Raíz de Números Complejos

Marco Teórico

Raíz enésima de un número complejo son aquellos complejos que elevados al exponente n dan como resultado el primero .Sea þ Cis ∅ la raíz n-sima del complejo r Cis ∝:

$\sqrt[n]{r\ Cis\ \propto}$ = þ Cis ∅ (I)

r Cis ∝ =$(þ\ \mathrm{Cis}\ \emptyset)^n$ Elevemos ambos miembros a la potencia n

r Cis ∝=($þ^n$ Cisn∅) Apliquemos fórmula de Moivre en el segundo miembro

$þ^n = r \qquad Por\ la\ condición\ de\ igualdad\ de\ complejos\ en\ forma\ trigonometrica$

$þ = \sqrt[n]{r}$; (II)

n∅=∝ +2k

$\emptyset = \frac{\propto +2\mathrm{k}}{n}$; Por lo tanto (III)

$\sqrt[n]{r\ Cis\ \propto}$=$\sqrt[n]{r}$ Cis $\frac{\propto +2\mathrm{k}}{n}$ Sustituyendo las ecuaciones II y III en la expresión I

Dando a k los valores 0,1,2,…….,n-1 se obtienen las n raíces distintas del complejo dado:

$z_0 = \sqrt[n]{r}$ Cis $\frac{\propto}{n}$

$z_1 = \sqrt[n]{r}$ Cis $\frac{\propto +2\pi}{n}$

$z_2 = \sqrt[n]{r}$ Cis $\frac{\propto +4\pi}{n}$

. .

. .

. .

$Z_{n-1} = \sqrt[n]{r}$ Cis $\frac{\propto+2(n-1)\ \pi}{n}$

Si se le asignaran a k valores superiores a n-1 no se obtendrían raíces distintas sino raíces equivalentes a z_0,z_1, entre otros. En efecto ,sino para k=n tenemos:

$Z_n=\sqrt[n]{r}\text{Cis}\frac{\propto+2n\pi}{n}=\sqrt[n]{r}\ \text{Cis}\ (\frac{\propto}{n}+2\pi)$

Esta raíz es igual a z_0 pues tiene el mismo módulo y los argumentos se diferencian en un número exacto de giros. Se comprueba fácilmente que lo mismo sucede para k=n+1 ,n+2,n+3,entre otros

Resumiendo:

$\sqrt[n]{\boldsymbol{rCis}\propto}=\sqrt[n]{\boldsymbol{r}}\textbf{Cis}\frac{\propto+2\boldsymbol{k\pi}}{\boldsymbol{n}}$ **(k=0,1,2,……..,n-1)**

Puesto en palabras:

La raíz n-sima de un número complejo en forma trigonométrica tiene n soluciones distintas; el módulo de todas ellas es la raíz n-sima del módulo del complejo dado ;los argumentos se obtienen dando a k los valores 0,1,2,….,n-1 en la expresión

$$\frac{\propto+2\boldsymbol{k\pi}}{\boldsymbol{n}}$$

Ejemplo Nº1

Determinar $\sqrt[4]{81\ Cis\ 40^{\circ}}$

La forma general de las raíces la obtenemos aplicando las relaciones que dedujimos antes:

$\sqrt[4]{81\ Cis\ 40^{\circ}}=\sqrt[4]{81}\text{Cis}\frac{40^{\circ}+k.360^{\circ}}{4}$

=3 Cis (10°+k.90°)

z_0=3 Cis(10°+0.90°)

z_0=3 Cis10°

z_1=3 Cis(10°+1.90°)

z_1=3 Cis100°

z_2=3 Cis(10°+2.90°)

z_2=3 Cis190°

z_3=3 Cis(10°+3.90°)

z_3=3 Cis280°

Ejemplo Nº2

Determinar $\sqrt[5]{-\sqrt{2}+\sqrt{21}}$

Expresaremos, en primer lugar ,el radicando en forma trigonométrica .

Cálculo del módulo

r=$\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$ =$\sqrt{2+2}$=2

Cálculo del argumento

$\emptyset = arctg\,\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$ =arctg(-1)

$$\emptyset = 180^{\circ} - 45^{\circ}$$

$$\emptyset = 135^{\circ}$$

El radicando es, pues, en forma trigonométricas:

2Cis 135°

Aplicamos ahora la fórmula de radicación:

$\sqrt[5]{2\,Cis\,135^{\circ}}$=$\sqrt[5]{2}Cis\frac{135^{\circ}+k.360^{\circ}}{5}$

=$\sqrt[5]{2}$ Cis (27°+k.72°)

z_0=$\sqrt[5]{2}$ Cis(27°+0.72°)

z_0= $\sqrt[5]{2}$Cis27°

z_1=$\sqrt[5]{2}$ Cis(27°+1.72°)

z_1=$\sqrt[5]{2}$ Cis99°

z_2=$\sqrt[5]{2}$ Cis(27°+2.72°)

z_2= $\sqrt[5]{2}$Cis171°

z_3= $\sqrt[5]{2}$ Cis(27°+3.72°)

z_3=$\sqrt[5]{2}$ Cis243°

$z_4$$\sqrt[5]{2}$ Cis(27°+4.72°)

z_4=$\sqrt[5]{2}$ Cis315°

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determine el valor de z:

$z=\sqrt{16\ Cis\ 100^{\circ}}$

Solución:

Aplicamos ahora la fórmula de radicación:

$\sqrt{16\ Cis\ 100^{\circ}}=\sqrt{16}\text{Cis}\frac{100^{\circ}+k.360^{\circ}}{2}$

$=4\text{ Cis }(50^{\circ}+k.180^{\circ})$

$z_0=4\text{ Cis}(50^{\circ}+0.180^{\circ})$

$\mathbf{z_0= 4\ Cis50^{\circ}}$

$z_1=4\text{ Cis}(50^{\circ}+1.180^{\circ})$

$\mathbf{z_1= 4\ Cis230^{\circ}}$

$z_2=4\text{ Cis}(50^{\circ}+2.180^{\circ})$

$\mathbf{z_2= 4\ Cis410^{\circ}}$

$z_3=4\text{ Cis}(50^{\circ}+3.180^{\circ})$

$\mathbf{z_3= 4\ Cis\ 590^{\circ}}$

$z_4=4\text{ Cis}(50^{\circ}+4.180^{\circ})$

$\mathbf{z_4= 4\ Cis820^{\circ}}$

2. Determine el valor de z:

$z=\sqrt[3]{8\ Cis\ 93^{\circ}}$

Solución

Aplicamos ahora la fórmula de radicación:

$\sqrt[3]{8\ Cis\ 93^{\circ}}=\sqrt[3]{8}\text{Cis}\frac{93^{\circ}+k.360^{\circ}}{2}$

$=2\text{ Cis }(46{,}5^{\circ}+k.180^{\circ})$

$z_0=2\text{ Cis}(46{,}5^{\circ}+0.180^{\circ})$

$\mathbf{z_0= 2\ Cis46{,}5^{\circ}}$

$z_1=2\text{ Cis}(46{,}5^{\circ}+1.180^{\circ})$

z_1= 2 Cis226,5°

z_2=4 Cis(46,5°+2.180°)

z_2= 4 Cis406,5°

z_3=2 Cis(46,5°+3.180°)

z_3= 2 Cis 586,5°

z_4=2 Cis(46,5°+4.180°)

z_4= 2 Cis766,5°

3. Determine el valor de z:

$z=\sqrt[4]{32\ Cis\ 52^\circ}$

Solución:

Aplicamos ahora la fórmula de radicación:

$\sqrt[4]{32Cis\ 52^\circ}=\sqrt[4]{32}\text{Cis}\frac{52^\circ+k.360^\circ}{2}$

$=2\sqrt{2}$ Cis (26°+k.180°)

$z_0=2\sqrt{2}$ Cis(26°+0.180°)

z_0= $2\sqrt{2}$ Cis26°

z_1=$2\sqrt{2}$ Cis(26°+1.180°)

z_1= $2\sqrt{2}$ Cis206°

$z_2=2\sqrt{2}$ Cis(26°+2.180°)

z_2=$2\sqrt{2}$ Cis386°

$z_3=2\sqrt{2}$ Cis(26°+3.180°)

z_3= $2\sqrt{2}$ Cis 566°

$z_4=2\sqrt{2}$ Cis(26°+4.180°)

z_4= $2\sqrt{2}$ Cis746°

4. Determine el valor de z:

$z=\sqrt[5]{1/243Cis35^\circ}$

Solución:

Aplicamos ahora la fórmula de radicación:

$\sqrt[5]{1/243Cis35^\circ}=\sqrt[5]{1/243}\text{Cis}\frac{35^\circ+k.360^\circ}{2}$

$=\sqrt[5]{1/243}$ Cis (17,5°+k.180°)

$z_0=\sqrt[5]{1/243}$ Cis(17,5°+0.180°)

$z_0=\sqrt[5]{1/243}$ Cis17,5°

$z_1=\sqrt[5]{1/243}$ Cis(17,5°+1.180°)

$z_1=\sqrt[5]{1/243}$ Cis297,5°

z_2=1/3 Cis(17,5°+2.180°)

z_2= 1/3 Cis367,5°

z_3=1/3Cis(17,5°+3.180°)

z_3= 1/3 Cis 557,5°

z_4=1/3 Cis(17,5°+4.180°)

z_4=1/3 Cis737,5°

5. Determine el valor de z:

$$z=\sqrt[3]{\frac{1}{27}Cis60°}$$

Solución:

Aplicamos ahora la fórmula de radicación:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{27}Cis60°}=\sqrt[3]{1/27}\ \frac{60°+k.360°}{2}$$

=1/3 Cis (30°+k.180°)

z_0=1/3 Cis(30°+0.180°)

z_0=1/3 Cis50°

z_1=1/3 Cis(30°+1.180°)

z_1= 1/3 Cis210°

z_2=1/3 Cis(30°+2.180°)

z_2= 1/3 Cis390°

z_3=1/3 (30°+3.180°)

z_3= 1/3 Cis 570°

z_4= 1/3 Cis(30°+4.180°)

z_4= 1/3 Cis750°

6. Determine el valor de z:

Solución

Aplicamos ahora la fórmula de radicación:

z=$\sqrt[6]{8Cis120^{\circ}}$

$\sqrt[6]{8Cis120^{\circ}}=\sqrt[6]{8}\ \frac{120^{\circ}+k.360^{\circ}}{2}$

$=\sqrt{2}$ Cis $(60^{\circ}+k.180^{\circ})$

$z_0=\sqrt{2}$ Cis$(60^{\circ}+0.180^{\circ})$

$z_0=\sqrt{2}$ Cis60°

$z_1=\sqrt{2}$ Cis$(60^{\circ}+1.180^{\circ})$

$z_1=\sqrt{2}$ Cis240°

$z_2=\sqrt{2}$ Cis$(60^{\circ}+2.180^{\circ})$

$z_2=\sqrt{2}$ Cis420°

$z_3=\sqrt{2}$ $(60^{\circ}+3.180^{\circ})$

$z_3=\sqrt{2}$ Cis 600°

$z_4=\sqrt{2}$ Cis$(60^{\circ}+4.180^{\circ})$

$z_4=\sqrt{2}$ Cis800°

Profesor: Militza Indaburo Fe y Alegría Versión:2016-07-02

Glosario

Videos.