1

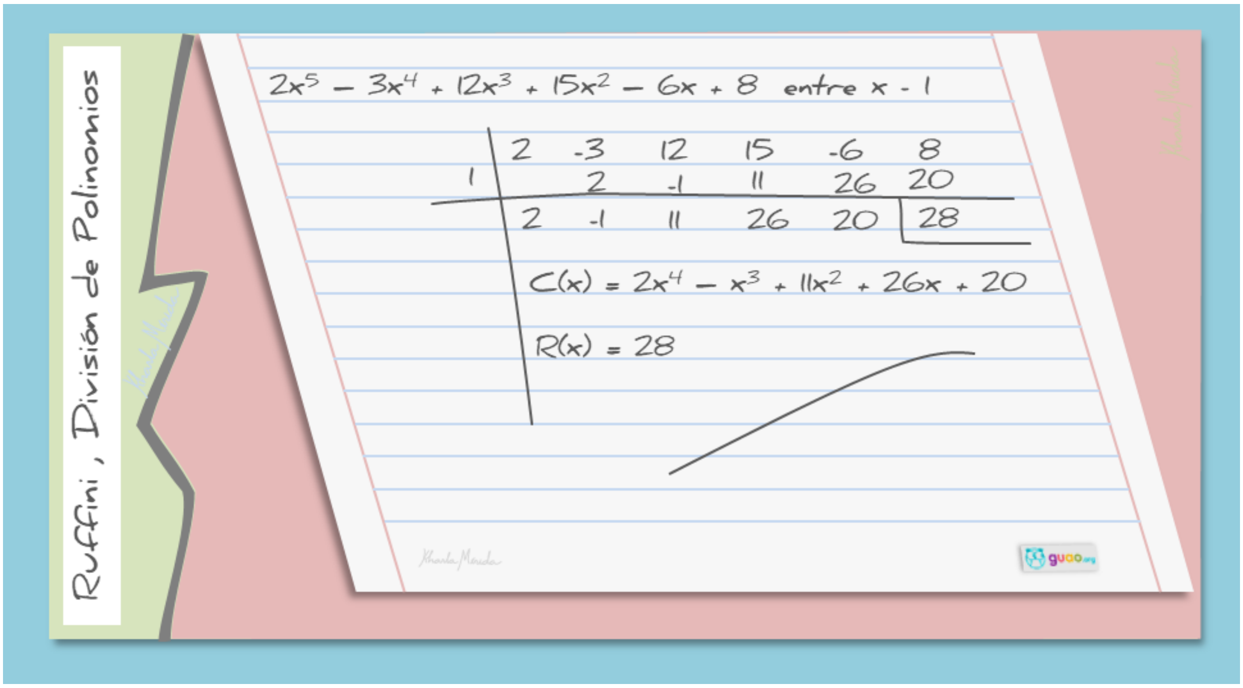
1ra Unidad

Polinomio

1.2 Regla de Ruffini

Cuando dominamos un conocimiento somos capaces de crear sistemas organizados para proceder y calcular de forma limpia y sencilla. Esto ha permitido hacer de complejas operaciones sencillos procedimientos.

Descripción



$2x^5 - 3x^4 + 12x^3 + 15x^2 - 6x + 8$ entre $x - 1$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -3 & 12 & 15 & -6 & 8 \\ 1 & & 2 & -1 & 11 & 26 & 20 \\ \hline & 2 & -1 & 11 & 26 & 20 & \boxed{28} \end{array}$$

$C(x) = 2x^4 - x^3 + 11x^2 + 26x + 20$

$R(x) = 28$

Con este objetivo agregamos un valioso recurso a la transformación y simplificación de expresiones algebraicas, que a su vez son determinantes en el desarrollo de cálculos superiores y avanzados. Es así como procedimientos básicos son la estructura fundamental de lo complejo. Conozcamos y aprendamos a manejar este recurso.

Conocimientos Previos Requeridos

Múltiplos y Divisores, Operaciones en los Reales, Polinomios.

Contenido

Condiciones Necesarias y Pasos para Dividir Polinomio, Hallar Cociente y Residuo, Hallar el Valor de k Para un Residuo Dado, Hallar el Cociente y Residuo de la División.

Videos Disponibles

RUFFINI. Condiciones Necesarias y Pasos para Dividir Polinomios

RUFFINI. Ejercicio 1. Hallar Cociente y Residuo

RUFFINI. Ejercicio 2. Hallar el Valor de k para un Residuo Dado

RUFFINI. Ejercicio 3. Hallar el Valor de k para un Residuo Dado

RUFFINI. Ejercicio 4. Hallar el Cociente y Residuo de la División

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para familiarizarse con los conceptos nuevos y fortalecer el lenguaje operativo.

Guiones Didácticos

RUFFINI. Condiciones Necesarias y Pasos para Dividir Polinomios.

Condición para Aplicar Regla de Ruffini a una División de Polinomios

Condición para Aplicar Regla de Ruffini a una División de Polinomios. Para aplicar la regla de Ruffini a una división de polinomios es necesario que el divisor tenga la forma $x - k$.

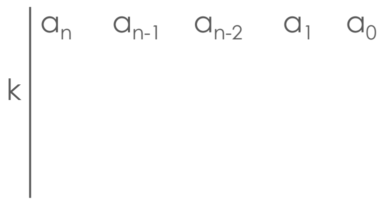
$$P(x) \div (x - k)$$

Pasos

1ro. Escribir los coeficientes de cada término del polinomio dividendo alineados horizontalmente

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \; a_1 x + a_0$$

2do. A la izquierda, en la línea inferior, separado por una barra colocamos la raíz del binomio $x - k$.

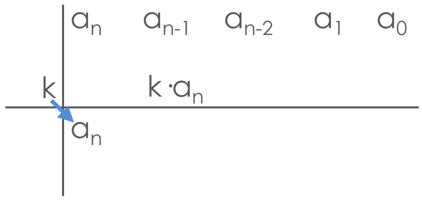


Nota: En las lecciones de polinomio aprendimos que **la raíz de un polinomio es la que hace cero un polinomio.** Para efecto del binomio $x - k$, la raíz es k porque al sustituir k en x resulta cero.

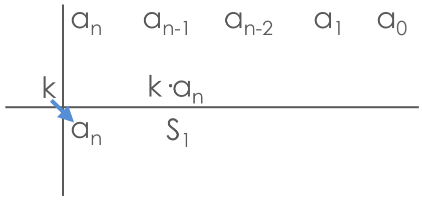
$$x - k \rightarrow x - k$$
$$k - k = 0$$

3ro. Copiamos el primer coeficiente en la línea inferior.

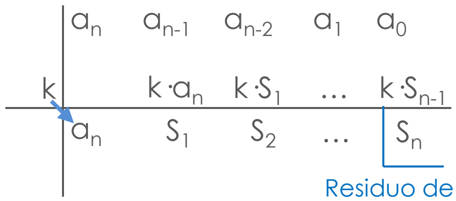
4to. Multiplicamos la raíz del divisor por el primer coeficiente y el producto se escribe debajo del 2do coeficiente.



5to. Efectuamos la suma del 2do coeficiente y el producto obtenido.



Ahora repetimos el procedimiento de multiplicar y sumar, hasta completar los coeficientes. La última suma obtenida es el residuo de la división.



Residuo de la división

Dividir el polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 7$ entre $x - 2$

Dividendo: P(x)
Divisor: x – 2

P(x) es de grado 3 y tiene todos sus términos

Tomaremos los coeficientes y los escribiremos alineados en forma horizontal,

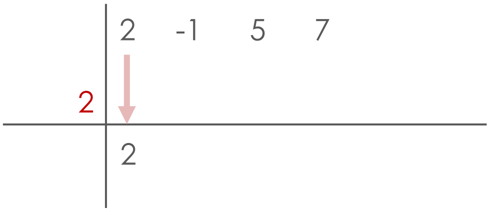
2 -1 5 7

Tracemos las líneas que organizan el espacio de operaciones

Hallamos la raíz del binomio divisor:

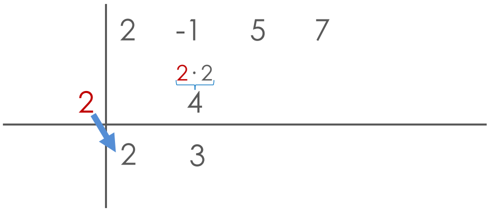
$$x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$$

Escribimos el 2 a la izquierda y copiamos el 1er coeficiente, 2, en la siguiente fila.



Multiplicamos la raíz, 2, por el 1er coeficiente, 2, y colocamos el resultado debajo del 2do coeficiente, 4.

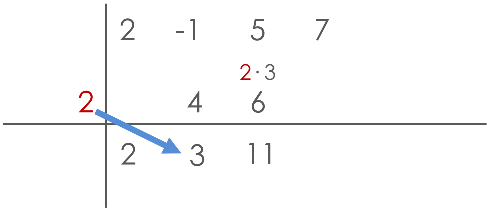
Efectuamos la suma, -1 + 4 = 3.



Repetimos el procedimiento.

Multiplicamos la raíz, 2, por la 1ra suma, 3, y colocamos el resultado debajo del 2do coeficiente, 6.

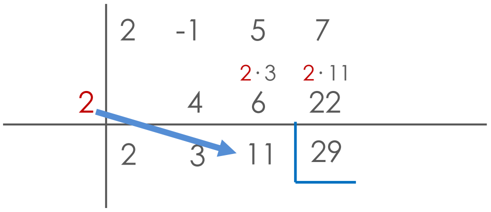
Efectuamos la suma, 5 + 6 = 11.



Repetimos el procedimiento.

Multiplicamos la raíz, 2, por la 1ra suma, 11, y colocamos el resultado debajo del 2do coeficiente, 22.

Efectuamos la suma, 5 + 6 = 11.



Los números obtenidos, como resultados de las sumas, son los coeficientes del polinomio cociente, que es de un grado menor que el dividendo. Es decir, el polinomio cociente tiene grado 2.

Cociente: $C(x) = 2x^2 + 3x + 11$

Residuo: 29

RUFFINI. Ejercicio 1. Hallar Cociente y Residuo.

Hallar el cociente y el residuo de $P(x) \div Q(x)$,
con: $P(x) = x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 4x + 28$ y $Q(x) = x + 4$

1ro observamos que P(x) tenga los términos completos. Como es un polinomio de grado 4 debe tener 5 términos:

$$\begin{array}{l} P(x) = \underset{1}{x^4} + \underset{2}{6x^3} - \underset{3}{9x^2} + \underset{4}{4x} + \underset{5}{28} \qquad Q(x) = x + 4 \end{array}$$

Como los términos están completos escribimos todos los coeficientes alineados horizontalmente trazamos las líneas que organizan el desarrollo.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 6 & -9 & 4 & 28 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Hallamos la raíz del binomio divisor para colocarla a la izquierda de la barra vertical:

$x + 4 = 0 \qquad x = -4$

Escribimos el -4 a la izquierda y copiamos el 1er coeficiente, 1, en la siguiente fila.

Multiplicamos la raíz, -4, por el 1er coeficiente, 1, y colocamos el resultado debajo del 2do coeficiente, -4. Y efectuamos la suma.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 6 & -9 & 4 & 28 \\ -4 & & -4 & & & \\ \hline & 1 & 2 & & & \end{array}$$

Multiplicamos el divisor por la suma y colocamos el resultado debajo del 3er coeficiente, efectuamos la suma.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 6 & -9 & 4 & 28 \\ -4 & & -4 & -8 & & \\ \hline & 1 & 2 & -17 & & \end{array}$$

Nuevamente, multiplicamos el divisor por la suma y colocamos el resultado debajo del 4to coeficiente, efectuamos la suma.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 6 & -9 & 4 & 28 \\ -4 & & -4 & -8 & 68 & \\ \hline & 1 & 2 & -17 & 72 & \end{array}$$

Una vez más, multiplicamos el divisor por la suma y colocamos el resultado debajo del 5to coeficiente, efectuamos la suma.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 6 & -9 & 4 & 28 \\ -4 & & -4 & -8 & 68 & -288 \\ \hline & 1 & 2 & -17 & 72 & -260 \\ \hline \end{array}$$

Coeficientes de Polinomio Cociente

Los números obtenidos, como resultados de las sumas, son los coeficientes del polinomio cociente, que es de un grado menor que el dividendo. Es decir, el polinomio cociente tiene grado 2.

Cociente: $C(x) = x^2 + 2x^2 + 3x + 11$

Residuo: -260

RUFFINI. Ejercicio 2. Hallar el Valor de k para un Residuo Dado.

Hallar el valor de k para que el residuo de P(x) ÷ Q(x) sea 51.

$$P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 18x + k \qquad Q(x) = x + 7$$

1ro observamos que P(x) tenga los términos completos. Como es un polinomio de grado 3 debe tener 4 términos:

$$P(x) = \underset{1}{2x^3} + \underset{2}{5x^2} + \underset{3}{18x} + \underset{4}{k}$$

Como los términos están completos escribimos todos los coeficientes alineados horizontalmente, y trazamos las líneas que organizan el desarrollo.

Ahora necesitamos la raíz del binomio divisor:

$$x + 7 = 0 \qquad x = -7$$

Escribimos el -7 a la izquierda y copiamos el 1er coeficiente, 2, en la siguiente fila.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & 18 & k \\ -7 & \downarrow & & & \\ \hline & 2 & & & \end{array}$$

Multiplicamos el divisor por el 1er coeficiente y colocamos el resultado debajo del 2do coeficiente.

Efectuamos la suma: 5 – 14 = -9

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & 18 & k \\ -7 & & -14 & & \\ \hline & 2 & -9 & & \end{array}$$

Multiplicamos el divisor por el 1ra suma y colocamos el resultado debajo del 3er coeficiente.

Efectuamos la suma: 18 + 63 = 81

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & 18 & k \\ -7 & & -14 & 63 & \\ \hline & 2 & -9 & 81 & \end{array}$$

Multiplicamos el divisor por el 2da suma y colocamos el resultado debajo del 4to coeficiente.

Efectuamos la suma: 18 + 63 = 81

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 5 & 18 & k \\ -7 & & -14 & 63 & -567 \\ \hline & 2 & -9 & 81 & \boxed{k - 567} \end{array}$$

Residuo: k – 567

Del enunciado sabemos que el residuo es 51

Igualamos el residuo obtenido a 51:

$$k - 567 = 51$$

Despejamos k pasando 567, que está sumando, al otro lado de la igualdad restando.

$$k = 51 + 567$$

$$\boxed{k = 618}$$

RUFFINI. Ejercicio 3. Hallar el Valor de k para un Residuo Dado.

Hallar el valor de k para que el residuo de $P(x) \div Q(x)$ sea 9

$P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 6$ $Q(x) = x - 1$

1ro observamos que P(x) tenga los términos completos. Como es un polinomio de grado 3 debe tener 4 términos:

$$P(x) = \underset{1}{x^3} - \underset{2}{2x^2} + \underset{3}{kx} + \underset{4}{6}$$

Como los términos están completos escribimos todos los coeficientes alineados horizontalmente, y trazamos las líneas que organizan el desarrollo.

Ahora necesitamos la raíz del binomio divisor:

$x - 1 = 0$ $x = 1$

Escribimos el 1 a la izquierda y copiamos el 1er coeficiente, 1, en la siguiente fila.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & k & 6 \\ 1 & \downarrow & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Multiplicamos el divisor por el 1er coeficiente y colocamos el resultado debajo del 2do coeficiente.

Efectuamos la suma: -2 + 1 = -1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & k & 6 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & -1 & & \end{array}$$

Multiplicamos el divisor por la 1ra suma y colocamos el resultado debajo del 3er coeficiente.

Efectuamos la suma: k + (-1) = k – 1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & k & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & \\ \hline & 1 & -1 & k-1 & \end{array}$$

Multiplicamos el divisor por la 2da suma y colocamos el resultado debajo del 4to coeficiente.

Efectuamos la suma: k + (-1) = k – 1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & k & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & k-1 \\ \hline & 1 & -1 & k-1 & \boxed{k+5} \end{array}$$

Residuo: k + 5

Del enunciado sabemos que el residuo es 9

Igualamos el residuo obtenido a 9:

$k + 5 = 9$

Despejamos k pasando 5, que está sumando, al otro lado de la igualdad restando.

$k = 9 - 5$

$\boxed{k = 4}$

RUFFINI. Ejercicio 4. Hallar el Cociente y Residuo de la División.

Hallar el cociente y el residuo de la división de P(x) ÷ Q(x), con $P(x) = x^4 - 3x^2 - 10$ y $Q(x) = x^2 - 5$.

$P(x) = x^4 - 3x^2 - 10$ $Q(x) = x^2 - 5$

Observaciones:

- P(x) no tiene los términos completos, y Q(x) es de grado 2.
  Recordemos. Para aplicar Ruffini el divisor debe ser de grado 1
- **Polinomio Dividendo:**
  El primer término es una potencia de x^2: $x^4 = (x^2)^2$
  El segundo término también es una potencia de x^2: $x^2 = x^2$
- **Binomio Divisor:**

y el único término variable es una potencia de x^2

Vamos a escribir el polinomio dividendo y el binomio divisor de tal forma que se vean las potencias x^2

$P(x) = (x^2)^2 - 3(x^2) - 10$ $Q(x) = (x^2) - 5$

Cambiamos x^2 por y en ambas expresiones.

$x^2 = y$

$P(x) = y^2 - 3y - 10$ $Q(y) = y - 5$

Ahora si tenemos un binomio de grado 1 como divisor

Escribimos los coeficientes alineados horizontalmente y trazamos la líneas que organizan la operación.

La raíz del binomio divisor es 5 lo colocamos a la izquierda y bajamos el primer coeficiente.

	1	-3	-10
5			
	1		

Multiplicamos el divisor por el primer coeficiente y colocamos el resultado debajo del 2do coeficiente

Efectuamos la suma: -3 + 5 = 2

	1	-3	-10
5		5	
	1	2	

Multiplicamos el divisor por la primera suma y colocamos el resultado debajo del 3er coeficiente

Efectuamos la suma: -10 + 10 = 0

	1	-3	-10
5		5	10
	1	2	0

Coeficientes de Polinomio Cociente

El residuo de la división es cero y hemos obtenidos los coeficientes del cociente.

Cociente: $C(x) = y + 2$

Residuo: 0

Ahora, recordemos que y no es la variable original, tenemos que $y = x^2$. Entonces cambiaremos y por x^2.

$C(x) = x^2 + 2$

Ejercicios

Obtener cociente y residuo en las divisiones dadas:

1. p(x) = $11x^3 + 9x^2 + 3x – 7$ entre x – 7
2. h(x) = $-x^4 + 7x^3 + 15x^2 – 3x + 6$ entre x + 5
3. f(x) = $2x^5 – 3x^4 + 12x^3 + 15x^2 – 6x + 8$ entre x - 1

Hallar el valor de k en cada caso:

4. $3x^4 + x^3 + 6x^2 – kx + 12$ entre x + 6 con residuo 1320 k = 2
5. $x^3 + 2kx^2 + 5x – 4$ entre x – 2 con residuo -2 k = -2
6. $2x^4 – 7x^3 + 9x^2 – 5x + k-1$ entre x – 9 con residuo -2 k = 7

Hallar el cociente y el residuo de la división de P(x) ÷ Q(x) en cada caso:

7. P(x) = $7x^4 – 11x^3 + 5x^2 + x – 2$ y Q(x) = x + 7
8. P(x) = $-x^4 – 9x^3 – x + 10$ y Q(x) = x – 8
9. P(x) = $2x^4 – 11x^2 + 17$ y Q(x) = $x^2 + 1$

Lo Hicimos Bien?

1. C(x) = $11x^2 + 86x + 605$, R(x) = 4228
2. C(x) = $-x^3 + 12x^2 – 45x + 222$, R(x) = -1104
3. C(x) = $2x^4 – x^3 + 11x^2 + 26x + 20$, R(x) = 28
4. k = 2
5. k = -2
6. k = 7
7. C(x) = $7x^3 – 60x^2 + 425x – 2974$, R(x) = 20816
8. C(x) = $-x^3 – 17x^2 – 137$, R(x) = -1086
9. C(x) = $2x^2 – 13$, R(x) = 30