2

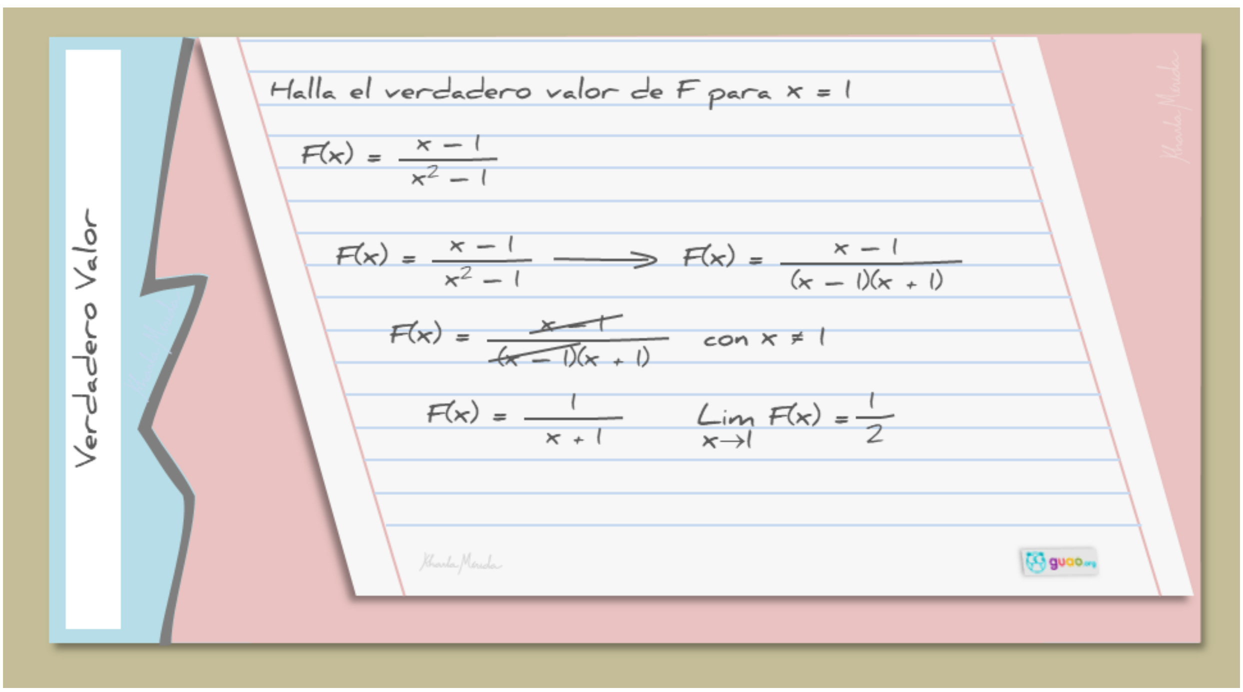
2da Unidad

Verdadero Valor

2.1 Límite de una Función, Indefinición e Indeterminaciones

Nuestros límites no son más que oportunidades para desarrollar nuestras capacidades, y encontrar nuevas e inimaginables posibilidades.

Descripción



Con verdadero valor enriquecemos en buena medida las herramientas que nos permiten estudiar el comportamiento de las funciones. Ya que podemos saber hacia dónde tiende una función para valores específicos y notables de la variable. Este tema tiene elementos y conceptos nuevos e importante para el análisis de funciones.

Conocimientos Previos Requeridos

Producto Notable, Polinomios, Factorización, Funciones, Ruffini.

Contenido

Verdadero Valor de Límite de una Función, Indefiniciones e Indeterminaciones, Ejercicios.

Guiones Didácticos

VERDADERO VALOR. Límite de una Función

VERDADERO VALOR. Indefinición e Indeterminaciones

VERDADERO VALOR. Ejercicios 1

VERDADERO VALOR. Ejercicios 2

Los guiones didácticos que aparecen en este objetivo corresponden a videos en desarrollo.

Guiones Didácticos

VERDADERO VALOR. Límite de una Función.

Otra aplicación valiosa de factorización por Ruffini, y factorizaciones en general, es la de hallar el **Verdadero Valor** de Funciones Racionales para valores de x que no pertenecen a su Dominio.

Verdadero Valor. Es el valor al cual tiende una función para un valor específico de la variable.

Observa que hablamos de "**el valor al cual tiende la función**" y no de "la imagen de la función", veamos un ejemplo de lo que esto quiere decir.

Ejemplo

Halle el verdadero valor de la función *f* para x = 1, con $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$.

Primero intentaremos hallar el valor de la imagen f(1). Para esto sustituimos x =1 en la imagen de la función.

$$f(1)=\frac{1-1}{1^2-1}=\frac{0}{0}$$

Lo que hemos obtenido es una **Indeterminación**, es decir, un resultado que no tiene representación gráfica ni valor real correspondiente.

La función no tiene imagen real para x = 1, entonces debemos hallar a qué valor se acerca la función cuando x se acerca a 1. Esto es lo que se llama hallar el **Verdadero Valor de la Función.**

Transformaremos la función en una función equivalente, simplificando la expresión de su imagen.

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$$

Factorizamos el denominador

$$f(x)=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

Simplificamos el factor x – 1 aclarando que x ≠ 1, (el valor que generó la indeterminación en *f*).

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\ ,\ x\neq 1$$

Ahora aplicamos a f el límite para cuando x tiende a 1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$

Sustituimos el valor al cual tiende x en cada x de la expresión.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{1+1}$$

Efectuamos la suma y obtenemos ½ como Verdadero Valor de la función para x = 1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}$$

Observa: la función no está definida para x =1, no tiene imagen, pero podemos hallar el valor al cual se acerca transformando la función en una más simple que nos dé un resultado compresible como valor de la imagen.

El procedimiento que desarrollamos prepara las bases para el estudio de **Límite de Funciones**, correspondiente a **Cálculo I** (básico universitario)

Por ahora sólo conoceremos cómo se opera, y dejaremos el estudio formal de **Límites** para **Cálculo I**, en la universidad.

Sea la función *f*, con $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^4-5x^3-13x^2-5x-14}$ y Domf = R – {-2,7}.

Hallar el verdadero valor de f, si existe, para x = -2 y para x = 7

Transformaremos la función en una función equivalente, simplificando la expresión de su imagen.

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^4-5x^3-13x^2-5x-14}$$

Factorizamos el numerador y denominador

	1	-5	-13	-5	-14
-2		-2	14	-2	14
	1	-7	1	-7	0
7		7	0	7	
	1	0	1	0	

Binomio Cuadrado: x^2+1

x^2-4

Diferencia de Cuadrados:

$=(x-2)(x+2)$

Productos de Conjugadas

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^4-5x^3-13x^2-5x-14}$$
$$=(x+2)(x-7)(x^2+1)$$

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-7)(x^2+1)}$$

Simplificamos el factor x + 2 aclarando que x ≠ -2 (el valor que anula a x + 2)

$$f(x)=\frac{x-2}{(x-7)(x^2+1)}\ ,\ x\neq -2$$

Para x =-2

Ahora aplicamos a f el límite para cuando x tiende a -2.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{(x-7)(x^2+1)}$$

Sustituimos el valor al cual tiende x en cada x de la expresión.

$$=\frac{-2-2}{(-2-7)\left((-2)^2+1\right)}$$

Sustituimos el valor al cual tiende x en cada x de la expresión.

$$=\frac{-4}{(-9)(4+1)}=\frac{-4}{36}=-\frac{1}{9}$$

El valor al cual tiende f cuando x se acerca a -2 es: $\boxed{\lim_{x\to -2}\dfrac{x-2}{(x-7)(x^2+1)}=-\dfrac{1}{9}}$

Para x =7

El factor x – 7 no puede simplificarse.

$$f(x)=\frac{x-2}{(x-7)(x^2+1)}\ ,\ x\neq -2$$

Aplicamos a f el límite para cuando x tiende a 7.

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-2}{(x-7)(x^2+1)}=\frac{7-2}{(7-7)(7^2+1)}=\frac{5}{0\cdot 50}=\frac{5}{0}$$

llegamos a 5 sobre cero. Sabemos que esto tiende a infinito.

$$\boxed{\lim_{x\to 7}\frac{x-2}{(x-7)(x^2+1)}=\infty}$$

VERDADERO VALOR. Indefinición e Indeterminaciones

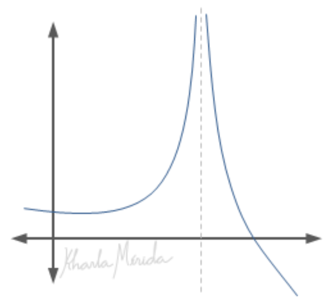
Hemos visto dos conceptos ideales en esta lección: **Indefinición** e **Indeterminación**. Es importante que se tenga clara la diferencia entre uno y otro, porque de esto depende las conclusiones que saquemos al estudiar el comportamiento de una función.

Indefinición. Es el nombre que se da a infinito.

Cuando una función tiende a infinito para un valor de x específico, se dice que **la función está Indefinida** para ese valor de x.

Gráficamente, se reconoce por la presencia de una **Asíntota**.

Asíntota. Recta imaginaria a la que se acerca el gráfico de una función en el infinito.

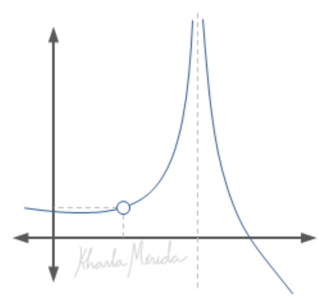


Indeterminación. Es el nombre que se da a formas matemáticas sin valor real. Las indeterminaciones básicas son:

$$\frac{0}{0}\,,\ \frac{\infty}{\infty}\,,\ \infty-\infty\,,\ 1^{\infty}\,,\ \infty^{\infty}\,,\ 0\cdot\infty$$

Cuando una función presenta una de las formas indeterminadas para un valor de x específico, se dice que **la función está Indeterminada** para ese valor de x.

Gráficamente, se reconoce por la presencia de un **Hueco** en el trazo, si el verdadero valor es un número real, o una **Asíntota** si el verdadero valor resulta **indefinido**.



¿Por qué 0/0 es una indeterminación?

Por una parte, sabemos desde estudios primarios que no existe la división entre cero.

Sin embargo, cuando dividimos un número entre valores cada vez más pequeños (acercándonos a cero), el cociente se hace cada vez mas grande.

Esta tendencia ocurre siempre que hacemos que el denominador se acerque a cero tanto como sea posible, y se representa matemáticamente con ∞, infinito, lo que significa que se trata de un valor que crece indefinidamente (crece sin límite).

$$\frac{1}{0{,}1}=10$$

$$\frac{1}{0{,}01}=100$$

$$\frac{1}{0{,}0001}=10.000$$

$$\frac{1}{0}\to\infty$$

Por otra parte, cero dividido entre cualquier número es cero.

$$\frac{0}{1}=\frac{0}{5}=\frac{0}{7}=\frac{0}{125}=0$$

Entonces, tenemos una contradicción:

$\frac{k}{0}\to\infty$ Cualquier número real dividido entre cero tiende a infinito.

$\frac{0}{k}=0$ Cero dividido entre cualquier número real es cero.

$\frac{0}{0}=?$ Entonces, cero entre cero ¿Es infinito? ¿Es cero?

VERDADERO VALOR. Ejercicios 1

Sea la función *f*, con $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ y Domf = $(-\infty\ ,-1)\cup(1\ ,\infty)$.

Hallar el verdadero valor de f, si existe, para x = -1 y para x = 1.

Transformaremos la función en una función equivalente, simplificando la expresión de su imagen.

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Factorizamos la diferencia de cuadrados dentro de la raíz.

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}$$

Separamos en dos factores la raíz.

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$$

Racionalizamos $\sqrt{x-1}$ en el denominador.

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}\cdot\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

Efectuamos producto de raíces en el denominador y simplificamos la raíz.

$$f(x)=\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\cancel{\left(\sqrt{x-1}\right)^2}}$$

Simplificamos el factor x – 1 de numerador y denominador, aclarando que $x\neq1$,

$$f(x)=\frac{\cancel{(x-1)}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\cancel{(x-1)}}\ ,\quad x\neq1$$

Hemos transformado la función eliminando el factor x – 1 del denominador.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\ ,\quad x\neq1$$

Para $x=1$

Ahora aplicamos a f el límite para cuando x tiende a 1.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

Sustituimos -1 en cada x de la expresión. Y efectuamos los cálculos.

$$=\frac{\sqrt{1-1}}{\sqrt{1+1}}=\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{2}}=\frac{0}{\sqrt{2}}=0$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=0$$

El valor al cual tiende f cuando x se acerca a 1 es 0. $\lim_{x\to1}f(x)=0$

Para $x=-1$

Ahora aplicamos a f el límite para cuando x tiende a -1.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Sustituimos -1 en cada x de la expresión. Y efectuamos los cálculos.

$$=\frac{-1-1}{\sqrt{(-1)^2-1}}=\frac{-2}{\sqrt{0}}=\frac{-2}{0}=-\infty$$

f tiende a menos infinito cuando x se acerca a -1. $\lim_{x\to-1}f(x)=-\infty$

VERDADERO VALOR. Ejercicios 2

Sea la función *f*, con $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{x^4-15x^3+59x^2-33x-108}$ y Domf = R – {-1, 3, 4, 9}

Hallar el verdadero valor de f, si existe, para x = 3.

Transformaremos la función en una función equivalente, simplificando la expresión de su imagen.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x^4-15x^3+59x^2-33x-108}$$

Factorizamos numerador y denominador:

$$f(x)=\frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+1)(x-4)(x-9)}$$

Simplificamos el factor x – 3 de numerador y denominador, aclarando que $x\neq 3$.

$$f(x)=\frac{\cancel{(x-3)}(x+5)}{\cancel{(x-3)}(x+1)(x-4)(x-9)}\ ,\quad x\neq 3$$

$$f(x)=\frac{x+5}{(x+1)(x-4)(x-9)}\ ,\quad x\neq 3$$

Para x =3

Ahora aplicamos a f el límite para cuando x tiende a 1.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{(x+1)(x-4)(x-9)}$$

Sustituimos -1 en cada x de la expresión. Y efectuamos los cálculos.

$$=\frac{3+5}{(3+1)(3-4)(3-9)}=\frac{8}{4\cdot(-1)\cdot(-6)}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{(x+1)(x-4)(x-9)}=\frac{1}{3}$$

El valor al cual tiende f cuando x se acerca a 1 es 0. $\lim_{x\to 3}f(x)=\dfrac{1}{3}$

Ejercicios

Las funciones que siguen no están definidas para todos los reales, hallar el verdadero valor para los reales que se indican en cada caso

1. $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+x-6}$ para x = 2

2. $f(x)=\dfrac{x^3+4x^2-x+4}{2x^2+x-3}$ para x = 1

3. $f(x)=\dfrac{4x^3+4x^2-3x}{18x^3+27x^2-2x-3}$ para x = -3/2

4. $f(x)=\dfrac{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}{x^5-6x^4+8x^3+16x^2-48x+32}$ para x = 2

4. $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{3-\sqrt{x^2+8}}$ para x = -1 , x = 1

Lo Hicimos Bien?

1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{8}{5}$

2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

3. $\lim\limits_{x\to -3/2} f(x)=\dfrac{24}{77}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$ No existe verdadero valor

5. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\dfrac{3}{2}$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{3}{2}$