

## OPERACIÓN CON NÚMEROS ENTEROS(Z)

Imagina que un día estas de visita en un apartamento de unos amigos, al despedirte bajas al sótano 2 a buscar tu carro y te das cuenta que dejaste las llaves en casa de tu amigo que vive en el piso 7. ¿Cuántos pisos tienes que subir? En la resolución de este problema utilizas operaciones con números enteros elementales que retomaremos después.

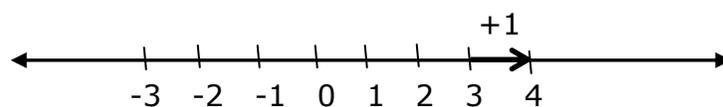
### Adición de números enteros.

La primera operación que veras es la adición, que como en el conjunto de números naturales, se indica mediante el signo  $+$ . Los enteros con los cuales se opera se denominan **sumandos** y el resultado de la operación se llama **suma**.

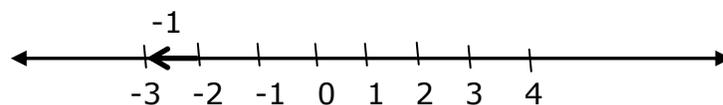
Cuando se suman números enteros pueden presentarse varios casos según los signos de los números, es decir positivo o negativo. Utilizando la recta numérica puedes visualizar esta operación relacionando la adición de los números positivos con movimientos hacia la derecha de la recta numérica y la adición de los números negativos con movimientos hacia la izquierda.

### Ejemplo A

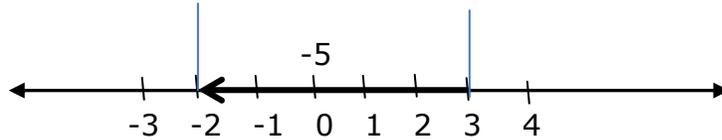
En el caso de la adición de dos números positivos  $(+3)+(+1)$  colocas  $+3$  sobre la recta y a partir de este punto mueves el número de unidades que vas a sumar  $+1$  hacia la derecha por ser positivo, como se muestra en la figura donde se ve que  $(+3)+(+1)$  es igual a  $+4$  en el extremo de la flecha.



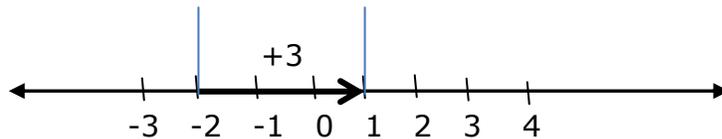
Para la adición de dos números negativos  $(-2)+(-1)$  colocas desde el  $-2$  sobre la recta hacia la izquierda por ser negativo el valor del otro sumando  $-1$  resultando que  $(-2)+(-1)$  es igual a  $-3$  como ves en la figura



En la adición de  $(+3)+(-5)$  ubicas el  $+3$  sobre la recta y como el otro sumando es negativo, te desplazas 5 unidades hacia la izquierda, como observas en la figura  $(+3)+(-5)$  es igual a  $-2$



Por último en la adición de  $(-2)+(+3)$  ubicas igual que en los casos anteriores a  $-2$  sobre la recta y te desplazas  $+3$  unidades hacia la derecha por ser positivo. Observa que  $(-2)+(+3)$  es igual a  $+1$



En general si  $a$  y  $b$  son números naturales y consideramos los enteros  $+a$ ,  $-a$ ,  $+b$  y  $-b$  tenemos

$$\begin{aligned} (+a)+(+b) &= +(a+ b) \\ (-a)+(-b) &= -(a+ b) \\ (+a)+(-b) &= +(a-b) \text{ si } a=b \text{ o } a > b \\ (-a)+(+b) &= -(a- b) \text{ si } a > b \end{aligned}$$

### Propiedades de la adición de números enteros

La agrupación de los sumandos puede hacerse en más de una forma. Dados tres números enteros cualesquiera  $a$ ,  $b$  y  $c$  se tiene:

#### Propiedad Asociativa $(a+ b)+c= a+ (b+ c)$

El orden de colocación de los sumandos no altera la suma. Dados dos números enteros cualesquiera  $a$  y  $b$  se tiene:

#### Propiedad Conmutativa $a+ b=b+ a$

**Elemento neutro.** Para todo número entero  $a$  se tiene:  $a+0 = 0+ a = a$

**Elemento Simétrico.** El opuesto de un número entero es otro número entero, con el mismo valor absoluto pero con diferente signo. Entonces para todo número entero  $a$  se tiene:  $a+ (-a)= (-a)+ a= 0$

### Sustracción de números enteros.

Sustraer o restar a un número entero **a** otro número entero **b**, significa sumar a **a** el opuesto de **b**. Esto es

$$a - b = a + (-b)$$

Se dice que **a** es el **minuendo** y **b** el **sustraendo** de la operación  $(a - b)$  se le llama **diferencia**.

### Ejemplo B

- a.  $(+3) - (-8) = (+3) + (+8) = +11$
- b.  $(-7) - (+12) = (-7) + (-12) = -19$
- c.  $(+15) - (+17) = (+15) + (-17) = -2$
- d.  $(-6) - (-22) = (-6) + (+22) = +16$

### Multiplicación de números enteros.

Considera los números naturales  $a$  y  $b$ , y los números enteros  $+a$ ,  $-a$ ,  $+b$  y  $-b$ . Para definir la multiplicación de números enteros considera cuatro posibilidades, de acuerdo con los signos de los números, así

- $(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$
- $(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$
- $(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- $(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$

Los enteros con los cuales se opera se denominan **factores** y el resultado de la operación se llama **producto**.

De la definición se deriva la regla de los signos:

- Número positivo por número positivo da número positivo**
- Número negativo por número negativo da número positivo**
- Número positivo por número negativo da número negativo**
- Número negativo por número positivo da número negativo**

$$+ \cdot + = +$$

$$- \cdot - = +$$

$$+ \cdot - = -$$

$$- \cdot + = -$$

### Ejemplo C

- a.  $(+3) \cdot (+4) = (+12)$
- b.  $(-5) \cdot (-2) = (+10)$
- c.  $(+6) \cdot (-7) = (-42)$
- d.  $(-2) \cdot (+8) = (-16)$

### Propiedades de la multiplicación de números enteros.

**Propiedad Asociativa.** El orden de agrupación de los factores no altera el producto. Dados tres números enteros cualesquiera  $a$ ,  $b$  y  $c$ , se tiene:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

**Propiedad Conmutativa.** El orden de colocación de los factores no altera el producto. Dados dos números enteros cualesquiera  $a$  y  $b$  se tiene:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

**Elemento neutro.** Al multiplicar  $(+1)$  por cualquier número entero da el mismo número. Por eso se dice que  $(+1)$  es el **elemento neutro** para la multiplicación de números enteros es decir:

Para todo número entero  $a$  se tiene  **$a \cdot (+1) = (+1) \cdot a = a$**

### Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Una expresión en la cual aparecen adiciones y sustracciones combinadas, por ejemplo  $(+3) - (-4) + (-5)$ , se denomina **suma algebraica**.

Al multiplicar un número entero por la suma algebraica de dos números enteros se obtiene el mismo resultado que al sumar los productos parciales del primer factor por cada uno de los sumandos, luego en la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición de números enteros tienes que:

Dados tres números enteros cualesquiera  $a$ ,  $b$  y  $c$  :  **$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$**

### Ejemplo D

$$(-2) \cdot [(+4) + (-5)] = (-2) \cdot (+4) + (-2) \cdot (-5) = (-8) + (+10) = +2$$

### División de números enteros.

Considera dos números enteros  $a$  y  $b$  donde  $b \neq 0$ . Se dice que  $a$  es divisible entre  $b$  si existe un número entero  $c$  tal que  **$a = b \cdot c$**

En este caso  $c$  es el **cociente exacto** de  $a$  entre  $b$  y se escribe  **$a \div b$**  o bien  $\frac{a}{b} = c$ . El número  $a$  se denomina **dividendo**, el número entero  $b$  se denomina **divisor** y si  $a$  es divisible entre  $b$  la operación es una **división exacta**

La relación entre la multiplicación y la división permite establecer una regla de los signos

para la división análoga a la multiplicación.

$$+ \div + = +$$

$$- \div - = +$$

$$+ \div - = -$$

$$- \div + = -$$

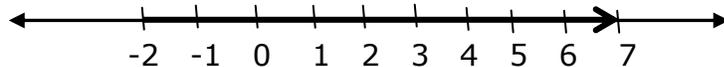
**Número positivo entre número positivo da número positivo**  
**Número negativo entre número negativo da número positivo**  
**Número positivo entre número negativo da número negativo**  
**Número negativo entre número positivo da número negativo**

### Ejemplo E

- a.  $(+15) \div (+5) = (+3)$
- b.  $(-14) \div (-7) = (+2)$
- c.  $(+18) \div (-3) = (-6)$
- d.  $(-24) \div (+8) = (-3)$

### Regresando al problema inicial

Si te encuentras en sótano 2 y tienes que subir al piso 7 tienes que



la respuesta es que tienes que subir 9 pisos.

### EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcula las siguientes sumas
  - a.  $(+1) + (-4)$
  - b.  $(-13) + (-25)$

**Respuesta:**  
**a. -3**  
**b. -38**
2. Escribe el opuesto de los siguientes números
  - a. +19
  - b. -125

**Respuesta:**  
**a. -19**  
**b. +125**
3. Efectúa las siguientes sustracciones
  - a.  $(+12) - (+9)$
  - b.  $(-38) - (-51)$

**Respuesta:**  
**a. +3**  
**b. +13**
4. Evalúa la siguiente expresión para  $a=3$ ,  $b=-4$  y  $c=-5$ 
  - a.  $(b-c)$

$a-(b-c) = (+3) - [(-4) - (-5)] =$   
 $= (+3) - (+1)$   
 $= (+2)$

- Respuesta: +2**
5. Realiza las siguientes multiplicaciones  
 a.  $(-18) \cdot 0$   
 b.  $(-28) \cdot (+2)$
- Respuesta:**  
 a. **0**  
 b. **-56**
6. Efectúa la siguiente multiplicación  
 $[(-3) \cdot (+7)] \cdot (-2)$
- $[(-3) \cdot (+7)] \cdot (-2) = (-21) \cdot (-2)$   
 $= (+42)$
- Respuesta: +42**
7. Realiza la siguiente operación aplicando la propiedad distributiva  
 $(-3) \cdot [(+4) + (-5)]$
- $(-3) \cdot [(+4) + (-5)] = (-12) + (+15)$   
 $= (+3)$
- Respuesta: +3**
8. Unos excursionistas están explorando una cueva. Descienden 27 metros, luego 19 metros y al pararse a descansar se dan cuenta que se les perdió una de las linternas. Si al subir 8 metros la encuentran ¿a qué altura estaba la linterna?
- La linterna está a una altura de  $(-27) - (+19) + (+8) = 38$  metros
- Respuesta: 38 metros**
9. Efectúa la siguiente división  
 $(-64) \div (+2)$
- Respuesta: -32**
10. Efectúa la siguiente operación  
 $[(-3) \cdot (+4)] + [(-3) \cdot (-5)]$
- $[(-3) \cdot (+4)] + [(-3) \cdot (-5)] =$   
 $= (-12) + (+15)$   
 $= (+3)$
- Respuesta: +3**

Profesor

Danesa Padilla

Versión

2015-04-25

## Glosario

Los enteros con los cuales se realiza la operación de adición se llaman **sumandos**.

El resultado de la adición se denomina **suma**.

**Propiedad asociativa** de la adición donde la forma de agrupar los sumandos no altera la suma.

**Propiedad Conmutativa** de la adición donde el orden de colocación de los sumandos no altera la suma

El cero **elemento neutro** de la suma, número que sumado a cualquier número da el mismo número.

**Elemento simétrico** u opuesto de un número es otro número entero, con el mismo valor absoluto pero con diferente signo.

**Diferencia** resultado de la operación de sustracción.

Se denominan **factores** a los números enteros que se multiplican.

**Producto.** Resultado de la multiplicación.

## Otras Referencias

<http://es.slideshare.net/Julio1960/los-nmeros-enteros-ejercicios-solucionario-2950995>

[http://www.vitutor.com/di/e/problemas\\_enteros.html](http://www.vitutor.com/di/e/problemas_enteros.html)

