3
3ra Unidad

Funciones Numéricas

3.2 Tipos de Funciones

Aprender es el maravilloso resultado de disposición, paciencia, orden, continuidad y determinación. Y brinda la posibilidad de ver la vida en alta definición. Si que vale la decisión de aprender un poco cada día.

Descripción

A un Grupo de 10 personas se les dio la posibilidad de escoger un forro de obsequio, seleccionando entre 6 posibles colores: Negro, Gris, Vino tinto, Azul, Morado, Verde.

- ¿Es posible que cada usuario tenga colores diferentes?
- Si todos los colores son seleccionados, ¿Cuántos tienen colores repetidos?

Estas son observaciones que hacemos cada día, sin pensar que hacer este análisis se conoce en matemática como estudiar la inyectividad o sobreyectividad de una función.

Quizá suenen un poco intimidantes (rimbombantes) estas palabras, pero el análisis que se hace durante este proceso es sencillo y te será de gran utilidad a la hora de sacar provecho de la información contenida en cada función. Vamos entonces a aprender cómo identificar este tipo de funciones.

Conocimientos Previos Requeridos

Números Enteros, Números Racionales, Sistema de Coordenadas Cartesianas, Definición de Función, Dominio, Rango, Tablas de Valores y Gráfico de Funciones.

Contenido

Función Inyectiva, Función Sobreyectiva y Función Biyectiva.

Videos Disponibles

FUNCIONES. Tipos. Función Inyectiva

FUNCIONES. Tipos. Función Sobreyectiva

FUNCIONES. Tipos. Función Biyectiva

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en el análisis y ejecución de operaciones.

Guiones Didácticos

FUNCIONES. Tipos. Función Inyectiva

Función Inyectiva. Es toda función en la que para valores distintos de **x** en su dominio, se tiene valores distintos de la imagen, ***F(x)***.

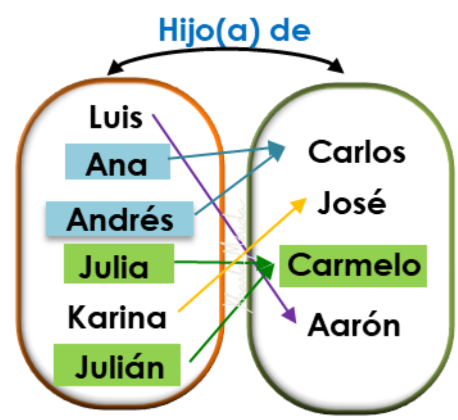
Dicho en lenguaje matemático:
Sea ***F***: ***A*** $\rightarrow$ ***B***, ***F***(***x***) una función. ***F*** es inyectiva si $\forall$ $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ $\in$ Domf se cumple que:

$$\text{Si } \mathbf{x_1} \neq \mathbf{x_2} \quad \text{entonces} \quad \mathbf{F}(x_1) \neq \mathbf{F}(x_2)$$

Se lee:
Sea ***F*** de ***A*** en ***B***, ***F***(***x***), una función. ***F*** es inyectiva si para todo $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ pertenecientes al dominio de ***F***, se cumple que si $\mathbf{x_1}$ es distinto de $\mathbf{x_2}$, entonces la imagen de $\mathbf{x_1}$ es diferente de la imagen de $\mathbf{x_2}$.

Ejemplos

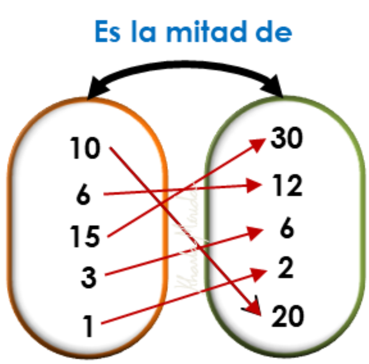
Estudiemos las siguientes funciones:



1ra Función: representada en el diagrama de Venn o sagital.

Podemos notar que los elementos **Ana** y **Andrés** tienen la misma imagen, y los elementos **Julia** y **Julián** también.

Esta función **no satisface** la condición de inyectividad: **Para elementos distintos del dominio se tienen imágenes distintas**.



2da Función: Representada en el diagrama de la izquierda.

Cada par de elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas.

Todos los elementos del dominio tienen imágenes distintas

Es una Función Inyectiva

3ra y 4ta Función: Definidas por su imagen, dominio y conjunto de llegada

$\mathbf{F}$: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$, ¿Es **F** una función Inyectiva?

¿Es Inyectiva si está definida **F**: $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$?

Tenemos dos funciones con la misma imagen pero definidas en conjuntos numéricos diferentes.

$$\mathbf{F}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} , \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} , \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$$

1er caso: **F: N → N , F(x) = x^2**

El Dominio está en los Naturales.

Tomaremos los primeros 4 valores del Dominio para estudiar el comportamiento de la función y determinar si es Inyectiva.

Sustituiremos 1, 2, 3 y 4 donde esté la **x** en la imagen de la función.

F: N → N , F(x) = x^2

Si **x = 1** , **F(1) = 1^2 = 1**

Si **x = 2** , **F(2) = 2^2 = 4**

Si **x = 3** , **F(3) = 3^2 = 9**

Si **x = 4** , **F(4) = 4^2 = 16**

Nota: Podemos observar que el valor de **las imágenes va en aumento**, a medida que los valores de **x** van en aumento.

Por lo que **para cada par de valores distintos de x se tendrán valores distintos de la imagen**.

Entonces **F: N → N ; F(x) = x^2, es Inyectiva**.

2do caso: **F: Z → Z , F(x) = x^2**

El Dominio está en los Enteros.

Tomaremos 5 valores iniciales para estudiar el comportamiento de la función y determinar si es Inyectiva.

Sustituiremos -2, -1, 0, 1 y 2 donde esté la **x** en la imagen de la función.

F: Z → Z , F(x) = x^2

Si **x = -2** , **F(-2) = $(-2)^2$ = 4**

Si **x = -1** , **F(-1) = $(-1)^2$ = 1**

Si **x = 0** , **F(0) = $(0)^2$ = 0**

Si **x = 1** , **F(1) = $(1)^2$ = 1**

Si **x = 2** , **F(2) = $(2)^2$ = 4**

Nota: Las imágenes de **-1** y **1** son iguales, **1**. Las de **-2** y **2** son iguales, **4**.

Para esta función las imágenes de enteros opuestos son iguales, porque toda potencia con exponente par resulta positiva, independiente del signo de la base.

Esta función **no es Inyectiva**.

F: N → N , F(x) = x^2

X	F(x)
1	1
2	4
3	9
4	16

Es una Función Inyectiva

F: Z → Z , F(x) = x^2

X	F(x)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

No es una Función Inyectiva

FUNCIONES. Tipos. Función Sobreyectiva

Función Sobreyectiva. Es toda función, en la que todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes.

Es decir, el Rango coincide con el conjunto de llegada.

Dicho en lenguaje matemático:
Sea $F: A \to B$, $F(x)$ una función. F es sobreyectiva si $\mathbf{Rgo_f = A}$.

Ejemplos

Estudiemos las siguientes funciones:

1ra Función: representada en el diagrama de Venn o sagital.
Podemos notar que **todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes**.
Entonces el $\mathbf{Rgo_f}$ y el conjunto de llegada, **A**, son iguales.

$$\mathbf{Rgo_f = A}$$

Esta función satisface la condición de sobreyectividad: **todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes**.

Es una **Función Sobreyectiva**

Veamos la función $\mathbf{F: Z^* \to Z}$, $\mathbf{F(x) = x^2}$. ¿Es **F** una función Sobreyectiva? Lo es si la función está definida $\mathbf{F: Z^* \to N}$.

$\mathbf{F: Z^* \to Z}$, $\mathbf{F(x) = x^2}$ $\qquad$ $\mathbf{F: Z^* \to N}$, $\mathbf{F(x) = x^2}$

Significado del Asterisco. Para la notación de conjuntos correspondientes a campos de numeración, la presencia del asterisco implica **exclusión del cero**. Es decir, que podríamos leer esto como **Z asterisco** o como los **Enteros sin el cero**.

N: Naturales	**N***	
Z: Enteros	**Z***	**Sin el cero**
Q: Racionales	**Q***	
R: Reales	**R***	

Entonces:

$\mathbf{F: Z^* \to Z}$, $\mathbf{F(x) = x^2}$ $\qquad$ ***F*** va de los enteros sin el cero, **Z***, a los enteros, **Z**.

$\mathbf{F: Z^* \to N}$, $\mathbf{F(x) = x^2}$ $\qquad$ ***F*** va de los enteros sin el cero, **Z***, a los naturales, **N**.

A continuación, una tabla que relaciona valores de **x** con sus imágenes para cada función. El modo en que se han obtenido dichas imágenes está desarrollado en la lección anterior.

$F: Z^* \rightarrow Z$, $F(x) = x^2$

X	F(x)
-2	4
-1	1
1	1
2	4

Si el conjunto de llegada es los enteros, **Z**, la función **no es Sobreyectiva.**

En rojo tenemos los números del conjunto de llegada que no son imágenes, y en verde los que son imágenes.

$F: Z^* \rightarrow N$, $F(x) = x^2$

X	F(x)
1	1
2	4
3	9
4	16

Si el conjunto de llegada es los naturales, la función tampoco es Sobreyectiva.

En rojo tenemos los números del conjunto de llegada que no son imágenes, y en verde los que son imágenes.

En ambos casos hay incontables números del conjunto de llegada que no son imágenes. Basta con que un número del conjunto de llegada no sea imagen para que la función no sea sobreyectiva.

Nota: En resumen podemos identificar cuando una función es Sobreyectiva verificando que el Rango coincida con el conjunto de llegada que la define.

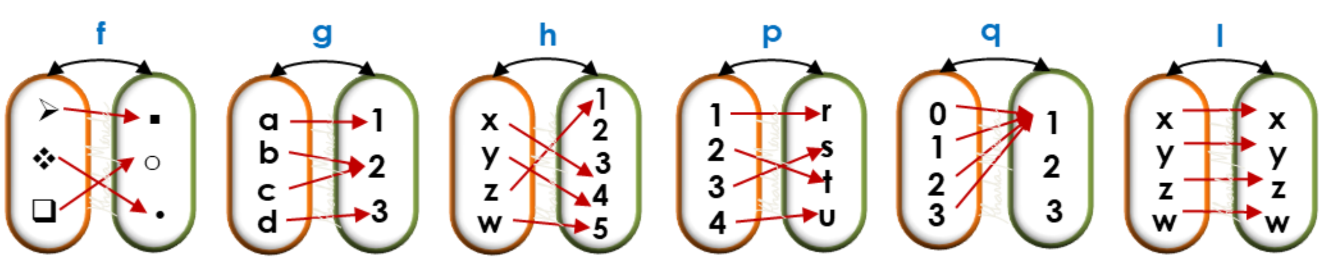
FUNCIONES. Tipos. Función Biyectiva

Función Biyectiva. Sea **F** de **A** en **B**, con imagen **F**(**x**), una función. Se dice que F es Biyectiva si, es Inyectiva y es sobreyectiva a la vez.

Esto es:

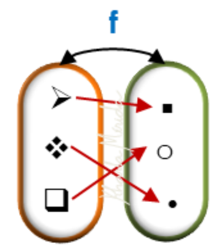
- Si todos los elementos del Dominio tienen imágenes diferentes, y
- Si todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes.

En el siguiente grupo de diagramas vamos a identificar cuáles representan funciones Inyectiva, cuáles funciones Sobreyectiva y cuáles funciones Biyectiva



1ra. La función ***f*** relaciona los elementos del conjunto de partida y de llegada de tal manera que:

- Todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes, y
- Todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes.



Si todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes.

f es **Inyectiva**

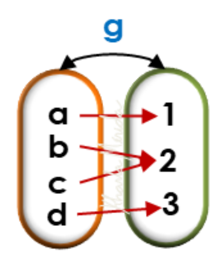
Si todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes

f es **Sobreyectiva**

f es **Biyectiva**

2da. La función ***g*** relaciona los elementos del conjunto de partida y de llegada de tal manera que:

- Hay dos elementos del conjunto de partida que tienen la misma imagen, y
- Todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes.



Si dos elementos del conjunto de partida tienen la misma imagen

g no es **Inyectiva**

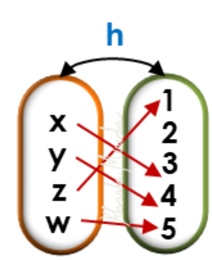
Si todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes

g es **Sobreyectiva**

g no es **Biyectiva**

2da. La función ***h*** relaciona los elementos del conjunto de partida y de llegada de tal manera que:

- Todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes, y
- Un elemento del conjunto de llegada no es imagen de ningún elemento del dominio.



Si todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes.

h es **Inyectiva**

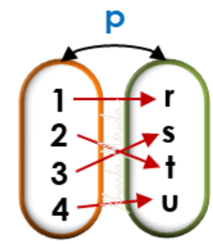
Si **un elemento** del conjunto de llegada **no es imagen.**

h no es **Sobreyectiva**

h no es **Biyectiva**

4ta. La función ***p*** relaciona los elementos del conjunto de partida y de llegada de tal manera que:

- Todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes, y
- Todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes.



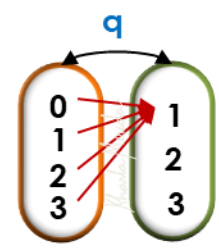
Si todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes. → **p** es **Inyectiva**

Si todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes → **p** es **Sobreyectiva**

p es **Biyectiva**

5ta. La función ***q*** relaciona los elementos del conjunto de partida y de llegada de tal manera que:

- Todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes, y
- Dos elementos del conjunto de llegada no son imágenes de ningún elemento del dominio.



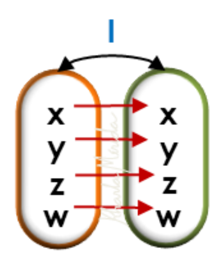
Si todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes. → **q** es **Inyectiva**

Si **dos elementos** del conjunto de llegada **no son imágenes.** → **q** no es **Sobreyectiva**

q no es **Biyectiva**

6ta. La función ***l*** relaciona los elementos del conjunto de partida y de llegada de tal manera que:

- Todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes, y
- Todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes.



Si todos los elementos del conjunto de partida tienen imágenes diferentes. → **l** es **Inyectiva**

Si todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes → **l** es **Sobreyectiva**

l es **Biyectiva**

Emparejando el Lenguaje

Función Inyectiva. Es toda función en la que cada de elementos del dominio tiene imágenes diferentes.

Función Sobreyectiva. Es toda función en la que el Rango es igual al conjunto de llegada.

Función Biyectiva. Es toda función que sea Inyectiva y Sobreyectiva.

Asterisco, *. En la representación de conjuntos numéricos como los Enteros, **Z**, y Racionales, **Q**, la presencia del asterisco (**Z*** o **Q***) significa que se excluye el cero del conjunto.

Z^+. El conjunto de los enteros positivos.

Z^-. El conjunto de los enteros negativos.

Q^+. El conjunto de los racionales positivos.

Q^-. El conjunto de los racionales negativos.

A Practicar

En cada caso, hallar la tabla de valores (con al menos 5 pares), e Identificar cuáles de las siguientes funciones son ***Biyectivas***, cuáles ***Inyectivas*** y cuáles ***Sobreyectivas***.

- $F: N \rightarrow Z^+$, $F(x) = 4x + 3$
- $G: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{5, 8, 9\}$, $G(x) = 9 - x^2$
- $H: \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow Z$, $H(x) = x^2$
- $p: Z \rightarrow Z^+$, $p(x) = x^2$

Lo Hicimos Bien?

F: **N** $\rightarrow$ {… , **-3** , **-2** , **-1** , **0** , **1** , **2** , **3** , …} , **F**(**x**) = **x** + **1**

X	F(x)
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6

F es **Biyectiva**

La Definición de la función **F** nos dice que:

Dom$_f$: **N**

Conjunto de Llegada: {**2** , **3** , **4** , **5** , **6** , **7** , **8** , …}

Imagen de F: **F**(**x**) = **x** + **1**

Y relaciona los elementos del Dominio y Conjunto de llegada de tal manera que:

- Todos los elementos del Dominio tienen imágenes diferentes, **F** es **Inyectiva**.
- Rango: {**2** , **3** , **4** , **5** , **6** , **7** , **8** , …}
- Todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de algún elemento del Dominio. **F** es **Sobreyectiva**.

G: {**-3** , **-2** , **-1** , **0** , **1** , **2** , **3**} $\rightarrow$ {**5** , **8** , **9**} , **G**(**x**) = **9** – **x**^{2}

X	G(x)
-2	5
-1	8
0	9
1	8
2	5

F es **Sobreyectiva**

La Definición de la función **G** nos dice que:

Dom$_f$: {**-3** , **-2** , **-1** , **0** , **1** , **2** , **3**}

Conjunto de Llegada: {**5** , **8** , **9**}

Imagen de G: **G**(**x**) = **9** – **x**^{2}

Y relaciona los elementos del Dominio y Conjunto de llegada de tal manera que:

- Los elementos del Dominio que son opuestos tienen imágenes iguales, **F** no es **Inyectiva**.
- Rango: {**5** , **8** , **9**}
- Todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de algún elemento del Dominio. **F** es **Sobreyectiva**.

H: {**0** , **1** , **2** , **3** , **4** , **5** , **6**} $\rightarrow$ **Z** , **H**(**x**) = **x**^{2}

X	H(x)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

F es **Inyectiva**

La Definición de la función ***H*** nos dice que:

Dom$_f$: {**0** , **1** , **2** , **3** , **4** , **5** , **6**}

Conjunto de Llegada: **Z**

Imagen de H: **H**(**x**) = **x**^{2}

Y relaciona los elementos del Dominio y Conjunto de llegada de tal manera que:

- Todos los elementos del Dominio tienen imágenes diferentes, **F** es **Inyectiva**.
- No todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de algún elemento del Dominio. **F** no es **Sobreyectiva**.

Nota: además de los enteros negativos, los enteros comprendidos entre cada imagen, no son imágenes de nadie.
Esto es,
Conjunto de Llegada:

{… , **-2** , **-1** , **0** , **1** , **2** , **3** , **4** , **5** , **6** , **7** , **8** , **9** , **10** , **11** , **12** , **13** , **14** , **15** , **16** , **17** , **18** , …}

Los números resaltados con **verde** son las imágenes que se obtienen a través de la función **F**. Los números resaltados en rojo son parte del conjunto de llegada pero no son imágenes, así que no son parte del Rango.

p: $Z^* \rightarrow Z^+$, $p(x) = x^2$

X	p(x)
-3	9
-2	4
-1	1
1	1
2	4
3	9

La Definición de la función **p** nos dice que:

Dom$_f$: Z^* = {… , **-3** , **-2** , **-1** , **1** , **2** , **3** , …}

Conjunto de Llegada: Z^+ = {**1** , **2** , **3** , **4** , **5** , **6** , **7** , **8** , **9** , …}

Imagen de p: $p(x) = x^2$

Y relaciona los elementos del Dominio y Conjunto de llegada de tal manera que:

- Cada par de elementos opuestos del Dominio tienen imágenes iguales, **F** no es **Inyectiva.**
- Rango: {**1** , **4** , **9**}
- No todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de algún elemento del Dominio. **F** no es **Sobreyectiva.**