

8

8va Unidad

Progresiones

8.1 Definición, Aritméticas y Geométricas

Cuando sumamos una secuencia progresiva de acciones edificantes, por pequeñas que estas sean, logramos un estado permanente de evolución, mejorando gradualmente nuestra sociedad.

Descripción

Guiones Didácticos

PROGRESIONES. Definición. Ejemplos

En general la palabra Progresión significa "avance o desarrollo de algo", matemática tenemos que:

Progresión. Es una secuencia de números que se van obteniendo por medio de una regla de correspondencia específica.

Ejemplo

Observa la secuencia de números
2 5 8 11 14 17 ...

¿Notas alguna regularidad en esta secuencia?

De 2 a 5 hay 3 unidades
de 5 a 8 hay 3 unidades
de 8 a 11 hay 3 unidades
de 11 a 14 hay 3 unidades
de 14 a 17 hay 3 unidades

Entonces podemos decir que esta secuencia se obtiene de tomar el primer número, 2, y sumarle reiteradamente 3.

En la secuencia de números
2 4 8 16 32 ...

¿Notas algún patrón que se repita?

4 es el doble de 2.
8 es el doble de 4.
16 es el doble de 8.
32 es el doble de 16.

También podemos verlo como el producto de varios factores iguales, así:

4 es el producto de 2 factores 2
8 es el producto de 3 factores 2
16 es el producto de 4 factores 2
32 es el producto de 5 veces 2

Escribimos estos productos como potencias:

4 = 2 × 2 = 2²
8 = 2 × 2 × 2 = 2³
16 = 2 × 2 × 2 × 2 = 2⁴
32 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 2⁵

PROGRESIONES. Geométricas. Elementos. Términos General y Ejemplos

Una persona da una información a dos, cada uno de estas dos se la da a dos más, es decir, en esta ocasión la reciben 4 personas. Cada uno de estas 4 se las da a dos más, entonces en esta ronda la han recibido 8. Ahora cada uno de las 8 da la información a dos, cuántas personas la han recibido esta vez?

¿Cuántas personas han recibido la información esta vez?

Igual que en la progresión aritmética, a cada valor de la secuencia se le denomina término.

1, 2, 4, 8 son términos de la sucesión dada. La forma de representar los términos de una progresión es principalmente con la letra a , entonces en esta sucesión: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$.

Cantidad de personas que tienen la información

1ro 2do 3ro 4to 5to

$a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_3 = 4$ $a_4 = 8$ $a_5 = 16$

Al factor fijo que multiplica a cada término de la sucesión para obtener el siguiente se le denomina razón, y se representa con r .

Fórmula del término general de una progresión geométrica

Término General $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$

Con esta fórmula podemos obtener cualquier término de una progresión conociendo el primer término, la razón y el número de término que se desea obtener.

Las Progresiones constituyen un fenómeno permanente en nuestro entorno, y en el desarrollo del quehacer social y tecnológico humano. De allí la importancia de conocerlas y aprender sus características y recursos. Además de permitir el cálculo sencillo de valores, basados en el patrón que define un fenómeno, son la base de una poderosa herramienta del cálculo superior, como lo son las Series Numéricas.

Conocimientos Previos Requeridos

Números Reales, Razones y Proporciones, Interpretación de Enunciados, Despeje.

Contenido

Definición de Progresiones, Ejemplos, Elementos, Términos General y Ejemplos de Aritméticas, Elementos, Términos General y Ejemplos de Geométricas.

Videos Disponibles

[PROGRESIONES. Definición. Ejemplos](#)

[PROGRESIONES. Aritméticas. Elementos, Término General y Ejemplos](#)

[PROGRESIONES. Geométricas. Elementos, Término General y Ejemplos](#)

[PROGRESIONES. Aritméticas. Término Enésimo, Interpretación y Suma Enésima](#)

[PROGRESIONES. Aritméticas. Construir Progresiones. Ejercicio 1](#)

[PROGRESIONES. Aritméticas. Construir Progresiones. Ejercicio 2](#)

[PROGRESIONES. Aritméticas. Calcular la Razón y la suma. Ejercicio 1](#)

[PROGRESIONES. Aritméticas. Hallar Términos Particulares. Ejercicios 1 y 2](#)

[PROGRESIONES. Aritméticas. Hallar Términos Particulares. Ejercicios 3 y 4](#)

[PROGRESIONES. Geométricas. Término Enésimo, Interpretación y Suma Enésima](#)

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

▶ PROGRESIONES. Definición. Ejemplos

En general la palabra Progresión significa "avance o desarrollo de algo", en matemática tenemos que:

Progresión. Es una secuencia de números que se van obteniendo por medio de una regla de correspondencia específica.

Ejemplo

Observa la secuencia de números

2 5 8 11 14 17 ...

¿notas alguna regularidad en esta secuencia?

Del 2 al 5 hay 3 unidades
 del 5 al 8 hay 3 unidades
 del 8 al 11 hay 3 unidades
 del 11 al 14 hay 3 unidades
 del 14 al 17 hay 3 unidades



Entonces podemos decir que esta secuencia se obtiene de tomar el primer número, 2, y sumarle reiteradamente 3.

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= 5 \\ 2 + 3 + 3 &= 8 \\ 2 + 3 + 3 + 3 &= 11 \\ 2 + 3 + 3 + 3 + 3 &= 14 \\ 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 &= 17 \end{aligned}$$

En la secuencia de números

2 4 8 16 32 ...

¿Notas algún patrón que se repita?

4 es el doble de 2,
 8 el doble de 4,
 16 el doble de 8,
 32 el doble de 16



También podemos verlo como el producto de varios factores iguales, así

4 es el producto de 2 factores 2
 8 es el producto de 3 factores 2
 16 es el producto de 4 factores 2
 32 es el producto de 5 veces 2

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \cdot 2 \\ 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 16 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ 32 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Escribimos estos productos como potencias

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \cdot 2 = 2^2 \\ 8 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \\ 16 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \\ 32 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \end{aligned}$$

▶ PROGRESIONES. Aritméticas. Elementos, Términos General y Ejemplos

Una mujer decide iniciar una rutina de ejercicios en la mañana. El 1er día realiza 10 abdominales, el 2do día 15, el 3er día 20, el 4to día 25, el 5to día 30, y así va aumentando.

1er día: 10 abdominales

2do día: 15 abdominales

3er día: 20 abdominales

4to día: 25 abdominales

5to día: 30 abdominales



1er día	2do día	3er día	4to día	5to día:
10	15	20	25	30

Progresión Aritmética. Es una secuencia de números que van variando la misma cantidad por vez, ya sea en aumento o disminución.

En el ejemplo anterior, la chica aumenta 5 abdominales cada día la secuencia es 10, 15, 20, 25, 30 y así sucesivamente



A cada valor de la secuencia se le denomina **Término**.

10, 15, 20, 25 son términos de la sucesión dada.

La forma de representar los términos de una progresión es principalmente con la letra a . Entonces,

1er Término: a_1 2do Término: a_2 3er Término: a_3 4to Término: a_4

A la cantidad fija que determina la diferencia de un término a otro se le denomina **razón**, y se representa con r .

En el ejemplo dado, la razón vale 5.

$$a_1 = 10 \quad a_2 = 15 \quad a_3 = 20 \quad a_4 = 25$$

La fórmula del término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1)r$

Con esta fórmula podemos obtener cualquier término de una progresión, conociendo el primer término, la razón y el número de términos que se desea obtener.

Por ejemplo, si deseamos saber cuántos abdominales realizó la muchacha el 9no día de entrenamiento, sabemos que $a_1 = 10$, $r = 5$ y $n = 9$, entonces:

Datos

$$a_1 = 10$$

$$r = 5$$

$$n = 9$$

$$a_9 = ?$$

Término enésimo

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Aplicado a los datos

$$a_9 = 10 + (9 - 1) \cdot 5$$

$$a_9 = 10 + 8 \cdot 5$$

$$a_9 = 10 + 40$$

$$a_9 = 50$$

¿Cómo es la fórmula del término genérico de una progresión cuyo 1er término es 3 y cuya razón es -6?

El 1er término es a_1 y vale 3, y la razón es -6. sustituyendo en la fórmula nos queda

sustituimos en la fórmula

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-6)$$

Aplicamos distributiva

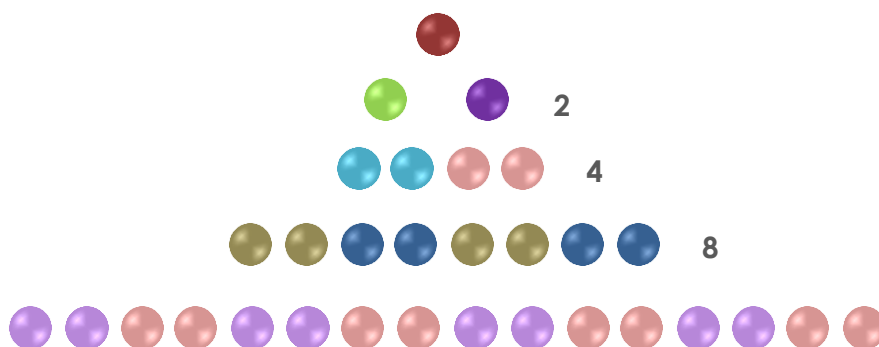
$$a_n = 3 - 6n + 6$$

Simplificando términos

$$a_n = 9 - 6n$$

▶ PROGRESIONES. Geométricas. Elementos, Términos General y Ejemplos

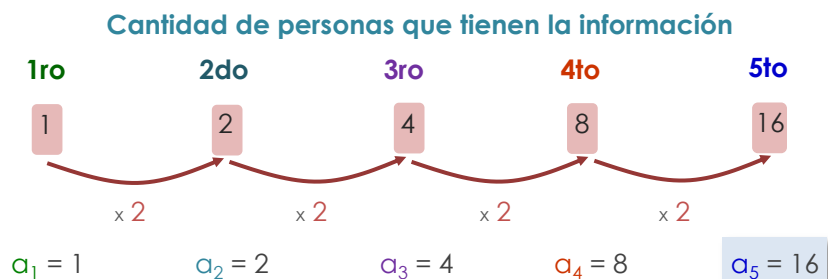
Una persona da una información a dos, cada una de estas dos se las da a dos más, es decir, en esta ocasión la reciben 4 personas. Cada una de estas 4 se las dan a dos más, entonces en esta ronda la han recibido 8. Ahora cada una de las 8 da la información a dos, ¿cuántas personas la han recibido esta vez?



¿Cuántas personas han recibido la información esta vez?

Igual que en la progresión aritmética, a cada valor de la secuencia se le denomina **término**.

1, 2, 4, 8 son términos de la sucesión dada. La forma de representar los términos de una progresión es principalmente con la letra a , entonces en esta sucesión $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$.



Al factor fijo que multiplica a cada término de la sucesión para obtener el siguiente, se le denomina **razón**, y se representa con r .

Fórmula del término general de una progresión geométrica

$$\text{Término General } a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

Con esta fórmula podemos obtener cualquier término de una progresión, conociendo el primer término, la razón y el número de término que se desea obtener.

Por ejemplo, si deseamos saber cuántas personas reciben la información en la 6ta entrega, sabemos que $a_1 = 1$, $r = 2$ y $n = 6$, entonces.

Datos

$$a_1 = 1$$

$$r = 2$$

$$n = 6$$

Término General

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

$$a_6 = 1 \cdot 2^{(6-1)}$$

$$a_6 = 1 \cdot 2^5$$

$$a_6 = 1 \cdot 32$$

$$a_6 = 32$$

¿Cuál es el término general de una progresión geométrica cuyo 1er término es 81, y cuya razón es dos tercios?

$$a_1 = 81 \text{ y } r = 2/3$$

sustituyendo en la fórmula

$$a_n = 81 \cdot (2/3)^{n-1}$$

PROGRESIONES. Aritméticas. Términos Enésimo, Interpolación y Suma Enésima

Hemos visto que una progresión aritmética es una secuencia numérica que va en aumento, o disminución, según una cantidad fija que se suma progresivamente para obtener el número siguiente.

7 10 13 16

Sabemos que **los números de la secuencia se denominan términos**, y se representan con la letra a , o b , o c .

a_1	a_2	a_3	a_4
7	10	13	16

La cantidad que representa el aumento de un término a otro se llama razón y se representa con r . el número de un término particular esta dado por n .

El número de un término particular esta dado por n .

El término general de la progresión se representa con a_n

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Hallar una cantidad específica de términos, entre dos términos cualesquiera de una progresión, y la razón que los relaciona, se denomina **Interpolación**.

Para esto, despejamos r de la fórmula del término general.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

a_1 que está sumando, pasa restando

$$a_n - a_1 = (n - 1) \cdot r$$

$n - 1$ que está multiplicando a r pasa dividiendo a la resta $a_n - a_1$

$$\frac{a_n - a_1}{n - 1} = r$$

Ordenamos la igualdad

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

Otro valor importante y necesario es la suma de una cantidad particular de términos de la progresión.

Por ejemplo, si sabemos que una niña guarda en su alcancía 8 monedas cada día y comenzó a guardar con un regalo de 15 monedas recibidas el día de su cumpleaños. ¿Cuánto lleva ahorrado cuando han transcurrido 18 días?

$$r = 8$$

$$a_1 = 15$$

$$S_n = ?$$

$$n = 18$$

$$a_2 = 15$$

$$a_3 = 20$$

$$a_3 = 20$$

Término General

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Fórmula para hallar la suma de n términos $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Aplicada al ejemplo planteado $n = 18$, por lo que se busca S_{18} , entonces debemos tener los valores a_1 y a_{18} para calcular la suma.

Aplicamos la fórmula del término enésimo para hallar a_{18} , con $a_1 = 15$, $r = 8$, por las 8 monedas que guarda cada día.

Efectuando la resta el producto y luego la suma

Sustituimos los valores conocidos en la fórmula de la suma

$$a_1 = 15 \quad a_{18} = 151 \quad n = 18$$

$$S_{18} = \frac{(a_1 + a_{18}) \cdot 18}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_{18} = 15 + (18 - 1) \cdot 8$$

$$a_{18} = 151$$

$$S_{18} = \frac{(15 + 151) \cdot 18}{2}$$

$$S_{18} = \frac{166 \cdot 18}{2} = \frac{2988}{2}$$

$$S_{18} = 1494$$

Resumen de valores y fórmulas de progresión aritmética

Término Enésimo

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Razón

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

Suma Enésima

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

▶ PROGRESIONES. Aritméticas. Construir Progresiones. Ejercicio 1

Ejercicio 1

Construir una progresión aritmética de 8 términos, sabiendo que $a_1 = -6$ y $r = -4$

Datos

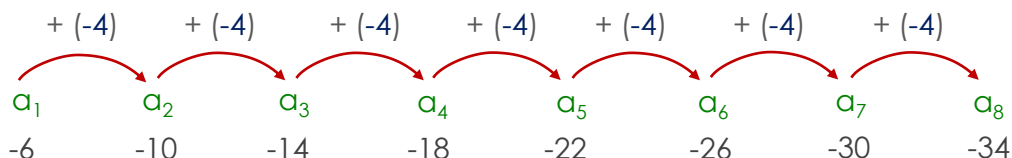
$$n = 8$$

$$a_1 = -6$$

$$r = -4$$

Tenemos, al menos, dos maneras para construir esta progresión.

Opción 1. sumar la razón a cada término para obtener el siguiente. Esto es, sumamos la razón al 1er término para obtener el 2do, sumamos la razón al 2do para obtener el 3ro, sumamos la razón al 3ro para obtener el 4to, y así sucesivamente.



Opción 2. Aplicar la fórmula para obtener cada término.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Tenemos que: $a_1 = -6$, $r = -4$

Para a_2 , $n = 2$

$$a_2 = -6 + (2 - 1) \cdot (-4)$$

$$a_2 = -6 + (1) \cdot (-4)$$

$$a_2 = -6 + (-4)$$

$$a_2 = -10$$

Para a_3 , $n = 3$

$$a_3 = -6 + (3 - 1) \cdot (-4)$$

$$a_3 = -6 + (2) \cdot (-4)$$

$$a_3 = -6 + (-8)$$

$$a_3 = -14$$

Observamos. Estamos llegando a los mismos números obtenidos según la primera opción.

Nota: Queda a tu elección la manera en que construyas las progresiones, o según lo que solicite el profesor cuando te evalúe.

▶ PROGRESIONES. Aritméticas. Construir Progresiones. Ejercicio 2

Ejercicio 2

Construir una progresión aritmética de 5 términos, sabiendo que $a_1 = 3x$ y $r = x-1$

Datos

$$n = 5$$

$$a_1 = 3x$$

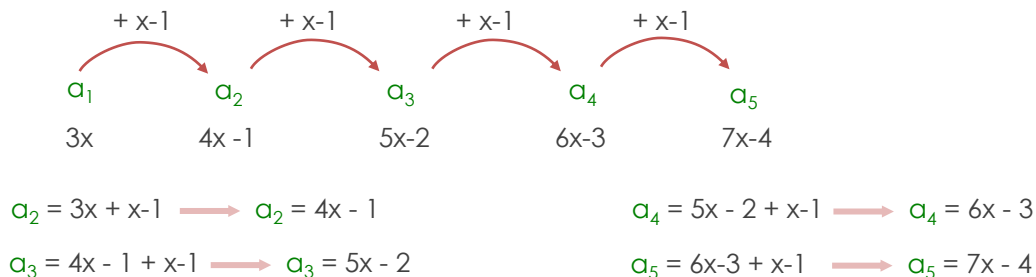
$$r = x-1$$

Maneras de construir la progresión

Sumando la razón a cada término para obtener el siguiente

Aplicando la fórmula del término enésimo

Opción 1. sumar la razón a cada término para obtener el siguiente. Esto es, sumamos la razón al 1er término para obtener el 2do, sumamos la razón al 2do para obtener el 3ro, sumamos la razón al 3ro para obtener el 4to, y así sucesivamente.



Opción 2. Aplicar la fórmula para obtener cada término. $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$$a_2 = 3x + (2 - 1) \cdot (x - 1)$$

$$a_2 = 3x + (1) \cdot (x - 1)$$

$$a_2 = 3x + x - 1$$

$$a_2 = 3x - 1$$

Efectúa el cálculo de los siguientes 3 términos de la progresión usando la fórmula para poner en práctica lo que has aprendido hasta ahora

▶ PROGRESIONES. Aritméticas. Calcular la Razón y la Suma. Ejercicio 1

Calcular la razón de la progresión dada, y el valor de la suma de los primeros 7 términos.

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

Incógnitas

$$r = ?$$

$$S_7 = ?$$

Datos: $a_1 = 1$ $a_2 = \frac{3}{2}$ $a_3 = 2$ $a_4 = \frac{5}{2}$

Hallamos la diferencia entre los términos consecutivos de la progresión.

$$\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \qquad 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

la diferencia de un término a otro de esta progresión es $\frac{1}{2}$

Recordemos. La diferencia entre los términos consecutivos de una progresión es la razón.

En este ejercicio la razón vale $\frac{1}{2}$. Ahora hallamos la suma de los 7 primeros términos de la progresión.

$$r = \frac{1}{2}$$

Aplicamos la fórmula $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Para la suma de los 7 primeros términos, $n = 7$

sabemos que $a_1 = 1$, debemos calcular a_7

Aplicamos la fórmula del término enésimo $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Efectuamos la resta

Efectuamos el producto y simplificación de la fracción

Sustituimos los valores conocidos en la fórmula de la suma

$$S_n = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2}$$

$$a_7 = 1 + (7 - 1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_7 = 1 + 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_7 = 1 + 3$$

$$a_7 = 4$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2}$$

$$S_n = \frac{(1 + 4) \cdot 7}{2}$$

$$S_n = \frac{5 \cdot 7}{2} \quad S_n = \frac{35}{2}$$

▶ PROGRESIONES. Aritméticas. Hallar Términos Particulares. Ejercicios 1 y 2

Con los datos que se dan, determinar en cada ejercicio el término señalado

1. $a_4 = 11$, $r = -9$ $a_8 = ?$

3. $a_{14} = 73$, $r = -5$ $a_5 = ?$

2. $a_7 = 18$, $r = 7$ $a_4 = ?$

4. $a_6 = 2x$, $r = x - a$ $a_{10} = ?$

La fórmula para hallar un término cualquiera de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \quad \text{Término enésimo de una P.A.}$$

Para aplicarla necesitamos conocer el valor del primer término y de la razón. El valor de n lo indica el número del término solicitado.

1. $a_4 = 11$, $r = -9$ $a_8 = ?$

Conocemos a_4 y la razón, podemos hallar a_1 .

¿Qué necesitamos para aplicar la fórmula del término enésimo y calcular a_8 ?

Hallaremos a_1 para aplicar la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Aplicamos la fórmula de término enésimo considerando a_4

Sustituimos a_4

Despejamos

$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot (-9)$$

$$11 = a_1 + (4 - 1) \cdot (-9)$$

$$11 = a_1 + (3) \cdot (-9)$$

$$11 = a_1 - 27$$

$$a_1 = 11 + 27$$

$$a_1 = 38$$

Aplicamos la fórmula de término enésimo a a_8

Sustituimos los valores de a_1 y r

Nota: El valor de los términos de esta progresión aritmética van disminuyendo. Esta es una **progresión decreciente**.

$$a_8 = a_1 + (8 - 1) \cdot r$$

$$a_8 = 38 + (8 - 1) \cdot (-9)$$

$$a_8 = 38 + 7 \cdot (-9)$$

$$a_8 = 38 - 63$$

$$a_8 = -25$$

2. $a_7 = 18$, $r = 7$ $a_4 = ?$

Hallaremos a_1 para aplicar la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Conocemos a_7 y la razón, podemos hallar a_1 .

¿Qué necesitamos para aplicar la fórmula del término enésimo y calcular a_4 ?

Aplicamos la fórmula de término enésimo considerando a_7 para hallar a_1

Sustituimos a_7

Despejamos a_1

Aplicamos la fórmula de término enésimo a a_4

Sustituimos los valores de a_1 y r

Nota: en esta progresión aritmética van aumentando los valores de los términos esta es una **progresión creciente**.

$$a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot 7$$

$$18 = a_1 + (7 - 1) \cdot (-9)$$

$$18 = a_1 + 6 \cdot 7$$

$$11 = a_1 + 42$$

$$a_1 = 18 - 42$$

$$a_1 = -24$$

$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot 7$$

$$a_4 = -24 + 3 \cdot 7$$

$$a_4 = -3$$

▶ PROGRESIONES. Aritméticas. Hallar Términos Particulares. Ejercicios 3 y 4

Con los datos que se dan, determinar en cada ejercicio el término señalado

1. $a_4 = 11$, $r = -9$ $a_8 = ?$

3. $a_{14} = 73$, $r = -5$ $a_5 = ?$

2. $a_7 = 18$, $r = 7$ $a_4 = ?$

4. $a_6 = 2x$, $r = x - a$ $a_{10} = ?$

La fórmula para hallar un término cualquiera de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \quad \text{Término enésimo de una P.A.}$$

Para aplicarla necesitamos conocer el valor del primer término y de la razón. El valor de n lo indica el número del término solicitado.

3. $a_{14} = 73$, $r = -5$ $a_5 = ?$

Conocemos a_{14} y la razón, podemos hallar a_1 .

¿Qué necesitamos para aplicar la fórmula del término enésimo y calcular a_8 ?

Hallaremos a_1 para aplicar la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Aplicamos la fórmula de término enésimo considerando a_{14}

$$a_{14} = a_1 + (14 - 1) \cdot (-5)$$

Sustituimos a_{14}

$$73 = a_1 + (14 - 1) \cdot (-5)$$

$$73 = a_1 + (13) \cdot (-5)$$

$$73 = a_1 - 65$$

Despejamos

$$a_1 = 73 + 65$$

$$a_1 = 138$$

Aplicamos la fórmula de término enésimo a a_5

$$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot r$$

Sustituimos los valores de a_1 y r

$$a_5 = 138 + (5 - 1) \cdot (-5)$$

$$a_5 = 138 + 4 \cdot (-5)$$

$$a_5 = 138 - 20$$

Nota: El valor de los términos de esta progresión aritmética van disminuyendo. Esta es una **progresión decreciente**.

$$a_5 = 118$$

$$4. a_6 = 2x, r = x - a \quad a_{10} = ?$$

Conocemos a_6 y la razón, podemos hallar a_1 .

¿Qué necesitamos para aplicar la fórmula del término enésimo y calcular a_{10} ?

Hallaremos a_1 para aplicar la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Aplicamos la fórmula de término enésimo considerando a_6

$$a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot (x - a)$$

Sustituimos a_6

$$2x = a_1 + (6 - 1) \cdot (x - a)$$

$$2x = a_1 + (5) \cdot (x - a)$$

$$2x = a_1 + 5x - 5a$$

$$a_1 = 2x - 5x + 5a$$

$$a_1 = -3x + 5a$$

Despejamos

Aplicamos la fórmula de término enésimo a a_{10}

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot r$$

Sustituimos los valores de a_1 y r

$$a_{10} = -3x + 5a + 9 \cdot (x - a)$$

$$a_{10} = -3x + 5a + 9x - 9a$$

$$a_{10} = 6x - 4a$$

Nota: El valor de los términos de esta progresión aritmética van disminuyendo. Esta es una **progresión decreciente**.

$$a_{10} = 6x - 4a$$

▶ PROGRESIONES. Geométricas. Términos Enésimo, Interpolación y Suma Enésima

Recordemos. Progresión geométrica es una secuencia numérica que va en aumento o disminución, según un factor fijo que multiplica a cada número para obtener el siguiente.

Sabemos que los números de la secuencia se denominan **términos**, y se representan con la letra a , o b , o c . El factor multiplica se llama **razón** y se representa con r , el número de un término particular esta dado por n .

El **término general** de la progresión se representa con a_n , $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$.

En ocasiones se necesita hallar una cantidad específica de términos entre dos términos cualesquiera de una progresión y la razón que los relaciona. Para esto, despejamos r de la fórmula del término general.

despejamos r de la fórmula del término general

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$$

a_1 que está multiplicando, pasa dividiendo

$$\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$$

aplicamos raíz $n - 1$ enésima para eliminar el exponente de la razón.

$$\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = r$$

Ordenamos la igualdad

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Otro valor importante y necesario es la suma de una cantidad particular de términos de la progresión.

Ejemplo

Para hacer más eficiente la entrega de información, una organización ha conformado una cadena de grupos, de tal forma que el líder principal entrega la información a 4 líderes secundarios, cada uno de estos entrega la información a 4 líderes de 3er nivel, y cada uno de estos a cada líder de 4to nivel.

¿Cuántos miembros tiene la organización si se sabe que hay 5 niveles de liderazgo en la actualidad?

Nivel 1

1

Nivel 2

$1 \cdot 4 = 4$

Nivel 3

$4 \cdot 4 = 16$

Nivel 4

$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Nivel 5

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$

Fórmula para hallar la suma de n términos $S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$

Para el ejemplo planteado $n = 5$, se busca S_5 , entonces debemos tener los valores a_1 y r para calcular la suma.

$n = 5$

$S_n = ?$

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Necesitamos los valores de a_1 y r

$a_1 = 1$, porque sólo hay un líder principal

$r = 4$, porque cada líder entrega la información a 4 personas

Sustituimos los valores conocidos

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_5 = \frac{1024 - 1}{4 - 1}$$

$$S_5 = \frac{1023}{3}$$

$$S_5 = 341$$

La organización tiene 341 miembros

Emparejando el Lenguaje

Progresión. Es una secuencia de números que se van obteniendo por medio de una regla de correspondencia específica.

Progresión Aritmética. Es una secuencia de números que van variando la misma cantidad por vez, ya sea en aumento o disminución.

A Practicar

Desarrolla las siguientes PA:

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 1. $a_n = 3 + 4(n-1)$ | 2. $b_n = 45 - 5(n-1)$ | 3. $c_n = -1 - 2(n-1)$ |
| 4. $e_n = 9(n-1)$ | 5. $p_n = 13 + (n-1)$ | 6. $k_n = -5 + 7(n-1)$ |

Indica el valor de la razón en cada PA:

- | | | |
|----------------------------|--|------------------------------|
| 7. $-3, 0, 3, 6, 9, \dots$ | 8. $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \dots$ | 9. $-5, -10, -15, -20 \dots$ |
|----------------------------|--|------------------------------|

Hallar el término indicado dadas la razón y primer término de la PA dadas:

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 10. a_7 ; $a_1 = -4$, $r = 3$ | 12. a_5 ; $a_1 = -\frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{2}$ |
| 11. a_{12} ; $a_1 = 2$, $r = -3$ | 13. a_8 ; $a_1 = \frac{1}{6}$, $r = -\frac{1}{3}$ |
14. En una progresión aritmética el exceso entre el primer término y el noveno término es 2. Si la suma de estos términos es 5, hallar la razón y el valor de estos términos. $R = 1/4$, $a_1 = 3/2$, $a_9 = 7/2$.
15. En una progresión aritmética el quinto término es el doble del octavo, y la diferencia entre ellos es 12. Hallar la razón.
16. ¿Cuántos términos tiene una progresión cuya razón es $2/5$, el primer término es 11 y el último término es 53?. $R = 106$
17. Interpolar 7 términos aritméticos entre -14 y 2. $R = -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0$
18. Interpolar 10 términos aritméticos entre $3/2$ y 18. $R = 3, 9/2, 6, 15/2, 9, 21/2, 12, 27/2, 15, 33/2$
19. Hallar la suma de los 12 términos de una PA que empieza en 4 y termina en 26.
20. El producto de los términos 5 y 7 de una PA de razón 2 es 40. Hallar la progresión.

Desarrolla las siguientes PG:

- | | | |
|---|--|---|
| 21. $a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ | 22. $b_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ | 23. $c_n = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ |
| 24. $e_n = -\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ | 25. $p_n = (-1)^{n-1}$ | 26. $k_n = -(-6)^{n-1}$ |

Indica el valor de la razón en cada PG:

- | | |
|--|--|
| 27. $\frac{9}{4}, \frac{27}{16}, \frac{81}{64}, \dots$ | 28. $\frac{2}{3}, 2, 6, 18, 54, \dots$ |
| 29. $6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots$ | 30. $2, -4, 8, -16, \dots$ |

Hallar el término indicado dadas la razón y primer término de la PG dadas:

31. a_5 ; $a_1 = 8$, $r = \frac{3}{2}$

33. a_6 ; $a_1 = -2$, $r = \frac{1}{4}$

32. a_8 ; $a_1 = 6$, $r = -\frac{1}{3}$

34. a_4 ; $a_1 = -10$, $r = -\frac{1}{5}$

35. Los términos 2do y 5to de una PG valen 2 y 54 48 respectivamente. Hallar la razón y a_1 .
36. Los términos 6to y 8vo de una PG valen 12 y 48 respectivamente. Hallar la razón y a_1 .
37. En una PG $a_1 = 243$, $a_n = 32$ y $S_n = 665$. Hallar la razón y el número de términos.
38. En una PG el primer termino vale 5 y la razón vale 2. ¿Qué lugar ocupa término de valor 5.120?

Lo Hicimos Bien?

1. $3, 7, 11, 15, 19, \dots$ 2. $45, 40, 35, 30, 25, \dots$ 3. $-1, -3, -5, -7, -9, \dots$
 4. $0, 9, 18, 27, 36, \dots$ 5. $13, 14, 15, 16, 17, \dots$ 6. $-5, 2, 9, 16, 23, \dots$
 7. $r = 3$ 8. $r = \frac{1}{2}$ 9. $r = -5$ 10. $a_7 = 14$ 11. $a_{12} = -31$ 12. $a_5 = \frac{5}{2}$
 13. $a_8 = -\frac{13}{6}$ 14. $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_9 = \frac{7}{2}$, $r = \frac{1}{4}$ 15. $r = -4$ 16. $n = 106$
 17. $-12, -10, -8, -6, -4, -2, 0$ 18. $3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}, 9, \frac{21}{2}, 12, \frac{27}{2}, 15, \frac{33}{2}, \dots$
 19. $S_n = 180$ 20. $a_7 = 8, a_5 = 4$ 21. $2, 10, 50, 250, 1250, \dots$
 22. $7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}, \dots$ 23. $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ 24. $-1, -\frac{2}{5}, -\frac{4}{25}, -\frac{8}{125}, -\frac{16}{625}, \dots$
 25. $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ 26. $-1, 6, -36, 216, -1296, \dots$ 27. $r = \frac{3}{4}$ 28. $r = 3$
 29. $r = \frac{1}{2}$ 30. $r = -2$ 31. $a_5 = \frac{81}{2}$ 32. $a_8 = -\frac{2}{729}$ 33. $a_6 = -\frac{1}{512}$
 34. $a_4 = \frac{2}{25}$, $r = 2$ 35. $a_1 = \frac{2}{3}$, $r = 3$ 36. $a_1 = \frac{3}{8}$, $r = 2$ 37. $r = \frac{2}{3}$, $n = 6$
 38. $n = 11$