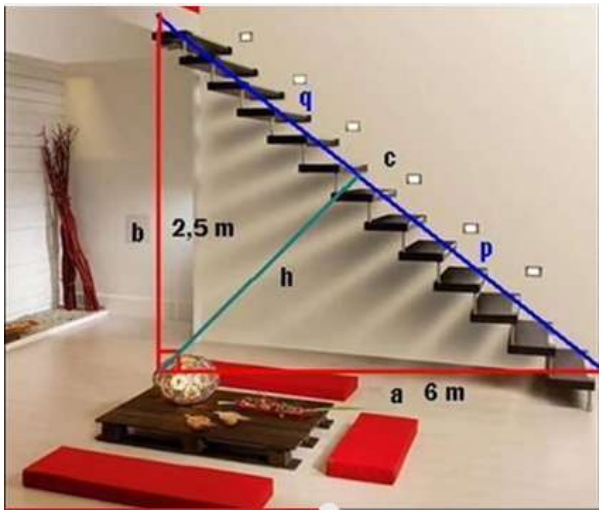
TEOREMA DE EUCLIDES.

INTRODUCIIÓN.

Euclides (330 a.C. - 275 a.C.) Gran matemático griego, escribió una serie de libros donde sintetizaba todos los conocimientos matemáticos conocidos hasta entonces. Euclides fue autor de diversos tratados, pero su nombre se asocia principalmente a uno de ellos, los Elementos, que rivaliza por su difusión con las obras más famosas de la literatura universal, como la Biblia o el Quijote. Se trata, en esencia, de una compilación de obras de autores anteriores (entre los que destaca Hipócrates de Quíos), que las superó de inmediato por su plan general y la magnitud de su propósito.

¿PERO CÓMO USAR SU TEOREMA EN LA COTIDIANIDAD?



En una simple escalera donde b= 2,5 m y a= 6 m. ¿Cuál sería el valor de p,q, h y c?

TEOREMA DE EUCLIDES

El teorema de Euclides se interpreta geométricamente diciendo que: “El cuadrado construido sobre un cateto de un triángulo rectángulo, tiene igual área que el rectángulo cuyos lados son la hipotenusa del triángulo y la proyección del cateto sobre la hipotenusa”.

Del teorema de Euclides podemos destacar dos teoremas: **Teorema de la altura y Teorema del cateto:**

- **Teorema de la altura:** En un triángulo rectángulo obtenemos dos relaciones alternativas en los que intervienen los siguientes elementos: *los catetos b y c, la hipotenusa a, la altura h y las proyecciones m y n de los catetos sobre la hipotenusa como se ilustra en la figura1***.**

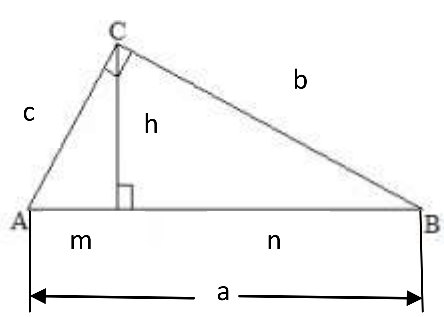


Figura1

En un triángulo rectángulo el cuadrado de la altura sobre la hipotenusa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, así el teorema de la altura viene dado por:

$$\boldsymbol{h^2 = m.n}$$

- **Teorema del cateto:** Ahora vamos a obtener la relación entre los catetos y sus proyecciones sobre la hipotenusa.
  En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección del cateto sobre la hipotenusa.

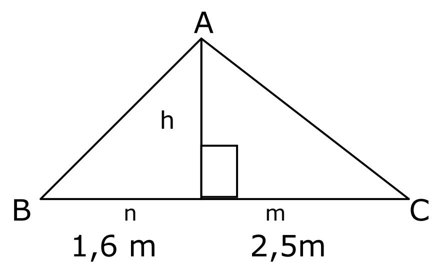
  Según la figura 1 Para el cateto c:

$$\boldsymbol{c^2 = a.m}$$

  Para el cateto b:

$$\boldsymbol{b^2 = a.n}$$

EJEMPLO 1: Con los datos de la figura calcular la altura $\overline{AD}$ sabiendo que el triángulo ABC es rectángulo en A.



Respuesta: La altura sobre la hipotenusa en función de las proyecciones de los catetos viene dada de acuerdo con el teorema de altura como:

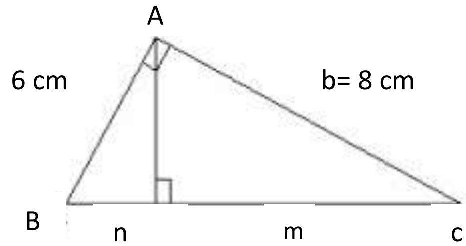
$$\boldsymbol{h^2 = m.n}$$

Sustituyendo los valores tenemos:

$$h^2 = 2{,}5m\,.1{,}6m$$

$$h = \sqrt{4\,m^2} = 2\,m.$$

EJEMPLO 2: En un triángulo rectángulo los catetos miden 6 cm y 8 cm. Calcular la hipotenusa y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.



Respuesta:

b= 8 cm ; c= 6 cm; a=? , m= ? , n= ?

- Calculamos la hipotenusa por el teorema de Pitágoras

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2}$$

$$a^2 = (8cm)^2 + (6cm)^2$$

$$a^2 = 64cm^2 + 36cm^2$$

$$a = \sqrt{100\ cm^2}$$

$$a = 10\ cm$$

- Calculamos las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa por el teorema del cateto:

$$\boldsymbol{b^2 = a.m}$$

$(8cm)^2 = 10.cm.m$ Despejamos m

$$\frac{64\ cm^2}{10\ cm} = m$$

$$m = 6{,}4\ cm$$

$$\boldsymbol{c^2 = a.n}$$

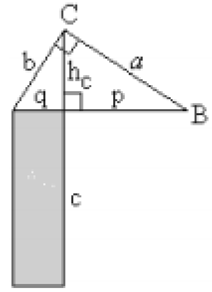
$(6cm)^2 = 10.cm.n$ Despejamos n

$$\frac{36\ cm^2}{10\ cm} = n$$

$$n = 3{,}6\ cm$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. De acuerdo con los datos indicados en la figura, el área sombreada es:



   a) P.q
   b) Bc
   c) a^2
   d) b^2
   e) h_{c^2}

Respuesta:
En el área del rectángulo se obtiene con el producto de las medidas de dos lados contiguos.

En este caso: a= c.q

Pero c.q= b^2 (Por teorema de Euclides referido al cateto b)

Por lo tanto; la respuesta correcta es la alternativa D

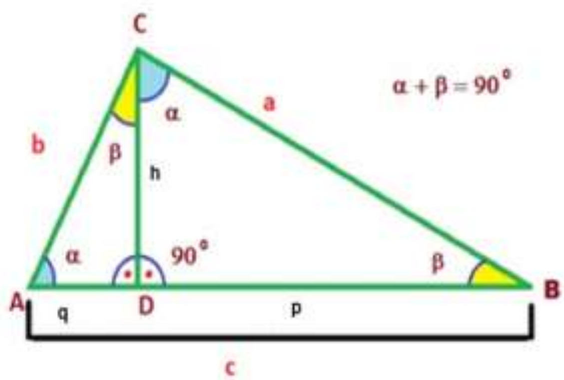
2. 

Figura 1

Considere que en el triángulo que se muestra en la figura 1 la altura con respecto a la ***hipotenusa*** tiene un valor de 10 cm, y el segmento ***q*** tiene un valor de 5 cm, obtenga el valor del segmento ***p***.

Respuesta:
Para la resolución de este problema se usará el teorema de Euclides referido a la altura que nos dice que:

$$h^2 = p * q$$

por lo tanto reemplazando los valores otorgados por el problema se tiene que:

$$(10cm)^2 = p * 5cm$$

desarrollando la potencia y despejando "p" se tiene que

$$p = \frac{100}{5} = 20cm$$

3. Considere que en el triángulo de la Figura 1 el cateto ***a*** mide 4 cm y la ***hipotenusa c*** mide 5cm, calcule la proyección del cateto sobre la hipotenusa.

Respuesta:
Para resolver este problema se usará el "Teorema de Euclides referido a los catetos" el cual nos dice que:

$$a^2 = c * p$$

reemplazando con los valores otorgados por el problema se tiene que :

$$(4cm)^2 = 5cm * p$$

desarrollando la potencia y luego despejando "p" se tiene que :

$$p = \frac{16}{5} = 3.2cm$$

4. Considere que en el triángulo de la figura 1 el valor de ***"q"*** es 1,8 cm y el valor de la hipotenusa ***"c"*** es de 5 cm. calcule el valor del cateto ***"b".***

Respuesta:

Para resolver este problema se usará el "Teorema de Euclides referido a los catetos" el cual nos dice que :

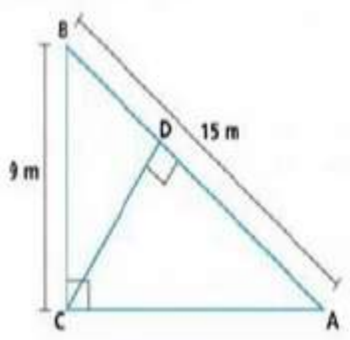
$$b^2 = c * q$$

reemplazando con los valores otorgados por el problema se tiene que:

$$b^2 = 1.8 * 5 b^2 = 9$$

$$\boldsymbol{b = 3}$$

5. El canopy es uno de los deportes de aventura más difundidos en los últimos tiempos. Básicamente consiste en lanzarse por un cable, atado a grandes distancias y diferentes alturas, mediante una polea y un arnés sostenido a ella. Pues bien, supongamos que tenemos una situación problema en una instalación de este deporte y que se puede representar en la siguiente figura:



¿Cuánto desplazarse la polea para que la distancia entre D y C sea la menor posible?

Respuesta:

Para que CD sea lo menor posible, debe ser perpendicular a AB, luego nuestro problema es determinar la longitud del segmento BD. Como el triángulo ABC es rectángulo en C podemos aplicar el teorema de euclides:

$$\boldsymbol{9^2 = BD\,.AB}$$

$$\boldsymbol{81 = BD.15}$$

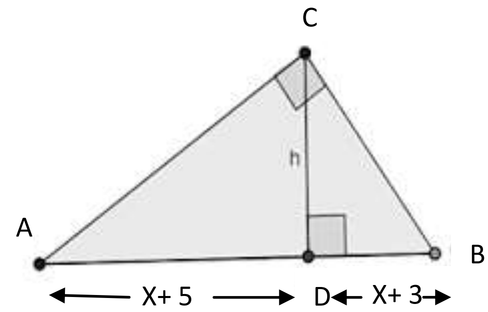
$$\boldsymbol{BD = \frac{81}{15} = 5,4\text{m}}$$

Por lo tanto; la polea debe desplazarse 5,4 m para encontrarse a la misma distancia de la base de C.

6. El triángulo ABC es rectángulo en C, CD es perpendicular a AB, CD= $2\sqrt{5}$, ces la medida de AB es igual a:
   a) 12

Respuesta:

b) 10
c) 7
d) 5
e) 2



Por el teorema de Euclides:

$$(x+5)(x-3) = (2\sqrt{5}\,)^2$$

$$x^2 - 3x + 5x - 15 = 4.5$$

$$x^2 + 2x - 15 = 20$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

(x+7) (x-5) = 0

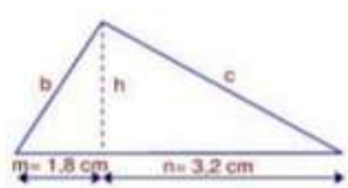
X=5 y x=-7

La raíz negativa no vale

AB= AD + DB= (x+5) + (x – 3)
= 5+ 5 + 5 – 3
= 15 – 3
= 12

La respuesta es la letra a).

7. Tenemos un triángulo rectángulo de forma que la altura relativa a la hipotenusa determina sobre segmentos de longitudes 1,8 cm y 3,2 cm. Halla a) La longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa. b) La longitud de los catetos.



Respuesta:
Recordamos el teorema de la altura

$$h^2 = m.n$$

En nuestro caso
$h^2 = 1.8\,x\,3.2$ = 5,76
$h = \sqrt{5{,}76.}$
$h = 2{,}4\ cm$

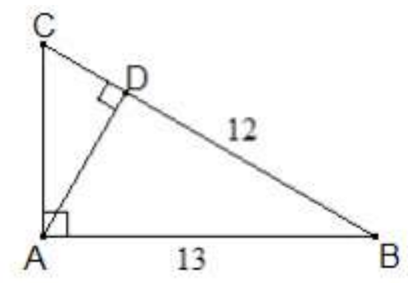
El valor de la hipotenusa sería:
a= m+n = 1,8 + 3,2 ⟹ a= 5 cm

Para hallar los catetos usaremos el teorema del cateto:
$b^2 = a.m$

$b^2 = 5x1,8 = 9$
$b = \sqrt{9}$
$b = 3$cm

$c^2 = a.n$
$c^2 = 5\ x\ 3,2$
$c^2 = 16$
$c = \sqrt{16}$
$c = 4\ cm$

8. En el triángulo ABC rectángulo en A de la figura adjunta CD es paralela a AD. Entonces CD mide:



a) 25

b) 144

c) $\frac{65}{12}$

d) $\frac{25}{12}$

e) 60

Respuesta:
En el triángulo rectángulo ABD, los números 12 y 13 forman parte de un trío pitagórico junto a el 5. Así; AD = 5.

Siendo, además AD la altura del triángulo ABC y CD es proyección del lado b sobre la hipotenusa.

Por lo tanto por el teorema de Euclides relativo a la altura:

$$\boldsymbol{h^2 = CD\ .DB}$$

$$5^2 = CD\ .12$$

$$\frac{25}{12} = \text{CD}$$

La respuesta es la letra d)

Glosario

- **Catetos:** Es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo –los que conforman el ángulo recto. El lado mayor se denomina Hipotenusa –el que es opuesto al ángulo recto.

- **Altura:** Es una longitud o una distancia de una dimensión geométrica, usualmente vertical o en la dirección de la gravedad. Este término también se usa para designar la coordenada vertical de la parte más elevada de un objeto.

- **Triángulo Rectángulo**: Se llama triángulo rectángulo a todo triángulo que posee un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90-grados. Las razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo es un enfoque de la trigonometría plana.

Otras Referencias

- http://www.educatube.es/teorema-de-euclides/

- http://es.slideshare.net/marcitagarrido/gua-de-ejercicios-teoremas-de-euclides

- http://odas.educarchile.cl/odas_mineduc/pav/Matematicas/teorema_de_euclides.swf