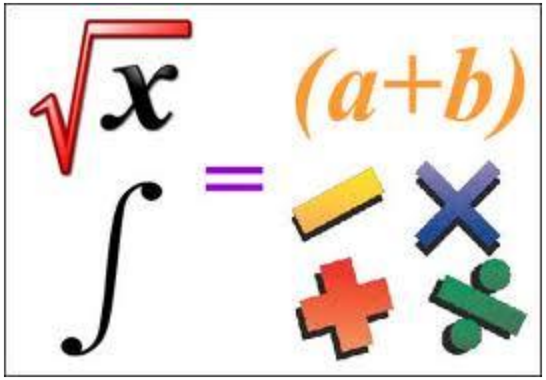


La Magia de los Números

Escuela Parroquial de San José.
Caracas-Venezuela.

Dr. Tomás Guardia.
Profesor Asistente.
Centro de Geometría (UCV).

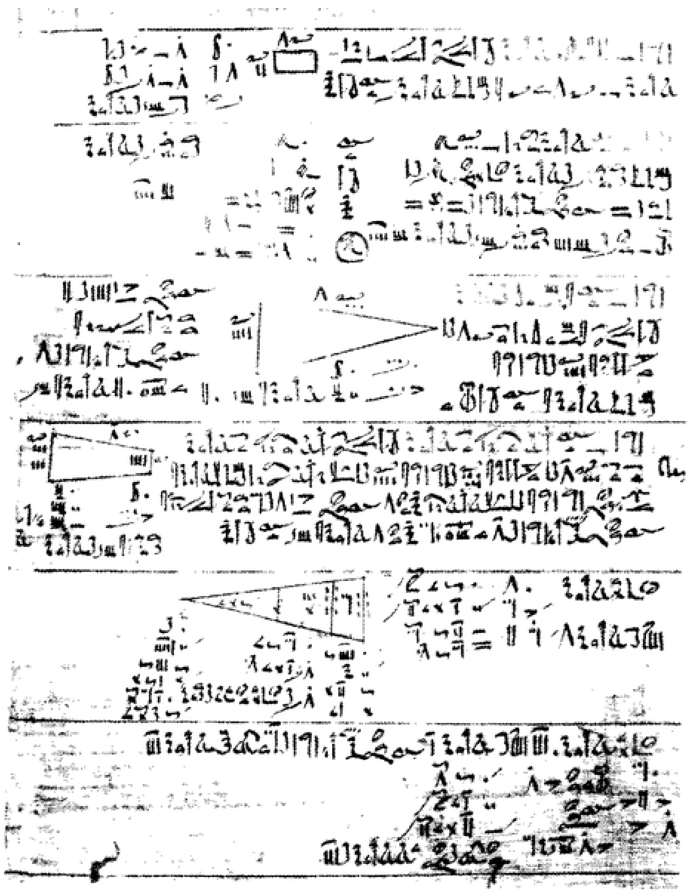
Caracas, 13/03/2011

Egipto

El primer documento matemático que se conoce es el Papiro Rhind. Descubierto por un excavador inglés llamado Henry Rhind en el año 1858.

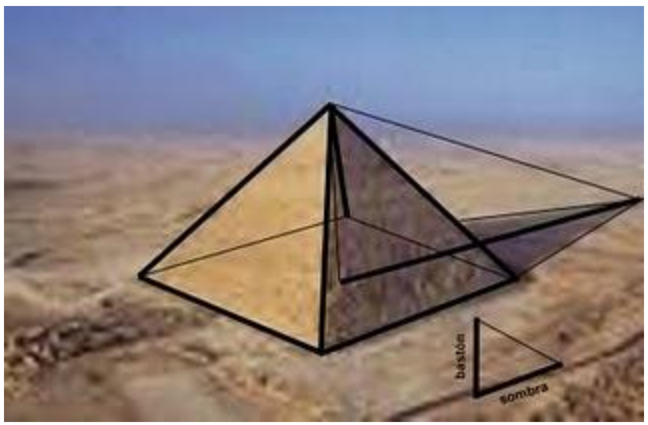
Egipto

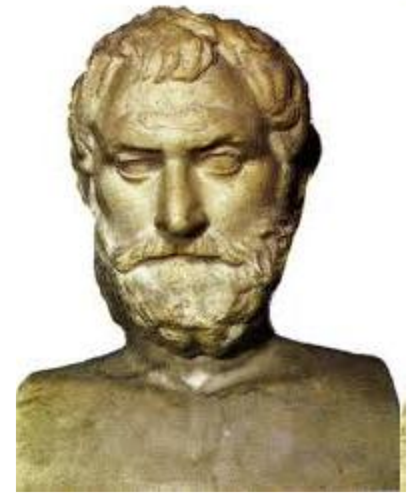
Fue escrito por Ahmes un sacerdote egipcio. El papiro contiene 87 problemas resueltos relacionados con aritmética, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, Progresiones. Reparto proporcionales, regla de tres, ecuaciones y trigonometría.



Grecia

Sin lugar a dudas la antigua Grecia es la cuna de la civilización occidental. Allí encontramos a Tales de Mileto, quien era comerciante y matemático.



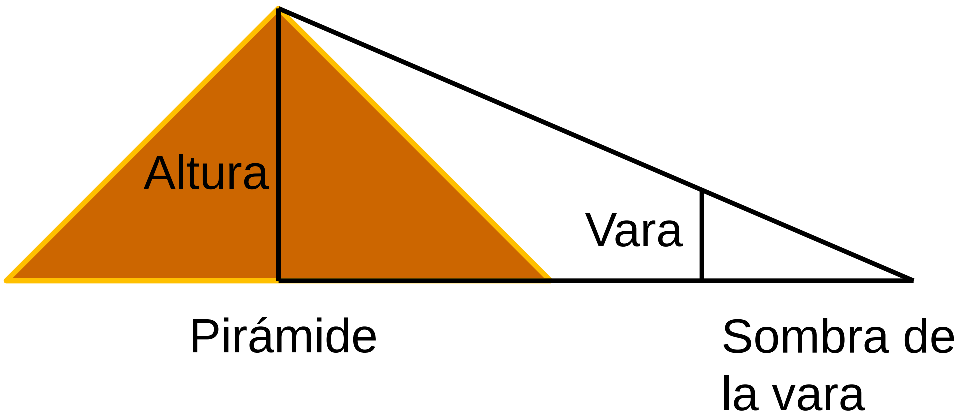


¡Tan solo con una vara logró medir la altura de las pirámides de Egipto!

Tales de Mileto

Grecia

El Teorema de Tales dice: si dos o mas rectas paralelas son cortadas por dos transversales la longitud de sus lados son proporcionales



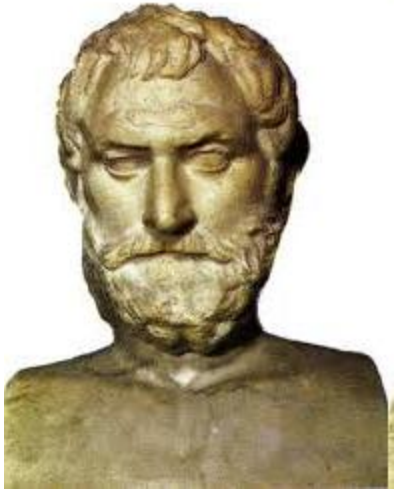
$$\frac{\text{altura}}{\text{vara}} = \frac{\text{distancia desde la base a la sombra}}{\text{sombra}}$$

$$\text{altura} = \frac{\text{distancia desde la base a la sombra}}{\text{sombra}} \times \text{vara}$$

Grecia

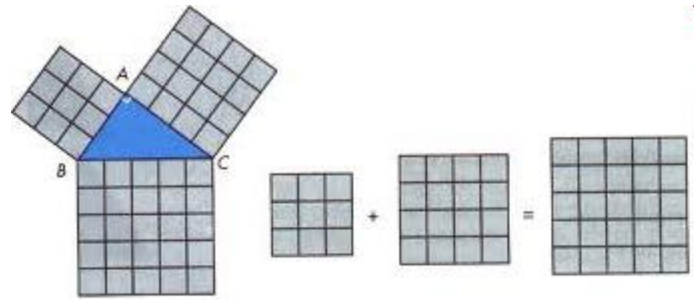
Fue el primero de los siete sabios de Grecia y también predijo un eclipse de sol.
Tales pensaba que el agua era el origen de todas las cosas

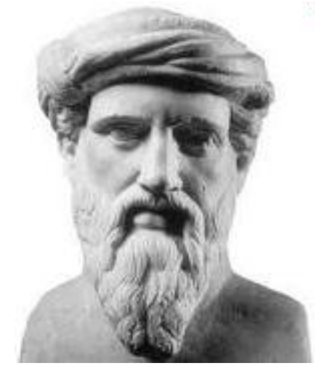
"Conócete a ti mismo"



Tales de Mileto

Grecia

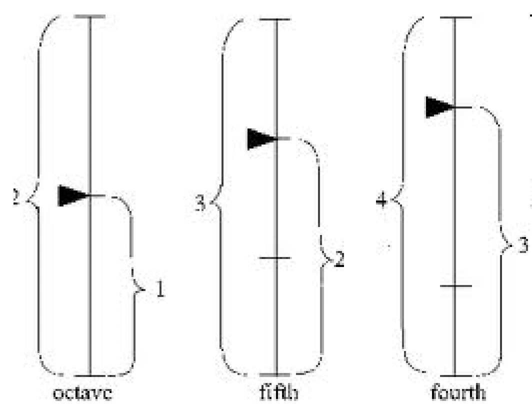




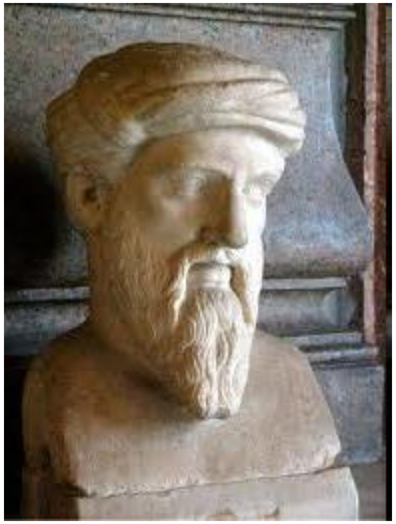
Fue quizás el más importante de la Antiguedad

“Todo es Número”

Tambìén se le conoce como el creador de la escala musical



Grecia

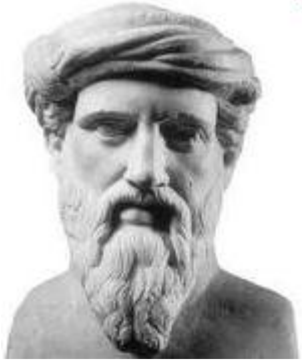


Su vida está ligada al misticismo, la matemática, la geometría, la numerología y la filosofía.

Se casó con Teano y juntos tuvieron cuatro hijos: Damo, Arignote, Myia y Telauges.

De Teano se dice que fue una mujer hermosa culta e inteligente. Junto a Myia dirigió la escuela luego de la muerte de Pitágoras.

Grecia



Pitágoras en principio es discípulo de Tales de Mileto.
Pero por instrucciones de su maestro se convierte en un iniciado en Egipto.

La estancia en Egipto y su cautiverio en Babilonia introducen en la vida de Pitágoras los fundamentos de su vida mística.

Pitágoras

Al obtener de nuevo su libertad regresa a Crotona y funda una escuela en donde transmite sus conocimientos adquiridos en Egipto y Babilonia

"Todo es Número"

Los Pitagóricos se dispersan por todo el mundo griego y fundan escuelas locales manteniendo el carácter oculto de transmisión del conocimiento reservado solamente a sus discípulos.

Grecia

Hay muchas posturas referentes a la vida y obra de Pitágoras.

Unos lo tildan de fanático religioso y otros lo colocan como un gran sabio.

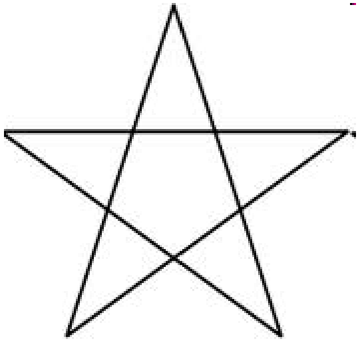
Lo cierto es que Pitágoras promovía el respeto haca el hombre y la vida en general. Comía carne pero no comía habas porque le causaban indigestión. Su amor incondicional hacia Teano hizo de Pitágoras un hombre que respetaba a la mujer sobre todo su capacidad de “llevar vida” dentro de si misma.

Se dice también que en donde se abría una escuela pitagórica con el tiempo se convertía en un lugar pacífico.

El legado de Pitágoras es muy amplio, creó la escala musical actual pero los elementos místicos que giran en torno a su vida hacen de Pitágoras un personaje que ha despertado fascinación a lo largo de la historia.

Grecia

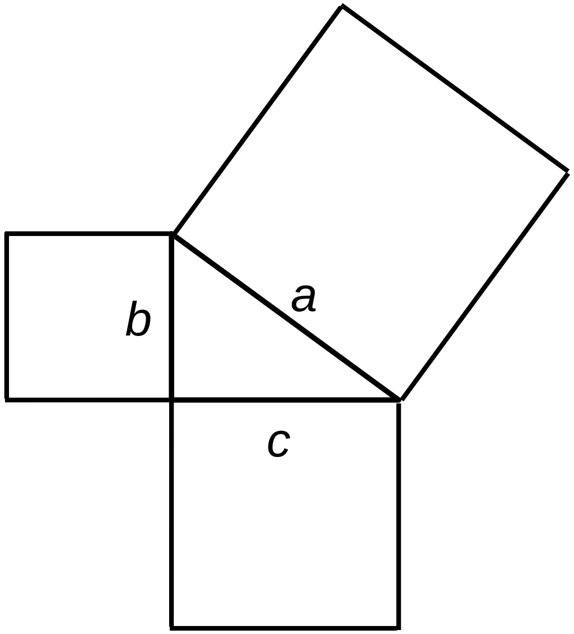
Entre los aspectos místicos que podemos encontrar en la filosofía pitagórica está la numerología. Consistía en atribuirle características simbólicas a los números. Los pares poseían la propiedad de ser: limitados, determinados, finitos, y masculinos. Por su parte los impares son: ilimitados, infinitos, indeterminados y femeninos. Había un problema con el cuatro porque representaba la justicia que era masculina para los pitagóricos. El número uno representaba el origen de todas las cosas (Dios), representaba el bien el punto. El dos era lo femenino, la díada, la recta. El tres era el triángulo la superficie. El cuatro era lo físico, la pirámide lo sólido. El cinco el número favorito de los pitagóricos representaba el color.



El Teorema Más Famoso

El teorema del triángulo rectángulo es quizás el más conocido. Establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus otros dos catetos.

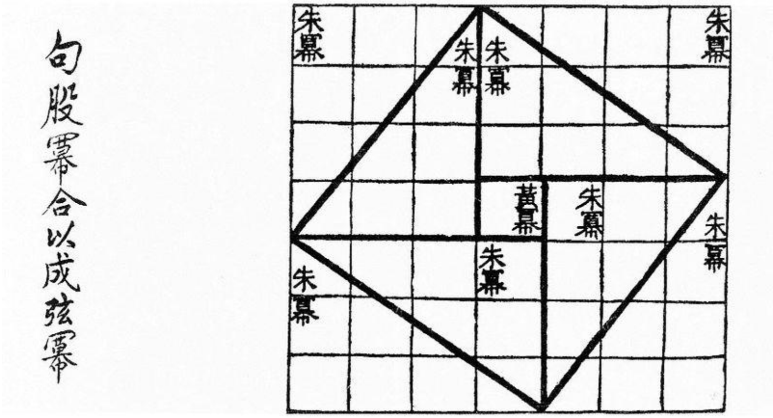
Un triángulo es rectángulo si uno de sus ángulos es recto



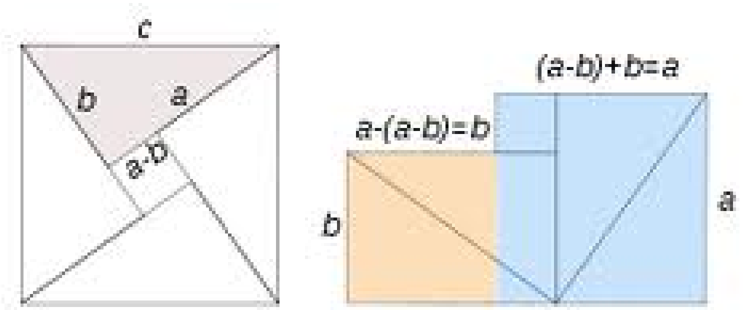
$$a^2 = b^2 + c^2$$

El Teorema Más Famoso

Curiosamente se han encontrado versiones chinas e indias anteriores al tiempo de los pitagóricos. No se sabe ciertamente si fue Pitágoras o alguno de sus discípulos quien descubrió el teorema. La cofradía funcionaba de manera mas o menos parecida a los actuales centros de investigación.

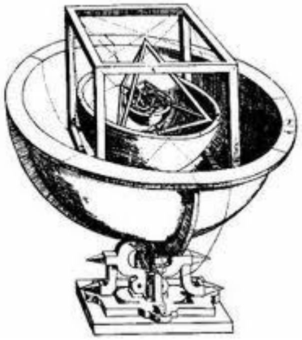


Demostración del Chou Pei
500-200 a.c.



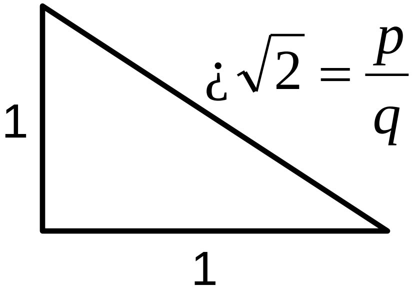
Demostración de Bhaskara
Siglo XII

La Muerte de un Sueño



En el universo numérico pitagórico solamente existían los números naturales. no existían los enteros negativos tampoco los números racionales (solamente se aceptaban fracciones enteras), mucho menos los números reales y complejos. Los griegos nunca introdujeron una notación para el cero. El universo era finito. Todo giraba en torno a la música de las esferas y a las propiedades místicas de los enteros positivos.

Al aceptar el teorema del triángulo rectángulo. Se planteó el problema de Encontrar la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equilátero cuyos catetos miden ambos 1. La imposibilidad de la racionalidad de $\sqrt{2}$ fue devastador para Pitágoras y sus seguidores. Nuestros amigos místicos descubrieron la existencia de otros tipos de números. Los llamaron irracionales.



¿$\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$?

La demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ Introdujo el sistema de los números reales

Grecia

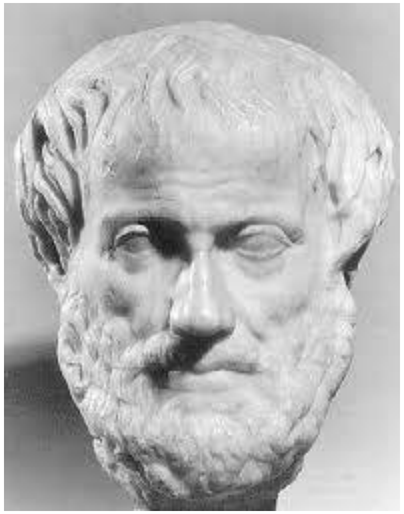
Euclides

Fue el geómetra griego Euclides, quien escribió el primer tratado de geometría. Su libro se llamó “Elementos”.

Toda la geometría que conocemos incluyendo el teorema de Pitágoras provienen de los Elementos de Euclides.

Hoy en día todavía los matemáticos estudian geometría por los Elementos.

Alejandría



Diofanto

Diofanto de Alejandría fue el primer algebrista del mundo Antiguo.

Fue el primero en estudiar las ecuaciones con soluciones enteras

A estas ecuaciones los matemáticos las llaman ecuaciones diofánticas.

En la tumba de Diofanto reza el siguiente poema: *"Su niñez duró la sexta parte de su vida. Le salió la barba a la posterior doceava parte de su vida. Se casó luego a una séptima parte de su vida y cinco años después nació su hijo que vivió la mitad de la vida de su padre quién solamente aguantó el dolor durante cuatro años."* ¿Cuánto vivió Diofanto? El enunciado del poema nos lleva a la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

Al resolver la ecuación obtenemos la vida de Diofanto

$$x=84$$

Alejandría

Erastótenes de Cirene fue un astrónomo alejandrino.

Erastótenes

Midió la longitud de la circunferencia de la tierra solamente sabiendo la distancia entre Alejandría y Siena.

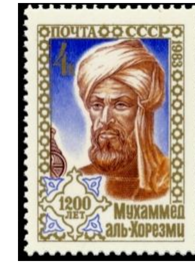
Erastótenes midió el ángulo que forma el obelisco en Alejandría con una recta paralela a la recta que une al obelisco con el centro de la tierra. Erastótenes concluyó que este ángulo mide aproximadamente $7{,}2^{o}$. Como este ángulo es igual al formado entre Alejandría y Siena Basta medir la distancia entre estas dos ciudades. Ambas ciudades distaban de unos 5000 estadios.

$$\frac{5000}{7{,}2} = \frac{l}{360} \Rightarrow l = \frac{5000 \times 360}{7{,}2} = 250.000$$

Un estadio equivale a 158m por lo que el cálculo de Erastótenes da 39.500 Km

Persia y Arabia

Omar Kahyyam
(1048-1122)



Al-Juarismi
(780-850)

Sin dudas el legado matemático que nos dejaron los árabes fue la notación numérica actual.

Antes de la Edad Dorada de Persia y Arabia se utilizaba en Europa la numeración romana.

Números Romanos

I	II	III	IV	V	VI	VII	VII	XI

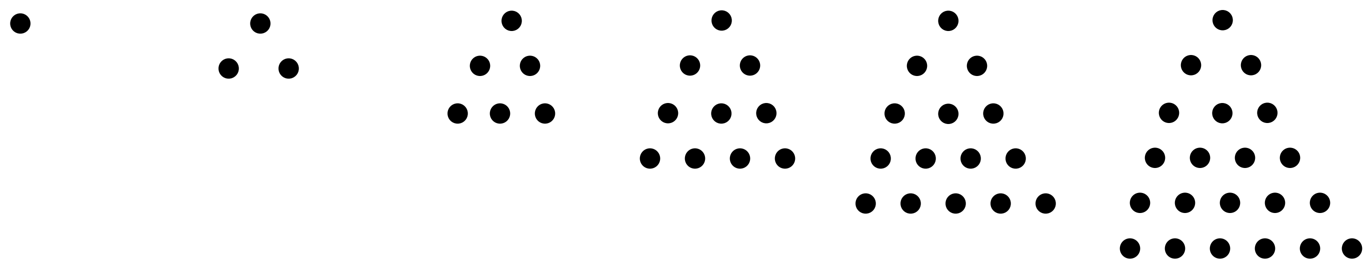
Números Arábigos

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Los árabes inventaron el cero y su notación actual 0. Existieron notables Matemáticos árabes durante la Edad Dorada entre ellos están Omar Kahyyam y Al-Juarismi quien introdujo la palabra álgebra en su obra *“Hisāb al-jabr wa’l muqâbala”* (حساب الجبر و المقابلة) que significa “*El arte de la cancelación y reducción*”.

Números Triangulares

El gnomon era la unidad fundamental de todas las formas geométricas. Si partimos de un gnomon podemos obtener la sucesión numérica de cualquier polígono regular. Ilustramos algunos elementos de la sucesión de números triangulares.

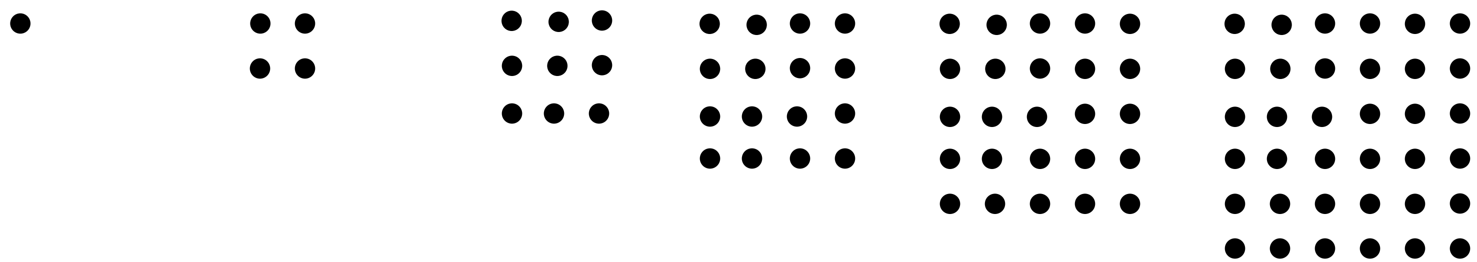


1 3 6 10 15 21

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Números Cuadrados

Por su parte la sucesión de números cuadrados se construía añadiendo gnómones que aumentan de dos en dos.

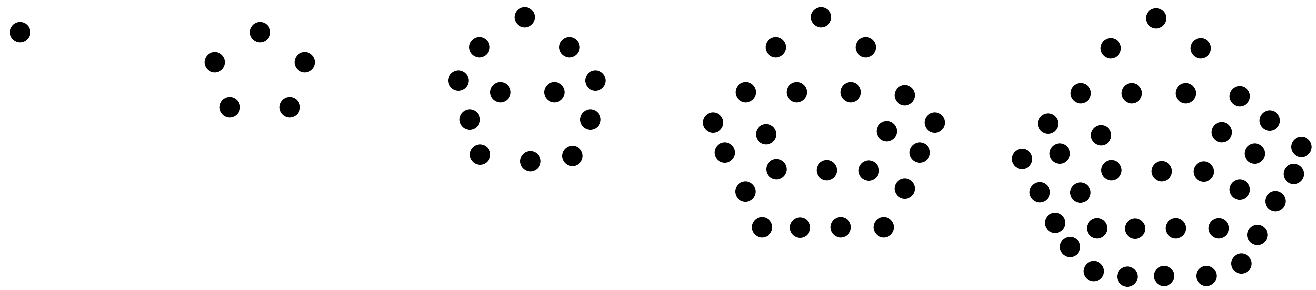


1 4 9 16 25 36

$$C_n = n^2$$

Números Pentagonales

De la misma forma obtenemos la sucesión de números pentagonales.



$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

Números Poligonales

En general se puede construir la sucesión numérica de cualquier polígono regular. La siguiente tabla muestra algunos de estos números poligonales

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
T_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
C_n	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
P_n	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210
H^6_n	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276
H^7_n	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	342
O_n	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	408
N_n	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	474
D_n	1	10	27	52	85	126	175	232	293	370	451	540
E_n	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415	506	606

Grupo Ortogonal y Unitario

En álgebra un grupo es un conjunto no vacío con una operación binaria asociativa que posee elemento neutro y elemento inverso. Cuando un conjunto además de la estructura de grupo tiene estructura de variedad diferenciable decimos que el conjunto es un grupo de Lie.

Los grupos de Lie definen los grupos de transformaciones en la física clásica (newtoniana) y en la física relativista (einsteiniana).

De especial interés es el grupo ortogonal y el grupo unitario

$$O(n) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n} \,/\, \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathbf{t}} = \mathbf{I} \text{ y } \det(\mathbf{A}) \neq 0\}.$$

$$U(n) = \{\mathbf{A} \in C^{n\times n} \,/\, \mathbf{A}\mathbf{A}^{*} = \mathbf{I} \text{ y } \det(\mathbf{A}) \neq 0\}.$$

En ambos casos $\dim O(n) = \dim U(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Isometrías (Grupo de Galileo)

Una transformación del espacio en si mismo es una isometría si preserva la distancia entre puntos.

Geométricamente, las isometrías del plano y del espacio son rotaciones seguidas de una reflexión en el plano de rotación más una traslación en cualquier orden.

Las isometrías del plano y del espacio forman un grupo llamado el grupo de Galileo (movimientos rígidos).

$$\dim G = \frac{n(n+1)}{2}$$

Grupo Spin

El grupo de espinores de dimensión *n.* Denotado por Spin(n) es el grupo de representaciones de los campos de las partículas elementales: los ***bosones*** (fotones, fonones ,gluones, piones, etc.) y los ***fermiones*** (leptones y quarks) en teoría de campos cuánticos (QFT siglas en inglés) las variables bosónicas son conmutativas mientras que las variables fermiónicas son anticonmutativas (como el producto vectorial usual).

La dimensión de grupo Spin(n) es también un número triangular

$$\dim Spin(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Grupo de Lorentz

Hermann Minkowski
(1864-1909)

En relatividad general se utiliza la métrica de Minkowski

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2$$

Con esta métrica se definen los tensores de curvatura. El grupo de transformaciones del espacio-tiempo relativista es el grupo de Lorentz de Hecho este grupo es el grupo maximal que deja invariante el producto minkowsniano de dos vectores. Matemáticamente, el grupo de Lorentz es ***isomorfo*** a grupo ortogonal O(3,1) por lo tanto

$$\dim L = \dim O(3,1) = 10 = T_4$$

También se puede definir el grupo ortogonal generalizado O(n,m) siendo su dimensión

$$\dim O(n,m) = \frac{(n+m)(m+n+1)}{2}$$

Fórmulas de Suma

No es sorprendente encontrar representaciones de números poligonales dentro de las conocidas fórmulas de suma de enteros positivos (números naturales). Con la primera de éstas Gauss a los 10 años de edad sorprendió a su maestro de escuela, afortunadamente este hecho determinó para Gauss su futuro como matemático[1] a continuación se exponen algunas de estas fórmulas de suma de enteros positivos:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{k=0}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

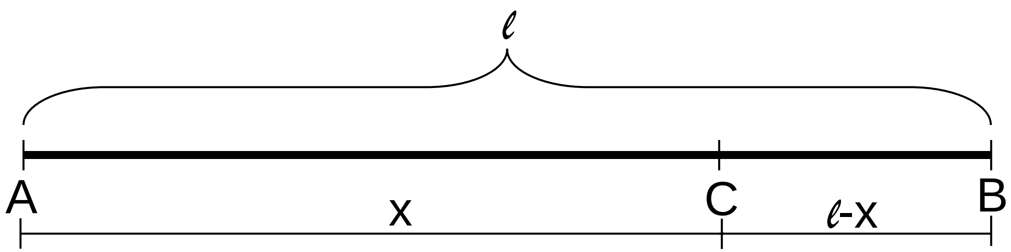
---

[1]***Neumann, J***. "*El Mundo de las Matemáticas Vol. 1*". Pág

La Divina Proporción y El Número Aureo

Pitágoras y sus seguidores estudiaron profundamente luego de la caída del gran sueño del universo racional las propiedades místicas y geométricas del número φ. Siendo éste quizás el más hermoso de todos los números de la Matemática. El número φ proviene del estudio de la proporción áurea también conocida cómo “divina proporción” que explicamos al detalle a continuación:

Sea AB un segmento de longitud ℓ. Decimos que el punto C divide al segmento AB en proporción áurea si



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{l}{x} = \frac{x}{l-x} \Rightarrow l^2 - lx = x^2 \Rightarrow x^2 + lx - l^2 = 0.$$

La Divina Proporción y El Número Aureo

Al resolver esta ecuación de segundo grado obtenemos

$$x^2 + lx - l^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = \frac{-l \pm \sqrt{5l^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} l$$

Descartando la raíz negativa ya que carece de sentido fisíco obtenemos

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} l \qquad \cancel{x = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2} l}$$

Definimos φ como el inverso multiplicativo de esta constante que multiplica a ℓ

$$\varphi = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033988749894848204\ldots$$

Propiedades Algebraicas de φ

Un simple cálculo demuestra que φ es el único número real positivo que tiene la propiedad

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Dividiendo la ecuación anterior por φ tenemos

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

Esta relación recursiva nos da la hermosa representación de φ en fracciones continuas

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

Propiedades Algebraicas de φ

También de la propiedad algebraica de φ

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Si extraemos la raíz cuadrada nos queda

$$\varphi = \sqrt{1+\varphi}$$

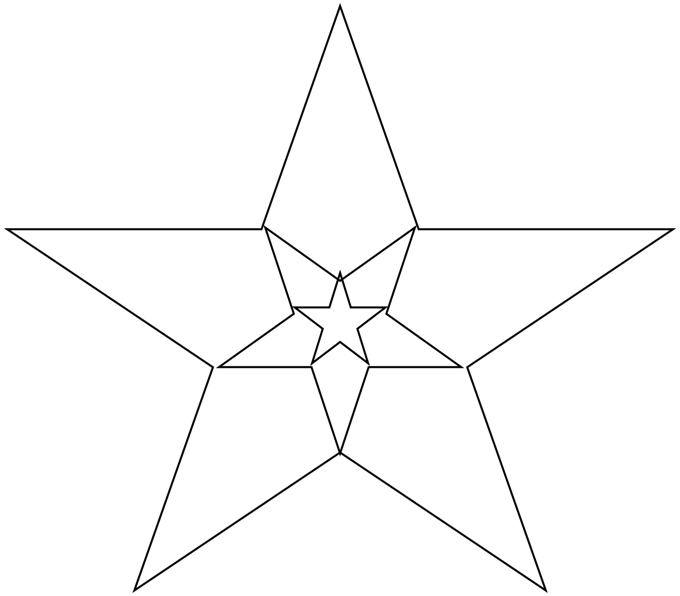
Obteniendo así otra bella representación de φ en raíces anidadas

$$\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\cdots}}}}}}}}}}$$

Propiedades Geométricas de φ

El número áureo aparece en todos los objetos geométricos que poséan algún tipo de simetría pentagonal, esto está directamente asociado con la raíz cuadrada de 5.

La figura en donde aparece con más frecuencia el número de oro es el pentágono estrellado (*pentagrama*). El pentagrama tiene 10 triángulos isósceles: 5 triángulos acutángulos y 5 obtusángulos. En ambos triángulos la razón entre el lado mayor y el menor es φ. Otra propiedad del pentagrama que observaron los pitagóricos es la posibilidad de reproducir la figura indefinidamente en su interior.



Sucesión de Fibonacci

Leonardo Fibonacci
(1170-1250)

Sin dudas la sucesión que ha tenido una de las mejores aplicaciones dentro y fuera de la matemática es la sucesión de Fibonacci. Esta sucesión se define de manera recursiva sumando su dos términos anteriores. Formalmente,

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

usando el principio de inducción se demuestra que el término general de la sucesión de Fibonacci es

$$F_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$$

Sucesión de Fibonacci

Leonardo Fibonacci
(1170-1250)

Son incontables las aplicaciones de esta sucesión dentro de la matemática. La más notable de ellas es que el cociente entre un número de Fibonacci y su predecesor aproxima el número áureo a medida que la sucesión crece, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \varphi$$

el número de oro aparece también en toda la arquitectura y escultura griega. Por ejemplo el cociente entre la base y la altura del partenón de Atenas es φ

Sucesión de Fibonacci

Leonardo Fibonacci
(1170-1250)

En la naturaleza es sorprendente como aparece la sucesión de Fibonacci como una especie de “diseño natural” de los seres vivos, veamos la siguiente película

Diseño Aureo del Ser Humano

El hombre tampoco escapa a las hermosas proporciones naturales del número de oro, se puede encontrar al número φ en

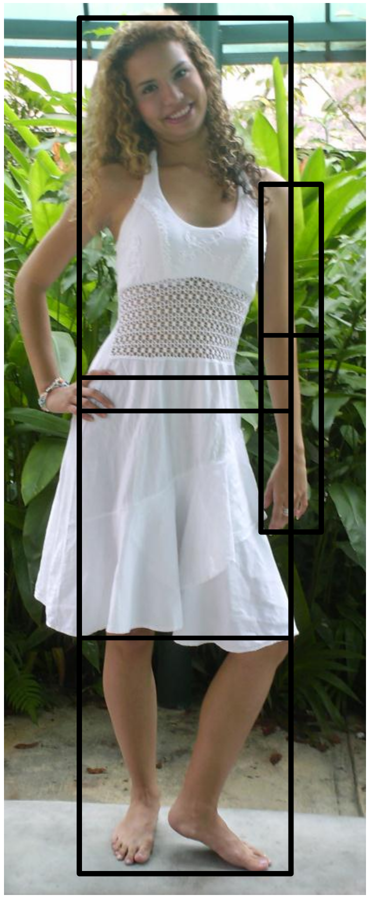


Foto: Ariana Porras

el cociente entre la estatura y la altura del ombligo. En el caso de Ariana su altura es de 1,72m y la altura de su ombligo es 1,03m aquí el cociente entre las dos alturas es 1,669

El cociente entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla. (Pendiente)

El cociente entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia entre el codo a los dedos. En el caso de Ariana la distancia de su hombro al dedo mayor es de 72cm y la distancia entre su codo al dedo mayor es de 44cm aquí el cociente entre ambas distancias es de 1,6363

Diseño Aureo del Ser Humano

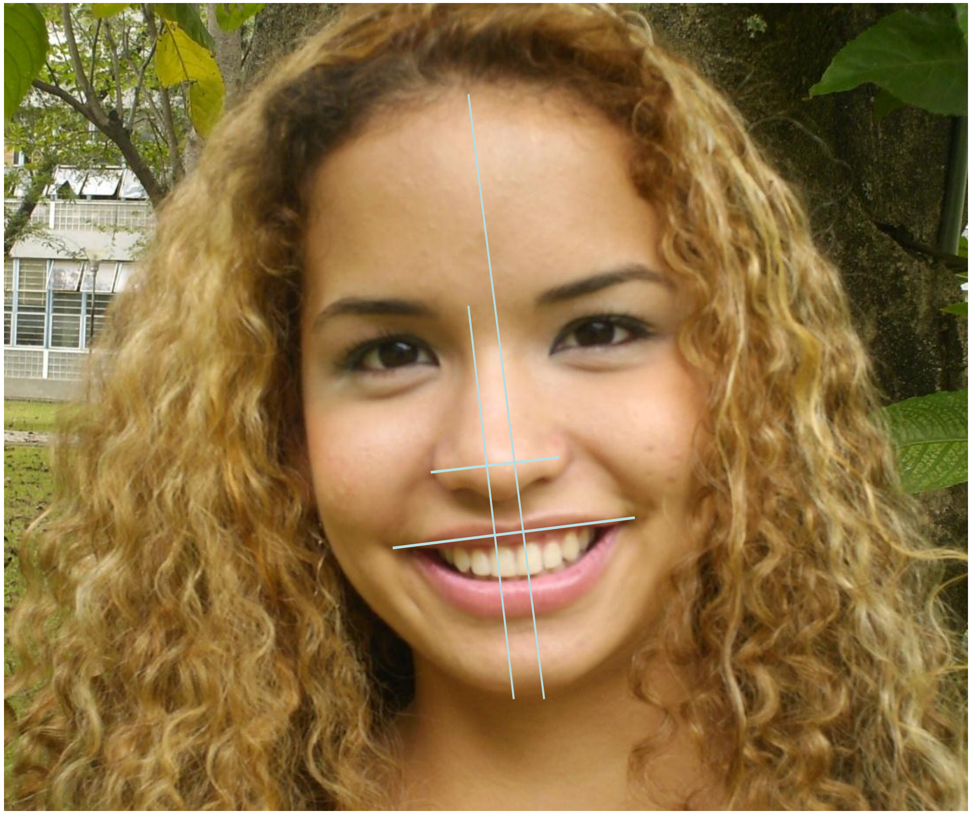


Foto: Ariana Porras

La razón entre el diámetro de la boca y el diámetro de la nariz. En el caso de Ariana el diámetro de la boca es de 6 cm y diámetro de la nariz es de 5 cm,. El cociente entre ambos diámetros es de 1,2

La razón entre la longitud de la cara y la distancia del entrecejo al mentón (Pendiente)

Diseño Aureo del Ser Humano

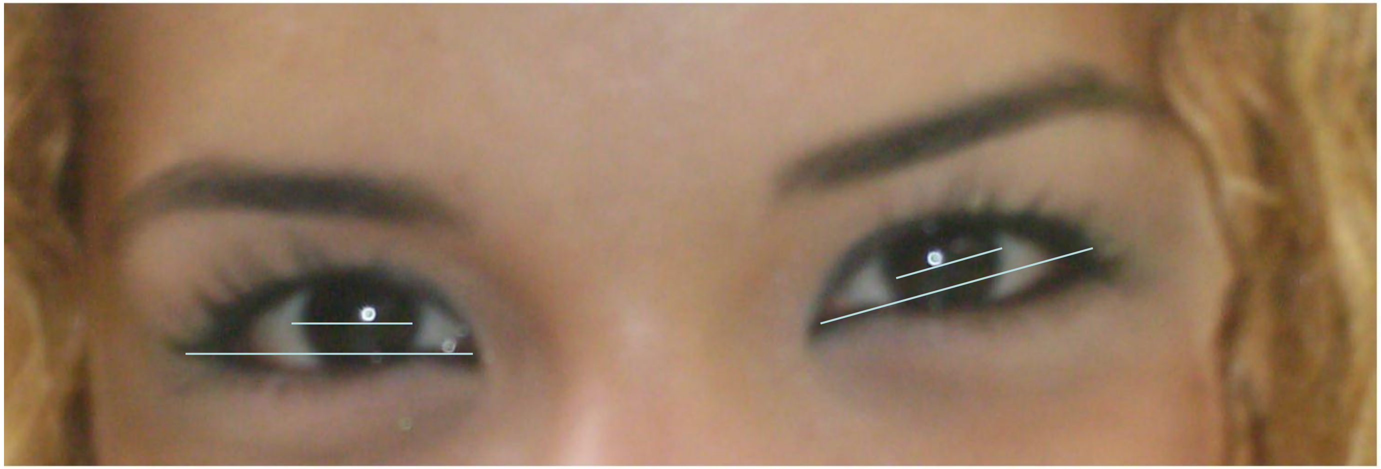


Foto: Ariana Porras

También el cociente entre el diámetro del globo ocular y el diámetro del iris es una aproximación de φ.

Diseño Aureo del Ser Humano

Foto: Ariana Porras

La relación entre el primer hueso de los dedos (metacarpiano) y la primera falange así como la razón entre dos falanges consecutivas da φ. (Pendiente)

El número π

Otro número bastante conocido desde la escuela y que ha despertado gran fascinación es el famoso número π. Se define como el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Su primer valor aproximado se encuentra en el famoso papiro Rhind escrito por Ahmes en el año 1800 a.c.

$$\pi \approx \frac{256}{81} = 3{,}16049\ldots$$

En Mesopotamia se halló un valor aproximado de π midiendo segmentos obteniendo.

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{8}$$

El número π

Otra aproximación bastante conocida es la de Claudio Ptolomeo

$$\pi \approx \frac{377}{120} = 3{,}1416\ldots$$

En la época dorada de la matemática árabe (siglos XI y XII) se utilizó el siguiente valor

$$\pi \approx \frac{22}{7} = 3{,}1485\ldots$$

El número π

John Wallis
(1616-1703)

Gottfried Wilhem Leibnitz
(1646-1716)

Matemáticamente π es un número irracional (que no es fracción de dos enteros) y trascendente (no es raíz de un polinomio con coeficientes enteros) desde el punto de vista de sucesiones convergentes tenemos el conocido producto de Wallis

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

También está la Fórmula de Leibnitz en serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\cdots=\frac{\pi}{4}$$

El número π

La hermosa representación de π en fracciones continuas es

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \cfrac{36}{13 + \cfrac{49}{\ddots}}}}}}}$$

El número π

El siguiente poema da los veinte primeros dígitos de π.

“Soy y seré a todos definible
Mi nombre tengo que daros
Cociente diametral siempre inmedible
Soy de los redondos aros”

Basta contar el número de letras de cada palabra para obtener la aproximación.

El número e

Otro número importantísimo en la matemática además de π, es el número e hay muchas maneras de definirlo pero tal vez la más sencilla es la clásica vía límites.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

También es bastante conocida la expansión en series de potencia de la función exponencial

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$

El número e

La representación de e en fracciones continuas es

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

El número e

John Naiper
(1550-1617)

La función exponencial es la única función de clase C^{∞} (funciones que tienen derivadas continuas de todos los órdenes) que queda invariante al derivarse o al integrarse

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \int_{-\infty}^{x} e^t dt = e^x$$

Ninguna otra función tiene esta propiedad. El número e es la base del logaritmo natural o logaritmo neperiano que se define calculando el área bajo la hipérbola 1/x

$$\ln(x) = \int_0^x \frac{dt}{t}$$

Números Complejos

El cuerpo de los números complejos, se define con la finalidad de encontrar la solución de la ecuación de segundo grado.

$$x^2 + 1 = 0$$

No existe ningún número real que sea raíz de esta ecuación cuadrática. Por lo Tanto, se crea la necesidad de definir una extensión de los números reales que permita hallar una raíz de esta ecuación. Así nacieron los números complejos. Formalmente, el cuerpo de números complejos es la extensión en transcendente i del cuerpo de números reales

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}[i] \big/ i^2 + 1$$

Números Complejos

Abraham De Moivre
(1667- 1754)

La belleza de los números complejos es aún mayor que la de los números reales, la solución de la ecuación compleja

$$z^n + 1 = 0$$

Representan los vértices del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unitaria |z|=1. Por la fórmula de De Moivre las n raíces de esta ecuación son

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{con} \quad k = 1, \ldots, n$$

Números Complejos

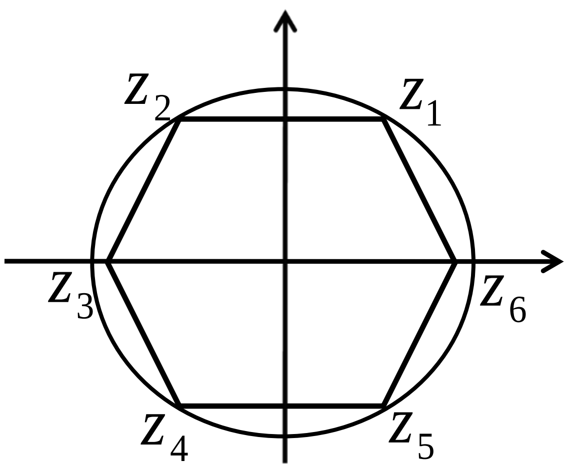
En el caso particular de la ecuación

$$z^6 + 1 = 0$$

Sus raíces son

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad z_3 = e^{i\pi} \quad z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \quad z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} \quad z_6 = e^{i2\pi} = 1$$

Geométricamente, la ubicación de estas raíces en el plano complejo es la siguiente



Números Complejos

Jospeh-Louis Lagrange
(1736-1813)

También con la ecuación $z^n+1=0$. Se puede demostrar la identidad de Lagrange

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

Y del estudio de las raíces de $(1-z)^n-1$ obtenemos esta preciosa identidad

$$\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$$

Números Complejos

Al estudiar la ecuación $z^n-1=0$ obtenemos estas hermosas identidades

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}=-1$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{6\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}=0$$

La Fórmula Integral de Cauchy

Una de las herramientas más útiles del análisis complejo es, sin dudas, la fórmula integral de Cauchy. Ésta establece que si f es una función analítica (función de variable compleja cuya parte real e imaginaria satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann) dentro de un dominio γ simplemente conexo (región del plano complejo que es contráctil a un punto) entonces el valor de $f(z_0)$ donde z_0 es cualquier punto interior de γ viene dado por la fórmula:

$$f(z_0)I(z_0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Donde $I(z_0,\gamma)$ es el índice z_0 en γ (número de vueltas que le da γ a z_0).
En la mayoría de los casos $I(z_0,\gamma) = 1$ por lo que la versión más común de la fórmula integral de Cauchy es

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

El Teorema Fundamental del Álgebra

La fórmula integral de Cauchy tiene incontables aplicaciones dentro de la teoría de funciones de variable compleja. Con la fórmula integral de Cauchy se demuestra el Teorema de Liouville que dice que toda función entera (analítica sobre todo el plano complejo) y acotada es constante. Sorprendentemente con el teorema de Liouville se demuestra el teorema fundamental del álgebra que dice que todo polinomio de grado n con coeficientes complejos se factoriza completamente en el cuerpo C, dicho de otra manera todo polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces complejas.

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

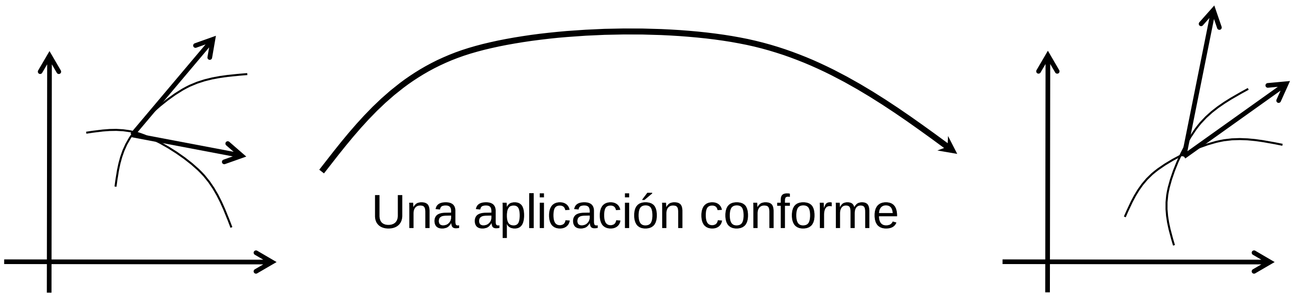
Por lo tanto los números complejos resuelven por completo el problema de la existencia de las raíces de cualquier polinomio, distinto al problema de encontrar tales raíces por medio de radicales. Abel demostró la imposibilidad de hallar raíces por medio de radicales para polinomios de grado mayor o igual a 5.

Tranformaciones de Möebius

Otra de las más hermosas herramientas que encontramos dentro del análisis complejo son las transformaciones lineales racionales mejor conocidas como transformaciones de Moëbius decimos que una aplicación biyectiva *T* del plano complejo en si mismo es una transformación de Moëbius si

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad \text{con}\ ad-bc\neq 0.$$

Las transformaciones de Moëbius son una clase bastante específica de las aplicaciones conformes (una aplicación conforme es aquella que preserva ángulos entre avectores)



Tranformaciones de Möebius

La propiedad geométrica más preciosa que tienen este tipo de transformaciones es que toda transformación de Möebius es composición de traslaciones, rotaciones dilataciones, e inversiones tal como lo muestra la siguiente película

Expansión de Laurent

La teoría de funciones de variable compleja también sirve para calcular aquellas integrales impropias cuya primitiva es imposible calcular mediante combinaciones de funciones elementales. La herramienta para calcular estas integrales es el Teorema del Residuo. Toda función analítica f admite una única expansión en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (z - z_o)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_o)^n}$$

donde

$$a_n = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{y} \quad b_n = \int_\gamma f(z)(z - z_0)^{n-1} dz$$

Teorema del Residuo

Al coeficiente b_1 de la expansión de Laurent de *f* en se le conoce como residuo de *f* en z_0 y se denota por Res(*f*,z_0). El teorema del residuo establece que si *f* es Analítica en un contorno γ que contiene a z_0 en su interior entonces la integral de línea de *f* a lo largo de γ es igual a

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k) I(\gamma, z_k)$$

Calcular los residuos de una función analítica es sumamente sencillo, en el peor de los casos hay que calcular un determinante pero en la mayoría de los casos los residuos son calculados con unos límites elementales.

Teorema del Residuo

Lo cierto es que con el Teorema del Residuo se obtienen entre otras las siguientes hermosas identidades del cálculo integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-m} \qquad \int_0^\infty \frac{\cosh ax}{\cosh x}\,dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{a\pi}{2}} \qquad \int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dz = \pi \ln 2$$

Fórmula de Euler

Brook Taylor
(1685-1731)

Tomando la expansión en series de Taylor alrededor de z_0=0 obtenemos las siguientes representaciones del coseno y el seno.

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Y como las potencias de i forman un ciclo infinito de orden 4 tenemos que

$$i^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = \dot{4} \\ i \text{ si } n = \dot{4}+1 \\ -1 \text{ si } n = \dot{4}+2 \\ -i \text{ si } n = \dot{4}+3 \end{cases}$$

Fórmula de Euler

Leonhard Euler
(1707-1783)

Al sustituir el ciclo de i en las expansiones de Taylor del seno y del coseno eliminamos los signos alternantes obteniendo

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} \qquad i \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Basta sumar ambas series para obtener la expansión de Taylor de la exponencial evaluada en iz

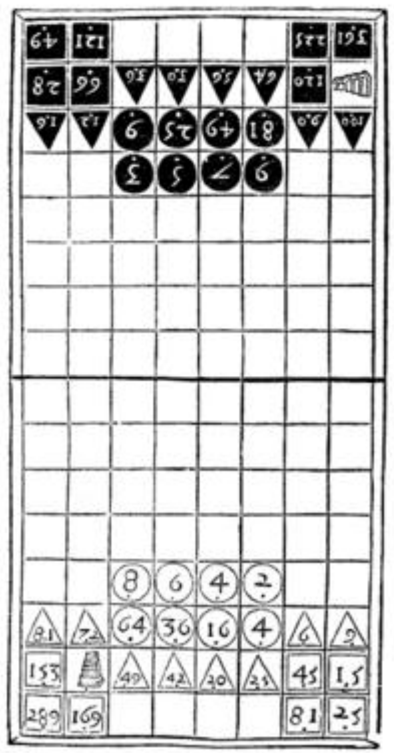
$$\cos z + i \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{n}}{n!} = e^{iz}$$

Esta última identidad se conoce como la fórmula de Euler que relaciona la exponencial con el coseno y seno. Al sustituir z=-π obtenemos

$$e^{-i\pi} = \cos\pi - i \sin \pi = -1 \Rightarrow e^{-i\pi} + 1 = 0.$$

Rithmomachia

Quizás dentro de la historia de los juegos matemáticos, uno de los más apasionantes es sin lugar a dudas Rithmomachia, Rythmomachy o Rithmomaquia, inventado por Boecio, aunque algunos historiadores se lo atribuyen al mismo Pitágoras. Fue un juego medieval que alcanzó su clímax durante los siglos XI y XII pero pronto cayó en el olvido debido a la complejidad del mismo.



Rithmomachia

Rithmomachia significa “La batalla de los Números” y es el combate entre los pares contra los impares. El tablero era de 8x16 casilla (dos tableros de ajedréz)
Al no ser estandarizado por una organización internacional se encuentran numerosas versiones y reglas del juego. Hay versiones del juego que no permitían movimientos en diagonales, otras versiones impedían avanzar a lo largo de los lados del tablero. En general las partidas tardaban un tiempo considerable, ya que, requería algo de destreza mental de cálculo numérico por parte de los jugadores.
En el Seminario de Geometría daré una charla completa sobre Rithmomachia explicando los detalles del juego así como los diferentes tipos de partida.
Recientemente encontré esta hermosa edición a la venta y cuesta £80 con todo y el envío.

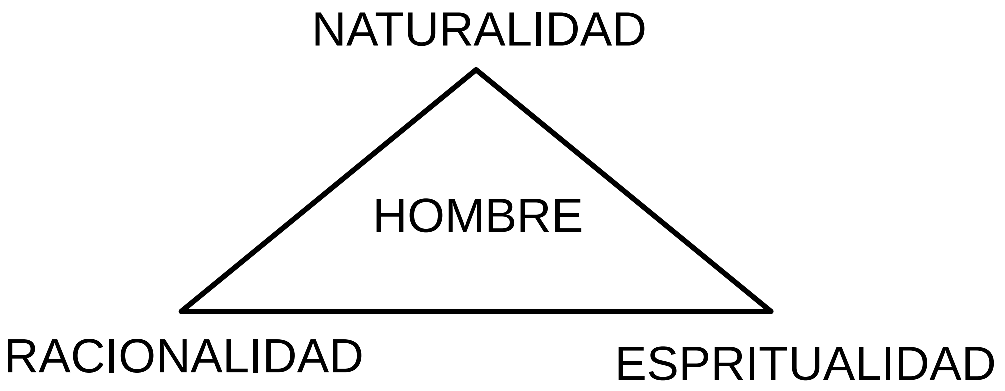
El "Ser Cientifico"

Cada vez que nos adentramos en lo más profundo del conocimiento científico nos encontramos con un mundo maravilloso, ilimitado, sorprendente, místico, hermoso, caótico pero sobre todo ordenado con una lógica proveniente del ser supremo. Ese diseño natural con que Dios va confeccionando el universo definitivamente es un lenguaje matemático. No importa si hacemos física, química biología, informática, economía o medicina, en cualquier lugar en donde se utilice el pensamiento científico encontraremos a la matemática colocando las cosas en su justo lugar.

Las hermosas relaciones entre los números que encontramos prácticamente en cualquier lado nos dan la impresión de que Pitágoras desde hace ya mucho tiempo nos dejó un mensaje sencillo, elemental, tan simple que no importa cuanto avance la ciencia a lo largo de la espiral de Fibonacci siempre encontraremos algún tipo de relaciones entre los números que describen el comportamiento de los fenómenos estudiados.

El "Ser Cientifico"

Pero no debemos olvidar de que no sólo existe el pensamiento científico hay que recordar que el hombre yace en una tríada que comprende lo racional (ciencia) lo espiritual (religión, teología, etc.) y lo natural (ético) de la cual no puede escapar



Depende de nosotros tomar la decisión de cual vértice estamos mas cercano y de cual estamos más alejado. Lo más sensato es tratar de ubicarse en el centro del triángulo y por todos los medios alejarse de los extemos.

El “Ser Cientifico”

El científico tiende de manera natural a ser mas tolerante y menos fanático que el religioso que tiende naturalmente a todo lo contrario (mas fanático y menos tolerante). Sin embargo a veces los científicos tenemos la tendencia a menospreciar el conocimiento religioso partiendo de la base de no poder estudiar a Dios a través de la lógica o la razón. Olvidando que el conocimiento teológico no es científico es un acto de fe en donde la racionalidad no tiene lugar.

Dentro de la ciencia tenemos nuestros propios actos de fe ¿Qué es la vida? ¿Qué es el número? ¿Qué es la materia? Y tenemos comportamientos típicos de cualquier grupo religioso que no discute sus fundamentos (dogma central de la biología). A pesar de toda nuestra ciencia las preguntas fundamentales ¿Qué somos? ¿De dónde venimos? ¿Hacia dónde vamos? ¿Qué hacemos aquí? Aún siguen sin responderse.

El "Ser Cientifico"

Es allí donde entra a jugar nuestra parte natural, nuestro compromiso como científico, nos debe llevar a actuar de manera moralmente correcta. El problema está en definir qué es lo bueno o qué es lo malo. Creo que es sumamente complicado, ya que, nuestros sistemas de interpretación de la realidad son arbitrarios. Lo más sano es estar tranquilo cada uno con su conciencia.

Pitágoras se inició en Egipto dentro de una ruta hacia un conocimiento superior que fue transmitido de generación en generación y a pesar de eso el legado que ha dejado dentro de la ciencia todavía tiene sus repercusiones. Es perfectamente factible ser un científico y a la vez ser un místico (el grado de misticismo lo pone uno) . Es como ver la sonrisa de un niño, oler una flor, escuchar la música de fondo, besar a una mujer (o a un hombre en el caso de las mujeres), contemplar un atardecer a la orilla del mar, observar el vuelo de las aves cuando se pone el sol son experiencias que causan sensaciones en los seres humanos que no pueden medirse dentro de un laboratorio, simplemente pertenecen a otra dimensión.

Último Flash-Back

Si despejamos el uno de la última ecuación proveniente de la fórmula de Euler obtenemos

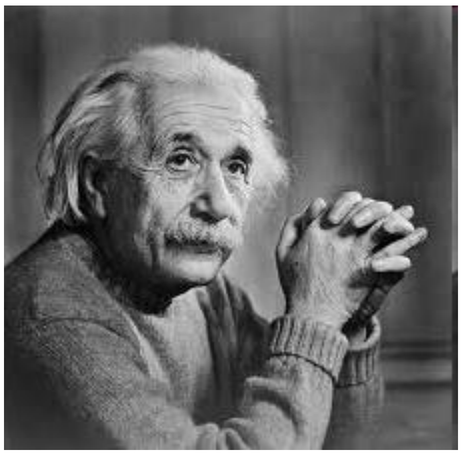
$$e^{-i\pi} = -1$$

Según Juan Guevara, esta fórmula representa al “padre, hijo y espíritu santo en uno sólo”. Lo que me hace pensar que Pitágoras tenía toda la razón

$$\mathrm{DIOS} = 1$$

“El Azar no existe. Dios no juega a los dados.”

Albert Einstein (1879-1955)



“La Matemática es el alfabeto con el cual Dios ha escrito el universo”

Galileo Galilei (1564-1642)

GRACIAS!!!!!

Agradecimientos

Quisiera manifestar mi más sincero agradecimiento a la Dirección de la Escuela Parroquial de San José por haber aceptado la divulgación de esta presentación a los estudiantes de la Escuela.

También quiero agradecer la colaboración de Ariana Porras Rondón apreciada amiga por haber aceptado hacer el trabajo fotográfico y ser la modelo en la sección del Diseño Aureo del Ser Humano.

A Dios todopoderoso.

A ustedes.