Materia: Matemáticas de 4to año

Tema: Propiedades de las funciones exponenciales

Marco Teórico

Función Exponencial: Toda función del tipo $f(x) = a^x$, en la que "a" es una constante positiva y distinta de la unidad, es decir :
$a>0$ y $a \neq 1$ se llama función exponencial.

EJEMPLO 1. CRECIMIENTO EXPONENCIAL

En condiciones ideales una población de cierta bacteria duplica su tamaño cada hora. Si el cultivo inicia con 500 bacterias, determina una expresión para el número de bacterias n(t) después de "t" horas.

Si el cultivo inicia con 500 bacterias, entonces n(0) =500 ; después de una hora tendremos 1000 bacterias , luego de dos horas,2000 , y así sucesivamente

Veamos:

$n(0)=500$

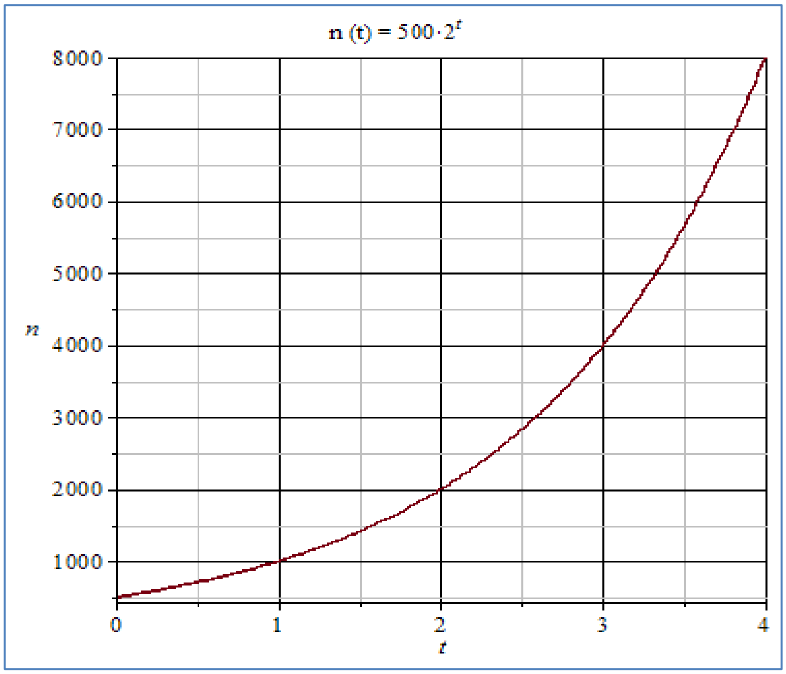
$n(1)= 500.2=1000$

$n(2)=(500.2).2= 500.(2^2)=500.4 =2000$

$n(3)=(500.2^2) .2= 500.(2^3) =500.8 =4000$

$n(4)= (500.2^3).2= 500.(2^4) =500.16=8000$

Gráfica:



Concluimos que el número de bacterias después de t horas es $n(t)=500(2^t)$

EJEMPLO 2.DECAIMIENTO EXPONENCIAL

Se saca del horno un pavo asado con una temperatura de 85°c y se coloca en la mesa, donde la habitación tiene una temperatura ambiente de 24°c.

Calcula la temperatura a los 15 minutos, 30 minutos, 45 minutos, 60 minutos ,90 minutos, y 120 minutos.

Solución:

Utilizando LA LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

$Y= T_a + (T_o - T_a) .e^{-k.x}$

T_a =Temperatura ambiental

$T_{o=}$ Temperatura inicial del cuerpo.

K= Constante de enfriamiento del cuerpo

X= Tiempo transcurrido

DATOS DEL PROBLEMA

T_a =24°C

T_o=85°C

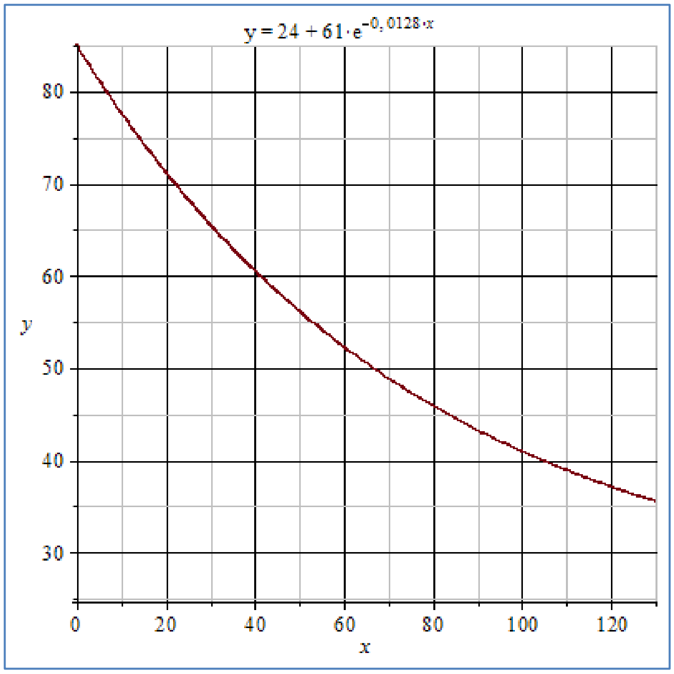
K=0,0128

e=2,718281828459 (Puedes usar dos decimales)

Para los tiempos de 15 minutos, 30 minutos, 45 minutos, 60 minutos, 90 minutos y 120 minutos, evaluar construyendo la tabla de valores.

X (min)	15	30	45	60	90	120
Y (ºC)	74,3	65,5	58,3	52,3	43,3	37,1

Gráfica.



Concluimos que a los 120 minutos el pavo tendrá una temperatura de 37,1°C.

Evaluación de funciones exponenciales

1. Considere la función f (x) = 2 ^{x}. Al introducir un valor para x, encontramos el valor de la función elevando 2 al exponente de x. Por ejemplo, si x = 3, tenemos que f (3) = 2 ^{3} = 8.

Si elegimos valores más grandes de x, obtendremos valores de la función de mayor tamaño, como los valores de la función serán las grandes potencias de 2. Por ejemplo, f (10) = 2 ^{10} = 1024.

Si optamos por valores más pequeños de x, terminaremos rápidamente con fracciones. Por ejemplo, si x = 0, tenemos que f (0) = 2 ^{0} = 1.

3. Si x = -3, tenemos $f(-3) = 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Si elegimos valores más pequeños, los valores de la función serán más pequeñas y las fracciones más pequeñas.

4. Por ejemplo, si x = -10, tenemos $f(-10) = 2^{-10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$

Propiedades particulares de la Función Exponencial:

1. Cuando $a > 1$.

    a. La función es creciente.

    b. La función crece tanto más rápidamente cuando mayor sea el valor de "a" (la curva de $f_{(x)} = 2^x$)

    c. Para valores positivos de la variable ($x>0$), la función tiene valores superiores a la unidad: $f_{(x)} > 1$

    d. Para $x<0$, $f_{(x)} <1$

2. Cuando $0< a <1$

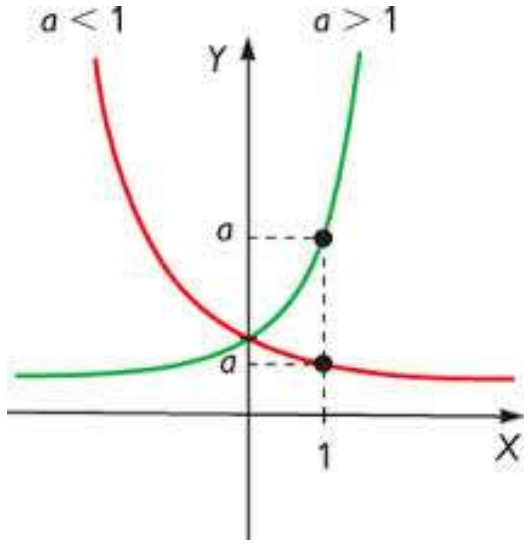
a. La función es decreciente.

b. La función decrece tanto más rápidamente cuanto menor sea el valor de "a" la curva de $f_{(x)}= (1/5)^x$ decrece más rápidamente que la curva de $f_{(x)}= (1/2)^x$.

c. Para valores negativos de la variable ($x<0$),la función tiene valores superiores a la unidad: $f_{(x)}>1$

d. Para $x> 0$, $f_{(x)} < 1$

En general la función exponencial toma la forma que aparece en el siguiente gráfico, según sea "a" mayor o menor que la unidad.



Ejemplo

Para la función *g* (x) = 3 ^{x}, encontrar *g* (2), *g* (4), *g* (0), *g* (-2), *g* (-4).

Solución:

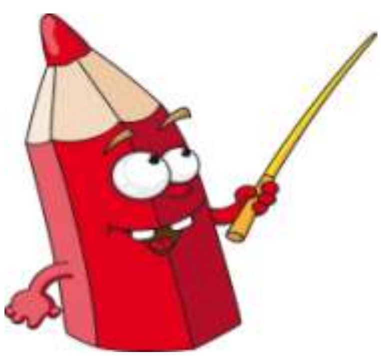
$g(2) = 3^2 = 9$

$g(4) = 3^4 = 81$

$g(0) = 3^0 = 1$

$g(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$g(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$



Los valores de la función *g* (*x*) = 3 ^{x} *se* comportan igual que los de *f* (*x*) = 2 ^{x} : si elegimos valores más grandes, tenemos valores de la función cada vez más grandes. Si *x* = 0, el valor de la función es 1. Y, si elegimos cada vez más pequeños *x* valores, los valores de la función serán más pequeñas y las fracciones más pequeñas.

Ejercicios resueltos

1. $f(X) = 2^x$

a. Evaluamos los puntos para $f(X) = 2^x$

$f(-3) = 2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$

$f(-2) = 2^{-2} = 1/2^2 = 1/4$

$f(-1) = 2^{-1} = 1/2$

$f(0) = 2^0 =$

$f(1) = 2^1 = 2$

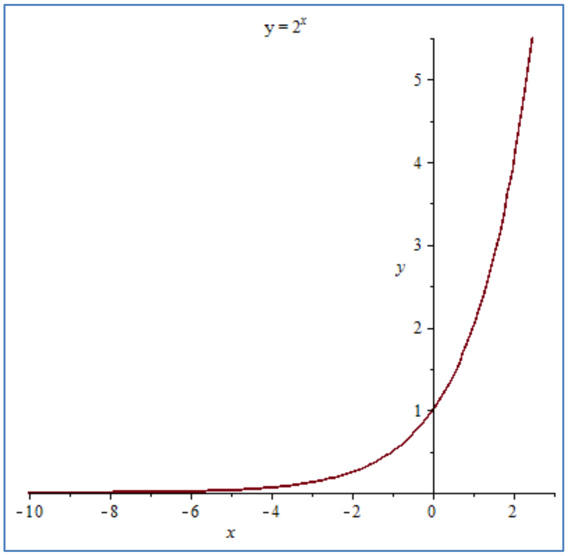
$f(2) = 2^2 = 2.2 = 4$

$f(3) = 2^3 = 2.2.2 = 8$

b. Construimos la tabla de valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f (x) =2^x	**1/8**	**1/4**	**1/2**	**1**	**2**	**4**	**8**

c. Graficamos



2. $f(x) = (1/3)^x$

a. Evaluamos la función

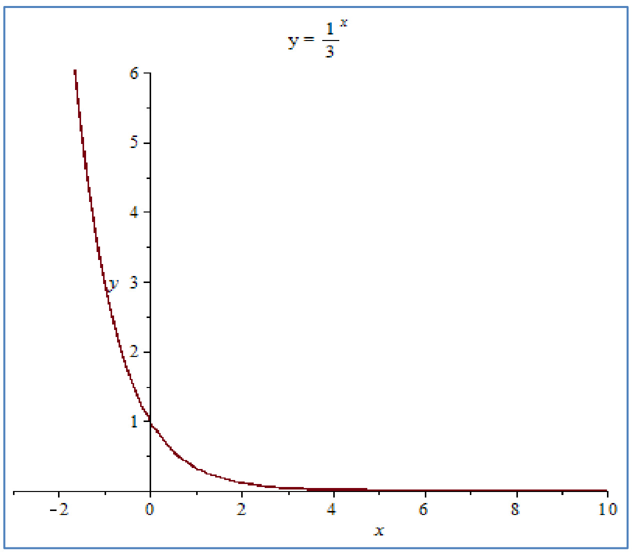
$f(x) = (1/3)^x$
$f(-3) = (1/3)^{-3} = 3^3 = 3.3.3 = 27$
$f(-2) = (1/3)^{-2} = 3^2 = 3.3 = 9$
$f(-1) = (1/3)^{-1} = 3^1 = 3$
$f(0) = (1/3)^0 = 1$
$f(1) = (1/3)^1 = 1/3$
$f(2) = (1/3)^2 = 1/3.\ 1/3 = 1/9$
$f(3) = (1/3)^3 = 1/3.1/3.1/3 = 1/27$

Recordar : Aplicar la inversa cuando el exponente es negativo.

b. Construimos la tabla de valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f (x) = $(1/3)^x$	27	9	3	1	1/3	1/9	1/27

c. Graficamos.

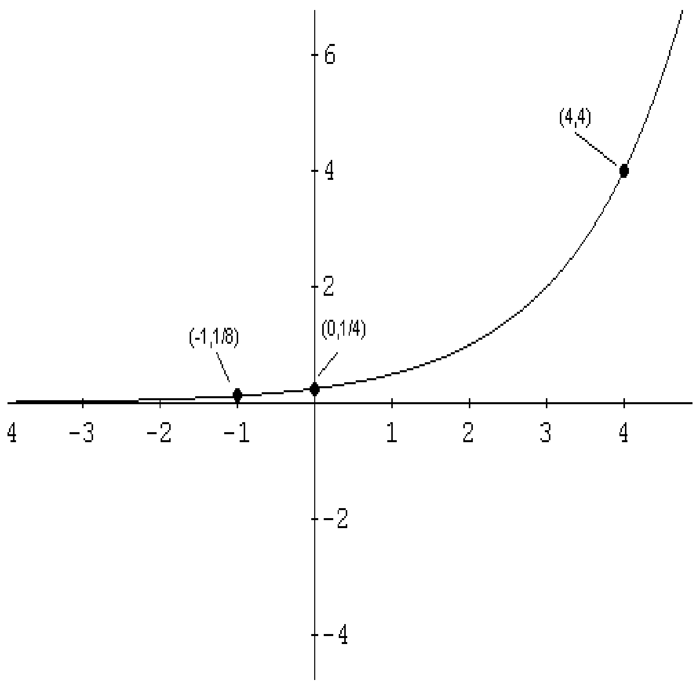


3) f(x)= $2^{(x-2)}$

Tabla de Valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0,03	0,06	0,13	0,25	0,50	1,00	2,00

Eje y (vertical)

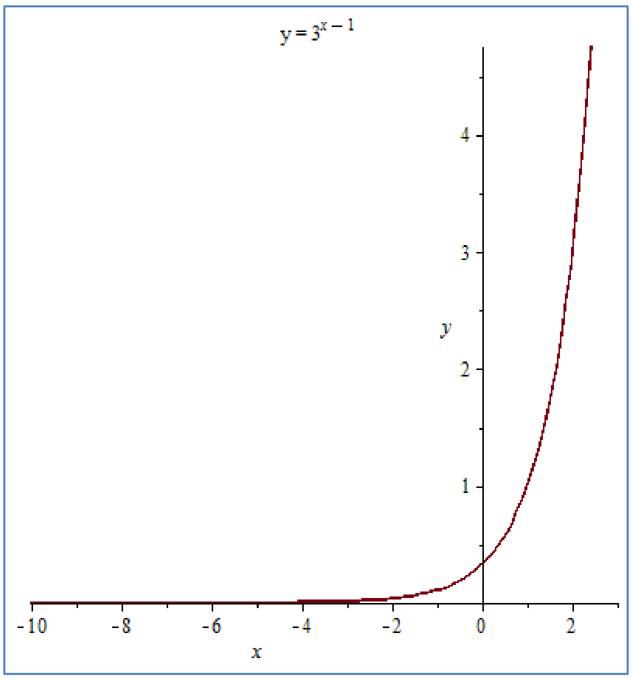


Eje x (horizontal)

4) $f(x) = 3^{(x-1)}$

Tabla de Valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0,01	0,04	0,11	0,33	1	3	9



5. Graficar las funciones $y = 4^x$ y $y = 4^{-x}$ en los mismos ejes coordenados.

Tabla de Valores

$f(x)=4^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0,016	0,06	0,25	1,00	4	16	64

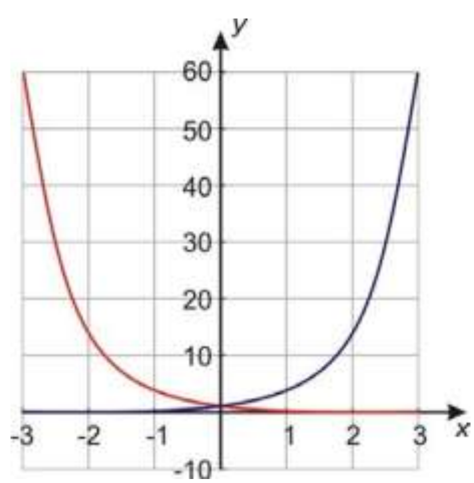
$f(x)= 4^{-x}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	64	16	4	1,00	0,25	0,06	0,016

Leyenda:

$Y=4^{-x}$

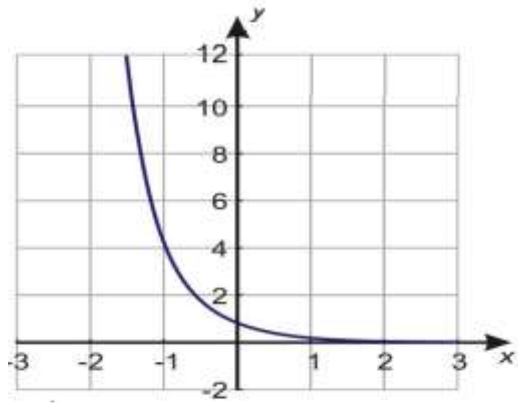
$Y=4^x$



6.) $y=3/4.6^{-x}$

Tabla de valores

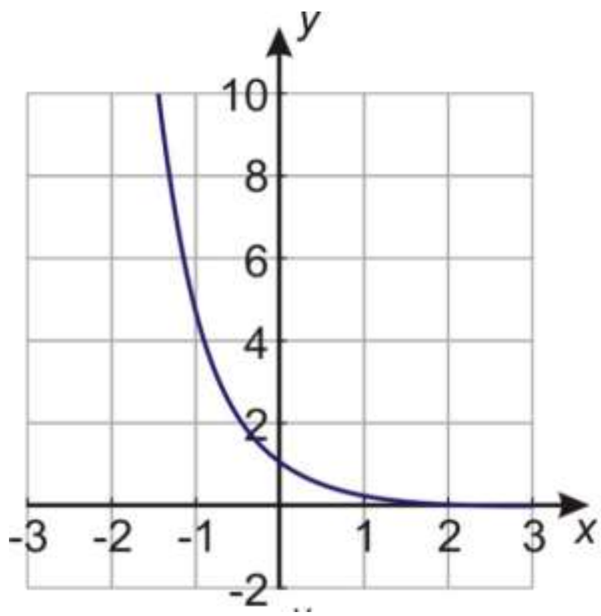
x	-3	-2	1	0	1	2	3
y	0,001	0,003	0,75	0,13	0,75	4,5	27



7.) $y=\frac{1^{x}}{5}$

Tabla de valores

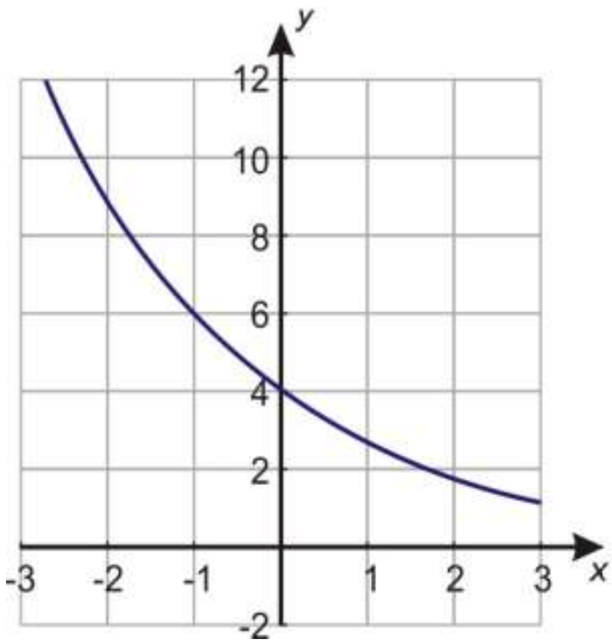
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	25	5	1	0,20	0,04	0,01	0,002



8.) $y = 4 \cdot \frac{2^x}{3}$

Tabla de Valores

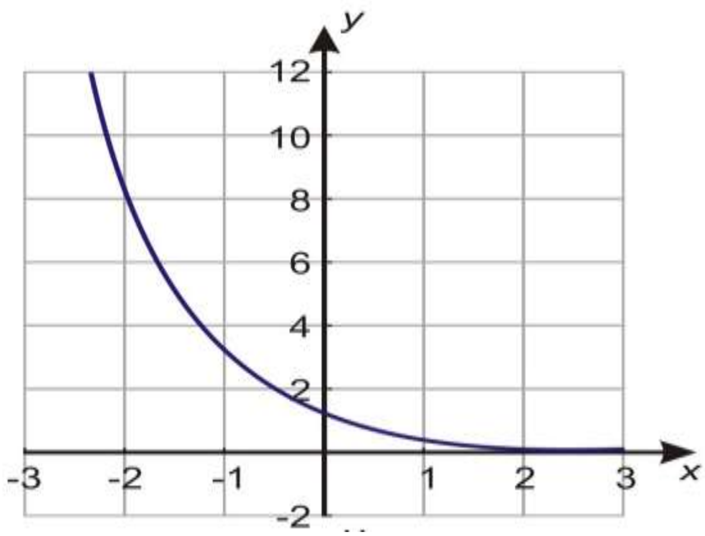
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	6	4	2,67	1,78	1,19	0,79	0,53



9) $y=3^{-x}$

Tabla de Valores

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	3	1	0,33	0,11	0,04	0,01

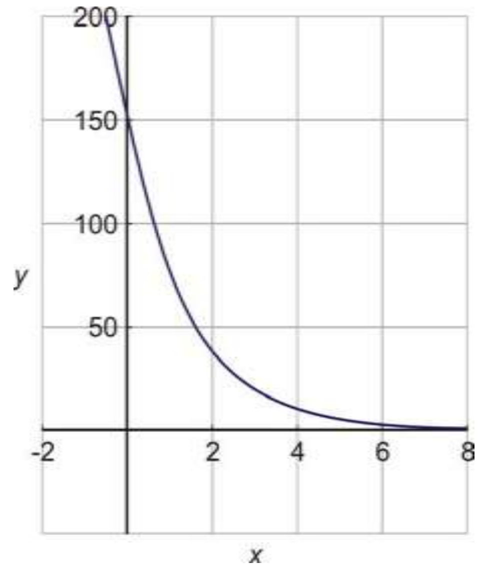


10) $y=160.\frac{1}{2}^{x}$

Tabla de Valores

x	4	5	6	7	8	9	10
y	10	5	2,5	1,25	0,63	0,31	0,16

Texto traducido de: www.ck12.org
www.guao.org



Profesor: MILITZA INDABURO .Versión: 2015-09-16