Materia: Matemática de Octavo

Tema: Operaciones con Conjuntos

I. <u>INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS</u>

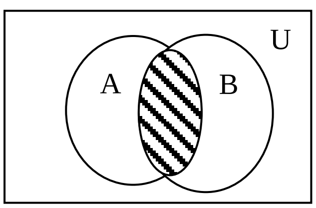
Dados dos conjuntos A y B, el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A y al conjunto B simultáneamente, lo denominamos ***Intersección*** de A y B. Esto es:

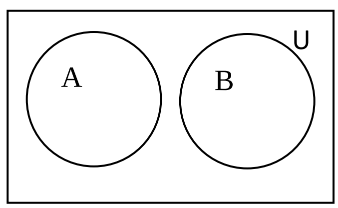
$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$$

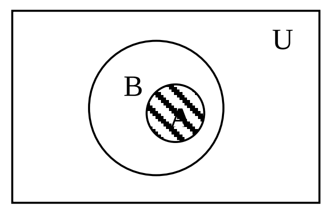
y leemos:

“A intersección B es el conjunto formado por los elementos x tal que x pertenece a A y x pertenece a B”

<u>Gráficamente puede ocurrir que:</u>







<u>Ejemplo</u>: Los conjuntos $A = \{7,8,9,10,11,12\}$ y $B = \{5,6,9,11,13,14\}$

La intersección de ambos conjuntos es: $A \cap B = \{9, 11\}$

<u>Propiedades:</u>

Sean los conjuntos A y B, entonces se verifica:

(1.) Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$

(2.) Asociativa: $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3.) Idempotencia: $A \cap A = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$

Observaciones:

- ✓ Puede ocurrir que el conjunto intersección $A \cap B$ no tenga elementos, en cuyo caso diremos que A y B son conjuntos ***disjuntos o disyuntos.***
- ✓ El ***conjunto vacío*** es aquel que no tiene elementos y lo denotamos mediante la letra $\emptyset$. Está incluido en cualquier conjunto dado.

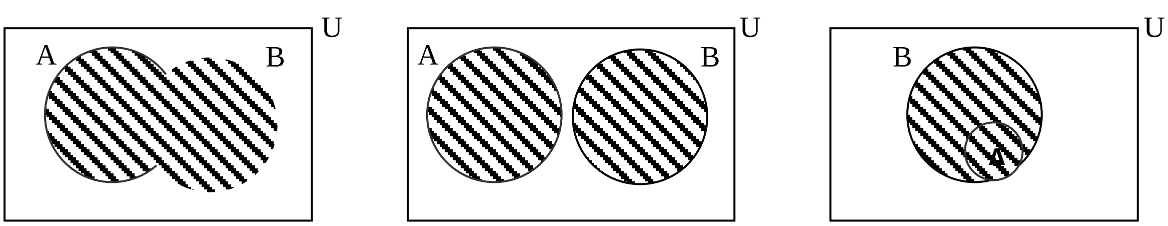
II. UNIÓN DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B, el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B, lo denominamos ***Unión o reunión*** de A y B. Esto es:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \lor x \in B\}$$

y leemos: "A unión B es el conjunto formado por los elementos x tal que x pertenece a A o x pertenece a B"

Gráficamente puede ocurrir que:



Ejemplo: Los conjuntos $A = \{3,4,5,8,9\}$ y $B = \{5,7,8,9,10\}$

La unión de ambos conjuntos es: $A \cup B = \{3,4,5,7,8,9,10\}$

Propiedades:

Sean los conjuntos A y B, entonces se verifica:

(1.) Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$

(2.) Asociativa: $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(3.) Idempotencia: $A \cup A = A$ y $A \cup \emptyset = A$

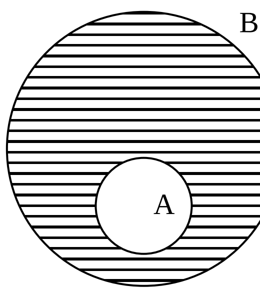
III. <u>CONJUNTO COMPLEMENTARIO</u>

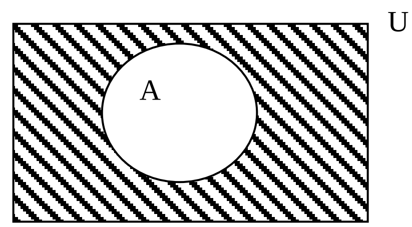
Sean A y B conjuntos tales que el conjunto A es subconjunto o parte del conjunto B. El conjunto de todos los elementos que son de B pero no de A, se denomina ***Conjunto Complementario*** del conjunto A respecto a B. Esto es:

$$A^c = \{x \,/\, x \in B \;\wedge\; x \notin A\} \text{ o también } A^c = U - A$$

y leemos: "A complemento es el conjunto formado por los elementos x tal que x pertenece a B y x no pertenece a A"

<u>Gráficamente:</u>





<u>Ejemplo</u>: Si $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y $A = \{3,4,6,7\}$ entonces $A^c = \{1,2,5,8,9,10\}$

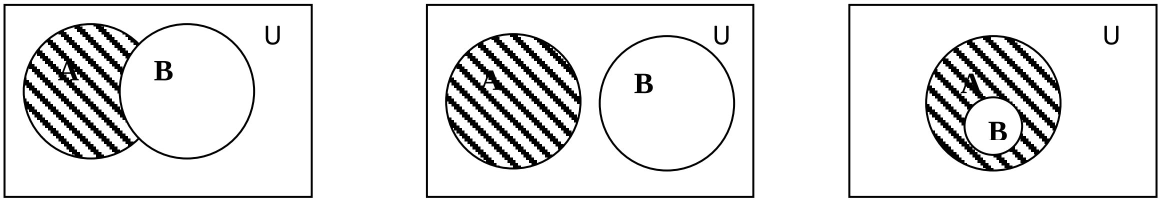
IV. <u>DIFERENCIA DE CONJUNTOS</u>

Dados los conjuntos A y B, se define la ***diferencia***:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$$

y leemos: "A menos B es el conjunto formado por los elementos x tal que x pertenece a A y x no pertenece a B"

<u>Gráficamente puede ocurrir que</u>:



Ejemplo: En los conjuntos $C = \{u, v, x, y, z\}$ y $D = \{s, t, z, v, p, q\}$, entonces:

$$C - D = \{u, x, y\}$$

V. DIFERENCIA SIMÉTRICA

Dados los conjuntos A y B, llamaremos ***Diferencia Simétrica*** de A y B al conjunto:

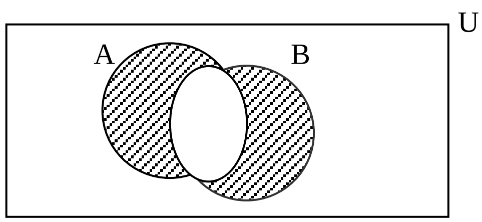
$$A \Delta B = \{x \in A \cup B / x \in A \vee x \in B\}$$

Nota: la diferencia entre $A \cup B$ y $A \Delta B$, es que en $A \cup B$ permitimos la posibilidad a un elemento de pertenecer a A y B, mientras que en $A \Delta B$ no lo permitimos.

entonces:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Gráficamente:



Ejemplo: si $A = \{1,3,4,5,6,7,20,30\}$ y $B = \{2,6,20,40,50\}$

La diferencia simétrica es:

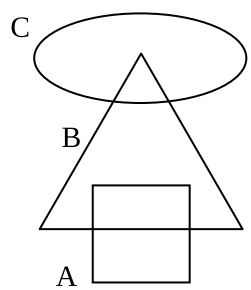
$$A \Delta B = \{1,2,3,4,5,6,7,20,30,40,50\} - \{6,20\} = \{1,2,3,4,5,7,30,40,50\}$$

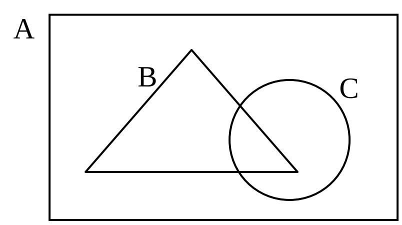
EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dados los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{b, c, d, e\}$. Hallar:

(a.) $A - B$	(b.) B^C	(c.) $(A - C) \cap (A - B)$
(d.) $B \cap C$	(e.) $(A \cup B) - C$	(f.) $(B \cup C) - (A - B)$
(g.) $A \cup B$	(h.) $(A - C)^C$	(i.) $(B \cap C)^C$
(j.) $A - (B \cap C)$	(k.) $(A \cup B)^C$	(l.) $A \cap B \cap C$
(m.) $A \,\Delta\, B$	(n.) $A \cap (B \,\Delta\, C)$	(o.) $B \,\Delta\, (A \cup C)$

2. Dados los siguientes diagramas, colorear separadamente cada uno de los ejercicios del No. 1:





3. Determine las siguientes operaciones entre conjuntos

   (a.) $\mathbb{Q}^* \cap \mathbb{Z}$

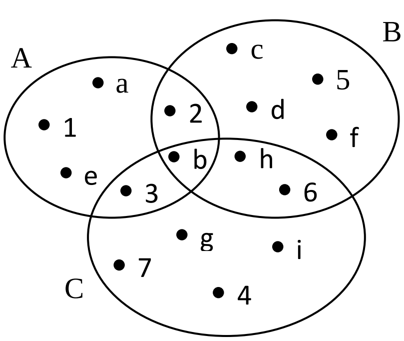
   (b.) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$

   (c.) $\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{N}$

   (d.) $\mathbb{Z}^* \cap \mathbb{Q}_+$

   (e.) $\mathbb{Z}^* \cup \{0\}$

4. Determine las siguientes operaciones entre conjuntos:

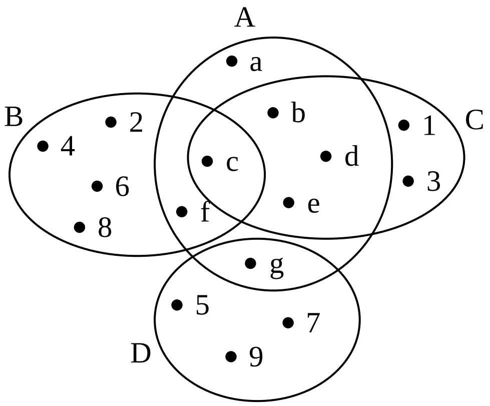


   (a.) $A \cap B$

   (b.) $(B \cap C)^c$

   (c.) $C \cup A$

   (d.) $(A - B)^c$

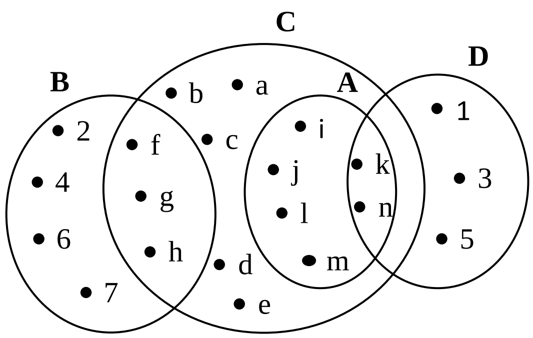


(e.) $(A \cap C) \cup B$

(f.) $(A \cup D) - D^c$

(g.) C^c

(h.) $C \Delta B$



(i.) $(A \cap C) \cup B$

(j.) $(A \cap C \cap D) \cup (B \cap C)$

(k.) $(A \Delta D) \cup (B \Delta C)$

(l.) $(A - C)^c$

5. Representa mediante un Diagrama de Venn las siguientes operaciones entre conjuntos

   (a.) $x \in (A \cap B) \cup (C \cap D)$

   (b.) $y \in A \cup B \cup C$

   (c.) $a \in (B \cap A) \cup C$

   (d.) $z \in A \cap B \cap C$

   (e.) $b \in (A \cup C) - D$

6. Sea A el conjunto que representa a los estudiantes de una universidad que estudian Inglés, B el conjunto de los alumnos de la misma universidad que estudian Arquitectura y C el conjunto de los alumnos que estudian en la universidad.

   Interprete:

   (a.) $(A \cap B) \cup C$
   (b.) $A \cup (B \cap C)$
   (c.) $A - (B \cap C)$
   (d.) $C - (A \cup B)$
   (e.) $B - (A \cap C)$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1.

(a.) $A - B = \{a, b, c\}$

(b.) $B^C = \{a, b, c\}$

(c.) $(A - C) \cap (A - B) = \{\text{a, f}\} \cap \{a, b, c\} = \{a\}$

(d.) $B \cap C = \{d, e\}$

(e.) $(A \cup B) - C = \{a, f, d, e, b, c, g\} - \{b, c, d, e\} = \{a, f, g\}$

(f.) $(B \cup C) - (A - B) = \{f, d, e, b, c, g\} - \{a, b, c\} = \{f, d, e, g\}$

(g.) $A \cup B = \{a, f, d, e, b, c, g\}$

(h.) $(A - C)^C = \{g\}$

(i.) $(B \cap C)^C = \{a, b, c, f, g\}$

(j.) $A - (B \cap C) = \{a, f, d, e, b, c\} - \{d, e\} = \{a, f, b, c\}$

(k.) $(A \cup B)^C = \emptyset$

(l.) $A \cap B \cap C = \{d, e\}$

(m.) $A \, \Delta \, B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{a, f, d, e, b, c, g\} - \{d, f, e\} = \{a, b, c, g\}$

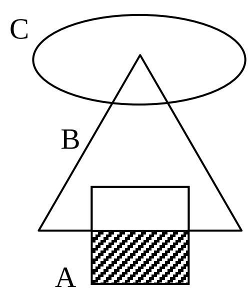
(n.) $A \cap (B \, \Delta \, C) = \{a, f, d, e, b, c\} \cap \{b, c, f, g\} = \{b, c, f\}$

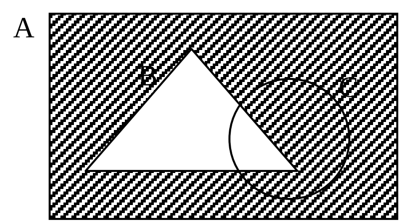
(o.) $B \, \Delta \, (A \cup C) = [B \cup (A \cup C)] - [B \cap (A \cup C)] = \{a, f, d, e, b, c, g\} - \{d, f, e\}$

$= \{a, b, c, g\}$

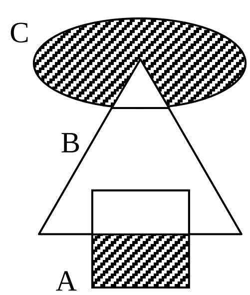
2.

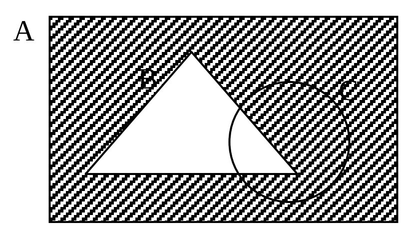
(a.) $A - B$



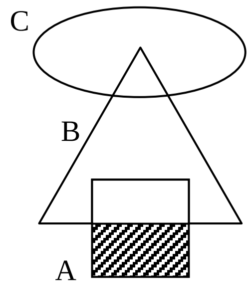


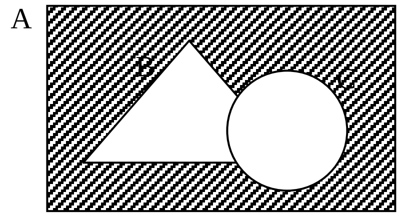
(b.) B^C



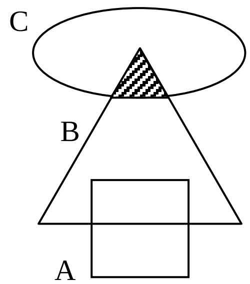


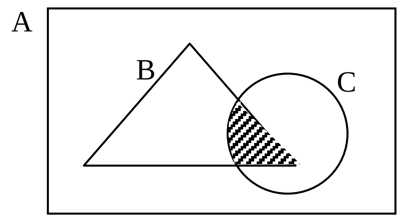
(c.) $(A - C) \cap (A - B)$



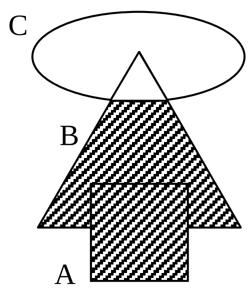


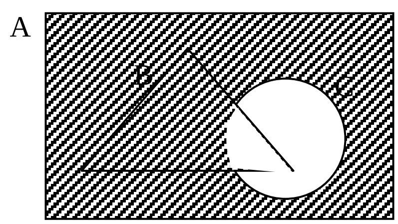
(d.) $B \cap C$



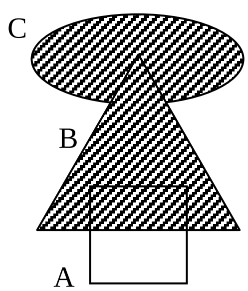


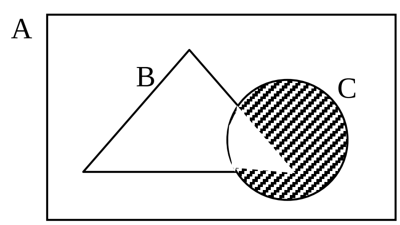
(e.) $(A \cup B) - C$



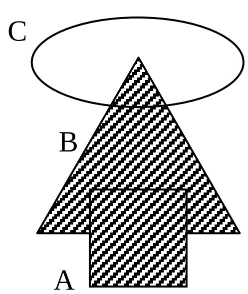


(f.) $(B \cup C) - (A - B)$

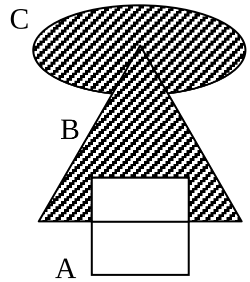


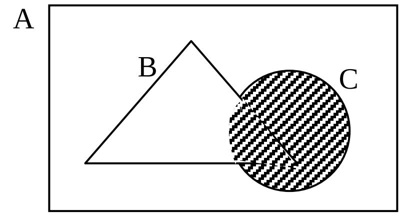


(g.) $A \cup B$

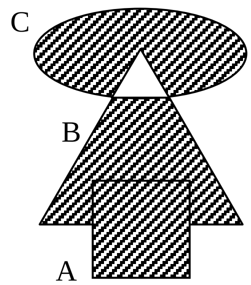


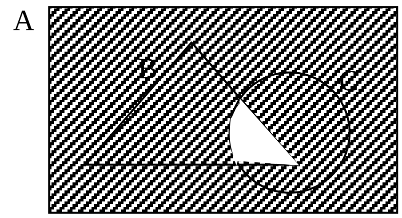
(h.) $(A - C)^C$



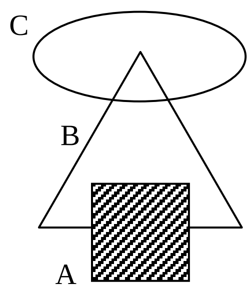


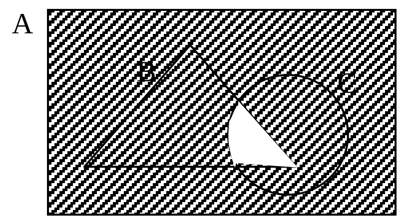
(i.) $(B \cap C)^C$



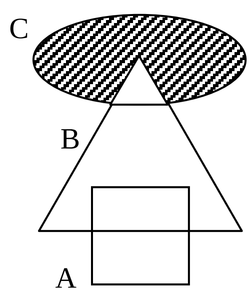


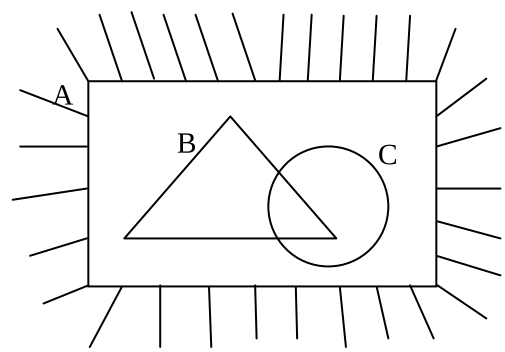
(j.) $A - (B \cap C)$



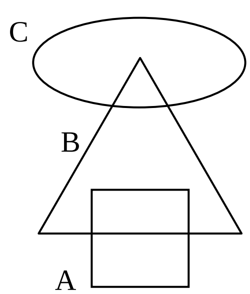


(k.) $(A \cup B)^C$

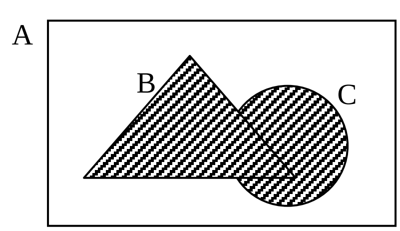




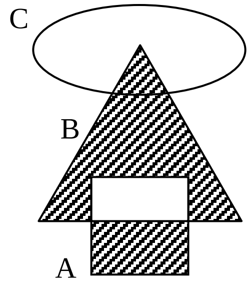
(l.) $A \cap B \cap C$

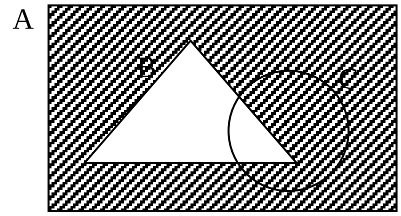


$A \cap B \cap C = \emptyset$

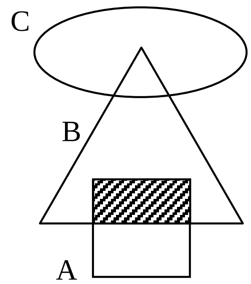


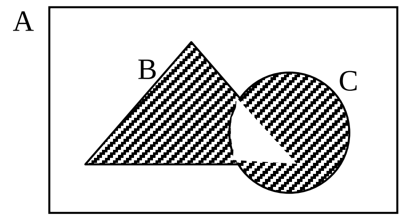
(m.) $A \,\Delta\, B$



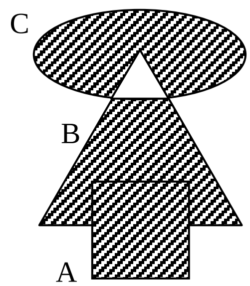


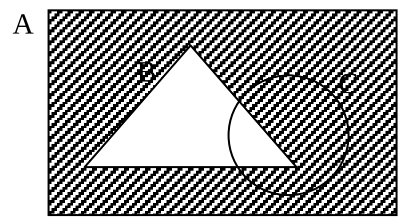
(n.) $A \cap (B \,\Delta\, C)$





(o.) $B \,\Delta\, (A \cup C)$





3.

(a.) $\mathbb{Q}^* \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^*$

(b.) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

(c.) $\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$

(d.) $\mathbb{Z}^* \cap \mathbb{Q}_+ = \mathbb{Z}_+$

(e.) $\mathbb{Z}^* \cup \{0\} = \mathbb{Z}$

4.

(a.) $A \cap B = \{2, b\}$

(b.) $(B \cap C)^c = \{a, 1,2, e, 3, c, 5, d, f, g, 7,4, i\}$

(c.) $C \cup A = \{a, 1,2, b, e, 3, h, 6, g, 7,4, i\}$

(d.) $(A - B)^c = \{2,3, b, c, 5, d, f, h, 6, g, 7,4, i\}$

(e.) $(A \cap C) \cup B = \{c, b, d, e\} \cup \{4,2,6,8, c, f\} = \{c, b, d, e, 4,2,6,8, f\}$

(f.) $(A \cup D) - D^c = \{a, b, c, d, e, f, g, 5,7,9\} - \{4,2,6, c, f, 8, a, b, d, e, 1,3\} = \{g, 5,7,9\}$

(g.) $C^c = \{4,2,6,8, f, a, g, 5,7,9\}$

(h.) $C \Delta B = \{4,2,6,8, f, b, d, e, 1,3\}$

(i.) $(A \cap C) \cup B = \{4,2,6,7, f, g, h, i, j, l, m, k, n\}$

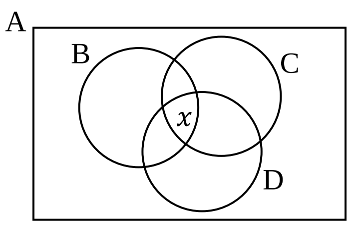
(j.) $(A \cap C \cap D) \cup (B \cap C) = \{4,2,6,7, f, g, h, b, a, c, d, e, i, j, l, m, k, n\}$

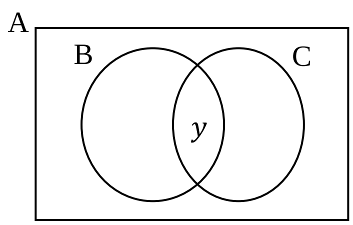
(k.) $(A \Delta D) \cup (B \Delta C) = \{i, j, l, m, 1,3,5\} \cup \{2,4,6,7, b, a, c, d, e, i, j, l, m, n, k\}$

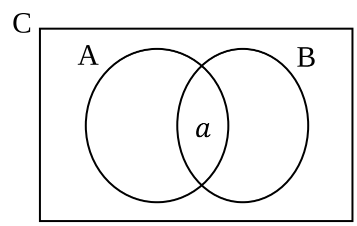
$= \{2,4,6,7, b, a, c, d, e, i, j, l, m, n, k, 1,3,5\}$

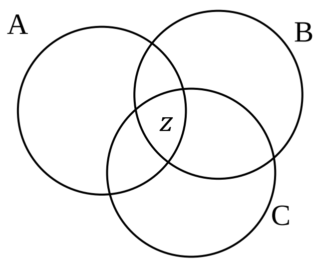
(l.) $(A - C)^c = \emptyset$

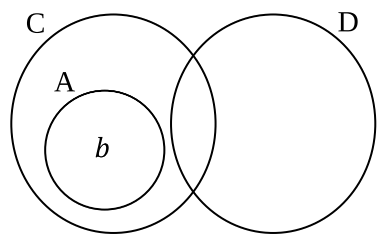
5. Por ejemplo:

(a.) 

(b.) 

(c.) 

(d.) 

(e.) 

6.

(a.) Alumnos que estudian en la universidad

(b.) Alumnos que estudian inglés y arquitectura simultáneamente

(c.) Alumnos que estudian inglés pero no arquitectura

(d.) Alumnos que estudian en la universidad que no estudian inglés y arquitectura simultáneamente

(e.) Alumnos que estudian arquitectura pero que no estudian inglés