

**Materia:** Matemáticas de 4to año

**Tema:** Función logarítmica

---

## Marco Teórico

La función exponencial de la forma  $f(X) = a^X$  tiene una función inversa, que llamamos *función logarítmica* y se escribe de la forma:

Una función  $g(X) = \text{Lg}_a Y = X$  donde  $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$  siendo "Lg" el logaritmo y "a" la base

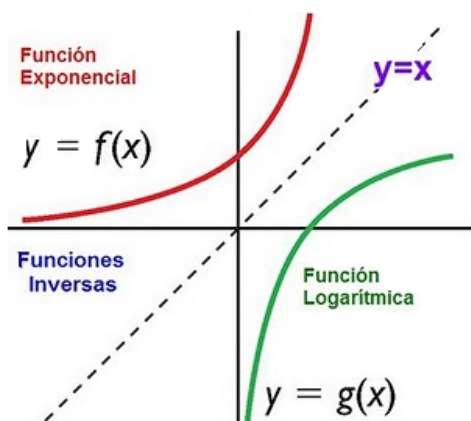
Para toda constante  $a > 0$  y  $a \neq 1$  la ecuación

$$\text{Lg}_a Y = X \quad \text{es equivalente a} \quad Y = a^X$$

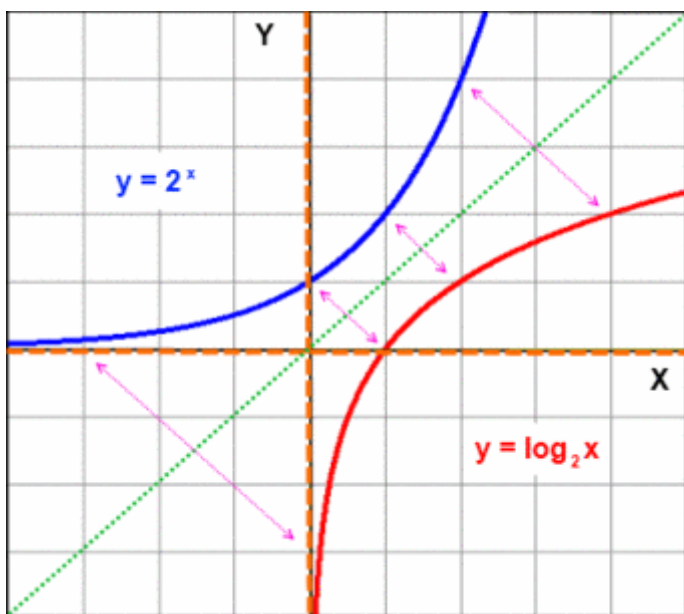
Es decir, un logaritmo no es más que un exponente al que hay que elevar la base "a" para obtener el valor de "Y".

La gráfica de la función logarítmica la podemos obtener directamente del gráfico de la función exponencial, pues siendo una inversa de la otra, sus curvas son simétricas con respecto a la bisectriz del primer Y = X y tercer cuadrante.

Por ser curvas simétricas, si una de ellas pasa por el punto (a,b), la otra gráfica pasará necesariamente por el punto (b,a).



Por ejemplo, para la función exponencial  $Y = 2^X$  su función inversa será  $X = \text{Log}_2 Y$  y se representación gráfica viene dada por:



Tal vez el ejemplo más común de un logaritmo es la escala de Richter, que mide la magnitud de un terremoto. La magnitud es en realidad el logaritmo en base 10 de la amplitud del temblor. Es decir,  $m = \text{Log}_{10} A$  donde “m” es magnitud y “A” amplitud del terremoto.

Esto significa que, por ejemplo, un terremoto de magnitud 4 es 10 veces más fuerte que un terremoto con magnitud 3. Podemos ver por qué este es el caso de que nos fijamos en las formas logarítmicas y exponenciales de las expresiones: Un terremoto de magnitud 3 significa,  $3 = \text{Log}_{10} A$ . La forma exponencial de esta expresión es  $A = 10^3 = 1000$ . Por lo tanto la amplitud del temblor es 1000. Del mismo modo, un sismo de magnitud 4 tiene una amplitud  $A = 10^4 = 10000$ .

### ***Evaluación de una función logarítmica***

Considere la función  $X = \text{Log}_2 Y$ , resolver una ecuación significa encontrar el valor de la variable que hace que se cumpla la igualdad. Para resolver ecuaciones

logarítmicas, tenemos que pensar en ¿Cuál es la forma exponencial de esta ecuación?. Por definición de logaritmo  $X = \text{Log}_2 Y$  es igual a  $Y = 2^X$ .

Al introducir un valor para X, encontramos el valor de la función elevando 2 al exponente de X. Por ejemplo, si  $x = 3$ , evaluamos la función para este valor, sustituyendo la X por el valor  $f(3) = 2^3 = 8$ .

En general

Para resolver ecuaciones donde se muestra una igualdad como esta, utilice la siguiente regla:

$$\log_b f(x) = \log_b g(x) \rightarrow f(x) = g(x)$$

En otras palabras, establecer las bases iguales y resolver para la variable en el exponente en el tratamiento de los exponentes de ambos lados de la ecuación como polinomios sencillos.

### Ejemplo A

Escribe cada expresión exponencial como una expresión logarítmica.

a)  $3^4 = 81$

b)  $b^{4x} = 52$

**Solución:**

a) Identificamos la base de la potencia y su exponente. El 3 es la base, por lo que se sitúa como el subíndice en la expresión log. El 81 es el número al que se halla el logaritmo, y por lo que se coloca después del "log". Por lo tanto tenemos:  $3^4 = 81$  es la misma  $\log_3 81 = 4$ .

Para leer esta frase, decimos "el logaritmo en base 3 de 81 es igual a 4."

b) La b es la base y la expresión 4x es el exponente, así que tenemos:

$\log_b 52 = 4X$ . Decimos, "log base b de 52, es igual a 4X".

### Ejemplo B

Evaluar la función  $f(X) = \log_2 X$  para los valores:

a)  $x = 2$

b)  $x = 1$

c)  $x = -2$

**Solución:**

a) Si  $x = 2$ , tenemos:

$$f(X) = \log_2 X$$

$$f(2) = \log_2 2$$

Para determinar el valor de  $\log_2 2$ , usted puede preguntarse: "a que número debo elevar la base 2 para obtener un 2". La respuesta a esta pregunta es a menudo fácil si se tiene en cuenta la forma exponencial:  $2^? = 2$

El exponente que falta es 1. Así que tenemos que  $f(2) = \log_2 2 = 1$

b) Si  $x = 1$ , tenemos:

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(1) = \log_2 1$$

Como lo hicimos en (a), se puede considerar la forma exponencial:  $2^? = 1$ . El exponente que falta es 0. Así que tenemos que  $f(1) = \log_2 1 = 0$ .

c. Si  $x = -2$ , tenemos:

$$f(x) = \text{Log}_2 x$$

$$f(-2) = \text{Log}_2 -2$$

Una vez más, tenga en cuenta la forma exponencial:  $2^? = -2$ . No hay tal exponente. Por lo tanto  $f(-2) = \log_2 -2$  no existe.

**Ejemplo C**

Considere la ecuación  $\log_2 (3x - 1) = \log_2 (5x - 7)$ .

Debido a que los logaritmos tienen la misma base (2), los argumentos del registro (las expresiones  $3x - 1$  y  $5x - 7$ ) *debe ser igual*. Así que podemos resolver de la siguiente manera:

$$\text{Log}_2(3X - 1) = \text{Log}_2(5X - 7)$$

$$(3X - 1) = (5X - 7)$$

$$3X - 5X = -7 + 1$$

$$-2X = -6 \quad \text{Multiplicamos por } (-1) \text{ ambos lados}$$

$$2X = 6 \quad \text{de la igualdad}$$

$$X = \frac{6}{2}$$

$$X = 3$$

## Palabras Claves

**Argumento:** La expresión "dentro de" una expresión logarítmica. El argumento representa el "poder" en la relación exponencial.

**Funciones exponenciales** son funciones con la variable de entrada (la  $x$  temporal) en el exponente.

**Funciones logarítmicas** son la inversa de las funciones exponenciales. Recuerda

$\text{Lg}_a Y = X$  es equivalente a  $Y = a^X$

**log:** La abreviatura de "el logaritmo de", como en: "log<sub>b</sub> n" = "el logaritmo, base 'b', de 'n'".

**Evaluar:** Identificar un valor de la función ( $y$ ) para un valor dado de la variable independiente ( $x$ ).

---

## Ejercicios Resueltos

1) Resuelva la ecuación:  $\log_2(9x) = \log_2(3x + 8)$

$\text{Log}_2(9X) = \text{Log}_2(3X + 8)$  Por ser bases iguales se igualan los argumentos

$$9X = 3X + 8$$

$$9X - 3X = 8$$

$$6X = 8$$

$$X = \frac{8}{6}$$

$$X = \frac{4}{3}$$

2) Escribe las expresiones logarítmicas en forma exponencial.

a)  $\log_{10} 100 = 2$

b)  $\log_b W = 5$

**Recuerda**  $\log_a Y = X$  es equivalente a  $Y = a^X$

a) La base es de 10, y el exponente es 2, por lo que tenemos:  $10^2 = 100$

b) La base es b, y el exponente es 5, por lo que tenemos:  $b^5 = w$

3) Escribe la expresión exponencial en forma logarítmica:  $5^2 = 25$

La base del exponente es 5, tómalo como base del logaritmo

$$\log_5 25 = 2$$

$$5^2 = 25$$

4) Resuelve cada ecuación para  $x$ :

**a)  $\log_4 x = 3$**

**b)  $\log_5 (x + 1) = 2$**

a)  $\log_4 X = 3$

$$4^3 = X$$

$$X = 4 \cdot 4 \cdot 4$$

$$X = 64$$

b)  $\log_5 (X + 1) = 2$

$$5^2 = X + 1$$

$$25 = X + 1$$

$$X = 25 - 1$$

$$X = 24$$

---

## Ejercicios

1. Escribe la ecuación dada en forma logarítmica:  $(\frac{1}{3})^{-5} = 243$

**Evaluar cada logaritmo en el valor indicado de x.**

2.  $f(x) = \log_2 x$  para  $x = 32$

3.  $f(x) = \log_3 x$  para  $x = 1$

4.  $f(x) = \log_4 x$  para  $x = 2$

5.  $f(x) = \log_{10} x$  para  $x = \frac{1}{100}$