9

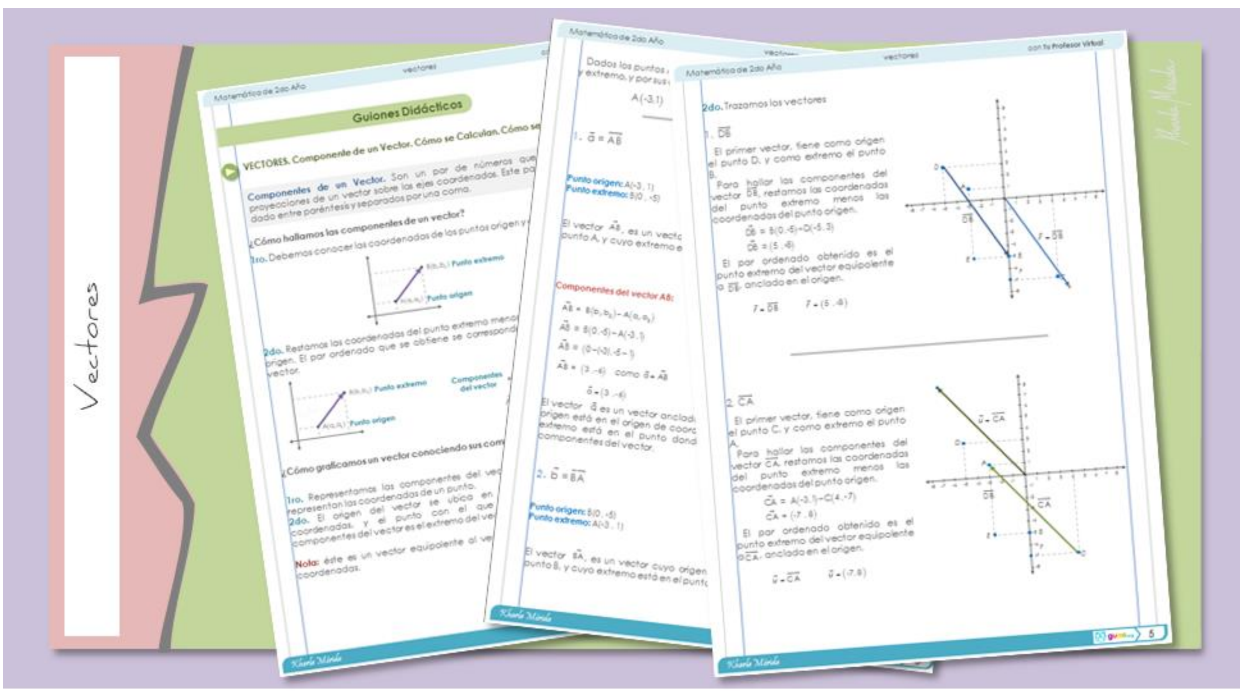
9na Unidad

Vectores

9.3 Componentes.

Es valioso tomar de cada persona con la que intercambiamos, lo que nos permita hacer mejor las cosas. Siempre es posible ser mejores de lo que somos hoy, y muy beneficioso.

Descripción



Con este objetivo cerramos el primer estudio de vectores, ya sabemos qué son, cómo se comportan y cómo operan. Aquí aprenderemos como hallar las componentes de un vector y cómo efectuar multiplicación escalar de vectores. Con esto sentamos bases que luego permitirán avanzar a otros aspectos de ellos, más propiedades, más formas de representarlos, y sus aplicaciones.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Reales, Plano Cartesiano, Proyecciones Ortogonales.

Contenido

Componente de un Vector, Cómo se Calculan y cómo se Grafican, Suma de Vectores, Multiplicación Escalar de Vectores, Operaciones con Vectores.

Videos Disponibles

VECTORES. Componentes de un Vector. Cómo se Calculan, Cómo se Grafican

VECTORES. Graficar en el Plano. Ejercicios 1, 2, 3 y 4

VECTORES. Suma de Vectores. Ejercicios 1, 2, 3 y 4

VECTORES. Multiplicación Escalar de Vectores. Ejemplos

VECTORES. Operaciones con Vectores. Problema 1

VECTORES. Operaciones con Vectores. Problema 2

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

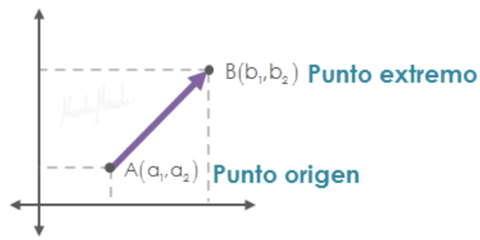
Guiones Didácticos

VECTORES. Componente de un Vector. Cómo se Calculan. Cómo se Grafican

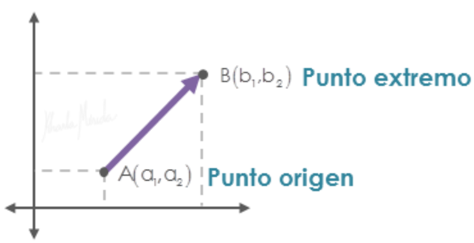
Componentes de un Vector. Son un par de números que representan las proyecciones de un vector sobre los ejes coordenados. Este par de números está dado entre paréntesis y separados por una coma.

¿Cómo hallamos las componentes de un vector?

1ro. Debemos conocer las coordenadas de los puntos origen y extremo.



2do. Restamos las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen. El par ordenado que se obtiene se corresponde con las componentes del vector.

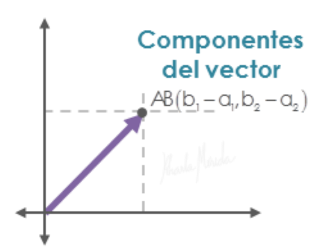


Componentes del vector = Coordenadas del Extremo − Coordenadas del Origen

$$\vec{AB} = B(b_1,b_2) - A(a_1,a_2)$$

¿Cómo graficamos un vector conociendo sus componentes?

1ro. Representamos las componentes del vector, como se representan las coordenadas de un punto.
2do. El origen del vector se ubica en el origen de coordenadas, y el punto con el que ubicamos las componentes del vector es el extremo del vector.



Nota: éste es un vector equipolente al vector AB, pero anclado en el origen de coordenadas.

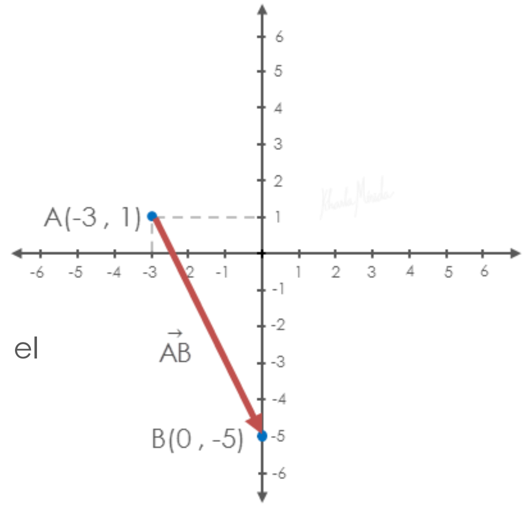
Dados los puntos A y B, hallar los vectores indicados, y graficar con sus puntos origen y extremo, y por sus componentes

$A(-3,1)$ $B(0,-5)$ 1. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ 2. $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$

1. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

Punto origen: A(-3 , 1)
Punto extremo: B(0 , -5)

El vector $\overrightarrow{AB}$, es un vector cuyo origen está en el punto A, y cuyo extremo está en el punto B.



Componentes del vector AB:

$$\overrightarrow{AB} = B(b_1,b_2) - A(a_1,a_2)$$

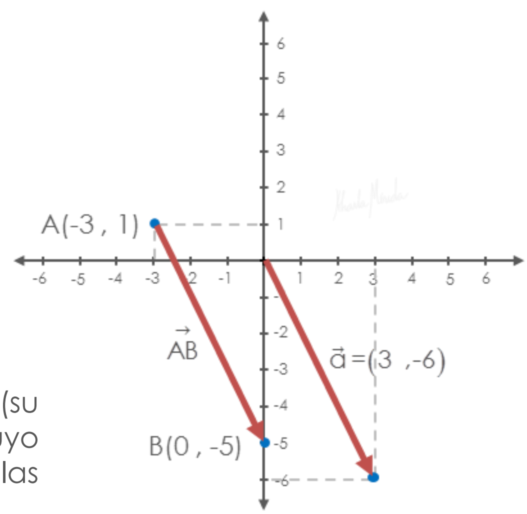
$$\overrightarrow{AB} = B(0,-5) - A(-3,1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0-(-3),-5-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (3\ ,-6) \quad \text{como } \vec{a} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{a} = (3\ ,-6)$$

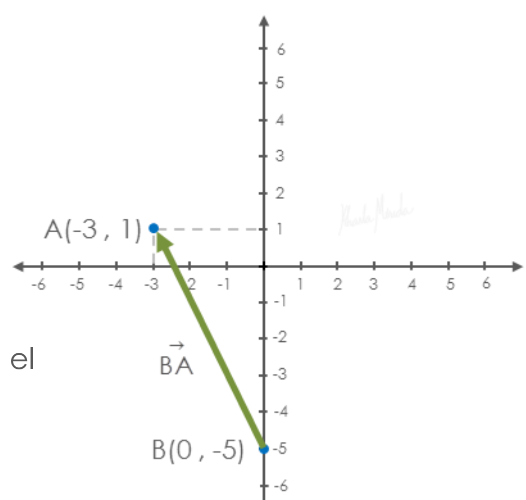
El vector $\vec{a}$ es un vector anclado en el origen (su origen está en el origen de coordenadas), y cuyo extremo está en el punto donde ubicamos las componentes del vector.



2. $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$

Punto origen: B(0 , -5)
Punto extremo: A(-3 , 1)

El vector $\overrightarrow{BA}$, es un vector cuyo origen está en el punto B, y cuyo extremo está en el punto A.



Componentes del vector AB:

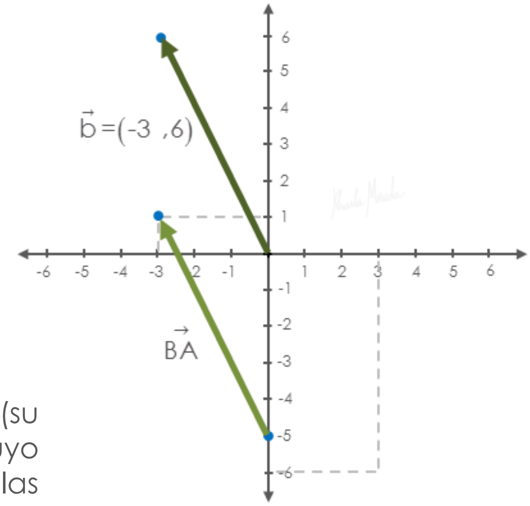
$$\vec{BA} = B(b_1,b_2) - A(a_1,a_2)$$

$$\vec{BA} = B(0\,,-5) - A(-3\,,1)$$

$$\vec{BA} = (0-(-3)\,,-5-1)$$

$$\vec{BA} = (3\ ,-6) \quad \text{como } \vec{b} = \vec{BA}$$

$$\vec{b} = (-3\ ,6)$$



El vector $\vec{b}$, es un vector anclado en el origen (su origen está en el origen de coordenadas), y cuyo extremo está en el punto donde ubicamos las componentes del vector.

Notas: las componentes de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BA}$ son opuestas, porque son vectores opuestos.

VECTORES. Graficar en el Plano. Ejercicios 1, 2, 3 y 4

Con los puntos dados, graficar los vectores indicados, y hallar sus componentes:

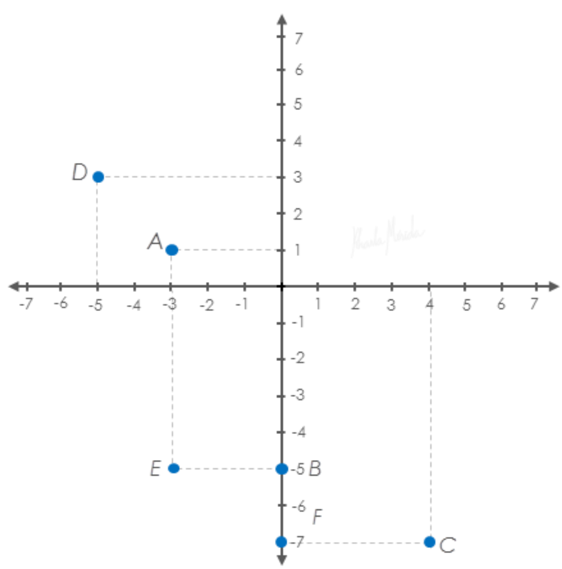
A(-3,1) B(0,-5) C(4,-7) D(-5,3) E(-3,-5) F(0,-7)

1. $\overline{DB}$ 2. $\overline{CA}$ 3. $\overline{BF}$ 4. $\overline{EA}$ 5. $\overline{EB}$ 6. $\overline{CF}$

Primero ubicaremos los puntos

1ro. Ubicamos los puntos en el plano

A(-3 , 1)
B(0 , -5)
C(4 , -7)
D(-5 , 3)
E(-3 , -5)
F(0 , -7)



2do. Trazamos los vectores

1. $\overrightarrow{DB}$

El primer vector, tiene como origen el punto D, y como extremo el punto B.

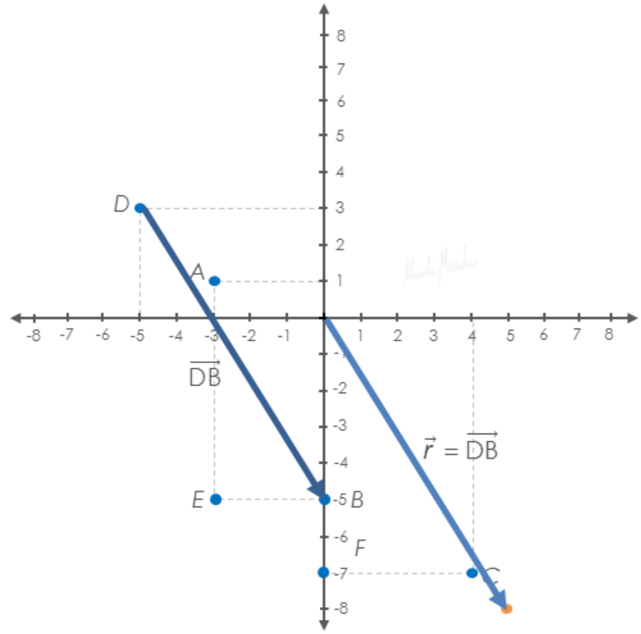
Para hallar las componentes del vector $\overrightarrow{DB}$, restamos las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

$$\overrightarrow{DB} = B(0,-5) - D(-5,3)$$

$$\overrightarrow{DB} = (5\ ,-8)$$

El par ordenado obtenido es el punto extremo del vector equipolente a $\overrightarrow{DB}$, anclado en el origen.

$\vec{r} = \overrightarrow{DB}$ $\vec{r} = (5\ ,-8)$



2. $\overrightarrow{CA}$

El primer vector, tiene como origen el punto C, y como extremo el punto A.

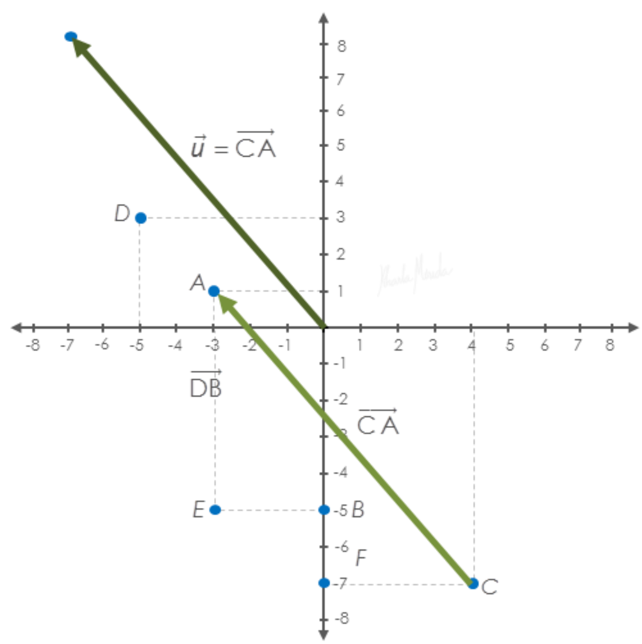
Para hallar las componentes del vector $\overrightarrow{CA}$, restamos las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

$$\overrightarrow{CA} = A(-3,1) - C(4,-7)$$

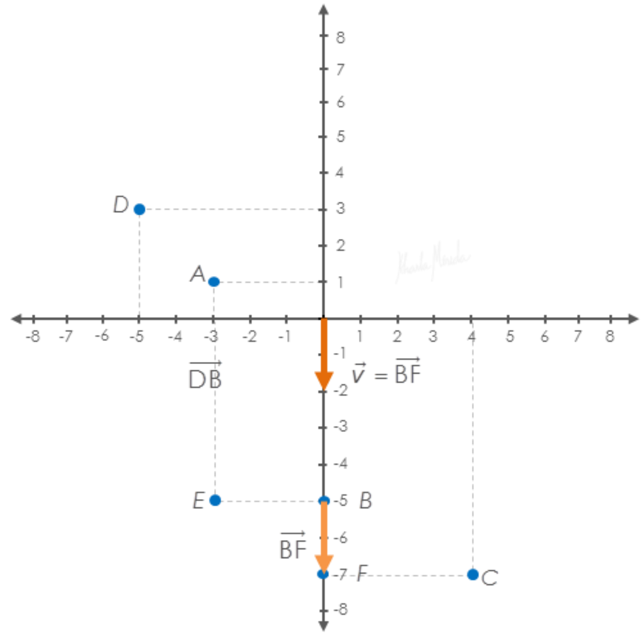
$$\overrightarrow{CA} = (-7\ ,8)$$

El par ordenado obtenido es el punto extremo del vector equipolente a $\overrightarrow{CA}$, anclado en el origen.

$\vec{u} = \overrightarrow{CA}$ $\vec{u} = (-7,8)$



3. $\overrightarrow{BF}$



El tercer vector, tiene como origen el punto B, y como extremo el punto F.

Para hallar las componentes del vector $\overrightarrow{BF}$, restamos las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

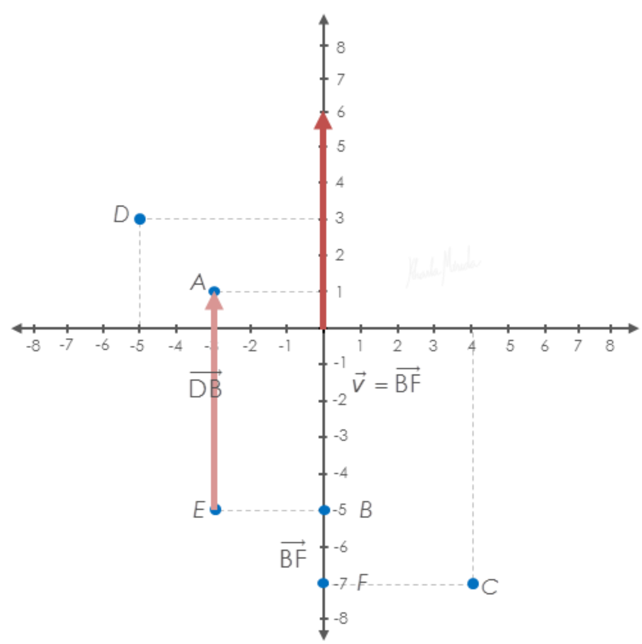
$$\overrightarrow{BF} = F(0,-7) - B(0,-5)$$

$$\overrightarrow{BF} = (0\ ,-2)$$

El par ordenado obtenido es el punto extremo del vector equipolente a $\overrightarrow{BF}$, anclado en el origen.

$$\vec{v} = \overrightarrow{BF} \qquad \vec{v} = (0\ ,-2)$$

4. $\overrightarrow{EA}$



El cuarto vector, tiene como origen el punto E, y como extremo el punto A.

Para hallar las componentes del vector $\overrightarrow{EA}$, restamos las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

$$\overrightarrow{EA} = A(-3,1) - E(-3,-5)$$

$$\overrightarrow{EA} = (0\ ,6)$$

El par ordenado obtenido es el punto extremo del vector equipolente a $\overrightarrow{BF}$, anclado en el origen.

$$\vec{z} = \overrightarrow{EA} \qquad \vec{z} = (0\ ,6)$$

5. $\overrightarrow{EB}$

El quinto vector, tiene como origen el punto E, y como extremo el punto B.

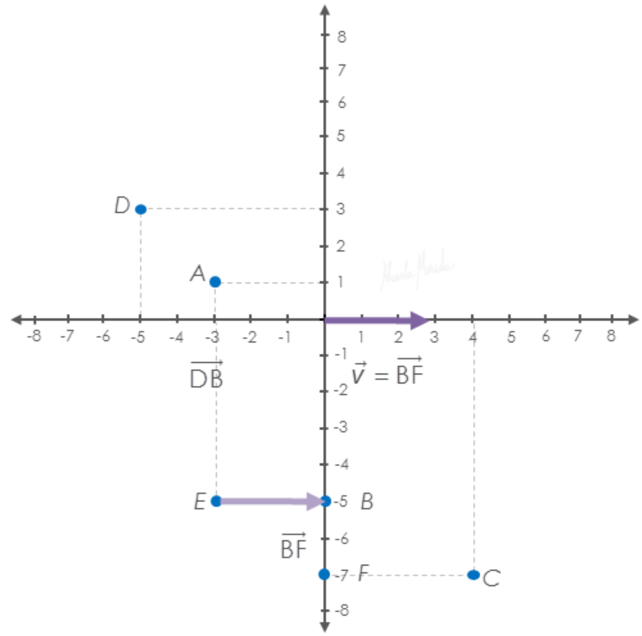
Para hallar las componentes del vector $\overrightarrow{EB}$, restamos las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

$$\overrightarrow{EB} = B(0,-5) - E(-3,-5)$$

$$\overrightarrow{EB} = (3\ ,0)$$

El par ordenado obtenido es el punto extremo del vector equipolente a $\overrightarrow{EB}$, anclado en el origen.

$$\vec{w} = \overrightarrow{EB} \qquad \vec{w} = (3\ ,0)$$



6. $\overrightarrow{CF}$

El sexto vector, tiene como origen el punto C, y como extremo el punto F.

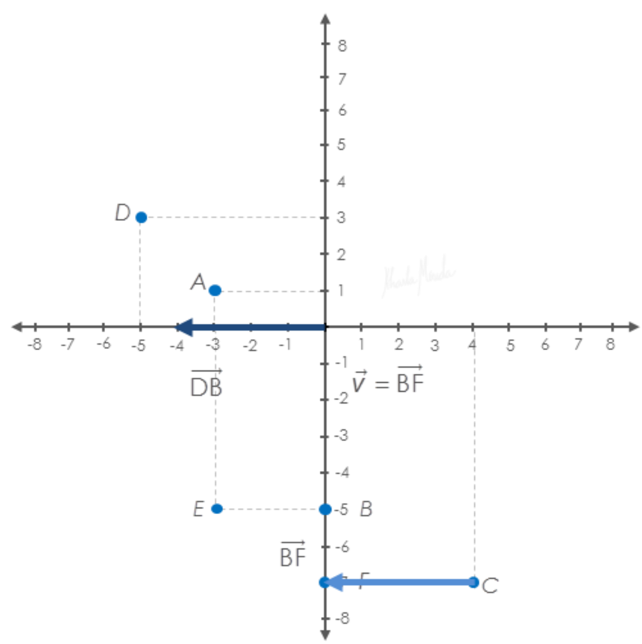
Para hallar las componentes del vector $\overrightarrow{CF}$, restamos las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

$$\overrightarrow{CF} = F(0,-5) - C(4,-5)$$

$$\overrightarrow{CF} = (-4\ ,0)$$

El par ordenado obtenido es el punto extremo del vector equipolente a $\overrightarrow{EB}$, anclado en el origen.

$$\vec{w} = \overrightarrow{EB} \qquad \vec{w} = (3\ ,0)$$



VECTORES. Suma de Vectores. Ejercicios 1, 2, 3 y 4

Hallar las sumas indicadas de los vectores dados, operando sus componentes y gráficamente:

$$\vec{a} = (5,-8) \qquad \vec{b} = (-7,8) \qquad \vec{c} = (0,-2) \qquad \vec{d} = (0,6) \qquad \vec{e} = (3,0) \qquad \vec{f} = (-4,0)$$

1. $\vec{a} + \vec{d}$ 2. $\vec{c} + \vec{b}$ 3. $\vec{f} + \vec{e}$ 4. $\vec{a} + \vec{f}$

Gráfica de vectores dados

Recordemos. Para graficar un vector conociendo sus componentes, trazamos el vector partiendo del origen de coordenadas hasta el punto cuyas coordenadas son las componentes del vector.

$\vec{a} = (5,-8)$

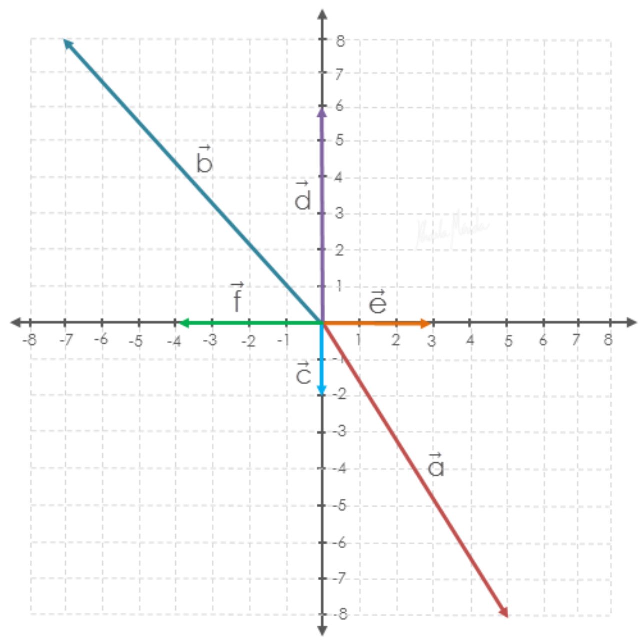
$\vec{b} = (-7,8)$

$\vec{c} = (0,-2)$

$\vec{d} = (0,6)$

$\vec{e} = (3,0)$

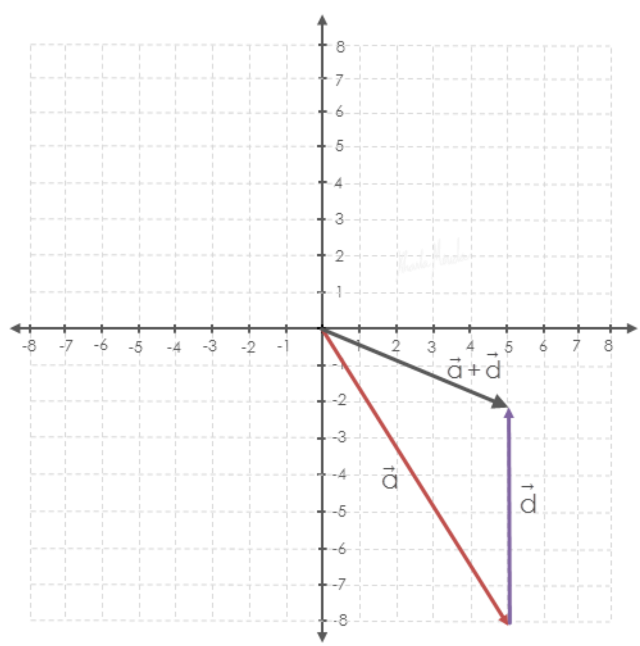
$\vec{f} = (-4,0)$



Suma gráfica de vectores dados

1. $\vec{a} + \vec{d}$

1ro. Ubicamos el vector $\vec{a}$, y en el extremo ubicamos el vector $\vec{d}$.
El vector suma va desde el origen de $\vec{a}$ hasta el extremo de $\vec{d}$.



Suma por sus componentes

Sumamos cada componente con su correspondiente.

1ra componente + 1ra componente y 2da componente + 2da componente.

$\vec{a} = (5,-8)$ $\quad \vec{d} = (0,6)$

$\vec{a} + \vec{d} = (5,-8) + (0,6)$

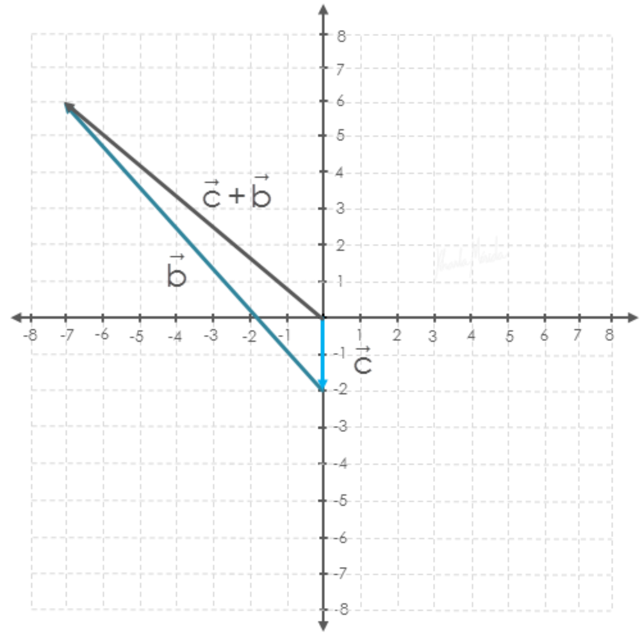
$\vec{a} + \vec{d} = (5+0,-8+6)$

$\vec{a} + \vec{d} = (5,-2)$

Suma gráfica de vectores dados

2. $\vec{c}+\vec{b}$

1ro. Ubicamos el vector $\vec{c}$, y en el extremo ubicamos el vector $\vec{b}$.
El vector suma va desde el origen de $\vec{c}$ hasta el extremo de $\vec{b}$.



Suma por sus componentes

Sumamos cada componente con su correspondiente.

1ra componente + 1ra componente y
2da componente + 2da componente.

$$\vec{c}=(0,-2) \qquad \vec{b}=(-7,8)$$

$$\vec{c}+\vec{b}=(0,-2)+(-7,8)$$

$$\vec{c}+\vec{b}=(0+(-7),-2+8)$$

$$\vec{a}+\vec{d}=(-7\ ,6)$$

VECTORES. Multiplicación Escalar de Vectores. Ejemplos.

Ejemplos

Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, efectuar las operaciones indicadas

$$\vec{a}=(-2,7)\ ;\ \vec{b}=(8,-12)\ ;\ \vec{c}=(-6\ ,\ 5)$$

i. $\vec{a}\cdot 2\vec{b}$; ii. $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$

---

i. $\vec{a}\cdot 2\vec{b}$

Tenemos el producto del vector $\vec{a}$ con el doble del vector $\vec{b}$.

$$\vec{a}\cdot 2\vec{b}$$

Sustituimos la notación de cada vector por el vector dado en su forma de componentes.

$$\vec{a}\cdot 2\vec{b}=(2\ ,\ -7)\cdot 2(8\ ,\ -12)$$

Multiplicación del escalar por el vector:
El **2** multiplica cada componente del vector.

$$\vec{a}\cdot 2\vec{b}=(-2\ ,\ 7)\cdot 2(8\ ,\ -12)$$

$$=(-2\ ,\ 7)\cdot\left(2\cdot 8\ ,\ 2\cdot(-12)\right)$$

Multiplicación escalar de vectores:

$$=(-2\ ,\ 7)\cdot(16\ ,\ -24)$$

¿Qué hacemos ahora?

La **Multiplicación Escalar de Vectores** es un número que resulta de **la suma de los productos de las 1ras componentes y las 2das componentes**.

Suma

$$= -2 \cdot 16 + 7 \cdot (-24)$$

Producto de 1ras componentes

Producto de 2das componentes

Efectuamos los productos y luego la suma

$$= -32 + (-168)$$

$$\boxed{\vec{a} \cdot 2\vec{b} = -200}$$

---

ii. $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

Tenemos el producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, multiplicado por el vector $\vec{c}$.

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Sustituimos la notación de cada vector por el vector dado en su forma de componentes.

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left((-2,7) \cdot (8,-12)\right) \cdot (-6,5)$$

Multiplicación Escalar de Vectores

$$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left((-2,-7) \cdot (8,-12)\right) \cdot (-6,5)$$

$$= \left(-2 \cdot 8 + (-7) \cdot (-12)\right) \cdot (-6,5)$$

$$= \left(-16 + (-84)\right) \cdot (-6,5)$$

$$= -100 \cdot (-6,5)$$

Multiplicación de Escalar por un Vector

$$= -100 \cdot (-6,5)$$

$$= \left(-100 \cdot (-6), -100 \cdot 5\right)$$

$$\boxed{\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = (600, -500)}$$

Hemos visto ejemplos de suma de vectores, multiplicación de un escalar por un vector y de producto escalar de vectores. Aprendamos a sumar vectores gráficamente acompáñanos a la siguiente lección.

VECTORES. Operaciones con Vectores. Problema 1.

Hallar el valor de x en el vector $\vec{u}=(x\ ,3)$ para que se satisfaga la ecuación $\vec{a}\cdot\vec{u}=\vec{d}\cdot\vec{e}$, con $\vec{a}=(5,-8)$, $\vec{d}=(0,6)$ y $\vec{e}=(3,0)$.

Tenemos una igualdad.

$$\vec{a}\cdot\vec{u}=\vec{d}\cdot\vec{e}$$

Sustituimos las notaciones de los vectores por los vectores dados con sus componentes.

$$(5,-8)\cdot(x\ ,3)=(0,6)\cdot(3,0)$$

En ambos lados de la igualdad producto escalar de vectores.

$$(5,-8)\cdot(x\ ,3)=(0,6)\cdot(3,0)$$

$$5\cdot x+(-8)\cdot 3=0\cdot 3+6\cdot 0$$

$$5x+(-24)=0+0$$

Ahora tenemos una ecuación lineal, de incógnita x.

$$5x-24=0$$

$$5x=24$$

$$x=\frac{24}{5}$$

El vector $\vec{u}$ tiene por componentes $\left(\frac{24}{5}\ ,3\right)$

Nota: El producto escalar de los vectores $\vec{d}$ y $\vec{e}$ es cero, esto es porque sus líneas de acción son perpendiculares entre sí. También el producto de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{u}$ es cero.

Si el Producto Escalar de dos Vectores es cero
Los Vectores son Perpendiculares

VECTORES. Operaciones con Vectores. Problema 2.

Hallar el valor de k para que se cumpla

$\vec{a}=(7,-42)$ $\quad$ $\vec{b}=(-2,10)$ $\quad$ $\vec{c}=(1,-4)$ $\quad$ $\vec{d}=(3,6)$

Lo primero que haremos es sustituir las notaciones de vectores por los vectores dados en componentes.

$$k\cdot\vec{a}+\left(\vec{d}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}=(35,-168)$$

$$k\cdot(7,-42)+\left((3,6)\cdot(1,-4)\right)(-2,10)=(35,-168)$$

Podemos observar en el primer término el producto de un escalar por un vector y en el segundo término un producto escalar de vectores. Vamos a efectuarlos.

El escalar, **k**, multiplica cada componente del vector,
El producto escalar es la suma de los productos de las 1ras componentes y las 2das componentes.

$$k\cdot(7,-42)+((3,6)\cdot(1,-4))(-2,10)=(35,-168)$$

$$(k\cdot 7,k\cdot(-42))+(3\cdot 1+6\cdot(-4))(-2,10)=(35,-168)$$

Efectuando las operaciones

$$(7k,-42k)+(-21)(-2,10)=(35,-168)$$

Ahora -21 es un escalar que multiplica al vector (-2 , 10).

$$(7k,-42k)+(-21\cdot(-2),-21\cdot 10)=(35,-168)$$

$$(7k,-42k)+(42,-210)=(35,-168)$$

Efectuamos la suma de vectores.

$$(7k+42,-42k-210)=(35,-168)$$

Si dos vectores son iguales, sus componentes son iguales.
Entonces: $7k + 42 = 35$ y $-42k -210 = -168$
Para que esta igualdad de vectores tenga solución, es necesario que el valor de *k* resulte el mismo para la 1ra y para la 2da ecuación

$$7k+42=35 \qquad -42k-210=-168$$

Resolvemos ambas ecuaciones:

$$7k=35-42 \qquad -42k=-168+210$$

$$7k=-7 \qquad -42k=42$$

$$k=-\frac{7}{7} \quad k=-1 \qquad k=\frac{42}{-42} \quad k=-1$$

Solución: $\boxed{k=-1}$

Emparejando el Lenguaje

Componentes de un Vector. Son un par de números que representan las proyecciones de un vector sobre los ejes coordenados. Este par de números está dado entre paréntesis y separados por una coma.

Suma de Vectores. Es un vector cuyas componentes son las sumas de las primeras componentes entre sí y las segundas componentes entre sí.

Resta de Vectores. Es un vector que resulta de sumar el vector minuendo con el opuesto del vector sustraendo.

Multiplicación de un Escalar por un Vector. Es un vector cuyas componentes son el producto del escalar con cada componente del vector.

Multiplicación Escalar de Vectores. Es un escalar (número) que resulta de la suma de los productos de las primeras componentes entre sí y las segundas componentes entre sí.

A Practicar

Dados los puntos A(-2 , 5), B(3 , 2), C(4 , -2) y D(-2 , -1), efectuar las operaciones indicadas

Graficar los vectores indicados, hallar sus componentes y graficar el equipolente anclado en el origen:

1. $\overrightarrow{AB}$
2. $\overrightarrow{AC}$
3. $\overrightarrow{AD}$
4. $\overrightarrow{BC}$
5. $\overrightarrow{BD}$
6. $\overrightarrow{CD}$

2. Hallar el vector resultante en cada una de las operaciones indicadas:

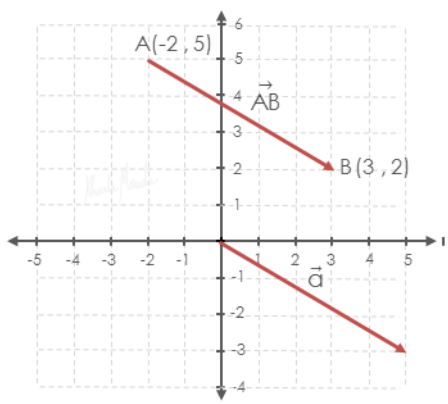
a. $3\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ b. $\vec{b}\cdot\left(-6\,\vec{c}\right)$ c. $\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{e}$ d. $\left(\vec{e}\cdot\vec{f}\right)\cdot\vec{a}$

Lo Hicimos Bien?

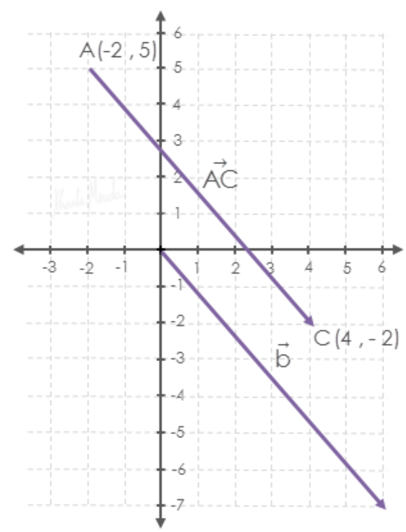
Dados los puntos A(-2 , 5), B(3 , 2), C(4 , -2) y D(-2 , -1), efectuar las operaciones indicadas

Graficar los vectores indicados, hallar sus componentes y graficar el equipolente anclado en el origen:

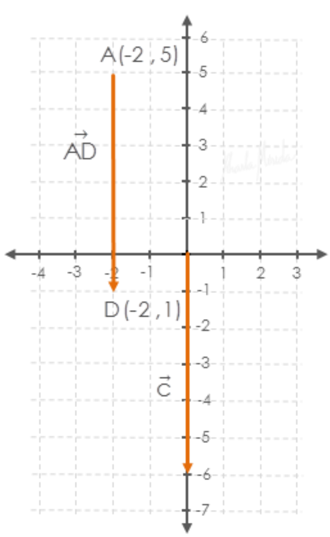
1. $\overrightarrow{AB}$ 2. $\overrightarrow{AC}$ 3. $\overrightarrow{AD}$ 4. $\overrightarrow{BC}$ 5. $\overrightarrow{BD}$ 6. $\overrightarrow{CD}$



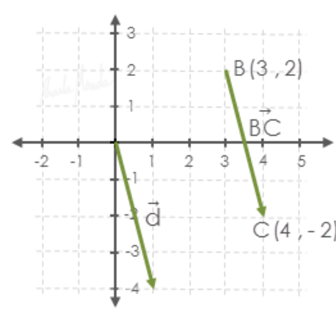
$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (5 , -3)$



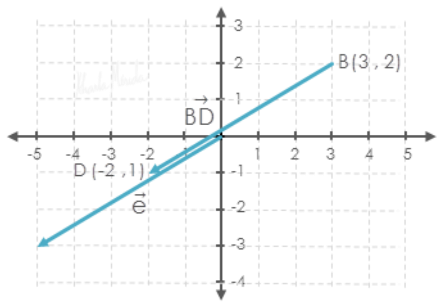
$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (6 , -7)$



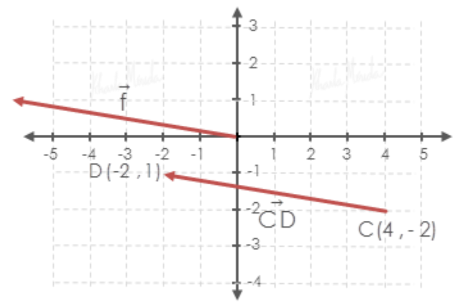
$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = (0 , -6)$



$\vec{d} = \overrightarrow{BC} = (1 , -4)$



$\vec{e} = \vec{BD} = (-5 , -4)$



$\vec{f} = \vec{CD} = (-6 , 1)$

2a. $3\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = 153$

2b. $\vec{b} \cdot \left(-6\,\vec{c}\right) = -252$

2c. $\left(\vec{c} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{e} = (-210 , -168)$

2d. $\left(\vec{e} \cdot \vec{f}\right) \cdot \vec{a} = (130 , -78)$