Serie

Desarrollo del pensamiento matemático

Nº 9

Fracciones I

Concepto y representación

Martín Andonegui Zabala

372.7
And.
Divisibilidad
Federación Internacional Fe y Alegría, 2006.
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-648-80-8
Matemáticas, Fracciones.

“Hay que atreverse a convertir los centros
y los programas educativos en talleres de humanidad
y a otorgar títulos de verdaderas personas. La educación
no puede ser meramente un medio para ganarse la vida,
sino que tiene que ser esencialmente un medio
para ganar la vida a los demás, para provocar las ganas
de vivir con sentido y con proyecto, con metas e ideales”.

Antonio Pérez Esclarín

Equipo editorial

Beatriz Borjas

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Serie: Fracciones I, número 9
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del **Programa Internacional de Formación de Educadores Populares** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.

Diseño y diagramación: Juan Bravo
Portada e ilustraciones: Juan Bravo
Corrección de textos: Beatriz Borjas, Carlos Guédez, Margarita Arribas

Edita y distribuye: Federación Internacional Fe y Alegría. Esquina de Luneta, Edif. Centro Valores, piso 7, Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212) 5631776 / 5632048 / 5647423
Fax (58) (212) 5645096
web: www.feyalegria.org

Depósito Legal: lf 603 2006 510 1591
Caracas, abril 2006

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis
Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina de Fomento (CAF)

A modo de

introducción...

...y para desperezarnos un poco, ahí van unas cuestiones sencillas para entrar en materia y en calor. Tratemos de resolverlas antes de seguir adelante.

*¿Existen fracciones negativas? ¿Puede considerarse **1** como una fracción? ¿Y **0**? ¿Y cualquier otro número natural? ¿Puede haber fracciones cuyo numerador sea igual al denominador? ¿Y cuyo numerador sea mayor que el denominador? ¿Es una fracción la expresión* $2\frac{3}{5}$*?*

1. ¿Cuál es la diferencia entre el **40%** de una cantidad y los **dos quintos** de esa misma cantidad?

2. *¿Cuántos decimales tiene la fracción **1/2.000**?*

¿Cuál de estas dos fracciones es mayor: **7/8** ó **7/9**?

Bien, ya tenemos nuestras respuestas, que iremos contrastando con las indicaciones y ejercicios que plantearemos a lo largo de las líneas que siguen.

Y un segundo recordatorio:

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento– y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro

---

(*) **Aviso a los navegantes:** Las respuestas a los ejercicios precedidos por un número en **negrita** aparecen al final del Cuaderno. Las respuestas a los ejercicios que no se encuentran precedidos por un número no las encontrarás en este Cuaderno. Dichas respuestas son para que las construyas y las valides con tu grupo de trabajo. Para referirnos a las fracciones en su forma numérica habitual, utilizaremos los símbolos 7/8 ó bien $\frac{7}{8}$.

conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales...– que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel– ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, las fracciones, su concepto y su representación.

1. ¿De dónde vienen las fracciones?

Si preguntamos a la gente qué es una fracción, probablemente muchos nos responderán diciendo que:

Si precisamos que nos referimos a una fracción en el ámbito de la matemática, quizá la respuesta se extienda a:

y, en seguida, optarán por darnos unos ejemplos: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{3}$, y otros similares.

La pregunta de por qué se estudian las fracciones en la escuela puede ser aún más comprometedora, incluso para algunos maestros, y probablemente lleve a respuestas que no pasen de:

Indudablemente, poder dar una respuesta más satisfactoria requiere indagar acerca de qué son las fracciones, cuándo y por qué aparecen en el acervo cultural de la humanidad, cuál es su importancia y para qué pueden servirnos hoy en día. Esta indagatoria nos lleva a la historia de la cultura humana.

Los conocimientos "matemáticos" iniciales en el campo numérico hallaron su forma de expresarse mediante el uso de los números naturales, números que facilitaban el conteo de cantidades y la medida de magnitudes, y con los que se podía "operar" para resolver situaciones de la vida diaria (agregar, reunir, quitar, calcular lo que falta, sumar iteradamente, obtener el valor de varias veces algo, repartir, averiguar cuántas veces una cantidad contiene o está contenida en otra...) cuyos modelos son, precisamente, las cuatro operaciones aritméticas (ver Cuadernos nº 3 a nº 7).

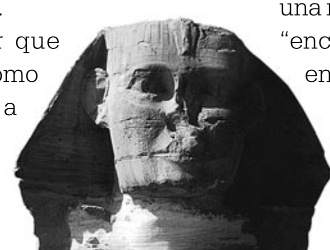
Pero entre estas mismas situaciones cotidianas existen –y existieron siempre– otras, tales como los repartos de herencias, bienes y tierras, o el pago de tributos, diezmos e impuestos, y otras más, en las que, además de las cantidades enteras implicadas, aparecía un nuevo elemento a considerar: la *relación entre la parte* (la porción de tierra recibida, el monto del tributo o impuesto pagado...) *y el todo* (la superficie total de la tierra a repartir, el total de los bienes poseídos...).

Como la parte y el todo venían denotados por números naturales, se requería una nueva expresión –un nuevo tipo de número...– para indicar esa relación entre dos números naturales. Este es el significado cultural primigenio de la fracción: la expresión numérica de la relación entre una parte y el todo. Cualquier representación que se haga de la fracción debe expresar esa relación entre ambos números naturales (como lo hace la representación habitual, a/b, donde a se refiere a la parte y b al todo).

Este requerimiento cultural –"números que representan fracciones"– aparece plasmado en símbolos abstractos ya desde las culturas babilónica y egipcia; es decir, desde unos 3.000 años a.C. en adelante (Kline, 1992). Los babilonios utilizaron fracciones cuyos "denominadores" eran potencias de 60 [Recuérdese que 60 era la base de su sistema de numeración: ver Cuaderno nº 2] y con ellas representaban las fracciones de la forma 1/n. Así, por ejemplo, la inscripción *igi 2 gál-bi 30'* se traduce en términos actuales como: 1/2 = 30/60. Análogamente, *igi 8 gál-bi 7 30'* se traduce como: $1/8 = 7/60 + 30/60^2$, lo cual es cierto, ya que $7/60 + 30/60^2 = 7/60 + 30/3600 = 7/60 + 1/120 = 14/120 + 1/120 = 15/120 = 1/8$. Como ejercicio, le sugerimos que halle la "descomposición" de 1/27 a partir de la inscripción '*igi 27 gál-bi 2 13 20*' y verifique su exactitud...

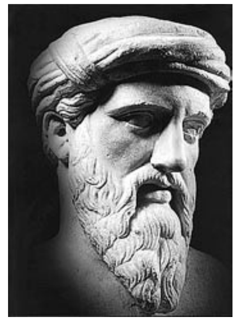
Por su parte, los egipcios también utilizaron símbolos acordes con su sistema de numeración para denotar las fracciones. Así, las fracciones del tipo $1/n$ (salvo 1/2 y 1/4) se representaban con la notación correspondiente del número n y un óvalo o punto superpuesto al número. Las demás fracciones (salvo 2/3, que tenía también su símbolo particular de representación) se reducían a una "suma" de las fracciones unitarias. Por ejemplo y en nuestra notación actual, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, expresión a la que llegaban de la siguiente forma (tomando en cuenta que 3 veces 1/15 es 1/5, y que 5 veces 1/15 es 1/3): $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = (\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15}) + (\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15}) = \frac{1}{15} + (\frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15}) = \frac{1}{15} + \frac{1}{3}$. Del mismo modo, $\frac{2}{7} = \frac{1}{28} + \frac{1}{4}$ (obténgalo al modo egipcio...).

Cabe destacar que tanto babilonios como egipcios dieron a los conocimientos



"matemáticos" –y por consiguiente, a las fracciones– un uso eminentemente práctico, de aplicación a la vida diaria, al comercio, a la arquitectura, a la astronomía, etc. Pero no hubo entre ellos una preocupación teórica acerca del concepto de número, como sí la hubo en la cultura griega. Vamos a asomarnos a ella.

Los pitagóricos (s. VI a.C.) consideraban como números solamente a los números naturales.

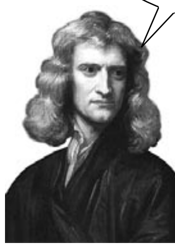


Pensaban, además, que la naturaleza se reducía a estos números, en el sentido de que todo objeto podía expresarse con un número (la medida de su magnitud), y las relaciones entre objetos (entre sus magnitudes), siempre como una relación entre números naturales.

Para lograr esta relación suponían que siempre funcionaría el principio de conmensurabilidad, es decir, que dadas dos magnitudes (por ejemplo, dos segmentos), siempre era posible encontrar una magnitud (un segmento) menor que "encajara" un número exacto de veces en cada una de las dos magnitudes (los dos segmentos) relacionadas. Es decir, dados los segmentos ***a*** y ***b***, podía suceder que ni ***a*** encajara un número exacto de veces en ***b***, ni viceversa. Pero entonces, siempre era posible encontrar un segmento menor ***c***, tal que estuviera contenido "***n*** veces" en ***a*** y "***m*** veces" en ***b***, con lo que la relación entre ***a*** y ***b*** podía denotarse mediante la expresión ***n/m***. Por ejemplo, si la longitud de un segmento ***a*** era "una vez y media" la de un segmento ***b***, ***c*** sería la mitad del segmento ***b***, con lo cual ***b*** contendría 2 "minisegmentos" ***c***, y ***a***, 3 "minisegmentos" c; así, la relación entre ***a*** y ***b*** vendría dada por la relación 3/2, es decir, "como 3 es a 2".

Pero esta relación y su expresión como aparente "cociente" de dos números naturales no era considerada como un nuevo número –una fracción, la expresión de una relación parte/todo–, sino como una razón entre ambas magnitudes, es decir, como la expresión numérica de la relación entre ellas, sin que ambas estuvieran necesariamente ligadas como un par "parte/todo" (de hecho, en el ejemplo anterior, los dos segmentos son independientes). En la Aritmética de los griegos no existieron, pues, las fracciones como números al estilo de los babilonios y egipcios.

La idea de que las fracciones eran realmente números se consolidó a partir del Renacimiento. "En 1585, Simon Stevin da la idea de una solución que imperará durante tres siglos, al proponer una nueva definición: número es aquello mediante lo que se explica la magnitud de alguna cosa" (Ferreirós, 1998, p. 8). Definición que Newton clarifica en 1707, en su Arithmetica Universalis:



(Citado en Ferreirós, 1998, p. 8).

De esta manera, una fracción como 2/3 –que inicialmente sólo representaba la relación entre la magnitud de la parte y la del todo del que procedía– se interpreta también como un número que mide el "número de veces que la parte está contenida en el todo, considerado éste como la unidad". Así, las fracciones, como los números naturales y hasta los propios números irracionales (las raíces cuadradas, por ejemplo), se convierten en *números-medida* de magnitudes comparadas con la unidad. Por consiguiente, todos ellos pueden representarse como puntos de la recta numérica.

2. El concepto de fracción y sus diversas formas de representación

Después de esta breve introducción histórica podemos plantear el concepto de fracción como la expresión de la relación entre una parte y el todo. Para definirlo, necesitamos tres elementos:

1. Un todo, considerado como unidad
2. Una partición de ese todo en ***b*** partes congruentes (***b*** > 0)
3. La referencia a un número ***a*** de esas partes.

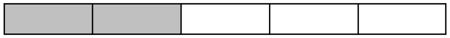
En Matemática, los conceptos requieren necesariamente algún modo de representación que ha de ser pertinente, es decir, que permita mostrar adecuadamente y con cierta simplicidad el concepto y sus propiedades, así como las posibles operaciones y transformaciones a las que puede someterse posteriormente. En este sentido, algunos conceptos son polimorfos, es decir, pueden adoptar diversas formas de representación. Tal es el caso del concepto de fracción.

En efecto, existen varios campos o *sistemas de representación* para el concepto de fracción. Vamos a presentarlos –tomando como referencia un todo fraccionado en 5 partes congruentes, de las que consideramos 2– y, posteriormente, a describirlos:

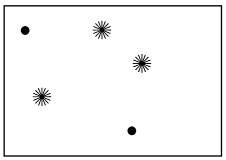
1. Verbal: "los dos quintos de…"

2. Numérico: 2/5

3. Gráfico continuo (número de cuadrículas rayadas con respecto al número total de cuadrículas congruentes):

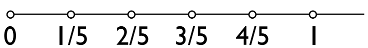


4. Gráfico discreto (número de • con respecto al número total de objetos):



5. Decimal: 0,40 (40 de las 100 centésimas que posee la unidad)

6. Punto sobre la recta numérica:



7. Porcentual: 40% (40 de cada 100 partes)

Los cuatro primeros sistemas responden más directamente a la relación parte/todo, relación que, como sabemos y hemos visto en las referencias históricas anteriores:

1. Puede expresarse verbalmente: la mitad, los dos tercios, etc. (sistema verbal).

2. Habitualmente necesita explicitar los dos números enteros que reflejen la magnitud de la relación entre la parte y el todo (sistema numérico).

3. Puede referirse a magnitudes continuas tales como la longitud de un segmento, el área de una superficie, el volumen de un sólido... (sistema gráfico continuo).

4. O también a magnitudes discretas, como el número de objetos de un conjunto, la cantidad de dinero... (sistema gráfico discreto).

Los sistemas de representación **5** y **6** (decimal y como punto sobre la recta numérica) responden más bien a la idea posterior y complementaria de fracción como medida de magnitudes comparadas con la unidad, de la que también se habló anteriormente. Finalmente, todo porcentaje (sistema **7**) puede considerarse en principio como una fracción de denominador **100** –siempre que la cantidad porcentual sea entera; por ejemplo, 37%–. [Sin embargo, el uso que habitualmente se hace de los porcentajes y de sus aplicaciones los ubica también en el terreno de las razones y proporciones (reglas de tres...), como veremos en el Cuaderno 11].

Observe la representación de una fracción en una calculadora científica... y compárela con las anteriores. ¿Una nueva forma de representación?

En lo que sigue analizaremos algunas de las implicaciones inmediatas que se derivan del concepto de fracción; luego nos detendremos en el sistema numérico de representación ***a/b***; y posteriormente, trataremos de ver qué sentido tiene el hecho de disponer de tantos sistemas de representación y qué podemos hacer con todos ellos.

3. Algunas consecuencias inmediatas derivadas del concepto de fracción

Anteriormente mencionamos tres elementos necesarios para integrar el concepto de fracción. Vamos a detenernos en cada uno de ellos. Después plantearemos algunos ejercicios que pueden ser resueltos tomando en cuenta directamente el concepto de fracción.

3.1. El todo como unidad

Cada fracción en particular hace referencia a un todo que se toma como unidad, y que puede variar de una situación a otra. Por eso, el todo es lo primero que hay que precisar cuando de fracciones se trata. Veamos estas situaciones prácticas:

Alfredo y Rafael tienen dinero en el bolsillo. Alfredo gasta la quinta parte del suyo y Rafael, la mitad de lo que tiene. ¿Quién de los dos ha gastado más dinero?

Evidentemente, no podemos precisar la respuesta porque desconocemos las cantidades de dinero que posee cada persona (los todos). Por ejemplo, Alfredo podía haber tenido **100** pesos (gastaría **20**) y Rafael **30** (gastaría **15**, menos que Alfredo). Pero también podría ocurrir lo contrario o, incluso, que ambos gastaran lo mismo (por ejemplo, si Alfredo tuviera **50** pesos y Rafael **20**: ambos gastarían **10** pesos). En principio, **1/2** es mayor que **1/5**, pero sólo si ambas fracciones se refieren al mismo todo.

Tres medios loros son loro y medio; pero, ¿cuántos loros y medio son?

Está claro: **1** (**1 loro y medio**). Esta especie de acertijo hace alusión justamente a la posibilidad de manejar distintas unidades como referencia del todo: **medio** loro (hay **3**), **1** loro (hay **uno y medio**), **loro y medio** (hay **uno**).

En una fiesta se reparte equitativamente un pastel entre 8 niños. Sara se lleva su parte a su casa y la comparte equitativamente con sus dos hermanos. a) ¿Qué fracción del pastel trajo Sara a su casa? b) ¿Qué parte de ese pedazo de pastel se comerá? c) ¿Qué parte del pastel original se comerá?

a) Un octavo. El todo es el pastel original.
b) Un tercio. El todo es el pedazo que va a compartir con sus dos hermanos.
c) 1/24. El todo es el pastel original.

¿Cuántas docenas de huevos son 3 huevos? ¿Y cuántas medias docenas? ¿Y cuántos pares de huevos son 7 huevos?

Si el todo es la docena de huevos, 3 huevos son la cuarta parte (1/4) de una docena de huevos. Y si el todo es la media docena de huevos, 3 huevos son la mitad (1/2) de una media docena de huevos. Por su parte, 7 huevos son 3 pares y medio (3 1/2) de huevos.

Volveremos sobre estas precisiones más adelante.

3.2. La partición de la unidad

El segundo elemento necesario para la definición de la fracción es la partición del todo en ***b*** partes congruentes (***b*** > 0).

*¿Por qué el número de partes ha de ser mayor que **0**?*

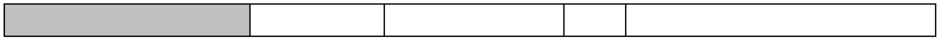
Porque no tiene sentido dividir algo en **0** partes, no se puede. Por consiguiente, no puede haber fracciones de la forma ***a***/**0**.

¿Se puede dividir un todo en una parte?

Sí. Dividir un todo en una parte significa que la parte es única y coincide con el todo. Es decir, el todo se deja intacto. Por consiguiente, sí puede haber fracciones de la forma a/1.

Por otro lado, conviene insistir en que las partes han de ser congruentes. Esto significa que si las magnitudes son continuas (longitudes, áreas, volúmenes, tiempos...), las partes han de ser del mismo tamaño. Y que si son discretas, han de contar con el mismo número de elementos.

¿Qué fracción está representada por la cuadrícula rayada de la figura?



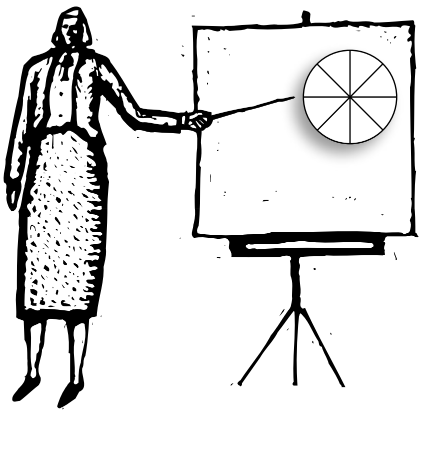
Pues, evidentemente, no es **1/5**. Habrá que hacer otros cálculos para llegar a la respuesta.

*Al repartir **36** juegos educativos entre **3** aulas de preescolar, se dejan, respectivamente, **11**, **11** y **14** juegos. ¿Puede decirse que a cada aula le corresponde **1/3** del total de juegos?*

No, ya que las tres partes no son congruentes. De haberse dejado **12** juegos en cada aula, sí podría decirse que a cada una le correspondió **1/3** del total de los juegos.

3.3. Considerar algunas de esas partes

Veamos algunas de las situaciones que se pueden presentar (de paso iremos dando respuesta a algunas de las preguntas planteadas al inicio del Cuaderno):



*Tenemos un todo dividido en **b** partes. ¿Puedo no considerar ninguna de esas partes, es decir, referirme a **0** partes?*

Sí. Sería el caso, por ejemplo, de yo ser tomado en cuenta para el reparto de un pastel y luego renunciar a la parte que me corresponde: me estaría llevando **0** partes del pastel (**0/*b***), es decir, nada, **0**. Por consiguiente, ***0** es una fracción*, que responde a la forma **0/*b***, cualquiera que sea el valor de ***b*** > **0**.

*¿Un número natural **a** puede ser considerado como una fracción?*

Acabamos de ver que **0** es una fracción. Afirmar que cualquier otro número natural, por ejemplo el **3**, también puede ser considerado como fracción exige establecer qué sentido tiene **3** como fracción: significa que el todo ha sido dividido en una parte –es decir, se deja intacto– y que ahora considero **3** de esas partes, es decir, **3** todos, **3** unidades. Así, la representación numérica más inmediata de **3** como fracción sería **3/1**. Por consiguiente, *cualquier número natural **a** puede ser considerado como una fracción*.

¿Existen fracciones negativas?

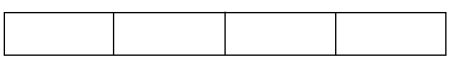
Evidentemente, no. El número de partes en que se divide el todo viene dado por un número natural mayor que **0**. Y el número de partes que se toman o consideran viene dado también por cualquier número natural, incluido el **0**. Nunca aparecen números negativos, y tampoco es posible una relación negativa entre la parte y el todo. Por consiguiente, *no podemos hablar de fracciones negativas*.

*¿Existen fracciones de la forma **a/b** en las que **a** pueda ser igual o mayor que **b**?*

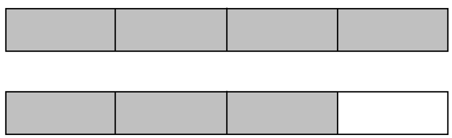
La respuesta es afirmativa en ambos casos. Si ***a*** = ***b***, estamos hablando del número **1**, ya que la situación indica que el todo se divide en ***b*** partes, de las cuales consideramos todas; es decir, estamos tomando el todo, la unidad. Si ***a*** > ***b***, simplemente estamos indicando que consideramos un número ***a*** de partes que es mayor que el número ***b*** de partes en que se dividió el todo; lógicamente, esta fracción excede el valor del todo, de la unidad.

La última situación nos lleva a hablar de dos clases de fracciones: *propias*, aquellas de la forma numérica ***a/b*** en las que **a** < **b**; e *impropias*, aquellas de la forma ***a/b*** en las que ***a*** > ***b***. Vamos a referirnos con más detalle a estas últimas.

¿Cuál es el significado de una fracción como **7/4**? De acuerdo con el proceso que lleva a su definición, hay un todo que inicialmente se ha dividido en **4** partes congruentes; posteriormente consideramos **7** de esas partes, es decir, tomamos **7** partes del tamaño **1/4** del todo. Gráficamente, tenemos un todo dividido en **4** cuadrículas congruentes:

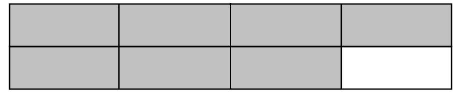


La fracción **7/4** viene dada por la parte rayada siguiente:



Evidentemente, **7/4** equivale a **4/4** más **3/4**, es decir y como se observa en la gráfica, a **1** y **3/4**: una unidad completa y **3/4** de otra. Cuando la fracción impropia se expresa como un entero y una fracción propia, recibe el nombre de fracción *mixta*, es decir, "mezcla" de un entero y de una fracción propia, y se representa colocando juntos ambos elementos: $1\frac{3}{4}$.

Conviene diferenciar la situación anterior de esta otra:



A pesar de que ahora también consideramos **7** cuadrículas del mismo tamaño que en el caso anterior, la situación nos está hablando de un todo dividido en **8** partes congruentes de las que estamos tomando **7**: esta representación gráfica corresponde a la fracción numérica **7/8**. De nuevo hay que resaltar la importancia de definir el todo en cada caso.

Una situación en la que pueden presentarse fracciones impropias es la correspondiente al reparto equitativo de objetos (más objetos que receptores), siempre que estos objetos se "dejen" fraccionar. Por ejemplo, si se reparten **8** balones entre **5** personas, no podemos decir que a cada persona le toquen **8/5** de balón, ya que estos objetos son indivisibles; la situación se resuelve de acuerdo al modelo de una división entera: a cada persona le corresponde **1** balón (cociente) y quedan **3** (resto) sin repartir.

Pero si se trata de, por ejemplo, **8** panes, sí tiene sentido decir que a cada persona le corresponden **8/5** de pan. Esta expresión, resultado del reparto, significa que cada pan se ha dividido en **5** partes congruentes, **5 quintos**, (obsérvese que el todo es un pan) y que a cada persona le corresponden **8** de esas quintas partes, **8** "trozos" del tamaño de

1/5 de pan cada uno. En otras palabras, como si fuera **1** pan entero y **3/5** de otro pan.

Por otro lado, el proceso de pasar de una expresión de fracción impropia a una de fracción mixta es muy sencillo: se efectúa la división del numerador entre el denominador; el cociente da el entero de la fracción mixta; y la fracción propia adicional tiene como numerador el resto de la división y como denominador, el divisor de la misma división.

Así, por ejemplo, para **11/5**:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 5 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \qquad \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$$

El proceso inverso se analizará al hablar de la suma de fracciones, aunque puede ser fácilmente deducido por los lectores.

Es de hacer notar que las fracciones mixtas suelen utilizarse con cierta frecuencia en el habla de la vida diaria, como por ejemplo, cuando alguien solicita **2 metros y medio** de una tela o un refresco que contiene **litro y medio**, o cuando uno habla de una película de cine que dura **hora y tres cuartos** o de un pitcher que ha estado lanzando durante **7 entradas y dos tercios** en un juego de béisbol...

3. *Escriba las fracciones mixtas correspondientes a las fracciones impropias:* $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{10}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{100}{9}$, $\frac{76}{12}$

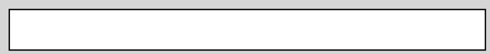
3.4. Ejercicios de aplicación directa del concepto de fracción

Y ahora, algunas situaciones que pueden ser resueltas directamente a partir de las consideraciones previas acerca del concepto de fracción:

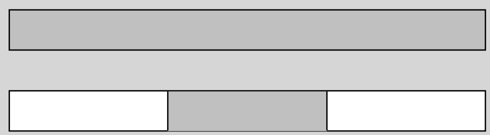
Rosario y Maribel participan en dos fiestas diferentes, en las cuales se reparten equitativamente sendos pasteles del mismo tamaño. Si el trozo recibido por Rosario es menor que el recibido por Maribel, ¿en cuál de las dos fiestas hubo más invitados?

Evidentemente, hubo más invitados en la fiesta en la que participó Rosario, porque si la unidad es la misma, cuanto mayor es el número de partes, menor es el tamaño de cada una, y viceversa.

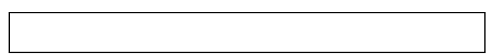
4. Si la unidad se representa gráficamente mediante este rectángulo:



indique qué fracción está representada por la parte rayada:

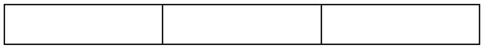


Si la gráfica

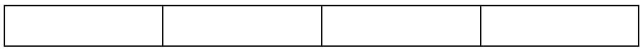


representa los 3/4 de cierta unidad, construya la unidad correspondiente.

Primero, debemos construir las **3** cuadrículas de tamaño **1/4** que llenan la gráfica anterior:

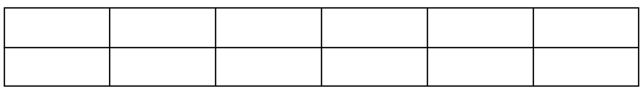


Y a partir de aquí, completar la unidad (los **4/4**) con **4** de esas cuadrículas:



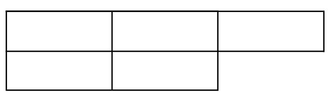
*El mismo ejercicio, si la gráfica representa **1/4** de la unidad:*

La gráfica de la unidad puede ser ésta (pueden darse otras formas de agrupación de las12 cuadrículas congruentes):



De nuevo, el mismo ejercicio, si la gráfica representa los 3/5 de la unidad:

Ahora la unidad se compondrá de **5** de las cuadrículas anteriores; por ejemplo:



Grafique la fracción 3/2, si la unidad es:

❑ ❑ ❑ ❑ ❑ ❑

Como la mitad de la unidad viene expresada por **3** cuadritos, y como **3/2** equivale a **una unidad y media**, tendremos la gráfica:

❑ ❑ ❑ ❑ ❑ ❑ ❑ ❑ ❑

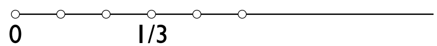
*Grafique la fracción **6/5**, si la unidad es:*

❍ ❍ ❍ ❍ ❍
❍ ❍ ❍ ❍ ❍

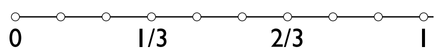
La fracción **6/5** equivale a la unidad más **1/5** de la misma (❍ ❍), con lo que tendremos:

❍ ❍ ❍ ❍ ❍ ❍
❍ ❍ ❍ ❍ ❍ ❍

Represente la unidad sobre la recta numérica, a partir de la ubicación de la fracción dada:

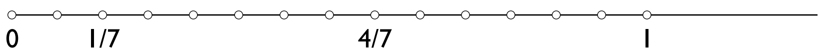


Si el punto indicado representa a la fracción **1/3**, la unidad comprenderá **9** de los pequeños segmentos marcados, es decir:

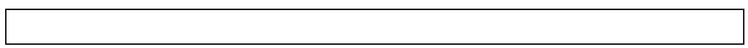


El mismo ejercicio para la siguiente situación:

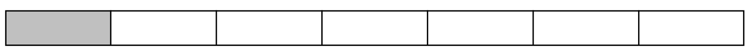
Se observa que la fracción **1/7** abarca dos de los pequeños segmentos marcados, de donde se deduce que la unidad comprenderá **14** de tales segmentos:



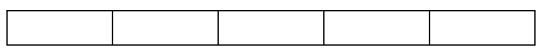
Exprese ahora la unidad si la gráfica representa sus 7/5 partes:



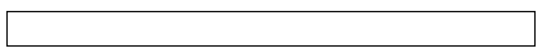
Primero debemos obtener la cuadrícula equivalente a **1/5** de la unidad. Para ello, dividimos el rectángulo anterior en **7** partes congruentes y rayamos una de ellas:



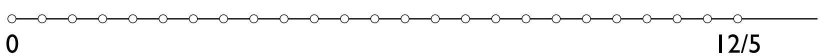
Ahora construimos la unidad, equivalente a **5** de estas cuadrículas:



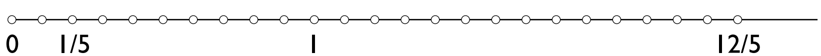
La gráfica final de la unidad es:



Represente la unidad sobre la recta numérica, a partir de la ubicación de la fracción dada:



La observación nos lleva a comprobar que cada fracción 1/5 abarca dos de los segmentos pequeños marcados sobre la recta numérica, por lo que la unidad comprenderá 10 de tales segmentos:



Exprese la unidad si la gráfica representa la fracción $\frac{14}{3}$:

Obsérvese que hay justamente **14** elementos de la forma ■ en la figura anterior, por lo que ese elemento equivale a **1/3** de la unidad considerada. Una representación gráfica de la unidad puede ser: . Ahora puede verificarse en la gráfica inicial cómo la fracción $\frac{14}{3}$ equivale a la mixta $4\frac{2}{3}$.

4. La representación numérica de la fracción: a/b

Como vimos anteriormente, el sistema numérico de representación de una fracción adopta la forma ***a/b***. Aunque ya hemos aludido a ella, incluso en algunos ejercicios previos, vamos a detenernos algo más, por cuanto es la de uso más habitual y conviene establecer algunas puntualizaciones al respecto.

4.1. Antes de seguir, ¿cuántos significados puede tener una expresión del tipo a/b?

Esta llamada de atención es necesaria y oportuna, como veremos. Con lo expresado hasta ahora, podemos reconocer dos significados: el de fracción y el de razón. Pero también hay otros. Vamos a examinarlos con cuidado para que no aceptemos como fracción cualquier expresión numérica de la forma ***a/b***.

1. a/b como fracción: Expresa la relación entre los valores de una parte y del todo del que proviene la parte. Por ejemplo, si en un grupo hay **20** hombres y **30** mujeres, la relación del número de hombres con respecto al de todo el grupo es de **2/5**, donde el todo se ha tomado como **5** decenas de personas, y la parte, como **2** decenas de hombres.

2. a/b como razón: Expresa la relación entre los valores de dos magnitudes cualesquiera, de la misma o diferente naturaleza. Por ejemplo, la relación del número de hombres con respecto al de mujeres (en el caso anterior) es **2/3**, es decir, el número de hombres es al número de mujeres como **2** es a **3**; o también, por cada **dos** hombres hay **3** mujeres. Aquí **2/3** no representa una fracción (no hay una relación parte/todo), sino una razón. O también, en un movimiento uniforme, la velocidad (en km/h) de un vehículo que ha recorrido **350** km en **5** horas viene representada por la razón **350/5** [Como veremos en el Cuaderno 11, en un movimiento uniforme las distancias recorridas son proporcionales a los tiempos empleados; y desde esta perspectiva, la velocidad representa la razón de la proporcionalidad entre ambas magnitudes].

3. a/b como división de dos cantidades enteras: Expresa justamente eso, una división indicada (por ejemplo, un reparto a efectuar), y la necesidad de calcular el cociente (resultado del reparto). Por ejemplo, **180/15** puede indicar la división de **180** caramelos entre **15** niños, con el fin de averiguar el número de caramelos que corresponderá a cada niño. O bien, simplemente, la forma de proceder para establecer cuántas veces **15** está contenido en **180**.

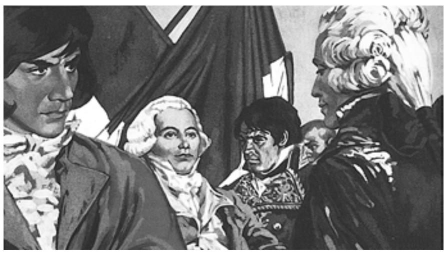
4. a/b como número racional: Es un elemento de un conjunto numérico abstracto, denotado **Q**, que está formado por clases de pares ordenados equivalentes de números enteros (positivos y negativos) cuyo segundo elemento es ≠ **0**. Por ejemplo, el número racional **2/5** es un representante de la clase de los infinitos números racionales equivalentes a **2/5**: {**4/10**, **12/30**, **(-2)/(-5)**, **(-6)/(-15)**, **14/35**, …}. Un número racional no hace referencia a la medida de magnitudes que se relacionan como una parte con un todo (caso de las fracciones) o como dos magnitudes entre sí (caso de las razones). Es algo abstracto, sin referentes, propio de la matemática pura. Y puede ser negativo, situación que no se da ni en las fracciones ni en las razones.

A esta variedad de significados del símbolo ***a/b*** se le denomina polisemia de ***a/b***. La moraleja de este cuento está clara: no todo lo que se representa en la forma ***a/b*** es una fracción; por consiguiente, no hay que confundirlas con las razones ni con los cocientes de números naturales ni con los números racionales. Conceptualmente, estos cuatro "objetos" matemáticos son diferentes, a pesar de que pueden presentarse bajo la misma forma. No es, por tanto, la forma lo que distingue a estos conceptos, sino el análisis de la situación en que aparecen en cada caso.

Pero hay algo más. Las fracciones tampoco están obligadas a presentarse siempre en la forma ***a/b***. Ya vimos que hay otros seis posibles sistemas de representación. He aquí la riqueza y la complejidad de las fracciones como objeto de estudio.

Una observación adicional respecto a la *diferenciación conceptual entre fracciones y números racionales*. El breve recorrido histórico que trazamos al comienzo nos marcaba dos etapas diferenciadas: la aparición y aceptación de las fracciones como elementos culturales necesarios para representar y manejar situaciones de la vida diaria, y el reconocimiento posterior de estas expresiones de relaciones parte-todo como números-medida a partir del Renacimiento.

En el siglo XIX la matemática experimentó numerosos y profundos cambios; se buscó, entre otras cosas, darles a los números un fundamento abstracto, que no dependiera de referentes externos. Y en este sentido, se requerían números de la forma ***a/b***, pero sin la referencia a magnitudes medibles ni a la relación entre las magnitudes de la parte y del todo de algo. De ahí el recurso a la matemática pura, a la teoría de conjuntos, a seguir un desarrollo abstracto y desde adentro (Ferreirós, 1998). Así se construyeron los números racionales que, como se ve, tienen una naturaleza distinta a la de las fracciones.



Digamos, finalmente, que los "números oficiales" que se manejan habitualmente en esta matemática pura son los naturales (el conjunto **N**), los enteros (positivos y negativos, el conjunto **Z**), los racionales (el conjunto **Q**), los reales (el conjunto **R**), los complejos (el conjunto **C**) y los números transfinitos. Números definidos, todos ellos, no de una manera intuitiva o descriptiva, sino axiomática, matemáticamente formal. Su estudio constituye una rama de la matemática conocida como los Sistemas Numéricos (hay muchos libros dedicados a ellos, por si alguien se siente picado por la curiosidad...).

En este contexto formal, las fracciones no aparecen como uno de los sistemas numéricos en el sentido contemporáneo –axiomático– de la matemática. Pero por su expresión numérica y la manera de hacer operaciones con ellas, sí pueden considerarse no sólo como el antecedente histórico, sino también como *la fuente fenomenológica de los números racionales*, es decir, como objetos matemáticos que –sin estar definidos como números racionales– se presentan y comportan como tales (Freudenthal, 1983).

Por todo ello, su estudio –después de los números naturales– resulta muy pertinente y práctico, ya que sigue el patrón histórico de desarrollo de los números en culturas muy destacadas en las que, como hemos visto, en seguida las fracciones compartieron presencia y uso con los números naturales. Y además, prepara el estudio posterior de los números racionales.

4.2. Otra vez los numeradores y denominadores

Como sabemos, ***a/b*** es la forma en la que se presenta el uso de los términos *numerador* y *denominador* de una fracción. Habitualmente suele decirse que el denominador representa el número de partes congruentes en que se dividió la unidad, y que el numerador denota el número de estas partes que se toman en consideración en la fracción. Y suele tenerse la impresión de que ambos términos se estrenan en la matemática cuando se llega al tema de las fracciones. Pero ya sabemos que no es así. Para darle un significado más profundo a ambos términos, vamos a recoger las ideas que ya expusimos en el Cuaderno nº 3.

Allí señalábamos que "la aparición de los términos numerador y denominador en el discurso matemático no debe reservarse al momento en que se entra en el terreno de las fracciones, sino justamente desde que se mencionan cantidades referidas a alguna entidad particular".

Porque, "¿qué significa *numerador*? Lo que numera, lo que sirve para numerar; en particular, cada término o expresión que se utiliza para numerar. Y *denominador*, lo que denomina o sirve para denominar; y en particular, cada término o expresión que se utiliza para denominar". Y puntualizábamos que en el campo de la gramática, estas expresiones correspondían a los adjetivos numerales y a los sustantivos, respectivamente.

"De esta forma, cada vez que en nuestro hablar expresamos un adjetivo numeral seguido de un sustantivo, estamos utilizando un binomio numerador-denominador. Así, en la locución 'tres sillas', tres es el numerador y sillas es el denominador. Análogamente al hablar de cinco centenas".

En este contexto, ¿qué significado tienen el numerador y el denominador de una fracción como 3/5? En su expresión verbal, estamos hablando de "tres quintos". Claramente vemos que "tres" –adjetivo numeral– responde a la idea de numerador que apuntábamos antes; hasta ahora no hay ninguna novedad. Lo interesante está en la interpretación del denominador: "quinto" debe verse como un sustantivo, como silla en "tres sillas". *"Quinto" es el sustantivo que designa "la quinta parte" de cualquier todo*. Inicialmente puede ser manejado de esa forma, como un sustantivo. Igual interpretación cabe con los números que aparecen en el denominador de otras fracciones.

Es muy importante dotar de este sentido a las fracciones, empezando con las unitarias, es decir, con las que tienen la unidad como numerador. Una fracción como 1/5 puede verse como una unidad, como un objeto-unidad (similar a "una silla"), que permite acciones de conteo (un quinto, dos quintos, tres quintos, etc.) y, posteriormente, de suma y de resta (dos quintos más seis quintos son ocho quintos). Así, 1/5 significa que nos estamos refiriendo a la unidad del objeto "quinta parte" de algo (y aquí sintonizamos de nuevo con babilonios y egipcios en cuanto a la singularidad e importancia de las fracciones unitarias...).

Por su parte, las fracciones no unitarias pueden considerarse como expresiones que equivalen a "tantas veces la unidad fraccionaria". Por ejemplo, 3/5, leído como "tres quintos", indica que estamos considerando "tres veces un quinto", de una forma similar a como la expresión "tres sillas" se puede entender como "tres veces una silla".

Nuestro lenguaje popular puede servirnos de base para entender y manejar las fracciones de esta forma. En efecto, en este tipo de lenguaje solemos denominar determinados objetos de la vida diaria con expresiones fraccionarias. Así, en Venezuela se designa como "un cuartico" al envase de leche o de jugo que contiene 1/4 de litro; como "un tercio", al que contiene 1/3 de litro de cerveza; como "un quinto", al que contiene, aproximadamente, 1/5 de lo mismo; como "un décimo", al billete de lotería que equivale a 1/10 de la serie... (Y así, hay éstos y otros ejemplos en cada uno de nuestros países). Y todo el mundo entiende qué significa tener "cinco cuarticos" de leche en la nevera o tomarse "tres tercios" de cerveza en una fiesta o comprar dos décimos para el próximo sorteo de lotería... (y no hay problema con las fracciones impropias).

Nuestra conclusión parcial es que ésta es una forma en que también deberíamos manejar las fracciones en el aula de clase, con el sentido y la familiaridad con que lo hacemos en la vida diaria. Una vez más, el lenguaje nos sirve de vehículo entre el concepto y su representación simbólica, a la que puede dotar de sentido pleno...

¿Cuál de estas dos fracciones es mayor: **7/8** ó **7/9**?

Un error frecuente consiste en leer cada fracción como dos números y derivar de ahí que, en nuestro ejemplo, **7/9** es mayor que **7/8**, ya que **7** y **9** son más que **7** y **8**. Pero si leemos **7/8** como "**7** veces **1/8**" y **7/9** como "**7** veces **1/9**", nos damos cuenta de que **7/8** es mayor que **7/9**, ya que **1/9** significa una porción entre las nueve en que se dividió un todo y **1/8**, una entre las ocho en que se dividió el mismo todo: nos toca más en **1/8** que en **1/9**. Como se ve, no es preciso hacer operaciones aritméticas para responder a este tipo de preguntas (aunque también se pueden efectuar para llegar a la misma respuesta...).

5. ¿Para qué queremos tantos sistemas de representación de las fracciones?

He ahí una buena pregunta. Porque habitualmente hemos considerado a la matemática como un área de caminos únicos, de representaciones únicas, de procedimientos únicos, de maneras únicas de resolver un problema... Y ahora resulta que disponemos de hasta siete sistemas de representación del concepto de fracción.

5.1. ¡Qué bueno! Nos topamos con la diversidad...

Ya lo dijimos en el Cuaderno nº 1: buscamos construir una matemática que asuma y genere diversidad. En particular, la "diversidad en los sistemas de representación de un concepto es algo tan importante que los autores estiman que una persona llega a dominar un concepto matemático sólo cuando es capaz de:

- identificarlo en cualquiera de sus posibles sistemas de representación;
- representarlo en todos ellos;
- saber pasarlo –"traducirlo"– de cada sistema a todos los demás" (Cuaderno nº 1).

Por consiguiente, en el tema de las fracciones, debemos llegar a alcanzar estas tres competencias:

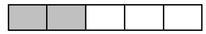
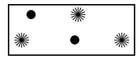
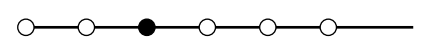
- identificar una fracción en cualquiera de sus siete posibles sistemas de representación;
- representarla en todos ellos;
- saber pasarla –"traducirla"– de cada sistema a todos los demás; lo que incluye, cuando sea posible, buscar "traducciones" dentro de un mismo sistema.

Como vemos, tenemos una gran tarea por delante. Tarea que debemos realizar, nosotros y nuestros alumnos, progresivamente. Porque no todos los sistemas presentan las mismas exigencias cognitivas. Por ejemplo, en nuestro medio, la competencia de representar una fracción sobre la recta numérica suele alcanzarse más tarde, en comparación con otras representaciones. Pero eso no significa que se tenga que renunciar a ese sistema de representación, sino que su inclusión en las competencias a alcanzar será posterior.

Las dos primeras competencias (identificar y representar fracciones en cada uno de los sistemas de representación) nos imponen como tarea primordial conocer y familiarizarnos con tales sistemas, utilizarlos con frecuencia y espontáneamente. La tercera competencia requiere el dominio de ciertos procedimientos de "traducción", que presentamos a continuación.

5.2. Procedimientos de traducción entre los sistemas de representación

Los resumimos en la siguiente tabla. La mayoría de los procedimientos son muy sencillos e intuitivos y de alguna forma ya han sido tratados. Pero, como verá el (la) lector(a), hay dos casos sobre los que se llama la atención –pasar del sistema numérico al decimal, y viceversa– y que serán tratados con más detalle posteriormente.

Para pasar del sistema	Al sistema	Procedimiento	Ejemplo
Numérico	Verbal	Lectura de ***a*/*b***	2/5 → dos quintos
	Gráfico continuo	Dividir una región en ***b*** partes congruentes y señalar ***a*** de ellas	
	Gráfico discreto	Ídem, para un conjunto discreto	
	Decimal	Dividir ***a*** entre ***b***	2/5 → 0,4
	Porcentual	(Decimal × 100) % (*Sólo cuando no haya más de 2 decimales exactos*)	0,4 → (0,4 × 100)% = 40%
	Punto recta	Dividir el segmento unidad en ***b*** partes congruentes y señalar el punto final de las primeras ***a*** de ellas	2/5  0 1
Decimal	Numérico	(*Reglas de transformación*)	0,4 → 4/10 = 2/5
	Porcentual	(Decimal × 100) % (*Sólo cuando no haya más de 2 decimales exactos*)	0,4 → (0,4 × 100)% = 40%
	Todos los demás	Pasar a la forma ***a*/*b*** y de ahí a los demás sistemas	
Porcentual	Decimal	Porcentaje : 100 (dividir)	40% → 40 : 100 = 0,4
	Numérico	Porcentaje/100 (simplificar)	40% → 40/100 = 2/5
	Todos los demás	Pasar a la forma ***a*/*b*** y de ahí a los demás sistemas	
Punto recta	Numérico	Numerador: medida del segmento que va del 0 al punto. Denominador: medida del segmento unidad (de 0 a 1)	
	Todos los demás	Pasar a la forma ***a*/*b*** y de ahí a los demás sistemas	
Verbal	Numérico	Traducción directa desde la expresión verbal o desde la gráfica	
Gráfico continuo			
Gráfico discreto			
	Todos los demás	Pasar a la forma ***a*/*b*** y de ahí a los demás sistemas	

La traducción de una fracción al sistema verbal requiere saber cómo se nombran las fracciones. El numerador se lee como un número normal; en cuanto al denominador, se le asignan los siguientes sustantivos, según el número que aparece en él:

2 → medio(s)
3 → tercio(s)
4 → cuarto(s)
5 → quinto(s)
6 → sexto(s)
7 → séptimo(s)
8 → octavo(s)
9 → noveno(s)
10 → décimo(s)

Si el denominador es mayor que 10, se forma la palabra con el nombre del número y el sufijo avo(s). Por ejemplo, la fracción 7/11 se lee “siete onceavos” y la fracción 1/20, “un veinteavo”.

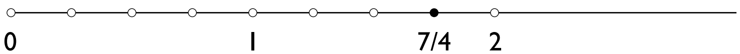
Y ahora, unos ejercicios sencillos de traducción entre sistemas de representación:

Representar la fracción 7/4 en los demás sistemas de representación.

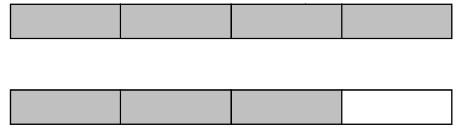
a) Gráfico discreto (el número de • con respecto al total de objetos del conjunto):

Obsérvese que el primer recuadro representa la unidad (**4/4**) y el segundo, **3/4**.

c) Punto recta:



b) Gráfico continuo:



d) Decimal: 7 : 4 = 1,75

e) Porcentual: (1,75 x 100) % = 175 %

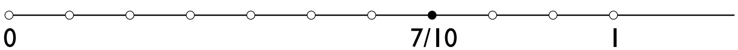
f) Verbal: Siete cuartos

*Representar la fracción **70%** en los sistemas Decimal, Numérico, Punto recta, Gráfico continuo.*

a) Decimal: 70 : 100 = 0,7

b) Numérico: 70 % = 70/100 = 7/10

c) Punto recta:



d) Gráfico continuo:

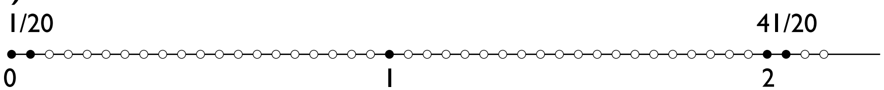
Representar la fracción 2,05 en los sistemas Porcentual, Numérico y Punto recta.

a) Porcentual: (2,05 x 100) % = 205 %

b) Numérico: $2{,}05 = \frac{205}{100} = \frac{41}{20}$ (fracción impropia)

$2{,}05 = 2 + 0{,}05 = 2 + \frac{5}{100} = 2 + \frac{1}{20} = 2\frac{1}{20}$ (fracción mixta)

c) Punto recta:



***Esto y aquello**, más la **mitad** de esto y aquello, ¿qué porcentaje es de esto y aquello?*

Si a una cantidad (**esto y aquello**) se le suma su mitad, en términos de representación decimal tenemos **1 + 0,5** (es decir, **1,5**). El problema consiste en expresar esta cantidad en el sistema porcentual: basta multiplicar por **100** y llegamos a **150%.**

5.3. Del sistema de representación numérico al decimal

El procedimiento general que hemos indicado consiste en dividir numerador entre denominador (se recomienda utilizar la calculadora) y anotar el cociente con todos sus decimales. Por ejemplo, la fracción 2/5 lleva a la división 2 : 5, cuyo resultado es 0,4; en este sentido, puede denominarse como un decimal exacto. Pero la fracción 1/6 lleva a la división 1 : 6, cuyo resultado es 0,166666..., cociente en el que la cifra decimal 6 no cesa de aparecer.

Veamos otros ejemplos similares:

2/3 ➔ 0,6666… 5/6 ➔ 0,8333…
20/11 ➔ 1,818181…
4/7 ➔ 0,571428571428…
45/22 ➔ 2,0454545…
13/36 ➔ 0,36111…

En las expresiones decimales anteriores encontramos tres tipos de elementos:

- la *parte entera*, antes de la coma;
- la(s) cifra(s) decimal(es) que se repite(n) indefinidamente: recibe(n) el nombre de *período* (por ejemplo, 6 en 2/3, 571428 en 4/7, 45 en 45/22);
- la(s) cifra(s) ubicada(s) entre la parte entera y la primera cifra del período: recibe(n) el nombre de *anteperíodo* (por ejemplo, 8 en 5/6, 0 en 45/22, 36 en 13/36).

Las representaciones decimales no exactas que carecen de anteperíodo reciben el nombre de *decimales periódicos puros*, mientras que las que sí presentan anteperíodo se denominan *decimales periódicos mixtos*. Pueden representarse de la forma anterior (0,6666..., etc.) o bien escribiendo el período una sola vez con una especie de pequeño arco superpuesto sobre la(s) cifra(s) que lo compone(n). Aquí lo haremos colocando las cifras del período en escritura ***negrita cursiva***; por ejemplo: 0,666…➔0,***6***; y 2,04545… ➔ 2,0***45***.

> **5.** *Represente las siguientes fracciones en forma decimal:* ***7/9, 18/5, 12/11, 5/33, 1/14, 13/15, 26/99, 5/101***

Desde este punto de vista, debemos llegar a distinguir las fracciones que dan una expresión decimal exacta: son aquellas cuyos denominadores son números "compuestos" por los factores primos **2** y **5**; por ejemplo, denominadores como **2**, **4**, **5**, **8**, **10**, **16**, **20**, etc. En cambio, las fracciones cuyos denominadores tienen otros factores primos (**3**, **7**, **11**...) generan expresiones decimales periódicas. La razón de estos comportamientos estriba en que sólo **2** y **5** son divisores de **10** (otra vuelta al Cuaderno nº 8...).

5.4. Del sistema de representación decimal al numérico

Ahora afrontamos el problema inverso; es decir, dada una fracción en forma decimal, pasarla a la forma numérica ***a/b***. Este proceso de traducción suele recibir el nombre de "hallar la *fracción generatriz* del decimal dado". Como acabamos de ver, hay varios tipos de decimales, por lo que analizaremos diversos casos en este proceso.

a) Decimal exacto: El procedimiento es sencillo: se multiplica y divide el decimal por la potencia $\mathbf{10}^n$, donde ***n*** es el número de cifras decimales. Así se obtiene una fracción cuyo numerador pasa a ser entero y cuyo denominador es la potencia $\mathbf{10}^n$.

Por ejemplo: **0,4** pasa a ser $\frac{(0{,}4 \times 10)}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Análogamente, **7,5** pasa a ser $\frac{(7{,}5 \times 10)}{10} = \frac{75}{10} = \frac{15}{2}$. Y también, **2,03** pasa a ser $\frac{2{,}03 \times 100}{100} = \frac{203}{100}$. Así, pues, la *fracción generatriz de una expresión decimal exacta tiene como numerador la parte entera seguida de las cifras decimales y como denominador la potencia* $\mathbf{10}^n$, *donde n es el número de cifras decimales.*

b) Decimal periódico puro: Veamos cómo se procede con el ejemplo **0,*15***:

Primero, observemos que es cierta esta igualdad: **0,*15*** = **0,15*15***. Ahora multiplicamos y dividimos **0,15*15*** por **100**, con lo que no se altera su valor, y se llega a: **0,15*15* = (0,15*15* x 100)/100 = 15,*15*/100 = (15 + 0,*15*)/100.**

Hasta ahora tenemos la igualdad: **0,*15* = (15 + 0,*15*)/100.** Multiplicando ambos términos de la igualdad por **100** se tiene: **100 x 0,*15* = 15 + 0,*15*.** Si restamos **0,*15*** en ambos miembros de la igualdad, a la izquierda tendremos (**100 – 1**) veces **0,*15***, es decir, **99** veces **0,*15***. Y a la derecha, quedará sólo **15**. Es decir, pasaremos a la igualdad: **99 x 0,*15* = 15**. Finalmente, dividimos ambos miembros de la igualdad entre **99**, con lo que llegamos al resultado final: **0,*15* = 15/99**

Si se hubiera tratado de la expresión decimal periódica pura **2,*15***, el proceso sería: **2,*15* = 2 + 0,*15* = 2 + 15/99 = 198/99 + 15/99 = 213/99.** Obsérvese que el numerador puede desglosarse como una diferencia: **213 = 215 – 2**, es decir, como la diferencia entre el número formado por la secuencia "parte entera-período", **215**, menos la parte entera, **2.**

Todo este proceso puede parecer tedioso y complicado, pero se presenta para justificar la regla que rige la búsqueda de la fracción generatriz en el caso de las expresiones decimales periódicas puras: *La fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura tiene como numerador la diferencia entre el número formado por la secuencia "parte entera-período", menos la parte entera; y como denominador, tantos nueves como cifras tiene el período.*

Por ejemplo, la fracción generatriz del decimal **3,*27*** tiene como numerador: **327 – 3**; y como denominador, **99**. Se trata de la fracción **324/99** (verifíquelo).

Análogamente para el decimal **0,*123***; su numerador es **123**, y su denominador, **999**. Se trata de la fracción **123/999** (verifíquelo).

c) Decimal periódico mixto: En este caso vamos a obviar la construcción de la regla que rige estos casos [dejamos a los lectores su búsqueda en algún texto de matemática...] y a exponerla directamente: *La fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta tiene como numerador la diferencia entre el número formado por la secuencia "parte entera-anteperíodo-período", menos el número formado por la secuencia "parte entera-anteperíodo"; y como denominador, tantos nueves como cifras tiene el período, seguidos de tantos ceros como cifras tiene el anteperíodo*.

Vamos a dar algunos ejemplos para mostrar cómo se aplica la regla anterior: **2,3*15*** se desglosa así: parte entera: **2**; anteperíodo: **3**; período: **15**. De modo que: **2,3*15* = (2315 – 23)/990 = 2292/990** (verifíquelo).

Por su parte, **0,18*3*** se desglosa así: parte entera: **0**; anteperíodo: **18**; período: **3**. De modo que: **0,18*3* = (183 – 18)/900 = 165/900** (verifíquelo).

Finalmente, **3,12*101*** se desglosa así: parte entera: **3**; anteperíodo: **12**; período: **101**. De modo que: **3,12*101* = (312101 – 312)/99900 = 311789/99900** (verifíquelo).

6. Obtenga la fracción generatriz de las siguientes expresiones decimales:

4,05	4,***05***	0,10***1***	0,8	
2,7***5***	2,75	0,***8***	10,***1***	0,***3***

Veamos un caso curioso: el de la fracción **0,*9*** (una sucesión ilimitada de nueves después de la coma...). De acuerdo con lo expresado anteriormente, su fracción generatriz es **0,*9* = 9/9 = 1**. De donde se sigue que **0,*9* = 1**. ¿Será cierto esto? Sí lo es; lo que ocurre es que hemos descubierto otra manera de representar la unidad como fracción decimal: **0,*9***. [Acabamos de abrir una ventana hacia una matemática más avanzada, la que trabaja con expresiones infinitas y utiliza el concepto de límite para ello. No vamos a entrar en este terreno, pero sí a tomar nota del punto de partida desde el que salimos...].

Un comentario final al llegar a este punto. No todo el trasiego de fracciones entre sus representaciones numéricas y decimales, en ambos sentidos, tiene que reducirse a estos ejercicios tan "técnicos" y "complejos". También tenemos que familiarizarnos con la equivalencia de las fracciones y los decimales más sencillos y frecuentes. Así como llegamos a dominar las tablas de multiplicar, deberíamos manejar con soltura al menos las siguientes equivalencias (en ambos sentidos):

- **a)** 1/2 equivale a 0,5; los múltiplos decimales de 0,5 son fracciones de denominador 2 (por ejemplo: 3,5 = 7 x 0,5 = 7 veces 0,5 = 7/2, etc.).
- **b)** 1/4 equivale a 0,25; los múltiplos decimales de 0,25 son fracciones de denominador 4 (0,75 = 3 x 0,25 = 3 veces 1/4 = 3/4, etc.).
- **c)** 1/5 equivale a 0,2; los múltiplos decimales de 0,2 son fracciones de denominador 5 (1,8 = 9 x 0,2 = 9 veces 1/5 = 9/5, etc.); las fracciones de denominador 5 son múltiplos de 0,2 (por ejemplo, 4/5 = 4 veces 1/5 = 4 x 0,2 = 0,8).
- **d)** 1/10 equivale a 0,1; los múltiplos decimales de 0,1 son fracciones de denominador 10 (0,9 = 9 x 0,1 = 9 veces 1/10 = 9/10, etc.).
- **e)** 1/20 equivale a 0,05; los múltiplos decimales de 0,05 son fracciones de denominador 20 (0,65 = 13 x 0,05 = 13 veces 1/20 = 13/20, etc.); las fracciones de denominador 20 son múltiplos de 0,05 (por ejemplo, 17/20 = 17 veces 1/20 = 17 x 0,05 = 0,85).

Tenemos que acostumbrarnos a manejar de esta manera las fracciones y los decimales más usuales y sencillos, y hacerlos así parte de nuestra vida, de las herramientas mentales que están ahí siempre listas para su uso. Esta familiaridad mental con las fracciones y los decimales debe ser siempre un objetivo de nuestro aprendizaje del tema.

Utilice la recomendación anterior para calcular mentalmente las expresiones decimales correspondientes a las fracciones siguientes: $\frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{18}{10}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{15}{20}, \frac{8}{5}$

Asimismo, para calcular mentalmente las fracciones numéricas correspondientes a las expresiones decimales siguientes: 0,15; 1,2; 3,25; 1,5; 1,75; 2,6; 0,7; 7,5; 0,65

7. Resuelva los siguientes ejercicios de conversión de fracciones entre los sistemas de representación que se indican:

a) 4/5 a decimal
b) 160% a fracción numérica
c) 2,5 a fracción numérica
d) 200% a decimal
e) 13/20 a porcentaje
f) 7 a porcentaje
g) 6/2 a decimal
h) 300% a fracción numérica
i) 6/2 a porcentaje

5.5. Fracciones equivalentes

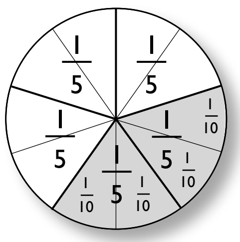
Hasta ahora hemos hablado de la traducción mutua entre los diversos sistemas de representación de las fracciones. Pero también apuntábamos la posibilidad de traducción al interior de cada sistema. Esto nos lleva a una primera pregunta: ¿Cuáles son los sistemas de representación que aceptan este proceso interno de traducción?

Una observación cuidadosa nos permite responder que los sistemas de representación que aceptan este proceso interno de traducción (en el que una fracción cambia de representación conservando su valor), son el numérico –y, por consiguiente, el verbal–, el gráfico discreto y el gráfico continuo. Por el contrario, este proceso no tiene sentido en los sistemas decimal, porcentual, y punto sobre la recta.

En los sistemas en los que se produce la traducción interna se habla, entonces, de *fracciones equivalentes*. El caso más conocido –aunque no el único, como acabamos de ver– es el del sistema numérico ***a/b***. Vamos a analizar cómo en este sistema se generan fracciones equivalentes a una dada y, posteriormente, cómo se descubre si dos fracciones son equivalentes.

Tomemos nuestro ejemplo de la fracción **2/5**. Podemos obtener fracciones equivalentes “amplificando” la fracción, es decir, multiplicando numerador y denominador por la misma cantidad entera positiva (no por **0**). Por ejemplo, al multiplicar así por **2**, llegamos a **4/10**; ahora estamos diciendo que el mismo todo se ha dividido en **10** partes congruentes, de las cuales estamos considerando **4**.

Obsérvese que, sin embargo, esta fracción tiene también su lectura como **2/5**, si se considera que el todo



se ha dividido en **5** “pares” (**10** partes), de los cuales estamos considerando **2** (**4** partes). Así se descubre la equivalencia entre ambas fracciones. Del mismo modo se consiguen otras fracciones equivalentes: **6/15** (multiplicando por **3**: ahora hay **5** “ternas” de las cuales se toman **2**), **14/35** (multiplicando por **7**), etc. Como se ve, la “clase” de fracciones equivalentes a una dada tiene un número infinito de fracciones.

Otro de los procedimientos para obtener fracciones equivalentes a una dada es el de “simplificar” la fracción, si es posible; esto es, dividir numerador y denominador por la misma cantidad entera positiva (excluyendo el **1**). Por ejemplo, si tomamos **24/60**, al dividir así entre **2**, llegamos a **12/30**; al dividir entre **3**, a **8/20**; al dividir entre **12**, a **2/5**. Todas estas fracciones ($\frac{12}{30}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{2}{5}$) son equivalentes a **24/60**.

¿Cuántas fracciones equivalentes a **24/60** pueden obtenerse por la vía de la simplificación? Tantas como divisores comunes –aparte del **1**– tengan **24** y **60** (de vuelta al Cuaderno nº 8...). Estos divisores comunes son {**2**, **3**, **4**, **6** y **12**}. Por consiguiente, hay **5** fracciones equivalentes a **24/60** que pueden obtenerse por la vía de la simplificación: $\frac{12}{30}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{4}{10}$ y $\frac{2}{5}$. De todas ellas puede llamarnos la atención la fracción **2/5**, porque es la única que no puede simplificarse más. Y esto es así, porque dividimos **24** y **60** entre su máximo divisor común, que es **12**, con lo cual los factores resultantes, **2** y **5**, son números primos relativos, primos entre sí (seguimos con el Cuaderno nº 8...).

Cuando el numerador y denominador de una fracción son números primos relativos, la fracción se denomina irreducible. Pues bien, las fracciones equivalentes a una fracción *irreducible* sólo se consiguen por la vía de la amplificación; en los demás casos funciona esta vía y la de la simplificación, que es siempre más corta.

Un caso particular de equivalencia por amplificación es el que atañe a los números naturales considerados como fracciones. Así, **1** puede representarse como $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$,..., es decir, de infinitas maneras como fracción. Del mismo modo, **2** puede hacerlo como $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{14}{7}$, etc. Esta observación nos ayuda también a familiarizarnos con las fracciones y, además, será muy útil cuando operemos con ellas.

En cuanto a la segunda cuestión, para descubrir si dos fracciones son equivalentes –valen lo mismo– el recurso más sencillo es el de pasar ambas al sistema decimal (otra vez la calculadora...): si se obtiene el mismo número decimal, son equivalentes. Otra vía de hacerlo –como ya el (la) lector(a) lo habrá intuido– es la de buscar una fracción que sea simultáneamente equivalente a ambas; para lograrlo, la vía más sencilla es la de calcular la fracción irreducible de ambas: si coinciden, ambas fracciones son equivalentes.

8. *Halle la fracción irreducible en cada caso:*

28/140	*36/24*	*18/108*	*13/65*
42/60	*76/12*	*54/24*	*56/24*
15/16			

9. Determine si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

a) $\frac{3}{5}$ y $\frac{24}{40}$ **b)** $\frac{18}{24}$ y $\frac{39}{52}$ **c)** $\frac{9}{33}$ y $\frac{54}{200}$
d) $\frac{60}{24}$ y $\frac{35}{14}$ **f)** $\frac{27}{100}$ y $\frac{3}{11}$

5.6. Estimar el valor de las fracciones

Volvemos de nuevo a nuestro intento por familiarizarnos con las fracciones, ahora con el aporte de las fracciones equivalentes. A este respecto, resulta interesante la actividad de estimar el valor aproximado de algunas fracciones que no presentan números "amigables" en el numerador y en el denominador (por ejemplo, $\frac{28}{89}$, $\frac{17}{70}$, $\frac{63}{97}$, etc.). La idea es la de acercarnos a fracciones más sencillas –particularmente las irreducibles–, cuyo valor esté cerca del valor de las fracciones dadas. Esta actividad recibe el nombre de *estimación del valor de las fracciones*.

Esta actividad requiere desarrollar las competencias de observación de cada fracción y la familiaridad con las fracciones más sencillas. Por ejemplo, 28/89 nos lleva a acercarnos a 30/90, cuya fracción irreducible es 1/3 (simplificando entre 30); o también a 27/90, cuya fracción irreducible es 3/10 (simplificando entre 9). Obsérvese que el decimal correspondiente a 28/89 es –con sólo 4 cifras decimales– 0,3146; el correspondiente a 1/3 es 0,333...; y el correspondiente a 3/10 es 0,3. Como se ve, en estas dos estimaciones estamos cerca del valor de la fracción 28/89.

Análogamente, 17/70 puede aproximarse a 20/70 (es decir, 2/7), a 14/70 (es decir, 1/5); a 17/68 (es decir, 1/4), etc. Y 63/97 puede acercarse a 66/99 (es decir, 2/3), a 65/100 (es decir, 13/20), a 64/96 (es decir, 2/3 nuevamente), etc. Lo importante es saber manejarse con soltura y familiaridad; y esta actitud sólo puede ser producto de las ganas de "acercarse" a las fracciones... y de la ejercitación.

Estime el valor de las siguientes fracciones, aproximándolas a fracciones más sencillas:

31/59	*91/62*	*53/149*	*26/60*
83/39	*97/79*	*37/121*	*13/31*
89/91			

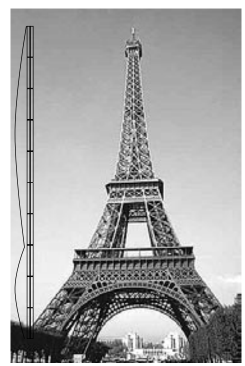
5.7. Y ahora sí, ¿para qué tantos sistemas de representación de las fracciones?

Quizás ahora ya tenemos una buena respuesta a la pregunta con la que iniciábamos este apartado. La variedad de sistemas de representación no es algo superfluo, ni mucho menos inútil. Ya hemos visto algo de lo que se puede sacar de esta variedad...

En resumen, podemos decir que nos hemos sumergido en la diversidad matemática; que nos ha ayudado a captar mejor el concepto y significado de las fracciones; que nos permite familiarizarnos con ellas; que la variedad nos facilita la resolución de tareas con fracciones al permitirnos optar por el sistema más adecuado a cada tarea... Y en esta tónica seguiremos cuando, en el próximo Cuaderno, abordemos las actividades de ordenar fracciones, operar con ellas y resolver problemas.

6. Las fracciones en nuestra vida

Familiarizarnos con las fracciones no supone solamente acostumbrarnos a sus conversiones de un sistema de representación a otro, o a sus equivalencias dentro de un mismo sistema. También supone saber "verlas" y "utilizarlas" en nuestra vida. Una actividad destinada a este fin puede ser, por ejemplo, la de tomar la altura de un mueble, indicar un punto en él, y estimar qué fracción representa –respecto a la altura total– la distancia desde la base del mueble hasta el punto indicado. El ejercicio puede llevarse a otros



objetos cuya altura o longitud puede medirse, a superficies cuya área puede calcularse, a volúmenes medibles, etc. Todo es cuestión de imaginación... Después de hecha la estimación deben obtenerse las medidas correspondientes con el fin de evaluar la precisión de la fracción estimada.

Una actividad complementaria puede ser la inversa: tomar una dimensión de un objeto, indicar una fracción, y tratar de ubicar sobre el objeto la parte de la dimensión correspondiente. Por ejemplo, puede tomarse un diccionario y solicitar que se abra en la página que represente 1/4 ó 2/3... de todo el libro, y luego verificar la precisión de la estimación.

Finalmente, también es posible estimar la magnitud del todo a partir de la medida de una fracción estimada. Por ejemplo, en el caso del diccionario, se puede abrir en determinada página, tomar nota del número de página indicado, observar el grueso del libro cerrado y estimar la fracción que sobre el total representa el grueso de las páginas separadas, y a partir de ahí estimar cuántas páginas puede tener el libro. Un caso similar es el de estimar el número de personas en una cola a partir de estimar la fracción que representa un número determinado de sufridos ciudadanos (algo hay que hacer para distraerse en una cola...). En fin, trate de proponerse y practicar con situaciones similares. Lo importante es entender que las fracciones están presentes en nuestra vida y que es cuestión de saber verlas y utilizarlas.

7. La resolución de problemas en el campo de las fracciones

Vamos a plantear algunos problemas que pueden referirse a la utilización del concepto de fracción y de sus diversas representaciones. Lo que sugerimos a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

a) *¿Cuál de las siguientes fracciones se acerca más a la unidad:* $\frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{10}{9}, \frac{8}{7}, \frac{12}{13}, \frac{9}{10}, \frac{1}{2}$?

b) El denominador de una fracción excede en **7** unidades al numerador. Si al denominador se le agregan otras **7** unidades, la fracción valdrá **0,5**. ¿Cuál es la fracción original?

c) *¿Cuál es la cifra decimal que ocupa la posición* ***2009*** *en el desarrollo decimal de 4/101?*

d) En cada una de las sucesiones siguientes, averiguar el valor de la fracción omitida:

a) $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, ..., 3, \frac{11}{3}$

b) $..., \frac{1}{8}, \frac{2}{11}, \frac{3}{14}, \frac{4}{17}$

c) $..., \frac{5}{3}, \frac{11}{5}, \frac{23}{9}, \frac{47}{17}$

e) *Con los dígitos del* ***1*** *al* ***9****, utilizados todos una sola vez y repartidos entre el numerador y el denominador, formar una fracción equivalente a 1/2.*

f) En una reunión, la mitad de los invitados son hombres. De todos los hombres presentes, **40%** son calvos; y de estos últimos, la **mitad** habla inglés. Si sólo **4** calvos hablan inglés, ¿cuántas mujeres hay en la reunión?

g) *Si el* ***z*** *% de* ***v*** *es* ***15****, ¿cuál es el* ***v*** *% de* ***z****?*

Vamos, pues, a reportar algunas vías de solución para poder contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a) Una forma sencilla de resolver el problema es "traducir" todas las fracciones a su expresión decimal y anotar aquella cuyo valor esté más próximo a la unidad. Pero si se prefiere trabajar con las expresiones dadas, basta observar lo que le falta (o le sobra) a cada fracción con respecto a **1**: **1/8**, **1/4**, **1/9**, **1/7**, **1/13**, **1/10**, **1/2**, respectivamente. De todas ellas, la menor es **1/13**. Por consiguiente, la fracción más cercana a **1** es **12/13**.

b) Después de agregar otras **7** unidades al denominador, éste es **14** unidades mayor que el numerador. Si la fracción ahora vale **0,5** (es decir, **1/2**), es porque el denominador es el doble del numerador. Por consiguiente, éste debe valer **14** y el denominador, **28**. La fracción original es **14/21**.

c) La expresión decimal de **4/101** es **0,*0396***. Es decir, cada **4** posiciones se repite el mismo grupo de cifras, en el mismo orden. Para averiguar cuál es la cifra que ocupa la posición **2009**, debemos obtener el resto de dividir **2009** entre **4**, que es **1** (el cociente de esta división, **502**, significa que hay **502** grupos completos de las cuatro cifras del período). Así, pues, la posición decimal **2009** está ocupada por la **1ª** cifra del período, es decir, por el **0**.

d) a) Si se toman los valores **1** y **3** como **3/3** y **9/3**, respectivamente, se observa que los numeradores de esas fracciones se incrementan de **2** en **2**, mientras que los denominadores permanecen iguales a **3**. La fracción omitida es, pues, **7/3**.

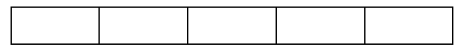
b) Los numeradores aumentan de **1** en **1**, y los denominadores de **3** en **3**. La fracción omitida debe ser, pues, **0/5**, es decir, **0**.

c) Aquí los patrones son un poco más complejos, pero una observación atenta nos lleva a inferir que cada numerador se obtiene aumentando **1** al doble del numerador anterior, y que cada denominador se obtiene restando **1** al doble del denominador anterior. Así, pues, la fracción anterior a **5/3** debe ser **2/2**, es decir, **1**.

e) El método a seguir debe ser el de ensayo y ajuste. He aquí una pista inicial: si se han de utilizar las **9** cifras significativas y el denominador ha de ser el doble del numerador, éste debe contar con **4** cifras, y el denominador con **5**. Además, la primera de estas cinco debe ser el **1**, y la primera de las del numerador, mayor que **5** (¿por qué?). Por otro lado, ¿el **5** puede figurar en el numerador (¿por qué?)? A partir de aquí, es cuestión de ensayar y ajustar. Una de las respuestas posibles es $\frac{7269}{14538}$. Pero hay otras. Intente hallarlas...

f) Consideremos el conjunto de los hombres. Que **40%** de ellos sean calvos significa que lo son los **2/5**. De ellos, los que hablan inglés son la **mitad**, es decir **1/5** de los hombres. Pero esta fracción equivale a **4** hombres. Por lo tanto, el número total de hombres será **4 x 5 = 20**. Y **20** es también el número de mujeres.

El problema también puede resolverse por la vía gráfica. Como nos hablan de los **2/5** de los hombres (**40%**), vamos a representar el conjunto de los hombres como un rectángulo dividido en **5** cuadrículas congruentes:



Las dos primeras, por ejemplo, corresponderían a los calvos, y una de ellas (la mitad) a los que hablan inglés. Pero el "valor" de esta cuadrícula es **4**, de donde se desprende el valor de **20** para todo el conjunto. De aquí, el número de mujeres, también **20**.

g) La mejor manera de resolver el ejercicio es presentando alguna situación numérica que satisfaga el enunciado "el ***z* %** de ***v*** es **15**". Podemos pensar en ***v*** como **30** (el doble de **15**), de donde se sigue que **z** debe ser **50** (**50%**), ya que el **50%** (la mitad) de **30** es **15**.

Ahora hay que responder a la pregunta ¿cuál es el **30%** de **50**? Si el **10%** es **5**, el **30%** es **15**, el mismo valor. Si se ensaya con otro valor de ***v*** (**50**, **60**, **100**...) y se halla el correspondiente de **z** (**30**, **25**, **15**...), se verá que la respuesta siempre es la misma: **15**.

8. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"…

10. La longitud del monstruo del lago encantado es de **20** metros, más la **mitad** de su propia longitud. ¿Cuánto mide de largo el monstruo?

*Con los dígitos del **1** al **9**, utilizados todos una sola vez, formar (si es posible) el numerador y el denominador de una fracción equivalente a **1/3**. Ídem, equivalente a **1/4** y a **1/5**.*

11. En cada una de las sucesiones siguientes, averiguar el valor de la fracción omitida:

a) $\frac{11}{10}, \frac{9}{7}, \frac{7}{4}, \ldots,$

b) $\frac{12}{18}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{14}{21}, \frac{2}{3}, \ldots,$

12. *La diferencia entre el **60%** y el **45%** de un número es **30**. ¿De qué número se trata?*

13. Un sastre compró la mitad de **9** metros de tela y utilizó **4 1/2** metros. ¿Cuánta tela sobró?

Referencias bibliográficas

- Ferreirós, J. (1998). Introducción. En: R. Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números?* (pp. 5-75). Madrid: Alianza.

- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Vol. I. Madrid: Alianza.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. Son iguales **2.** 4 decimales **3.** $1\frac{1}{2}$; $1\frac{5}{10}$ ó $1\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$; $11\frac{1}{9}$; $6\frac{4}{12}$ ó $6\frac{1}{3}$ **4.** $\frac{4}{3}$ ó $1\frac{1}{3}$ **5.** 0,***7***; 3,6; 1,***09***; 0,***15***; 0,07***14285***; 0,8***6***; 0,***26***; 0,***0495*** **6.** 405/100 u 81/20; 401/99; 91/900; 8/10 ó 4/5; 248/90 ó 124/45; 11/4; 8/9; 91/9; 3/9 ó 1/3 **7.** 0,8; 160/100 u 8/5; 5/2; 2; 65%; 700%; 3; 3; 300% **8.** $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{19}{3}$ ó $6\frac{1}{3}$; $\frac{9}{4}$ ó $2\frac{1}{4}$; $\frac{7}{3}$ ó $2\frac{1}{3}$; $\frac{15}{16}$ **9. a)** Sí **b)** Sí **c)** No **d)** Sí **e)** No **10.** 40 metros **11. a)** 5/1 ó 5; **b)** cualquier otra fracción equivalente a 2/3 **12.** 200 **13.** Nada

Índice

A modo de introducción 5

Capítulo I
¿De dónde vienen las fracciones? 6

Capítulo II
El concepto de fracción y sus diversas formas de representación 8

Capítulo III
Algunas consecuencias inmediatas derivadas del concepto de fracción 9
- **3.1.** El todo como unidad 9
- **3.2.** La partición de la unidad 10
- **3.3.** Considerar algunas de esas partes 11
- **3.4.** Ejercicios de aplicación directa del concepto de fracción 13

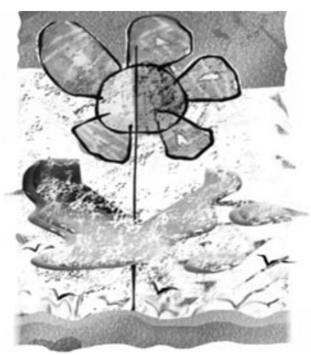
Capítulo IV
La representación numérica de la fracción: ***a/b*** 15
- **4.1.** Antes de seguir, ¿cuántos significados puede tener una expresión del tipo ***a/b***? 15
- **4.2.** Otra vez los numeradores y denominadores 17

Capítulo V
¿Para qué queremos tantos sistemas de representación de las fracciones? 19
- **5.1.** ¡Qué bueno! Nos topamos con la diversidad... 19
- **5.2.** Procedimientos de traducción entre los sistemas de representación 19
- **5.3.** Del sistema de representación numérico al decimal 22
- **5.4.** Del sistema de representación decimal al numérico 22
- **5.5.** Fracciones equivalentes 24
- **5.6.** Estimar el valor de las fracciones 26

Capítulo VI
Las fracciones en nuestra vida 26

Capítulo VII
La resolución de problemas en el campo de las fracciones 27

Capítulo VIII
Y ahora, otros ejercicios "para la casa"… 29



Este libro se terminó de imprimir en el mes de mayo de 2006.