

Progresiones Geométricas

Marco Teórico

Observemos las siguientes sucesiones:

- (a) 1,2,3,4,8...
- (b) 1,1/2,1/4,1/8,1/16
- (c) 81,-27,9,-3,1,-1/3
- (d) 2,6,18,54,162

En la sucesión (a) cualquier término, después del primero, se obtiene multiplicando por 2 el término anterior.

En las sucesiones (b),(c) y (d) se obtienen multiplicando por 1/2,-1/3 y 3,respectivamente,el término precedente.

A todas las sucesiones que se construyen de esta forma las denominaremos **PROGRESIONES GEOMÉTRICAS** (en forma abreviada PT).

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS es una sucesión en la que cada término, después del primero, se obtiene multiplicando el término precedente por una cantidad constante llamada **RAZÓN** (r) de la progresión.

En las progresiones (a) ,(b), (c) y (d) las razones son, respectivamente ,2 ,1/2,-1/3 y 3.

Al igual que en las progresiones aritméticas, en las geométricas distinguiremos los siguientes elementos:

- (1) La razón : r
- (2) El número de términos : n ($n \in \mathbb{N}; n \geq 3$)
- (3) El primer término: a_1
- (4) El enésimo término: a_n

Observemos ahora las siguientes particularidades:

1. Las progresiones geométricas pueden ser también FINITAS o INFINITAS según tengan un número limitado de términos o no. En los ejemplos anteriores son finitas las progresiones (b) y (c) e infinitas las progresiones (a) y (d).
2. Observaciones particulares para las progresiones cuyo primer término es positivo ($a_1 > 0$):
 - (a) Si $r > 1$ la progresión es CRECIENTE. Es el caso de las progresiones (a) y (d) .
 - (b) Si $0 < r < 1$ la progresión es DECRECIENTE. Es el caso del ejemplo (b).

3. Cuando la razón es negativa ($r < 0$), la progresión es OSILANTE, es decir, sus términos son alternadamente positivos y negativos. Un ejemplo de este es el caso de progresión (c).
4. En una progresión geométrica el cociente de dos términos consecutivos cualesquiera es una constante fija llamada razón. Para obtener, pues, la razón de una progresión geométrica cuando se conocen sus términos basta tomar un término cualquiera y dividirlo por el que le precede inmediatamente:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

5. En una progresión geométrica, cada término (exceptuados el primero y el último es igual a la media geométrica del término que lo precede y del que lo sigue:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

6. Ordenemos en columna los términos de la progresión (d) descomponiendo de la siguiente forma:

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 6 = 2 \cdot 3 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = 18 = 2 \cdot 9 = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = 54 = 2 \cdot 27 = a_1 \cdot r^3$$

$$a_5 = 162 = 2 \cdot 81 = a_1 \cdot r^4$$

Seguendo este proceso podemos construir cualquier término:

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Si efectuáramos el proceso anterior comenzado por otro término cualquiera notaríamos :

$$\mathbf{a_n = a_m \cdot r^{n-m}}$$

Ejemplo

Construir una PT de 5 términos sabiendo que el primero es 75 y la razón es $-2/5$

Solución:

El primer término es: $a_1 = 75$

Los restantes términos se obtienen multiplicando por la razón el término que le precede:

$$a_2 = 75 \cdot (-2/5) = -30$$

$$a_3 = -30 \cdot (-2/5) = 12$$

$$a_4 = 12 \cdot (-2/5) = -24/5$$

$$a_5 = (-24/5) \cdot (-2/5) = 48/25$$

La progresión completa es, pues:

PT:75,-30,12,-24/5,48/25

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar la razón de la siguiente progresión:

PT: $10\sqrt{3}, 20, 40\sqrt{3}/3, 80/3$

Solución:

Para determinar r tomamos un término cualquiera y lo dividimos por el anterior:

$$r = \frac{20}{10\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$r = 2\sqrt{3}/3$$

2. Calcular el término que falta en PT: $9, -3\sqrt{2}, _, -2\sqrt{2}/3$

Solución

Utilizando:

$$a_3 = \sqrt{a_2 \cdot a_4}$$

$$a_3 = \sqrt{(-3\sqrt{2}) \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}$$

$$a_3 = \sqrt{4}$$

$$a_3 = 2$$

3. Calcular el séptimo término de una PT de razón 2 sabiendo que el tercer término es 5/96.

Solución:

Usando: $a_n = a_m \cdot r^{n-m}$

$$a_7 = a_3 \cdot r^{7-3}$$

$$a_7 = \frac{5}{96} \cdot 2^4$$

$$a_7 = \frac{5 \cdot 2^4}{2^5 \cdot 3}$$

$$a_7 = 5/6$$

4. Cuatro números están en PT. Calcularlos sabiendo que $a_1 - a_2 = 8$ y que $a_3 - a_4 = 72$

Solución:

Tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 8 \\ a_3 - a_4 = 72 \end{cases}$$

Ponemos a_2, a_3 y a_4 , en función de a_1 y r

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} a_1 - a_1 \cdot r = 8 \\ a_1 \cdot r^2 - a_1 \cdot r^3 = 72 \end{cases}$$

Sacando factor común en cada ecuación:

$$\begin{cases} a_1(1 - r) = 8 & (1) \\ a_1 \cdot r^2(1 - r) = 72 & (2) \end{cases}$$

Dividiendo (2) / (1)

$$\underline{a_1 r^2(1 - r) = 72}$$

$$a_1(1 - r) = 8$$

Se obtiene:

$$r^2 = 9$$

$$r = \pm 3$$

Despejando a_1 en (1):

$$a_1 = \frac{8}{1 - r}$$

Sustituyendo los valores para r :

$$a_1 = \frac{8}{1 + 3}$$

$$a_1 = \frac{8}{1 - 3} = -4 \quad \text{Para } r = 3$$

La progresión será :

PT: -4, -12, -36, -108

Para $r = -3$

$$a_1 = \frac{8}{1 + 3} = 2$$

La progresión será:

PT: 2, -6, 18, -54

5. Determinar la razón de la siguiente progresión:

PT: -4, -12, -36, -108

Solución:

Para determinar r tomamos un término cualquiera y lo dividimos por el anterior:

$$r = \frac{-108}{36} = -3$$

$r = -3$

Referencias

Hoffmann,G Jorge. Matemáticas 4to Año. Caracas. Sphinx.

