2

2da Unidad

Logaritmo

2.2 Propiedades de Logaritmo

Cuando conocemos las reglas que establecen cómo ejecutar un proceso, y las aplicamos respetando cada aspecto de ellas, de seguro llevaremos a buen término los procesos.

Descripción

Las propiedades de los logaritmos nos dan las reglas con las que se opera y transforman expresiones logarítmicas. Están basadas en cada operación y propiedad básica aprendida hasta ahora. Sin el maneo correcto de las operaciones que hemos aprendido en niveles de estudio anteriores será imposible operar adecuadamente este tema. ¿Cómo estás en suma, resta multiplicación, división, potenciación y radicación en los números reales? Si necesitas repasar algo de eso, éste es el momento. Si estamos listos, avancemos entonces y anexemos otra valiosa herramienta a nuestro saber.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Reales, Propiedades de las Potencias, Despeje.

Contenido

Logaritmo de un Producto, Logaritmo de un Cociente, Logaritmo de una Potencia y Logaritmo de una Raíz, Definición y Propiedades de Cologaritmo, Cambio de Base, Ejercicios.

Videos Disponibles

LOGARITMO. Logaritmo de un Producto y Logaritmo de un Cociente. Parte I

LOGARITMO. Logaritmo de una Potencia y Logaritmo de una Raíz. Parte II

LOGARITMO. Cologaritmo. Definición y Propiedades

LOGARITMO. Cambio de Base

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 1

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 2

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 3

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 4

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

LOGARITMO. Logaritmo de un Producto y Logaritmo de un Cociente. Parte I

Las propiedades del logaritmo son 4: Logaritmo del Producto, Logaritmo del Cociente, Logaritmo de la potencia y Logaritmo de la Raíz. veamos cada una de ellas en detalle.

Es de gran importancia que tengas claro los conceptos de **producto**, **cociente**, **factor**, **potencia** y **exponente**, para entender y grabar con facilidad estas propiedades.

Recordemos.
Factores. son cantidades que se multiplican
Producto. es el resultado de la multiplicación
Cociente. es el resultado de una división
Potencia. es la forma matemática que abrevia una multiplicación
Exponente. es el superíndice de la potencia

Logaritmo de un Producto $\log_b x \cdot y$

El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos $\log_b x \cdot y = \log_b x + \log_b y$

Enunciando en detalle la propiedad:

El Logaritmo de un producto, es la suma de los logaritmos de cada factor.

Es decir, logaritmo en base b de x· y, es logaritmo en base b de x mas logaritmo en base b de y. por ejemplo cuánto es el logaritmo de 100?

Ejemplo

¿cuánto es el logaritmo de 100?

$$\log 100 = ?$$

Sabemos que $100 = 10 \cdot 10$

$$\log 100 = \log(10 \cdot 10)$$

Tenemos el logaritmo de un producto, esto es la suma de los logaritmos de cada factor

$$\log 100 = \log 10 + \log 10$$

En el objetivo **2.1 Definición y Elementos del Logaritmo**, aprendimos que si la base no está de forma explícita el logaritmo es de base 10.

$$\log 10 = \log_{10} 10$$

En ese objetivo también aprendimos que si la base y el argumento del logaritmo son iguales el logaritmo vale 1. Entonces $\log 10 = 1$

$$\log 100 = 1 + 1$$

$$\log 100 = 2$$

Logaritmo de un Cociente $\log_b \frac{x}{y}$

El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

Enunciando en detalle la propiedad:

El Logaritmo de un cociente, es la diferencia de los logaritmos del numerador menos el logaritmo del denominador.

Es decir, logaritmo en base b de x entre y, es logaritmo en base b de x menos logaritmo en base b de y.

Ejemplo

¿cuánto es el logaritmo en base 2 de 5/2?

$$\log_2 \frac{5}{2} = ?$$

El argumento del logaritmo es 5/2 una división en forma de fracción.

$$\log_2 \frac{5}{2}$$

Esto es igual a logaritmo en base 2 del numerador menos logaritmo en base 2 del denominador.

$$\log_2 \frac{5}{2} = \log_2 5 - \underbrace{\log_2 2}_{1}$$

El segundo término es un logaritmo cuya base y argumento son iguales, así que este logaritmo vale 1.

$$\log_2 \frac{5}{2} = \log_2 5 - 1$$

Veamos ahora las siguientes dos propiedades del logaritmo, acompáñanos a la siguiente lección.

LOGARITMO. Logaritmo de una Potencia y Logaritmo de una Raíz. Parte II

Logaritmo de una Potencia $\log_b x^n$

El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base

$$\log_b x^n = n \cdot \log_b x$$

Enunciando en detalle la propiedad:

El logaritmo de una potencia es el exponente por el logaritmo de la base de la potencia.

Es decir, logaritmo en base b de x^n, es n por el logaritmo en base b de x.

Ejemplo

¿A qué es igual el logaritmo en base 5 de 125?

Sabemos que $125 = 5^3$

$$\log_5 125 = \log 5^3$$

Tenemos el logaritmo de una potencia, esto es el exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_5 125 = 3 \cdot \underbrace{\log_5 5}_{1}$$

El logaritmo de la base es 1, $\log_5 5 = 1$.

$$\boxed{\log_5 125 = 3}$$

Logaritmo de una Raíz $\log_b \sqrt[n]{x}$

El logaritmo de una raíz es el inverso del índice por el logaritmo de la cantidad subradical.

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_b x$$

Ejemplo

¿A qué es igual el logaritmo en base 2 de raíz cúbica de 4?

El argumento del logaritmo es $\sqrt[3]{4}$

$$\log_2 \sqrt[3]{4} = ?$$

El índice de la raíz es 3 y la cantidad subradical es 4.
Esto es, un tercio por el logaritmo en base 2 de 4

$$\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}\log_2 4$$

Sabemos que $\log_2 4 = 2$ ¿por qué?

$$\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}\cdot 2$$

Efectuando el producto

$$\boxed{\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}}$$

LOGARITMO. Cologaritmo. Definición y Propiedades

Cuando estudiamos los números enteros aprendimos el concepto de opuesto.

Recordemos. Opuesto de un número, también llamado simétrico o inverso aditivo, es el número de signo contrario es decir, el opuesto de 5 es -5 el opuesto de -17 es 17.

El opuesto de un logaritmo es el cologaritmo. Esto es:

Cologaritmo, colog$_b$x. Es el opuesto del logaritmo. $\operatorname{colog}_b x = -\log_b x$

¿Qué sucede entonces con el cologaritmo de un producto?.

Por definición de cologaritmo: $\operatorname{colog}_b(x\cdot y) = -\log_b(x\cdot y)$

Aplicamos logaritmo de un producto:
$\log_b(x\cdot y) = \log_b x + \log_b y$

$\operatorname{colog}_b(x\cdot y) = -[\log_b x + \log_b y]$

Nota: colocamos la suma de los logaritmos entre paréntesis porque el menos debe afectar a todo lo que se desarrolle del logaritmo del producto.

Aplicamos propiedad distributiva del signo - $\operatorname{colog}_b(x\cdot y) = -\log_b x - \log_b y$

Sabemos que:
$\operatorname{colog}_b x = -\log_b x$ y $\operatorname{colog}_b y = -\log_b y$

$\operatorname{colog}_b(x\cdot y) = \operatorname{colog}_b x + \operatorname{colog}_b y$

El cologaritmo de un producto es la suma de los cologaritmos

LOGARITMO. Cambio de Base

En ocasiones se hace necesario cambiar la base de un logaritmo, ya sea para operarlo con otros logaritmos, para resolver ecuaciones o para tenerlo en alguna base específica a solicitud del planteamiento matemático que nos hagan.

Veamos cómo realizar este cambio de base de forma genérica y obtengamos la fórmula que nos permita efectuar cambios de base de forma concreta.

Ejemplos

Dado $\log_b x$, escribirlo en base c

Partimos de un logaritmo genérico en base b, y lo llevaremos a base c: $\log_b x \longrightarrow \log_c$

Igualamos el logaritmo a una nueva variable: $\log_b x = y$

Aplicamos definición de logaritmo: $x = b^y$

aplicamos logaritmo en base c de ambos lados: $\log_c x = \log_c b^y$

Nota: El objetivo es que x sea el argumento de un logaritmo de base c.

En el 2do lado de la igualdad tenemos Logaritmo de una potencia, esto es: $\log_c b^y = y \cdot \log_c b$

$$\log_c x = y \cdot \log_c b$$

Sustituimos $\log_b x = y$

¿A qué es igual y?

Del primero paso sabemos que: $\log_b x = y$

$$\log_c x = \log_b x \cdot \log_c b$$

Pasamos dividiendo $\log_c b$ al 1er lado de la igualdad

$$\frac{\log_c x}{\log_c b} = \log_b x$$

Propiedad simétrica de la igualdad

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

Ejemplo

Pasar log5 a logaritmo neperiano

El logaritmo dado es de base 10, y el nuevo logaritmo es de base e.

$\underset{\text{Base } 10}{\log 5} \longrightarrow \underset{\text{Base } e}{\ln = \log_e}$

Escribimos la fracción del cambio de base:

$$\log_{10} 5 = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\boxed{\log 5 = \frac{\ln x}{\ln 10}}$$

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 1

Desarrolla la expresión dada aplicando propiedades del logaritmo: $\log_b \sqrt[4]{\dfrac{(a^2\cdot b^5)^3}{ab(a+b)}}$

Identificamos qué tenemos el argumento del logaritmo:

El **logaritmo de una raíz cuarta**.

$$\log_b \sqrt[4]{\frac{(a^2\cdot b^5)^3}{ab(a+b)}}$$

El logaritmo de una raíz es el inverso del índice multiplicando al logaritmo de la cantidad sub-radical

$$=\frac{1}{4}\log_b \frac{(a^2\cdot b^5)^3}{ab(a+b)}$$

Nuevamente, identificamos qué tenemos:

el **logaritmo de un cociente o división**

$$=\frac{1}{4}\log_b \frac{(a^2\cdot b^5)^3}{ab(a+b)}$$

Esto es: **logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador**.

$$=\frac{1}{4}\left[\log_b (a^2\cdot b^5)^3 - \log_b ab(a+b)\right]$$

Nota: se coloca entre corchetes porque el ¼ está multiplicando al logaritmo de la fracción, por lo tanto afecta a todo lo que se desarrolle de este logaritmo

De nuevo, identificamos qué tenemos:

El 1er término es el **logaritmo de una potencia**, así que **el 3 baja a multiplicar al logaritmo de la base de la potencia**.

$$\log_b (a^2\cdot b^5)^3 = 3\cdot\log_b (a^2\cdot b^5)$$

El 2do término es el **logaritmo un producto** de tres factores.
Como está precedido de signo menos, colocaremos entre paréntesis el desarrollo. Son 3 factores, entonces son 3 logaritmos.

$$\log_b ab(a+b) = \log_b a + \log_b b + \log_b (a+b)$$

Nos queda:

$$=\frac{1}{4}\left[3\cdot\log_b (a^2\cdot b^5) - (\log_b a + \log_b b + \log_b (a+b))\right]$$

En el primer término tenemos el **logaritmo de un producto**, esto es la suma de los logaritmos de cada factor. Recordemos encerrar en paréntesis para que el 3 que multiplica afecte a los dos.

$$=\frac{1}{4}\left[3\cdot(\log_b a^2 + \log_b b^5) - (\log_b a + \log_b b + \log_b (a+b))\right]$$

Tenemos logaritmo de una potencia dos veces en el primer paréntesis, bajamos los exponentes a multiplicar al logaritmo.

$$=\frac{1}{4}\left[3\cdot(2\cdot\log_b a + 5\cdot\log_b b) - \log_b a - \log_b b - \log_b (a+b)\right]$$

Aplicamos propiedad distributiva del 3 y del signo menos.

$$=\frac{1}{4}\left[3\cdot 2\cdot\log_b a + 3\cdot 5\cdot\log_b b - \log_b a - \log_b b - \log_b (a+b)\right]$$

Efectuamos los productos en los coeficientes de los primeros dos logaritmos.

$$=\frac{1}{4}\left[6\log_b a+15\log_b b-\log_b a-\log_b b-\log_b(a+b)\right]$$

Aplicamos propiedad distributiva del 1/4.

$$=\frac{6}{4}\log_b a+\frac{15}{4}\log_b b-\frac{1}{4}\log_b a-\frac{1}{4}\log_b b-\frac{1}{4}\log_b(a+b)$$

Resaltaré los términos semejantes para luego hallar las sumas

$$=\frac{6}{4}\log_b a+\frac{15}{4}\log_b b-\frac{1}{4}\log_b a-\frac{1}{4}\log_b b-\frac{1}{4}\log_b(a+b)$$

$$=\frac{5}{4}\log_b a+\frac{14}{4}\log_b b-\frac{1}{4}\log_b(a+b)$$

Sabemos que $\log_b b = 1$ y $\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$

$$=\frac{5}{4}\log_b a+\frac{7}{2}-\frac{1}{4}\log_b(a+b)$$

Error Común: decir "***el logaritmo de una suma es la suma de los logaritmos***".	$\log_b(a+b)=\log_b a+\log_b b$
Lo Correcto: ***el logaritmo de una suma no se desarrolla, se queda igual***.	

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 2

Desarrolla la expresión dada aplicando propiedades del logaritmo: $\log_b\left(x^2-y^2\right)^2$

¿Qué tenemos?

Este logaritmo contiene la potencia de un binomio. Es el **logaritmo de una potencia**.

$$\log_b\left(x^2-y^2\right)^2$$

Esto es **el exponente que multiplica al logaritmo de la base de la potencia**.

$$=2\cdot\log_b\left(x^2-y^2\right)$$

¿Qué tipo de expresión es el binomio del paréntesis?

$$x^2-y^2$$

Esto es una **resta o diferencia de cuadrados**.
La diferencia de cuadrados **es igual al producto de las conjugadas**.

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

Así que la expresión queda

$$=2\cdot\log_b(x-y)(x+y)$$

¿Qué tipo de logaritmo tenemos ahora?

Tenemos el **logaritmo de un producto**.
Esto es **la suma de los logaritmos de cada factor**.

$$=2\cdot\left(\log_b(x-y)+\log_b(x+y)\right)$$

Aplicamos propiedad distributiva del 2 $= 2\cdot\log_b(x-y)+2\cdot\log_b(x+y)$

¿Podemos hacer algo más en esta expresión?

Verifica si alguna de las propiedades que hemos estudiado se corresponde con la forma de los logaritmos que han resultado.

Recordemos. El logaritmo de una suma o resta no se desarrolla, no existe ninguna propiedad asociada a estas expresiones.

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 3

Desarrolla la expresión dada aplicando propiedades del logaritmo: $\log_a\sqrt[3]{x^6y^4-x^4y^6}$

¿Qué tipo de expresión tenemos en el planteamiento?. ¿A qué propiedad de logaritmos podemos asociarla?.

Tenemos el **logaritmo de una raíz**. $\log_a\sqrt[3]{x^6y^4-x^4y^6}$

Esto es igual **al inverso del índice por el logaritmo de la cantidad sub-radical**. $=\frac{1}{3}\log_a\left(x^6y^4-x^4y^6\right)$

Nota: En este nivel ya debemos manejar con destreza expresiones algebraicas como la del argumento del logaritmo.

Argumento del Logaritmo: es un binomio de factor común x^4y^4.

Factor Común

$x^6y^4-x^4y^6$ x^4y^4

Ajustemos cada término de tal forma que se visualice el factor común. $x^6y^4-x^4y^6=x^4y^4\cdot x^2-x^4y^4\cdot y^2$

Sacamos este factor común del paréntesis y nos queda: $=x^4y^4\cdot\left(x^2-y^2\right)$

Y el logaritmo nos queda $=\frac{1}{3}\log_a x^4y^4\left(x^2-y^2\right)$

Factorizamos la diferencia de cuadrados $=\frac{1}{3}\log_a x^4y^4(x-y)(x+y)$

Para recordar las factorizaciones notables visita la sección de factorización en matemática de 2do año

Aplicamos Logaritmo de un producto $=\frac{1}{3}\left[\log_a x^4+\log_a y^4+\log_a(x-y)+\log_a(x+y)\right]$

Aplicamos Logaritmo de una potencia $=\frac{1}{3}\left[4\log_a x+4\log_a y+\log_a(x-y)+\log_a(x+y)\right]$

Aplicamos propiedad distributiva $=\frac{4}{3}\log_a x+\frac{4}{3}\log_a y+\frac{1}{3}\log_a(x-y)+\frac{1}{3}\log_a(x+y)$

¿Hay alguna otra propiedad que pueda aplicarse a esta expresión?

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 4

Desarrolla la expresión dada aplicando propiedades del logaritmo: $\log\dfrac{\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{3}}$

En primer lugar tenemos **el logaritmo de un cociente**

$$\log\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{b}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{3}}$$

Esto es **el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador**.

$$=\log\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{b}-\log\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{3}$$

El primer término es el **logaritmo de un producto** esto es **la suma de los logaritmos de cada factor**

$$=\log\sqrt[3]{a}+\log\sqrt[5]{b}-\log\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{3}$$

El segundo término es el **logaritmo de una potencia** esto es **el exponente por el logaritmo de la base**

$$=\log\sqrt[3]{a}+\log\sqrt[5]{b}-3\log\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$

En los primeros dos términos tenemos **logaritmo de una raíz** esto es **el inverso del exponente por el logaritmo de la base**

$$=\frac{1}{3}\log a+\frac{1}{5}\log b-3\log\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$$

¿hay alguna otra propiedad que pueda ser aplicada a esta expresión para desarrollarla?

En los primeros dos términos tenemos como argumentos letras en su forma más simple, en el tercer término tenemos como argumento una resta de radicales. Sabemos que no hay propiedad alguna para desarrollar el logaritmo de una resta.

Emparejando el Lenguaje

Interpretación y Diferenciación de Enunciados:

Logaritmo de un producto: $\log_b(xy)$ $\neq$ **Producto de Logaritmos:** $\log_b x \cdot \log_b y$

Logaritmo de un cociente: $\log_b \frac{x}{y}$ $\neq$ **Cociente de Logaritmos:** $\frac{\log_b x}{\log_b y}$

Logaritmo de una potencia: $\log_b x^n$ $\neq$ **Logaritmo de una potencia:** $(\log_b x)^n$

Logaritmo de una Raíz: $\log_b \sqrt[n]{x}$ $\neq$ **Raíz de un Logaritmo:** $\sqrt[n]{\log_b x}$

Logaritmo de una Suma: $\log_b(x+y)$ $\neq$ **Suma de Logaritmos:** $\log_b x + \log_b y$

A Practicar

Desarrolla las expresiones dadas aplicando propiedades del logaritmo:

1. $\log_b ab(2a+b)$
2. $\log_a a^2b^5(a-b)^7$
3. $\log_m \sqrt{m^2-n^2}$
4. $\log_b \sqrt{\dfrac{a^3}{b^7}}$
5. $\log_b \sqrt{\dfrac{a^{15}b^5}{(a^9b^7)^3}}$
6. $\log_y \sqrt{\dfrac{(x^2-2xy+y^2)}{x^2y^4}}$

¿Lo Hicimos Bien?

1. $\log_b(2a+b)+\log_b a+1$
2. $2+5\log_a b+7\log_a(a-b)$
3. $\dfrac{1}{2}\log_m(m-n)+\dfrac{1}{2}\log_m(m+n)$
4. $\dfrac{3}{2}\log_b a-\dfrac{7}{2}$
5. $-6\log_b a-8$
6. $\log_y(x-y)-\log_y x-2$