4

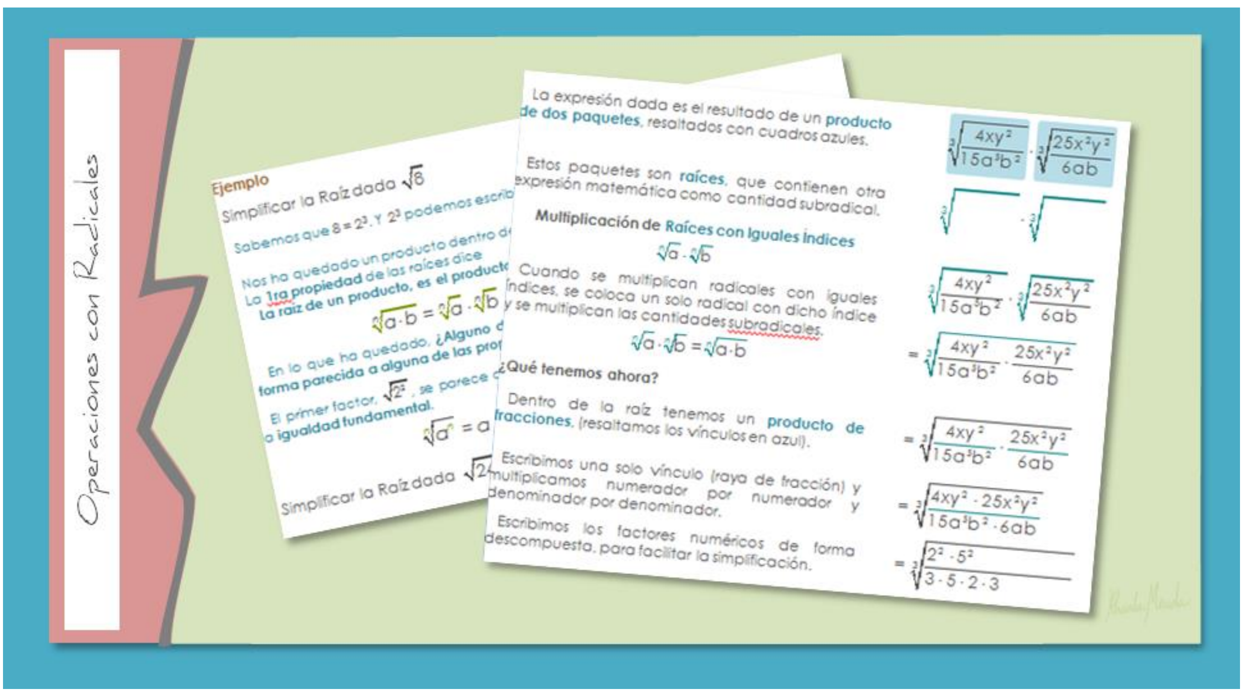
4ta Unidad

Números Reales

4.2 Operaciones Con Radicales.

Ser Feliz es encontrar siempre bellos tesoros, aún en los paisajes más sombríos.

Descripción



Transformación y simplificación de expresiones radicales, multiplicación y división de radicales con iguales índices, multiplicación y división de radicales con distintos índices son los puntos de estudio de este objetivo. Avanzamos hacia expresiones cada vez mas variadas y nutridas. En la medida que dominemos cada herramienta vista, se hace sencillo manejar expresiones más complejas. Te invitamos siempre a revisar los temas previos necesarios para la comprensión de los nuevos,

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Naturales y los Números Enteros.

Contenido

Simplificación de los Radicales, Propiedades de los Radicales, Multiplicación y División de Radicales con Iguales Índices, Multiplicación y División de Radicales con Distintos Índices.

Videos Disponibles

NÚMEROS REALES. Simplificación de los Radicales. Propiedades de los Radicales. (1er Grupo)

NÚMEROS REALES. Propiedades de los Radicales. Multiplicación y División de Potencias con iguales índices

NÚMEROS REALES. Transformar Radicales Aplicando Propiedades

NÚMEROS REALES. Multiplicación de Radicales con Distintos Índices

NÚMEROS REALES. División de Radicales con Distintos Índices

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

NÚMEROS REALES. Simplificación de los Radicales. Propiedades de los Radicales. (1er Grupo).

En el objetivo anterior presentamos tres propiedades de las raíces, que permiten transformar radicales descomponiendo en factores mas sencillos o agrupando factores.

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

La raíz de un producto es el producto de las raíces

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

La raíz de un cociente es el cociente de las raíces

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

La raíz de un cociente es el cociente de las raíces

Agregaremos una propiedad que representa una **igualdad fundamental**, e iremos a ejemplos prácticos de cómo simplificar radicales usando estas 4 propiedades.

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

Igualdad Fundamental

Ejemplo

Simplificar la Raíz dada $\sqrt{8}$

Sabemos que $8 = 2^3$. Y 2^3 podemos escribirlo como $2^2{\cdot}2$

$$8=2^3 \longrightarrow \sqrt{8}=\sqrt{2^3}$$

Nos ha quedado un producto dentro de la raíz.
La **1ra propiedad** de las raíces dice
La raíz de un producto, es el producto de las raíces.

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}$$

En lo que ha quedado, **¿Alguno de los factores tiene forma parecida a alguna de las propiedades?.**

$$=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}$$

El primer factor, $\sqrt{2^2}$, se parece a la última propiedad, la **igualdad fundamental**.

$$=2\cdot\sqrt{2}$$

$$\sqrt[n]{a^n}=a$$

Simplificar la Raíz dada $\sqrt{243}$

Si queremos simplificar la raíz lo primero que haremos es descomponer en factores primos el 243.

$$243=3^5 \longrightarrow \sqrt[3]{243}=\sqrt[3]{3^5}$$

Nota: para recordar cómo descomponer en factores primos, visita la sección de múltiplos y divisores de matemática de 1er año.

Separaremos la potencia $3^5 = 3^3{\cdot}3^2$.

$$=\sqrt[3]{3^3\cdot 3^2}$$

¿Qué propiedad podemos aplicar a esta expresión?.

$$= \sqrt[3]{3^3 \cdot 3^2}$$

Tenemos un producto dentro de la raíz.
La **1ra propiedad** de las raíces dice
La raíz de un producto, es el producto de las raíces.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^2}$$

¿Qué propiedad podemos aplicar ahora?.

El primer factor, $\sqrt[3]{3^3}$, se parece a la última propiedad, la **igualdad fundamental**.

$$= 3 \cdot \sqrt[3]{3^2}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \longrightarrow \sqrt[3]{3^3} = 3$$

Efectuando la potencia 3^2 nos queda

$$\sqrt[3]{243} = 3 \cdot \sqrt[3]{9}$$

Vayamos a la próxima lección para ver un tipo especial de radicales y una aplicación de la simplificación de radicales.

NÚMEROS REALES. Propiedades de los Radicales. Multiplicación y División de Potencias con iguales índices.

Las siguientes tres propiedades nos permiten realizar tres operaciones aritméticas fundamentales con radicales:

Multiplicación de Radicales con igual índices. Cuando Multiplicamos radicales con iguales índices, se coloca un solo radical con dicho índice y se multiplican las cantidades subradicales.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$$

Ejemplo

Tenemos un producto de raíces con igual índice: $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{7}$

Esto es igual a la raíz del producto: $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{5\cdot 7}$

División de Radicales con igual índices. Cuando Dividimos radicales con iguales índices, se coloca un solo radical con dicho índice y se dividen las cantidades subradicales.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo

Tenemos una división de raíces con igual índice: $\dfrac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[6]{4}}$

Esto es igual a la raíz de la división: $\dfrac{\sqrt[6]{8}}{\sqrt[6]{4}}=\sqrt[6]{\dfrac{8}{4}}=\sqrt[6]{2}$

Potencia de una Raíz. la potencia de una raíz es la raíz de la potencia.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo

Tenemos la potencia de una raíz: $\left(\sqrt{2}\right)^5$

Base: $\sqrt{2}$

Exponente: 5

Esto es igual a la raíz de la potencia: $\left(\sqrt{2}\right)^5=\sqrt{2^5}$

NÚMEROS REALES. Transformar Radicales Aplicando Propiedades.

Ya con la propiedad de **Multiplicación de Radicales con iguales índices**, **División de radicales con iguales índices** y **Potencia de una raíz**, que unido a las primeras 4 propiedades, conforman un juego de 7 propiedades.

Veamos cómo aplicarlas con un ejemplo.

Simplificar la siguiente expresión a su forma más simple

$$\sqrt[3]{\frac{4xy^2}{15a^5b^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{25x^2y^2}{6ab}}$$

Es importante habituarnos al ejercicio mental de visualizar **¿qué tenemos en la expresión?** que pueda ser asociado a propiedades conocidas y que podamos aplicar. Enfocando nuestra atención de lo más grande a lo más pequeño podemos detallar la estructura

Viendo la estructura desde lo más grande (de afuera hacia dentro)

La expresión dada es el resultado de un **producto de dos paquetes**, resaltados con cuadros azules.

$$\boxed{\sqrt[3]{\frac{4xy^2}{15a^5b^2}}} \cdot \boxed{\sqrt[3]{\frac{25x^2y^2}{6ab}}}$$

Estos paquetes son **raíces**, que contienen otra expresión matemática como cantidad subradical.

$$\sqrt[3]{\qquad} \cdot \sqrt[3]{\qquad}$$

Multiplicación de Raíces con Iguales Índices

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Cuando se multiplican radicales con iguales índices, se coloca un solo radical con dicho índice y se multiplican las cantidades subradicales.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4xy^2}{15a^5b^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{25x^2y^2}{6ab}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{4xy^2}{15a^5b^2} \cdot \frac{25x^2y^2}{6ab}}$$

¿Qué tenemos ahora?

Dentro de la raíz tenemos un **producto de fracciones**, (resaltamos los vínculos en azul).

$$= \sqrt[3]{\frac{4xy^2}{15a^5b^2} \cdot \frac{25x^2y^2}{6ab}}$$

Escribimos una solo vínculo (raya de fracción) y multiplicamos numerador por numerador y denominador por denominador.

$$= \sqrt[3]{\frac{4xy^2 \cdot 25x^2y^2}{15a^5b^2 \cdot 6ab}}$$

Escribimos los factores numéricos de forma descompuesta, para facilitar la simplificación.

$$= \sqrt[3]{\frac{2^2 \cdot 5^2}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3}}$$

En cuanto a las expresiones literales, **multiplicamos de potencias con igual base** en el numerador y en el denominador.

$$xy^2 \cdot x^2y^2 = x^{1+2} \cdot y^{2+2}$$
$$a^5b^2 \cdot ab = a^{5+1} \cdot b^{2+1}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2^2 \cdot 5^2 x^{1+2} \cdot y^{2+2}}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3a^{5+1} \cdot b^{2+1}}}$$

Simplificamos los factores numéricos y efectuamos los productos de potencias.

$$= \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 5x^3 \cdot y^4}{3^2a^6 \cdot b^3}}$$

Para simplificar la expresión buscaremos extraer factores de la raíz.

$$= \sqrt[3]{\frac{10x^3 \cdot y^4}{9a^6 \cdot b^3}}$$

Transformamos las potencias cuyos exponentes sean iguales o mayores que el índice de la raíz.

$$= \sqrt[3]{\frac{10x^3 \cdot y^3 \cdot y}{9\left(a^2\right)^3 \cdot b^3}}$$

Separamos la fracción en dos, una que contenga los factores simples, y otra que contenga las potencias de exponente 3.

$$= \sqrt[3]{\frac{10 \cdot y}{9} \cdot \frac{x^3 \cdot y^3}{\left(a^2\right)^3 \cdot b^3}}$$

Tenemos **la raíz de un producto de fracciones**, esto **es igual al producto de las raíces de cada fracción**.

$$= \sqrt[3]{\frac{10 \cdot y}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3 \cdot y^3}{\left(a^2\right)^3 \cdot b^3}}$$

Tenemos:

Raíz de un cociente (división), que es igual **al cociente de las raíces de cada factor**.

La raíz de un producto de fracciones, que es igual **al producto de las raíces de cada fracción**.

Una forma resumida de decirlo es:

La raíz se distribuye para cada factor

$$= \sqrt[3]{\frac{10 \cdot y}{9}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y^3}}{\sqrt[3]{\left(a^2\right)^3} \cdot \sqrt[3]{b^3}}$$

Aplicamos la igualdad fundamental que dice:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Igualdad Fundamental

$$= \sqrt[3]{\frac{10 \cdot y}{9}} \cdot \frac{x \cdot y}{a^2 \cdot b}$$

Reordenamos la expresión

$$= \frac{x \cdot y}{a^2 \cdot b} \cdot \sqrt[3]{\frac{10 \cdot y}{9}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4xy^2}{15a^5b^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{25x^2y^2}{6ab}} = \frac{x \cdot y}{a^2 \cdot b} \cdot \sqrt[3]{\frac{10 \cdot y}{9}}$$

NÚMEROS REALES. Multiplicación de Radicales con Distintos índices.

Para multiplicar radicales con distintos índices, debemos primero lograr que tengan iguales índices.

Multiplicación de Raíces con distintos Índices

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

1ro. Hacemos que tengan igual índice

$$\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b} = a^{\frac{1}{k}} \cdot b^{\frac{1}{k}}$$

Para entender el procedimiento con el que igualamos los índices, debemos recordar que los radicales son potencias con exponente fraccionario.

Tener igual índice es equivalente a decir que las fracciones de los exponentes tengan igual denominador. **¿Cómo lo hacemos?**.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}}$$

El procedimiento lo aprendimos en suma de fracciones con distintos denominadores.

Recordemos. Suma de Fracciones con Distinto denominador

Buscamos el m.c.m., que será el denominador de la nueva fracción.

$$\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \qquad \text{m.c.m.}_{m,n} = k$$

Dividimos el m.c.m. entre cada denominador inicial.

$$\boxed{k \div m} \leftarrow \frac{1}{m} \qquad \frac{1}{n} \rightarrow \boxed{k \div n}$$

Los cocientes resultantes multiplican al numerador correspondiente.

$$\boxed{(k \div m) \cdot 1} \rightarrow \frac{1}{m} = \frac{(k \div m) \cdot 1}{k}$$

$$\boxed{(k \div n) \cdot 1} \rightarrow \frac{1}{n} = \frac{(k \div n) \cdot 1}{k}$$

Aplicamos a los exponentes fraccionarios

Sabemos que los numeradores de las fracciones son los exponentes de las cantidades subradicales, y los denominadores son los índices.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}}$$

Indices: n , m

Buscamos el **m.c.m.** de los índices, el cual será el nuevo índice de las raíces.

$$\text{m.c.i.}_{\{m,n\}} = k$$

El cociente obtenido, será el nuevo índice.

$$a^{\frac{\ }{k}} \cdot a^{\frac{\ }{k}} = \sqrt[k]{\quad} \cdot \sqrt[k]{\quad}$$

Dividimos este nuevo índice entre los índices iniciales.

$$k \div m \qquad k \div n$$

Los cocientes obtenidos se multiplican por los exponentes de las cantidades subradicales

$$\sqrt[k]{a^{k\div n}} \cdot \sqrt[k]{b^{k\div m}}$$

Ahora tenemos una multiplicación de radicales con iguales índices, que ya aprendimos cómo operar.

Colocamos una sola raíz con dicho índice y se multiplican las cantidades subradicales. Veamos un sencillo ejemplo.

$$\sqrt[k]{a^{k\div n}} \cdot \sqrt[k]{b^{k\div m}} = \sqrt[k]{a^{k\div n} \cdot b^{k\div m}}$$

Ejemplo

$$\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$$

1 **Buscamos el m.c.m. de los índices.** El m.c.m. entre 4 y 6 es 12.

Puedes ver el procedimiento en la sección de múltiplos y divisores.

2 **Colocamos las raíces con el nuevo índice.**

$$\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{\quad} \cdot \sqrt[12]{\quad}$$

3 **Efectuamos las divisiones y multiplicaciones.**

Dividimos entre los índices:

$12 \div 4 = 3 \quad , 12 \div 6 = 2$

Multiplicamos por los exponentes de las cantidades subradicales:

$3 \cdot 1 = 3 \quad , 2 \cdot 1 = 2$

$$\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a^2}$$

4 **Multiplicación de radicales con iguales índices.**

Para multiplicar radicales con iguales índices escribimos una sola raíz con dicho índice y multiplicamos las cantidades subradicales.

$$\sqrt[12]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a^2} = \sqrt[12]{a^3 \cdot a^2}$$
$$= \sqrt[12]{a^5}$$

$$\boxed{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{a^5}}$$

NÚMEROS REALES. División de Radicales con Distintos índices.

Para dividir radicales con distintos índices, debemos primero lograr que tengan iguales índices.

División de Raíces con distintos Índices

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

1ro. Hacemos que tengan igual índice

$$\frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{k}}}{b^{\frac{1}{k}}}$$

Para entender el procedimiento con el que igualamos los índices, debemos recordar que los radicales son potencias con exponente fraccionario.

Tener igual índice es equivalente a decir que las fracciones de los exponentes tengan igual denominador. **¿Cómo lo hacemos?**.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}}$$

El procedimiento lo aprendimos en suma de fracciones con distintos denominadores.

Recordemos. podemos revisar en la página 8.

Aplicamos a división de potencias con exponentes fraccionarios

Sabemos que los numeradores de las fracciones son los exponentes de las cantidades subradicales, y los denominadores son los índices.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{m}}}$$

Indices: n , m

Buscamos el **m.c.m.** de los índices, el cual será el nuevo índice de las raíces.

$$m.c.i._{\{m,n\}} = k$$

El cociente obtenido, será el nuevo índice.

$$\frac{a^{\frac{}{k}}}{a^{\frac{}{k}}} = \frac{\sqrt[k]{}}{\sqrt[k]{}}$$

Dividimos este nuevo índice entre los índices iniciales.

$$k \div m \qquad k \div n$$

Los cocientes obtenidos se multiplican por los exponentes de las cantidades subradicales

$$\frac{\sqrt[k]{a^{k \div n}}}{\sqrt[k]{b^{k \div m}}}$$

Ahora tenemos una multiplicación de radicales con iguales índices, que ya aprendimos cómo operar.

Colocamos una sola raíz con dicho índice, y se multiplican las cantidades subradicales.

$$\frac{\sqrt[k]{a^{k \div n}}}{\sqrt[k]{b^{k \div m}}} = \sqrt[k]{\frac{a^{k \div n}}{b^{k \div m}}}$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo

Efectuar la división de radicales con distintos índices $\dfrac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[10]{a^3}}$

1 **Buscamos el m.c.m. de los índices.** El m.c.m. entre 6 y 10 es 30.

Puedes ver el procedimiento en la sección de múltiplos y divisores.

2 **Colocamos las raíces con el nuevo índice.**

$$\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[10]{a^3}} = \frac{\sqrt[30]{}}{\sqrt[30]{}}$$

$$\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{a^3} \cdot \sqrt[12]{a^2}$$

3 **Efectuamos las divisiones y multiplicaciones.**

Dividimos entre los índices:

$$30 \div 6 = 5 \quad , \quad 30 \div 10 = 3$$

Multiplicamos por los exponentes de las cantidades subradicales:

$$5 \cdot 7 = 35 \quad , 3 \cdot 3 = 9$$

$$\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[10]{a^3}} = \frac{\sqrt[30]{a^{35}}}{\sqrt[30]{a^9}}$$

División de radicales con iguales índices.

Para dividir radicales con iguales índices escribimos una sola raíz con dicho índice y dividimos las cantidades subradicales.

$$\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[10]{a^3}} = \frac{\sqrt[30]{a^{35}}}{\sqrt[30]{a^9}} = \sqrt[30]{\frac{a^{35}}{a^9}}$$

Efectuamos la división de potencias con igual base. $= \sqrt[30]{a^{26}}$

Escribimos la raíz en forma de potencia $= a^{26/30}$

Simplificamos la fracción dividiendo numerador y denominador entre 2. $= a^{13/15}$

Escribimos como una raíz.

$$\frac{\sqrt[6]{a^7}}{\sqrt[10]{a^3}} = \sqrt[15]{a^{13}}$$

A Practicar

Simplificar las raíces a la mínima expresión

1. $\sqrt{48}$
2. $\sqrt{4725}$
3. $\sqrt[3]{6750}$
4. $\sqrt[5]{243m^6}$
5. $\sqrt[4]{1024a^{15}b^9}$
6. $\sqrt[3]{1296x^8y^{10}}$

---

7. $\sqrt{\dfrac{135a^3b^9}{75a^7b}}$
8. $\dfrac{\sqrt[5]{512x^9y^7}}{\sqrt[5]{16x^4y}}$
9. $\dfrac{\sqrt[3]{12a^4b^8}\cdot\sqrt[3]{144a^5b^3}}{\sqrt[3]{25a^4b}\cdot\sqrt[3]{5a^9b^7}}$
10. $\dfrac{\sqrt[6]{540a^5b^6}\cdot\sqrt[6]{576a^5b^8}}{\sqrt[6]{20a^3b^9}\cdot\sqrt[6]{405ab^7}}$
11. $\dfrac{\sqrt[4]{121a^5b^6}\cdot\sqrt[4]{363a^5b^8}}{\sqrt[4]{9a^3b^9}\cdot\sqrt[4]{48ab^7}}$
12. $\dfrac{\sqrt[3]{10\sqrt{a^5b^6}}\cdot\sqrt[6]{1000a^7b^9}}{\sqrt[6]{8a^5b^{11}}\cdot\sqrt{2a\sqrt[3]{ab^4}}}$

---

13. $\sqrt{2a^3b^5}\cdot\sqrt[3]{3ab}$
14. $\sqrt[6]{12a^2b^4}\cdot\sqrt[9]{15a^3b^7}$
15. $\sqrt[3]{5a^2\sqrt{b}}\cdot\sqrt{\sqrt{15a^3}\cdot b^3}$
16. $\dfrac{\sqrt{15a^5b^9}}{\sqrt[3]{25a^2b}}$
17. $\dfrac{a\sqrt[3]{6a^2b^5}}{\sqrt[6]{4a^5b^7}}$
18. $\dfrac{15\sqrt[3]{4a^{11}b^9}}{b\sqrt[6]{5a^5b}}$

¿Lo Hicimos Bien?

1. $4\sqrt{3}$
2. $15\sqrt{21}$
3. $15\sqrt[3]{2}$
4. $3m^2$
5. $4a^3b^2\sqrt[4]{4a^3b}$
6. $6x^2y^3\sqrt[3]{6x^2y}$

---

7. $\dfrac{3b^2}{\sqrt{5a^2}}$
8. $2xy\sqrt[5]{y}$
9. $\dfrac{12b}{5a\sqrt[3]{ab}}$
10. $2a\sqrt[6]{\dfrac{3}{5b^2}}$
11. $\dfrac{11a}{2b}\sqrt{\dfrac{ab}{3}}$
12. $5\sqrt{a}$

---

13. $ab^2\sqrt[6]{72a^5b^5}$
14. $b\sqrt[18]{3^5 4^3 5^2 a^{12} b^8}$
15. $ab\sqrt[12]{3^3 5^7 a^5 b^8}$
16. $ab^4\sqrt[6]{\dfrac{27a^5b}{5}}$
17. $\sqrt[6]{9a^5b^3}$
18. $\sqrt[3]{60a^6b^5}$