

## Sucesiones y Progresiones Aritméticas

### Marco Teórico

Llamamos SUCESIÓN a un conjunto ordenado de números que se deducen mediante una regla fija. Dicha regla queda resumida matemáticamente en el término general de la sucesión

Por ejemplo, los primeros términos de la sucesión

$$a_n = n^2 + n + 1$$

Son 1,3,7,13,21,...y se obtienen dando sucesivamente a n en el término general los valores 0,1,2,3...

En el presente curso estudiaremos detalladamente dos tipos especiales de sucesiones que, por la forma en que se construyen, reciben el nombre de PROGRESIONES

### PROGRESIONES ARITMETICAS

Observemos las siguientes sucesiones:

(a) 1,4,7,10,13.....

(b) 9,4,-1,-6,-11,-16

(c)  $m + \frac{1}{2}$ ,  $m + 2$ ,  $m + \frac{7}{2}$ ,  $m + 5$

(d)  $7\sqrt{3} - 2x$ ,  $2\sqrt{3} - 2x$ ,  $-3\sqrt{3} - 2x$ ,  $-8\sqrt{3} - 2x$ .....

En la sucesión (a) cualquier término, después del primero, lo podemos obtener agregando tres unidades al anterior.

En la sucesión (b) obtenemos cualquier término, después del primero, restándole 5 unidades al anterior, o, dicho de otra forma, agregándole -5 unidades al anterior.

En las sucesiones (c) y (d) podemos obtener cada término ,después del primero ,agregando  $\frac{3}{2}$  y  $-5\sqrt{3}$ ,respectivamente, al término anterior.

A todas las sucesiones que se construyen de esta forma las denominaremos Progresiones Aritméticas (en forma abreviadas: PV)

PROGRESIÓN ARITMETICA es una sucesión en la que cada término, después del primero, se obtiene agregando al término precedente una cantidad constante llamada RAZÓN ( r) de la progresión.

En la progresión (a) la razón es  $r=3$  .En las otras progresiones la razón es ,respectivamente ,  
 $5,3/2$  y  $-5/3$ .

Distinguiremos cuatro elementos en una progresión aritmética:

- 1)La razón :r
- 2)El número de términos de la progresión:n  $(n \in N;n \geq 3)$
- 3)El primer término de la progresión:  $a_1$
- 4) El término enésimo: $a_n$  (Este puede ser el último término o uno cualquiera.Más tarde se comprenderá mejor su uso)

Observemos ahora atentamente las siguientes particularidades :

1. Una progresión aritmética es FINITA si tiene un número limitado de términos. En los ejemplos anteriores, la progresión (b) tiene seis términos;la progresión (c) tiene cuatro :son ,por tanto ,progresiones finitas .En caso contrario ,como en las progresiones (a) y (d) ,se dice que la progresión es INFINITA .
2. Si en una progresión se cumple que cada término es mayor que el precedente ,es decir ,que  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ (y eso sucede con  $r > 0$  ),entonces se dice que la progresión es CRECIENTE: ejemplos (a) y (c)  
 Si ,por el contrario cada término es menor que el precedente ,es decir,si  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ (y eso sucede cuando  $r < 0$ ) ,entonces la progresión es DECRECIENTE :ejemplos (b) y (d)
3. En una progresión aritmética la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante fija, llamada razón.

Para obtener, pues, la razón de una progresión aritmética cuando se conocen sus términos basta tomar un término cualquiera y restarle el que le precede inmediatamente.

$$r = a_n - a_{n-1}$$

4.En una progresión aritmética, cada término ,(exceptuados el primero y el último ),es igual a la media aritmética del término que lo precede y del que los sigue:

$$a_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$$

5.Ordenemos en columna los términos de la progresión (a) y notemos la forma en que puede descomponerse cada uno de ellos :

$$a_1=1=1 \quad =a_1$$

$$a_2=4=1+1.3=a_1+1.r$$

$$a_3=7=1+2.3=a_1+2.r$$

$$a_4=10=1+3.3=a_1+3.r$$

$$a_5=13=1+4.3=a_1+4.r$$

Si en este proceso podemos calcular cualquier término. Por lo tanto:

Generalizando:

$$a_n=a_1+(n-1)r$$

Si efectuáramos el proceso anterior comenzando por un término cualquiera no el primero, descubriríamos que la relación antes obtenida no es sino un caso particular de la siguiente relación:

$$a_n=a_m+(n-m)r$$

Haremos a continuación algunos ejercicios prácticos que nos permitirán profundizar los puntos hasta ahora expuestos.

### Ejemplo N°1:

1. Construir una PV de 6 términos, sabiendo que el primero es 10 y que la razón es  $-3/5$ .

El primer término es  $a_1=10$

Los restantes términos los obtendremos sumándole la razón al término que le precede

$$a_2=10-3/5 =47/5$$

$$a_3=47/5-3/5 =44/5$$

$$a_4=41/5-3/5 =38/5$$

$$a_5=38-3/5 =35/5=7$$

La progresión pedida será, pues, la siguiente:

**PV:10,47/5,44/5,41/5,38/5,7**

### Ejemplo N°2

Determinar la razón de la siguiente progresión:

PV:4, 5/2,1,-1/2,-2.....

Podemos obtener la razón tomando un término cualquiera y restándole el anterior

$$r = a_3 - a_2$$

$$r = 1 - 5/2$$

$$r = -3/2$$

### EJERCICIOS RESUELTOS

1. En la siguiente progresión falta un término. Hallarlo.

PV: 8, 15, \_\_, 29

Solución:

Sabemos que en una PV un término cualquiera es la media aritmética del término precedente y del siguiente:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$$

$$a_3 = \frac{15 + 29}{2}$$

$$a_3 = 22$$

2. Calcular el octavo término de una P $\bar{V}$  de razón 4 sabiendo que el quinto término es 19

Solución

$$a_n = a_m + (n - m)r$$

$$a_8 = a_5 + (8 - 5)r$$

$$a_8 = 19 + 3 \cdot 4$$

$$a_8 = 31$$

3. Calcular el séptimo término de una P $\bar{V}$  de razón 3 sabiendo que el quinto término es 12

Solución:

$$a_n = a_m + (n - m)r$$

$$a_7 = a_5 + (7 - 5)r$$

$$a_7 = 12 + 2 \cdot 3$$

$$a_7 = 18$$

4. En la siguiente progresión falta un término. Hallarlo.

PV: 6, 12, \_\_, 24

Solución:

Sabemos que en una PV un término cualquiera es la media aritmética del término precedente y del siguiente:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$$

$$a_3 = \frac{12 + 24}{2}$$

$$a_3 = 18$$

5. En la siguiente progresión falta un término. Hallarlo.

PV: 3, \_\_, 17, 24

Solución:

Sabemos que en una PV un término cualquiera es la media aritmética del término precedente y del siguiente:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$a_2 = \frac{3 + 17}{2}$$

$$a_2 = 10$$

6. Determinar la razón de la siguiente progresión:

PV: 3, 1/2, 1, -3/2, -2.....

Podemos obtener la razón tomando un término cualquiera y restándole el anterior

Solución

$$r = a_4 - a_3$$

$$r = -3/2 - 1$$

$$r = -5/2$$

7. En la siguiente progresión falta un término. Hallarlo.

PV: 7, 14, \_\_, 28

Solución:

Sabemos que en una PV un término cualquiera es la media aritmética del término precedente y del siguiente:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$$

$$a_3 = \frac{14 + 28}{2}$$

$$a_3 = 21$$

8. En la siguiente progresión falta un término. Hallarlo.

PV: 2, \_\_, 6,

Solución:

Sabemos que en una PV un término cualquiera es la media aritmética del término precedente y del siguiente:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$a_2 = \frac{2 + 6}{2}$$

$$a_2 = 4$$

9. Calcular el sexto término de una  $P\bar{V}$  de razón 4 sabiendo que el cuarto término es 10

Solución:

$$a_n = a_m + (n-m)r$$

$$a_6 = a_4 + (6-4)r$$

$$a_6 = 10 + 2 \cdot 4$$

$$a_6 = 18$$

- 10 Calcular el tercer término de una  $P\bar{V}$  de razón 2 sabiendo que el cuarto término es 14

Solución:

$$a_n = a_m + (n-m)r$$

$$a_3 = a_4 + (3-4)r$$

$$a_3 = 14 + (-1) \cdot 2$$

$$a_3 = 12$$

Profesor: Militza Indaburo

Fe y Alegría Versión: 2016-07-02

## Glosario

## Referencias

Videos.

