{7x-4}{6}.$

70. $\frac{x+17}{2}=17x-8$

71. $\frac{3x+7}{8}=\frac{21-5x}{3}.$

72. $\frac{x+6}{7}=\frac{2x-3}{9}.$

73. $\frac{3x-5}{4}=\frac{2x-1}{3}.$

74. $\frac{2x+1}{5}=\frac{4x-3}{9}.$

75. $\frac{x-9}{2}=\frac{1+3x}{13}.$

76. $\frac{5x-7}{7}=\frac{5x+11}{9}.$

77. $\frac{3x-5}{10}=\frac{13+2x}{9}.$

78. $\frac{x+6}{3}=\frac{5x-2}{11}.$

79. $\frac{5x-16}{12}=\frac{28+x}{5}.$

80. $\frac{x+4}{7}=\frac{5x-104}{4}.$

81. $\frac{x}{4}+\frac{x}{3}=x-5.$

82. $\frac{2x}{3}-5=10-\frac{x}{6}.$

83. $27-\frac{5x}{2}=\frac{x+12}{11}.$

84. $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=10+\frac{x}{6}.$

85. $\frac{2x+18}{9}=4+\frac{x}{6}.$

86. $3(x-12)=\frac{2x-3}{3}.$

87. $\frac{3x}{4}+\frac{2x}{5}=\frac{4x-11}{3}.$

88. $x+1=\frac{4(2x-3)}{3}.$

89. $\frac{3(x+7)}{4}=5+\frac{4x}{5}.$

90. $\frac{2(20x-1)}{3}=10x+1.$

91. $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{x}{6}=20.$

92. $\frac{11x}{12}+\frac{5x}{6}-x=45.$

93. $\frac{2x}{3}+\frac{x}{6}=51-\frac{x}{9}.$

94. $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{12}=12.$

95. $\frac{x}{2}-5=\frac{8+x}{8}.$

96. $\frac{5x}{6}+\frac{13x}{8}+13=3x.$

97. $13=\frac{5x}{2}-\frac{5x}{8}-\frac{x}{4}.$

98. $\frac{5x}{7}+\frac{x}{2}-x=3.$

99. $\frac{7x}{4}-\frac{9x}{2}=2x-19$

100. $\frac{8x}{7}+3x=\frac{7x+9}{2}.$

101. $\frac{3(5x+16)}{8}-7=\frac{7}{8}.$

102. $\frac{5(7x-6)}{7}-\frac{5}{7}=5.$

103. $\frac{3(9x-7)}{8}=7+\frac{1}{2}.$

104. $\frac{1}{x+\frac{1}{1+\frac{x+1}{x-1}}}=\frac{2}{9x-11}.$

105. $\frac{\frac{x-3}{2}-\frac{x-3}{4}}{x-\frac{1}{3-\frac{3x-1}{x+1}}}=\frac{1}{11}.$

106. $ax+c=bx+d.$

107. $ax=b+1+x.$

108. $ax=a+1-x.$

109. $4a^2x-1=x+2a.$

110. $2ax+1=4a^2+x.$

111. $ax+b^2=a^2-bx.$

112. $ax-2a^2=bx-2b^2.$

113. $ax-b^2+2ab=a^2+bx.$

114. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1.$

115. $\frac{x}{2a}-\frac{x}{2b}=2.$

116. $\frac{ax-b}{b}=\frac{bx}{a}+1.$

117. $\frac{x}{a}+\frac{x}{2b}-\frac{x}{4c}=1.$

118. $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=2.$

119. $\frac{x}{a+b-1}=2-\frac{x}{a-b+1}.$

120. $\frac{x}{a-1}-1=\frac{x}{a+1}+1.$

2° Con dos incógnitas

121. $x+y=19,\quad x-y=11.$

122. $2x+y=17,\quad 2y-x=9.$

123. $3x-2y=1,\quad 3y-2x=6.$

124. $4x-y=2,\quad 5y-2x=8.$

125. $5x+2y=79,\quad 3x-4y=-15.$

126. $5x-31=3y,\quad 3(x+2)=10y.$

127. $3x-7=4y,\quad 7x+2=13y.$

128. $2(x-3)=y,\quad 5y+x=25.$

129. $x+2y=22,\quad 5(x-5)=y-3.$

130. $5x-4y=4,\quad 3(2x-y)=21.$

131. $6x=5y,\quad 2x-y=12.$

132. $x-12y=4,\quad 41y+7=3x.$

133. $24x+7y=69,\quad 7(9x-5y)=21.$

134. $5(2x-y)=60,\quad 8x+9y=74.$

135. $2x - y = 30$, $6(x-3) = 7y$.

136. $2(9+y) = 3x$, $4x + 11 = 5y$.

137. $5x - 14 = 3y$, $7(3x - 2y) = 35$.

138. $3(3+x) = 4y$, $2y + 3 = 3x$.

139. $18x + 11y = 109$, $23y - 88 = 9x$.

140. $2x - 17 = 25y$, $15y - x = -6$.

141. $8x - 9y = 53$, $5x + 18y = 41$.

142. $7x + 4y = 29$, $8y - 3x = -10$.

143. $12x - 5y = 57$, $15y + 2x = 19$.

144. $6(x+y) = 5$, $3y + 8x = 5$.

145. $3y - 4x = 1$, $6(2x + y) = 17$.

146. $3x = 4y$, $\frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 9$.

147. $2x = 3y$, $\frac{2x}{3} - \frac{4y}{5} = 2$.

148. $3x - 2y = 12$, $\frac{5x}{8} + \frac{2y}{3} = 9$.

149. $13x - 15y = 5$, $\frac{2x}{5} + \frac{3y}{4} = 5$.

150. $14x - 5y = 2$, $\frac{x}{3} + \frac{7y}{8} = 8$.

151. $11x = 4y$, $\frac{9y}{11} - \frac{x}{4} = 8$.

152. $13x - 17y = 5$, $\frac{8x}{3} - \frac{7y}{2} = 1$.

153. $18x - 29y = 3$, $\frac{29x}{5} + 6y = 47$.

154. $\frac{13x}{6} - \frac{9y}{7} = 4$, $9x - 13y = -37$.

155. $\frac{3x}{11} + \frac{5y}{8} = 8$, $15x - 17y = 29$.

156. $5x + \frac{y}{5} = 23$, $5y - \frac{31x}{4} = 44$.

157. $3x + \frac{7y}{9} = 19$, $y - 6 = \frac{3x}{4}$.

158. $4x - \frac{5y}{7} = 33$, $y = \frac{7x}{4}$.

159. $7x - 18 = \frac{5y}{3}$, $\frac{3x}{4} + 2y = 15$.

160. $9x - 17 = \frac{37y}{13}$, $2y - \frac{25x}{2} = -49$.

161. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=10,\quad \frac{5x}{7}-\frac{2y}{9}=8.$

162. $\frac{5x}{8}-\frac{3y}{5}=-4,\quad 5y+\frac{7x}{8}=82.$

163. $\frac{3x}{4}-\frac{y}{5}=6,\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=11.$

164. $\frac{5x}{4}+\frac{3y}{2}=9,\quad \frac{17y}{2}-\frac{3x}{4}=4.$

165. $\frac{7x}{5}-4y=6,\quad \frac{4y}{5}+\frac{x}{2}=\frac{27}{10}.$

166. $\frac{11x}{5}+\frac{27y}{2}=31,\quad \frac{7x}{2}-\frac{5y}{3}=\frac{305}{9}.$

167. $ax+by=a^2,\quad ax-by=b^2.$

168. $\frac{x}{y}=\frac{4}{3},\quad 2x+2y=p.$

169. $2x-3y=a,\quad x+2y=2b.$

170. $\frac{q}{x}=\frac{h}{h-y},\quad x-y=d.$

171. $\frac{x}{b}=\frac{a-y}{a},\quad x+2y=a+b.$

172. $\frac{x}{2}+y=3a,\quad \frac{2y}{3}-x=2b.$

173. $x+y=4a,\quad \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=a$

174. $ax+by=a^2,\quad bx+ay=b^2.$

3° Con 3 incógnitas.

175. $x+2y+3z=13,\quad 2x+3y+z=18,\quad 3x+y+2z=17.$

176. $5x-y+3z=12,\quad x+4y-2z=3,\quad 3y-2x+z=7.$

177. $2x-3y-z=-11,\quad 2y-3x+z=4,\quad 3z+y-2x=13.$

178. $x+4y-5z=-6,\quad 3x+2y+2z=48,\quad 5x-y+4z=55.$

PROBLEMAS

179. ¿Cuál es el número cuyo duplo más 5 es igual á su triple menos 19?

180. Búsquese un número tal que su cuádruplo menos 2 sea igual á su triple más 16.

181. Repartir 150 pts. entre tres personas de modo que la segunda reciba 8 pts. más que la primera, y la tercera 14 pts. más que la segunda.

182. Repartir 85 pts. entre tres personas, de modo que la segunda reciba 7 pts. menos que la primera y 15 pts. más que la tercera.

183. Tres alumnos tienen juntos 270 vales; ¿ cuántos tiene cada úno, sabiendo que el segundo tiene tantos como el primero menos 25, y el tercero tiene tantos como los ótros dos juntos?

184. Cuatro alumnos tienen juntos 50 años; búsquese la edad de cada úno, sabiendo que el mayor tiene 3 años más que el segundo, éste 3 años más que el tercero, y este último 3 años más que el menor.

185. Para comprar 3 terneros y 4 carneros, un carnicero ha pagado 183 pts.; ¿ cuál es el precio de un ternero, sabiendo que vale 12 pts. más que un carnero?

186. Para comprar 4 costales de trigo y 5 de centeno, un molinero ha dado 161 pts.; ¿ cuál es el precio de un costal de centeno, sabiendo que vale 11 pts. menos que el de trigo?

187. Un negociante en vinos recibe 7 toneles de Jerez, y da en cambio 15 toneles de Málaga más 20 pts.; búsquese el precio del vino de Jerez, sabiendo que el tonel vale 60 pts. más que un tonel del de Málaga.

188. Por 5 costales de café verde se han pagado 466 pts. más que por 3 costales de café molido; búsquese el precio del costal de cada clase de café, sabiendo que el de café molido vale 90 pts. más que el de café verde.

189. La edad de Pedro es el triple de la de Pablo; ¿ cuál es la edad de úno y ótro, si Pablo tiene 18 años menos que Pedro?

190. Búsquense tres números impares consecutivos tales que su suma dé 909.

191. Búsquense cuatro números pares consecutivos tales que sumándolos resulte 1028.

192. Búsquense tres números consecutivos tales que al restar el duplo del mayor del triple de la suma de los ótros dos, resulte 527.

193. Un caballero compra una corbata, un chaleco y un sobretodo en 36 pts.: calcular los precios respectivos, sabiendo que el chaleco vale 11 veces más que la corbata, y el sobretodo 3 veces más que el chaleco.

194. ¿ Qué número hay que añadir á los dos términos del quebrado $^3/_{11}$ para que su valor sea igual á $^3/_8$.

195. ¿Qué número debe restarse de los dos términos del quebrado $^{29}/_{42}$ para que su valor resulte igual á $^{1}/_{2}$?

196. Un mueble vale 85 pts.; después de restaurado se vende en 153 pts., con un beneficio que representa los $^{2}/_{15}$ del precio de compra más el de la restauración. Calcúlese el importe de la restauración.

197. ¿En cuánto se compró un coche de lance, sabiendo que, restaurado por un valor de 120 pts., se vendió en 596 pts., con un beneficio que represesenta los $^{2}/_{5}$ del precio de compra?

198. ¿Cuál es el número cuyos $^{2}/_{3}$ y $^{3}/_{4}$ son 170?

199. ¿Cuál es el número cuya mitad más el tercio y el cuarto son 156?

200. Repartir entre dos personas la suma de 1836 pts., de modo que la parte de la primera sea $^{1}/_{4}$ más que la de la segunda.

201. Búsquense dos números cuya suma dé 1140, y que sean entre sí como 5 es á 7.

202. Búsquense dos números cuya diferencia dé 41, y que sean entre sí como 7 es á 9.

203. ¿Cuál es la longitud de una pieza de paño, si la diferencia entre los $^{4}/_{5}$ y los $^{3}/_{4}$ es de 6 metros?

204. De un tonel de vino se han sacado $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{5}$ y los $^{2}/_{15}$, y quedan todavía 75 litros; ¿cuál es el contenido del tonel?

205. ¿Cuánto importa un campo, sabiendo que los $^{2}/_{3}$ del precio más 250 pts. representan un número igual á los $^{3}/_{4}$ del mismo menos 200 pts.?

206. ¿Cuál es el número cuyos $^{2}/_{7}$ más 15, aumentados con los $^{3}/_{4}$ menos 8, dan 239?

207. ¿Cuál es el peso de un barril de aceite, sabiendo que después de vender $^{1}/_{3}$ más los $^{3}/_{4}$ del resto, lo que queda pesa 60 kg.?

208. Los $^{2}/_{5}$ de una propiedad están sembrados de trigo, $^{1}/_{3}$ de maíz, y lo demás está plantado de patatas. Búsquese la superficie total, sabiendo que la parte sembrada de trigo tiene 75 áreas más que la parte de maíz.

209. Dos casas se vendieron en 89000 pts.; ¿cuál es el precio de cada úna, sabiendo que los $^{2}/_{5}$ y $^{1}/_{3}$ de la primera igualan á los $^{3}/_{4}$ de la segunda?

210. Dividir el número 385 en dos partes tales que el cociente de la primera por 18 sea el duplo del cociente de la segunda por 41.

211. Dividir el número 180 en dos partes tales que dividiendo la primera por 11 y la segunda por 23, la suma de los cocientes sea 12.

212. Un padre tiene 42 años, su hijo, 7; ¿ dentro de cuántos años la edad del hijo será la cuarta parte de la del padre ?

213. Un vidriero ha colocado 56 cristales á 3,20 y á 0,75 pts. cada úno ; ¿ cuántos ha colocado de cada clase, si le han pagado 100,80 pts. ?

214. Doce truchas y 16 sollos se han vendido en 54 pts. ; búsquese el precio de cada úno de estos pescados, si una trucha vale 0,75 pts. menos que un sollo.

215. Un revendedor vende los $^3/_5$ de sus naranjas, luégo compra 33 ; entonces tiene 9 más que antes de la venta ; ¿ cuántas naranjas tenía al principio ?

216. Al empezar una feria, un mercader vende los $^5/_7$ de su rebaño de carneros, luégo compra 12 y entonces tiene 48 carneros menos que antes de la venta ; ¿ cuántos tenía al principio ?

217. La suma de dos números es 137, y su diferencia 43; ¿ cuáles son estos números ?

218. Una aldeana vende $^1/_3$ de una cesta de huevos, quiebra 3, y le quedan todavía los $^5/_8$ de la cesta ; ¿ cuántos huevos tenía ?

219. ¿ Cuál es el número en el que la suma de los cocientes por 12, por 9, por 8, por 16, es 55 ?

220. ¿ Cuál es el número en el que la diferencia de los cocientes por $^5/_{12}$ y $^3/_7$ es 40 ?

221. Búsquense dos números tales que su diferencia sea 180, sabiendo que los $^3/_4$ más los $^4/_5$ de su suma son 1240.

222. Búsquense dos números cuya diferencia sea 42, sabiendo que los $^4/_5$ de su suma, menos los $^7/_{12}$ de la misma dan 13.

223. Búsquense dos números cuya diferencia sea 18, sabiendo que el cociente de su suma por su diferencia es igual á $^1/_{10}$ del número mayor

224. Se tiene alcohol á 2,50 pts. el litro ; para hacer aguardiente se le añade agua de modo que 80 litros de la mezcla no valen más que 120 pts. ; calcúlese la cantidad del agua añadida.

225. Un negociante tiene vino á 45 pts. y á 53 pts. el hectolitro; si quiere hacer una mezcla de 54 hectolitros, de modo que pueda vender en 51 pts. cada úno, ¿ cómo ha de mezclar estos vinos ?

226. Un jornalero recibe 2,50 pts., más el alimento cuando trabaja, y tiene que pagar diariamente 1,30 pts. por la comida cuando no trabaja ; después de 45 días su amo le debe 69,30 pts. ; ¿ cuántos días ha trabajado el jornalero ?

227. Á un número primero se le añade y después se le quita 8, y en ambos casos se cuadra el resultado. ¿Cuál es el número, si la diferencia de los dos cuadrados es 640?

228. Se impone á interés simple una suma de 18000 pts., parte al 5 $^0/_0$ y parte al 4 $^0/_0$; determinar ambas partes, sabiendo que el interés total en el año es de 870 pts.

229. Un rentero impone los $^2/_3$ de su capital al 4 $^0/_0$ y lo demás al 4,5 $^0/_0$; si el interés anual de la parte impuesta al 4 $^0/_0$ excede al de la ótra en 140 pts., búsquese el capital del rentero.

230. Un rentero impone los $^2/_5$ de su capital al 5 $^0/_0$ y lo demás al 4 $^0/_0$; búsquese el capital, si la renta total es de 275 pts. por trimestre.

231. Dos letras de cambio, cuyo valor total es de 2051 pts., se descuentan al 4 $^0/_0$, la primera en 6 meses y la segunda en 8; ¿cuál es el valor de estas letras, sabiendo que son iguales después del descuento?

232. Dos sumas cuya diferencia es de 55 pts. se imponen al 4 $^0/_0$, la primera para 45 meses, y la segunda para 1 año; calcular estas sumas, sabiendo que, al cobrarlas con sus intereses, han resultado iguales.

233. Se tienen 420 gramos de plata con 0,820 de ley; ¿cuántos habrá que añadir de otra barra de 0,950 de ley, para que la ley de la liga sea de 0,900?

234. Una barra de oro que tiene 0,950 de ley pesa 960 gr.; ¿qué peso de ésta debe sustituírse con un peso igual de otra barra, cuya ley es de 0,800, para que la ley resultante sea de 0,900?

235. Una vendedora de huevos vende $^1/_3$ del número que posee más 2 huevos $^2/_3$; vende después $^1/_4$ del número total más 3 huevos $^3/_4$; por fin vende $^1/_5$ del número total más 4 huevos $^1/_5$; y entonces no le queda nada. ¿Cuántos huevos tenía la vendedora, y cuántos vendió cada vez?

236. Un alumno reparte naranjas entre sus condiscípulos: al primero le da 5 naranjas más $^1/_5$ del sobrante; al segundo, 10 naranjas más $^1/_5$ del resto; al tercero, 15 naranjas más $^1/_5$ del resto, y así sucesivamente. Calcúlese el número de naranjas repartidas, el número de condiscípulos, el número de naranjas que recibió cada úno, sabiendo que todos tuvieron igual número.

237. Por 5 metros de seda y 4 de paño se han pagado 142 pts., y por 4 m. de seda y 5 de paño, 137. pts; ¿cuál es el precio del metro de cada género?

238. Se truecan 12 sillas y 18 pts. por 6 butacas; en ótro trueque se dan 37 sillas y se reciben 15 butacas y 18 pts.; dígase cuál es el precio de una butaca y el de una silla.

239. Dígase el número de vales que tienen dos alumnos, sabiendo que si el primero da 9 de los suyos al segundo, tendrán tanto el úno como el ótro; y si el segundo da 6 de los suyos al primero, éste tendrá el duplo de lo que le queda al segundo.

240. Un veedor quiere dar una gratificación á sus obreros; si cada úno recibe 14 pts., quedan 7 pts.; pero si cada úno recibiera 15 pts., faltarían 26. Búsquese el monto de la gratificación y el número de obreros.

241. Un número consta de dos cifras cuya suma es 11; cuando se invierte, el número que resulta excede en 5 al triple del número dado: ¿ cuál es este número ?

242. Un número consta de dos cifras cuya suma es 9; cuando se invierte, el número obtenido no es más que los $^5/_6$ del número primitivo; búsquese este número.

243. Búsquese un quebrado tal que, añadiendo 2 á cada úno de sus términos, se hace igual á $^2/_3$, y si se resta 10 de cada úno de los mismos, se hace igual á $^2/_9$.

244. El capital activo de dos comerciantes se hallaba en la relación de 3 á 4; un año después, el primero ha aumentado el suyo con 8000 pts., y el segundo tiene 1000 pts. menos; entonces la relación es de 10 á 11; ¿ cuál es el capital de cada úno de ellos ?

245. Dos ejércitos eran entre sí como 6 es á 5; después de una batalla en que el primero perdió 3000 hombres y 1000 el segundo, la relación es de 9 á 8; ¿ cuántos soldados tenía cada ejército ?

246. Dos jugadores convienen en que cuando pierda el úno duplicará el dinero del ótro; juegan dos manos, y cada úno pierde una vez; entonces el primero tiene 6 pts., y 21 el segundo; ¿ cuánto tenía cada úno antes de principiar el juego ?

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

247. Las dos dimensiones de un rectángulo son de 54 y 36 metros; trácese una paralela al lado de 36 metros, de modo que se forme un rectángulo semejante al primero.

248. En un triángulo de 63 m. de base y 54 de altura se inscribe un rectángulo cuyo perímetro es de 116 m.; ¿ cuáles son las dimensiones de este rectángulo ?

249. Dos lados de un triángulo tienen respectivamente 20 y 36 m.; la bisectriz del ángulo comprendido divide al tercer lado en dos segmentos cuya diferencia es 12 m.; calcúlese este lado.

250. El lado AB de un cuadrado tiene 74 m., se prolonga una longitud BE = 13 m.; trácese desde el punto E, una recta que divida al cuadrado en dos cuadriláteros equivalentes.

251. Los tres lados de un triángulo son: BA = 12 m., BC = 14 m., AC = 18 m.; determinar sobre AB, desde B, un punto tal que las paralelas trazadas por él á los otros lados; sean iguales.

252. El semiperímetro de un rectángulo pasa á su diagonal con 24 m.; hallar las dos dimensiones de este rectángulo, sabiendo que son entre sí como 3 es á 4.

253. Búsquense las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que si se añaden 2 m. á la base y 3 m. á la altura, el área se aumenta con 40 m², y si se quitan 3 m. á la base y 2 m. á la altura el área se disminuye de 25 m².

254. En un trapecio isósceles la base mayor tiene 18 m. y la diagonal 15 m.; calcúlese la base menor, sabiendo que la figura está inscrita en un semicírculo de 9 m. de radio.

255. Á la base de un rectángulo se le añaden 5 m.; ¿cuánto debe añadirse á la altura para que el rectángulo resultante tenga un área doble de la del primero?

256. La base AB de un rectángulo ABCD tiene 48 m. y la altura AD, 26 m.; ¿cuántos metros hay que añadir á AB en F, para que el triángulo exterior FBH, que resulta al unir el punto F con el vértice D, sea la diferencia de las dos superficies determinadas por la recta DF en el rectángulo dado?

257. ¿Á qué distancia del centro de un círculo de 45 cm. de radio debe señalarse un punto para que la parte exterior de la secante que sale de este punto y pasa por el centro del círculo, no sea más que la mitad de la tangente que parte del mismo punto?

258. Búsquese el radio de un círculo en el que una cuerda de 42 m. tiene una sagita de 7 m.

259. En un círculo de 12 m. de radio, una cuerda de 20 m. corta al diámetro de modo que el punto de intersección se encuentra á igual distancia del centro y del extremo de la cuerda: búsquense los dos segmentos de ésta.

260. ¿Cuál ha de ser el radio de un círculo para que dos secantes, la úna de 40 cm. y la ótra de 30 cm. saliendo desde un mismo punto, determinen, la primera una cuerda igual al radio, la segunda una cuerda que sea la mitad de él?

PROBLEMAS INDETERMINADOS.

261. Búsquense dos números tales que la suma de ellos sea el duplo de su diferencia.

262. Búsquense dos números tales que su producto sea el triple de su suma.

263. El área de un rectángulo es de 110 m^2.; ¿cuáles son sus dos dimensiones, sabiendo que cada úna de ellas es un número entero de metros?

264. Búsquense dos números tales que $1/3$ de su suma menos la $1/2$ de su diferencia sea 5.

265. Búsquense dos números tales que el triple de su diferencia más $1/3$ de su suma sea igual al triple de su suma menos $1/3$ de su diferencia.

266. Búsquese un número de dos cifras significativas tal, que su valor sea igual á la suma de las ótras siete.

267. Búsquese un número de dos cifras significativas tal que sumado con el mismo número invertido, la suma resulte igual á 77.

268. El área de un trapecio es de 1400 m^2, y su altura de 50 m.; calcular las bases, sabiendo que cada úna es un número entero divisible por 8.

269. El área de un trapecio tiene 913 m^2, y 30 m. úna de las bases; búsquese la ótra y la altura, sabiendo que ésta tiene más de 10 m., y que los números que representan la base y la altura son enteros.

270. ¿Cuáles han de ser las dimensiones de un rectángulo para que no cambie de área, si se disminuye de 5 su base y se aumenta 5 á su altura?

271. Representar la longitud del metro, colocando únas al lado de ótras monedas de 5 y de 2 céntimos, siendo el diámetro de estas monedas de 25 y 20 mm.

272. Divídase el número 1000 en dos partes respectivamente divisibles por 11 y por 17.

273. Representar la longitud del metro, colocando fichas al lado de ótras, y cuyos diámetros respectivos tengan 21 y 26 mm.

274. ¿De cuántos modos puede pagarse una suma de 89 pts., dando duros y recibiendo monedas de 2 pts.?

275. Dividir el quebrado $62/63$ en ótros dos cuyos denominadores respectivos sean 7 y 9.

276. Una vendedora tiene dos sacas de café : en la primera hay 7 kg. de café de Cuba, 3 de Haití, 8 del Brasil, y vale 91 pts.; la segunda encierra 8 kg. de café de Cuba, 6 de Haití, y 9 del Brasil, y cuesta 119 pts. ; calcular el precio del kg. de cada úna de estas calidades, sabiendo que estos precios expresan números enteros de pesetas.

DESIGUALDADES.

277. ¿ Cuáles son los valores enteros que verifican la desigualdad $4x - \frac{1}{3} > 15 - \frac{x}{4}$?

278. Determinar los valores enteros y mayores que 1, comprobando la desigualdad $x + \frac{1}{5} > 2x - 7$.

279. Búsquense los valores enteros de x que verifican las desigualdades :

$$5x + \frac{2}{5} > 4x + 3 \quad \text{y} \quad \frac{8x + 3}{3} < 2x + 21.$$

280. ¿ Qué valores enteros de x verifican las desigualdades:

$$7\frac{x}{3} + 2 > x + 8 \quad \text{y} \quad 91 - 4x < 8x + 6?$$

281. ¿ Cuáles son los valores de x que comprueban las desigualdades :

$$8x - 7 > \frac{15x - 9}{2} \quad \text{y} \quad 4x - 5 > 5x - \frac{8}{3}?$$

282. Búsquense los valores enteros, positivos ó negativos que verifican las desigualdades :

$$16 + 5x > 3x + 11 \quad \text{y} \quad \frac{7x}{4} + \frac{3}{2} < \frac{x}{2} + 6.$$

PARTE TERCERA

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

§ I. — Potencias y raíces de las expresiones algebraicas.

112. Potencias. — El *cuadrado* ó *segunda potencia* de una cantidad es el producto de dos factores iguales á esta cantidad.

Así a^2 ó $a \times a$ es el cuadrado de a.

La *tercera*, la *cuarta*, ... la *emésima potencia* de una cantidad serán el producto de tres, cuatro,... m factores iguales á esta cantidad.

Así $$ab^2 \,.\, ab^2 \,.\, ab^2 = a^3b^6,$$

y la *emésima* potencia de $(a+b)$ es $(a+b)^m$.

113. Elevación á potencias. — Para elevar un *producto* á una potencia, se eleva cada factor á esta potencia.

EJEMPLOS : $$(ab)^3 = ab \,.\, ab \,.\, ab \,. = aaa \,.\, bbb = a^3b^3,$$
$$(2a^2b)^3 = 2a^2b \,.\, 2a^2b \,.\, 2a^2b = 2^3a^6b^3,$$
$$(3a^2b^3)^m = (3a^2b^3)\,.\,(3a^2b^3)... = 3a^{2m}b^{3m}.$$

Para elevar un *quebrado* á una potencia, se elevan sus dos términos á esta potencia.

Así $$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \,.\, a}{b \,.\, b} = \frac{a^2}{b^2},$$
$$\left(\frac{m}{n}\right)^p = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdots \quad = \frac{m^p}{n^p}.$$

Nota. — *Para obtener una potencia de un monomio*, hay que elevar el coeficiente á esta potencia, y multiplicar por el grado de la misma los exponentes de las letras que lo componen.

114. Raíces. — *Raiz cuadrada* de una cantidad es otra cantidad que, elevada al cuadrado, da la primera.

La raiz cuadrada de $4a^2b^4$ es $2ab^2$; pues esta última cantidad multiplicada por si misma da $4a^2b^4$.

Raiz tercera, cuarta, ... emésima de una cantidad son otras cantidades que elevadas á la tercera, á la cuarta, á la *emésima* potencia, dan las primeras.

Así
$$\sqrt[3]{27a^6b^9c^3} = 3a^2b^3c,$$
$$\sqrt[n]{(3x+y)^n} = 3x+y.$$

Nota. — El grado de un radical se indica por el índice; así, de los radicales siguientes:

$$\sqrt{a}\,,\quad \sqrt[5]{b}\,,\quad \sqrt[m]{c}\,,$$

el primero es del segundo grado, el segundo del quinto grado, y el tercero del *emésimo* grado.

115. Extracción de raíces. — Para extraer una raíz de un producto, se extrae esta raiz de cada úno de los factores.

Así la raiz cuadrada de abc es igual á $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}$, ó sea $\sqrt{abc}$, pues en ambos casos el cuadrado es abc.

La raiz cúbica de a^4b^2 es $\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$,

ó sea
$$\sqrt[3]{a^4b^2}.$$

La raiz *emésima* de a^pb^q es $\sqrt[m]{a^p}\cdot\sqrt[m]{b^q}$

ó sea
$$\sqrt[m]{a^pb^q}.$$

Para extraer una raiz de un *quebrado*, se extrae esta raiz de cada úno de sus términos.

Así
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$
$$\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^6}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a^2}{b},$$
$$\sqrt[m]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}.$$

116. Cuadrado y raíz cuadrada. — De que un cuadrado es el producto de dos factores iguales, se infiere que :

1º *El cuadrado de un monomio es siempre un monomio positivo, y para obtenerlo se eleva el coeficiente al cuadrado, y se duplican los exponentes de todas las letras que lo componen;*

2º *El cuadrado de un binomio es un trinomio.*

Así $(-ab)(-ab) = +a^2b^2$, así como $(+ab)(+ab)$.

$$(a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + 2ab.$$

117. Notas. — **I.** — *Para que un monomio sea cuadrado perfecto*, es preciso :

1º Que sea positivo ;

2º Que su coeficiente sea cuadrado ;

3º Que sus exponentes sean pares.

El monomio $16a^4b^2c^6$ es cuadrado perfecto.

II. — Por convención, la raíz cuadrada de una cantidad cualquiera a se expresa por $\sqrt{a}$. Por lo tanto el cuadrado de $\sqrt{a}$ es a.

Luego, *para elevar al cuadrado un radical de segundo grado, basta suprimir el signo* $\sqrt{\ }$.

III. — Las dos cantidades *opuestas* $+ab$ y $-ab$ son las raíces cuadradas de a^2b^2.

118. Teorema. — *Un radical de segundo grado tiene dos valores iguales y de signo contrario, y sólo dos.*

Sea m^2 una cantidad positiva (nº 116); llamando x su raíz cuadrada, tendremos :

$$x = \sqrt{m^2}.$$

Elevando los dos miembros al cuadrado, resulta :

$$x^2 = m^2 \quad \text{ó} \quad x^2 - m^2 = 0.$$

Siendo $x^2 - m^2$ la diferencia de dos cuadrados, se tiene :

$$(x-m)(x+m) = 0.$$

Pero, para que un producto sea igual á cero, basta que úno de sus factores sea nulo; luego, escribamos:

$$x - m = 0, \quad \text{de donde} \quad x = m,$$

y

$$x + m = 0, \quad \text{de donde} \quad x = -m.$$

Como no hay otro medio para anular el producto $(x - m)(x + m)$, se infiere que un radical de segundo grado tiene sólo dos valores que son iguales y de signo contrario.

Nota. — Los valores $+m$ y $-m$ son las raíces del radical de segundo grado; luego $x = \pm\sqrt{m^2} = \pm m$.

119. Cantidades imaginarias. — Todo número *positivo*, entero ó fraccionario, tiene raíz cuadrada exacta con la aproximación que se quiera; pero una expresión *negativa*, tal como $-m^2$, no tiene raíz cuadrada, pues no existe cantidad que, elevada al cuadrado, dé resultado negativo.

Una expresión tal como $\sqrt{-a^2}$, que no tiene raíz cuadrada, se llama *cantidad imaginaria*, por oposición á las demás cantidades que se llaman *reales*.

Se puede escribir: $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 \times (-1)}$;

ó sea $\pm a\sqrt{-1}$.

Toda cantidad imaginaria puede reducirse á la forma $a\sqrt{-1}$, es decir que es equivalente á la raíz cuadrada de la cantidad subradical, considerada como positiva, multiplicada por $\sqrt{-1}$.

Sea, por ejemplo, $\sqrt{-9}$;

podemos escribir: $\sqrt{-9} = \sqrt{9 \times (-1)} = 3\sqrt{-1}$.

Sea otra expresión $\sqrt{-3}$;

podemos escribir:

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3}\,\sqrt{-1} = 1{,}73205\,\sqrt{-1}.$$

Nota. — La segunda potencia de $\sqrt{-1}$ es -1; la tercera potencia será $-1\sqrt{-1}$; la cuarta potencia resultará del producto de la segunda potencia por sí misma:

$$(\sqrt{-1})^4 = (-1)^2 = 1.$$

Luego, ***la segunda potencia de una cantidad imaginaria es negativa, y la cuarta potencia es positiva.***

§ II. — Cálculo con los radicales de segundo grado.

120. Sacar del radical un factor cuadrado. — *Para sacar fuera del radical un factor cuadrado, hay que extraer la raíz cuadrada de este factor y escribirla antes del radical.*

Sea la expresión $\sqrt{a^2b}$;

tenemos $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$,

pues $\sqrt{a^2b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b}$,

ó sea $a\sqrt{b}$.

Asímismo la expresión $\sqrt{c(a-b)^2}$

puede escribirse : $(a-b)\sqrt{c}$.

Aplicación : Simplificación de los radicales. — Para simplificar un radical, basta extraer la raíz de todos los factores cuadrados que encierra.

Así $\sqrt{5a^2b^4c^2}$ se convierte en $ab^2c\sqrt{5}$;

$\sqrt{8a^2b^3}$ » » $\sqrt{4.2a^2b^2b}$ ó sea $2ab\sqrt{2b}$;

$\sqrt{18a^4b^5 - 9a^2b^4}$ » » $\sqrt{9.2a^2a^2b^4b - 9a^2b^4}$;

ó sea $\sqrt{9a^2b^4(2a^2b-1)}$, y por último $3ab^2\sqrt{2a^2b-1}$.

121. Introducción de un factor bajo el radical. — *Para introducir un factor bajo un radical, hay que multiplicar por el cuadrado de este factor la cantidad subradical.*

Así $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}$, y $(a+b)\sqrt{c} = \sqrt{c(a+b)^2}$.

Aplicación. — Esta operación es utilísima en los cálculos numéricos para obtener mayor aproximación.

Así se calculará la expresión $825\sqrt{10}$, transformándola en la equivalente $\sqrt{825^2 \times 10}$.

OPERACIONES CON LOS RADICALES

122. Radicales semejantes. — *Dos radicales son semejantes* cuando tienen un mismo índice y la misma cantidad subradical; tales son los radicales :

$$6\sqrt{a}\,, \quad -b\sqrt{a}\,, \quad +ab\sqrt{a}\,, \quad -\sqrt{a}\,.$$

En ciertos casos no se ve desde luégo que los radicales son semejantes, sino cuando se los ha simplificado.

Así los radicales $a\sqrt{48}\,,\quad -b\sqrt{27}\,,\quad +\sqrt{12}\,,$

se convierten en $a\sqrt{16.3} - b\sqrt{9.3} + \sqrt{4.3}\,,$

ó sea $4a\sqrt{3} - 3b\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,;$

por lo tanto son semejantes.

123. Adición y sustracción. — Para *sumar* y para *restar* radicales, se escriben á continuación únos de ótros, según las reglas dadas para estas operaciones (nos 23 y 25), y se reducen los radicales semejantes.

Así :

1o los radicales $5\sqrt{b}\,, -8\sqrt{2}\,, +2\sqrt{b}\,, +5\sqrt{2}\,, -\sqrt{b}$ sumados dan :

$$5\sqrt{b} - 8\sqrt{2} + 2\sqrt{b}, + 5\sqrt{2} - \sqrt{b}\,,$$

y, después de la reducción :

$$6\sqrt{b} - 3\sqrt{2}$$

2o Si de $3\sqrt{2} + 2\sqrt{b} - \sqrt{a}$ se resta $5\sqrt{2} - \sqrt{b}\,,$ resulta :

$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{b} - \sqrt{a} - 5\sqrt{2} + \sqrt{b}\,,$$

y, después de la reducción :

$$-2\sqrt{2} + 3\sqrt{b} - \sqrt{a}\,.$$

124. Multiplicación. — *El producto de varios radicales de segundo grado es igual á la raíz cuadrada del producto de las cantidades subradicales.*

Así el producto de $\sqrt{a}$ por $\sqrt{b}$ y por $\sqrt{c}$ es $\sqrt{abc}$; pues las expresiones $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}$ y $\sqrt{abc}$, elevadas al cuadrado, dan igualmente abc (nº 117, II).

125. División. — *El cociente de dos radicales de segundo grado es igual á la raíz cuadrada del cociente de las cantidades subradicales.*

El cociente de $\sqrt{a}$ por $\sqrt{b}$ es $\sqrt{\frac{a}{b}}$; pues las expresiones $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ y $\sqrt{\frac{a}{b}}$, elevadas al cuadrado, dan igualmente $\frac{a}{b}$.

126. Elevación á potencias. — *Para elevar un radical á una potencia, se eleva á esta potencia la cantidad subradical.*

Así la tercera potencia del radical $\sqrt{a}$ es $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ ó sea $\sqrt{a^3}$ (nº 124).

La cuarta potencia del mismo será $\sqrt{a^4}$, la quinta $\sqrt{a^5}$, etc.

127. Extracción de la raíz cuadrada. — *Para extraer la raíz cuadrada de un radical se multiplica por 2 el índice de este radical.*

Así

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a},$$

pues la cuarta potencia de ambos miembros es a.

128. Aplicación. Convertir una expresión irracional en ótra cuyo denominador sea racional. — Cuando el denominador de un quebrado es irracional, conviene en muchos casos convertirlo en racional, para facilitar los cálculos.

1º *Sea, por ejemplo, de calcular el valor de* $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Hay que dividir 2 por 2,236067977..., operación larga y cuyo resultado es poco satisfactorio, ya que el divisor no es el valor exacto de $\sqrt{5}$.

Pero si se multiplican por $\sqrt{5}$ los dos términos del quebrado $\frac{2}{\sqrt{5}}$, no se habrá alterado el valor de este quebrado, y el divisor quedará exacto y racional.

Luego, puede escribirse :

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

y el cociente será la quinta parte de $2\times 2{,}236067977\ldots$

2º *Sea la expresión* $\frac{a}{2-\sqrt{2}}$.

Multiplicando numerador y denominador por $2+\sqrt{2}$, resulta :

$$\frac{a(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}=\frac{a(2+\sqrt{2})}{4-2}=\frac{a(2+\sqrt{2})}{2} \text{ (nº 34).}$$

3º *Sea la expresión* $\frac{d\sqrt{h'}}{\sqrt{h}-\sqrt{h'}}$.

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{h}+\sqrt{h'}$, resulta :

$$\frac{d\sqrt{h'}(\sqrt{h}+\sqrt{h'})}{(\sqrt{h}-\sqrt{h'})(\sqrt{h}+\sqrt{h'})}, \text{ ó sea } \frac{d(h'+\sqrt{hh'})}{h-h'}.$$

129. Regla. — 1º Cuando el denominador es un radical, se multiplican ambos términos del quebrado por este radical ; 2º cuando el denominador es una suma o una diferencia, se multiplican los dos términos por la diferencia ó la suma de las mismas cantidades. Así resulta racional el denominador de la expresión, y es igual á la diferencia de los cuadrados de estas cantidades.

§ III. — Resolución de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

130. Definición. — Llámase *ecuación de segundo grado* la ecuación en que el mayor exponente de la incógnita es 2.

Así la ecuación $x^2+2x=3$ es de segundo grado.

131. Ecuación completa. — La ecuación es *completa* si, después de ejecutar las reducciones, contiene : 1º la segunda potencia de la incógnita, 2º la primera potencia de la incógnita, 3º un término conocido.

Por ejemplo $5x^2 - 22x = 15.$

La ecuación completa de segundo grado con una incógnita puede tomar siempre la forma de

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

en la cual a, b, c representan cantidades conocidas, monomias ó polinomias, positivas ó negativas, siendo a positiva, lo que siempre puede conseguirse.

132. Ecuación incompleta. — La ecuación es *incompleta* si no contiene la primera potencia de la incógnita ó el término conocido.

La ecuación $3x^2 = 75$

es una ecuación incompleta, así como $ax^2 = bx$.

La ecuación incompleta de segundo grado puede siempre reducirse á úna de las dos formas :

$$ax^2 + c = 0, \qquad (1)$$

$$ax^2 + bx = 0, \qquad (2)$$

en las cuales a, b, c representan cantidades conocidas, positivas ó negativas, siendo a positiva, lo que siempre puede conseguirse.

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN INCOMPLETA

133. Resolución de la ecuación de la forma

$$ax^2 + c = 0.$$

De la ecuación $ax^2 + c = 0$ resulta que

$$x^2 = -\frac{c}{a},$$

de donde

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}. \qquad (\text{nº } 118)$$

Luego, la incógnita x tiene dos valores iguales y con signo contrario.

134. Resolución de la ecuación de la forma

$$ax^2 + bx = 0, \quad \text{ó bien} \quad x(ax + b) = 0.$$

Igualando separadamente á cero cada úno de los factores, resultan :

$$x = 0\ ; \quad x = -\frac{b}{a}.$$

Así se ve que úna de las raíces es 0, y la ótra es igual al cociente que resulta de dividir el coeficiente del segundo término, con signo contrario, por el del primero.

EJEMPLOS. 1º *Resolver la ecuación*

$$\frac{2x}{3} \times \frac{4x}{5} = 120.$$

Tenemos :

$$\frac{8x^2}{15} = 120,$$

$$8x^2 = 120 \times 15 = 1800,$$

$$x^2 = \frac{1800}{8} = 225,$$

$$x = \pm\sqrt{225} = \pm 15.$$

2º *Resolver la ecuación*

$$(x - 2)(x + 5) = 9x - 10.$$

Tenemos : $x^2 - 2x + 5x - 10 = 9x - 10,$

$$x^2 - 6x = 0,$$

$$x(x - 6) = 0.$$

Igualando á cero cada factor, resulta :

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 6.$$

3º *Resolver la ecuación*

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = 6.$$

Quitando los denominadores, se tiene :

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 6x^2 - 6,$$

$$4x^2 = 8,$$

$$x^2 = 2,$$

$$x = \pm\sqrt{2}.$$

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN COMPLETA

135. Resolución de la ecuación de la forma

$$ax^2+bx+c=0.$$

Traslademos el término c al segundo miembro y multipliquemos por $4a$ todos los términos :

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

Agreguemos á ambos miembros la cantidad b^2; el primer miembro resulta ser el cuadrado de $2ax+b$:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac,$$

ó sea
$$(2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros :

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

de donde
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (1)$$

Luego las raices de la ecuación completa de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ son iguales á *un quebrado, cuyo numerador es el coeficiente del segundo término con signo contrario, más ó menos la raíz cuadrada del resultado que se obtiene restando del cuadrado de este coeficiente el cuádruplo producto del coeficiente del primer término por el término conocido, y cuyo denominador es el duplo del coeficiente del primer término.*

Llamando x' y x'' á los valores de la incógnita en la fórmula (1), se tiene :

Raices :
$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \\ x'' &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{aligned}\right.$$

Aplicaciones. 1º *Resolver la ecuación*

$$2x^2-7x+3=0,$$

en la que $a=2$, $b=-7$ y $c=3$.

La fórmula (1) da :

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4},$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4},$$

de donde $x' = 3$ y $x'' = \frac{1}{2}$.

2º *Resolver la ecuación*

$$4x^2 + 3x - 1 = 0.$$

La fórmula (1) da :

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{8},$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{8},$$

de donde $x' = \frac{1}{2}$ y $x'' = -1$.

136. Notas. — **I.** — La fórmula (1) puede transformarse en ótra más sencilla, caso de ser divisible por 2 el coeficiente del segundo término.

En efecto, en dicha fórmula supongamos $b = 2b'$, y sustituyamos en ella su valor; tendremos :

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a},$$

ó sea, extrayendo la raiz del factor común 4, y simplificando :

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}. \qquad (2)$$

Aplicación. *Sea de resolver la ecuación*

$$3x^2 + 4x - 4 = 0.$$

La fórmula (2) da :

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{3},$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{3},$$

de donde $x' = \frac{2}{3}$ y $x'' = \quad 2.$

II. — Si $a=1$, al mismo tiempo que b es par, la fórmula (2) se convierte en la siguiente :

$$x=-b'\pm\sqrt{b'^2-c}. \tag{3}$$

APLICACIÓN. *Sea de resolver la ecuación*

$$x^2-6x+7=0.$$

La fórmula (3) da :

$$x=3\pm\sqrt{9-7},$$

$$x=3\pm\sqrt{2}.$$

de donde $x'=4,414...$ y $x''=1,586...$

137. Condiciones de realidad de las raíces. — En la fórmula $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, la cantidad b^2-4ac se llama *discriminante* ó *realizante,* por depender de ella la realidad de las raíces.

Consideraremos tres casos, según tengamos :

$$b^2-4ac>0 \quad ; \quad b^2-4ac=0 \quad ; \quad b^2-4ac<0.$$

I. — Sea $b^2-4ac>0$. En este caso, *la ecuación tendrá dos raíces reales y desiguales,* pues siendo b^2-4ac igual á una cantidad positiva m^2, por ejemplo, resultará :

$$x'=\frac{-b+m}{2a},$$

$$x''=\frac{-b-m}{2a}.$$

II. — Sea $b^2-4ac=0$. Entonces *las dos raíces son reales é iguales,* pues tenemos :

$$x'=\frac{-b+0}{2a}=-\frac{b}{2a},$$

$$x''=\frac{-b-0}{2a}=-\frac{b}{2a}.$$

III. — Sea $b^2-4ac<0$. En este caso, *las dos raíces serán imaginarias,* pues siendo b^2-4ac igual á una cantidad negativa $-m$, las raíces serán :

$$x'=\frac{-b+\sqrt{-m}}{2a},$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{-m}}{2a}.$$

138. Notas. — **I.** — Para resolver la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, se forma primero el discriminante $b^2 - 4ac$:

1º Si el discriminante es *positivo,* esto es, si se tiene $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos raíces dadas por la fórmula

$$\left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2º Si el discriminante es *nulo,* esto es, si se tiene $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene sólo una raíz llamada doble (esto es dos raíces iguales) dada por la misma fórmula, que se reduce á

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3º Si el discriminante es *negativo,* esto es, si se tiene $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.

II. -- Siendo a positivo, *las raíces serán reales si* c *es negativo,* pues entonces $-4ac$ será positivo, y esta cantidad añadida al cuadrado b^2 dará un discriminante positivo (1er caso).

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO DE LA FORMA

$$x^2 + px + q = 0.$$

139. La ecuación completa

$$ax^2 + bx + c = 0$$

siempre puede convertirse en la siguiente:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Para ello, dividamos todos los términos por el coeficiente de x^2; tendremos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Hagamos $\frac{b}{a} = p$ y $\frac{c}{a} = q$; resultará:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Ésta es la forma que toma la ecuación de segundo grado cuando el coeficiente de x^2 es la unidad.

140. Resolución de la ecuación de la forma

$$x^2 + px + q = 0.$$

Traslademos q al segundo miembro, y á ambos miembros agreguemos $\frac{p^2}{4}$ para que el primero resulte el cuadrado de $x + \frac{p}{2}$:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q,$$

ó sea
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

de donde
$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (4)$$

Separando las raices, tendremos:

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Luego, las raices de la ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + px + q = 0$ son iguales á *la mitad del coeficiente del segundo término con signo contrario, más ó menos la raiz cuadrada de la cantidad obtenida* ***restando del cuadrado de esta mitad el término conocido.***

141. Notas. — I. — Para resolver la ecuación de segundo grado $x^2 + px + q$, hay que formar primero el discriminante $\frac{p^2}{4} - q$.

1º Si $\frac{p^2}{4} - q > 0$, la ecuación tiene dos raices dadas por la fórmula (4);

2º Si $\frac{p^2}{4} - q = 0$, hay sólo una raíz que es $-\frac{p}{2}$;

3º Si $\frac{p^2}{4} < 0$, la ecuación no tiene raíces.

II. — *Las raíces son siempre reales cuando* q *es negativo,* pues entonces $-q$ resulta positivo, y su valor añadido al cuadrado $\frac{p^2}{4}$ da siempre un discriminante positivo.

APLICACIÓN. *Resuélvase la ecuación* $\frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2$.

Esta ecuación se convierte en la siguiente :

$$x^2 + 6x - 27 = 0.$$

Formemos el discriminante :

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{36}{4} + 27 = 36, \text{ que resulta positivo.}$$

Luego la ecuación tiene dos raíces (nº 141, 1º), que se calculan por medio de la fórmula (4) :

$$x' = -3 + 6 = 3,$$
$$x'' = -3 - 6 = -9.$$

§ IV. — Relaciones entre los coeficientes y las raíces de la ecuación de segundo grado

142. Suma y producto de las raíces. — Ya sabemos que las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

son :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Si, sucesivamente, *sumamos* y *multiplicamos* entre si estas dos raíces, tendremos :

1º $$x' + x'' = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$2^o\ x'x'' = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

lo que manifiesta :

1º *Que la suma de las raíces es igual al cociente,* ***con*** *signo contrario, del coeficiente de* x *por el de* x^2 ;

2º ***Que el producto de las raíces es igual al cociente del término conocido por el coeficiente de*** $\mathbf{x^2}$**.**

143. Nota. — Cuando la ecuación de segundo grado es de la forma $x^2+px+q=0,$

resulta : $x'+x''=-p,$

y $x'x''=q.$

Estas relaciones se expresan así :

1º *La* **suma** *de las raíces es igual al coeficiente de* x *con signo contrario;*

2º *El* **producto** *de las raíces es igual al término conocido.*

APLICACIONES

144. — I. — Formación de ecuaciones que admitan por raíces cantidades conocidas.

Estas propiedades importantes facilitan el formar una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean números conocidos.

Siendo x' y x'' las raíces de la ecuación

$$x^2+px+q=0,$$

pongamos $-(x'+x'')$ en vez de p, y $x'x''$ en vez de q; la ecuación se convierte en la siguiente :

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=0.$$

Comprobación. Esta ecuación resuelta con relación á x, da por raíces x' y x''.

EJEMPLOS. 1º *Fórmese una ecuación cuyas raíces sean* 3 *y* 5.

Tenemos : $x' + x'' = 8 = -p,$

de donde $p = -8,$

y $x'x'' = 15 = q.$

La ecuación será :

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

2º *Fórmese una ecuación cuyas raíces sean* -5 *y* $+2$.

Se tiene : $x' + x'' = -3 = -p,$

de donde $p = 3,$

y $x'x'' = -10 = q.$

La ecuación será :

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

3º *Fórmese una ecuación cuyas raíces sean* $-\frac{3}{4}$ *y* $+2$.

Se tiene : $x' + x'' = -\frac{3}{4} + 2 = +\frac{5}{4} = -p,$

de donde $p = -\frac{5}{4},$

y $x'x'' = -\frac{6}{4} = q.$

La ecuación será :

$$x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{6}{4} = 0,$$

ó sea $4x^2 - 5x - 6 = 0.$

145. Problema. — *Calcular dos números, conociendo su suma y su producto.*

Estos números serán las raíces de una ecuación de segundo grado $x^2 + px + q$, en que conocemos la suma, $S = -p$, y el producto, $P = q$.

Esta ecuación será :

$$x^2 - Sx + P = 0,$$

y las raíces, ó sea los números pedidos :

$$\left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - P} \qquad (5)$$

Para que sea posible el problema, las raices han de ser reales; por lo tanto, debemos tener:

$$\frac{S^2}{4}-P\geq 0.$$

Ejemplo. *Búsquense dos números cuya suma sea* 20 *y cuyo producto sea* 91.

Apliquemos la fórmula (5):

$$\left.\begin{matrix}x'\\x''\end{matrix}\right\}=\frac{20}{2}\pm\sqrt{\frac{400}{4}-91}=10\pm 3.$$

Los números pedidos serán 13 y 7.

146. — II. – Signo de las raíces.

De las mismas propiedades se deduce que, sin resolver una ecuación de segundo grado completa, se pueden hallar los signos de las raíces. Para ello, hay que escribir la ecuación bajo la forma $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, ó de su idéntica

$$x^2+px+q=0,$$

y cerciorarse primero de que las raices son reales, esto es, de que no es negativo el discriminante.

Como lo hemos visto ya (nos 142 2o y 143),

$$x'x''=\frac{c}{a}=q.$$

1o Al mirar *el signo del término conocido*, ya se puede conocer si las raices tienen ó no igual signo:

a) Si $\frac{c}{a}$ ó q es *positivo*, las raíces tienen igual signo, por ser positivo su producto (no 27);

b) Si $\frac{c}{a}$ ó q es *negativo*, las raíces tienen signo contrario, por ser negativo su producto.

2o Cuando las raíces tienen igual signo, para encontrarlo basta fijarse en el del *coeficiente de x*, sabiendo que la suma de las raíces tiene el signo contrario al de $\frac{b}{a}$ ó p (nos 142, 1o y 143).

a) Si $\frac{b}{a}$ ó p es *positivo*, ambas raíces son negativas;

b) Si $\frac{b}{a}$ ó p es *negativo*, ambas raíces son positivas.

3º Cuando las raíces tienen signo contrario, el *signo de la suma*, ó sea el signo contrario de $\frac{b}{a}$ ó de p es el signo de la mayor en valor absoluto:

a) Si $\frac{b}{a}$ ó p es *positivo*, la mayor en valor absoluto es *negativa;*

b) Si $\frac{b}{a}$ ó p es *negativo*, la mayor será *positiva.*

Nota. — Inútil es formar el discriminante cuando *el término conocido es negativo*, pues en este caso las raíces son reales (nos 138, II y 141, II).

Ejemplos. 1º *Reconocer á simple vista la clase y el signo de las raíces de la ecuación*

$$7x^2 - 119x - 1890 = 0.$$

1º Las raíces son reales por ser negativo el término conocido;

2º Las raíces tienen signo contrario, siendo su producto negativo;

3º La mayor raíz en valor absoluto es positiva, pues, siendo negativo el coeficiente de x, la suma de las raíces es positiva.

2º *Hágase lo mismo, respecto de la ecuación*

$$2x^2 - 7x + 6 = 0.$$

1º Las raíces son reales, pues $b^2 - 4ac > 0$;

2º Las raíces tienen ignal signo, siendo positivo el producto $\frac{c}{a}$;

3º Ambas raíces son positivas, pues, siendo $\frac{b}{a}$ negativo, la suma de las raíces es positiva.

§ V. — Ecuaciones bicuadradas.

147. Definición. — *Ecuaciones bicuadradas* son aquéllas que tienen la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \tag{1}$$

esto es, las ecuaciones de cuarto grado que no encierran más que las potencias pares de la incógnita.

148. Resolución de una ecuación bicuadrada. Para resolver la ecuación (1), hagamos :

$$x^2 = z, \quad \text{de donde} \quad x^4 = z^2.$$

La ecuación se convierte en la siguiente :

$$az^2 + bz + c = 0,$$

de donde (nº 135) $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

y por lo tanto $$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \tag{2}$$

Las cuatro raíces serán :

$$x' = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x'' = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x''' = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x^{IV} = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Estas raíces son iguales de dos en dos y de signo contrario, lo que resulta de que como no encierra la ecuación más que las potencias pares de la incógnita, no se altera el valor de esta ecuación cuando se cambia x por $-x$.

APLICACIONES. 1º *Sea de resolver la ecuación*

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

La fórmula (2) da :

$$x = \pm\sqrt{5 \pm \sqrt{25-9}} = \pm\sqrt{5 \pm 4}\ ,$$

de donde $\quad x' = 3, \quad x'' = 1, \quad x''' = -3, \quad x'''' = -1.$

2º *Sea la ecuación* $\quad x^4 - 14x^2 - 32 = 0.$

Tenemos :

$$x = \pm\sqrt{7 \pm \sqrt{49+32}} = \pm\sqrt{7 \pm 9}\ ,$$

de donde $\quad x' = 4, \quad x'' = \sqrt{-2}, \quad x''' = -4, \quad x'''' = -\sqrt{-2}\ ;$
dos raíces son reales y dos imaginarias.

3º *Sea la ecuación* $\quad 4x^4 - 5x^2 + 1 = 0.$

Tenemos :

$$x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{8}} = \pm\sqrt{\frac{5 \pm 3}{8}}\ ,$$

de donde $\quad x' = 1, \quad x'' = \frac{1}{2}, \quad x''' = -1, \quad x'''' = -\frac{1}{2}.$

§ VI. — Ecuaciones con varias incógnitas.

149. Definición. — Llámase ***sistema de ecuaciones de segundo grado***, un sistema en que una ecuación á lo menos es de segundo grado, siendo las demás de segundo ó de primer grado.

Para resolver un sistema de ecuaciones de segundo grado, hay que principiar por eliminar una ó varias incógnitas hasta tener una ecuación con sólo una incógnita. Pero esta ecuación puede resultar de un grado superior al segundo, y entonces, no puede resolverse por los procedimientos del álgebra elemental si no es bicuadrada.

150. Sistema de dos ecuaciones, úna de las cuales es de primer grado. — En la ecuación de primer grado se saca el valor de una incógnita, y se lo sustituye en la de segundo grado.

EJEMPLO. *Resuélvase el sistema siguiente :*

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 13 = 0, \qquad (1)$$

$$3x - 2y - 1 = 0. \qquad (2)$$

La ecuación (2) da :

$$y = \frac{3x - 1}{2}. \qquad (3)$$

Este valor sustituído en la ecuación (1), resulta :

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

que tiene por raíces :

$$x' = 3; \quad x'' = -1.$$

Estos valores sustituídos en la ecuación (3), tendremos :

$$y' = 4; \quad y'' = -2.$$

151. Sistema de dos ecuaciones de segundo grado. — La eliminación de una incógnita proporciona á menudo una ecuación de grado superior al segundo, la cual no puede resolverse de ordinario por los procedimientos elementales.

Sin embargo puede resolverse :

1º Cuando es bicuadrada (nº 148) ;

2º Cuando el primer miembro es el producto de dos factores de segundo grado ; pues, en este caso, igualando sucesivamente á cero cada factor, resultan dos ecuaciones de segundo grado cuyas raíces son los valores de la ecuación de cuarto grado encontrada.

EJEMPLO. *Resuélvase el sistema*

$$y(x^2 - b^2) = 0, \qquad (1)$$

$$ay = b(x^2 - a^2). \qquad (2)$$

De la ecuación (2), resulta :

$$y = \frac{b}{a}(x^2 - a^2). \qquad (3)$$

Este valor, sustituído en la ecuación (1), da :

$$\frac{b}{a}(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) = 0. \qquad (4)$$

Ya que no es nulo $\frac{b}{a}$, esta igualdad no puede verificarse sino para

$$x^2 - a^2 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 - b^2 = 0,$$

ó

$$x^2 = a^2 \quad \text{y} \quad x^2 = b^2.$$

De donde $\left.\begin{matrix} x' \\ x'' \end{matrix}\right\} = \pm a$ y $\left.\begin{matrix} x''' \\ x'''' \end{matrix}\right\} = \pm b.$

Estos valores son las raíces de la ecuación (4); al sustituirlos en la ecuación (3), encontraremos los de y:

$$y' = \frac{b}{a}(a^2 - a^2) = 0,$$

$$y'' = \frac{b}{a}(b^2 - a^2).$$

152. Artificios de cálculo. — Á menudo, por medio de *artificios de cálculo* se puede simplificar la resolución de un sistema de ecuaciones de segundo grado, y resolver un sistema que conduce á una ecuación de grado superior al segundo.

Hé aquí *varios ejemplos* de los artificios más usados :

1º *Sea el sistema de dos ecuaciones*

$$x + y = 8,$$
$$xy = 15.$$

Conociendo la suma y el producto de las incógnitas, estas incógnitas serán (nº 144) las raíces de la ecuación

$$X^2 - 8X + 15 = 0,$$

de donde x' ó $x = 4 + \sqrt{16 - 15} = 5,$

x'' ó $y = 4 - \sqrt{16 - 15} = 3.$

2º *Sea el sistema de dos ecuaciones,*

$$x - y = 5,$$
$$xy = 84.$$

Elevemos la primera al cuadrado y multipliquemos la segunda por 4.

Tendremos :

$$x^2 + y^2 - 2xy = 25,$$
$$4xy = 336.$$

Sumemos ordenadamente :

$$x^2 + y^2 + 2xy = 361.$$

Extraigamos la raiz cuadrada :

$$x + y = 19.$$

Ahora conocemos la suma y la diferencia de las incógnitas; luego (nº 77)

$$x = \frac{1 + 59}{2} = 12,$$

$$y = \frac{19 - 5}{2} = 7.$$

3º *Sea el sistema de dos ecuaciones:*

$$x + y = 5,$$
$$x^2 + y^2 = 13.$$

Elevemos la primera al cuadrado y de ella restemos la segunda :

$$x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - y^2 = 25 - 13,$$
$$2xy = 12,$$
$$xy = 6.$$

Conociendo la suma y el producto, tendremos :

$$X^2 - 5X + 6 = 0,$$

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}, \quad \text{ó sea} \quad \begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 \end{matrix}.$$

4º *Sea el sistema de dos ecuaciones :*

$$x + y = 6,$$
$$x^3 + y^3 = 126.$$

Elevemos la primera al cubo y de ella restemos la segunda :

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 - y^3 = 216 - 126,$$
$$3x^2y + 3xy^2 = 90,$$
$$x^2y + xy^2 = 30,$$
$$xy(x + y) = 30.$$

Sustituyamos $x + y$ con 6 :

$$6xy = 30,$$
$$xy = \frac{30}{6} = 5.$$

Conociendo la suma y el producto, tendremos :

$$X^2 - 6X + 5 = 0,$$

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = 3 \pm \sqrt{9-5}, \quad \text{ó sea} \quad \begin{matrix} x = 5 \\ y = 1 \end{matrix}$$

5º *Sea aún el sistema de dos ecuaciones:*

$$x^2 + y^2 = 25,$$

$$xy = 12.$$

Elevemos la segunda al cuadrado :

$$x^2y^2 = 144.$$

Conociendo la suma y el producto de los cuadrados de las incógnitas, estos cuadrados resultarán de la ecuación

$$X^2 - 25X + 144 = 0,$$

$$\left.\begin{matrix} x^2 \\ y^2 \end{matrix}\right\} = \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2}, \quad \text{ó sea} \quad \begin{matrix} x^2 = 16 \\ y^2 = \ \ 9 \end{matrix}$$

de donde $x = \pm 4, \quad y = \pm 3.$

Los valores negativos -4 y -3 satisfacen las ecuaciones dadas, así como los valores positivos $+4$ y $+3$.

§ VII. — Problemas de segundo grado.

153. Definición. — Un problema es de *segundo grado*, cuando su planteo conduce á la resolución de una ecuación de segundo grado con una incógnita.

El planteo de este problema se efectúa como ya queda dicho (nº 94).

La ecuación obtenida puede tener cero, 1 ó 2 raíces, y por lo tanto, el problema puede tener el mismo número de soluciones. Cuando la ecuación suministra varias raíces, hay que cerciorarse de que todas cumplen las condiciones de los datos, sino se deben desechar.

Á continuación resolvemos algunos problemas de segundo grado :

154. Problema I. — *El producto de los 3/4 de un número más 9 por los 3/4 del mismo menos 9 es igual á 1008. ¿ Cuál es ese número?*

Llamando x al número, se forma la ecuación

$$\left(\frac{3x}{4}+9\right)\left(\frac{3x}{4}-9\right)=1008,$$

$$\frac{9x^2}{16}-81=1008,$$

$$9x^2=16\,(1008+81)=16\times 1089,$$

$$x^2=\frac{16\times 1089}{9}=16\times 121,$$

de donde $$x=\pm\sqrt{16\times 121}=\pm 4\times 11,$$

$$x'=44 \quad \text{y} \quad x''=-44.$$

Los números 44 y -44 cumplen la condición de la ecuación.

II. *Una suma de* 400 pts. *debe distribuirse en partes iguales entre cierto número de personas. Pero en el momento de la repartición faltan* 5 *de ellas, lo que permite dar 4 pts. más á las ótras; ¿ cuántas personas había al principio ?*

Sea x el número pedido; $x-5$ representará el número de personas entre quienes se ha hecho la repartición, $\frac{400}{x}$ representa la suma que habría recibido cada persona si ninguna hubiese faltado, y $\frac{400}{x-5}$ lo que recibe cada úna de las que quedan. La ecuación será :

$$\frac{400}{x-5}=\frac{400}{x}+4,$$

ó sea $$x^2-5x-500=0,$$

de donde $$x=\frac{5\pm\sqrt{25+2000}}{2}=\frac{5\pm 45}{2}.$$

Las raíces son : $x'=25,\quad x''=-20.$

Por lo tanto, había 25 personas.

Hay que desechar la segunda raíz por no cumplir las condiciones de los datos.

III. *En un círculo se cortan dos cuerdas; la primera tiene 30 metros, y la segunda que corta á la primera en su punto medio tiene 50 metros; ¿ cuáles son los dos segmentos de ésta?*

Los segmentos de la primera son iguales, y tienen por producto 15×15, ó sea 225.

Llamando x á úno de los segmentos de la segunda, el ótro será de $50 - x$;

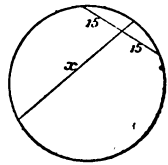

Fig. 6.

MAYO 1933

Intenciones bendecidas por Su Santidad. — **GENERAL: Para que la Madre de Dios nos conduzca al Corazón de su Hijo.—MISIONAL: Para que los misioneros aumenten en espíritu y en número.**

Oración por las Intenciones de este mes.

¡Oh Corazón Divino de Jesús! Por medio del Corazón inmaculado de María Santísima os ofrezco las oraciones, obras y sufrimientos de este día para reparar las ofensas que se os hacen y por todas las intenciones por las cuales Vos os inmoláis continuamente en el altar. Os las ofrezco en especial para que la Madre de Dios nos conduzca al Corazón de su Hijo, y aumenten los misioneros en número y fervor.

Resolución apostólica.—Practicar mucho la devoción a la Virgen como Madre de Jesús.

PATRONO DE MES

Mayo, 16. — San Juan Nepomuceno, confesor.—Fortaleza cristiana.

Máxima.— Piensa lo que vas a hablar, porque no hables algo de que debas arrepentirte.

San Jerónimo.

Comunión general: día .... hora...............

Comunión mensual, el día del Patrono del mes.

Comunión semanal ....

Ejercicio de la tarde: día .... hora............

cutivos, sabiendo
rado de su semi-

dos serán $x - 1$

minos del primer
licadas, resulta :

$$x = \frac{195 \pm \sqrt{195^2 + 4 \times 14 \times 14}}{28},$$

$$x' = \frac{195 + 197}{28} = 14,$$

$$x'' = \frac{195 - 197}{28} = -\frac{1}{14}.$$

Los números pedidos son 13, 14 y 15.

Hay que desechar la segunda raiz, por no cumplir las condiciones de los datos.

V. *En los extremos de una recta* AB *de* 18 *metros, se levantan las perpendiculares* AC *y* BD. *Hallar entre* A *y* B *un punto* P *tal que uniéndolo con los extremos de las perpendiculares, resulte* PD = 2PC. *Sábese que* AC = 2*m*. *y* BD = 4*m*.

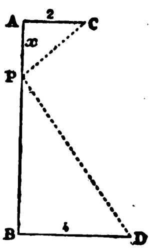

Fig. 7.

Sea PA $= x$, entonces PB $= 18 - x$.

Se tiene : $PC = \sqrt{x^2 + 4}$,

$$PD = \sqrt{16 + (18 - x)^2};$$

la ecuación será :

$$\sqrt{16 + (18 - x)^2} = 2\sqrt{x^2 + 4}.$$

Elevemos al cuadrado y simplifiquemos :

$$16 + 324 + x^2 - 36x = 4x^2 + 16,$$

$$3x^2 + 36x - 324 = 0,$$

ó sea

$$x^2 + 12x - 108 = 0,$$

$$x = -6 \pm \sqrt{36 + 108},$$

$$x' = -6 + 12 = 6,$$

$$x'' = -6 - 12 = -18.$$

El primer valor solo corresponde á la cuestión ; AP $= 6^m$ y PB $= 12^m$.

Comprobación. $PC = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$.

$$PD = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160} = 2\sqrt{40}.$$

VI. *En un triángulo isósceles cuyos lados iguales tienen cada úno 24 metros, la altura es una media proporcional entre la base y el lado ; calcular la base.*

Sea $CD = x$.

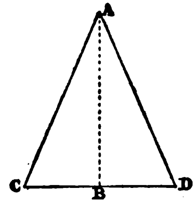

Fig. 8.

Tenemos :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2 = 576 - \frac{x^2}{4}.$$

Por hipótesis tenemos también :

$$\overline{AB}^2 = AD \times CD \quad ó \quad 24x.$$

Igualando los dos valores de $\overline{AB}^2$, resultará :

$$576 - \frac{x^2}{4} = 24x,$$

$$2304 - x^2 - 96x = 0,$$

$$x^2 + 96x - 2304 = 0,$$

$$x = -48 \pm \sqrt{2304 + 2304},$$

$$x = -48 \pm \sqrt{48^2 \times 2},$$

$$x = -48 + 48\sqrt{2},$$

$$x = 48(\sqrt{2} - 1).$$

Luego $x = 48 \times 0,414... = 19^m,872...$

VII. *Dividir una recta* AB = 12 *metros en dos segmentos tales que la suma de los cuadrados construídos sobre estos segmentos sea igual á 10 veces el área del triángulo exterior* DIF.

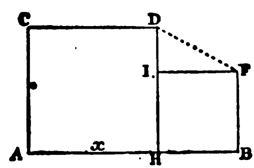

Fig: 9.

Haciendo $AH = x$,
resultará : $HB = IH = 12 - x$,

$$DI = DH - IH = x - (12 - x) = 2x - 12 = 2(x - 6).$$

La ecuación será :

$$x^2 + (12 - x)^2 = \frac{10 \times 2(x-6)(12-x)}{2},$$

$$x^2 + 144 + x^2 - 24x = 10(12x - x^2 - 72 + 6x),$$

$$2x^2 + 144 - 24x = 180x - 10x^2 - 720,$$

$$12x^2 - 204x + 864 = 0,$$

$$x^2 - 17x + 72 = 0,$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 288}}{2},$$

$$x' = \frac{17 + 1}{2} = 9,$$

$$x'' = \frac{17 - 1}{2} = 8.$$

Las dos respuestas cumplen la condición pedida.

VIII. *En un círculo de 5 metros de radio se trazan dos diámetros perpendiculares; desde el extremo de úno de ellos se traza la cuerda* CH *de* 8 *metros; calcular los dos segmentos en que esta cuerda divide al diámetro* AB.

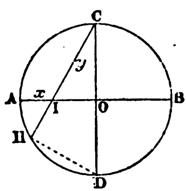

Fig. 10.

Sea $AI = x, \quad CI = y.$

Tenemos: $CI \times IH = AI \times IB,$

ó sea $y(8 - y) = x(10 - x). \qquad (1)$

Los triángulos rectángulos CHD y COI, que tienen común el ángulo agudo C, son semejantes; luego

$$\frac{CD}{CH} = \frac{CI}{CO}, \quad ó \quad \frac{10}{8} = \frac{y}{5},$$

de donde $$y = \frac{25}{4}.$$

Sustituyamos este valor en la ecuación (1):

$$\frac{25}{4}\left(8 - \frac{25}{4}\right) = 10x - x^2,$$

$$50 - \frac{625}{16} = 10x - x^2,$$

$$16x^2 - 160x + 175 = 0,$$

$$x = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 2800}}{16},$$

$$x' = \frac{80 + 60}{16} = \frac{35}{4} = 8^{m},75,$$

$$x'' = \frac{80 - 60}{16} = \frac{5}{4} = 1^{m},25.$$

Los dos valores pueden admitirse; el primero corresponde al caso en que la cuerda esté á la derecha de CD; el scgundo, al caso de la figura.

IX. *Se conocen todos los elementos de un triángulo* ABC, *se prolongan los lados más allá de* B *y se traza* ED *paralela á la base* AC; *¿cuál ha de ser la longitud de* $BE = x$ *para que el triángulo* AED *sea equivalente al triángulo* ABC?

Sea $ED = y$, $AC = b$, $BH = a$.

Tracemos $EF = a'$ perpendicular á AC.

Los triángulos semejantes CBH, CEF dan:

$$\frac{l}{a} = \frac{l+x}{a'};$$

de donde $a' = \dfrac{a(l+x)}{l}$.

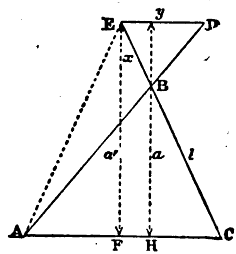

Fig. 11.

Los triángulos semejantes BED, BAC dan también:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{l}; \quad \text{de donde} \quad y = \frac{bx}{l}.$$

El área de AED se expresa por $A = \dfrac{ya'}{2}$.

Sustituyamos el valor de y y a':

$$A = \frac{bx}{2l} \times \frac{a}{l}(l+x),$$

$$A = \frac{bax}{2l^2}(l+x),$$

de donde se deduce la ecuación $\dfrac{bax(l+x)}{2l^2} = \dfrac{ba}{2}$.

Dividamos ambos miembros por $\dfrac{ba}{2}$:

$$\frac{x(l+x)}{l^2} = 1,$$

$$x^2 + lx - l^2 = 0,$$

$$x = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2},$$

$$x = \frac{-l \pm \sqrt{5l^2}}{2},$$

$$x = \frac{-l \pm l\sqrt{5}}{2}.$$

Consideremos el radical con el signo $+$, pues él solo cumple la condición pedida ; tendremos :

$$x = \frac{l}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}618\, l.$$

Luego x es el segmento mayor de $CB = l$, dividido en media y extrema razón. (Véase Geometría, nº 329.)

PARTE TERCERA

Ejercicios de aplicación.

Extraer la raíz cuadrada de los polinomios siguientes :

1. 1º $x^2 + x + \frac{1}{4}$.

2º $x^4 - 4x^2 + 4$.

3º $16a^2 + 40ab + 25b^2$.

2. 1º $\frac{25}{4}a^2b^2 + \frac{5}{3}abc^2 + \frac{1}{9}c^4$.

2º $\frac{a^2}{b^2} - \frac{4a}{3c} + \frac{4b^2}{9c^2}$.

3º $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Simplificar los radicales siguientes y efectuar las operaciones indicadas :

3. 1º $\sqrt{4a^2b^3c^4}$.

2º $\sqrt{8a^2b^4c^3}$.

4. 1º $6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2° $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6}$.

3° $2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50}$.

5. 1° $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$.

2° $8\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{3}{16}}$.

6. 1° $\sqrt{8a^2b^3 + 4a^3b^2}$.

2° $\sqrt{9a^3b^3c^4 - 18a^2b^2c^4}$.

3° $\sqrt{16a^2b^4 + 8a^3b^2 + 4a^2b^3}$.

4° $\sqrt{\frac{3}{4}a^2b^2 - \frac{5}{8}a^2b^2}$.

Efectuar las operaciones indicadas :

7. 1° $\sqrt{24} \times \sqrt{6}$.

2° $\sqrt{5} \times \sqrt{\frac{1}{5}}$.

3° $2\sqrt{27} \times 3\sqrt{6}$.

8. 1° $(9 + 2\sqrt{10})(9 - 2\sqrt{10})$.

2° $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

3° $(5\sqrt{3} - 7\sqrt{6})(2\sqrt{8} - 3)$.

9. 1° $\left(-5 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)\left(-5 + \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$.

2° $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

3° $3\sqrt{-8} \times 2\sqrt{-18}$.

10. 1° $(\sqrt{72} + \sqrt{32} - 4) : \sqrt{8}$.

2° $(2\sqrt{32} + 3\sqrt{2} + 4) : 4\sqrt{8}$.

3° $(4\sqrt{18} - 6\sqrt{8} + 8\sqrt{72}) : 2\sqrt{2}$.

Convertir las siguientes expresiones fraccionarias en ótras cuyo denominador sea racional :

11. 1° $\dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$.

2° $\dfrac{1 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$.

3° $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}}$.

12. 1° $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

2° $\dfrac{a - \sqrt{3}}{a + \sqrt{3}}$.

3° $\dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

Resolver las ecuaciones siguientes :

13. $x^2 - 4x + 3 = 0$.

14. $x^2 - 8x + 15 = 0$.

15. $x^2 + 2x = 15$.

16. $x^2 + 16x + 15 = 0$.

17. $x^2 - 8x - 20 = 0$.

18. $x^2 + 12x = 160$.

19. $x^2 - 22x + 85 = 0$.

20. $x^2 - 10x = 75$.

21. $x(x-8)+7=0$.

22. $x(x-14)=120$.

23. $x(x+12)+35=0$.

24. $x(x+10)+9=0$.

25. $x^2-x=56$.

26. $x^2+3x-10=0$.

27. $x^2-5x=36$.

28. $x^2+7x-78=0$.

29. $x(x-15)-100=0$.

30. $(x+5)(x+2)=40$.

31. $(x-4)(x+6)=75$.

32. $(x-8)(x+1)=-18$.

33. $(x+1)(x-1)=7x-1$.

34. $(x+3)(x-2)=13x-17$.

35. $3x^2-10x+3=0$.

36. $2x^2-9x-5=0$.

37. $4x^2+9x+2=0$.

38. $3x^2+x=2$.

39. $2x^2+x-1=0$.

40. $8x^2-2x=3$.

---

41. $x^2+2ax-3a^2=0$.

42. $x^2-4ax+3a^2=0$.

43. $x^2-8ax+15a^2=0$.

44. $x^2+3ax-10a^2=0$.

45. $x^2-2abx+a^2b^2=0$.

46. $2x^2+ax-4a^2=0$.

47. $3x^2+8ax+a^2=0$.

48. $2x^2+(a+b)x-ab=0$.

49. $x^2-2abx-a^2b^2=0$.

50. $2x(x-a)-5a^2=0$.

---

51. $x+\sqrt{x}=20$.

52. $x-2\sqrt{x}=15$.

53. $\sqrt{x}+2x=21$.

54. $5\sqrt{x}-2x=2$.

55. $3\sqrt{2x}-4x=-20$.

56. $a+\sqrt{ax}=x$.

57. $x-\sqrt{3ax}-2a=0$.

58. $\sqrt{5ax}=x-2a$.

59. $\sqrt{x^2+5}=1-\sqrt{x^2-8}$.

60. $2\sqrt{x}=x-a$.

61. $$\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}=\sqrt{2x}.$$

62. $$2x-10=\sqrt{x+5}\times\sqrt{x-5}.$$

PROBLEMAS

63. ¿ Cuál es el número cuyos $^4/_5$ multiplicados por su tercio dan 540 ?

64. Los $^3/_4$ del contenido de un barril multiplicados por los $^4/_5$ dan 960 litros : búsquese el contenido.

65. Una cantidad sumada con 12, y multiplicada por la misma cantidad menos 12 da 481 : ¿ cuál es dicha cantidad ?

66. ¿ Cuál es el número cuyo tercio más uno, multiplicado por el tercio menos uno, da 323 ?

67. Búsquense tres números impares consecutivos cuyo producto sea igual á 7 veces su suma.

68. El número de mis años de servicio es tal, decía un soldado, que los $^2/_3$ de él más su $^1/_4$, multiplicados por los $^2/_3$ del mismo menos su $^1/_4$ dan 220 años : hállese el número de años de servicio.

69. El cociente de una división es los $^3/_8$ del divisor, y el residuo 36 es la 55ª parte del dividendo : ¿ cuál es el divisor ?

70. El producto de dos factores es 73728 : hallar estos factores, sabiendo que son entre sí como $^2/_3$ es á $^3/_4$.

71. Calcúlese mi edad, decía un anciano, sabiendo que al multiplicarla por su cuarta y por su sexta parte, y dividiendo el producto por sus $^8/_9$, resultan 243 años.

72. Búsquense dos números, conociendo su relación $^4/_7$ y la suma 3185 de sus cuadrados.

73. La suma de dos números es 30 y su producto 224 : ¿ cuáles son estos números ?

74. Búsquense dos números pares consecutivos, sabiendo que su producto es 2808.

75. La diferencia de dos números es 14, y su producto 1632 : ¿ cuáles son estos números ?

76. ¿ Cuánto poseen dos obreros, sabiendo que tienen juntos 196 pts., y que el producto de lo que tiene cada úno vale 48 veces esta suma ?

77. La diferencia de precio de dos relojes es de 9 pts.: ¿ cuáles son los precios respectivos, sabiendo que su producto equivale á 180 veces la diferencia ?

78. Al vender un negociante en 56 pts. un espejo, gana tanto por ciento como le había costado el espejo : búsquese el precio de compra.

79. Dos jóvenes tienen juntos 24 pts.; ¿ cuánto tiene cada úno, sabiendo que la suma de los cuadrados de su haber respectivo es de 290?

80. Buscar dos números cuya diferencia sea 8, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 274.

81. Adivinen mi edad, decía úno, sabiendo que el cuadrado de ella es igual á 16 veces la edad que tendré dentro de 12 años.

82. Determínese la fecha del mes, sabiendo que 10 veces su cuadrado es igual al cubo de la misma menos 24 veces dicha fecha.

83. Un padre tiene 54 años, y su hijo 12; ¿ cuántos años hace que la edad del padre fue el cuadrado de la del hijo?

84. ¿ Cuál es el número que disminuído en 5 veces su raíz cuadrada iguala á 500?

85. Una silla y un sillón valen juntos 39 pts.: ¿ cuáles son sus precios respectivos, si la suma de los cuadrados de éstos es igual á 20 veces la suma de los mismos más 21 pts.?

86. Al vender un mueble en 255 pts., se gana el duplo de la raíz cuadrada del precio de compra: ¿ en cuánto se había comprado?

87. ¿ Cuántos metros de seda pueden comprarse con 544 pts., sabiendo que el número que representa el precio del metro es la mitad menos 1 del que representa el número de metros?

88. Descomponer el número 20 en dos partes cuyo producto sea 96.

89. Se ha amueblado un salón con 12 sillas y 8 sillones que costaron 432 pts.; ¿ cuál es el precio de un sillón y el de una silla, sabiendo que el precio de un sillón es igual á 3 veces el cuadrado del de una silla?

90. Un patrón y un jornalero convienen en lo siguiente: el patrón dará al obrero tantas pesetas por día como días trabaje éste; y al contrario, el obrero pagará al patrón tantas veces el jornal convenido cuantos días no hubiere trabajado; al cabo de un mes de 25 días de trabajo, el jornalero recibe 75 pts.: ¿ cuántos días ha trabajado?

91. El dividendo de una división es 1235: búsquese el divisor, sabiendo que es igual al cociente y que el residuo es los $^2/_7$ del divisor.

92. El divisor de una división excede en 5 al cociente, y éste excede en 5 al residuo: ¿ cuál es el divisor si el dividendo es 1075?

93. Un capital de 6000 pts. se impone á cierto tanto por ciento; este capital con sus intereses en un año, vuelve á imponerse

pero á un tanto por ciento inferior al primero en 1 pta., y da por interés anual 252 pts. : dígase cuál fue el primer tanto por ciento.

94. Una mujer casera compra pollos por 96 pts., luego gasta 14 pts. en cebarlos ; después de perdidos 4, vende los demás en 1 pta. más de lo que le habían costado : ¿ cuántos pollos había comprado, y en cuánto, sabiendo que ha ganado 40 pts. ?

95. Veintidos empleados, obreros y aprendices, reciben una gratificación ; los obreros reciben juntos 60 pts., lo mismo que los aprendices ; ¿ cuántos obreros y cuántos aprendices hay, si cada uno de éstos recibe 1 pta. menos que un obrero ?

96. Con 270 pts., se puede comprar cierto número de metros de paño ; con la misma suma se consiguen 3 metros menos de otra calidad, á 3 pts. más el metro : búsquese el precio de las dos calidades y el número de metros que se pueden comprar de cada úna de ellas.

97. Una cisterna está provista de dos llaves ; si la primera vacia la mitad y se cierra en seguida para abrir la segunda, la cisterna se vacia en 50 horas ; pero si, estando llena la cisterna, se abren á un mismo tiempo ambas llaves, se vaciará en 24 horas : calcúlese el tiempo que tardará cada llave sola en vaciar la cisterna.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

98. Un rectángulo es equivalente á un cuadrado de 96 m. de lado : calcular las dimensiones del rectángulo, si la altura es los $^9/_{16}$ de la base.

99. Las dimensiones de un rectángulo están en la relación de 4 á 9 : búsquense estas dimensiones, sabiendo que el rectángulo es equivalente á un triángulo de 84 m. de base y 42 m. de altura.

100. Se ha batido una chapa cuadrada de plomo, y su lado se ha extendido hasta $^2/_9$ más : búsquese la longitud primitiva, si la superficie del nuevo cuadrado es de 1089 cm^2.

101. Desde un punto situado á 12 m. del centro en un círculo de 8 m. de radio, se traza una secante que se divide en dos partes iguales por la circunferencia : ¿ cuál es la longitud de esta secante ?

102. Calcular las dimensiones de un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa, 51 m., y la relación, $^8/_{15}$, de los catetos.

103. En un círculo de 12 cm. de radio se cortan dos cuerdas que tienen 80 cm. por producto de sus segmentos respectivos : ¿ á qué distancia del centro se halla el punto de intersección ?

104. Dos cuerdas paralelas que pasan á uno y otro lado del centro tienen respectivamente 6 y 10 m., y la distancia que media entre ellas es de 8 m. : ¿ cuál es el radio del círculo ?

105. ¿ A qué distancia del vértice A de un triángulo, tomada en úno de los lados, hay que trazar una paralela á la base para dividir este triángulo : 1º en dos partes equivalentes; 2º en tres partes equivalentes, si el lado tiene 15 metros ?

106. Sumando los cuadrados de dos lados de un triángulo resulta 666; calcular estos lados, sabiendo que la bisectriz del ángulo comprendido determina en el tercer lado dos segmentos de 14 y 10 m.

107. Calcular las dimensiones de un trapecio de 864^{m2}, sabiendo que la base menor es los $^3/_8$ de la mayor y que la altura es igual al tercio de la suma de las bases.

108. ¿ Cuáles son las dimensiones de un trapecio de 2430^{m2}, sabiendo que la altura es los $^2/_3$ de la base menor, y ésta los $^2/_3$ de la base mayor ?

109. ¿ Cuáles son las dimensiones de un rectángulo, si su perímetro es de 78 m., y su área de 360^{m2} ?

110. ¿ Cuáles son las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que la diferencia de ellas es de 42^{m}, y la superficie de la figura 3915^{m2} ?

111. La base y la altura de un rectángulo tienen respectivamente 50 y 24 m.; trácese una paralela al lado de 24 m., de modo que sean semejantes los dos rectángulos que determine.

112. Búsquense los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que el cateto menor tiene 23 m. menos que el mayor, y éste 2 m. menos que la hipotenusa.

113. Dividir una recta de 12 m. en dos segmentos tales que el cuadrado del mayor sea igual á 4 veces el producto del menor por la línea entera.

114. Dos cuerdas de 16 m. cada úna se cortan perpendicularmente en un círculo de 10 m. de radio; calcular los segmentos de estas cuerdas.

115. En un círculo de 6 m. de radio, trácese, desde un punto situado á 9 m. del centro, una secante que determine en el círculo una cuerda de 4 m.

116. ¿ Cuáles son las dimensiones de un rectángulo inscrito en un círculo de 85 m. de diámetro, siendo la diferencia de ellas de 41 m. ?

117. ¿ Cuáles son los tres lados de un triángulo rectángulo, conociendo el perímetro de 80 m., y la suma 46 m. de los catetos ?

118. Búsquese la base mayor de un trapecio isósceles en que la base menor tiene 16 m., sabiendo que la diagonal que tiene 40 m. es perpendicular al lado oblicuo.

119. Las dos diagonales de un rombo tienen 18 m. y 12 m.; añádase una misma longitud á cada úna de ellas, de modo que la superficie del rombo que resulte sea el duplo de la del primero.

120. Por medio de una recta, divídase un rectángulo de 20 m. de base y 15 de altura de modo que se forme un triángulo tal que la suma de sus catetos sea 27 m., y su área los $^3/_7$ del área restante.

121. En los extremos de una recta AB de 18 m., se levantan en una misma dirección dos perpendiculares que tienen 4 m. y 8 m. : indíquese en la recta AB un punto tal, que juntado con los extremos de las perpendiculares, resulte un ángulo recto.

122. Las dimensiones de un rectángulo son de 20 y 15 m., desde los extremos de una misma diagonal se señala igual longitud en cada lado, se unen entre sí los cuatro puntos obtenidos, de modo que se forme un paralelogramo : ¿ cuál ha de ser la ongitud señalada para que la superficie del paralelogramo sea $^1/_4$ de la del rectángulo ?

123. Los catetos de un triángulo rectángulo son $AB = 15$ m.; $AC = 18$ m.; desde el punto A se señala sobre AB una longitud x en medio de la cual se levanta una perpendicular; se junta con A y con B el punto en que esta perpendicular encuentra á la hipotenusa : ¿ cuál ha de ser la longitud de x para que el triángulo que resulta sea los $^3/_8$ del triángulo dado ?

124. La tangente común á dos circunferencias que se tocan exteriormente tiene 15 m. ; búsquense los radios respectivos, si su diferencia es igual al cuádruplo de la longitud con que la suma de ellos pasa á la tangente.

125. En el punto medio de la base superior de un cuadrado se levanta una perpendicular ; ¿ cuál ha de ser su longitud, para que, juntando su extremo con los dos vértices más cercanos, y alargando estas líneas hasta encontrar á la base inferior prolongada, el triángulo que resulte tenga una superficie triple de la del cuadrado dado ? — el lado del cuadrado es $l = 24$ m.

126. Un rectángulo termina por sus extremos en un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es igual á la latitud del rectángulo ; búsquese esta latitud, sabiendo que la superficie de la figura total es de 896 m², y que su mayor longitud es de 64 m.

127. Calcular los tres lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que la perpendicular levantada en la mitad de la hipotenusa encuentra á los catetos en dos puntos què distan 4 m. y 5 m. del vértice del ángulo recto.

128. ¿ Cuáles son los lados de un triángulo rectángulo, si su perímetro es de 60 m., y la diferencia de los catetos de 14 m. ?

129. Calcular la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que su área es de 240 m², y que el radio del círculo circunscrito tiene 13 m.

130. En un círculo de 37 m. de diámetro, desde un extremo de éste se traza una cuerda de 35 m., y desde el ótro, otra cuerda que corta á la primera en dos segmentos que son entre sí como 3 es á 4 : calcular los segmentos determinados por estas cuerdas.

131. Los lados iguales de un triángulo isósceles tienen 45 m., y la base 36; ¿ cuántos metros hay que prolongar la base para que, juntando el extremo de la prolongación con el vértice del triángulo, el triángulo total tenga el lado de 45 m. por bisectriz del ángulo interior ?

PARTE CUARTA

PROGRESIONES, LOGARITMOS, INTERESES COMPUESTOS Y ANUALIDADES

§ I. — Progresiones aritméticas.

155. Definiciones. — *Progresión aritmética* es una serie de términos tales, que cada úno de ellos es igual al anterior sumado con una cantidad constante llamada *razón* de la progresión.

Una progresión aritmética es *creciente* ó *ascendente* cuando la razón es positiva, y *decreciente* ó *descendente* en el caso contrario.

EJEMPLOS : $\div 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . 18..$

$\div 96 . 92 . 88 . 84 . 80 . 76 . 72 . 68...$

que se leen : como 2 es á 4, es á 6, es á 8, etc.

como 96 es á 92, es á 88, es á 84, etc.

La primera progresión es creciente; su razón es $+2$.

La segunda es decreciente ; su razón es -4.

156. 1ra Propiedad. — *Cualquier término de una progresión aritmética es igual al primero, sumado con el producto de la razón por el número de términos que hay antes de él.*

Sea la progresión

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, g \,.\, h \ldots\ldots l.$$

Por definición, el segundo término b es igual al primero más la razón, que llamaremos r:

$$b = a + r.$$

El tercer término c es igual al segundo b más la razón, ó sea:

$$c = b + r = a + 2r.$$

Asimismo, el cuarto término d es igual al tercero c más la razón, ó sea:

$$d = c + r = a + 3r,$$

y así sucesivamente.

Como se ve, el segundo término es igual al primero más la razón; el tercero es igual al primero más dos veces la razón; el cuarto es igual al primero más tres veces la razón, etc.

Luego, **para generalizar**, llamando l al último término, ó sea al que ocupa el lugar n, y a al primer término, se tendrá evidentemente:

$$l = a + (n - 1)r.$$

De esta propiedad se infiere que una progresión aritmética

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \ldots\ldots l,$$

puede escribirse:

$$\div a \,.\, a + r \,.\, a + 2r \,.\, a + 3r \ldots\ldots a + (n - 1)r.$$

APLICACIONES. 1º *Hallar el 25º número impar.*

Los números impares forman una progresión:

$$\div 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \ldots$$

cuya razón es 2.

Luego tendremos:

El término 25º $= 1 + (24 \times 2)$ ó sea 49.

2º *Búsquese el 31º término de la progresión*

$$\div 75 \,.\, 72 \,.\, 69 \,.\, 66 \ldots$$

Se tendrá :

El 31º término $= 75 + 30 \times (-3)$, ó sea -15.

157. 2ª Propiedad. — *En una progresión aritmética limitada, la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante é igual á la suma de éstos.*

Sea la progresión

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots\ldots h \,.\, i \,.\, k \,.\, l.$$

Consideremos los términos c, i, equidistantes de los extremos.

Tenemos (nº 156) : $c = a + 2r$. (1)

Tenemos también : $l = i + 2r$, de donde $i = l - 2r$. (2)

Sumemos ordenadamente las ecuaciones (1) y (2) :

$$c + i = a + 2r + l - 2r = a + l.$$

En general, sean d y h dos términos tales, que d tenga m términos antes de él, y h, m términos después de él; siendo a y l los extremos, tendremos :

$$d = a + mr, \quad (1)$$

y $$l = h + mr,$$

de donde $$h = l - mr. \quad (2)$$

Sumemos las igualdades (1) y (2), y resultará :

$$d + h = a + l.$$

Nota. — Cuando es *impar* el número de términos de la progresión, *el del medio es equivalente á la semisuma de los extremos, por ser equidistante de ellos.*

APLICACIÓN. *Una progresión tiene* 81 *términos, siendo* 2 *y* 242 *los extremos, hallar el* 41º.

El 41º término $= \dfrac{2 + 242}{2}$, ó sea 122.

158. 3ª Propiedad. — *La suma de los términos de una progresi ónaritmética limitada es igual al semiproducto de la suma de los extremos por el número de términos.*

Sea una progresión de n términos :

$$\div a \,.\, b \,.\, c \ldots\ldots h \,.\, k \,.\, l;$$

tendremos por expresión de la suma

$$S = a + b + c \ldots\ldots + h + k + l,$$
$$S = l + k + h \ldots\ldots + c + b + a.$$

Sumemos ordenadamente :

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + h) \ldots\ldots$$
$$+ (h + c) + (k + b) + (l + a).$$

Cada paréntesis encierra ora los extremos, ora dos términos equidistantes de los extremos ; por lo tanto son iguales estos paréntesis. Como hay tantos sumandos como términos tiene la progresión, llamando n este número, resulta :

$$2S = (a + l)n,$$

de donde $$S = \frac{(a + l)n}{2}. \qquad (1)$$

159. Nota. — Si en esta fórmula se sustituye el valor $a + (n - 1)r$ del *enésimo* término l, resultará :

$$S = \frac{[a + a + (n - 1)r]n}{2}, \quad \text{ó} \quad \frac{n}{2}[2a + (n - 1)r]. \qquad (2)$$

Por medio de esta fórmula se puede calcular la suma de los términos de una progresión en función de a, n y r.

Aplicaciones. *¿Cuál es la suma de los términos de la progresión* $\div\, 3 \,.\, 8 \,.\, 13 \,.\, 18 \ldots$, *compuesta de* 41 *términos?*

Busquemos primero el 41° término

Este término es igual á $3 + (5 \times 40) = 203.$

Luego (1) $$S = \frac{(3 + 203)41}{2} = 4223.$$

La fórmula (2) da inmediatamente :

$$S = \frac{41}{2}(6 + 40 \times 5) = 4223.$$

2° *Hallar la suma de los* n *primeros números impares.*

La fórmula (2) da :

$$S = \frac{n}{2}[2 + (n - 1)2], \text{ ó sea } n^2. \qquad (3)$$

Así pues, la suma de los n primeros números impares es igual al cuadrado de n.

De donde se infiere que la suma de los 10 primeros números impares es igual á 100, y la suma de los 21 primeros es 21^2 ó sea 441.

160. Medios aritméticos. — Llámanse *medios aritméticos* ó diferenciales los números que forman con dos números dados una progresión aritmética cuyos extremos son estos mismos números.

PROBLEMA. *Interpólense entre* a *y* b, m *medios aritméticos.*

Busquemos primero la razón de la progresión.

Esta progresión constará de $m+2$ términos, á saber, los m medios más los dos términos dados.

Luego $$b = a + (m+1)r, \qquad (\text{n}^o\ 156)$$

de donde $$r = \frac{b-a}{m+1}. \qquad (4)$$

Por lo tanto, *la razón de la progresión es igual á la diferencia entre el último término y el primero, dividida por el número de medios más uno.*

APLICACIONES. 1º *Entre* 2 *y* 24, *interpolar diez medios aritméticos.*

Se tiene: $$r = \frac{24-2}{11} = 2.$$

La progresión será:

$$\div\ 2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10 \,.\, 12 \,.\, 14 \,.\, 16 \,.\, 18 \,.\, 20 \,.\, 22 \,.\, 24.$$

2º *Entre* 80 *y* 50, *interpolar cinco medios aritméticos.*

Tenemos: $$r = \frac{50-80}{6} = -5.$$

La progresión será:

$$\div\ 80 \,.\, 75 \,.\, 70 \,.\, 65 \,.\, 60 \,.\, 55 \,.\, 50.$$

161. Nota. — Si entre los términos consecutivos de una progresión aritmética se interpola igual número de medios, las progresiones parciales que resultan forman una sola progresión.

En efecto, la razón de estas progresiones es una misma, ya que es, para cada úna de ellas, el cociente de la *diferencia constante* de dos términos consecutivos por el *número de términos que se han de interpolar, más uno.* A más de esto, el último término de cada úna de estas progresiones es el primero de la siguiente; por lo tanto, todas estas progresiones parciales forman una sola progresión.

APLICACIÓN. *Interpolar* 3 *medios aritméticos entre todos los términos de la progresión*

$$\div 5 . 13 . 21 . 29 . 37\ldots$$

La razón de estas progresiones parciales será :

$$\frac{13-5}{4}, \quad \frac{21-13}{4}, \quad \frac{29-21}{4}, \quad \frac{37-29}{4};$$

esto es : $\frac{8}{4}$ ó 2.

Tendremos sucesivamente :

$$\div 5 . 7 . 9 . 11 . 13,$$
$$\div 13 . 15 . 17 . 19 . 21,$$
$$\div 21 . 23 . 25 . 27 . 29\ldots$$

que podemos escribir :

$$\div 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 . 19 . 21 . 23 . 25\ldots$$

y así resulta una sola progresión.

§ II. — Progresiones geométricas.

162. Definición. — Llámase *progresión geométrica* una serie de términos tales, que cada úno de ellos es igual al que le precede multiplicado por úna cantidad constante llamada *razón* de la progresión.

Una progresión geométrica es creciente cuando la razón es mayor que 1, y decreciente cuando la razón es un quebrado.

EJEMPLOS : $\div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64...$

$$\div\!\div\ 81 : 27 : 9 : 3 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9}...$$

que se leen :

Como 1 es á 2, es á 4, es á 8, etc.

Como 81 es á 27, es á 9, es á 3, etc.

La primera progresión es creciente ; su razón es 2.

La segunda es decreciente ; su razón es $\frac{1}{3}$.

163. 1ra Propiedad. — *En una progresión geométrica, cualquier término es igual al primero multiplicado por una potencia de la razón expresada por el número de términos que le preceden.*

Sea la progresión

$$\div\!\div\ a : b : c : d : e : f : g...$$

Por definición, el segundo término b es igual al primero a multiplicado por la razón que llamaremos q, ó sea :

$$b = aq.$$

Por definición también, el tercer término c es igual al segundo b multiplicado por la razón ; pero $b = aq$; luego

$$c = aq^2.$$

Asimismo el cuarto término d es igual al tercero c multiplicado por la razón ; pero $c = aq^2$; luego

$$d = aq^3,$$

y así sucesivamente.

Ya se ve que el segundo término es igual al primero multiplicado por la razón ; que el tercero es igual al primero multiplicado por la segunda potencia de la razón ; que el cuarto es igual al primero multiplicado por la tercera potencia de la razón, etc.

Para generalizar, llamemos l al último término, ó sea al que ocupa el lugar n, y a al primero ; tendremos :

$$l = aq^{n-1}.$$

De donde se infiere que una progresión geométrica

$$\div\div a : b : c : d : e, \ldots., l$$

puede escribirse :

$$\div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : \ldots.. aq^{n-1}.$$

APLICACIONES. 1º *Hallar el noveno término de la progresión*

$$\div\div 1 : 2 : 4 : 8\ldots$$

El 9º término $= 1 \times 2^8$, ó sea 256.

2º *Búsquese el 11º término de la progresión*

$$\div\div 27 : 9 : 3 : 1 : \frac{1}{3}\ldots$$

El 11º término $= 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$, ó sea $\frac{1}{2187}$.

164. 2ª Propiedad. — *En una progresión geométrica, el producto de dos términos equidistantes de los extremos es constante é igual al producto de los extremos.*

Sea la progresión

$$\div\div a : b : c : d\ldots.. : h : i : k : l.$$

Consideremos los términos c, i equidistantes de los extremos.

Tenemos (nº 163) : $\quad c = aq^2,$ (1)

y también $\quad l = iq^2,\quad$ de donde $\quad i = \frac{l}{q^2}.$ (2)

Multipliquemos ordenadamente las igualdades (1) y (2) :

$$ci = \frac{aq^2l}{q^2} = al.$$

Para generalizar, llamemos d y h á dos términos tales, que d tenga m términos antes de él, y h, m términos después de él, siendo a y l los extremos; tendremos :

$$d = aq^m \qquad (1)$$

y

$$l = hq^m,$$

de donde

$$h = \frac{l}{q^m}. \qquad (2)$$

Multipliquemos ordenadamente las igualdades (1) y (2):

$$dh = \frac{aq^m l}{q^m}, \quad \text{ó sea} \quad al.$$

165. Nota. — Cuando es impar el número de términos de la progresión geométrica, *el término medio es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos.*

166. 3ª Propiedad. — *La suma de los términos de una progresión geométrica es igual al producto del último término por la razón, menos el primero, y dividida la diferencia por la razón menos uno.*

Sea una progresión de n términos:

$$\div\div a : b : c ..... h : k : l.$$

Tenemos: $$S = a + b + c ..... + h + k + l. \qquad (1)$$

Multipliquemos por q los dos miembros de esta igualdad:

$$Sq = aq + bq + cq ..... + hq + kq + lq. \qquad (2)$$

Restemos ordenadamente la primera igualdad de la segunda, teniendo presente que

$$aq = b, \quad bq = c ..., \quad hq = k, \quad kq = l.$$

$$Sq - S = b + c + ... + k + l + lq - a - b - c .....$$
$$- k - l,$$

$$S(q-1) = lq - a,$$

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}. \qquad (3)$$

Sustituyendo l con su valor aq^{n-1}, esta fórmula se convierte en la siguiente:

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (4)$$

Por medio de esta fórmula se puede calcular la suma de los términos en función de a, de q y de n.

APLICACIONES. 1º *¿Cuál es la suma de los nueve primeros términos de la progresión*

$$\div\div 2 : 4 : 8 : 16 ... ?$$

La fórmula (4) da :

$$S = \frac{2(2^9 - 1)}{2 - 1} = 1022.$$

2º *Calcular la suma de los ocho primeros términos de la progresión*

$$\div\!\div\, 27 : 9 : 3 \ldots$$

La fórmula (4) da :

$$S = \frac{27\left[\left(\frac{1}{3}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{27\left(-\frac{6560}{6561}\right)}{-\frac{2}{3}} = \frac{27 \times 6560 \times 3}{6561 \times 2} =$$

$$= \frac{3280}{81}.$$

167. Busquemos el *límite*, esto es el valor fijo á que se aproxima la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente.

Se tiene : $$S = \frac{aq^n - a}{q - 1}.$$

Cambiemos los signos de los términos del segundo miembro :

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Esta forma de la igualdad manifiesta que la suma consta de dos partes : la primera $\frac{a}{1-q}$ es fija; la segunda $-\frac{aq^n}{1-q}$ es variable, y se aproxima á cero cuando n crece indefinidamente, pues la razón q es un quebrado, y el factor q^n es tanto menor cuanto mayor es n. Luego la suma de los términos se aproxima á $\frac{a}{1-q}$.

Por lo tanto, *el límite de la suma de los términos de una progresión geométrica decreciente es igual al cociente del primer término por* **1** *menos la razón.*

APLICACIONES. 1º *Hallar el límite de la suma de los términos de la progresión*

$$\div 4 : 2 : 1 : \frac{1}{2} \ldots$$

Tenemos : $\text{límite} = \dfrac{4}{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{4}{\dfrac{1}{2}} = 8.$

2º *Hallar el límite de la fracción decimal periódica*

$$0{,}45\,45\,45\,45\,45\ldots$$

Esta fracción puede escribirse en esta forma :

$$\div \frac{45}{100} : \frac{45}{100^2} : \frac{45}{100^3} : \frac{45}{100^4} : \frac{45}{100^5} \ldots$$

Es una progresión geométrica decreciente cuya razón es $\dfrac{1}{100}$.

Luego, se tendrá :

$$\text{límite} = \frac{\dfrac{45}{100}}{1 - \dfrac{1}{100}} = \frac{\dfrac{45}{100}}{\dfrac{99}{100}} = \frac{45}{99}, \text{ ó sea } \frac{5}{11}.$$

168. Medios geométricos. — Llámanse *medios geométricos* ó proporcionales, los números que forman con dos números dados una progresión geométrica, cuyos extremos son estos mismos números.

PROBLEMA. *Entre* a *y* b *interpólense* m *medios geométricos.*

Busquemos la razón de la progresión.

Esta progresión constará de $m + 2$ términos, á saber : los m medios y los dos términos dados.

Luego $\qquad b = aq^{m+1}, \qquad$ (nº 163)

de donde $\qquad q = \sqrt[m+1]{\dfrac{b}{a}}.$

Por lo tanto, para obtener la razón, hay que dividir el último término por el primero y extraer del cociente la raíz cuyo índice sea el número de medios que han de interpolarse, más 1.

Aplicaciones. 1º *Entre* 2 *y* 162 *interpolar tres medios geométricos.*

Se tiene : $$q=\sqrt[4]{\frac{162}{2}}=\sqrt[4]{81}=3.$$

La progresión es : $\div\div$ 2 : 6 : 18 : 54 : 162.

2º *Entre* 1024 *y* 16 *interpolar dos medios geométricos.*

Se tiene : $$q=\sqrt[3]{\frac{16}{1024}}=\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}.$$

La progresión será : $\div\div$ 1024 : 256 : 64 : 16.

169. Nota. — Si entre los términos consecutivos de una progresión geométrica se interpola un mismo número de medios, las progresiones parciales que resultan forman una sola progresión.

En efecto, la razón de estas progresiones es una misma, ya que cada úna de ellas se encuentra *extrayendo del cociente constante* de dos términos consecutivos, *una raíz cuyo índice es el número de medios que se han de interpolar, más* 1.

Á más de esto, el último término de cada úna de estas progresiones es el primero de la siguiente; por lo tanto, todas estas progresiones parciales forman una sola progresión.

Interpolemos tres medios geométricos entre todos los términos de la progresión

$\div\div$ 2 : 32 : 512 : 8192 : 131072.

La razón de las progresiones parciales será :

$$\sqrt[4]{\frac{32}{2}},\quad \sqrt[4]{\frac{512}{32}},\quad \sqrt[4]{\frac{8192}{512}},\quad \sqrt[4]{\frac{131072}{8192}};$$

esto es : $\sqrt[4]{16}$, ó sea 2.

Tendremos sucesivamente :

$$\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32,$$
$$\div 32 : 64 : 128 : 256 : 512,$$
$$\div 512 : 1024 : 2048 : 4096 : 8192...$$

que pueden escribirse :

$$\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048...$$

y así resulta una sola progresión.

EJERCICIOS RELATIVOS Á LAS PROGRESIONES

170. PROBLEMA I. *Hallar el* 15º *término de una progresión aritmética, si el* 1er *término es* 3, *y el* 42º 249.

Busquemos primero la razón :

$$r = \frac{249 - 3}{41} = 6.$$

El 15º término $= 3 + (14 \times 6) = 87$.

PROBLEMA II. *Un jardinero tiene que verter* 2 *regaderas al pie de cada úno de los* 48 *árboles de una hilera; los árboles distan entre sí* 8 *metros, y el pozo dista* 15 *m. del primero; ¿ qué camino habrá recorrido el jardinero al concluír su trabajo, si lleva* 2 *regaderas cada vez?*

Del pozo al primer árbol hay 15 m., ó sea 30 m. de ida y vuelta. Para ir y volver de un árbol al siguiente tiene que andar el jardinero 16m. Luego el camino recorrido será igual á la suma de los términos de la progresión

$$30 . 46 . 62 . 78.$$

que consta de 48 términos.

El último es : $30 + (47 \times 16)$ ó sea 782
y la suma (nº 158) : $(30 + 782)2$ ó sea 19 488 metros.

El jardinero habrá andado 19 km. 488 m.

PROBLEMA III. *Las tres dimensiones de un paralelipípedo rectángulo están en progresión aritmética, y la suma de ellas es igual á* 24 *m.; hallar el volumen del sólido, si su superficie total es de* 366 *m*².

Llamando x á la dimensión media y r á la razón, las tres dimensiones serán

$$x - r, \quad x, \quad x + r.$$

Luego $$x - r + x + x + r = 24,$$

de donde $$x = 8.$$

La superficie será :

$$2(x - r)x + 2(x - r)(x + r) + 2x(x + r) = 366.$$

Sustituyamos el valor de x y simplifiquemos,

$$8(8 - r) + 64 - r^2 + 8(8 + r) = 183,$$

$$r^2 = 9,$$

de donde $$r = 3.$$

Por lo tanto, las dimensiones son 5, 8 y 11 metros.

PROBLEMA IV. *Un avaro después de comprar un caballo preguntaba á un herrador cuánto le cobraría por herrar su bestia; el herrador contestó que 10 pesetas por las 4 herraduras; ó también que no le cobraría nada por las dos primeras, si le pagaba 1 céntimo por el primer clavo, 2 por el segundo, 4 por el tercero, y así sucesivamente duplicando hasta los 16, que tienen las dos herraduras. ¿ Cuánto tendría que pagar el avaro, si aceptara esta última propuesta, pensando economizar ?*

Busquemos lo que tendrá que pagar por el último clavo, que es el 16º :

término $16^o = 1 \times 2^{15}$, ó sea 32768. (nº 163)

La suma de los términos de la progresión

$$1.2.4.8.16 \ldots\ldots 32768$$

será (nº 166) $S = \dfrac{2 \times 32768 - 1}{2 - 1}$ ó sea 65534.

El avaro tendría que pagar 655 pesetas 34.

PROBLEMA V. *Dividir el número 105 en ótros tres que estén en progresión geométrica, y cuyo producto sea 8000.*

Llamando x al primer número y q á la razón, las ecuaciones serán :

$$x + qx + q^2x = 105, \qquad (1)$$

y $$x \times qx \times q^2x \quad \text{ó sea} \quad q^3x^3 = 8000$$

cuya raiz cúbica es

$$qx = 20; \quad \text{de donde} \quad q = \frac{20}{x}.$$

Este valor, sustituído en la ecuación (1), dará :

$$x + 20 + \frac{400}{x} = 105,$$

$$x^2 - 85x + 400 = 0,$$

$$x = \frac{85 \pm \sqrt{7225 - 1600}}{2},$$

$$x' = 80,$$

$$x'' = 5.$$

Luego, $$q = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} \quad \text{ó} \quad q = \frac{20}{5} = 4.$$

La porgresión pedida será :

$$80 \,.\, 20 \,.\, 5,$$

ó $$5 \,.\, 20 \,.\, 80.$$

PROBLEMA VI. *Búsquense tres números en progresión geométrica, sabiendo que la suma de ellos es* 65 *y la suma de sus cuadrados,* 2275.

Llamando x al primer número y q á la razón, resultarán las ecuaciones

$$65 = x + qx + q^2x,$$

$$2275 = x^2 + q^2x^2 + q^4x^2,$$

que pueden escribirse

$$65 = x(q^2 + q + 1), \qquad (1)$$

$$2275 = x^2(q^4 + q^2 + 1). \qquad (2)$$

Elevemos al cuadrado la ecuación (1) y dividámosla por la ecuación (2) :

$$\frac{65 \times 65}{2275} = \frac{x^2(q^2 + q + 1)^2}{x^2(q^4 + q^2 + 1)}. \qquad (3)$$

El trinomio q^4+q^2+1 es el producto de

$$q^2+q+1 \quad \text{por} \quad q^2-q+1.$$

Luego la ecuación (3) se convierte en

$$\frac{65\times 65}{2275}=\frac{x^2(q^2+q+1)\,(q^2+q+1)}{x^2(q^2+q+1)\,(q^2-q+1)},$$

y después de la reducción,

$$\frac{13}{7}=\frac{q^2+q+1}{q^2-q+1},$$

$$13q^2-13q+13=7q^2+7q+7.$$

$$3q^2-10q+3=0,$$

$$q=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3},$$

$$q'=3 \quad \text{y} \quad q''=\frac{1}{3}.$$

Estos valores sustituídos en la ecuación (1) dan

$$x=5 \quad \text{y} \quad x=45.$$

Los números pedidos son,

5 . 15 . 45,

ó 45 . 15 . 5.

§ III. — Logaritmos.

171. Definición. — Llámanse *logaritmos* los términos de una progresión aritmética que principia por cero, correspondientes á los de úna geométrica que principia por la unidad. Cada término de la progresión aritmética es el logaritmo del término correspondiente en la geométrica.

Estas dos progresiones pueden continuarse indefinidamente en ambos sentidos; la úna contiene el término uno, la ótra el término cero y estos dos términos deben corresponderse.

Sean las progresiones;

$$\div\div\, 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : q^7 \,\ldots\ldots\, q^n,$$

$$\div\, 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, 5r \,.\, 6r \,.\, 7r \,\ldots\ldots\, nr.$$

Por definición, 0 es el logaritmo de 1, r el de q, $2r$ el de q^2, $3r$ el de q^3 ....., nr el de q^n.

172. Lo que antecede manifiesta :

1º Que la progresión geométrica encierra *todas las potencias de la razón;*

2º Que la progresión aritmética encierra *todos los múltiplos de la razón,*

3º Que *el exponente* de un término cualquiera de la progresión geométrica es *el coeficiente* del término correspondiente en la progresión aritmética.

173. Nota. — De la definición anterior (nº 171), parece inferirse que sólo los números que forman una progresión geométrica tienen un logaritmo. Sin embargo, si se interpolan muchos medios geométricos entre los varios términos de la primera progresión, é *igual número* de medios aritméticos entre los diferentes términos de la segunda, cada término de la progresión aritmética *será también el logaritmo del término correspondiente* de la progresión geométrica.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

174. 1ra Propiedad. — *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores de este producto.*

Sean las progresiones :

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 \ldots.. q^n,$$
$$\div 0 \,.\, r \,.\, 2r \,.\, 3r \,.\, 4r \,.\, 5r \,.\, 6r \ldots.. nr.$$

Consideremos en la primera progresión dos términos cualesquiera, q^4 y q^6, cuyos logaritmos respectivos son $4r$ y $6r$.

El producto de q^4 por q^6 es q^{10} (nº 28), y se halla en la progresión, ya que contiene ésta todas las potencias de la razón. La suma de los dos logaritmos es $4r + 6r$ ó sea $10r$, que se halla también en la progresión aritmética, ya que ésta contiene todos los múltiplos de la razón; pero (nº 172, 3º) el término $10r$ corresponde á q^{10}, y por lo tanto es su logaritmo.

Asímismo, el logaritmo del producto

$$q^3 \times q^5 \times q^8 \quad \text{será} \quad 3r + 5r + 8r, \quad \text{ó sea} \quad 16r.$$

Este raciocinio puede aplicarse á un número cualquiera de factores; luego

$$\log abc = \log a + \log b + \log c.$$

175. 2ª Propiedad. — *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Sea el cociente $x = \frac{A}{B}$.

Se tiene : $x \,.\, B = A,$

y, según la primera propiedad,

$$\log x + \log B = \log A,$$

de donde $\log x$ ó $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B.$

176. 3ª Propiedad. — *El logaritmo de cualquier potencia de un número es igual al exponente de la potencia multiplicado por el logaritmo de dicho número.*

Tenemos en efecto :

$$A^5 = A \times A \times A \times A \times A,$$

de donde (1ra propiedad)

$$\log A^5 = \log A + \log A + \log A + \log A + \log A = 5 \log A.$$

177. 4ª Propiedad. — *El logaritmo de una raíz de un número es igual al logaritmo de la cantidad dividido por el índice de la raíz.*

Sea $R = \sqrt[3]{A}\,,$

de donde $R^3 = A,$

y, según la tercera propiedad,

$$3 \log R = \log A,$$

de donde $\log R = \frac{\log A}{3}.$

178. Nota. — Según las propiedades anteriores, el cálculo por logaritmos facilita mucho las operaciones, ya que *la multiplicación se convierte en adición, la división en sustracción, la elevación á potencias en multiplicación, y la extracción de raíces en división.*

LOGARITMOS VULGARES Ó DECIMALES.

179. De la definición del nº 171 resulta que el número de sistemas de logaritmos que pueden imaginarse es ilimitado, ya que q y r son arbitrarios, y un mismo número tendrá necesariamente logaritmos diversos en sistemas también diferentes.

Los sistemas se distinguen únos de ótros según el número que tiene por logaritmo la unidad, el cual recibe el nombre de *base*.

El inventor de los logaritmos fue el barón escocés Néper; las dos progresiones siguientes forman su sistema :

$$\div\div 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : (1+\alpha)^3 : (1+\alpha)^4 \ldots (1+\alpha)^n .$$
$$\div 0 \;.\; \alpha \;.\; 2\alpha \;.\; 3\alpha \;.\; 4\alpha \;\ldots\; n\alpha.$$

En estas progresiones, la cantidad α es pequeñísima. El sistema así formado se llamó *neperiano* ó *hiperbólico;* la base es un número incomensurable que se expresa por e y cuyo valor es 2,718281828 ...

180. Logaritmos vulgares. — Los *logaritmos vulgares* ó de *Briggs,* más cómodos para los cálculos prácticos, tienen por base el número 10 (por eso se llaman también *decimales*), de manera que las progresiones fundamentales de su sistema son las siguientes :

$$\div\div 1 : 10 : 100 : 1\,000 : 10000 : 100000 \ldots\ldots 10^n ,$$
$$\div 0 \;.\; 1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4 \;.\; 5 \;\ldots\ldots\; n.$$

En este sistema se ve : 1º que el logaritmo de 1 es 0, el de 10 es 1, el de 100 es 2, el de 1000 es 3 ...; el de 10^n es n;

2º Que todo número comprendido entre 1 y 10 tiene su logaritmo mayor que 0 y menor que 1; que todo número comprendido entre 10 y 100 tiene su logaritmo mayor que 1 y menor que 2; que todo número comprendido entre 100 y 1000 tiene su logaritmo mayor que 2 y menor que 3, y así sucesivamente; de donde se infiere que el logaritmo de un número mayor que 10 consta de una parte entera llamada *característica* y de una parte decimal llamada *mantisa;* además se ve que la característica de un número contiene tantas unidades cuantas cifras tiene el número en su parte entera, menos una; de modo que *el valor absoluto de la característica indica* el lugar que ocupan las mayores unidades del número á la izquierda de las unidades simples.

181. *El logaritmo de un número* 10 *veces,* 100 *veces,* 1000 *veces, etc., mayor ó menor que ótro, tiene la misma parte decimal ó mantisa que el logaritmo de este ótro, y sólo se diferencia en la característica.*

En efecto, para multiplicar un número por 10, 100, 1000, etc., basta añadir al logaritmo de este número los logaritmos de 10, de 100, de 1000..., los cuales no tienen parte decimal. Luego el logaritmo del producto no diferirá del logaritmo del multiplicando sino por la característica.

Asimismo para dividir un número por 10, por 100, por 1000..., basta restar del logaritmo de este número los logaritmos de 10, de 100, de 1000..., los cuales no tienen parte decimal. Luego el logaritmo del cociente no diferirá del logaritmo del dividendo sino por la característica

Dedúcese de aquí que, si dos números no difieren sino por el lugar en que está la coma, tienen logaritmos que sólo difieren entre si por la característica.

182. Números menores que 1. Características negativas. — Si se prolongan indefinidamente á derecha é izquierda las progresiones del nº 180,

$$\ldots \frac{1}{10000} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{100} : \frac{1}{10} : 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000.$$

$$\ldots \quad -4 \;.\; -3 \;.\; -2 \;.\; -1 \;.\; 0 \;.\; 1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\; 4 \quad \ldots$$

se ve que los números menores que 1 tienen *logaritmos negativos.*

Notas. — I. Estas progresiones manifiestan que

$+1$ es el log de	10,	y que	-1	es el de	$\frac{1}{10}$,
$+2$	» 100,	»	-2	»	$\frac{1}{100}$,
$+3$	» 1000,	»	-3	»	$\frac{1}{1000}$,

y asi sucesivamente.

De igual modo,

si 0,69897 es el log de 5, — 0,69897 será el de $\frac{1}{5}$,

» 2,26600 » 184,5, — 2,26600 » $\frac{1}{184,5}$.

183. — II. Luego, cuando se cambia el signo del logaritmo de un número dado, resulta el logaritmo del inverso de este número; y un logaritmo negativo puede considerarse como el logaritmo de un quebrado que tenga 1 por numerador, y por denominador el número correspondiente al mismo logaritmo positivo.

184 — III. Las mismas progresiones manifiestan que un número comprendido entre 0,1 y 1 tiene un logaritmo mayor que — 1 y menor que cero; por lo tanto este logaritmo se representará por una fracción negativa.

Así también, un número comprendido entre 0,01 y 0,1 tiene un logaritmo mayor que — 2 y menor que — 1, el cual se representará por un número negativo que tenga — 1 por parte entera. Un número comprendido entre 0,001 y 0,01 tendrá también un logaritmo negativo cuya parte entera será — 2, y así en adelante.

185. Transformación de un logaritmo negativo en ótro de característica negativa y mantisa positiva. — Si, como lo acabamos de ver, los logaritmos de los quebrados son negativos, no es ésta la forma más conveniente para emplearlos en los cálculos, es mucho más expedito calcular con logaritmos de característica negativa y mantisa positiva.

Sea de convertir el logaritmo — 2,69897 en ótro de característica negativa y mantisa positiva.

A esa cantidad podemos agregar y quitar 1 sin alterar su valor,

$$-2{,}69897 = -3 + (1 - 0{,}69897).$$

Efectuando la sustracción indicada en el paréntesis, resultará :

$$-2{,}69897 = -3 + 0{,}30103, \quad \text{ó sea} \quad \bar{3}{,}30103.$$

Asimismo, el logaritmo negativo $-0{,}48674$ puede representarse como sigue :

$$-0{,}48674 = -1 + (1 - 0{,}48674), \quad \text{ó sea} \quad \bar{1}{,}51326.$$

Luego, *para convertir un logaritmo negativo en ótro de característica negativa y mantisa positiva, se aumenta una unidad á la característica, se escribe sobre ella el signo —, luego se resta de 1 la mantisa dada.* El signo *menos* escrito encima de la característica indica que sólo ella es negativa.

186. Notas. — I. De lo que antecede, así como de lo dicho en el nº 180, resulta que el logaritmo de un número menor que 1 tiene característica negativa *cuyo valor absoluto* indica el lugar que ocupan las mayores unidades del mismo, después de las unidades simples.

187. — II. En la formación de las tablas no se han calculado los logaritmos de los números menores que 1, ni tampoco los de los números fraccionarios, pues estos logaritmos pueden obtenerse de una manera indirecta.

Así, para obtener el logaritmo de 0,625, se multiplica y divide este número por 1000, y resulta $\frac{625}{1000}$.

De donde (nº 175) $\log \frac{625}{1000} = \log 625 - \log 1000,$

$$\log 625 = 2{,}79588$$
$$\log 1000 = 3{,}00000$$

luego $\log 0{,}625 = \bar{1}{,}79588.$

188. — III. *Los números negativos no tienen logaritmos,* pues no contiene ningún término negativo la progresión geométrica que sirve para definir los logaritmos vulgares.

Como los términos de la progresión geométrica continuada indefinidamente hacia la izquierda van minorando más y más y aproximándose á cero, sus logaritmos negativos aumentan constantemente en valor absoluto y se aproximan al infinito; de donde se infiere que el logaritmo de cero es $-\infty$.

189. — IV. Cuando hay que restar un logaritmo de ótro, la sustracción puede convertirse en adición; para ello basta añadir al primer logaritmo el segundo previamente transformado.

Sea de calcular la expresión $\frac{5}{8}$, que puede escribirse $5 \times \frac{1}{8}$.

Tenemos : $\log \frac{1}{8} = \log 1 - \log 8 = 0 - 0{,}90309$;

este logaritmo negativo transformado, como lo hemos dicho en el nº 185, se convierte en $\bar{1}{,}09691$.

Basta ahora añadir al logaritmo de 5 el logaritmo $\bar{1}{,}09691$.

Este logaritmo que tiene igual valor que el logaritmo negativo $-0{,}90309$ es, como este último, el logaritmo de $\frac{1}{8}$; pero á causa de la transformación lo llaman *cologaritmo* de 8.

190. **Cologaritmos.** — *Cologaritmo de un número* es el logaritmo del número inverso, cuya parte decimal se ha hecho positiva.

191. Dado el logaritmo de un número, para obtener directamente su cologaritmo, *se añade* $+1$ *á la característica, y se cambia su signo, luégo se busca el complemento de* 1 *en la mantisa.*

Hállase este complemento de 1, *restando de* 9 *cada úna de las cifras de la mantisa, excepto la primera significativa de la derecha que se resta de* 10.

El que está acostumbrado al cálculo logarítmico lee inmediatamente este complemento en las tablas.

EJEMPLOS : $\log 8 = 0{,}90309$, $\operatorname{colog} 8 = \bar{1}{,}09691$;
$\log 625 = 2{,}79588$, $\operatorname{colog} 625 = \bar{3}{,}20412$;
$\log 0{,}005 = \bar{3}{,}69897$, $\operatorname{colog} 0{,}005 = 2{,}30103$.

DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS

192. Clases de tablas de logaritmos. — Hay diferentes clases de tablas de logaritmos; las únas, llamadas grandes tablas, dan los logaritmos de los 100 000 ó 108 000 primeros números con 7 cifras decimales, las ótras dan los logaritmos de los 10 000 ó 20 000 primeros números con 5 cifras decimales. Estas últimas, aunque den menor aproximación en los cálculos, son más usuales que las primeras.

Las más conocidas entre nosotros son las francesas de Dupuis y Callet, y las españolas de Vázquez Queipo y Calvet.

Todas estas tablas tienen en columnas especiales las diferencias que hay entre los logaritmos de dos números consecutivos. Algunas tablas, con el fin de simplificar, no dan las características, pero la vista sola de un número basta para conocer la parte entera de su logaritmo (nos 180 y 186).

193. Uso de las tablas. — Para servirse de una tabla de logaritmos, hay que resolver las dos operaciones siguientes:

1o Encontrar el logaritmo de un número dado;

2o Encontrar el número que corresponde á un logaritmo dado

194. Encontrar el logaritmo de un número dado.

Supondremos que tenemos las tablas con 5 decimales.

1er Caso. — *El número se halla en las tablas.* En este caso se lee inmediatamente el logaritmo correspondiente.

Así el log de 6843 es 3,835 25.

El log de 6,843 es 0,835 25, pues no difiere del de 6843 sino por la característica (no 181).

2o Caso. — *El número no se encuentra en las tablas.* :

Se determina primero la característica (nos 180 y 186), en seguida se multiplica ó divide el número por 10, 100 ó por 1000, etc., de modo que resulte un número entero, y el mayor que sea posible, contenido en las tablas; por último se busca la mantisa del logaritmo del número obtenido, *teniendo en cuenta* las diferencias tabulares.

Ejemplos : 1o *Calcúlese el logaritmo de* 24647.

La característica es 4, por tener el número 5 cifras.

Dividamos 24647 por 10, lo que da 2464,7.

Busquemos en las tablas la mantisa del logaritmo de 2464; se encuentra 0,39164.

Siendo de 18 unidades del quinto orden la diferencia tabular entre los logaritmos de 2464 y 2465, se dirá, *considerando el aumento de los logaritmos como sensiblemente proporcional al aumento de los números :*

Por 1 entero de diferencia en los números hay un aumento de 18 en los logaritmos; por una diferencia de 0,7 en los números, habrá un aumento de x en los logaritmos, ó sea

$$\frac{1}{18} = \frac{0,7}{x},$$

de donde $x = 13$, á una unidad de quinto orden.

Se añaden estos 13 cienmilésimos á 0,39164 y resulta 4,39177 como logaritmo del número 24647.

2o *Búsquese el logaritmo de* 0,0478533.

La característica será $\bar{2}$ (no 186).

Multiplicando por 100000, tendremos 4785,33.

El logaritmo de 4785 tiene por mantisa 0,67988.

Siendo de 9 unidades del quinto orden la diferencia entre los logaritmos de los números 4785 y 4786, se dirá :

Por 1 entero de diferencia en los núm ros hay aumento de 9 en los logaritmos; por una diferencia de 0,33 en los números, habrá un aumento de x en los logaritmos, ó sea

$$\frac{1}{9} = \frac{0,33}{x},$$

de donde $x=3$, á una unidad de quinto orden; el logaritmo de 0,0478533 será $\bar{2},67991$.

En ciertas tablas el cálculo de las partes proporcionales se halla resuelto y va indicado en una columna especial.

195. Encontrar el número que corresponde á un logaritmo dado.

1er Caso. — *La mantisa del logaritmo se halla exactamente en las tablas.*

Se lee en las tablas el número correspondiente á esta mantisa, que se busca siempre como si estuviera precedida de la característica 3.

Por ejemplo, se ve que 7655 es el número correspondiente al logaritmo 2,88395. La característica 2 indica que la parte entera del número tiene 3 cifras: por lo tanto el número es 765,5.

Asímismo, el número correspondiente á la parte decimal del logaritmo $\bar{2},18808$ es 1542; la característica $\bar{2}$ indica que la primera cifra significativa del número pedido ocupa el segundo lugar después de la coma (nº 186); luego este número es 0,01542.

2º Caso. — *La mantisa del logaritmo no se halla en las tablas.*

Sea de encontrar el número correspondiente al log 4,55575. Se busca en las tablas la parte decimal del logaritmo como si estuviera precedida de la característica 3. No se encuentra en las tablas, pero se ve que está comprendida entre 3,55570, log de 3595, y 3,55582, log de 3596.

La diferencia tabular es 12, y la que existe entre 55575 y el logaritmo inmediatamente inferior 55570, es 5.

Se dirá: Si teniendo el logaritmo 55570, 12 unidades más de quinto orden, el número 3595 se aumenta con 1; al tener el logaritmo 5 unidades más, el número se aumentará con x,

ó sea $$\frac{12}{1}=\frac{5}{x},$$

$x=0,41$ que se añaden á 3595, lo que da 359541.

La característica 4 indica que el número pedido tiene 5 cifras en su parte entera; por lo tanto, este número será 35954,1.

EJEMPLOS DE CÁLCULO CON LOGARITMOS

1º *Súmese el log*	$3{,}87245$
con el log	$\bar{2}{,}95419$
Resulta :	$2{,}82664$

Después de haber dicho en la columna de los décimos : 1 que llevo y 8 son 9, y 9 son 18, pongo 8 y llevo 1; 1 y 3 son 4, 4 y -2 son $+2$; luego el resultado es 2,82664.

2º *Del log*	$0{,}93676$
réstese el log	$3{,}11190$
Resulta :	$\bar{3}{,}82486$

Después de haber dicho en la columna de los décimos : 1 de 9 da 8, se añade : 3 de 0 da -3.

3º *Del log de 1, ó sea*	$0{,}00000$
réstese el log	$\bar{3}{,}39193$
Hállase :	$2{,}60807$

Después de haber dicho en la columna de los décimos : 1 que llevo y 3 son 4; 4 de 10 da 6, se añade : 1 que llevo y -3 son -2; -2 de 0 da $+2$.

4º *Multiplíquese por 3 el log*	$\bar{4}{,}90200$
	3
Producto :	$\overline{10}{,}70600$

Después de haber dicho : 9 por 3 son 27, escribo 7 y llevo 2, se añade : -4 por 3 son -12, -12 y más 2 que llevo son -10.

5º *Divídase por* 2 *el log* $\bar{1},42846$.

Se añade -1 á la característica *para que sea divisible por* 2; luego por compensación, se añade $+1$ á la mantisa, y se dice : la mitad de $\bar{2}$ es $\bar{1}$, la mitad de 14 es 7, la mitad de 2 es 1 ... Luego el cociente es $\bar{1},71423$.

6º *Divídase por* 4 *el logaritmo* $\bar{5},62829$.

Se añade -3 á la característica, *para que sea divisible por* 4; luego, por compensación, se añade $+3$ á la mantisa, y se dice : la cuarta parte de $\bar{8}$ es $\bar{2}$, la cuarta parte de 36 es 9 ... El cociente pedido es $\bar{2},90707$, con aproximación de un cienmilésimo.

7º *Calcúlese el logaritmo de la expresión*

$$x = \frac{64 \times 0,0826 \times 16,57}{13,48 \times 0,0017 \times 9,467}.$$

Se suman juntos los logaritmos de los factores del numerador y los cologaritmos de los factores del denominador (nº 189).

$$\begin{aligned}
\log 64 &= 1,80618,\\
\log 0,0826 &= \bar{2},91698,\\
\log 16,57 &= 1,21932,\\
\operatorname{colog} 13,48 &= \bar{2},87031,\\
\operatorname{colog} 0,0017 &= 2,76955,\\
\operatorname{colog} 9,467 &= \bar{1},02379,\\
\hline
\log x &= 2,60613.
\end{aligned}$$

8º *Calcúlese la expresión*

$$x = \frac{6,462\sqrt{6} \times \sqrt[3]{2}\ (64,13^2 + 0,42636^2)}{196\pi\sqrt{21}}.$$

Cálculos auxiliares :

$\log 64{,}13 = 1{,}80706,$

$2 \log 64{,}13 = 3{,}61412,$

$64{,}13^2 = 4112{,}72,$

$\log 0{,}42636 = \bar{1}{,}62978,$

$2 \log 0{,}42636 = \bar{1}{,}25956,$

$0{,}42636^2 = 0{,}18178,$

$64{,}13^2 + 0{,}42636^2 = 4112{,}90,$

$\log 4112{,}90 = 3{,}61416,$

$\log 2 = 0{,}30103,$

$\log \sqrt[3]{2} = {}^1/_3 \log 2 = 0{,}10034,$

$\log 6 = 0{,}77815,$

$\log \sqrt{6} = {}^1/_2 \log 6 = 0{,}38907,$

$\log 21 = 1{,}32222,$

$\log \sqrt{21} = {}^1/_2 \log 21 = 0{,}66111.$

Operación :

$\log 6{,}462 = 0{,}81037,$

$\log \sqrt{6} = 0{,}38907,$

$\log \sqrt[3]{2} = 0{,}10034,$

$\lg(64{,}13^2 + 0{,}42636^2) = 3{,}61416,$

$\operatorname{colog} 196 = \bar{3}{,}70774,$

$\operatorname{colog} \pi = \bar{1}{,}50285,$

$\operatorname{colog} \sqrt{21} = \bar{1}{,}33889;$

$\log x = 1{,}46342.$

El número que corresponde á este logaritmo es 29,068; luego $x = 29{,}068$.

§ IV. — Interés compuesto.

196. Definición. — *Interés compuesto* es el producido por el capital sumado con los intereses que se le van acumulando al fin de un período convenido.

Si úno presta, por ejemplo, 1000 pesetas al 5 % de interés compuesto, esta suma el primer año produce 50 pts. que no se perciben entonces, sino que se *capitalizan* ó acumulan al capital primitivo; de modo que éste, al principio del segundo año es de 1050 pts. En el segundo año este capital produce 52,5 pts. que se capitalizan de nuevo, y asi sucesivamente, hasta el fin del tiempo estipulado.

197. Fórmula general.

Llamemos a un capital impuesto,

r el interés anual de una peseta, ó sea $\frac{1}{100}$ del tanto por ciento,

n el tiempo,

A el capital con sus intereses.

Al fin del primer año 1 peseta llega á valer $1+r$,
y a pesetas valdrán a veces más, ó $a(1+r)$,
de manera que para saber en qué se convierte un capital a con sus intereses capitalizados en un año, basta multiplicarlo por $(1+r)$.

Luego al fin del segundo año, el capital con sus intereses valdrá:

$$a(1+r)(1+r)=a(1+r)^2,$$

al fin del tercero: $a(1+r)^3$,
y así sucesivamente.

Luego, después de n años, el valor A del capital con sus intereses compuestos será de:

$$A=a(1+r)^n. \tag{1}$$

198. Nota. — Ésta es la *fórmula general* de interés compuesto; contiene las cuatro cantidades variables: A, a, n y r, cada úna de las cuales puede determinarse, siendo conocidas las ótras tres.

Para despejar la a, hay que dividir ambos miembros por

$$(1+r)^n,$$

y resulta:

$$a=\frac{A}{(1+r)^n}. \tag{2}$$

Para despejar la r, se dividirán por a ambos miembros de la ecuación (1) y se extraerá la raiz n^{ma} del cociente:

$$1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}},$$

de donde

$$r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}-1. \tag{3}$$

Para despejar la n, se emplean los logaritmos y se escribe:

$$\log A=\log a+n\log(1+r),$$

de donde

$$n=\frac{\log A-\log a}{\log(1+r)}. \tag{4}$$

Todas estas fórmulas pueden calcularse por logaritmos. Cuando el logaritmo de $(1+r)$ ha de repetirse n veces (comprendiéndose n ordinariamente entre 1 y 100), conviene tomarlo con ocho ó nueve decimales; pues, como en las tablas, la última cifra es solamente aproximada, el producto del log por n podría dar un error ó diferencia considerable; entonces, después de multiplicado por n el log de $(1+r)$, no se conservan en el producto sino cinco ó siete cifras decimales, según las tablas de que úno se ha servido, cuidando de aumentar por exceso una unidad á la última cifra, si la siguiente fuere mayor que 4.

Aplicaciones. — 1º *¿ Cuál es el monto de una suma de* 30 000 *pts. impuesta á interés compuesto, durante* 12 *años, al* 4,5 *por ciento ?*

Valiéndose de la fórmula (1), se tendrá :

$$A = 30\,000\,(1{,}045)^{12},$$
$$\log 30\,000 = 4{,}477\,12,$$
$$+12 \log 1{,}045 = 0{,}229\,40,$$
$$\log A = 4{,}706\,52\,;$$

de donde
$$A = 50\,876{,}7 \text{ pesetas.}$$

2º *¿ Qué cantidad se necesita imponer á interés compuesto para percibir, al cabo de* 10 *años,* 12 640 *pts. por capital é intereses, siendo* 5 *el tanto por ciento?*

Empleando la fórmula (2), resultará :

$$a = \frac{12\,640}{(1{,}05)^{10}},$$
$$\log 12\,640 = 4{,}101\,75,$$
$$\text{colog}\,(1{,}05)^{10} = \bar{1}{,}788\,11,$$
$$\log a = 3{,}889\,86,$$

de donde
$$a = 7760 \text{ pesetas.}$$

3º *La suma de* 10 000 *pts. colocada á interés compuesto, durante* 15 *años, llega á valer* 20 360. *pts. ¿ Cuál ha sido el tanto por ciento?*

Sirviéndonos de la fórmula (3), hallaremos :

$$r = \sqrt[15]{\frac{20\,360}{10\,000}} - 1,$$
$$\log 20\,360 = 4{,}308\,78,$$
$$\log 10\,000 = 4{,}000\,00,$$
$$\text{diferencia} = 0{,}308\,78.$$

El $\frac{1}{15}$ de 0,30878 es 0,02058, que corresponde á 1,049,

de donde $$r = 0{,}049,$$

luego, el tanto por ciento es 4,90.

4º *¿ En cuántos años un capital de* 40000 *pts. colocado á interés compuesto llega á valer* 67835,7 *pts., siendo* 4,5 *el tanto por* 100?

La fórmula (4) da :

$$n = \frac{\log 67\,835{,}7 - \log 40\,000}{\log 1{,}045},$$

$$\log 67\,835{,}7 = 4{,}831\,46,$$

$$\log 40\,000 = 4{,}602\,06,$$

$$\text{diferencia} = 0{,}229\,40,$$

que se ha de dividir por 0,01912, log de 1,045. El cociente es 12 años.

5º *¿ En cuántos años se duplicará un capital colocado á interés compuesto, siendo* 5 *el tanto por ciento?*

Si en la fórmula (1) se hace $A = 2a$, resulta :

$$2a = a(1 + r)^n \quad \text{ó bien} \quad 2 = (1 + r)^n,$$

$$\log 2 = n \log (1 + r),$$

de donde $$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} = \frac{0{,}301\,03}{0{,}021\,19}.$$

El cociente da algo más de 14 años.

195. Notas. — I. Á menudo el interés se capitaliza cada seis meses, entonces, en las fórmulas, $2n$ representa el número de semestres ya pasados, y $\frac{r}{2}$ el $\frac{1}{100}$ del tanto por ciento en 6 meses. En este caso las fórmulas toman las formas siguientes :

$$A = a\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2n},$$

$$a = \frac{A}{\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2n}},$$

$$\frac{r}{2}=\sqrt[2n]{\frac{A}{a}}-1,$$

$$2n=\frac{\log A-\log a}{\log\left(1+\frac{r}{2}\right)}.$$

Aplicación. — *Búsquese cuánto vale, al cabo de 15 años, un capital de 4000 pts., colocado á interés compuesto, si el interés se capitaliza cada seis meses, siendo 4 el tanto por 100.*

Se tiene : $A=4000(1{,}02)^{30}$,

de donde $A=7\,245{,}50$ pesetas.

200. — I. En la fórmula (1), nº 197, se supone que n expresa un número entero de años. Si asi no fuere, se suele calcular el valor del capital con sus intereses al cabo de n años; en seguida se busca el interés simple del capital asi aumentado, en la parte del año que falta todavia.

Problema II. *El número de habitantes de una ciudad se aumenta anualmente con* $\frac{1}{80}$; *¿ dentro de cuántos años se habrá duplicado ?*

Sea p la población, $\frac{1}{m}$ el aumento anual, n el tiempo y P la población final después de n años.

Después de un año, la población será p más el aumento $p\times\frac{1}{m}$, ó sea

$$p+\frac{p}{m},\quad \text{ó}\quad p\left(1+\frac{1}{m}\right),\quad \text{ó bien}\quad p\left(\frac{m+1}{m}\right).$$

Así pues, multiplicando por $\frac{m+1}{m}$ la población del principio del año, resultará la población al fin del mismo año.

Después de dos, tres años, etc., la población será :

$$p\left(\frac{m+1}{m}\right)^2,\quad p\left(\frac{m+1}{m}\right)^3,$$

y después de n años,

$$p\left(\frac{m+1}{m}\right)^n$$

Por lo tanto, la fórmula general será :

$$P = p\left(\frac{m+1}{m}\right)^n.$$

Para resolver el problema propuesto, hagamos $P = 2p$, y resultará :

$$2p = p\left(\frac{m+1}{m}\right)^n \quad \text{ó} \quad 2 = \left(\frac{m+1}{m}\right)^n,$$

$$\log 2 = n \log\left(\frac{m+1}{m}\right); \quad \text{de donde} \quad n = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{m+1}{m}\right)}.$$

Sustituyendo el valor de las letras, se tendrá :

$$n = \frac{\log 2}{\log \frac{81}{80}},$$

$$\log 2 = 0{,}301\,03,$$

$$\log \frac{81}{80} = 0{,}005\,40.$$

El cociente de 0,301 03 por 0,005 40 es 55,7. Luego a población se duplicará dentro de 56 años.

PROBLEMA II. *Un capital de* 6 000 *pts. ha sido impuesto durante cierto tiempo á interés compuesto. Si hubiera quedado impuesto un año menos, al capital definitivo le habrían faltado* 3 996,12 *pts.; si al contrario, hubiera quedado un año más, el capital definitivo habría resultado con un aumento de* 4 156,02 *pts. Búsquese el tanto por* 100 *del interés y el tiempo de la imposición.*

Para resolver este problema, notemos que la diferencia 4 156,02 — 3 996,12, ó sea 159,9, resulta del interés en un año del número 3 996,12. Para encontrar el tanto por 100, escribamos :

$$\frac{3\,996{,}12}{159{,}9} = \frac{100}{x},$$

de donde $x = 4{,}001$, ó sea 4 %.

El capital definitivo, después de n años, será: $6000 \times 1{,}04^n$
Después de $n-1$ años, este capital se expresará así:

$$6000\,(1{,}04)^{n-1}.$$

Siendo 3996,12 la diferencia entre estos dos capitales, tendremos la igualdad

$$6000\,(1{,}04)^n - 6000\,(1{,}04)^{n-1} = 3996{,}12; \qquad (1)$$

pero $6000\,(1{,}04)^n$ es lo mismo que $6000\,(1{,}04)^{n-1}\,(1{,}04)$.

La ecuación precedente puede escribirse:

$$6000\,(1{,}04)^{n-1}\,(1{,}04) - 6000\,(1{,}04)^{n-1} = 3996{,}12;$$

sacando $6000\,(1{,}04)^{n-1}$ en factor común, resulta:

$$6000\,(1{,}04)^{n-1}\,(1{,}04 - 1) = 3996{,}12,$$

ó bien

$$6000\,(1{,}04)^{n-1} \times 0{,}04 = 3996{,}12,$$

$$240\,(1{,}04)^{n-1} = 3996{,}12,$$

$$\log 240 + (n-1)\log 1{,}04 = \log 3996{,}12,$$

de donde

$$n - 1 = \frac{\log 3996{,}12 - \log 240}{\log 1{,}04} = 71 \text{ años, 8 meses, 20 días,}$$

y por lo tanto,

$$n = 72 \text{ años, 8 meses, 20 días.}$$

§ V. — Anualidades y amortización.

201. Definición. — Llámase *anualidad* la suma que se impone anualmente, por un tiempo determinado, para constituir un capital ó amortizar una deuda.

En el cálculo de anualidades siempre se tienen en cuenta los intereses compuestos.

202. Constitución de un capital. — Supongamos que al principio de cada año y durante cierto tiempo se impone una suma a, y calculemos el valor del capital así constituído al fin del *enésimo* año.

Llamemos A el capital buscado,
a la anualidad impuesta,
r el interés anual de 1 peseta,
n el tiempo.

Desde la primera imposición hasta el día en que esté constituído el capital, correrán n años.

La primera imposición a producirá interés compuesto durante n años, y valdrá :

$$a(1+r)^n.$$

La segunda imposición producirá interés compuesto durante $n-1$ años y llegará á valer

$$a(1+r)^{n-1}.$$

Le tercera imposición asimismo valdrá :

$$a(1+r)^{n-2},$$

y así sucesivamente; de modo que la última imposición será de

$$a(1+r).$$

El capital así constituído será pues de

$$A = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} \dots$$
$$+ a(1+r)^2 + a(1+r),$$

ó sea $A = a\left[(1+r) + (1+r)^2 + (1+r)^3 \dots + (1+r)^n\right].$

La parte que va entre corchetes es la suma de los términos de una progresión geométrica creciente de n términos cuya razón es $1+r$, así como el primer término. Esta suma es pues (nº 166) :

$$A = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{1+r-1},$$

ó sea $$A = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}. \qquad (1)$$

203. Nota. — En esta fórmula entran las cuatro cantidades variables, A, a, r y n que pueden despejarse fácilmente, excepto r, porque su determinación depende de la resolución de una ecuación de grado superior al segundo.

Despejando la a, se tiene :

$$a = \frac{Ar}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]} \tag{2}$$

Despejando la n, sè halla sucesivamente :

$$Ar = a(1+r)(1+r)^n - a(1+r),$$

$$Ar + a(1+r) = a(1+r)(1+r)^n,$$

$$\frac{Ar + a(1+r)}{a(1+r)} = (1+r)^n,$$

$$n \log(1+r) = \log\left[Ar + a(1+r)\right] - \log a(1+r).$$

de donde $$n = \frac{\log\left[Ar + a(1+r)\right] - \log a(1+r)}{\log(1+r)}. \tag{3}$$

Aplicación. — *Un padre de familia impone cada año, desde el nacimiento de su hijo, una suma de* 200 *pts. á interés compuesto y al* 4 *por* 100; *¿ qué capital recibirá el hijo á los* 21 *años ?*

Hay 21 imposiciones, habiéndose verificado la primera el día del nacimiento del hijo, la segunda al principio del segundo año ..., la 21ª al principio del año vigésimo primero.

La fórmula (1) da :

$$A = \frac{200 \times 1{,}04(1{,}04^{21} - 1)}{0{,}04} = 6649{,}70 \text{ pts.}$$

AMORTIZACIÓN

204. Definición. — Cuando una compañía, una ciudad, etc. hacen un empréstito, de ordinario redimen la deuda contraída, efectuando anualmente y por un tiempo convenido, la entrega de una anualidad al que adelantó los fondos.

Esta operación se conoce con el nombre de amortización.

Luego, *amortizar una deuda* es redimirla ó extinguirla por medio de cierto número de anualidades.

205. Fórmula general.

Llamemos A un capital prestado,

a la anualidad que se ha de pagar para amortizar este capital,

r el interés anual de 1 peseta,

n el tiempo.

Después de n años, el capital A valdrá:

$$A(1+r)^n.$$

La primera anualidad, entregada al fin del primer año, devengará intereses compuestos durante $n-1$ años y llegará á valer:

$$a(1+r)^{n-1};$$

la segunda anualidad: $a(1+r)^{n-2}$;

la tercera anualidad: $a(1+r)^{n-3}$,

y así en adelante, de modo que la antepenúltima anualidad será: $a(1+r)^2$;

la penúltima: $a(1+r)$,

y la última: a.

Pero entonces se ha pagado toda la deuda: luego la suma de todas estas anualidades, más los intereses compuestos de las mismas, vale:

$$A(1+r)^n,$$

lo que da la ecuación

$$A(1+r)^n = a + a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \ldots a(1+r)^{n-1}.$$

El segundo miembro de esta ecuación es la suma de los términos de una progresión geométrica creciente cuyo primer término es a, la razón $(1+r)$, y n el número de términos; esta suma es igual á

$$\frac{a[(1+r)^n-1]}{1+r-1}, \quad \text{ó sea} \quad \frac{a}{r}\left[(1+r)^n-1\right],$$

y la ecuación se reduce á

$$A(1+r)^n = \frac{a}{r}\left[(1+r)^n - 1\right],$$

de donde
$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}. \qquad (1)$$

206. Notas. — I. Esta fórmula general de amortización encierra cuatro cantidades variables A, a, r y n que se pueden despejar con facilidad, excepto r, pues su determinación depende de la resolución de una ecuación de grado superior al segundo.

Despejando la A, se tiene :

$$A = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r(1+r)^n}. \qquad (2)$$

Despejando la n, resulta sucesivamente :

$$Ar(1+r)^n = a(1+r)^n - a,$$
$$Ar(1+r)^n - a(1+r)^n = -a,$$
$$(1+r)^n(Ar - a) = -a,$$
$$(1+r)^n(a - Ar) = a,$$
$$n \log(1+r) + \log(a - Ar) = \log a,$$

de donde
$$n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)} \qquad (3)$$

207. — II. En estas fórmulas, la anualidad a es evidentemente superior al interés simple de la suma prestada, lo que puede demostrarse con facilidad.

En efecto, en la ecuación (3), n ha de ser real; por lo tanto $a - Ar$ debe ser positivo, pues los números negativos no tienen logaritmos; luego a es mayor que Ar, interés simple de A.

Si $a = Ar$, la misma fórmula (3) se convierte en la siguiente :

$$n = \frac{\log a - \log 0}{\log(1+r)} = \frac{\log a - (-\infty)}{\log(1+r)}, \qquad (\text{n}^o\ 188)$$

$$n = \frac{\log a + \infty}{\log(1+r)} = \infty,$$

lo que manifiesta que si la anualidad entregada es igual sólo al interés simple del capital, la amortización es imposible; y en este caso el valor de a se llama *renta perpetua*.

Aplicaciones. — 1º *Una ciudad quiere tomar un empréstito de 50000 pts. al 4 %, y amortizar esta deuda en 20 años; ¿qué anualidad tendrá que pagar?*

La fórmula (1) da:

$$a = \frac{50000 \times 0,04\,(1,04)^{20}}{(1,04)^{20} - 1}.$$

Tenemos para el numerador:

$$\begin{aligned} \log 50000 &= 4,69897, \\ \log 0,04 &= \bar{2},60206, \\ 20 \log 1,04 &= 0,34067, \\ \hline \log \text{del numerador} &= 3,64170. \end{aligned}$$

Para el denominador:

$$20 \log 1,04 = 0,34067, \quad \text{de donde} \quad (1,04)^{20} = 2,1911,$$

y por consiguiente, el valor de $(1,04)^{20} - 1$ es $1,1911$,

$$\log 1,1911 = 0,07595.$$

Restando este log del log del numerador, resulta:

$$\log a = 3,56575;$$

de donde

$$a = 3679,25 \text{ pesetas.}$$

2º *Una ciudad puede disponer de 8000 pts. durante 24 años; ¿qué capital deberá tomar prestado al 5 %, para que este capital quede amortizado al cabo de los 24 años?*

La fórmula (2) da:

$$A = \frac{8000\left[(1,05)^{24} - 1\right]}{0,05\,(1,05)^{24}} = \frac{160000\left[(1,05)^{24} - 1\right]}{(1,05)^{24}}.$$

Efectuando los cálculos, resulta que

$$A = 110387 \text{ pesetas.}$$

PARTE CUARTA

Ejercicios.

1. Búsquese el 36° término de a progresión ÷ 1 . 4 . 7 . 10 ....

2. ¿Cuál es el 81° término de la progresión ÷ 200 . 198 . 196 . 194...?

3. Determinar los cuatro ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que están en progresión aritmética y que el menor tiene 45°.

4. Determinar los ángulos de un polígono de 9 lados, sabiendo que están en progresión aritmética, y que la razón es 3.

5. Entre 10 y 82 interpólense cinco medios aritméticos.

6. Entre 14 y 6 interpólense once medios aritméticos.

7. Escribir una progresión aritmética de diez términos, conociendo el primero 3 y el último 6.

8. La primera grada de la escalera que conduce á una iglesia tiene 20 m. de longitud, las siguientes van disminuyendo progresivamente de $0^m,70$, de suerte que la última tiene sólo $8^m,10$; ¿ cuántas gradas tiene esa escalera ?

9. Búsquese la suma de los términos de la progresión ÷ 2 . 5 . 8 . 11 ...., que tiene 54 términos.

10. ¿ Cuál es la suma de los 10 primeros números 1 . 2 . 3 . 4... de los 100, de los 1000, de los 10000, de los 100000 primeros números ?

11. Calcúlese la suma de los 64 primeros números pares 2 . 4 . 6 ....

12. Búsquense ocho números en progresión aritmética, conociendo su suma 196 y el primero 7.

13. Búsquense tres números en progresión aritmética, conociendo el primero 5 y su producto 1140.

14. Búsquense siete números en progresión aritmética, conociendo la suma de ellos 63, y la suma 679 de sus cuadrados.

15. ¿ Cuáles son los tres lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que están en progresión aritmética, y que la razón es 21 m. ?

16. Búsquese la suma de las alturas de 20 triángulos equiláteros, siendo de 1 m. el lado del primero, de 2 el del segundo, de 3 el del tercero, y así sucesivamente.

17. Se han dispuesto algunas bolas del modo siguiente : la primera fila tiene 1 bola, la segunda 2, la tercera 3, y así sucesivamente. ¿ Cuántas filas hay, si el número de bolas empleadas es de 1225 ?

18. Búsquense cinco números en progresión aritmética, cuya suma es de 35 y su producto 10395.

19. ¿ Cuál es el 15º término de la progresión $\div\!\div 1 : 3 : 9 \ldots$?

20. ¿ Cuál es el 10º término de la progresión $\div\!\div 1 : \frac{5}{4} : \frac{25}{16} \ldots$?

21. ¿ Cuál es el 14º término de la progresión

$$\div\!\div 10\,240 : 5\,120 : 2\,560 \ldots ?$$

22. Entre 4375 y 7, interpolar tres medios geométricos.

23. Búsquese el límite de la suma de los términos

$$\div\!\div 100 : 50 : 25 : 12{,}50 \ldots$$

24. Búsquese el límite de la suma de los términos

$$\div\!\div 5{,}4 : 0{,}54 : 0{,}054 : 0{,}0054 \ldots$$

25. ¿ Cuáles son los cuatro ángulos de un cuadrilátero, sabiendo que están en progresión geométrica, y que la razón es 2?

26. Búsquense cuatro números en progresión geométrica, sabiendo que el primero es 15, y que la suma de los dos primeros no es más que la cuarta parte de la de los dos últimos.

27. Divídase el número 156 en ótros tres que estén en progresión geométrica, y que el último exceda al primero en 96.

28. Buscar tres números en progresión geométrica, conociendo su suma 31, y la cantidad 19 en que el mayor excede á la suma de los ótros dos.

29. Búsquense cuatro números en progresión geométrica, sabiendo que la diferencia entre el cuarto y el tercero es de 108, y la diferencia entre el segundo y el primero es de 12.

30. Búsquense cinco números en progresión geométrica, sabiendo que la diferencia entre el último y el primero es de 1872, y la diferencia entre el tercero y el primero es de 72.

31. Una progresión geométrica tiene 8 términos, la razón es igual al tercio del primero, y la diferencia entre los dos primeros términos es de 18 : ¿ cuáles son los ocho términos ?

32. Una progresión geométrica tiene seis términos; la razón es la cuarta parte del primer término, y la suma del segundo y del cuarto es de 360 : búsquense los seis términos.

33. Cada día se saca de un tonel la cuarta parte de lo que contiene ; ¿ cuál es su contenido, sabiendo que al cabo de cinco días quedan todavía 121 lts. 50 ?

34. Un comerciante ha empleado 25600 pts. en un negocio; cada año el capital se aumenta con la cuarta parte : ¿ cuál es el valor de este capital al cabo de 6 años ?

35. Suponiendo que un grano de trigo dé 4 espigas de 25 granos por año y que se siembren todos estos granos, ¿ cuál será en millones de granos la cosecha obtenida el décimo año ? Si se supone que el volumen de un grano sea de 20 mm^3, ¿ cuál será el volumen total de la cosecha ?

36. Suponiendo que un capital impuesto á intereses se duplica cada 23 años, calcular lo que llegaron á valer en 1890 cinco céntimos impuestos en el año 1200.

37. Calcular cuánto valdrá al cabo de 12 años una suma de 14000 pts., impuesta á interés compuesto y al 4 °/₀.

38. ¿ Cuál será el monto de 45000 pts. impuestas á interés compuesto por 8 años y al 4,50 °/₀ ?

39. ¿ Cuál es el capital que, impuesto á interés compuesto por 14 años y al 4 °/₀, llega á valer 27 707,50 pts. ?

40. Si las sumas depositadas en la caja de ahorros van devengando réditos al 3 °/₀, y si éstos se capitalizan cada año, ¿ qué suma recibirá á los 21 años un joven en cuyo beneficio se tomó una libreta de 300 pts. el día de su nacimiento ?

41. ¿ Á qué tanto por ciento hay que imponer la suma de 10000 pts. á interés simple, para que al cabo de 6 años haya producido lo que la misma suma impuesta á interés compuesto y al 4 °/₀, durante el mismo tiempo ?

42. Se han impuesto 12 000 pts. á interés compuesto y al 4 °/₀ por 20 años ; ¿ cuántos años habría sido menester dejar la misma suma á interés simple y al mismo tanto por ciento para que produjera igual interés ?

43. Un municipio toma un empréstito de 100000 pts. para 25 años : ¿ qué anualidad tendrá que pagar para amortizar su deuda, si el tanto es al 5 °/₀ ?

44. Una ciudad puede disponer de 6500 pts. durante 15 años : ¿ qué capital podrá tomar á préstamo al 4 °/₀ para que su anualidad de 6500 pts. pueda redimirla al cabo de los 15 años ?

PROBLEMAS DE RECAPITULACIÓN

1. Búsquense dos números cuya suma sea 360 y su cociente 9.

2. Repartir la suma de 999 pts. entre dos personas de modo que la parte de la segunda sea $^1/_4$ mayor que la de la primera.

3. La suma de dos números es 576, su cociente 20, y el residuo de su división 9 : ¿ cuáles son estos números ?

4. Repartir 175 pts. entre tres personas, sabiendo que la segunda ha de recibir 15 pts. más que la primera, y la tercera los $^2/_3$ de la suma de las dos primeras.

5. ¿ Cuál es el número cuyos $^2/_3$, más los $^3/_4$, más los $^4/_5$, más los $^{11}/_{12}$ son 376 ?

6. ¿ Cuál es el valor de un objeto, sabiendo que, vendido en 252 pts., se gana un 15 % sobre el precio de venta ?

7. Tres personas tienen juntas 122 años : ¿ cuál es la edad de cada úna, sabiendo que la menor tiene los $^4/_5$ de la edad de la segunda, y ésta los $^4/_5$ de la edad de la mayor ?

8. Distribúyanse 301 cocos entre dos clases de niños de modo que dividiendo por 4 el número que ha recibido la primera, y por 15, el que ha recibido la segunda, la diferencia de los cocientes sea 4.

9. Una barra de plata de 0,800 de ley pesa 350 gr. ; ¿ qué peso de otra barra de 0,900 de ley debe añadírsele para que la ley de la aleación resulte de 0,830 ?

10. Dos comerciantes tienen, el primero 30 000 pts., y 100 000 pts. el segundo ; si su capital se aumenta cada año con 5000 pts., ¿ dentro de cuántos años será el capital del primero la mitad del capital del segundo ?

11. Al vender una propiedad en 8420 pts., dice el dueño que ha ganado el interés anual al 5 %, de la suma en que la había comprado, más el interés de los intereses : ¿ cuánto le había costado esa propiedad ?

12. Un hijo tiene 10 años y su padre 35 : ¿ dentro de cuántos años será la diferencia de las edades los $^3/_8$ de su suma ?

13. Búsquense dos números cuya diferencia sea 15, sabiendo que el cociente de su suma por la tercera parte de la diferencia es igual á los $^3/_8$ del número mayor.

14. Búsquense dos números tales que dividiendo el primero por 3 y el segundo por 5, la suma de los cocientes sea 13, y si se

multiplica el primero por 5 y el segundo por 7, la suma de los productos sea igual á 315.

15. Búsquense dos números tales que dividiendo el mayor por el menor resulte 5 por cociente y 4 por residuo, y 11 veces el menor dividido por el mayor dé 2 por cociente y 10 por residuo.

16. Un comerciante tiene café de dos calidades ; cuando mezcla 3 kg. de la primera con 7 de la segunda el kg. vale 4,1 pts., y cuando mezcla 6 kg. de la primera con 4 de la segunda, el kg. vale 3,95 pts. : ¿cuáles son los precios respectivos de cada clase ?

17. El día de la apertura de las clases, los números de alumnos de dos escuelas son entre sí como 4 es á 5 ; seis meses después, la primera tiene 20 alumnos más, y la segunda 20 menos ; entonces los números de alumnos son entre sí como 10 es á 11 : ¿ cuántos alumnos tenía cada escuela el primer día de clase ?

18. Búsquese un quebrado tal que se convierte en $^3/_4$ cuando se añade 1 á sus dos términos, y vale $^2/_3$ cuando se les quita 4

19. Una señora quiere comprar cierto número de metros de tela ; si los comprase de á 1,45 pts. el metro, le faltarían 75 céntimos ; entonces compra otra calidad de á 1,40 pts., y le sobran 50 céntimos : ¿ qué dinero tenía esa mujer, y cuántos metros ha comprado ?

20. Un número consta de tres cifras cuya suma es 10, siendo la segunda cero ; cuando se invierte, el número obtenido vale 8 veces tanto como el primero más 29 : ¿ cuál es ese número ?

21. Una suma de 149000 pts. ha de repartirse entre tres hijos é inversamente á su edad ; siendo las edades respectivas de 9 años, 13 años y 15 años, calcular lo que recibirá cada hijo.

22. ¿ Cuál ha de ser el lado de un cuadrado para que su diagonal tenga 15 cm. más que este lado ?

23. ¿ Cuál ha de ser el lado de un triángulo equilátero para que la suma de la base y de la altura sea de 1 metro ?

24. ¿ Cuál ha de ser el radio de un círculo, si el lado del cuadrado inscrito ha de tener 25 mm. menos que el del triángulo equilátero inscrito ?

25. ¿ Cuál ha de ser el radio de un círculo cuya circunferencia debe tener 50 cm. más que el perímetro del exágono regular inscrito ?

26. Con un cuadrado de 1 m. de lado, fórmese un octógono regular cortando los lados, y calcúlese : 1º la longitud del lado del ángulo quitado ; 2º la longitud del lado del octógono obtenido.

27. Búsquense los tres lados de un triángulo, sabiendo que

sumados de dos en dos, resultan las cantidades 163 m., 148 m. y 141 m.

28. Determinar los cuatro lados de un cuadrilátero, sabiendo que sus sumas, tomados de tres en tres, dan 177 m., 183 m., 180 m. y 195 m.

29. La base de un triángulo isósceles tiene 20 m.; sobre esta base, tomada como diámetro se describe una semicircunferencia que determina en cada úno de los lados iguales una cuerda de 12 m. : ¿ cuál es la altura del triángulo ?

30. Los tres lados de un triángulo son $AB = 48$ m., $BC = 54$m., $AC = 62$ m.; determínese en el lado BC, y desde B, un punto H tal, que las paralelas trazadas por este punto á los otros lados, tengan por suma 55 m.

31. Los catetos de un triángulo rectángulo tienen 180 m. y 270 m.; ¿ cuáles son los puntos en que los corta la perpendicular levantada en la mitad de la hipotenusa ? — La respuesta expresará la distancia de estos puntos al vértice del ángulo recto.

32. Un terreno rectangular se calcula á 75 pts. el área y su longitud es igual á 8 veces su latitud; si se añadieran 6 m. á la longitud y 5 á la latitud, el rectángulo resultante valdría 264 pts. más que el primero : ¿ cuáles son las dimensiones del primer rectángulo ?

33. En un triángulo de 54 m. de base y 46 de altura, inscríbase un rectángulo cuyo perímetro sea igual á la suma de la base y de la altura del triángulo.

34. En la prolongación del lado $AB = 54$ m. de un cuadrado, se señala una longitud $BE = 42$ m.; ¿ cuál ha de ser la longitud $BF = x$ señalada en el otro lado del cuadrado, para que la recta EFH determine un trapecio ABFH equivalente al rectángulo cuyas dimensiones serían x y $AB + x$?

35. ¿ Á qué distancia del centro de un círculo de 10 cm. de radio debe trazarse una cuerda para que su longitud con la de su sagita sea igual á tres veces el radio del círculo ?

36. En un círculo de 12 m. de radio, ¿ cuál ha de ser la longitud de la cuerda que sea el triple de su sagita ?

37. ¿ Á qué distancia del centro de un círculo de 12 cm. de radio debe señalarse un punto, para que la secante que salga de este punto y pase por el centro sea 3 veces tan larga como la tangente que sale del mismo punto ?

38. En un rectángulo ABCD, trazar á la base una perpendicular FE, de modo que la diagonal AC sea bisectriz del ángulo que tiene su vértice en A, y cuyos lados terminan en E y F. Las dimensiones de este rectángulo son : $BC = 72$ m. y $AB = 60$ m.

39. La superficie total de una pirámide regular de base cuadrada es de $2m^2,732$, y la altura de la pirámide, de $0m,707$: búsquese la distancia que media entre el centro de la base y las caras, sabiendo que la base tiene $1m^2$.

40. ¿Á qué distancia del centro de una esfera hay que trazar un plano, para que la superficie de la sección sea los $^3/_4$ de la superficie de la zona quitada? — Se tomará $r = 28$ cm.

41. ¿Á qué distancia del centro de una esfera se debe trazar un plano para que la zona comprendida entre este plano y el círculo máximo, que le es paralelo, sea una media proporcional entre sus dos bases?

42. Un cilindro remata en dos conos rectos de igual base; su altura es igual al radio de su base, y la longitud total del sólido es de 32 cm.: ¿cuáles son las dimensiones del cilindro y de los conos, si la superficie lateral de éstos es equivalente á la superficie lateral del cilindro?

43. ¿Cuál es el número cuyos $^3/_4$ multiplicados por los $^4/_7$ dan 1344?

44. ¿Cuál es el número que multiplicado por sus $^2/_3$ más sus $^3/_5$ da 1140?

45. Se añade 2 á un número y se cuadra el resultado; se resta 2 del mismo número y se cuadra el resultado: búsquese ese número sabiendo que la suma de los dos cuadrados es 656.

46. Adivinen mi edad, decía un niño á sus condiscípulos, sabiendo que la que yo tenía hace 8 años multiplicada por la que tendré dentro de 8 años da 105.

47. ¿Cuál es el número cuyos $^2/_3$ más 3, multiplicados por los $^4/_9$ menos 2, dan 858?

48. Búsquense dos números pares consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 1460.

49. Indíquense dos números impares consecutivos tales que la diferencia de sus cubos sea 602.

50. Un padre tiene 30 años y su hijo 8; ¿dentro de cuántos años el cuadrado de la edad del hijo será la cuarta parte del cuadrado de la edad del padre?

51. ¿Cuánto se había pagado por un mueble, sabiendo que al venderlo en 24,75 pts. se pierde tanto por ciento como había costado?

52. Dividir una recta de 20 m. en dos segmentos tales que el cuadrado del primero sea igual á 4 veces el producto de la línea entera por el segundo.

53. Indíquense dos números tales que su producto más la semisuma de ellos sea 109, y el mismo producto menos la semisuma sea 89.

54. Se imponen 5000 pts. á cierto tanto por ciento; 5 años después se saca de nuevo el capital con sus intereses é impónense los $^2/_3$ á un tanto por ciento aumentado en 1 pta., y el otro tercio á un tanto por ciento disminuído en 1 pta.; entonces la suma de los intereses anuales es de 260 pts.; ¿ cuál era el tanto por ciento primitivo ?

55. Búsquense dos números cuyo producto sea igual á 15 y la suma de sus cuadrados á 34

56. ¿ Cuál ha de ser el radio de un círculo para que la diferencia entre la superficie del cuadrado inscrito y la del triángulo equilátero inscrito sea de 1 m²?

57. En el centro de un círculo cuyo radio $r=5$ m. se levanta una perpendicular al diámetro, y en un extremo de éste se traza una secante que corta á la perpendicular; ¿ cuál debe ser la longitud de esta secante para que la circunferencia la divida en dos segmentos iguales ?

58. Calcúlense los tres lados de un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa 85 m., y la relación $^8/_{15}$ de los catetos entre sí.

59. El lado de un rombo tiene 12 m., y la diagonal 10: ¿ cuál es el radio del círculo inscrito ?

60. Indíquense los catetos de un triángulo rectángulo, si la hipotenusa tiene 14 m. y la mediana de un cateto 13 m.

61. ¿ Cuáles son los catetos de un triángulo rectángulo, si las medianas que les corresponden tienen respectivamente 15 y 12 m. ?

62. En un trapecio isósceles, la perpendicular que junta la mitad de las bases es á la vez la altura del triángulo rectángulo isósceles construído sobre la base mayor, y la del triángulo equilátero construído sobre la menor : calcular esas bases, si la superficie del trapecio es de 324 m².

63. Dos cuerdas iguales parten desde un mismo punto de una circunferencia; ¿ cuál ha de ser su longitud para que la recta que une sus mitades sea igual al radio ? — Se tomará $r=24$ cm.

64. En un semicírculo de 6 m. de radio se levanta en el centro una perpendicular al diámetro : ¿ cuál será la longitud de una cuerda que salga del extremo del diámetro para ser cortada por la perpendicular, en la relación de 8 á 1 ?

65. En un círculo de 12m,50 de radio, ¿ cuál debe ser la longitud de una cuerda para que, añadida á la de su sagita, la suma resulte igual al radio ?

66. Un cono y un cilindro circulares rectos tienen por base un mismo círculo de 30 cm. de radio; siendo la altura del cilindro de 25 cm., ¿ cuál debe ser la altura del cono para que ambos cuerpos tengan igual superficie lateral ?

67. En el extremo de un diámetro se levanta una perpendicular : ¿ cuál ha de ser la longitud de esta recta para que el triángulo rectángulo que tiene por catetos el diámetro y esta perpendicular sea 4 veces mayor que el triángulo cuyos lados son el diámetro y las dos cuerdas que unen con los extremos del diámetro el punto en que la hipotenusa del primer triángulo corta á la circunferencia ? — Se tomará $r = 8$ cm.

68. Por un punto situado á 6 m. del centro de un círculo de 4 m. de radio, trazar dos secantes, úna de las cuales tiene que pasar por el centro, de modo que el arco comprendido entre las secantes sea igual al arco subtendido por una parte de la secante menor. — Hay que considerar dos casos.

69. En un círculo cuyo radio es de 1 m.; ¿ cuál es la longitud de dos tangentes que salen desde un mismo punto, sabiendo que esta longitud es los $^5/_6$ de la cuerda que une los puntos de contacto ?

70. ¿ Cuáles son las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su superficie se disminuye en 135 m² cuando su base viene á ser igual á su altura, y se aumenta en 216 m² cuando la altura viene á ser igual á la base ?

71. Una línea férrea pasa á 1 200 m. de un pueblo A, y á 500 m. de otro pueblo B ; los pueblos situados á un mismo lado de la línea distan úno de ótro 2500 m. : ¿ á qué intervalo de estos pueblos ha de colocarse una estación equidistante de ellos ?

72. Una vela cuadrada tiene 9 m. de lado ; ¿ cuánto hay que aumentar el lado para que la superficie sea de 98 m² ?

73. Las dimensiones de un rectángulo tienen 60 m. y 80 m. , ¿ cuánto hay que quitar de cada úna para que la superficie se reduzca á la mitad de la anterior ?

74. La base y la altura de un triángulo tienen respectivamente 60 m. y 72 m. ; ¿ qué longitud hay que añadir á estas dimensiones para que la superficie se aumente con su mitad ?

75. La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 143 m. ; calcular los catetos, sabiendo que la hipotenusa es igual á 5 veces la diferencia de ellos.

76. ¿ Cuál es la sagita de una cuerda de 18 m. en un círculo de 15 m. de radio ?

77. Búsquense los tres lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que el lado medio tiene 8 m. menos que la hipotenusa, y 17 más que el lado menor.

78. Una tangente común á dos circunferencias tangentes exteriormente tiene 12 cm. entre los puntos de contacto ; búsquese á qué distancia del centro de la circunferencia mayor encontrará á la línea de los centros, si la diferencia de los radios es de 5 cm. — Generalizar la cuestión.

79. Un círculo tiene 12 m. de radio; por un punto situado á 6 m. de la circunferencia se traza una secante tal que su segmento externo tenga 4 m. más que su segmento interno ; calcúlese la longitud de la secante.

80. Búsquense los catetos de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa tiene $37^{m},50$, y la altura correspondiente, 18 m.

81. Calcular los catetos de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa tiene 74 m., y el radio del círculo inscrito 10 m.

82. La diferencia entre las dimensiones de una alfombra es de 11 dm. ; calcular estas dimensiones, si la superficie de otra alfombra que tiene 2 dm. más de ancho y 3 dm. menos de largo es $^1/_5$ mayor que la de la primera.

83. Las dimensiones de un rectángulo son 8 y 15 m. : si se añaden 2 á la dimensión menor, ¿ qué longitud debe añadirse á la mayor, para que la diagonal del nuevo rectángulo tenga 3 m. más que la del primero ?

84. Córtese una esfera de radio r por medio de un plano, de manera que la zona quitada tenga la misma superficie que el círculo cuyo radio es la distancia x del plano secante al centro de la esfera.

85. Un tronco de cono tiene 12 cm. de altura y 12 cm. de radio en la base inferior ; ¿ cuál ha de ser el radio de la base superior, para que su volumen sea 7 veces mayor que el del cilindro que tenga la misma altura que el tronco de cono, y por base la base superior del mismo ?

86. ¿ Á qué distancia del centro de una esfera de radio r hay que trazar un plano secante para que el cilindro cuya base sea la sección obtenida y x la altura, tenga igual superficie lateral que el cono de revolución inscrito en el segmento determinado por el plano secante ?

87. En un círculo de 5 m. de radio se traza una cuerda paralela á una tangente de este círculo, en seguida se traza otra tangente en úno de los extremos de la cuerda ; entonces resulta un triángulo cuyos lados son las dos tangentes, y el tercero, el arco comprendido entre los puntos de contacto : ¿ cuál ha de ser la distancia x de la cuerda al centro para que, haciendo girar la figura al rededor del diámetro perpendicular á la cuerda, la superficie engendrada por la tangente que no es paralela á la cuerda, sea 3 veces mayor que la de la zona engendrada por el arco?

88. Dense 17 números en progresión aritmética, conociendo el primero 7 y el último 31.

89. Calcúlese la suma de los términos de la progresión ÷3 . 5,50 . 8 . 10,50..., que tiene 64 términos.

90. Búsquense 15 números en progresión aritmética, conociendo su suma 600 y el último 58.

91. Escríbanse 13 números en progresión aritmética, conociendo su suma 260 y la razón 3.

92. Calcúlese en cuántos puntos se cortan 20 rectas que no son paralelas. — Se supone que más de dos rectas nunca se cortan en un mismo punto.

93. ¿Cuáles son los tres lados de un triángulo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética y que la superficie del triángulo es de 4374 m^2?

94. El perímetro de un triángulo rectángulo es de 168 m.; calcular los lados, sabiendo que están en progresión aritmética.

95. Indíquense tres números que estén en progresión aritmética, conociendo su suma 30, y la cantidad 100 en que el cuadrado del mayor excede á la suma de los cuadrados de los ótros dos.

96. Escríbanse siete números que estén en progresión aritmética, conociendo la suma 83 de los dos extremos, y su producto 162.

97. Búsquense tres números que estén en progresión aritmética, conociendo su suma 30 y su producto 910.

98. Dense seis números en progresión geométrica, si la suma de ellos es de 4004 y la razón 3.

99. Una progresión geométrica tiene 8 términos: el cuarto y el sexto son 51 y 459; ¿cuáles son los demás?

100. El capital de un negociante es de 50000 pts., y cada año se aumenta en $^1/_8$ de lo que era el año precedente: ¿cuál será su valor al cabo de 9 años?

101. ¿Cuál es el valor de la suma de los términos de la progresión $\div\!\div a : \frac{a}{3} : \frac{a}{9} : \frac{a}{27} \ldots$, si a vale 2?

102. Se juntan los puntos medios de los lados de un cuadrado que tienen 1 m., y resulta otro cuadrado que es la mitad del primero; se hace la misma operación con el segundo cuadrado, luégo con el tercero, y así indefinidamente: búsquese la suma de las áreas así obtenidas.

103. La suma de tres números en progresión geométrica es de $^{104}/_{3}$; ¿ cuáles son estos números, sabiendo que el mayor excede al segundo en 16?

104. Escríbanse tres números en progresión geométrica, sabiendo que el mayor excede al segundo en 72, y el segundo excede al menor en 24.

105. Dense cuatro números en progresión geométrica, sabiendo que la diferencia entre el último y el primero es de 248, y la que hay entre el tercero y el segundo es de 40.

106. Pónganse cinco números en progresión geométrica, de modo que la suma del primero y tercero sea 52, y la diferencia entre el último y el primero sea 1248.

107. Escríbanse cinco números en progresión geométrica, conociendo la suma 120 de los términos de orden par y la diferencia 320 de los extremos.

108. ¿ Cuánto valdrá al cabo de 5 años la suma de 12800 pts. impuesta á interés compuesto y al 4 %?

109. Una ciudad toma un empréstito de 860000 pts. al 4 %, y quiere amortizar esta deuda en 25 años : ¿ qué anualidad tendrá que pagar ?

110. Un municipio, que tendrá disponibles 14000 pts. durante 30 años, desea tomar á préstamo una suma compuesta de un número redondo de millares de pesetas, y el mayor que sea posible ; ¿ cuál será la cuota de este préstamo y la anualidad que se deberá pagar, siendo el tanto al 4 $^{1}/_{2}$ %?

111. ¿ Cuáles son los números de dos cifras tales, que añadiendo á cada úno el número que resulta al invertirlo, la suma dé un cuadrado ?

112. ¿ Cuáles son los números de dos cifras tales, que restando de cada úno el número que resulta al invertirlo, la diferencia dé un cuadrado ?

113. Los valores de los lados de un triángulo son múltiplos de 5 : ¿ cuáles son estos lados, si el perímetro es de 200 m., y la suma de los dos lados menores excede al mayor en 40 m.?

114. Dense tres números consecutivos divisibles respectivamente por 5, 7 y 9.

TRIGONOMETRÍA

CAPÍTULO I

LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS

§ I. — Preliminares.

1. Definición. — Trigonometría es la ciencia que tiene por objeto la *resolución numérica de los triángulos.*

Todo triángulo consta de seis elementos : tres ángulos y tres lados. Cuando se conocen tres de estos elementos, con tal que no sean los tres ángulos, la trigonometría enseña á resolver el triángulo, esto es, á determinar *por medio del cálculo* los elementos desconocidos, valiéndose de los conocidos.

2. La Geometría enseña á resolver *gráficamente* los triángulos; pero á causa de los errores inseparables de todo trabajo material, no son muy exactos los resultados; al contrario, se consiguen exactos con el *cálculo trigonométrico.*

3. Líneas trigonométricas. — Sea el ángulo BOA. Con un radio cualquiera, describamos el arco AB. Desde B tracemos BP perpendicular á OA, y en el punto A levantemos AT perpendicular á OA.

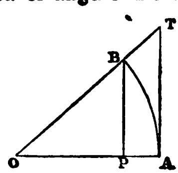

Fig. 1.

Llámase *seno* del arco AB ó del ángulo O, la relación $\frac{BP}{OA}$, *tangente* del arco AB ó del ángulo O, la relación $\frac{AT}{OA}$, y *secante* del arco AB ó del ángulo O, la relación $\frac{OT}{OA}$.

Como el radio del circulo se toma siempre por unidad, las razones precedentes se convierten en $\frac{BP}{1}$ ó sea BP, $\frac{AT}{1}$ ó sea AT, $\frac{OT}{1}$ ó sea OT.

Por lo tanto, tomando el radio por unidad, las longitudes BP, AT y OT representan respectivamente el seno, la tangente y la secante del ángulo O, y se llaman *líneas trigonométricas*.

4. Líneas complementarias. — Llámanse *coseno, cotangente, cosecante* de un arco ó del ángulo correspondiente, el seno, la tangente y la secante del complemento de dicho arco ó de dicho ángulo.

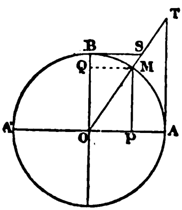

Fig. 2.

Así, MQ, seno del ángulo MOB, complemento del ángulo AOM, es el coseno del ángulo AOM; BS, tangente del ángulo MOB, es la cotangente del ángulo AOM; y OS, secante del ángulo MOB, es la cosecante del ángulo AOM.

5. Notas. — I. Siendo paralelas las rectas MP y BO, resulta que MQ = PO, y por lo tanto el coseno se define también diciendo que es la parte del radio comprendida entre el centro del arco y el pie del seno.

6. — II. Para un mismo ángulo, las líneas trigonométricas permanecen invariables, sea cual fuere el radio elegido.

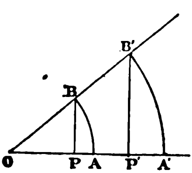

Fig. 3.

En efecto, el seno del ángulo BOA es $\frac{BP}{OB}$ ó $\frac{B'P'}{OB'}$; pero estas dos razones son iguales, pues los triángulos semejantes OBP y OB'P' dan $\frac{BP}{OB} = \frac{B'P'}{OB'}$; luego....

Asimismo, el coseno del ángulo BOA es $\frac{PO}{OB}$ ó $\frac{P'O}{OB'}$; pero son iguales estas razones, pues los triángulos semejantes OBP y OB'P' dan $\frac{PO}{OB} = \frac{P'O}{OB'}$; luego...

Hariamos una demostración análoga para las demás lineas trigonométricas.

Los números que representan á las lineas trigonométricas son siempre *abstractos*, ya que estas lineas son *razones*.

7. — III. Los vocablos seno, tangente, sécante, coseno, cotangente y cosecante se escriben abreviadamente de este modo : *sen*, *tg*, *sec*, *cos*, *cotg* y *cosec*.

§ II. — Variaciones de las líneas trigonométricas.

8. Sea un circulo de radio $OA = 1$. Tracemos dos diámetros perpendiculares AA', BB' que dividen al circulo en cuatro sectores iguales llamados *cuadrantes*.

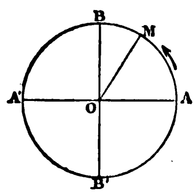

Fig. 4.

Supongamos que un punto movible M salga de A, llamado *punto de origen* de los arcos, y se mueva en el sentido de AMB; el arco recorrido, nulo al principio, va aumentando constantemente, y pasa por los valores 90°, 180°, 270° y 360°; entonces M habrá vuelto al punto de origen de donde salió.

Si el móvil se dirige en sentido opuesto, los arcos recorridos se consideran como negativos.

Mientras el punto M recorre la circunferencia, el radio OM se mueve al rededor de O en el plano del círculo, y el ángulo AOM pasa sucesivamente por todos los valores, desde 0° á 360°, lo mismo que el arco correspondiente; este ángulo es positivo ó negativo según la dirección que toma M.

VARIACIONES DEL SENO, DEL COSENO Y DE LA TANGENTE

9. Seno. — Sea MP el seno de un arco AM ó del ángulo correspondiente AOM. Se considera el seno como positivo cuando se encuentra encima del diámetro AA′, y negativo cuando está debajo.

Por consiguiente, el seno es *positivo* en los dos primeros cuadrantes, y *negativo* en los ótros dos.

Cuando el punto movible M está en A, el seno es igual á cero; si M se mueve en el sentido ABA′B′, el seno MP va aumentando, y su valor es 1 cuando M llega á B; en seguida disminuye y es igual á M′P′ cuando M está en M′; cuando M está en A′, el seno es igual á 0.

Siguiendo M su camino debajo de AA′, el seno resulta negativo; al llegar M al punto M″, el valor del seno es $-$ M″P″; es igual á -1 cuando el móvil está en B′; luégo disminuye en valor absoluto y es igual á 0 cuando M vuelve á A.

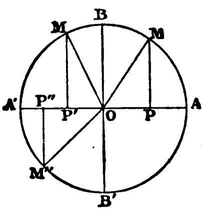

Fig. 5.

Por lo tanto, el seno puede variar entre -1 y $+1$, tomando todos los valores comprendidos entre estos dos límites.

10. Coseno. — Sea OP (fig. 5) el coseno del arco AM ó del ángulo correspondiente AOM. Se ha convenido en considerar el coseno como positivo cuando resulta á la derecha del diámetro BB′, y como negativo cuando está á la izquierda.

Por consiguiente, el coseno es *positivo* en los cuadrantes 1º y 4º, y *negativo* en los ótros dos.

Cuando el punto M está en A, el coseno es igual á 1. Al recorrer la circunferencia el punto M, el coseno disminuye, y su valor es 0 cuando M llega á B; luégo cambia de signo, y aumenta en valor absoluto; vale $-$OP′ cuando M se halla en M′, y -1 cuando M está en A′.

Siguiendo M su camino, el coseno queda negativo y disminuye en valor absoluto, hasta 0 cuando M está en B′; luego aumenta y se hace igual á 1 cuando M llega á A.

Así pues, el coseno puede variar entre -1 y $+1$ tomando todos los valores comprendidos entre estos dos límites.

11. Tangente. — Sea AT la tangente del arco AM, ó del ángulo correspondiente AOM. Por convención, la tangente es positiva cuando el radio OM prolongado encuentra á TT′ encima de AA′, y negativa cuando la encuentra debajo.

Luego, la tangente es *positiva* en los cuadrantes 1º y 3º, y *negativa* en los ótros dos.

Cuando el punto movible está en, A, la tangente es igual á 0; siguiendo M la dirección AMB..., la tangente aumenta hasta $+\infty$, cuando M está en B; tan pronto como M pasa del punto B, la tangente se hace negativa y pasa sin transición de $+\infty$ á $-\infty$, y en seguida se disminuye su valor absoluto; cuando M está en M′, la tangente es $-$AT′, y cuando llega á A′, la tangente es 0.

Siguiendo su movimiento el punto M, la tangente cambia de signo y crece constantemente; su valor es AT cuando el punto movible está en M_1; luego aumenta hasta $+\infty$ cuando M está en B′, y de repente pasa por segunda vez de $+\infty$ á $-\infty$; en fin, se disminuye su valor absoluto hasto 0 cuando M vuelve á A.

Por lo tanto, la tangente puede variar entre $+\infty$ y $-\infty$, tomando todos los valores posibles, positivos ó negativos.

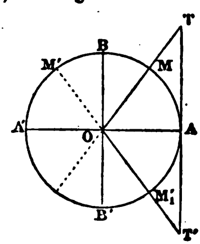

Fig. 6.

12. Nota. — El seno, el coseno y la tangente son las líneas trigonométricas más importantes, las únicas que sean de uso frecuente.

VARIACIONES DE LA COTANGENTE, DE LA SECANTE Y DE LA COSECANTE

En vez de estudiar directamente las variaciones de estas líneas, como lo acabamos de hacer para el seno, el coseno y la tangente, emplearemos el procedimiento siguiente.

13. Cotangente. — Sea el arco AM $= a$ (fig. 7). Los triángulos TAO y SBO son semejantes, por ser re...

y el ángulo TOA del úno es igual al ángulo BSO del ótro. Luego se tiene :

$$\frac{SB}{OB} = \frac{OA}{AT} \quad ó \quad \frac{\cot g\, a}{1} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, a};$$

de donde
$$\cot g\, a = \frac{1}{\mathrm{tg}\, a}.$$

Así, *la cotangente es lo inverso de la tangente.* Por lo tanto, las variaciones de la cotangente dependen de las de la tangente.

En la relación $\cot g\, a = \frac{1}{\mathrm{tg}\, a}$, siendo invariable el numerador 1, el signo de la cotangente dependerá del de la tangente. Luego la cotangente, así como la tangente, será *positiva* en los cuadrantes 1º y 3º, *negativa* en los cuadrantes 2º y 4º.

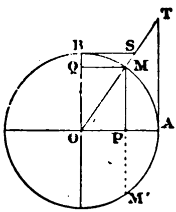

Fig. 7.

Cuando la tangente aumenta, la cotangente disminuye, y cuando disminuye la tangente, la cotangente aumenta. Cuando la tangente es $\pm\infty$, la cotangente es 0, y cuando la tangente es 0, la cotangente es $\pm\infty$. Por lo tanto, la cotangente, así como la tangente, puede tomar todos los valores posibles.

14. Secante. — En la fig. 7, los triángulos semejantes TAO y MPO dan :

$$\frac{OT}{OM} = \frac{OA}{OP} \quad ó \quad \frac{\sec a}{1} = \frac{1}{\cos a};$$

de donde
$$\sec a = \frac{1}{\cos a}.$$

Luego, *la secante es lo inverso del coseno*, y sus variaciones dependen de las del coseno.

El signo de la secante será el del coseno, por ser invariable el numerador 1. Por lo tanto, la secante será, así como el coseno, *positiva* en los cuadrantes 1º y 4º, *negativa* en los ótros dos.

Cuando el coseno aumenta, la secante disminuye, y cuando el coseno disminuye, la secante aumenta. Cuando el coseno es 1, la secante es también 1, y cuando el coseno es 0, la secante es $\pm\infty$.

Variando el coseno entre -1 y $+1$ (nº 10), no tomará la secante ningún valor comprendido entre -1 y $+1$, pues la relación $\frac{1}{\cos a}$ será siempre mayor que 1.

15. Cosecante. — En la fig. 7, los triángulos rectángulos semejantes SBO y MQO dan :

$$\frac{OS}{OM} = \frac{BO}{QO \text{ ó } MP} \quad \text{ó} \quad \frac{\operatorname{cosec} a}{1} = \frac{1}{\operatorname{sen} a};$$

de donde
$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a}.$$

Luego, *la cosecante es lo inverso del seno*, y sus variaciones dependen de las del seno.

El signo de la cosecante es el mismo que el del seno, y como éste, será ella *positiva* en los cuadrantes 1º y 2º, *negativa* en los ótros dos.

Cuando el seno aumenta, la cosecante disminuye, y cuando el seno disminuye, la cosecante aumenta. Cuando el seno es 1, la cosecante es también 1, y cuando el seno es 0, la cosecante es $\pm\infty$.

Variando el seno entre -1 y $+1$ (nº 9), no tendrá la cosecante ningún valor comprendido entre -1 y $+1$, pues siempre será mayor que 1 la relación $\frac{1}{\operatorname{sen} a}$.

16. Notas. — I. En el cuadro siguiente, damos, en cuanto á los signos, el resumen de lo que antecede :

	1er Cuadte	2º Cuadte	3er Cuadte	4º Cuadte
sen, cosec	+	+	−	−
cos, sec	+	−	−	+
tg, cotg	+	−	+	−

17. — II. De que cada ángulo de un triángulo es siempre menor que dos rectos, se infiere que :

1º Los senos de los ángulos de un triángulo son siempre positivos;

2º Las tangentes y los cosenos son positivos para los ángulos agudos, y negativos para los ángulos obtusos.

§ III. — Líneas trigonométricas de los arcos suplementarios.

18. Arcos suplementarios. — Sea AM un arco cualquiera; tracemos MM′ paralela al diámetro AA′, y resultará AM = A′M′.

En este caso, el arco AMM′ es el suplemento del arco AM, pues

$$AM + AMM' = 2 \text{ rectos}.$$

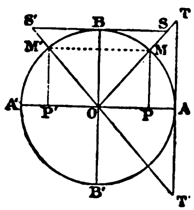

Fig. 8.

El seno de AM es MP, y M′P′ el de AM′. Estos senos son iguales y tienen un mismo signo.

El coseno de AM es OP, y — OP′ el de AMM′. Estos cosenos son iguales y tienen signo contrario.

La tangente de AM es AT, la de AMM′ es — AT′. Estas dos tangentes son iguales y tienen signo contrario.

19. Luego, dos *arcos* ó dos *ángulos suplementarios* tienen:

1º Senos iguales con igual signo:

$$\text{sen}(180 - a) = \text{sen}\, a;$$

2º Cosenos iguales con signo contrario:

$$\cos(180 - a) = -\cos a;$$

3º Tangentes iguales con signo contrario:

$$\text{tg}(180 - a) = -\text{tg}\, a.$$

De igual modo: 1º Las cotangentes serán iguales y tendrán signo contrario:

$$\text{cotg}(180 - a) = -\text{cotg}\, a;$$

2º Las secantes serán iguales con signo contrario:

$$\sec(180 - a) = -\sec a;$$

3º Las cosecantes serán iguales con un mismo signo:

$$\operatorname{cosec}(180 - a) = \operatorname{cosec} a.$$

CAPÍTULO II

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

§ I. — Relaciones entre las líneas trigonométricas.

20. Entre las seis líneas trigonométricas de un mismo arco, hay cinco distintas relaciones que son las fórmulas fundamentales de la trigonometría.

Sea a el ángulo AOM correspondiente al arco AM, tomado en el primer cuadrante (fig. 9).

1º El seno MP y el coseno OP del ángulo a son los catetos del triángulo rectángulo OPM. Tenemos pues:

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2,$$

ó sea

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1. \qquad (1)$$

2º De la semejanza de los triángulos rectángulos TAO y MPO, se deduce:

$$\frac{AT}{AO} = \frac{MP}{PO}, \quad \text{ó sea} \quad \frac{\operatorname{tg} a}{1} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a};$$

de donde

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}. \qquad (2)$$

3º De la semejanza de los mismos triángulos resulta también:

$$\frac{OT}{OM} = \frac{OA}{OP}, \quad \text{ó sea} \quad \frac{\sec a}{1} = \frac{1}{\cos a};$$

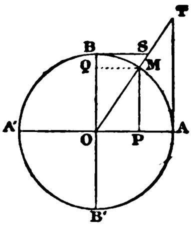

Fig. 9.

de donde $\sec a = \frac{1}{\cos a}$. (3)

4º Los triángulos semejantes SBO y MQO dan también :

$$\frac{SB}{BO} = \frac{MQ}{QO},$$

ó sea $\frac{\text{cotg}\, a}{1} = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a}$;

de donde $\text{cotg}\, a = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a}$. (4)

5º Por último, estos mismos triángulos dan :

$$\frac{SO}{MO} = \frac{BO}{QO}, \text{ ó sea } \frac{\text{cosec}\, a}{1} = \frac{1}{\text{sen}\, a};$$

de donde $\text{cosec}\, a = \frac{1}{\text{sen}\, a}$. (5)

21. Nota. — Estas fórmulas, aunque halladas en el supuesto de ser el arco positivo y menor que un cuadrante, son generales para todos los arcos.

Conocida que sea cualquiera de las líneas trigonométricas, valiéndose de las relaciones precedentes pueden encontrarse las ótras cinco.

22. Teorema. — *El seno de un arco ó del ángulo correspondiente es igual á la mitad de la cuerda que subtiende un arco doble.*

Sea MP (fig. 7) el seno del arco AM ; prolonguémoslo hasta M′. El radio OA, perpendicular á MM′, divide esta recta en dos partes iguales en el punto P ; luego MP es la mitad de MM′, esto es, de la cuerda que subtiende un arco doble del dado AM.

23. Aplicaciones. — Por medio del teorema anterior se puede calcular directamente cierto número de senos.

1º El lado del exágono regular inscrito en un círculo es igual al radio R ó 1, y subtiende un arco de 60º ; luego

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

2º El lado del cuadrado inscrito es igual á $R\sqrt{2}$ ó $\sqrt{2}$, y subtiende un arco de 90º; luego

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70710.$$

3º El lado del triángulo equilátero inscrito es igual á $R\sqrt{3}$, ó $\sqrt{3}$, y subtiende un arco de 120º; luego

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86602.$$

4º El lado del decágono regular inscrito es igual á

$$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{ó} \quad \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$$

y subtiende un arco de 36º; luego

$$\text{sen } 18^\circ = \frac{(\sqrt{5}-1)}{4} = 0{,}3090.$$

24. PROBLEMA. *Dado el seno del arco de* 30º, *búsquese la longitud de las otras líneas trigonométricas del mismo.*

El seno de 30º es $\frac{1}{2}$ ó 0,5.

1º La relación (5) da:

$$\text{cosec } 30^\circ = \frac{1}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{1}{0{,}5} = 2.$$

2º De la relación (1) $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$, resulta:

$$\cos^2 30^\circ = 1 - \text{sen}^2 30^\circ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4};$$

de donde $$\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86602.$$

3º La secante resulta de la relación (3):

$$\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1{,}15470.$$

4° La relación (2) da para la tangente :

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}57735.$$

5° Por último, de la relación (4) resulta :

$$\operatorname{cotg} 30^\circ = \frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = 1{,}73205.$$

§ II. — Adición y sustracción de arcos.

25. Cálculo de sen$(a \pm b)$ y de cos$(a \pm b)$, en función de los senos y cosenos de a y de b.

Sean los arcos $AB = a$, $BC = b$; tomemos $BC' = BC$, y tendremos :

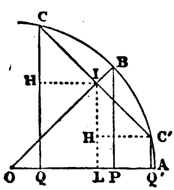

Fig. 10.

$$AC = a + b \quad \text{y} \quad AC' = a - b.$$

Tracemos las rectas OB y CC'; bajemos CQ, BP, IL, C'Q' perpendiculares á OA, y tracemos IH y C'H' paralelas á OA.

Los triángulos CIH, IC'H' son iguales; $CH = IH'$, $HI = H'C' = LQ'$, y resulta :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= CQ = IL + CH \\ \operatorname{sen}(a-b) &= C'Q' = IL - CH \\ \cos(a+b) &= QO = OL - LQ = OL - IH \\ \cos(a-b) &= Q'O = OL + LQ' = OL + IH \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Ya conocemos $BP = \operatorname{sen} a$, $OP = \cos a$, $CI = \operatorname{sen} b$, $OI = \cos b$; calculemos IL, CH, OL y HI .

Los triángulos rectángulos OBP y CIH son semejantes por tener los lados perpendiculares; luego

$$\frac{CI}{OB \text{ ó } 1} = \frac{CH}{OP} = \frac{IH}{BP}.$$

Comparando la primera razón sucesivamente con cada úna de las ótras dos, se tendrá :

$$\mathrm{CH} = \mathrm{OP} \times \mathrm{CI} = \cos a \ \mathrm{sen}\, b,$$
$$\mathrm{IH} = \mathrm{BP} \times \mathrm{CI} = \mathrm{sen}\, a \ \mathrm{sen}\, b.$$

De la semejanza de los triángulos OBP y OIL, resulta :

$$\frac{\mathrm{OI}}{\mathrm{OB} \text{ ó } 1} = \frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{IL}}{\mathrm{BP}}.$$

Comparando la primera razón con las ótras dos, tendremos :

$$\mathrm{OL} = \mathrm{OP} \times \mathrm{OI} = \cos a \ \cos b,$$
$$\mathrm{IL} = \mathrm{BP} \times \mathrm{OI} = \mathrm{sen}\, a \ \cos b.$$

Estos valores sustituídos en las relaciones (A), resultará :

$$\mathrm{sen}\,(a+b) = \mathrm{sen}\, a \cos b + \cos a \ \mathrm{sen}\, b, \qquad (6)$$
$$\mathrm{sen}\,(a-b) = \mathrm{sen}\, a \cos b - \cos a \ \mathrm{sen}\, b, \qquad (7)$$
$$\cos\,(a+b) = \cos a \cos b - \mathrm{sen}\, a \ \mathrm{sen}\, b, \qquad (8)$$
$$\cos\,(a-b) = \cos a \cos b + \mathrm{sen}\, a \ \mathrm{sen}\, b. \qquad (9)$$

Estas relaciones, establecidas en el supuesto de que la suma y la diferencia de los arcos es menor que un cuadrante, son generales y ciertas, por lo tanto, para otro arco cualquiera.

26. Aplicaciones. — *Conociendo el seno y el coseno de* 45°, *el seno y el coseno de* 30°, *calcular sen* 75°, *cos* 75°, *sen* 15°, *cos* 15°.

Tenemos : $\mathrm{sen}\, a = \mathrm{sen}\, 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos a = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\mathrm{sen}\, b = \mathrm{sen}\, 30° = \frac{1}{2}; \quad \cos b = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Las fórmulas (6), (7), (8) y (9) dan sucesivamente :

$$\mathrm{sen}\,(a+b) = \mathrm{sen}\, 75° = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 0{,}9659,$$

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} 15^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=0{,}2588,$$

$$\cos(a+b)=\cos 75^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=0{,}2588,$$

$$\cos(a-b)=\cos 15^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=0{,}9659.$$

Nota. — Siendo complementarios los ángulos de 75° y 15°, se ve por qué el sen 75° y el cos 15° tienen igual valor, y por qué el sen 15° = cos 75°.

27. Cálculo de $\operatorname{tg}(a+b)$ y de $\operatorname{tg}(a-b)$, en función de $\operatorname{tg} a$ y de $\operatorname{tg} b$.

1° $\operatorname{tg}(a+b)$. Tenemos (fórmula 2):

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}.$$

En vez de $\operatorname{sen}(a+b)$ y $\cos(a+b)$, pongamos sus valores (fórmulas 6 y 8):

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{sen} a\cos b+\cos a\operatorname{sen} b}{\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b};$$

dividamos por $\cos a\cos b$ el numerador y denominador del segundo miembro:

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen} a\cos b}{\cos a\cos b}+\dfrac{\cos a\operatorname{sen} b}{\cos a\cos b}}{\dfrac{\cos a\cos b}{\cos a\cos b}-\dfrac{\operatorname{sen} a\cos b}{\cos a\cos b}},$$

ó sea
$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}+\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1-\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}\times\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}},$$

y por fin $$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}. \qquad (10)$$

2° tg $(a-b)$. Tenemos también:

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos(a-b)}.$$

En vez de $\operatorname{sen}(a-b)$ y $\cos(a-b)$, pongamos sus valores (fórmulas 7 y 9):

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{sen}a\cos b-\cos a\operatorname{sen}b}{\cos a\cos b+\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b};$$

dividamos por $\cos a\cos b$ el numerador y denominador del segundo miembro, y simplifiquemos como antes; resultará :

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}. \qquad (11)$$

28. Aplicaciones. — *Conociendo las tangentes de 45° y de 30°, calcular las tangentes de 75° y 15°.*

Sea $\operatorname{tg}a=\operatorname{tg}45°=1$, y $\operatorname{tg}b=\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$. (n° 24)

Las fórmulas (10) y (11) dan :

1° $$\operatorname{tg}(a+b)=\operatorname{tg}75°=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=3{,}732;$$

2° $$\operatorname{tg}(a-b)=\operatorname{tg}15°=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=0{,}2680.$$

Nota. — El valor encontrado para la tangente de 15° es lo inverso del que hemos hallado para la tangente de 75°. En efecto, el ángulo de 15° es el complemento del ángulo de 75°; por lo tanto, la tangente de 15° es la cotangente de 75°.

§ III. — Multiplicación y División de arcos.

29. Cálculo de sen$2a$, cos$2a$ y tg$2a$, en función de sen$a$, cos$a$ y tg$a$.

1º **sen** $2a$. Si en la fórmula (6)

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\cos b+\cos a\operatorname{sen}b,$$

hacemos $b=a$, resultará :

$$\operatorname{sen}2a=\operatorname{sen}a\cos a+\cos a\operatorname{sen}a,$$

$$\operatorname{sen}2a=2\operatorname{sen}a\cos a. \qquad (12)$$

2º **cos** $2a$. En la fórmula (8)

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b,$$

hagamos $b=a$,

$$\cos 2a=\cos a\cos a-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}a,$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a. \qquad (13)$$

3º **tg** $2a$. En la fórmula (10),

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b},$$

hagamos $b=a$, resultará :

$$\operatorname{tg}2a=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}a},$$

ó sea

$$\operatorname{tg}2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a}. \qquad (14)$$

30. Nota. — Siendo generales las fórmulas (12), (13) y (14), se verifican para cualquier valor que se considere.

Si en cada úna de ellas ponemos $\frac{a}{2}$ en vez de a, resultará :

$$\operatorname{sen}a=2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}, \qquad (12\text{ bis})$$

$$\cos a=\cos^2\frac{a}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}, \qquad (13\text{ bis})$$

$$\operatorname{tg}a=\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}. \qquad (14\text{ bis})$$

31. Aplicaciones. — *Conociendo el seno, el coseno y la tangente de 18°, hallar el seno, el coseno y la tangente de 36°.*

Sea
$$\text{sen } 18^\circ = 0{,}3090,$$
$$\cos 18^\circ = 0{,}9511,$$
$$\text{tg } 18^\circ = 0{,}3249.$$

Apliquemos las fórmulas (12), (13) y (14), haciendo en ellas $a = 18^\circ$:

1°
$$\text{sen } 36^\circ = 2 \text{ sen } 18^\circ \cos 18^\circ$$
$$= 2 \times 0{,}3090 \times 0{,}9511 = 0{,}5878.$$

2°
$$\cos 36^\circ = \cos^2 18^\circ - \text{sen}^2 18^\circ$$
$$= 0{,}9511^2 - 0{,}3090^2 = 0{,}8090.$$

3°
$$\text{tg } 36^\circ = \frac{2 \text{ tg } 18^\circ}{1 - \text{tg}^2 18^\circ}$$
$$= \frac{2 \times 0{,}3249}{1 - 0{,}3249^2} = 0{,}7265.$$

32. Cálculo de sen $\frac{a}{2}$, cos $\frac{a}{2}$ y tg $\frac{a}{2}$, en función de cos a.

1° sen $\frac{a}{2}$. La fórmula (1) puede escribirse:

$$\cos^2 \frac{a}{2} + \text{sen}^2 \frac{a}{2} = 1$$

Sumemos ordenadamente esta fórmula con la fórmula (13 bis), y resultará :

$$2 \text{ sen}^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a,$$

ó sea
$$\text{sen}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2};$$

de donde
$$\text{sen } \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}. \qquad (15)$$

2º $\cos\frac{a}{2}$. Tomemos las mismas fórmulas (1) y (13 bis), restémoslas ordenadamente y resultará :

$$2\cos^2\frac{a}{2} = 1 + \cos a,$$

ó sea
$$\cos^2\frac{1}{2}a = \frac{1+\cos a}{2};$$

de donde
$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}. \qquad (16)$$

3º $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$. Dividamos la fórmula (15) por la fórmula (16):

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}};$$

pero
$$\frac{\operatorname{sen}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\frac{a}{2};$$

luego
$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}. \qquad (17)$$

33. Aplicación. — *Siendo el coseno de* 18º *igual á* 0,9511, *búsquese el seno* 9º, *el cos* 9º *y la tangente* 9º.

1º La fórmula (15) da, haciendo $a = 18^o$:

$$\operatorname{sen} 9^o = \sqrt{\frac{1+0,9511}{2}} = 0,9877.$$

2º De la fórmula (16) resulta :

$$\cos 9^o = \sqrt{\frac{1-0,9511}{2}} = 0,1564.$$

3º La tangente de 9º será : $\frac{1564}{9877} = 0,1584.$

CAPÍTULO III

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS DE LOGARITMOS*

§ I. — Construcción de las tablas trigonométricas.

34. Nociones generales. — En las aplicaciones trigonométricas, preciso es conocer las líneas trigonométricas que corresponden á un arco dado, y recíprocamente. Los valores numéricos ó *valores naturales* de estas líneas pueden calcularse directamente; ya existen tablas que contienen dichos valores que corresponden á los arcos desde 0º á 45º.

Inútil fuera calcular las líneas trigonométricas de los arcos mayores que 45º, puesto que desde este punto para arriba, cada úno de los arcos hasta 90º es el complemento de un arco cuyas líneas trigonométricas ya se conocen. Así el seno del arco de 58º es igual al coseno del arco de 32º.

En cuanto á los arcos mayores que 90º, sábese que, salvo los cambios de signos ya indicados (nº 19), sus líneas trigonométricas son iguales á las de los arcos del primer cuadrante.

Pero, con el objeto de abreviar lo más posible la aplicación de las fórmulas trigonométricas, no se suele hacer uso de estas tablas, sino de ótras, llamadas *ordinarias* que, en vez de dar los valores naturales de las líneas trigonométricas, dan los *logaritmos* de estos valores.

* Para la teoría de los logaritmos y el uso de las tablas logarítmicas de los números ordinarios, véase Álgebra, Parte IV. Aquí se tratará tan sólo de las tablas trigonométricas, y del cálculo trigonométrico por medio de ellas.

35. Tablas de los logaritmos de las funciones trigonométricas. — Las *tablas mayores*, ó tablas de CALLET, modificadas por DUPUIS, contienen los logaritmos, con siete decimales, de las líneas trigonométricas de los diferentes arcos desde 0° á 90°, contados de 10″ en 10″.

Otras tablas, conocidas con el nombre de *tablas menores*, ó tablas de LALANDE, contienen los logaritmos, con 5 decimales, de las líneas trigonométricas de los arcos desde 0° á 90°, contados de 1′ en 1′.

36. Las tablas contienen tan sólo los logaritmos de cuatro funciones trigonométricas, á saber : *sen*, *cos*, *tg* y *cotg*. Si se tuvieran que emplear los logaritmos de *sec* y *cosec*, se tomarían los cologaritmos del *coseno* y *seno* de las mismas, pues la *sec* es lo inverso del *coseno*, y la *cosec* lo inverso del *seno* (nos 14 y 15).

Así : $$\log sec\, 26°20' = \text{colog}\, cos\, 26°20',$$

porque $$sec\, 26°20' = \frac{1}{cos\, 26°20'},$$

y $$\log cosec\, 37°18' = \text{colog}\, sen\, 37°18',$$

porque $$cosec\, 37°18' = \frac{1}{sen\, 37°18'}.$$

37. Las tablas contienen tan sólo los arcos comprendidos desde 0° á 45°, pues las líneas trigonométricas de un arco son iguales á las líneas trigonométricas de su arco complementario.

Así : $sen\, 47° = cos\, 43°$, y $tg\, 52°14' = cotg\, 37°46'$.

Una disposición particular dispensa de calcular previamente el ángulo complementario y facilita el leer directamente los logaritmos de los ángulos mayores que 45°.

38. Disposición de las tablas. — Siendo esta disposición poco más ó menos la misma, vamos á indicar la de las tablas publicadas por los HERMANOS DE LAS ESCUELAS CRISTIANAS.

El arreglo de una página permite leer en ella los logaritmos de las líneas de 30 arcos consecutivos de 1′ en 1′; por ejemplo desde 27° á 27°30′, ó desde 27°30′ á 28°; y también de las líneas de los arcos complementarios mayores que 45°, por ejemplo, en la misma página, desde 62°30′ á 63°, ó desde 62° á 62°30′.

Para los *arcos menores que* 45°, los *arcos* están señalados en la parte superior de la página, y los *minutos*, desde 0′ á 30′, en la primera columna de la izquierda.

Para los *arcos mayores que* 45°, los *grados* están en la parte inferior, y los *minutos* en la primera columna de la derecha.

Las demás columnas contienen los logaritmos de los *senos, tangentes, cotangentes* y *cosenos* que corresponden á estos arcos. Cada úno de estos valores corresponde á dos arcos complementarios, contados, el primero, por la parte superior, y el segundo, por la parte inferior; por eso, en las columnas en que se lee *seno, tangente, cotangente* y *coseno* por la parte superior, se lee *coseno, cotangente, tangente* y *seno* en la inferior.

Las diferencias entre cada dos logaritmos consecutivos ocupan las columnas señaladas con la letra D; para la tangente y la cotangente, las diferencias son comunes y ocupan la columna señalada con las letras D. C., abreviatura de *diferencias comunes.*

El cálculo de las partes proporcionales se halla efectuado en la parte inferior de las páginas, empezando el arco de 5°.

Nota. — Se ha utilizado el espacio que queda libre al pie de las cinco primeras páginas, colocando en él una *Tabla con 6 decimales de líneas trigonométricas naturales y de longitudes de los arcos, en función del radio.* Esta tabla llega hasta 100°, para manifestar que ciertas líneas se cambian en negativas desde 90° para arriba.

§ II. — Uso de las tablas trigonométricas.

39. Para el uso de las tablas de logaritmos de las líneas trigonométricas, se deben resolver los dos problemas siguientes :

1° *Hallar el logaritmo de una línea trigonométrica correspondiente á un arco dado ;*

2° *Dado el logaritmo de una línea trigonométrica, hallar el valor del arco correspondiente.*

Antes de resolver estos problemas, recordemos sucintamente:

1° Que dos arcos suplementarios tienen sus senos iguales y de idéntico signo, mientras que sus tangentes, cotangentes y cosenos son iguales y de signos contrarios;

2° Que los senos y las tangentes, y por consiguiente sus logaritmos, van aumentando desde 0° á 90°, mientras que los cosenos y las cotangentes disminuyen desde 0° á 90°.

HALLAR EL LOGARITMO DE UNA LÍNEA TRIGONOMÉTRICA CORRESPONDIENTE Á UN ARCO DADO

40. 1er Caso. — El arco sólo contiene grados y minutos. — Basta leer el logaritmo en lastablas. Así, el logaritmo del seno 13°24′ es, página 80, $\bar{1}$,36502; el de la tangente 76°16′ es, página 81, 0,61192.

41. 2° Caso. — El arco contiene segundos. — 1° *Sea de encontrar el log de la tg* 40°24′9″.

Se busca directamente, pág. 134, el log de la tg 40°24′, que dará $\bar{1}$,92996. La diferencia entre el log de la tg 40°24′ y el de la tg 40°25′ es + 26 unidades del quinto orden decimal.

Al pie de la página, y en la columna vertical cuyo título es 26, se ve que la diferencia para 9″ es 3,9, esto es, 4 unidades del quinto orden decimal, que es preciso añadir á $\bar{1}$,929 96.

Luego el log de la tg 40°24′9″ es $\bar{1}$,93000.

2° *Sea de encontrar el log del cos* 81°46′48″.

Se halla, pág. 70, que el log del cos 81°46′ es $\bar{1}$,15596.

La diferencia entre el log del cos 81°46′ y el del cos 81°47′ es — 88 unidades del quinto orden decimal. Al pie de la página, y en la columna vertical, título n° 88, se encuentra

que para	40″	la diferencia	es	58,7
y para	8″	»		11,7
por lo tanto, para	48″	»	será	70,4

es decir 70 unidades del quinto orden decimal que se deben sustraer de $\bar{1}$,15596.

Por consiguiente, el log de cos 81°46′48″ es $\bar{1}$,15526.

DADO EL LOGARITMO DE UNA LÍNEA TRIGONOMÉTRICA, HALLAR EL VALOR DEL ARCO CORRESPONDIENTE

42. 1er Caso. — El logaritmo se encuentra por entero en la tabla. — En este caso, se obtiene inmediatamente el arco correspondiente. Así, el arco correspondiente al log sen $\bar{1},63079$ es, pág. 104, 25°18′; y el arco correspondiente al log tg 0,31600 es, pág. 105, 64°14′.

Nota. — Para facilitar este trabajo, es preciso tener presente, según se ve en la tabla : 1° que los senos de los arcos mayores que 45° tienen sus logaritmos mayores que $\bar{1},84949$, y que los cosenos de estos mismos arcos tienen los suyos menores que $\bar{1},84949$; 2° que las tangentes de los arcos mayores que 45° tienen sus logaritmos mayores que 0, y que las cotangentes de estos mismos arcos tienen los suyos menores que 0.

43. 2° Caso. — El logaritmo no está en las tablas. — 1° *Sea de encontrar el arco correspondiente al log sen* $\bar{1},90382$.

Siendo este log mayor que 1,84949, el arco correspondiente es mayor que 45°; es preciso fijarse en los títulos de la parte inferior de las páginas y buscar en la columna señalada *seno*, los dos log que comprenden el log dado.

Estos dos log son, pág. 127, $\bar{1},90377$ y $\bar{1},90386$; el primero corresponde al arco 53°15′, y el segundo al arco 53°16′. La diferencia entre $\bar{1},90377$ y $\bar{1},90386$ es 9 unidades del quinto orden decimal, y la diferencia entre 1,90377 y el log dado $\bar{1},90382$ es 5. Hay que calcular los segundos que corresponden á la diferencia 5. Al pie de la página, en la columna 9, se busca entre los números de la derecha el que se aproxima más, por defecto, á 5; se ve que es 4,5, correspondiente á 30″. La diferencia entre 5 y 4,5 es 0,5; este número corresponde á 3″ que hay que añadir á 30″.

Luego, el arco pedido es de 53°15′33″.

2° *Sea de encontrar el arco correspondiente al log cotg* 0,30139.

En vez de proceder como lo acabamos de hacer, y decir : siendo el log mayor que 0, es preciso figarse en los títulos de arriba de las páginas, etc., pueden buscarse en las columnas intituladas ya sea *tg*, ya *cotg*, los dos log que comprenden el log dado. Estos log son, pág. 107, 0,301 63 y 0,301 32. En la columna donde se hallan estos log, como el título cotg está encima de la página, tomo el arco correspondiente al log 0,301 63 que es el que más se acerca al título, y me da el arco de 26° 32′. La diferencia entre 0,301 63 y 0,301 32 es — 31, y la diferencia entre 0,301 63 y el log dado es — 24. Al pie de la página, en la columna 31, se busca entre los números de la derecha, el que más se aproxima, por defecto, á 24, y nos dará 20,7 correspondiente á 40″; la diferencia entre 24 y 20,7 siendo 3,3, este número corresponde poco más ó menos á 6″ que es preciso añadir á 40″.

El arco pedido es, pues, de 26° 32′ 46″.

44. Nota. — Cuando las partes proporcionales para una diferencia tabular dada no están efectuadas, es porque ó esta diferencia está comprendida entre ótras dos que no difieren sino de dos unidades, ó porque pertenecen al log de arcos menores que 5° ó mayores que 85°. En el primer caso pueden calcularse las partes proporcionales sobre la diferencia que precede ó sobre la que sigue; en el segundo caso se calcula directamente por medio de una regla de tres, menos para los arcos menores que 3° ó mayores que 87°. Para tales arcos se recurre á la tabla de la página 144, la cual contiene, de minuto en minuto, las *líneas trigonométricas naturales*, senos y tangentes de los arcos comprendidos entre 0° y 3°, y por consiguiente de los cosenos y cotangentes de los arcos comprendidos entre 87° y 90°.

1° *Sea de encontrar el log de sen* 0° 22′ 43″.

En la tabla, se halla que la longitud del seno de 0° 22′ es 0,006 399, y la del seno de 0° 23′, 0,006 690; la diferencia entre estos dos números es 291 unidades del sexto orden decimal.

Si para 60″ la longitud del seno aumenta en 291 unidades, para 43″ el aumento será $\frac{291 \times 43}{60}$, ó sea 209 por exceso, que se deben añadir á 0,006 339. La longitud del seno de 0° 22′ 43″ es, pues, 0,006 608.

Siendo 3,820 07 el log de 0,006 608, el log de cos 0° 22′ 43″ es á su vez 3,820 07.

2º *Búsquese el arco correspondiente al log tg* $\bar{2},46856$. El número correspondiente al log $\bar{2},46856$ es 0,029414. El número que más se aproxima á 0,029414, en la columna intitulada *tg*, pág. 144, es 0,029388 y corresponde al arco de 1º 41′. La diferencia entre este número y el siguiente, 0,029 679 es 291 unidades del sexto orden decimal, y la del número 0,029388 con el número 0,029414 es 26.

Si para 291 unidades hay en el arco un aumento de 60″, para 26 unidades el aumento será de $\frac{60 \times 26}{291}$, ó sea 5″36 que es preciso añadir á 1º41′.

El arco pedido es, por consiguiente, de 1º41′5″,36.

3º *Búsquese el arco que corresponde al log tg* 1,65048.

Busquemos el arco correspondiente á la cotangente. Siendo la cotg lo inverso de la tg, el log de la cotg será $\bar{2},34952$; es el colog de 1,65048. Elnúmero correspondiente á 2,34952 es 0,022362. En la columna intitulada *cotg*, se ve, pág. 144, que este número está comprendido entre 0,022402 y 0,022111, lo que da el arco de 88º43′. La diferencia entre 0,022402 y 0,022111 es — 291 unidades del sexto orden decimal, y la diferencia entre 0,022402 y 0,022362 es — 40.

Si por una diminución de 291 se tiene 60″, por una diminución de 40 se tendrá $\frac{60 \times 40}{291}$, esto es 8″,25, que se deben añadir á 88º43′.

El arco correspondiente al log tg 1,65048 es, pues, de 88º43′8″,25.

§ III. — Transformaciones logarítmicas.

45. No se pueden calcular directamente por medio de los logaritmos las fórmulas en que hay una *suma* ó una *diferencia*. Cuando á estas fórmulas se les quiere aplicar el cálculo logarítmico, hay que *transformarlas* previamente en ótras que tengan forma de *producto*.

Á continuación ponemos algunas de las transformaciones más usadas :

46. Transformación de $\operatorname{sen} p \pm \operatorname{sen} q$.

Se trata de transformar en un *producto* la *suma* ó la *diferencia* de dos senos.

Representemos por $2a$ el valor de $p+q$, y por $2b$ el de $p-q$, ó sea :

$$p+q=2a \quad \text{y} \quad p-q=2b. \qquad \text{(a)}$$

Sumemos y restemos ordenadamente estas igualdades, y resultará :

$$p=a+b \quad \text{y} \quad q=a-b.$$

Entonces
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} p+\operatorname{sen} q=\operatorname{sen}(a-b)+\operatorname{sen}(a-b) \\ \operatorname{sen} p-\operatorname{sen} q=\operatorname{sen}(a-b)-\operatorname{sen}(a-b) \end{array}\right\} \text{(b)}$$
y

Teniendo en cuenta las fórmulas (6) y (7), las fórmulas (b) pueden escribirse :

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen} p+\operatorname{sen} q=2 \operatorname{sen} a \cos b \\ \operatorname{sen} p-\operatorname{sen} q=2 \cos a \operatorname{sen} b \end{array}\right\} \text{(c)}$$

Pero las igualdades (a) dan :

$$a=\frac{p+q}{2} \quad \text{y} \quad b=\frac{p-q}{2}.$$

Sustituyendo estos valores en (c), tendremos :

$$\operatorname{sen} p+\operatorname{sen} q=2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \qquad (18)$$

$$\operatorname{sen} p-\operatorname{sen} q=2 \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}. \qquad (19)$$

47. Transformación de $\cos p \pm \cos q$.

Por medio de un raciocinio análogo al precedente, encontraremos :

$$p=a+b \quad \text{y} \quad q=a-b. \qquad \text{(d)}$$

Entonces
$$\cos p+\cos q=\cos(a+b)+\cos(a-b),$$
$$\cos p-\cos q=\cos(a+b)-\cos(a-b),$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (8) y (9), podremos escribir :

$$\cos p+\cos q=2 \cos a \cos b, \qquad \text{(e)}$$
$$\cos p-\cos q=-2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$
ó
$$\cos q-\cos p=2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b, \qquad \text{(f)}$$

De las fórmulas (d) resulta :

$$a = \frac{p+q}{2} \quad \text{y} \quad b = \frac{p-q}{2}.$$

Sustituyamos estos valores en las ecuaciones (e) y (f):

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \tag{20}$$

$$\cos q - \cos p = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}. \tag{21}$$

APLICACIONES

$$\operatorname{sen} 46^\circ + \operatorname{sen} 27^\circ = 2 \operatorname{sen} 36^\circ 30' \cos 9^\circ 30'.$$
$$\operatorname{sen} 46^\circ - \operatorname{sen} 27^\circ = 2 \cos 36^\circ 30' \operatorname{sen} 9^\circ 30'.$$
$$\cos 46^\circ + \cos 27^\circ = 2 \cos 36^\circ 30' \cos 9^\circ 30'.$$
$$\cos 27^\circ - \cos 46^\circ = 2 \operatorname{sen} 36^\circ 30' \operatorname{sen} 9^\circ 30'.$$

48. Transformación de $\dfrac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}$.

Las fórmulas (18) y (19) dan :

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}},$$

ó sea
$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2}} \times \frac{\cos \frac{p-q}{2}}{\operatorname{sen} \frac{p-q}{2}},$$

ó en fin
$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(p-q)}. \tag{22}$$

49. Transformación de $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b$.

Tenemos, fórmula (2) :

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \pm \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b},$$

reduzcamos á un mismo denominador los dos términos del segundo miembro :

$$\text{tg}\, a \pm \text{tg}\, b = \frac{\text{sen}\, a \cos b \pm \cos a\, \text{sen}\, b}{\cos a \cos b}.$$

Pero el numerador es la expresión de sen $a \pm$ sen b, fórmulas (6) y (7);

luego $$\text{tg}\, a \pm \text{tg}\, b = \frac{\text{sen}\,(a \pm b)}{\cos a \cos b}. \tag{23}$$

50. Transformación de $1 \pm \text{sen}\, a$; $1 \pm \cos a$; $1 \pm \text{tg}\, a$.

Para transformar estas expresiones, basta sustituir 1 con sen 90°, cos 0° ó tg 45°, y aplicar las fórmulas arriba verificadas.

Así :

1° $$1 + \text{sen}\, a = \text{sen}\, 90^\circ + \text{sen}\, a = 2\,\text{sen}\,\frac{90^\circ + a}{2} \cos \frac{90^\circ - a}{2},$$

$$1 - \text{sen}\, a = \text{sen}\, 90^\circ - \text{sen}\, a = 2 \cos \frac{90^\circ + a}{2}\, \text{sen}\, \frac{90^\circ - a}{2}.$$

2° $$1 + \cos a = \cos 0^\circ + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2},$$

$$1 - \cos a = \cos 0^\circ - \cos a = 2\, \text{sen}^2 \frac{\ }{2}.$$

3° $$1 + \text{tg}\, a = \text{tg}\, 45^\circ \pm \text{tg}\, a = \frac{\text{sen}\,(45^\circ \pm a)}{\cos 45^\circ \cos a},$$

ó, siendo $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$1 \pm \text{tg}\, a = \frac{\text{sen}\,(45^\circ \pm a)\sqrt{2}}{\cos a}.$$

APLICACIONES

51. 1° *Calcúlese* sen 78° *menos* sen 36°.

En la fórmula (19), hagamos $p = 78^\circ$ y $q = 36^\circ$,

$$\text{sen}\, 78^\circ - \text{sen}\, 36^\circ = 2 \cos 57^\circ\, \text{sen}\, 21^\circ.$$

Calculemos por logaritmos :

$$\log 2 = 0{,}30103,$$
$$\log \cos 57^\circ = \bar{1}{,}73611,$$
$$\log \operatorname{sen} 21^\circ = \bar{1}{,}55433,$$
$$\log (\operatorname{sen} 78^\circ - \operatorname{sen} 36^\circ) = \bar{1}{,}59147 \ldots 0{,}39036\ (*).$$

2º *Calcúlese* cos 55º *más* cos 32º.

En la fórmula (20), hagamos $p = 55^\circ$, $q = 32^\circ$,

$$\cos 55^\circ + \cos 32^\circ = 2 \cos 43^\circ 30' \cos 11^\circ 30',$$
$$\log 2 = 0{,}30103,$$
$$\log \cos 43^\circ 30' = \bar{1}{,}86056,$$
$$\log \cos 11^\circ 30' = \bar{1}{,}99119.$$
$$\log (\cos 55^\circ + \cos 32^\circ) = 0{,}15278 \ldots 1{,}4216.$$

3º *Calcúlese* tg 54º *más* tg 22º.

La fórmula (23) da :

$$\operatorname{tg} 54^\circ + \operatorname{tg} 22^\circ = \frac{\operatorname{sen} 76^\circ}{\cos 54^\circ \cos 22^\circ},$$
$$\log \operatorname{sen} 76^\circ = \bar{1}{,}98690,$$
$$(**)\ \operatorname{colog} \cos 54^\circ = 0{,}23078,$$
$$\operatorname{colog} \cos 22^\circ = 0{,}03283.$$
$$\log (\operatorname{tg} 54^\circ + \operatorname{tg} 22^\circ) = 0{,}25051 \ldots 1{,}7804.$$

4º *Calcúlese* 1 + sen 40º.

Ya sabemos que $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$; por lo tanto puede enunciarse el problema del modo siguiente :

Calcúlese sen 90º *más* sen 40º.

La fórmula (18) da, sustituyendo p y q con 90º y 40º :

$$1 + \operatorname{sen} 40^\circ = 2 \operatorname{sen} 65^\circ \cos 25^\circ.$$

(*) Este número es el que corresponde al log $\bar{1}{,}59147$; á continuación, seguiremos escribiendo de la misma manera los resultados obtenidos.

(**) Para el uso de los *cologaritmos*, véase *Álgebra*, Parte IVª, nºˢ 190, 191. Téngase presente que siendo la cotangente lo inverso de la tangente, e logaritmo de una tangente tiene por cologaritmo el logaritmo de la cotangente, y recíprocamente.

Siendo complementarios los ángulos de 65° y 25°, sen 65° = cos 25°; luego

$$1 + \text{sen } 40° = 2 \text{ sen}^2 65°,$$

$$\log 2 = 0{,}30103,$$

$$\log \text{sen } 65° = \bar{1}{,}95728,$$

$$\text{íd.} \quad = \bar{1}{,}95728,$$

$$\log (1 + \text{sen } 40°) = 0{,}21559 \ldots 1{,}643.$$

5° *Búsquese el valor del ángulo* a *que corresponde á la relación* $sec^2 a = 2$.

Siendo la secante lo inverso del coseno (nº 15), tenemos:

$$\frac{1}{\cos^2 a} = 2;$$

de donde $\cos^2 a = \frac{1}{2}$ y $\cos a = \sqrt{\frac{1}{2}}$,

$$\log 0{,}5 = \bar{1}{,}69897,$$

$$\log \cos a = \frac{\log 0{,}5}{2} \ldots \bar{1}{,}84948 \ldots 45°.$$

6° *Búsquese un ángulo tal, que la suma de su seno y de su coseno sea* 1,15.

Tenemos : $\text{sen } a + \cos a = 1{,}15.$

Elevemos al cuadrado :

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a + 2 \text{ sen } a \cos a = 1{,}3225.$$

Ahora bien $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

y $2 \text{sen } a \cos a = \text{sen } 2a$ (nº 29, 1º),

luego $1 + \text{sen } 2a = 1{,}3225,$

$$\text{sen } 2a = 0{,}3225.$$

$$\log \text{sen } 2a = \log 0{,}3225 = \bar{1}{,}50853 \ldots 18° 48' 54'';$$

de donde $a = 9° 24' 27''.$

7° *Búsquese los valores de* x *que cumplan la condición de la ecuación* $\cos 2x + 3 \text{sen} x - 2 = 0.$

Tenemos (fórmula 13):

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,$$

pero $$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x;$$

la ecuación dada se convierte en

$$1 - 2\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x - 2 = 0,$$

ó sea $$2\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0.$$

Esta ecuación trigonométrica de segundo grado se resuelve como una ecuación ordinaria, siendo la incógnita $\operatorname{sen} x$.

Luego $$\operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4};$$

las dos raíces son:

$$\operatorname{sen} x' = 1; \quad \text{de donde} \quad x' = 90^\circ,$$

y $$\operatorname{sen} x'' = \frac{1}{2}; \quad \text{de donde} \quad x'' = 30^\circ.$$

Los ángulos de 90° y 30° cumplen la condición de la ecuación, como puede comprobarse:

1° Para $$x = 90^\circ, \quad 2x = 180^\circ,$$

$$\cos 180^\circ = -1, \quad 3\operatorname{sen} 90^\circ = 3,$$

y resulta la identidad

$$-1 + 3 - 2 = 0.$$

2° Para $$x = 30^\circ, \quad 2x = 60^\circ;$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad 3\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{3}{2},$$

y tenemos la identidad

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = 0.$$

CAPÍTULO IV

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

§ I. — Relación entre los elementos de un triángulo.

52. Teorema. — *La proyección de una recta sobre ótra es igual al producto de la primera por el coseno del ángulo que forma con la segunda.*

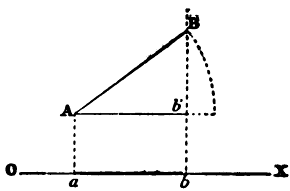

Fig. 11.

Sea AB la recta que se ha de proyectar sobre OX, y A el ángulo que forma con OX.

Tracemos Ab' paralela á OX; esta paralela Ab' es igual á la proyección ab de la recta.

Tenemos por definición (nº 4):

$$\cos A = \frac{Ab'}{AB};$$

de donde $$Ab' = AB \cos A.$$

53. Teorema. — *En todo triángulo rectángulo, cada cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto á este cateto, ó por el coseno del ángulo adyacente al mismo.*

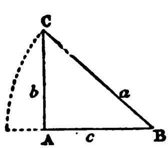

Fig 12.

Sea el triángulo ABC.

Por definición (nº 3), tenemos:

$$\operatorname{sen} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a};$$

de donde $$b = a \operatorname{sen} B.$$

Pero el ángulo C es el complemento del ángulo B; luego (nº 4)

$$\text{sen B} = \cos \text{C},$$

y tenemos también : $b = a \cos \text{C}$.

Del mismo modo se demostraría que

$$c = a \,\text{sen C} \quad \text{ó} \quad c = a \cos \text{B}.$$

54. Teorema. — *En todo triángulo rectángulo, cada cateto es igual al producto del ótro por la tangente del ángulo opuesto al cateto buscado, ó por la cotangente del ángulo adyacente.*

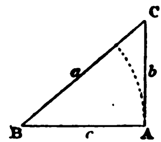
Fig. 13.

Sea el triángulo ABC.

Por definición (nº 3), tenemos :

$$\text{tg B} = \frac{\text{AC}}{\text{AB}} = \frac{b}{c}; \quad \text{de donde} \quad b = c \,\text{tg B}.$$

Siendo el ángulo C complemento del ángulo B,

$$\text{tg B} = \text{cotg C},$$

tenemos también : $b = c \,\text{cotg C}$.

Del propio modo demostraríamos que

$$c = b \,\text{tg C} \quad \text{ó} \quad c = b \,\text{cotg B}.$$

55. Teorema. — *En cualquier triángulo, los senos de los ángulos son entre sí como los lados opuestos á estos ángulos.*

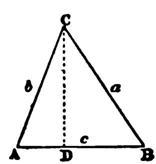
Fig. 14.

Sea ABC un triángulo cualquiera.

Tracemos CD perpendicular á AB; los dos triángulos rectángulos ACD, BCD dan (nº 53) :

$$\text{CD} = b \,\text{sen A}, \qquad (1)$$

$$\text{CD} = a \,\text{sen B}; \qquad (2)$$

de donde $b \,\text{sen A} = a \,\text{sen B}$.

Dividamos ambos miembros por *ab;* simplificando, tendremos :

$$\frac{\text{sen A}}{a} = \frac{\text{sen B}}{b}.$$

Siendo exacta la relación para dos ángulos cualesquiera y sus lados opuestos, lo será también para los tres ángulos; por lo tanto

$$\frac{\text{sen A}}{a} = \frac{\text{sen B}}{b} = \frac{\text{sen C}}{c}.$$

56. Teorema. — *El área de un triángulo cualquiera es igual al semiproducto de dos lados por el seno del ángulo comprendido.*

Llamando S esta superficie, tendremos (fig. 14):

$$S = \frac{c \times \text{CD}}{2}; \quad \text{pero} \quad \text{CD} = b \text{ sen A},$$

luego

$$S = \frac{cb \text{ sen A}}{2}.$$

Nota. — Cuando el ángulo A es recto, sen A $= 1$; entonces la fórmula anterior se convierte en la siguiente:

$$S = \frac{cb}{2}.$$

57. Teorema. — *En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido.*

Tracemos CD perpendicular á AB.

1º Si el ángulo A es agudo (fig. 15), tenemos, según un teorema de geometría:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times \text{AD};$$

pero

$$\text{AD} = b \cos \text{A} \ (\text{nº } 52),$$

luego

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \text{A}.$$

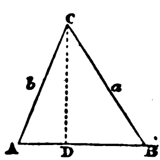

Fig. 15.

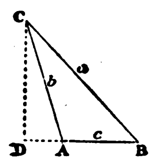

Fig. 16.

2º Si el ángulo A es obtuso (fig. 16), tenemos también:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times \text{AD} \quad \text{y} \quad \text{AD} = b \cos \text{CAD}.$$

Pero CAD es el suplemento del ángulo CAB ó A; luego

$$\cos \mathrm{CAD} = -\cos \mathrm{A} \ (\text{n}^\circ\ 18) \quad \text{y} \quad \mathrm{AD} = -b \cos \mathrm{A},$$

luego $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \mathrm{A}$$

Nota. — Cuando el ángulo A es recto, $\cos \mathrm{A} = 0$, y la fórmula se convierte en la siguiente :

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

§ II. — Resolución de los triángulos rectángulos.

58. En los triángulos rectángulos se conoce siempre el ángulo recto; bastan, pues, dos de los cinco elementos restantes, para calcular los ótros tres. Cuatro casos pueden ocurrir, según se dé :

1º La hipotenusa y un ángulo agudo;

2º La hipotenusa y un cateto;

3º Un cateto y un ángulo agudo;

4º Los dos catetos.

Se suelen designar por A, B, C, los ángulos de un triángulo rectángulo, y por a, b, c, los lados respectivamente opuestos, designando A el ángulo recto y a la hipotenusa.

59. 1er Caso. — *Resolver un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa* a *y un ángulo agudo* B.

Siendo el ángulo C el complemento del ángulo B, tenemos :

$$\mathrm{C} = 90^\circ - \mathrm{B}.$$

Valiéndonos del teorema (nº 53), encontraremos los catetos. En efecto,

$$b = a \operatorname{sen} \mathrm{B}, \quad \text{y} \quad c = a \cos \mathrm{B}.$$

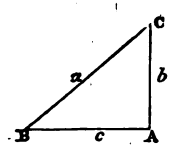

Fig. 17.

60. 2º Caso. — *Resolver un triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa* a *y el cateto* b.

Por definición (nº 3), tenemos :

$$\operatorname{sen} \mathrm{B} = \frac{b}{a} = \cos \mathrm{C},$$

tenemos también : $c^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;

de donde $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$.

61. 3er Caso. — *Resolver un triángulo rectángulo, conociendo el cateto* b *y el ángulo* B *ó el ángulo* C.

Sea B el ángulo dado; el ángulo C, su complemento, será : $C = 90^\circ - B$.

Tenemos $\operatorname{sen} B = \dfrac{b}{a}$; de donde $a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$.

Del teorema (nº 54) se deduce que

$$c = b \operatorname{cotg} B.$$

62. 4º Caso. — *Resolver un triángulo rectángulo, conociendo los catetos* b *y* c *y el ángulo recto.*

La hipotenusa $a = \sqrt{b^2 + c^2}$,

y la fórmula (nº 54) da :

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C = \frac{b}{c}.$$

63. Aplicaciones. — Por medio de datos numéricos, vamos á resolver cuatro triángulos rectángulos relativos á los cuatro casos que acabamos de estudiar.

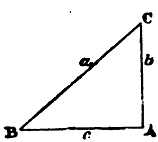

Fig. 18.

1er Caso. Datos $\begin{cases} A = 90^\circ, \\ a = 645^m, \\ B = 40^\circ 16', \end{cases}$

$C = 90^\circ - B = 90^\circ - 40^\circ 16' = 49^\circ 44'$.

Cálculo de b.

$b = a \operatorname{sen} B$,

$\log a = 2{,}80956$,

$\log \operatorname{sen} B = \bar{1}{,}81047$,

$\log b = 2{,}62003$,

$b = 416^m{,}9$.

Cálculo de c.

$c = a \cos B$,

$\log a = 2{,}809\,56$,

$\log \cos B = \bar{1}{,}88255$,

$\log c = 2{,}69211$,

$c = 492^m{,}17$.

2º Caso. Datos $\begin{cases} A = 90^\circ, \\ a = 437^m{,}5, \\ b = 186^m{,}5. \end{cases}$

Cálculo de B y de C.

$$\text{sen B} = \cos C = \frac{b}{a},$$

$$\log b = 2{,}27068,$$
$$\log a = 2{,}64098,$$

$$\log \text{sen B} = \bar{1}{,}62970,$$

$$B = 25^\circ\, 13'\, 56'',$$
$$C = 64^\circ\, 46'\, 4''.$$

Cálculo de c.

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)},$$
$$c = \sqrt{624 \times 251},$$
$$\log 624 = 2{,}79518,$$
$$\log 251 = 2{,}39967,$$

$$5{,}19485,$$

$$\text{la mitad} = 2{,}59743.$$
$$c = 395^{m},75.$$

3er Caso. Datos $\begin{cases} A = 90^\circ, \\ B = 65^\circ\, 44'\, 6'', \\ b = 464^{m},5. \end{cases}$

$$C = 90^\circ - 65^\circ\, 44'\, 6'' = 24^\circ\, 15'\, 54''.$$

Cálculo de a.

$$a = \frac{b}{\text{sen B}},$$

$$\log b = 2{,}66699,$$
$$\log \text{sen B} = \bar{1}{,}95983,$$

$$\log a = 2{,}70716,$$
$$a = 509^{m},5.$$

Cálculo de c.

$$c = b \operatorname{cotg} B,$$

$$\log b = 2{,}66699,$$
$$\log \operatorname{cotg} B = \bar{1}{,}65397,$$

$$\log c = 2{,}32096,$$
$$c = 209^{m},4.$$

4o Caso. Datos $\begin{cases} A = 90^\circ, \\ b = 189^{m},3, \\ c = 169^{m},5. \end{cases}$

Cálculo de B y de C.

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C = \frac{b}{c},$$

$$\log b = 2{,}27715,$$
$$\log c = 2{,}22917,$$

$$\log \operatorname{tg} B = 0{,}04798,$$
$$B = 48^\circ\, 9'\, 31'',$$
$$C = 41^\circ\, 50'\, 29''.$$

Cálculo de a.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2},$$

ó más sencillamente,

$$\text{sen B} = \frac{b}{a};$$

de donde $a = \dfrac{b}{\text{sen B}},$

$$\log b = 2{,}27715,$$
$$\log \text{sen B} = \bar{1}{,}87215,$$

$$\log a = 2{,}40500,$$
$$a = 254^{m},1.$$

§ III. — Resolución de triángulos cualesquiera.

Pueden ocurrir cuatro casos, según se conozca :

1° Un lado y dos ángulos ;

2° Dos lados y el ángulo opuesto á úno de ellos ;

3° Dos lados y el ángulo comprendido ;

4° Los tres lados.

64. 1er Caso. — *Resolver un triángulo, conociendo un lado* c *y los dos ángulos A y B.*

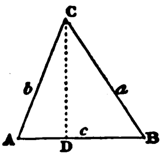

Fig. 19.

Tenemos $C = 180° - (A + B)$.

Además (n° 55),

$$\frac{c}{\text{sen C}} = \frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}}.$$

Comparemos la primera razón con cada úna de las ótras dos :

$$a = \frac{c \text{ sen A}}{\text{sen B}}, \quad b = \frac{c \text{ sen B}}{\text{sen C}}.$$

La superficie resultará de la fórmula (n° 56):

$$S = \frac{bc \text{ sen A}}{2}.$$

Sustituyamos el valor de b :

$$S = \frac{c^2 \text{sen A sen B}}{2 \text{sen C}}.$$

Nota. — Cuando $A = B$, la fórmula se convierte en la siguiente :

$$S = \frac{c^2 \text{ sen}^2 \text{ A}}{2 \text{ sen C}}. \qquad (a)$$

65. 2° Caso. — *Resolver un triángulo, conociendo dos lados* a *y* b, *y el ángulo* A *opuesto á úno de ellos.*

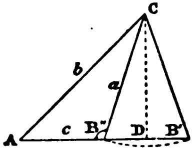

Fig. 20.

Para encontrar el ángulo B, se escribe :

$$\frac{\text{sen B}}{b} = \frac{\text{sen A}}{a},$$

de donde $\text{sen B} = \dfrac{b \text{ sen A}}{a}$.

El valor del tercer ángulo será :

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

Por fin, el valor del lado c resultará de la fórmula

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A},$$

pues

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

66. Discusión. — Hemos hallado :

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}. \qquad (a)$$

Para que sea posible el problema, hemos de tener

$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{b \operatorname{sen} A}{a} < 1,$$

pues el seno no puede ser mayor que 1 (nº 9).

Si tenemos $\frac{b \operatorname{sen} A}{a} = 1$, el ángulo $B = 90^\circ$ y el triángulo resulta rectángulo. Reemplacemos sen B con 1, y la fórmula (a) se convertirá en

$$1 = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}; \quad \text{de donde} \quad a = b \operatorname{sen} A,$$

entonces a es la perpendicular CD (nº 65).

Si tenemos $\frac{b \operatorname{sen} A}{a} < 1$, hay dos valores para el ángulo, el úno B' menor que 90°, el ótro B'' mayor que 90°; el valor del ángulo C será :

$$180^\circ - (A + B') \quad \text{ó} \quad 180 - (A + B'').$$

Veamos ahora si siempre se pueden admitir estas dos soluciones.

1º *El ángulo dado* A *es recto ú obtuso.* Entonces no conviene el ángulo B'' por ser él mismo obtuso, ya que la suma $+ B''$ es mayor que 180°.

Para que sea conveniente el ángulo agudo B', debe resultar :

$$A + B' < 180^\circ; \quad \text{de donde} \quad B' < 180^\circ - A,$$

pero $\operatorname{sen}(180^\circ - A) = \operatorname{sen} A$ (nº 19), y la desigualdad precedente se convierte en

$$\operatorname{sen} B' < \operatorname{sen} A.$$

Sustituyamos el valor de sen B', $\frac{b \operatorname{sen} A}{a}$, y tendremos

$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} < \operatorname{sen} A; \quad \text{de donde} \quad b < a.$$

Por lo tanto, cuando el ángulo dado A **es** ***recto*** ú ***obtuso***, no hay más que una solución, un solo triángulo, y a debe ser mayor que b.

2º *El ángulo dado* A *es agudo*. En este caso el ángulo agudo B' conviene siempre, pues se tiene evidentemente :

$$A + B' < 180^\circ.$$

El ángulo obtuso B'' convendrá sólo cuando se tenga :

$$A + B'' < 180^\circ; \quad \text{de donde} \quad A < 180^\circ - B'',$$

pero $\operatorname{sen}(180^\circ - B'') = \operatorname{sen} B''$ (nº 19), y la desigualdad precedente se convierte en

$$\operatorname{sen} A < \operatorname{sen} B''.$$

Sustituyamos el valor de sen B'', $\frac{b \operatorname{sen} A}{a}$ y tendremos :

$$\operatorname{sen} A < \frac{b \operatorname{sen} A}{a}; \quad \text{de donde} \quad a < b.$$

Por lo tanto, cuando es *agudo* el ángulo A, el problema tiene dos soluciones ó sólo una, según el lado opuesto á A sea menor ó mayor que el lado adyacente.

Claro está que cuando $a = b$, las dos soluciones se reducen á una sola, y el triángulo es isósceles.

67. 3er Caso. — *Resolver un triángulo, conociendo los lados* a *y* b, *y el ángulo comprendido* C.

La suma $A + B$ de los ángulos que han de buscarse es igual á $180^\circ - C$; la semisuma de estos ángulos será $\frac{1}{2}(A + B)$. Busquemos la semidiferencia.

Sumando y restando los numeradores y los denominadores de la relación $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$, tendremos sucesivamente:

$$\frac{a+b}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A},$$

$$\frac{a-b}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A};$$

de donde $$\frac{a+b}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B} = \frac{a-b}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B},$$

é invirtiendo los medios,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}.$$

Pero en la fórmula (22) tenemos, haciendo $p = A$, y $q = B$:

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)};$$

luego $$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)},$$

de donde $$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B).$$

Conociendo $\frac{1}{2}(A+B)$ y $\frac{1}{2}(A-B)$, se sacará fácilmente el valor de A y de B. Luego se calculará c por medio de la fórmula

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A}; \quad \text{de donde} \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

68. 4º Caso. — *Resolver un triángulo, conociendo los tres lados* a, b, c.

Tenemos (nº 57): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

de donde $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \qquad (a)$$

Del propio modo encontraríamos :

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

No se pueden calcular por logaritmos estas fórmulas. Para que sea posible este cálculo, se procede còmo lo vamos á indicar á continuación.

Añadamos 1 á ambos miembros de la ecuación (a):

$$1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc};$$

reduzcamos á un mismo denominador los dos términos del segundo miembro :

$$1 + \cos A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$1 + \cos A = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc},$$

ó

$$1 + \cos A = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}.$$

Restemos de 1 ámbos miembros de la ecuación (a) :

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc},$$

$$1 - \cos A = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{2bc}.$$

Designemos por $2p$ el perímetro del triángulo, y escribamos :

$$a + b + c = 2p,$$

de donde $a + b - c = 2p - 2c$, ó sea $2(p - c)$,

$a + c - b = 2p - 2b$, ó sea $2(p - b)$,

$b + c - a = 2p - 2a$, ó sea $2(p - a)$.

Luego $$1 + \cos A = \frac{2p \times 2(p-a)}{2bc},$$

$$1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc}, \qquad (1)$$

y $$1 - \cos A = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}. \qquad (2)$$

Dividamos ordenadamente la ecuación (2) por la ecuación (1), y simplifiquemos :

$$\frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}.$$

Extraigamos la raíz cuadrada, teniendo presente que la raíz cuadrada del primer miembro es $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ (fórmula 17):

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

del propio modo hallaríamos :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

69. Nota. — La superficie del triángulo tiene por expresión :

$$S = \frac{bc \operatorname{sen} A}{2}.$$

Pero (según la fórmula 12 *bis*) $\operatorname{sen} A = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$,

luego $$S = bc \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A. \qquad (3)$$

Tomemos de nuevo las ecuaciones (1) y (2):

$$1 + \cos A = \frac{2p(p-a)}{bc}, \qquad (4)$$

$$1 - \cos A = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}. \qquad (5)$$

Pero (nº 32, 2º) $$\frac{1+\cos A}{2} = \cos^2 \frac{1}{2} A,$$

de donde $$1 + \cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2} A.$$

Asimismo (nº 32, 1º) $$\frac{1-\cos A}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A,$$

de donde $$1 - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A.$$

En vez de $1+\cos A$ y $1-\cos A$, pongamos sus valores, ecuaciones (4) y (5) :

$$\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{p(p-a)}{bc};$$

de donde
$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A=\frac{(p-b)(p-c)}{bc};$$

de donde
$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

Sustituyendo en la fórmula (3) el valor de $\operatorname{sen}\frac{1}{2}A$ y $\cos\frac{1}{2}A$, tendremos :

$$S=bc\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}},$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

70. Aplicaciones. — Con datos numéricos vamos á resolver cuatro triángulos que se refieren á los cuatro casos que acabamos de estudiar.

1er Caso. Datos $\begin{cases} a=685^m,4, \\ B=64^\circ\,16', \\ C=48^\circ\,44'. \end{cases}$

$$A=180^\circ-(64^\circ\,16'+48^\circ\,44')=67^\circ.$$

Cálculo de b.	Cálculo de c.
$b=\dfrac{a\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A}$,	$c=\dfrac{a\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A}$,
$\log a=2,83594$,	$\log a=2,83594$,
$\log\operatorname{sen}B=\bar{1},95464$,	$\log\operatorname{sen}C=\bar{1},87601$,
$\operatorname{colog}\operatorname{sen}A=0,03597$,	$\operatorname{colog}\operatorname{sen}A=0,03597$,
$\log b=2,82655$,	$\log c=2,74792$,
$b=670^m,7$.	$c=559^m,6$.

Cálculo de la superficie $S = \dfrac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A}$.

$$
\begin{aligned}
2 \log a &= 5{,}67188,\\
\log \operatorname{sen} B &= \bar{1}{,}95464,\\
\log \operatorname{sen} C &= \bar{1}{,}87601,\\
\operatorname{colog} \operatorname{sen} A &= 0{,}03597,\\
\operatorname{colog} 2 &= \bar{1}{,}69897,\\
\hline
\log S &= 5{,}23747,
\end{aligned}
$$

$S = 172772$ metros cuadrados.

2º Caso. Datos $\begin{cases} a = 82^{m}{,}6, \\ b = 115, \\ A = 28^{\circ}\,4'\,15''. \end{cases}$

Siendo agudo el ángulo A, y a menor que b, tendremos dos soluciones (nº 66,2º).

Cálculo de B $\qquad \operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{a}$,

$$
\begin{aligned}
\log b &= 2{,}06070,\\
\log \operatorname{sen} A &= \bar{1}{,}67262,\\
\operatorname{colog} a &= \bar{2}{,}08302,\\
\hline
&\ \ \bar{1}{,}81634.
\end{aligned}
$$

Los ángulos correspondientes al log $\bar{1}{,}81634$ son:

$$
\begin{array}{llcl}
 & B' = 40^{\circ}\,55'\,51'' & & B'' = 139^{\circ}\,4'\,9'', \\
\text{de donde} & C' = 110^{\circ}\,59'\,54'' & \text{ó} & C'' = 12^{\circ}\,51'\,36''.
\end{array}
$$

Cálculo de c $\qquad c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$.

$$
\begin{array}{rll}
 & \text{1ra Solución.} & \text{2a Solución.} \\
\log a = & 1{,}91698 & 1{,}91698, \\
\log \operatorname{sen} C = & \bar{1}{,}97016 & \bar{1}{,}34747, \\
\operatorname{colog} \operatorname{sen} A = & 0{,}32738 & 0{,}32738, \\
\hline
\log c = & 2{,}21452 & 1{,}59183. \\
c = & 163^{m}{,}88 \quad \text{ó} & 39^{m}{,}07.
\end{array}
$$

Cálculo de la superficie $S = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}$.

$$
\begin{array}{rlcr}
\log a = & 1,91698 & & 1,91698, \\
\log b = & 2,06070 & & 2,06070, \\
\log \operatorname{sen} C = & \bar{1},97016 & \text{ó} & \bar{1},34747, \\
\operatorname{colog} 2 = & \bar{1},69897 & & \bar{1},69897, \\
\hline
\log S = & 3,64681 & & 3,02412, \\
S = & 4434^{m^2},1 & \text{ó} & 1057^{m^2},2.
\end{array}
$$

3er Caso. Datos $\begin{cases} a = 110^m,8, \\ b = 95,7, \\ C = 48^\circ\, 16'\, 20''. \end{cases}$

Cálculos preliminares. $\begin{cases} a + b = 206,5, \\ a - b = 15,1, \\ \frac{1}{2}(A + B) = 65^\circ\, 51'\, 50''. \end{cases}$

Cálculo de $\frac{1}{2}(A - B)$.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B).$$

$$\log (a - b) = 1,17898,$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A + B) = 0,34864,$$

$$\operatorname{colog} (a + b) = \bar{3},68508,$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A - B) = \bar{1},21270 \ldots 9^\circ\, 16'7'';$$

entonces $A = 65^\circ\, 51'\, 50'' + 9^\circ\, 16'\, 7'' = 75^\circ\, 7'\, 57''$,

$B = 65^\circ\, 51'\, 50'' - 9^\circ\, 16'\, 7'' = 56^\circ\, 35'\, 43''$.

Cálculo de *c*.

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

$$\log a = 2{,}04454,$$
$$\log \operatorname{sen} C = \bar{1}{,}81931,$$
$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} A = 0{,}01479,$$
$$\log c = 1{,}87864,$$
$$c = 75^{m}{,}62.$$

Cálculo de la superficie.

$$S = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2},$$

$$\log a = 2{,}04454,$$
$$\log b = 1{,}98091,$$
$$\log \operatorname{sen} C = \bar{1}{,}81931,$$
$$\operatorname{colog} 2 = \bar{1}{,}69897,$$
$$\log S = 3{,}54373,$$
$$S = 3\,497^{m^2}{,}2.$$

4º Caso. Datos

$$\left\{\begin{aligned} a &= 164^{m}{,}5,\\ b &= 136^{m}{,}8,\\ c &= 115^{m}{,}3,\end{aligned}\right.$$
$$416^{m}{,}6.$$

Cálculos preliminares.

$$\left\{\begin{aligned} p &= 208{,}3,\\ p - a &= 43{,}8,\\ p - b &= 71{,}5,\\ p - c &= 93.\end{aligned}\right.$$

Cálculo de A.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\log (p-b) = 1{,}85431,$$
$$\log (p-c) = 1{,}96848,$$
$$\operatorname{colog} p = \bar{3}{,}68131,$$
$$\operatorname{colog} (p-a) = \bar{2}{,}35853,$$
$$\bar{1}{,}86263,$$
$$\text{la mitad} = \bar{1}{,}93132,$$
$$\frac{1}{2} A = 40^{\circ}\, 29'\, 17'',$$
$$A = 80^{\circ}\, 58'\, 34''.$$

Cálculo de B.

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\log (p-a) = 1{,}64147,$$
$$\log (p-c) = 1{,}96848,$$
$$\operatorname{colog} p = 3{,}\ 131,$$
$$\operatorname{colog} (p-b) = \bar{2}{,}14569,$$
$$\bar{1}{,}43695,$$
$$\text{la mitad} = \bar{1}{,}71848,$$
$$\frac{1}{2} B = 27^{\circ}\, 36'\, 29'',$$
$$B = 55^{\circ}\, 12'\, 58''.$$

Cálculo de C.

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

$$\log(p-a)=1{,}64147,$$
$$\log(p-b)=1{,}85431,$$
$$\operatorname{colog} p=\bar{3}{,}68131,$$
$$\operatorname{colog}(p-c)=\bar{2}{,}03152,$$
$$\bar{1}{,}20861,$$
$$\text{la mitad}=\bar{1}{,}60431,$$
$$\frac{1}{2}C=21^\circ 54' 14'',$$
$$C=43^\circ 48' 28''.$$

Cálculo de la superficie.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$\log p=2{,}31869,$$
$$\log(p-a)=1{,}64147,$$
$$\log(p-b)=1{,}85431,$$
$$\log(p-c)=1{,}96848,$$
$$7{,}78295,$$
$$\text{la mitad}=3{,}89148,$$
$$S=7789^{m^2}.$$

PROBLEMAS

71. 1º *¿ Cuál es el radio de un círculo en el que una cuerda de* $18^m{,}40$ *subtiende un arco de* $48^\circ 16$?

El ángulo central $AOC=24^\circ 8'$; el triángulo rectángulo AOD da:

$$\operatorname{sen} AOD=\frac{AD}{AO},$$

ó sea

$$\operatorname{sen} 24^\circ 8'=\frac{9{,}2}{R},$$

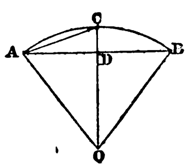

Fig. 21.

de donde

$$R=\frac{9{,}20}{\operatorname{sen} 24^\circ 8'}.$$

$$\log 9{,}20=0{,}96379,$$
$$\operatorname{colog}\operatorname{sen} 24^\circ 8'=0{,}38842,$$
$$\log R=1{,}35221\ldots 22^m{,}50.$$
$$R=22^m{,}50.$$

2º *Conociendo una cuerda* $AB=46$ *metros, y su sagita* $CD=7$ m., *calcúlese el arco subtendido por esta cuerda.*

El ángulo COB (fig 21) es el duplo del ángulo CAB, pues el primero tiene por medida el arco CB, y el segundo la mitad del mismo. Luego el ángulo AOB es cuádruplo del ángulo CAB.

En el triángulo rectángulo CAD, tenemos :

$$\operatorname{tg} \mathrm{CAD} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}} = \frac{7}{23}.$$

$$\log 7 = 0{,}84510,$$

$$\operatorname{colog} 23 = \bar{2}{,}63827,$$

$$\log \operatorname{tg} \mathrm{CAD} = \bar{1}{,}48337 \ldots\ 16^\circ\, 55'\, 36'';$$

luego $$\mathrm{CAD} = 16^\circ 55' 36''$$

y $$\mathrm{AOB} = 67^\circ\, 42'\, 24''.$$

3º *Resolver un triángulo isósceles, conociendo la base de 148 metros, y el ángulo del vértice de 24°8'.*

Ángulo $$\mathrm{C} = \mathrm{D} = \frac{1}{2}(180^\circ - 24^\circ\, 8') = 77^\circ\, 56'.$$

Tenemos: $$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \mathrm{A} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}},$$

ó sea $$\operatorname{sen} 12^\circ 4' = \frac{74}{\mathrm{AC}},$$

de donde $$\mathrm{AC} = \frac{74}{\operatorname{sen} 12^\circ\, 4'}.$$

La superficie será $$\mathrm{S} = \frac{\overline{\mathrm{C}}^2 \operatorname{sen} 24^\circ\, 8'}{2}.$$

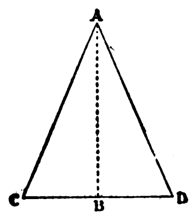

Fig. 22.

Cálculo de AC.

$$\log 74 = 1{,}86923,$$

$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} 12^\circ\, 4' = 0{,}67975,$$

$$\log \mathrm{AC} = 2{,}54898,$$

$$\mathrm{AC} = 335^{\mathrm{m}}{,}98.$$

Cálculo de la superficie.

$$2 \log \mathrm{AC} = 5{,}09796,$$

$$\log \operatorname{sen} 24^\circ\, 8' = \bar{1}{,}61158,$$

$$\operatorname{colog} 2 = \bar{1}{,}69897,$$

$$\log \mathrm{S} = 4{,}40851$$

$$\mathrm{S} = 25616^{\mathrm{m}^2}.$$

4º *Calcúlese el radio de un círculo, sabiendo que dos tangentes que parten desde un punto situado á 50 metros de la circunferencia comprenden un ángulo de 16º*

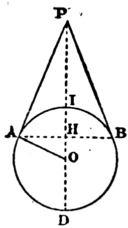

Fig. 23.

En el triángulo PAO, tenemos :

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2} = P\frac{OA}{OP},$$

ó

$$\operatorname{sen} 8^o = \frac{R}{R+50},$$

$$R \operatorname{sen} 8^o + 50 \operatorname{sen} 8^o = R,$$

$$R - R \operatorname{sen} 8^o = 50 \operatorname{sen} 8^o,$$

de donde $$R = \frac{50 \operatorname{sen} 8^o}{1 - \operatorname{sen} 8^o}.$$

En la fórmula (19), haciendo $1 = 90^o$, y poniendo en vez de p y de q sus valores, 90^o y 8^o, tendremos :

$$1 - \operatorname{sen} 8^o = 2 \cos 49^o \operatorname{sen} 41^o;$$

pero $$49^o + 41^o = 90^o,$$

por lo tanto $$\cos 49^o = \operatorname{sen} 41^o,$$

y resultará : $$1 - \operatorname{sen} 8^o = 2 \cos^2 49^o,$$

de donde $$R = \frac{25 \operatorname{sen} 8^o}{\cos^2 49^o} = 8^m{,}084.$$

5º *Dos caminos convergen, formando un ángulo* A *de* $108^o 30'$; *se los quiere enlazar por medio de un arco de círculo de* 250 *m. de radio. ¿ Á qué distancia del punto* A *ha de principiar el arco de enlace?*

$$\text{Ángulo } BAO = \frac{CAB}{2} = \frac{108^o 30'}{2} = 54^o 15'.$$

$$\text{Ángulo } AOB = 90^o - 54^o 15' = 35^o 45'.$$

El triángulo rectángulo AOB da :

$$\frac{AB}{OB} = \operatorname{tg} AOB;$$

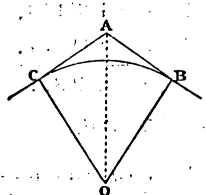

Fig. 24.

de donde $$AB = OB \operatorname{tg} AOB$$

ó $$AB = 250 \operatorname{tg} 35^o 45'.$$

$$\log 250 = 2{,}39794,$$

$$\log \operatorname{tg} 35^o 45' = \bar{1}{,}85727,$$

$$\log AB = 2{,}25521.$$

$$AB = 179^m{,}97.$$

6° *Búsquese el área de un polígono regular de 18 lados, conociendo la longitud del lado,* $11^m,65$.

El ángulo central del polígono tiene $\frac{360°}{18}$ ó sea 20°. Uniendo el centro con dos vértices consecutivos, resultará un triángulo isósceles cuyos ángulos de la base tienen $\frac{180° - 20°}{2}$, ó sea 80°.

El área del triángulo será (nº 64, *a*) :

$$A = \frac{11,65^2 \times \text{sen}^2 80°}{2 \text{ sen } 20°},$$

y la del polígono : $\frac{9 \times 11,65^2 \times \text{sen}^2 80°}{\text{sen } 20°} = 2751\, m^2.$

7° *Resolver un triángulo rectángulo, conociendo un cateto, de 45 m., y la diferencia, de 10° 48′, entre los dos ángulos agudos.*

La suma de los ángulos agudos es de 90°; siendo su diferencia de 10°48′, tendremos :

$$B = 45 + 5° 24' = 50° 24',$$

$$C = 45 - 5° 24' = 39° 36'.$$

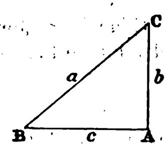

Fig. 25

Si $AB = 45^m$ es el cateto menor, tendremos :

$$\text{tg } 39° 36' = \frac{AB}{AC} = \frac{45}{AC}; \quad \text{de donde} \quad AC = \frac{45}{\text{tg } 39° 36'}.$$

Si $AC = 45$ es el cateto mayor, resultará :

$$\text{tg } 50° 24' = \frac{AC}{AB} = \frac{45}{AB},$$

de donde $$AB = \frac{45}{\text{tg } 50° 24'} = \frac{45}{\text{cotg } 39° 36'}.$$

Cálculo de AC.	Cálculo de AB.
$\log 45 = 1,65321,$	$\log 45 = 1,65321,$
$- \log \text{tg } 39° 36' = \bar{1},91765,$	$- \log \text{cotg } 39° 36' = 0,08235,$
$\log AC = 1,73556,$	$\log AB = 1,57086,$
$AC = 54^m,39.$	$AB = 37^m,23.$

Por lo tanto, $BC = \sqrt{45^2 + 54,39^2} = 70^m,59$,

ó $BC = \sqrt{45^2 + 37,23^2} = 58^m,40$.

8º *Resolver un triángulo rectángulo, conociendo los dos segmentos* m *y* n *en que la bisectriz del ángulo recto divide á la hipotenusa.*

Sean $MA = m$ y $MB = n$ los segmentos dados.

Tenemos ; $\operatorname{tg} A = \frac{CB}{CA}$;

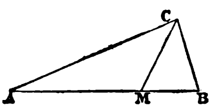

Fig. 26.

á causa de la bisectriz, tenemos también :

$$\frac{CB}{CA} = \frac{n}{m} ;$$

luego $\operatorname{tg} A = \frac{n}{m} = \operatorname{cotg} B$.

Conociendo los ángulos y la hipotenusa, fácil es encontrar el valor de los catetos.

$$\frac{BC}{AB} = \operatorname{sen} A ;$$

de donde $BC = AB \operatorname{sen} A$ ó $BC = (m + n) \operatorname{sen} A$,

$$\frac{AC}{AB} = \operatorname{sen} B,$$

de donde $AC = AB \operatorname{sen} B$ ó $AC = (m + n) \operatorname{sen} B$.

9º *Resuélvase un triángulo isósceles, conociendo el perímetro* 2p *y el ángulo de la base* C.

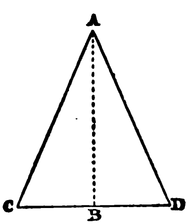

Fig. 27.

Tenemos : $AC = p - CB$:

Siendo CB la proyección de AC, $CB = AC \cos C$; de donde

$$AC = p - AC \cos C,$$

$$AC + AC \cos C = p,$$

$$AC(1 + \cos C) = p,$$

$$AC = \frac{p}{1 + \cos C}.$$

Podemos transformar este resultado.

Siendo 1 el coseno de 0°, en la fórmula (20), en vez de p y q', pongamos C y 0°,

$$1 + \cos C = \cos C + \cos 0^\circ = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\cos^2\frac{C}{2},$$

por lo tanto, $$AC = \frac{p}{2\cos^2\frac{C}{2}}.$$

Conociendo AC, fácilmente se encontrará el valor de CD y la superficie :

$$CD = 2(p - AC).$$

10° *Calcular los ángulos de un triángulo rectángulo, sabiendo que la hipotenusa es igual á los* $\frac{5}{7}$ *de la suma de los catetos.*

Tenemos las razones iguales :

$$\frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} = \frac{a}{1};$$

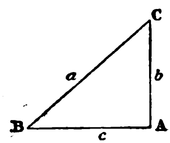

Fig. 28.

sumando los numeradores y los denominadores de las dos primeras razones, resulta :

$$\frac{b+c}{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C} = \frac{a}{1};$$

de donde $$\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = \frac{b+c}{a}.$$

Pero $$a = \frac{5}{7}(b+c),$$

luego $$b + c = \frac{7a}{5} \quad \text{y} \quad \frac{b+c}{a} = \frac{7}{5}.$$

Por lo tanto $$\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = \frac{7}{5}.$$

Transformemos este resultado. La fórmula (18) da, poniendo B y C en vez de p y q :

$$\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 2\operatorname{sen}\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \frac{7}{5},$$

y como $B + C = 90^\circ$; tenemos :

$$2\operatorname{sen} 45^\circ \cos\frac{B-C}{2} = \frac{7}{5},$$

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{7}{10\,\text{sen}\,45^\circ}=\frac{7}{10\,\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}=0{,}7\sqrt{2}.$$

$$\log 0{,}7=\bar{1},18450,$$
$$\log\sqrt{2}=0{,}15051,$$
$$\log\cos\frac{B-C}{2}=\bar{1},99561\ \ldots\ 8^\circ 8'.$$

Conociendo la semisuma 45° de los ángulos y su semidiferencia 8° 8′, tendremos :

$$B=45^\circ+8^\circ\,8'=53^\circ\ \ 8',$$
$$C=45^\circ-8^\circ\,8'=36^\circ\,52'.$$

CAPÍTULO V

APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA Á LA AGRIMENSURA

Problema I. *Calcúlese la superficie de un terreno cuya forma es la de un cuadrilátero, conociendo los cuatro lados y dos ángulos opuestos.*

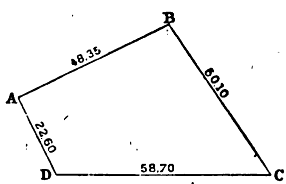

Fig. 29.

Trácese la diagonal BD.

$$\text{Datos}\left\{\begin{array}{l} AB=48^{m},35,\\ AD=22^{m},60,\\ DC=58^{m},70,\\ BC=50^{m},10\\ DAB=84^\circ 45',\\ BCD=57^\circ 12'.\end{array}\right.$$

Tenemos : Sup. $BAD=48{,}35\times 11{,}30\,\text{sen}\,84^\circ 45'=544^{m^2};$

Sup. $BCD=29{,}35\times 50{,}10\,\text{sen}\,57^\circ 12'=1\,236^{m^2};$

Sup. $ABCD=1\,780^{m^2}$

Nota. Este procedimiento facilita el hallar la superficie de un terreno en que no se puede entrar.

PROBLEMA II. *Calcúlese la superficie de un terreno cuya forma es la del cuadrilátero* ABCD, *conociendo la diagonal* AC *y los cuatro ángulos adyacentes á esta diagonal.*

Datos
$$\left\{\begin{array}{rl} & AC = 148^{m},60, \\ \text{Ángulo} & BAC = 38^{\circ}15', \\ « & BCA = 28^{\circ}40', \\ « & DAC = 34^{\circ}24', \\ « & DCA = 50^{\circ}52'. \end{array}\right.$$

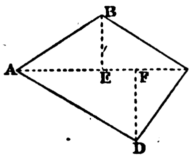

Fig. 30.

Ángulo $ABC = 180^{\circ} - (BAC + BCA) = 113^{\circ}\ 5'$;
su suplemento $= 66^{\circ}55$,
Ángulo $ADC = 180^{\circ} - (DAC + DCA) = 94^{\circ}44'$;
su suplemento $= 85^{\circ}16'$.

Tendremos (nº 47) :

$$\text{Sup.}\quad ACB = \frac{148{,}60^{2} \times \operatorname{sen} 38^{\circ}15' \operatorname{sen} 28^{\circ}40'}{2 \operatorname{sen} 66^{\circ}55'} = 3564^{m^2},50,$$

$$\text{Sup.}\quad ACD = \frac{148{,}60^{2} \times \operatorname{sen} 34^{\circ}24' \operatorname{sen} 50^{\circ}52'}{2 \operatorname{sen} 85^{\circ}16'} = 4855^{m^2},$$

$$\text{Sup.}\quad ABCD = 8419^{m^2},50.$$

PROBLEMA III. ***Determínese la altura de una torre cuyo pie es inaccesible.***

Primero se elige y se mide en el terreno una base horizontal en cuanto sea posible, y cuya longitud sea poco más ó menos igual á la altura de la torre; en seguida, por medio del grafómetro, se determina el ángulo BCE formado por la horizontal que pasa por e centro del aparato y la visual CB. Así conocemos, en el triángulo rectángulo BEC, un cateto CE y un ángulo agudo BCE; por consiguiente podremos calcular la altura BE.

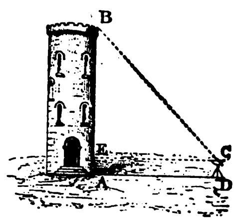

Fig. 31.

Sean $AD = 34^m$ y $BCE = 23^o\,16'$.

Tendremos : $\operatorname{tg} 23^o\,16' = \frac{BE}{CE} = \frac{BE}{34}$,

de donde $BE = 34 \operatorname{tg} 23^o 16'$.

$$\log 34 = 1{,}531\,48,$$
$$\log \operatorname{tg} 23^o\,16' = \bar{1}{,}633\,45,$$
$$\log BE = 1{,}164\,93 \ldots 14^m{,}62.$$

Supongamos que la altura CD del pie del grafómetro sea de $1^m{,}30$, por ejemplo; la altura de la torre será $14{,}62 + 1{,}3$, ó sea $15^m{,}92$.

PROBLEMA IV. *Determínese la altura de un edificio cuyo pie es inaccesible.*

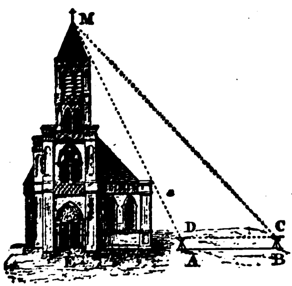

Fig. 32.

Sea de determinar la altura de un campanario.

Se elige y se mide primero en el terreno una base AB que esté en un mismo plano vertical con la altura ; luego se determinan los ángulos MCE, MDE, como en el problema precedente.

Sean $AB = 25^m$,

$MDE = 64^o\,18'$,

$MCE = 48^o\,9'$.

El suplemento MDC del ángulo MDE es de $115^o\,42'$.

El ángulo $M = 180^o - (115^o\,42' + 48^o\,9')$, ó sea $16^o\,9'$.

En el triángulo MDC, tenemos (nº 55) :

$$\frac{\operatorname{sen} M}{CD} = \frac{\operatorname{sen} C}{MD};$$

de donde $MD = \frac{CD \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} M}$.

En el triángulo rectángulo MED, tenemos también (nº 53) :

$$ME = MD \operatorname{sen} MDE;$$

de donde, sustituyendo el valor de MD,

$$ME = \frac{CD \operatorname{sen} C \operatorname{sen} MDE}{\operatorname{sen} M} = \frac{25 \operatorname{sen} 48^\circ 9' \operatorname{sen} 64^\circ 18'}{\operatorname{sen} 16^\circ 9'}.$$

$$\begin{aligned} \log 25 &= 1,397\,94, \\ \log \operatorname{sen} 48^\circ 9' &= \bar{1},872\,09, \\ \log \operatorname{sen} 64^\circ 18' &= \bar{1},954\,76, \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 16^\circ 9' &= 0,555\,72. \\ \hline \log ME &= 1,780\,51 \ \ldots\ 60^m,33. \end{aligned}$$

Añadiendo $1^m,30$, altura del pie del grafómetro, resultará la altura del campanario, $61^m,63$.

PROBLEMA V. *Dos operadores colocados á 1 500 metros úno de ótro en un camino que se supone horizontal, dirigen al mismo tiempo la visual á un globo aerostático en el momento en que pasa por el plano vertical del camino; el primer operador observa que la visual hacia el globo forma con el camino un ángulo de 81°15'; y el segundo, un ángulo de 75°30'. Calcúlese la altura en que se encuentra el globo.*

Sea AB el camino, y C el globo.

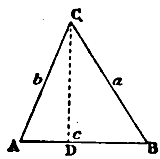

Fig. 33.

Ángulo $C = 180^\circ - 156^\circ 45' = 23^\circ 15'$.

Tenemos sup. $ACB = \frac{AB \times CD}{2}$,

de donde $CD = \frac{2S}{AB}$;

pero (nº 64) $S = \frac{\overline{AB}^2 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$;

de donde $CD = \frac{2\,\overline{AB}^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2\,AB \operatorname{sen} C} = \frac{AB \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$,

ó $CD = \frac{1\,500 \operatorname{sen} 81^\circ 15' \operatorname{sen} 75^\circ 30'}{\operatorname{sen} 23^\circ 15'}$.

$$\begin{aligned} \log 1\,500 &= 3,176\,09, \\ \log \operatorname{sen} 81^\circ 16' &= \bar{1},994\,92, \\ \log \operatorname{sen} 75^\circ 30' &= \bar{1},985\,94, \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} 23^\circ 15' &= 0,403\,68, \\ \hline \log CD &= 3,560\,63 \ \ldots\ 3\,636 \text{ metros}. \end{aligned}$$

PROBLEMA VI. *Determínese la altura de un monte.*

Elígese una base AB, lo más cómoda que se pueda, y se miden los ángulos MBA y MAB, inclinando el grafómetro en la dirección del plano MAB; en seguida se mide el ángulo MAN, formado por la dirección AM y la horizontal AN trazada en el plano de la vertical MN y de A.

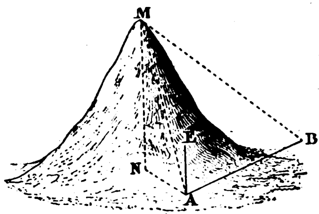

Fig. 34.

Se calcula la longitud de MA en el triángulo MAB, en que se conoce la base AB y los ángulos adyacentes.

Luego se calcula la altura MN en el triángulo rectángulo MNA, en que se conoce la hipotenusa MA y el ángulo agudo A.

Sea $AB = 450^m$, $MBA = 56^\circ 17'$, $MAB = 72^\circ 20'$

y $$MAN = 58^\circ.$$

1º Tenemos :

Ángulo $M = 180^\circ - (56^\circ 17' + 72^\circ 20') = 51^\circ 23'$.

El triángulo MAB da :

$$\frac{\text{sen } M}{AB} = \frac{\text{sen } B}{MA}; \quad \text{de donde } MA = \frac{AB \text{ sen } B}{\text{sen } M}.$$

2º En el triángulo rectángulo AMN, tenemos :

$$MN = MA \text{ sen } MAN,$$

de donde

$$MN = \frac{AB \text{ sen } B \text{ sen } MAN}{\text{sen } M} = \frac{450 \text{ sen } 56^\circ 17' \text{ sen } 58^\circ}{\text{sen } 51^\circ 23'}.$$

$$\begin{aligned} \log 450 &= 2{,}65321, \\ \log \text{sen } 56^\circ 17' &= \bar{1}{,}92002, \\ \log \text{sen } 58^\circ &= \bar{1}{,}92842, \\ \text{colog sen } 51^\circ 23' &= 0{,}10716, \\ \hline \log MN &= 2{,}60881 \ldots 406^m{,}26. \end{aligned}$$

La cumbre M está á $406^m,26$, más la altura del grafómetro, encima del plano horizontal que pasa por A.

PROBLEMA VII. *Determínese la distancia que media entre dos puntos* A *y* C, *úno de los cuales es inaccesible.*

Se elige y se mide una base AB y los ángulos CAB y CBA formados por esta base y las visuales AC y BC.

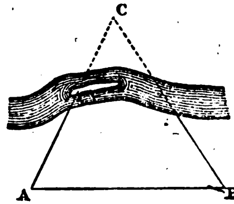

Fig. 35.

En el triángulo ABC, se puede calcular AC en función de AB y de los ángulos adyacentes A y B.

Sea $AB = 448^m$, $A = 61°10$ y $B = 60°30'$.

$$C = 180° - (61°10' + 60°30') = 58°20'.$$

Tenemos : $$\frac{\text{sen } C}{AB} = \frac{\text{sen } B}{AC},$$

de donde $$AC = \frac{AB \text{ sen } B}{\text{sen } C} = \frac{448 \text{ sen } 60°30'}{\text{sen } 58°20'}.$$

$$\log 448 = 2,65128,$$
$$\log \text{sen } 60°30' = \bar{1},93970,$$
$$\text{colog sen } 58°20' = 0,07001,$$
$$\log AC = 2,66099 \ldots 458 \text{ metros}.$$

PROBLEMA VIII. *Determínese la distancia que media entre dos puntos* C *y* D *inaccesibles.*

Elígese una base AB y se miden los ángulos CAB, CBA, CBD y DAB.

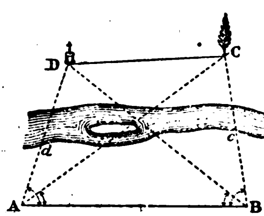

Fig. 36.

Sea $AB = 315^m$,

$CAB = 38°24'$, $ABC = 82°16'$,

$CBD = 43°52'$, $DAB = 74°$;

por lo tanto, $ABD = 38°24'$.

1° Cálculo de BC.

$$ACB = 180° - (38°24' + 82°16') = 59°20',$$

$$\frac{\text{sen } ACB}{AB} = \frac{\text{sen } CAB}{BC}; \quad BC = \frac{315 \text{ sen } 38°24'}{\text{sen } 59°20}.$$

$$\log 315 = 2{,}49831,$$
$$\log \operatorname{sen} 38^\circ 24' = \bar{1}{,}79319,$$
$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} 59^\circ 20' = 0{,}06543,$$

$$\log BC = 2{,}35693 \ \ldots\ 227^{m}{,}5.$$

2º Cálculo de BD.

$$ADB = 180^\circ - (74^\circ + 38^\circ 24') = 68^\circ 36',$$

$$\frac{\operatorname{sen} ADB}{315} = \frac{\operatorname{sen} DAB}{BD}; \quad BD = \frac{315 \operatorname{sen} 74^\circ}{\operatorname{sen} 67^\circ 36'},$$

$$\log 315 = 2{,}49831,$$
$$\log \operatorname{sen} 74^\circ = \bar{1}{,}98284,$$
$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} 67^\circ 26' = 0{,}03407.$$

$$\log BD = 2{,}51522 \ \ldots\ 327^{m}{,}5.$$

3º Cálculo de DC, en el triángulo DBC.

Tenemos (nº 50) : $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}$;

pero, en el presente caso,

$$a + b = BD + BC = 555 \quad \text{y} \quad a - b = 100,$$
$$\frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}(180^\circ - 43^\circ 54') = 68^\circ 3';$$

luego $\dfrac{555}{100} = \dfrac{\operatorname{tg} 68^\circ 3'}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}$: $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = \dfrac{100 \operatorname{tg} 68^\circ 3'}{555}$.

$$\log 100 = 2{,}00000,$$
$$\log \operatorname{tg} 68^\circ 3' = 0{,}39468,$$
$$\operatorname{colog} 555 = \bar{3}{,}25571.$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = \bar{1}{,}65039 \ \ldots\ 24^\circ 5' 19''.$$

Por lo tanto los ángulos BCD y BDC son :

$$BCD = 68^\circ 3' + 24^\circ 5' 19'', \quad \text{ó sea} \quad 92^\circ 8' 19'',$$
$$BDC = 68^\circ 3' - 24^\circ 5' 19'', \quad \text{ó sea} \quad 43^\circ 57' 41''.$$

En el triángulo DBC, tenemos :

$$\frac{\text{sen BDC}}{\text{BC}} = \frac{\text{sen CBD}}{\text{DC}}; \quad \text{DC} = \frac{227,5 \text{ sen } 43^\circ 52'}{\text{sen } 43^\circ 57' 41''}.$$

$$\begin{aligned} \log 227,5 &= 2,35693, \\ \log \text{sen } 43^\circ 52' &= \bar{1},84072, \\ \text{colog sen } 43^\circ 57' 41'' &= 0,15853, \\ \hline \log \text{DC} &= 2,35618 \ldots 227^m,1. \end{aligned}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcular tg 45°, sec 45°, conociendo sen $45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. Conociendo $\cos 60^\circ = 0,5$, calcular las otras líneas trigonométricas del arco de 60°.

3. Calcúlese cosec 45°, cuando sen $45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

4. Si sen $36^\circ = 0,5878$, calcúlese sen 72°.

5. Si $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, calcúlese $\cos 30^\circ$.

6. Si tg $40^\circ = 0,8391$, calcúlese tg 80°.

7. Si $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, calcular el seno, el coseno y la tangente de $22^\circ 30'$.

8. Transfórmese en un producto la diferencia $1 - \text{sen } 25^\circ 12'$.

9. Transfórmese en un producto la suma $1 + \text{tg } 30^\circ$.

10. Transfórmese en un producto la suma $\text{sen } 50^\circ + \frac{1}{2}$.

11. Transfórmese en un producto la suma $\cos 42^\circ + \cos 48^\circ$.

12. Transfórmese en un producto la diferencia $\cos 8^\circ - \frac{1}{2}$.

13. ¿ Para qué ángulo resulta la relación $\text{sen } x = 2 \cos x$?

14. ¿ Cuál es el ángulo en el que la tangente es igual á tres veces el seno ?

15. Resuélvase la ecuación $2\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0,2$.

16. ¿ Para qué ángulo se encuentra la relación $\text{sen } 2x = \text{tg } x$?

17. Resuélvase la ecuación $\sec x - \cos x = 1$.

18. ¿ Para qué ángulo resulta la relación $\sec x = 3 \cot g\, x$?

19. Resuélvase la ecuación $\cot g x - \sec x = 0$.

20. Resuélvase la ecuación $2 \operatorname{tg} x = \operatorname{cosec} x$.

21. Resuélvase la ecuación $\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$.

22. ¿ Para qué ángulo se encuentra la relación

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3 ?$$

23. Una escala de $15^m,50$ alcanza en una pared vertical á la altura de $15^m,20$: ¿ qué ángulo forma con esa pared ?

24. Determínese el ángulo central que intercepta un arco de 1 m. de longitud en un círculo de 1 m. de radio.

25. Determínese la cuerda que subtiende un arco de 2m. en un círculo de 1m. de radio.

26. Considerando el radio terrestre igual á $6366^{km},196$, determínese la diferencia que hay entre la longitud del arco de un grado y la del seno del mismo.

27. Búsquese el ángulo que forman entre sí las diagonales de un rectángulo, cuando las dimensiones de éste son de $1^m,60$ y $0^m,95$.

28. Los catetos de un triángulo rectángulo inscrito en un círculo tienen 6m. y 8m.; dígase en qué relación están los arcos subtendidos por estos lados.

29. Búsquese el ángulo que forman entre sí las dos diagonales de un trapecio isósceles, cuando las bases tienen 55m. y 92m., y la altura 54.

30. ¿ Cuáles son los ángulos de un rombo, siendo su superficie de $65 m^2$, y el lado de $9^m,15$?

31. Búsquese el ángulo que forma la diagonal de un cubo con la arista vertical adyacente, siendo l el lado del cubo.

32. ¿ Cuánto vale el ángulo que forma la diagonal de un paralelipípedo rectángulo con su proyección sobre la cara mayor, siendo las dimensiones de la figura de 36,77 y 85cm. ?

33. Una carretera en línea recta forma con su proyección horizontal un ángulo de $3^o 18'$: ¿ qué camino debe recorrerse para llegar á un punto que esté $109^m,20$ más elevado que el lugar en que principia ?

34. Dos caminos se cortan en un ángulo A de 116^o; se los enlaza por medio de dos arcos que principian en un mismo punto P; si el radio del arco mayor tiene 300 m., calcular : 1º el radio del otro arco; 2º las distancias del punto A á los puntos de enlace.

35. El ángulo de un rombo es de $48^o 16' 18''$ y su lado tiene 182m. : búsquense sus diagonales.

36. Calcular las diagonales de un rombo cuyo lado tiene 18 m., y la superficie 310 m².

37. Calcular las diagonales de un paralelogramo, sabiendo que el ángulo formado por dos lados es de 62°14′ y que estos lados tienen 68 m. y 92 m.

38. Determinar los ángulos de un triángulo isósceles, si la base tiene 49^m,60, y el radio del círculo inscrito, 18^m,85.

39. Determínense los ángulos de un triángulo isósceles, si los lados iguales tienen 48 m. y 32 m. el radio del círculo circunscrito.

40. Un rectángulo tiene 84 m. de base y 56 m. de altura; se une el punto medio de la base superior con los extremos de la base inferior; pregúntase qué diferencia hay entre el ángulo formado porlas dos rectas trazadas y el ángulo formado por una diagonal y la altura.

41. Dos circunferencias cuyos radios tienen 6 y 5 cm. son tangentes; ¿ qué ángulo forman sus tangentes comunes al cortarse ?

42. En un círculo de 15 cm. de radio se traza una cuerda de 24 cm., y en cada extremo de esta cuerda se traza una tangente al círculo; ¿ qué ángulo forman esas tangentes al cortarse ?

43. ¿ Cuál es el área de un polígono regular de 36 lados, siendo el radio del círculo de 24 m. ?

44. Búsquese el área de un polígono regular de 9 lados, si la longitud del lado es de 8^m,42.

45. Indíquese el radio de la base de una torre circular, sabiendo que dos tangentes de 42^m,80, trazadas desde un mismo punto, forman un ángulo de 26°30′.

46. Calcúlese la superficie de un rectángulo, conociendo su diagonal de 184 m. y el ángulo de 24°10′ que forma con la base.

47. Calcúlese la superficie de un triángulo, conociendo un lado de 57^m,06, el ángulo opuesto de 85°, y la diferencia 20°16′ de los ótros dos.

48. Búsquense las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que las diagonales tienen cada úna 109 m. y forman entre sí un ángulo de 42°48′.

49. En un círculo de radio r se trazan dos cuerdas paralelas, úna de ellas igual al radio, y la segunda al lado del triángulo equilátero inscrito, y se juntan los extremos de estas cuerdas; pregúntase qué ángulo forman estas rectas : 1° cuando se hallan á un mismo lado del centro ; 2° cuando se hallan á uno y otro lado de él.

50. Calcular los ángulos de un triángulo, conociendo dos lados de 46 y 54 m., y el radio de 31 m. del círculo circunscrito.

51. ¿ Cuál es la altura de un triángulo cuya base tiene 245 m. y los ángulos adyacentes 54°42′ y 67°56′ ?

52. Determínense los tres lados de un triángulo, sabiendo que los ángulos tienen 64°50′, 68°30′, 46°40′, y que el radio del círculo inscrito es de 8cm.

53. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es A; desde el vértice del ángulo recto se baja una perpendicular h á la hipotenusa; desde su pie se baja otra perpendicular á la hipotenusa del triángulo formado por la primera perpendicular y en el que se halla el ángulo A; desde el pie de la segunda perpendicular se baja ótra á la hipotenusa del triángulo que contiene al ángulo A, y así sucesivamente : indíquese el límite de la suma de todas estas perpendiculares si $A = 30°$ y $h = 1$ metro.
Hágase lo mismo cuando $A = 45°$ y $A = 60°$.

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS.

Resuélvase un triángulo rectángulo, conociendo :

54. La hipotenusa de 2040 m. y un ángulo agudo de 49°4′ 56″.

55. La hipotenusa de 985 m. y un cateto de 697 m.

56. Un cateto de 390 m. y el ángulo opuesto de 54°17′.

57. Los dos catetos de 1020 m. y 1635 m.

58. Un ángulo agudo de 38° y la altura de 72 m., relativa á la hipotenusa.

59. Un ángulo agudo de 64° y la mediana de 51^{m},50, relativa á la hipotenusa.

60. Un ángulo agudo de 28°45′ y la longitud 48 m. de la bisectriz del ángulo recto.

61. Un ángulo agudo de 48°12′ y la longitud 50m. de la bisectriz de este ángulo.

62. Un ángulo agudo de 16°40′ y la longitud 104 m. de la bisectriz del otro ángulo agudo.

63. La hipotenusa de 85 m. y la relación $^{8}/_{15}$ de los catetos.

64. La altura de 46 m., relativa á la hipotenusa, y úno de los segmentos adyacentes de 25 m.

65. Los dos segmentos de 64 m. y 81 m. que la altura determina en la hipotenusa

66. El cateto menor de 86 m. y la diferencia 18° 46′ de los ángulos agudos.

67. La hipotenusa de 75 m. y la altura correspondiente de 36 m.

Resuélvase un triángulo isósceles, conociendo :

68. Los lados iguales de 164 m. y el ángulo comprendido de 42° 36′.

69. Los lados iguales de 75 m., y la altura de 64 m., relativa al tercer lado.

70. La base de 186 m. y el ángulo opuesto de 24° 15′ 20″.

71. La base de 55 m. y el radio 40 m. del círculo circunscrito.

72. La base de 65 m. y el radio 21 m. del círculo inscrito.

73. Las alturas de 22 y 40 m., relativas á los lados iguales y el ángulo comprendido de 48° 16′.

74. El ángulo del vértice de 54° 16′ y el radio 48 m. del círculo circunscrito.

75. El perímetro de 200 m. y el ángulo del vértice de 26° 14′.

Triángulos cualesquiera.

76. Resuélvase un triángulo, conociendo un lado de 180^{m},50 y los ángulos adyacentes de 48° 35′ y 61° 25′.

77. Resuélvase un triángulo, conociendo el lado menor de 216 m., úno de los ángulos adyacentes de 75° 24′ y la diferencia 28° 48′ de los ótros dos.

78. Resuélvase un triángulo, conociendo el lado mayor de 1800 m., úno de los ángulos de 35° y la diferencia 60° de los ótros dos.

79. Resuélvase un triángulo, conociendo dos lados de 285 m. y 216 m., y el ángulo de 98° 16′ opuesto á úno de ellos.

80. Resuélvase un triángulo, conociendo dos lados de 140 m. y 92^{m},5, y el ángulo de 33° 30′ opuesto al lado de 92^{m},50. (Dos casos.)

81. Resuélvase un triángulo, conociendo dos lados de 78 m. y 88 m., y el ángulo comprendido de 54° 18′.

82 Resuélvase un triángulo, conociendo los tres lados de 310 m., 415 m. y 275 m.

83. Resuélvase un triángulo, conociendo dos lados de 120 m. y 144 m., y la superficie de 6540 m^2.

84. Un paralelógramo tiene 1 hectárea de superficie : búsquense sus lados, sabiendo que úna de sus diagonales forma con ellos ángulos que tienen respectivamente 54°15′ y 45°45′.

85. Búsquense los ángulos y la superficie de un cuadrilátero cuyos lados tienen 50 m., 92 m., 102 m. y 94 m.; sábese que los lados de 50 m. y 92 m. forman un ángulo de 88°16′, y que el lado de 102 m. es adyacente al lado de 92 m.

86. En un triángulo se conocen : el ángulo $A = 60°$, el lado opuesto $a = 84$ m., y la superficie $S = 3000$ m^2 : calcular los otros dos lados y ángulos.

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

PARTE PRIMERA

CÁLCULO ALGEBRAICO

§ I. — Valor numérico.

Hállese el valor numérico de las expresiones siguientes :

1. $5a+3b-7c+2ab$ si $a=4$, $b=2$, $c=1$.
2. $-15a+20b+3ab$ si $a=1$, $b=2$ y $a=3$, $b=4$.
3. $7a+2ab-12b$ si $a=2$, $b=1$ y $a=10$, $b=3$.
4. $18ab-10a-8b$, si $a=12$, $b=5$ y $a=5$, $b=12$.
5. $3a-5b+6c-ab+2bc+ac$ si $a=2$, $b=4$, $c=6$.
6. $5ab+3bc-2ac+a-b-c$ si $a=1$, $b=2$, $c=0$.
7. $18abc-13ac-8ab-5bc$ si $a=0$, $b=4$, $c=3$.
8. $12a-13b+18ab+16bc$ si $a=12$, $b=1$, $c=0$.
9. $5xy+1800x-1500y+50z$ si $x=100$, $y=1000$, $z=1$.
10. $3x+12y-15z+4xyz$ si $x=5$, $y=6$, $z=8$.
11. $a^2-b^2+a^2b^2+49$ si $a=5$, $b=7$.
12. $3a^2-5ab+6a^2b^2$ si $a=2$, $b=4$ y $a=4$, $b=2$.
13. $18abc-13ac+8ab-5bc$ si $a=1$, $b=4$, $c=3$.
14. $12ab-5a^2+6b^2-3ab^2+a^2b+3$ si $a=3$, $b=1$.
15. $15a^2b^2+30a^4b^2-60b^4c^2$ si $a=4$, $b=2$, $c=0$.
16. $3a^2b^3c^4-15a^4b^3c^2+8a^3b^4c^2-1790$ si $a=2$, $b=4$, $c=1$.
17. $a^4+2a^3b+3a^2b^2+4ab^3+b^4$ si $a=1$, $b=2$.

18. $6ab^2c^3 - 3a^2bc^3 - 4a^2b^3c + ab^3c^2$ si $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

19. $3ab + 5a^2b^2 + 3a^3b^3 + 20$ si $a = -2$, $b = 1$.

20. $a^4 - b^4 + 18a^2b^2 - 5a^3b^2$ si $a = 5$. $b = -5$.

21. [illegible]$ab^4 - a^4b + 3a^2b^3 - 6a^3b^2$ si $a = -1$, $b = 1$.

22. $60a^2b^3 - 40a^3b^2 + a^4 - b^4$ si $a = -3$, $b = -2$.

23. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ si $x = 8$, $y = -2$.

24. $x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$ si $x = 3$, $y = 2$.

25. $8a^4b - 7a^3b^2 + a^2b^3 - 5ab^4 + b^5$ si $a = -10$, $b = -3$.

26. $a^5b^2 - a^4bc^3 - a^3b^3c^2 + a^2b - ab^4 + ac^3 - b^2c^2$
si $a = -1$, $b = -2$, $c = 0$.

27. $a^4b^4 - a^3c + a^3b^3 - a^2bc + a^2b^2 + a^2c^2 + abc^3 + ac^4$
si $a = -1$, $b = 0$, $c = -2$.

28. $8a^3b - 16a^4b^2 + 4a^2b^3 + b^4$ si $a = \frac{1}{2}$, $b = 5$.

29. [illegible]$a^2b^3 - 5a^3b^2 + 40a^2 + 2b^2$ si $a = \frac{1}{2}$, $b = -4$.

30. $4a^2b^3 - 6a^3b^2 + a^4b - 64ab^4$ si $a = 4$, $b = -\frac{1}{4}$.

31. $x^3y^3 - x^2y - 3xy^2 + 9xy^3 + 81y^4$
si $x = 3$, $y = -\frac{2}{3}$.

32. $5a^4b^4 + 2a^3b^2 - 4a^2b^3 - ab^4 - b^5$
si $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$.

33. $16x^4y^3 - 8x^3y^4 - 4x^2y^2 + 32xy^4 - 5x^3 - 8y^3$
si $x = -1$, $y = -\frac{1}{2}$.

34. $2x^2 + 4xy - y^2 - 2x + 3y - 1$ si $x = 4$, $y = 5$.

35. $(a + b)^2 - (a - b)^2 + 2ab$ si $a = 3$, $b = 1$.

36. $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2$ si $a = 17$, $b = 13$.

37. $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$
si $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

38. $(3a+4b)(4b-3a)-36a^2b$ si $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$.

39. $(1+2a+3b)(1+2a-3b)-4a^2b$

si $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{2}$.

40. $(x+y-z)^2-4(x+y)^2(x-y+z)+(x-y)^3$

si $x=-2$, $y=-4$, $z=\frac{1}{2}$.

41. $4a^2(a^2+b-c)-(b+c)(c-a^2-b)+(a+b)^2$

(c^2-b+a^2) si $a=-1$, $b=2$, $c=3$.

42. $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

si $a=1$, $b=2$, $c=3$.

43. $(a-b)^2\left[(a+b)^2(b+c)-(a+c)(a-c)^2\right]$

si $a=1$, $b=-2$, $c=3$.

44. $a\left[(x+y)b-a(x-y)\right](x^3-y^3)$

si $a=2$, $b=-3$, $x=5$, $y=-2$.

45. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}$ si $a=30$, $b=10$.

46. $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{2a+5b}{2b-c}+\frac{a^2-c^2}{a+2b+c}$

si $a=5$, $b=3$, $c=1$.

47. $\frac{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ si $a=-2$, $b=3$.

48. $\dfrac{\dfrac{x^3-xy^2+y^3}{(x-y)^3}-\dfrac{y}{x-y}}{\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-xy+x}-\dfrac{x}{y^2}}$ 1° si $x=5$, $y=0$. 2° si $x=10$, $y=6$.

49. $\frac{5x^3+3x^2-5x+1}{9x^2-2}$ $x=-3$.

50. $\dfrac{\left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)\dfrac{3}{2}x}{2x-1+\dfrac{15}{x-3}}-\dfrac{4x}{x^2-1}\left(x-\dfrac{x}{4}-\dfrac{3}{4x}\right)$

1° $x=4$, 2° $x=-4$.

Calcúlese el valor de los polinomios siguientes :

51. $3x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 2x^2 + x - 9$ $x = 1, -1$ y 4.
52. $3x^5 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 2,$ $x = 2, -7$ y 10.
53. $6x^5 + 5y^4 - 4x^3 + 8x^2 - 2,$ $x = 2$ y $\frac{1}{2}$.
54. $12x^6 + 5x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 11x^2 - 6x + 3$
$$x = 3,\ x = \frac{1}{3}.$$
55. $2x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ $x = 0, 1, 2, 3, 10$.

§ II. — Adición.

Súmense los polinomios siguientes :

56. $(6a + 4m - 2x) + (8a - 6b - 3m) + (10b + m - 4x)$.
57. $(3p + 4q - x - 18y) + (3q - 4m + 3x + 9y)$
$+ (2m - p - 7q + 6y)$.
58. $(5x + 3y - 2z) + (2y - 3x - 5z) + (2x - 5y + 3z)$
$+ (4z - 4x)$.
59. $(3a^2 + ab - 2ab^2 + b^3) + (3ab^2 - 2a^2b + b^3)$
$+ (a^2b - ab^2 + 3b^3)$.
60. $(3x^2 + 2x + 4) + (7x^2 + 4x - 9) + (8x^2 - 12x - 4)$
$+ (3x^2 - 7x - 2)$.
61. $(3a^4b^2 + 8a^3b^3 + 1) + (3a^4b^2 - 9a^3b^3) + (5a^3b^3 - 1)$.
62. $(18a^4b - c^2) + (16a^3b^2 - 4c^2) + (-2a^4b + 8a^3b^2)$.
63. $(3a^2b - 3ab^2 + b^3) + (a^2b - b^3 + ab^2)$
$+ (ab^2 - 2a^2b - b^3) + (b^3 - ab^2)$.
64. $(x^2y - x^2z + xy - xz) + (x^2y - xy + xz - x^2z)$
$+ (2xy + 2xz - x^2y) + (2x^2z - xy - 2xz)$

65. $(a^2bc - ab^2c - abc^2) + (2ab^2c - abc^2 - a^2bc)$
$+ (ab^2c + abc^2 - 2a^2bc) + (a^2bc - ab^2c + abc^2)$.

66. $\left(a^2 - b^2 + \frac{c^2}{6}\right) + \left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{3}\right) + \left(b^2 - a^2 + \frac{c^2}{6}\right)$.

67. $\left(\frac{2a^3b}{3} - 5a^2b^2\right) + \left(\frac{3a^2b^5}{4} - 4a^3b\right) + \left(c^4 - \frac{a^3b}{6} - 3a^2b^5\right)$.

68. $(3a + 5b - c) + (2a - 4b + c) + \left(\frac{b}{2} - a + \frac{c}{3}\right)$.

69. $\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{4}\right) + \left(\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right) + \left(\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right)$.

70. $(3x + 4y + 5z) + \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{4} - \frac{z}{5}\right) + \left(\frac{8x}{3} - 2y - 3z\right)$.

71. $\left(3a^2b + \frac{2}{5}a^2b^2 + 2ab^2 + b^3\right)$
$+ \left(\frac{5}{3}a^3b - 3a^2b - 2a^2b^2 + 3b^3\right)$
$+ (4a^2b + a^2b^2 - a^3b) + (ab^2 - 4b^3 - a^2b^2)$.

72. $\left(\frac{3}{4}a^2 + a^2b^2\right) + \left(\frac{4}{5}a^2 - 3a^2b^2\right) + \left(-\frac{a^2}{10} + 7a^2b^2\right)$.

73. $\left(\frac{3}{4}a^2b^3c^4 - \frac{4}{5}a^3b^2c\right) + \left(-\frac{4}{3}a^2b^3c^4 + \frac{2}{5}a^3b^2c\right)$
$+ \frac{2}{5}a^3b^2c$.

§ III. — Sustracción.

Efectúense las restas siguientes :

74. $(7a - 2b + c) - (5a - b + c)$.

75. $(2a - 3b + 8c - 23x) - (a + 2b - 4c - 20x)$.

76. $(2p - 3q - 6x + 4y + 5z) - (-4p - 7q - 6x + 3y - 5z)$.

77. $(3a^2 - 2ab + b^2 - 3c^2) - (a^2 - 5ab + 3b^2 - 2c^2)$.

78. $(7x^3 + 2x^2 - 5x + 4) - (5x^3 + 6x^2 - 2x - 6)$.

79. $(5x^2 - 10xy + 5y^2 - 7) - (4x^2 - 8xy + 4y^2 - 9)$.

80. $(3x^2y - 3xy^2 + y^3 + 3d) - (x^2y + 2xy^2 + 3y^3 + 4d)$.

81. $(12a^2 - 1 + 3a + b) - (6a^2 - 4 - 4a + 3b)$.

82. $(3a^4b^2 - 2a^3b^3 + 4a^2b^4 - 3ab^5 + 2b^6)$
$- (a^4b^2 - ab^5 + 2b^6 + 3a^2b^4 - 2a^3b^3)$.

83. $(3a^4b^4 - 4a^3b^4 + 5a^2b^5 - 2ab^5 + b^6)$
$- (5a^2b^5 - 4ab^5 - 5a^3b^4 + 3a^4b^4 - b^6)$.

84. $(3a^4b^3c^2 - 4a^3b^3c^3 - 5a^2b^4c^2 + 4abc)$
$- (a^2b^4c^2 + 4abc - 4a^3b^3c^3 - a^4b^3c^2)$.

85. $\left(3a^2 - 2b^2 + \frac{c^2}{5}\right) - \left(2a^2 - 2b^2 - \frac{4c^2}{5}\right)$.

86. $\left(\frac{1}{2}a^2x + \frac{1}{4}ax^2 + \frac{2}{3}x^3\right) - \left(-\frac{3}{4}a^2x + \frac{1}{3}ax^2 - \frac{5}{8}x^3\right)$.

87. $\left(8a^5b^3x - 16a^4b^2x^2 - \frac{7a^3bx^3}{9}\right) - \left(\frac{a^3bx^3}{18} - \frac{5a^3bx^3}{6} - 5a^5b^3x\right)$.

88. $\left(\frac{5}{2}a^2 + 3ab - \frac{7}{3}b^2\right) - \left(2a^2 - ab - \frac{1}{2}b^2\right)$.

89. $\left(7x^2y^5 - 3x^2y^3 - \frac{7}{8}x^5\right) - \left(\frac{5}{4}x^5 - 4x^2y^3 + 8x^2y^5\right)$.

90. $\left(\frac{5}{2}x - 76 - 3yz + \frac{z}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}x - 56\frac{4}{5} + \frac{z}{4} - 3yz\right)$.

91. $\left(-6a^3 + 7a^2 - \frac{1}{2}a\right) - \left(5a^3 + \frac{1}{3}a^2 + 9a - 10\right)$.

92. Dados los polinomios :

$$P = 48a^3b^2 + 56a^2b^3 - 34ab^4 + 59b^5,$$
$$P' = 13a^3b^2 - 14a^2b^3 + 26ab^4 - 30b^5,$$
$$P'' = 15a^3b^2 + 70a^2b^3 - 60ab^4 - 30b^5,$$
$$P''' = 20a^3b^2 + 30b^5,$$

calcúlese : 1º $P - P'$; 2º $P - P''$; 3º $P - P'''$.

93. Dados los polinomios :

$$P = 9x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - b^3x + b^4,$$
$$P' = 5x^4 + 3bx^3 - 5abx^2 - a^3x + b^4,$$
$$P'' = 2x^4 - ax^3 + 7b^2x^2 - 2b^3x - a^4,$$
$$P''' = x^4 - 4ax^3 + 3a^2x^2 + 4a^2bx - 2a^2b^2,$$

calcúlese : $P - (P' + P'' + P''')$.

94. Dados los polinomios :

$$\begin{aligned} P &= 3a^5x - 7a^4x^2 + 5a^3x^3 + 2a^2x^4 - 9ax^5, \\ P' &= 5a^4x^2 - 2a^5x + 3a^2x^4 + 4ax^5 - 9a^3x^3, \\ P'' &= 2a^3x^3 + 7a^5x + a^2x^4 - 3a^4x^2, \\ P''' &= a^4x^2 - 6a^5x - 7a^3x^3 - 5ax^5 + 4a^2x^4, \end{aligned}$$

calcúlese $(P + P') - (P'' + P''')$.

95. Dados los polinomios :

$$\begin{aligned} P' &= 12x^4 - 3ax^3 + 8a^2x^2 - 9a^3x - 4a^4, \\ P' &= 2x^4 + 5ax^3 - 12a^2x^2 - a^3x - 3a^4, \\ P'' &= 5x^4 - 2ax^3 + 8a^2x^2 - 7a^3x - a^4, \\ P''' &= 3x^4 + ax^3 - a^3x, \end{aligned}$$

calcúlese $P - (P' + P'' + P''')$.

Efectúense las operaciones indicadas :

96. $(6m - 4p + q) + (3a - 2q) - (m - 3p - q) - (a + 4m - 8x) + (7x - 2a - m + q)$.

97. $(a + x) - (a + 2x) + (a + 3x) - (a + 4x)$.

98. $(3a - 5b - 7x + 8y) - (a + 6x - 3y) - (12x + 11y - 5b)$.

99. $x^4 - (x^3 + 3ax^2 + a^2x + a^3) - (x^3 - 4a^3 - a^2x - 3ax^2)$.

100. $(3a^2 - 7ax + 2x^2) - (a^2 + 2ax - x^2) - (-7ax + 3x^2)$.

101. $6x^2 - (3xy + 2xz) - (2xz - 3xy) + (5xz - 7x^2)$.

102. $2y - \left(\frac{1}{2}ax + \frac{1}{3}b\right) + \left(\frac{1}{3}ax - \frac{1}{2}b\right) - \left(\frac{1}{6}b - \frac{1}{6}ax\right)$.

103. $\left(8\frac{1}{2}a^2c - 7b^2\right) - \left(3\frac{3}{4}a^2c - 2\frac{1}{2}b^2\right) - \left(3\frac{1}{2}a^2c - 4\frac{1}{2}b^2\right)$

104. $(7x^2 - 5xy + 6y^2) - (2x^2 + 3xy - y^2) - (3x^2 - 2xy) + (4xy - 7y^2)$.

105. $9m - (5n + 2p) + 9n - (5p + 2m) + 9p - (5m + 2n)$.

106. $9a^3 - (18a^2b + 15ab^2 - 17b^3) - (7b^3 - 8a^2b - 10ab^2)$.

107. $(a - b) - (b + c - d) + (b + c - d) + (2b - a)$.

108. $(a+b-c)-(a-b-c)+(a+b+c)$
$-(b+c-a)-(a-b-c)$.

109. $a+b-c-[2a-(b-3c)]$.

110. $5x-[3x-(2x+3)]$.

111. $3x-[y-(x+y-3)]$.

112. $(a+2b-6a)-[3b-(6a-6b)]$.

113. $x+[(y-x)-(y-z)]$.

114. $(a+b-c)-[-(b-3c)]$.

115. $6a-[4b-(4a+4b-6a)]$.

116. $3ac-(ab+d)+[4ac+d-(2ab-3d)]$.

117. $a-(x-2a)+(2a-x)-[a-2x-(2a-x)]$.

118. $3ac-(ab+d)+[4ac+d-(2ab-3d)]$
$-[7ac-(3ab-4d-2ac)]$.

119. $44x+[48y-(6z+3y-7x)+43]$
$-[48y-8x+2z-(4x+y)]$.

§ IV. — Multiplicación.

Efectúense los productos siguientes:

120. $(6a-a^2b+2a^3b^2-14b^3)(-4ab^2)$.

121. $(3ax^2-7ax^3-5b^3x^2+9x^4)(-7ab^2x^3)$.

122. $(3ac+4ab+7bc+6abc)(3abc)$.

123. $(-5a^2+3ab-8b^2)(-9ab)$.

124. $(14a^2b-3a^2c-2b^2c+4b^2c^2)(-8abc^2)$.

125. $(-6a^2x^2y-4ax^2y^2-7a^2xy^2)(-9a^2xy)$.

126. $(2a^2-5b^3c^2-7ac^3+9c^2)(-10ab^2c^3)$.

127. $(-ab)(ab^2)(-a^2b)(-a^2b^2)$.

128. $(-3x^2)(-4x^3)(-5x)(-1)$.

129. $(2a + 2b)(a + 2c)$.

130. $(x + 8)(x + 10)$.

131. $(x - 5)(x - 7)$.

132. $(2x - 1)\left(x + \frac{1}{5}\right)$.

133. $(x + a^2)(x - b^2)$.

134. $(a^2 + x^3)(a^2 - x^3)$.

135. $(2 + a^2b)(2 - a^2b)$.

136. $(a + b - c)(a - b + c)$.

137. $(3x - 4y)(x - y)$.

138. $(4a - 5b)(3a + 4b)$.

139. $(4m + 9n)(m - 5n)$.

140. $(3a^2 - 2b^2)(2a^2 - b^2)$.

141. $(5x^2 - 3xy - 2y^2)(x^2 - 2xy)$.

142. $(8a^3 - 4a^2b + 2ab^2 - b^3)(2a - 3b)$.

143. $(3x^2 - 5xy + 2y^2)(x^2 - 7xy)$.

144. $(x^6 + 3x^3 + 9)(x^3 - 3)$.

145. $(27a^6 - 9a^4b^4 + 3a^2b^8 - b^{12})(3a^2 + b^4)$.

146. $(16a^4 + 4a^2b^4 + b^8)(4a^2 - b^4)$.

147. $(49a^6 + 56a^3b + 64b^2)(7a^3 - 8b)$.

148. $(9x^2 + 3ax + a^2)(3x - a)$.

149. $(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)(a - b)$.

150. $(-x^4 - y^4 + x^3y + xy^3 - x^2y^2)(-x - y)$.

151. $(x^3 - ax^2 + a^2x - a^3)(x + a)$.

152. $(a^4 + a^3x + a^2x^2 + ax^3 + x^4)(x - a)$.

153. $(ax + a^2x^2 + a^3x^3)(1 - ax)$.

154. $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b)$.

155. $(x^3 - x^2y^3 + xy^6 - y^9)(x + y^3)$.

156. $(x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4)(x + 2y)$.

157. $(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$.

158. $(x^2 - 2xy + y^2)(x^2 + 2xy + y^2)$.

159. $(3a^2 + 2ab + b^2)(-3a^2 + 2ab - b^2)$.

160. $(3 - 2x + 4x^2)(1 + x - 2x^2)$.

161. $(x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy)$.

162. $(a + b - c)(a - b + c)$.

163. $(a + 4b - c)(a - 4b + c)$.

164. $(a^2 - b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)$.

165. $(x^5 - x^3 + x - 1)(x^4 + x^2 + 1)$.

166. $(1 + 2a + 3b + 4c)(1 + 2a - 3b - 4c)$.

167. $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)(x^3 - 2x^2 + 2x - 1)$.

168. $(3a^5 - 2a^2b^3 + 9ab^4 - 8b^5)(4a^2 + 5ab - 6b^2)$.

169. $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.

170. $(4x^2 - 3x + 2)(3x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 3)$.

171. $[(a + b) + (c - d)][(a + b) - (c - d)]$.

172. $\left(\frac{5}{2}a^2 + 3ax - \frac{7}{3}a^2\right)\left(2x^2 - ax - \frac{a^2}{2}\right)$.

Efectúense las operaciones indicadas :

173. $(a + x)(a + 2x)(a + 3x)(a + 4x)$.

174. $(2a + x)(3a + 2x)(4a + 3x)(5a + 4x)$.

175. $(a^2 + ax + x^2)(a^2 - ax + x^2)(a - x)$.

176. $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

177. $(2x - 3y)^2(2x + 3y)$.

178. $(2xy - 3z)(y - z)^2$.

179. $(a + b - c - d)^2 - (c + d - a - b)^2$.

180. $(a + b)^3 - (a - b)^3 - 2b^3$.

181. $(m + n)^2 - (m - n)^2 + (m + n)(m - n)$.

182. $(4x^2 + 4a^2x + a^4)(16x^4 + 8a^4x^2 + a^8)(4x^2 - 4a^2x + a^4)$.

183. $(a + b)x + (b + c)y - [(a - b)x - (b - c)y]$.

184. $[x^2 + (n-1)x + 1](x+1)$.

185. $[bx^2 - (b-c)x + b](x+1)$.

186. $[nx^2 + (a+n)x + n](x-1)$.

187. $x - [2x - x + 3(2x+y) - 3(2x+y)]$.

188. $3[a - 2(b - c + d)]$.

189. $(a-b)(a+b-c) + (b-c)(b+c-a) + (c-a)(c+a-b)$.

190. $(2a-x)(2b-y) + (a+2x)(b+2y) - 5(ab+xy)$.

191. $(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)(x^8+y^8)$.

192. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

193. $a(2b+3c) - [c(2a+b) - b(c-2a)]$.

194. $(x-y)(x+y) - [xy - (xy - x^2)]$.

195. $(2a-b)(2a+b) + ab - b(a-b)$.

196. $3(a^2-b^2) - [2a^2 - 2b^2 - 2ab - 2b(b-a-b)]$.

197. $(x-y)(x+y) - [xy - (xy - x^2)]$.

198. $[2x + y - (x+2y)][3x - 2y - (2x - 3y)]$.

199. $[x^2 + x(a+b) + (a^2+b^2)][x^2 - x(a-b) + (a^2-b^2)]$.

200. $[3a^2 - 2a(a-b) - b(a+b)](2a^2 - 3ab + b^2)$.

§ V. — División.

Efectúense las divisiones siguientes :

201. $4a^2bc^3 : 2abc^2$.

202. $6a^3x^2y : 3ax^2$.

203. $15a^2xy^2 : 3ay^2$.

204. $6a^2x^4y^2 : -3a^2xy^2$.

205. $5a^4b^3c^2d : -ab^2$.

206. $-8a^4b^3c^2dx : 4a^2b^3dx$.

207. $-104x^3y^2z : 13x^2z$.

208. $-143a^4b^3c^2x^2y : 11a^4b^2x.$

209. $-216a^2b^2dx^2 : 9abx^2.$

210. $-12a^2c^4x^3 : 2ac^3.$

211. $-128m^4n^3p^3q^2x^2 : -32m^2n^3p^2x.$

212. $-105a^3b^4x^4y^3 : -15ab^2x^3y^3.$

213. $-195a^4b^5c^3d^4 : -13a^4b^2d^3.$

214. $-360a^3x^4y^2z^3 : 12a^3x^2y^2z.$

215. $(24ab - 18ac + 30ad) : 6a.$

216. $(18m^4 + 15m^3 - 9m^2 + 6m) : 3m.$

217. $(15a^4b - 12a^3b^2 - 9a^3b^3 + 6a^4b^2) : 3ab.$

218. $(8a^4b^2 - 6a^3b^3 + 4a^2b^4 - 2a^2b^2) : (-2a^2b^2).$

219. $(40ax^4 + 32a^2x^3 - 48a^3x^2 - 16ax) : -8ax.$

220. $(35a^3b^2 - 42a^4b^3c - 28a^2b^2 + 21a^2b) : -7a^2b.$

221. $(16a^2b^3x - 8a^3cx^2 - 24a^2dx + 16a^2x) : 4a^2x.$

222. $(10ax^4 + 8a^2x^3 - 12a^3x^2 - 4ax) : (-4ax).$

223. $(-12a^3x^2y - 18a^2x^3y - 16axy^3 + 24a^2x^2y^2) : -2axy.$

224. $(-112a^3b^2c^2 + 24a^3bc^3 + 16ab^3c^3 - 32ab^3c^4) : -8abc^2.$

225. $(54a^4x^3y^2 - 36a^2x^3y^3 + 63a^4x^2y^3) : -9a^2xy.$

226. $(am - an) : (m - n).$

227. $(mx - nx - my + ny) : (m - n).$

228. $(ad + bd - cd - af - bf + cf) : (d - f).$

229. $(a^2 + 4ab + 3b^2) : (a + b).$

230. $(2a^3 - 16a + 6) : (a + 3).$

231. $(5x^6 + 15x^5 + 5x + 15) : (x + 3).$

232. $(35a^3 + 47a^2 + 13a + 1) : (5a + 1).$

233. $(a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 - 5ab^4 - b^5) : (a - b).$

234. $(a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16) : (a + 2).$

235. $(3a^2 + 14ax + 15x^2) : (a + 3x).$

236. $(6a^4 + a^2x - 15x^2) : (2a^2 - 3x).$

237. $(6x^2 + 2xy^2 - 20y^4) : (2x + 4y^2)$.

238. $(6a^3b - 17a^2b^2 + 14ab^3 - 3b^4) : (2a - 3b)$.

239. $(a^7 - 3a^6 + a^5 - 4a^2 + 12a - 4) : (a^5 - 4)$.

240. $(2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 1) : (x^2 - 3x + 1)$.

241. $(6a^2 - 9ab + 8ax + 6bx - 8x^2) : (2a - 3b + 4x)$.

242. $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2)$.

243. $(a^3 + b^3 + 3ab - 1) : (a + b - 1)$.

244. $(1 + a^8 + a^4) : (a^2 + 1 - a)$.

245. $[2a^3 + 7a^2b - 9b^2(a + b)] : (2a - 3b)$.

246. $\left(x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{1}{2}x\right) : \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)$

247. $\left(x^4 - \frac{13}{6}x^3 + x^2 + \frac{4}{3}x - 2\right) : \left(\frac{4}{3}x - 2\right)$

Hállese, sin efectuar las operaciones, el residuo de las divisiones siguientes :

248. 1° $x^3 - 1 : x - 1$.
2° $a^5 + 1 : a - 1$.
3° $x^5 + y^5 : x - y$.
4° $x^7 + y^7 : x + y$.

249. $(3a^3 + 5a^2 - 6a) : (a - 1)$.

250. $(x^4 - 8x^2 - 9) : (x - 2)$.

251. $(2x^4 + 17x^3 - 68x - 32) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$.

252. $(3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2) : (x + 1)$.

Escríbase, sin efectuar las operaciones, el cociente de las divisiones siguientes :

253. 1° $(a^4 - 1) : (a - 1)$.
2° $(x^4 - 1) : (x + 1)$.
3° $(x^4 - y^4) : (x - y)$.
4° $(x^4 - y^4) : (x + y)$.

254. 1º $(a^6-1):(a-1)$.
2º $(a^6-1):(a+1)$.
3º $(x^6-y^6):(x-y)$.
4º $(x^6-y^6):(x+y)$.

255. 1º $(a^5+x^5):(a+x)$.
2º $(a^5-x^5):(a-x)$.
3º $(x^7+1):(x+1)$.
4º $(x^8-y^8):(x-y)$.

§ VI. — Descomposición en factores.

Descompónganse en sus factores las expresiones siguientes:

256. $ab-ac+ad$.

257. $12a+15b-3d+9m$.

258. $12xy+15xz-18ax+24bx$.

259. $25a^2+30a^4-35a^6$.

260. $12x^2y-18xy^2+24xy$.

261. $6ab+15ac-12ad-9am$.

262. $12a^2x^3-30a^3x^2+18ax^4-42a^4x$.

263. $84x^5y^4-108x^4y^5+420x^6y^3-228x^7y^6$.

264. $28x^3y^3z-21x^3yz^3+42xy^3z^3-35x^2y^2z^2$.

265. $6a^3b^2x+2a^2b^3y+12a^2b^2x-4a^3b^2y^2-8a^2b^2y^2$.

266. $m^2+2mn+n^2$.

267. $a^2+4ab+4b^2$.

268. $9a^2-12ab+4b^2$.

269. $4a^2+12ab+9b^2$.

270. $x^2-4xy+4y^2$.

271. a^2-2a+1.

272. $x^2+8x+16$.

273. a^4-2a^2+1.

274. x^4-4x^2+4.

275. $\frac{x^2}{9}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{4}$.

276. $\frac{a^2b^2}{4}+\frac{abc}{3}+\frac{c^2}{9}$.

277. $9x^2-3xy+\frac{y^2}{4}$.

278. $\frac{x^2}{16}-\frac{3xy}{2}+9y^2$.

279. $20ab^2-20abc+5ac^2$.

280. $6a^4b+12a^3b^2+6a^2b^3$.

281. a^2-b^2.

282. a^2-4b^2.

283. $4a^2-9b^2$.

284. x^2-y^4.

285. $a^2b^2 - c^2$.

286. $9a^2 - 16$.

287. $x^2 - \frac{1}{9}$.

288. $25x^2 - 64y^2$.

289. $12ab^2 - 3ac^2$.

290. $150a^6b^2 - 24a^2b^6$.

291. $x^4y^2 - x^2y^4$.

292. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

293. $\frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{49}b^2$.

294. $a^2 + a + \frac{1}{4}$.

295. $a^2 + 4ab + 4b^2$.

296. $9a^2 - 12ab + 4b^2$.

297. $9x^2 - 3xy + \frac{y^2}{4}$.

298. $\frac{a^2}{16} - \frac{3}{2}ab + 9b^2$.

299. $ab^2 - 2abc + ac^2$.

300. $bx^2 + 2bxy + by^2$.

301. $2a^2c - 4abc + 2b^2c$.

302. $3x^2 - 6xy + 3y^2$.

303. $x^2 + ax + bx + ab$.

304. $8ax - bx + 8ay - by$.

305. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$.

306. $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$.

307. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.

308. $ac - ad - bc + bd$.

309. $x^2 + ax - bx - ab$.

310. $x^2 + ax + bx + ab$.

311. $a^2 + ab - a - b$.

312. $ab - ac - b + c$.

313. $xy + xz - 3y - 3z$.

314. $ax - 3a - 2x + 6$.

315. $a^4 + b^4$.

316. $5a^2 - 45m^2$.

317. $9a^3 - 12a^2p + 4ap^2$.

318. $a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$.

319. $x^4 - 1$.

320. $x^8 - 1$.

321. $a^6 - b^6$

322. $3ax^4 - 3ay^4$.

§ VII. — Quebrados.

Simplifíquense las expresiones siguientes :

323. $\frac{10a^2bc}{5ab}$.

324. $\frac{12a^2x}{28ax^2}$.

325. $\frac{14a^2bc^2}{7abcd}$.

326. $\frac{15amx^3}{40bmx}$.

327. $\dfrac{25a^4b^3c^2}{5a^2b^4c^3d}$.

328. $\dfrac{3abx}{12bmx}$.

329. $\dfrac{-12acx^2}{4a^2c^2x}$.

330. $\dfrac{-32x^2yz}{-64xyz^2}$.

331. $\dfrac{51a^2b^3cd^2x^2}{17ab^2c^2dx^2}$.

332. $\dfrac{84a^3b^2x}{35a^4bx^2}$.

333. $\dfrac{108m^3n^4p^2r^2}{36m^4n^4p^3r^2}$.

334. $\dfrac{(15a^2b^2c)(7bc^2)}{(14c^3)(5a^2d)}$.

335. $\dfrac{7a-7b-7c}{21a-21b-21c}$.

336. $\dfrac{ax^3-a^4}{2am+3an}$.

337. $\dfrac{12x^2-2xy}{16x^2}$.

338. $\dfrac{b+b^2}{a+ab}$.

339. $\dfrac{42a^3-30a^2m}{35am^2-25m^3}$.

340. $\dfrac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$.

341. $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$.

342. $\dfrac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^2m^3}$.

343. $\dfrac{mxy-nxy}{m-n}$.

344. $\dfrac{35xz-45yz}{7x-9y}$.

345. $\dfrac{28x^3-49x^2+77x}{4x^2-7x+11}$.

346. $\dfrac{2a^2+4ab}{3ab+6b^2}$.

347. $\dfrac{14x^5+7x^4y}{10x^4z+5x^3yz}$.

348. $\dfrac{x^2-4a^2}{bx+2ab}$.

349. $\dfrac{x^2-2xy}{xy-2y^2}$.

350. $\dfrac{42a^3-30a^2m}{35am^2-25m^3}$.

351. $\dfrac{156a^3b^2-104a^2b^3}{351a^2bx-234ab^2x}$.

352. $\dfrac{10x^2-2xy}{15xy-3y^2}$.

353. $\dfrac{3a^2b-5ab^2}{3acd-5bcd}$.

354. $\dfrac{39x^2y^3-36xy^3}{65x^3yz-60x^2yz}$.

355. $\dfrac{16x^3y-20x^2z}{28x^2y^3z^2-35xy^2z^3}$.

356. $\dfrac{a-b}{a^2-b^2}$.

357. $\dfrac{2a-1}{4a^2-1}$.

358. $\dfrac{8a^3+1}{64a^6-1}$.

359. $\dfrac{a^3+3a^2}{a^2-9}$.

360. $\dfrac{a^2b-ab}{a^2-1}$.

361. $\dfrac{a^2-1}{ab+b}$.

362. $\dfrac{9a^5-4a}{6a^2b^2-4b^3}$.

363. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-ab}$.

364. $\dfrac{7a^3x+7ax^3}{a^4-x^4}$.

365. $\dfrac{64m^2-64n^2}{8m^2n-8mn^2}$.

366. $\dfrac{4(a+b)^2}{5(a^2-b^2)}$.

367. $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2-1}$.

368. $\dfrac{a^4-x^4}{a^3x-ax^3}$.

369. $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$.

370. $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}$.

371. $\dfrac{4x^2-12x+9}{4x^2-9}$.

372. $\dfrac{9x^2-12x+4}{9x^2-4}$.

373. $\dfrac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab}$.

374. $\dfrac{35+5x+7y+xy}{5+y}$.

375. $\dfrac{xy-2x-3y+6}{xy-2x}$.

376. $\dfrac{2x^2+12x+18}{6x^2-54}$.

377. $\dfrac{x^3+2ax^2+a^2x}{ax^2-a^3}$.

378. $\dfrac{x^2-ax+a^2}{x^2-(a+b)x+ab}$.

379. $\dfrac{x^2-4ax+4a^2}{x^2-4a^2}$.

380. $\dfrac{3ax^3+3a^3x-6a^2x^2}{ax^3-a^3x}$.

381. $\dfrac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$.

382. $\dfrac{6a^2b^2-3a^3b-3ab^3}{ab^3-a^3b}$.

383. $$\frac{1}{a(a-1)(a+1)}-\frac{1}{a(a-1)}+\frac{a^2}{a^2-1}.$$

384. $$\frac{a-b}{a^2-2ab+b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}+1.$$

385. $$a-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+\frac{a^2}{a+1}+\frac{a^2+2ab}{a+b}-a+\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

386 $$\frac{1-\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}.$$

387. $$\frac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}.$$

388. $$\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}.$$

389. $$\frac{x^2-1}{(1+ax)^2-(x+a)^2}.$$

§ VIII. — Adición y sustracción de quebrados.

390. $\frac{a}{2}-\frac{a}{4}$.

391. $\frac{m}{a}+\frac{n}{a}$.

392. $\frac{b}{a^2}+\frac{1}{a}$.

393. $\frac{a}{bc}-\frac{1}{b}$.

394. $\frac{m+n}{2}-\frac{m-n}{3}$.

395. $\frac{a+b}{2m}+\frac{a-b}{2m}$.

396. $m-\frac{m+n}{2}$.

397. $m-\frac{m-n}{2}$.

398. $x-\frac{x}{x-1}$.

399. $x-\frac{x^2-1}{x}$.

400. $2x+\frac{3-2x}{5}$.

401. $\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{3}$.

402. $\frac{a^2}{a-b}-\frac{b^2}{a-b}$.

403. $\frac{5a+7b}{6}-\frac{a+2b}{3}$.

404. $1+\frac{a-b}{a+b}$.

405. $1-\frac{a-b}{a+b}$.

406. $\frac{(x-y)^2}{4xy}+1$.

407. $\frac{(a+b)^2}{4ab}-1$.

408. $a-1+\frac{a^2-1}{a+1}$.

409. $x+y+\frac{x^2-y^2}{x-y}$.

410. $a-x+\frac{x^2}{a+x}$.

411. $a-x^2+\frac{2a^2}{a+x^2}$.

412. $\frac{4-ax}{2+ax}-2$.

413. $2-\frac{4-ax}{2-ax}$

414. $\frac{x^2-2x+4}{x+2}-2-x$.

415. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}$.

416. $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{a+b}$.

417. $\frac{c}{a-b}-\frac{c}{a+b}$.

418. $\frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}$.

419. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2$.

420. $\frac{c}{b}-\frac{c}{a}-\frac{b}{a}+1$.

421. $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$.

422. $\frac{a-b}{b}+\frac{2a}{a-b}$.

423. $\frac{1}{x+y}+\frac{2y}{x^2-y^2}$.

424. $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$.

425. $\frac{a}{a-x}-\frac{x}{x-a}$.

426. $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}$.

427. $\frac{1+3x}{1-3x}-\frac{1-3x}{1+3x}$.

428. $\frac{a}{x(a-x)}-\frac{x}{a(a-x)}$.

429. $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}$.

430. $\frac{m-n}{m+n}-\frac{m+n}{m-n}$.

431. $\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}-\frac{a}{a^2-b^2}$.

432. $\frac{a-b}{b}+\frac{2a}{a-b}-\frac{a^3+a^2b}{a^2b-b^3}$.

433. $x-\frac{x^2}{x-1}-\frac{x}{x+1}$.

434. $\frac{a-1}{a+1}+\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^2+1}{a^2-1}$.

435. $\frac{30a}{9a^2-1}+\frac{4}{3a-1}-\frac{5}{3a+1}$.

436. $\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}$.

437. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}-\frac{2}{x}$.

438. $\frac{2b-a}{x-b}+\frac{b-2a}{x+b}+\frac{3x(a-b)}{x^2-b^2}$.

439. $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}-\frac{4x}{x^2-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

440. $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{a+b}+\frac{2a^2}{a^2+b^2}+\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$.

§ IX. — Multiplicación y División de Quebrados.
Multiplicación :

441. $\frac{a}{2m}\times 4m$.

442. $\frac{a}{x}\times\frac{x}{a}$.

443. $\frac{2a}{3b}\times\frac{6bc}{5a^2}$.

444. $\frac{a^2}{bc}\times\frac{b^2}{ac}\times\frac{c^2}{ab}$.

445. $\frac{a-b}{2ab} \times 2b.$

446. $\frac{2x}{x-y} \times \frac{x^2-y^2}{8}.$

447. $$\frac{x^2-1}{3} \times \frac{6a}{x+1}.$$

448. $$\frac{a^2-b^2}{a} \times \frac{1}{a+b} \times \frac{a}{a-b}.$$

449. $\frac{a+b}{m-n} \times \frac{a-b}{m+n}.$

450. $\left(a+\frac{b^2-a^2}{a}\right)a.$

451. $\left(a-\frac{b}{3ax}\right)3ax.$

452. $\left(1+\frac{b}{a}\right)\frac{a-b}{2b}.$

453. $\frac{a+b}{a-b} \times \frac{a-b}{2(a+b)}.$

454. $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)bd.$

455. $$\left(\frac{ax}{a+x}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right).$$

456. $$\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(b-\frac{ab}{a+b}\right).$$

457. $$\left(a+\frac{m}{x}\right)\left(a-\frac{m}{x}\right).$$

458. $$\left(2x-\frac{a}{b}\right)\left(2x+\frac{a}{b}\right).$$

459. $$\left(a^2-x+\frac{2x^2}{a^2+x}\right)(a^2+x).$$

460. $$\frac{a+2}{a^2-4x^2}\,(a+2x).$$

461. $$\left(a-\frac{ax^2}{a^2-x^2}\right)(a-x).$$

462. $$\left(1+x+\frac{3+x^2}{1-x}\right)(1-x^2).$$

463. $$\left(x-\frac{x}{1-x}\right)\left(\frac{1-x}{2}-x\right).$$

464. $$\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)+1\right]\left[\left(m+\frac{1}{m}\right)-1\right].$$

465. $$\left(x+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right).$$

466. $$\frac{a^2 - x^2}{a} \times \frac{a^2 + x^2}{ax}.$$

467. $$\frac{ax + x^2}{2b - cx} \times \frac{2bx - cx^2}{(a + x)^2}.$$

468. $$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 - \frac{a}{b}\right) \times \frac{a}{a + b} \times \frac{b}{b - a}.$$

469. $$\frac{mn^2}{a^2}\left(\frac{a}{m^2} - \frac{a}{n^2}\right) \quad \left(\frac{b}{m - n} - \frac{b}{m + n}\right).$$

División:

470. $$a : \frac{a}{5}.$$

471. $$\frac{2a}{b} : a.$$

472. $$\frac{a}{b} : \frac{b}{a}.$$

473. $$2am : \frac{2m}{b}.$$

474. $$\frac{4a^2b}{5x^2y} : \frac{2ab^2}{15xy^2}.$$

475. $$\frac{2a^2b^3c^4}{4x^2y^3z^4} : \frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^3z^2}.$$

476. $$\frac{a}{a + b} : \frac{a}{b}.$$

477. $$\frac{a + b}{a - b} : (a + b).$$

478. $$\frac{1}{x^2 - y^2} : \frac{1}{x - y}.$$

479. $$(x + y) : \frac{x + y}{x - y}.$$

480. $$(a^2 - b^2) : \frac{a + b}{a - b}.$$

481. $$(x^2 - y^2) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

482. $$\frac{3x}{2x - 2} : \frac{2x}{x - 1}.$$

483. $$\frac{4a + 2}{3a} : \frac{2a + 1}{5a}.$$

484. $$\frac{(x + y)^2}{x - y} : \frac{x + y}{(x - y)^2}.$$

485. $$\frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2} : \frac{a - b}{c + d}.$$

486. $$\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(a - \frac{b}{c}\right).$$

487. $$\frac{6(ab-b^2)}{a(a+b)^2} : \frac{2b^2}{a(a^2-b^2)}.$$

488. $$\frac{a^2-4x^2}{a^2+4ax} : \frac{a^2-2ax}{ax+4x^2}.$$

489. $$\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right) : \frac{2y}{x^2-y^2}$$

490. $$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right).$$

491. $$\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right).$$

492. $$\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right) : \left(a-\frac{1}{b}\right)$$

493. $$\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a} : \frac{x-a}{x+a}.$$

494. $$\frac{x^4-y^4}{a^3+b^3} : \frac{x-y}{a^2-ab+b^2}.$$

495. $$\frac{x^4-a^4}{(x-a)^2} : \frac{x^2+ax}{x-a}.$$

496. $$\left(a+\frac{b-a}{1+ab}\right) : \left[1-\frac{1+ab}{a(b-a)}\right].$$

497. $$\left(a-\frac{b^2}{2a}\right)\left(a-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right) : \left(1-\frac{a}{a+b}\right].$$

PARTE SEGUNDA

ECUACIONES DE 1er GRADO

§ I. — Ecuaciones con una incógnita.

498. $5x+8=8x+2.$

499. $9+9x=117-3x.$

500. $21-7x=41x-123.$

501. $11x-7=6x+28.$

502. $2x+17=3x+2.$

503. $70-3x=14+x.$

504. $100-5x=4x-71.$

505. $500-24x=-4-3x.$

506. $x-46=3x-92.$

507. $5x-1=4x+39.$

508. $3x+100=5(200-3x).$

509. $x+1=5(x-39).$

510. $2(9x-49)=15x+46.$

511. $50-x=3(x-46).$

512. $4(11x-99)=1584-x.$

513. $7(60+x)=19x-84.$

514. $3(x+25)=10x-121.$

515. $5(20-x)=4(2x-1).$

516. $3(x-10)=5x-26.$

517. $18x+5=3(4-x).$

518. $60x+1=3(4x+3).$

519. $5(x-12)=-8-125x.$

520. $\frac{3x}{4}-\frac{4x}{5}+8=x-55.$

521. $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}+\frac{x}{8}=x-11.$

522. $\frac{x}{9}+\frac{x}{4}+2=\frac{5x}{12}.$

523. $\frac{7x}{12}-\frac{3x}{4}+56=x.$

524. $2x+\frac{3x}{4}=3x-25.$

525. $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}-\frac{3x}{4}=5.$

526. $\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}+26=0.$

527. $\frac{x}{5}-\frac{14x}{15}=\frac{x}{9}-38.$

528. $\frac{5x}{11}-x=3(x-91).$

529. $x+\frac{2x}{9}-13=\frac{x}{2}.$

530. $\frac{2x}{5}-\frac{x}{4}+x=23.$

531. $\frac{5x}{3}-\frac{5x}{7}+20=0.$

532. $3x+104=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}.$

533. $22-\frac{4x}{9}+\frac{3x}{7}=\frac{x}{3}$.

534. $\frac{x}{9}+\frac{13x}{10}+\frac{5x}{18}=152$.

535. $\frac{x}{5}+\frac{2x}{3}-\frac{x}{8}=89$.

536. $\frac{3x}{5}-\frac{5x}{7}=\frac{x}{3}-47$.

537. $$\frac{7x}{24}+\frac{x}{6}-\frac{1}{2}=x-7.$$

538. $$\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0.$$

539. $$\frac{7}{24}-\frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3}+\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}.$$

540. $$\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)-(x-5)(x+3)=9\frac{3}{4}.$$

541. $$\frac{1}{7}(5x-1)+\frac{1}{11}(9x-5)=\frac{1}{5}(9x-7).$$

542 $$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}.$$

543. $$8x-1-[5-(3+4x)]=27-(9-11x).$$

544. $$\left[\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{3}\right]-\left[x-\frac{1}{3}(2x-1)\right]=0.$$

545. $$amx+bnx=am+bn.$$

546. $$(x+a)^2=(x+b)^2+2(a+b)x-b^2$$

547. $$\frac{x+a}{a}-\frac{x+b}{b}=1.$$

548. $$\frac{a}{mn}-\frac{x-m}{m}=\frac{n-x}{n}.$$

549. $$\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1.$$

550. $$\frac{x+a+b}{x+a}=\frac{x+a-b}{x-a}-\frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}.$$

551. $$\frac{1}{\dfrac{3(m+n)^2}{p^2x}-\dfrac{m+n}{p}}=\frac{p}{2(m+n)}.$$

§ II. — Ecuaciones con dos incógnitas.

552. $x+2y=5,\quad 2x+y=7.$

553. $x+y=9,\quad 20x-3y=-4.$

554. $3x-2y=12,\quad x+5y=38.$

555. $x+2y=23,\quad 2x-y=11.$

556. $3x-y=30,\quad x+5y=26.$

557. $12x-5y=131,\quad 2x+3y=41.$

558. $2x-3y=-25,\quad 4x-y=25.$

559. $5x-y=23,\quad 5y-9x=13.$

560. $x+5y=100,\quad 25x-6y=11.$

561. $x-y=-18,\quad 10x-2y=-12.$

562. $x+3y=10x+60,\quad y-9x=x-1.$

563. $y-3x=-8,\quad 3y-5x=y-3.$

564. $20x-33y=0,\quad x-y=y-7.$

565. $x-30=35-y,\quad 18x=19y+60.$

566. $x-12y=y-2,\quad 15x-2y=549.$

567. $x+3y=75,\quad 5x-41y=x-336.$

568. $3x-10y=33,\quad 7y+x=10y+14.$

569. $7x-2y=17,\quad y-3x=x-16.$

570. $8x-3y=-64,\quad 2y-79=3x-13.$

571. $21x-2y=47,\quad 3(y-47)=x+2.$

572. $3x-4y=17,\quad 2(y+4x)=11+3x.$

573. $17x+y=13,\quad 2x-3y=14.$

574. $5x+29y=9,\quad 19y-x=23.$

575. $x-5=6(6+y),\quad 2x+3=y+19.$

576. $12x + 11y = 6,$ $3y - 2(x - 8) = 44.$

577. $10x - 3(y - 3) = 130,$ $10y + 9x = 20.$

578. $2x + 3y = 16,$ $5y - (1 + x) = 56.$

579. $2x - 3y = -49,$ $5y - (x - 8) = 64.$

580. $3x + 2y = -5,$ $10y - 3(x - 1) = 248.$

581. $x + 5y = 69,$ $y - 5(x - 1) = 128.$

582. $x - (y - 9) = 89,$ $40x + 19y = 250.$

583. $35x - 47y = 3160,$ $7x + 19y = -220.$

584. $2x + 5y = 69,$ $y - 4(x - 7) = 67 - 3x.$

585. $4x - 99y = 499,$ $75y + 2x = 125.$

586. $33x + y = 101,$ $5y - 333x = 1999.$

587. $x + \frac{3y}{7} = 17,$ $y - \frac{5x}{8} = 16.$

588. $\frac{3x}{10} - \frac{y}{3} = 9,$ $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 13.$

589. $\frac{x}{5} + 12 = \frac{y}{4} + 10,$ $\frac{2x}{3} - 2 = \frac{3y}{5} - 4.$

590. $\frac{5y}{16} - 1 = x - 3,$ $\frac{2x}{7} + 8 = \frac{15y}{16} - 5.$

591. $\frac{3x}{4} - \frac{4y}{5} = 91,$ $\frac{x}{10} + \frac{5y}{4} = -15.$

592.
$$\frac{x+2}{7} + \frac{y-x}{4} = 2x - 8.$$
$$\frac{2y-3x}{3} + 2y = 3x + 4.$$

593.
$$\frac{5x+7y}{3x+11} = \frac{13}{7},$$
$$\frac{11x+27}{7x+5y} = \frac{19}{11}.$$

594.
$$\frac{13}{x+2y+3} = -\frac{3}{4x-5y+6},$$
$$\frac{3}{6x-5y+4} = \frac{19}{3x+2y+1}.$$

595. $$(a+b)x-(a-b)y=4ab,$$
$$(a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2.$$

596. $$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a-b},$$
$$\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a+b}.$$

597. $$(a+b)x+(a-b)y=2ab,$$
$$(a+c)x+(a-c)y=2ac.$$

598. $$\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{4ab}{b^2-a^2},$$
$$\frac{x+y}{a+b}-\frac{x-y}{a-b}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}.$$

§ III. — Ecuaciones con tres incógnitas.

599. $$\begin{cases} x+y+z=2, \\ 2x+3y+5z=11, \\ x-5y+6z=29. \end{cases}$$

600. $$\begin{cases} 2x+y-z=15, \\ 5x-y+5z=16, \\ x+4y+z=20. \end{cases}$$

601. $$\begin{cases} 2x-y+z=16, \\ 3x+2y-z=5, \\ x-4y+2z=25. \end{cases}$$

602. $$\begin{cases} x-2y-10z=13, \\ 2x+y+5z=6, \\ 3x+3y+z=31. \end{cases}$$

603. $$\begin{cases} x+y+2z=3, \\ 2x+3y+4z=4, \\ 5x-4y-3z=20. \end{cases}$$

604. $$\begin{cases} x+2y-3z=-16, \\ 3x+y-2z=-10, \\ 2x-3y+z=-4. \end{cases}$$

605. $$\begin{cases} 2x+y+z=24, \\ x-2y-z=2, \\ 3x-4y-3z=8. \end{cases}$$

606. $$\begin{cases} 5x-4y+3z=28, \\ x+5y+z=-2, \\ 2x-y+z=8. \end{cases}$$

607. $$\begin{cases} x+y-z=25, \\ x-y-z=5, \\ 2y+2z-x=10. \end{cases}$$

608. $$\begin{cases} x+5y+3z=6, \\ 3x+15y-4z=-8, \\ y-2x-5z=1. \end{cases}$$

609. $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+z=9, \\ 5x-2y-z=-6. \end{cases}$

610. $\begin{cases} 4x+y+z=44, \\ 10x-y-2z=-4, \\ 2y-x+4z=84. \end{cases}$

611. $\begin{cases} 3x+y+z=0, \\ x-y+9z=2, \\ x+4y-z=17. \end{cases}$

612. $\begin{cases} 3x-y+z=29, \\ x+3y+30z=6, \\ y-x-z=-17. \end{cases}$

613. $\begin{cases} 20x-2y-z=20, \\ 15x+y+z=5, \\ 3y-15x-2z=55. \end{cases}$

614. $\begin{cases} 5x-8y-6z=0, \\ 3y-x+z=10, \\ x-2y-5z=1. \end{cases}$

615. $\begin{cases} x+y-2z=9, \\ 2x-y+4z=4, \\ 2x-y-6z=-1. \end{cases}$

616. $\begin{cases} 3x+y-z=3, \\ 2y-6x+z=8, \\ 18x-5y+2z=-10. \end{cases}$

617. $\begin{cases} 5x+y-2z=3, \\ y-15x+6z=3. \\ 2z+10x-y=0. \end{cases}$

618. $\begin{cases} 5x+10y-z=2, \\ 20y-x+2z=9, \\ 3x-100y+5z=13. \end{cases}$

PARTE TERCERA

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

619. $x^2 - 8x + 12 = 0.$

620. $x^2 - 14x + 13 = 0.$

621. $x^2 - 30x + 200 = 0.$

622. $x^2 - 22x + 85 = 0.$

623. $x^2 - 60x + 459 = 0.$

624. $x^2 - 115x + 1500 = 0.$

625. $x^2 - 39x + 270 = 0.$

626. $x^2 - 71x + 1050 = 0.$

627. $x^2 - 111x + 1010 = 0.$

628. $x^2 - 85x + 400 = 0.$

629. $x^2 + 4x - 32 = 0.$

630. $x^2 + 14x - 32 = 0.$

631. $x^2 - 4x - 5 = 0.$

632. $x^2 - 6x - 16 = 0.$

633. $x^2 - 8x - 105 = 0.$

634. $x^2 - 3x - 18 = 0.$

635. $x^2 - 7x - 170 = 0.$

636. $x^2 + 21x - 820 = 0.$

637. $x^2 - 11x - 2040 = 0.$

638. $x^2 + 100x = 100 + x.$

639. $x^2 - x - 9900 = 0.$

640. $x^2 + 2x = 195.$

641. $x^2 + 14x + 48 = 0.$

642. $x^2 + 20x + 19 = 0.$

643. $x^2 + 11x + 30 = 0.$

644. $x^2 + 20x = 2x - 65.$

645. $x^2 + 31x + 150 = 0.$

646. $x^2 + 21x = 2x - 90.$

647. $x^2 + 20x + 51 = 0.$

648. $x^2 + 110x = 5(x - 100).$

649. $$x + \frac{24}{x-1} = 3x - 4.$$

650. $$\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1.$$

651. $$\frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5} = \frac{10}{3}.$$

652. $$\frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{x+1}.$$

653. $$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}.$$

654. $$x^2-(a+b)x+ab=0.$$

655. $$abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0.$$

656. $$c^2x^2+(ac-bc)x-ab=0.$$

657. $$12abx^2-(16a^2-9b^2)x-12ab=0.$$

658. $$\sqrt{36+x}=2+\sqrt{x}.$$

659. $$x-\sqrt{25-x^2}=1.$$

660. $$4x+2\sqrt{5-4x}=5.$$

661. $$\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1}=\sqrt{7x+4}.$$

662. $$\frac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\frac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

663. Formar una ecuación de segundo grado, con coeficientes reales y enteros, cuyas raíces sean :

1º 7 y -3.

2º 3 y $\frac{1}{2}$.

3º $a+b$ y $a-b$.

4º $3+\sqrt{2}$ y $3-\sqrt{2}$.

664. Hállense dos números que tengan :

1º	por suma	18	y por producto	45,
2º	»	14	»	49,
3º	»	4	»	-12,
4º	»	-10	»	16.

665. En la ecuación $x^2-7x+q=0$, déterminar q de modo que una de las raíces sea igual :

1º á 3,

2º á -3,

3º á $\frac{4}{5}$,

4º á 0.

666. En la ecuación $x^2-px+36=0$, determinar p de modo que se tenga :

1º $x'=x''$,

2º $x'=-x''$,

3º $x'=5+\sqrt{-11}$,

4º $\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{5}{12}$.

667. En la ecuación $x^2 - 8x + q = 0$, determinar q de modo que se tenga :

1o $x' = x''$,	3o $x' = \dfrac{1}{x''}$,
2o $x' = 3x''$,	4o $3x' - 4x'' = 3$.

ECUACIONES BICUADRADAS

668. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.	**671.** $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
669. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.	**672.** $4x_4 - 17x^2 + 4 = 0$.
670. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.	**673.** $4x^5 - 37x^2 + 9 = 0$.

674. $$a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)\,x^2 + a^2b^2 = 0.$$

675. $$x^4 + 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 = 0.$$

FIN

ÍNDICE

ÁLGEBRA

Preliminares. 7

PARTE Ira

CÁLCULO ALGEBRAICO

§ I. — Números algebraicos. 12
§ II. — Adición 14
§ III. — Sustracción. 16
§ IV. — Multiplicación 18
§ V. — División 24
§ VI. — Quebrados 32
§ VII. — Razones 37

Ejercicios de aplicación 43

PARTE IIa

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

§ I. — Definiciones y principios generales. 50
§ II. — Resolución de una ecuación de 1er grado con una incógnita. 53
§ III. — Discusión de la ecuación general de 1er grado 55
§ IV. — Resolución de dos ecuaciones de 1er grado con dos incógnitas. 57
§ V. — Resolución de cualquier número de ecuaciones de 1er grado 63
§ VI. — Problemas de 1er grado 66
§ VII. — Interpretación de los valores negativos. 75
§ VIII. — Casos de imposibilidad 79
§ IX. — Problemas indeterminados. 84
§ X. — Desigualdades de 1er grado. 86

Ejercicios de aplicación 88

PARTE IIIra

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

§ I. — Potencias y raíces de las expresiones algebraicas. 102
§ II. — Cálculo con los radicales de segundo grado. . 106
§ III. — Resolución de una ecuación con una incógnita. . 109
§ IV. — Relaciones entre los coeficientes y las raíces. . . 117
§ V. — Ecuaciones bicuadradas. 122
§ VI. — Ecuaciones con varias incógnitas 123
§ VII — Problemas de segundo grado. 127

EJERCICIOS DE APLICACIÓN 134

PARTE IVa

PROGRESIONES, LOGARITMOS, INTERÉS COMPUESTO Y ANUALIDADES

§ I. — Progresiones aritméticas. 143
§ II. — Progresiones geométricas. 148
§ III. — Logaritmos 158
§ IV. — Interés compuesto. 171
§ V. — Anualidades y amortización. 177

EJERCICIOS DE APLICACIÓN 183

EJERCICIOS DE RECAPITULACIÓN. 186

TRIGONOMETRÍA

CAP. I. — Líneas trigonométricas.
§ I. — Preliminares 195
§ II. — Variaciones de las líneas trigonométricas. . . 197
§ III. — Líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios 202

CAP. II. — Fórmulas trigonométricas.
§ I. — Relaciones entre las líneas trigonométricas . 203
§ II. — Adición y sustracción de arcos. 206
§ III. — Multiplicación y división de arcos. 210

CAP. III. — Tablas trigonométricas de logaritmos.
§ I. — Construcción de las tablas trigonométricas. . 213
§ II. — Uso de las tablas. 215
§ III. — Transformaciones logarítmicas. 219

CAP. IV. — Resolución de triángulos. .
§ I. — Relación entre los elementos de un triángulo. 226
§ II. — Resolución de los triángulos rectángulos. . . 229
§ III. — Resolución de triángulos cualesquiera 232
CAP. V. — Aplicación de la trigonometría á la agrimensura.
Problemas resueltos 248
EJERCICIOS Y PROBLEMAS 255

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS 261

1812-25. — Imprimerie des Orphelins-Apprentis d'Auteuil,
40, rue La Fontaine, Paris.

E. GOMEZ

Colegio

de

Nuestra Señora del B. C.

Ballenero

Extracto del Catálogo

Libros elementales para la enseñanza de las Matemáticas.

Nº 467. Cálculo mental y abreviado. — In-12º, de 160 páginas.

La obrita está dividida en dos partes desiguales : la primera (115 páginas) trata del cálculo mental y señala muchas aplicaciones al sistema métrico y a la regla de interés ; la segunda explica el modo de abreviar los cálculos, sobre todo tratándose de interés y descuento.

Nº 473. Aritmética, curso medio. — In-12º, de 312 páginas.

Este tratado se divide en 4 partes : Iª, Números enteros y operaciones fundamentales. IIª, Numeros quebrados y Raíz cuadrada. IIIª, Sistema metrico decimal. IVª, Reglas de tres, de interés, descuento, repartimientos, mezcla, etc. Cada parte teórica va seguida de numerosos problemas.

Nº 473 *b*. El mismo, Maestro.

Nº 474. Elementos de Aritmética con algunas Nociones de Algebra. — In-12º, de 388 páginas.

La parte de Aritmética se divide en 6 libros : 1ro, Números enteros. IIº, Propiedades de los Números. IIIº, Números quebrados. IVº, Potencias y Raíces. Vº, de las Medidas. VIº, de las Razones y Proporciones. Cada parte contiene ejercicios de aplicación. Unas 50 páginas de *Algebra* tratan de las operaciones fundamentales, de las ecuaciones de primero y segundo grado, de las progresiones y logaritmos.

Nº 474 *b*. El mismo, Maestro.

Nº 477. Nociones elementales de Geometría aplicadas al Dibujo lineal. — In-12º, de 108 páginas, con muchísimos grabados.

Esta obrita se divide en cuatro partes : Iª, Líneas y ángulos. IIª, Circunferencia. IIIª, Superficies. IVª, Solidos. Los ejercicios de aplicación al dibujo son numerosos para cada parte.

Nº 477 *b*. Soluciones y respuestas del anterior.

Nº 479. Geometria, Curso superior. — In-12º, de 392 páginas.

La obrita está dividida en 3 partes : Iª, Geometria plana, los 4 primeros libros, con numerosas aplicaciones. IIª, Geometria del espacio, en cuatro libros, el último explicando las curvas usuales. IIIª, Nociones de *Agrimensura* y *Nivelación*, con gran número de grabados explicativos.

Nº 479 *b*. El mismo, Maestro.