Método de Cramer

Marco Teórico

El determinante se define de una manera aparentemente arbitraria, sin embargo, cuando se mira a la solución general de una matriz 2×2 , el razonamiento por la que se define de esta manera es evidente.

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

Al resolver el sistema anterior para y y x, se obtiene lo siguiente:

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$
$$x = \frac{bf - de}{ad - bc}$$

Ten en cuenta que el sistema puede ser representado por la matriz y las soluciones se puede escribir como cocientes de dos determinantes. El factor determinante en el denominador es la matriz de coeficientes. El numerador de la solución x es el determinante de la nueva matriz cuyas columnas se componen de los coeficientes y y los coeficientes de solución. El numerador de la solución y es el determinante de la nueva matriz compuesta de los coeficientes x y los coeficientes de solución.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Esta es una fantástica mejora con respecto a los sistemas que utilizan la sustitución o eliminación de la solución. La Regla de Cramer también trabaja con matrices de orden mayor. Para un sistema de 3 variables y 3 ecuaciones el razonamiento es idéntico.

$$ax + by + cz = j$$
$$dx + ey + fz = k$$
$$gx + hy + iz = l$$

El sistema se puede representar como una matriz.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

Las tres soluciones se pueden representar como una relación de los factores determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Recuerde que la evaluación de los determinantes de matrices 3×3 usando la regla de Sarrus es muy eficiente.

Ejemplo A

Representar el siguiente sistema de ecuaciones como una ecuación matricial.

$$y - 13 = -3x$$
$$x = 19 - 4y$$

Solución: Primero escribir cada ecuación en forma estándar.

$$3x + y = 13$$
$$x + 4y = 19$$

Luego escribe como un momento de la matriz coeficiente de una matriz variable igual a una matriz de solución.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Ejemplo B

Resuelve el sistema del Ejemplo A utilizando la regla de Cramer.

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 19 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{13 \cdot 4 - 19 \cdot 1}{3 \cdot 4 - 1 \cdot 1} = \frac{33}{11} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 19 - 13}{11} = \frac{44}{11} = 4$$

Ejemplo C

Resolver y en el siguiente sistema

$$x + 2y - z = 0$$
$$7x - 0y + z = 14$$
$$0x + y + z = 10$$

Solución: Si ha intentado resolver este usando la eliminación, se tardaría más de una página de la escritura y reescritura de resolver. La Regla de Cramer acelera el proceso de resolución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 14 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{14+0+(-70)-0-10-0}{0+0+(-7)-0-1-14} = \frac{-66}{-22} = 3$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resolver por el método de Cramer:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

x=1; y=2; z=3

2. Resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x + z = 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 21$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -8 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$x = \frac{21}{2} \qquad y = \frac{-8}{2} = -4 \qquad z = \frac{-11}{2}$$

x=21/2 y=-4 z=-11/2

3. Resolver:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

Solución:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

x=1 , y=-2, z=3

4. Resolver:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 10 \\ 4x - y + z = 4 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-36}{-18} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-54}{-18} = 3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 10\\ 4 & -1 & 4\\ -2 & 1 & -2\end{vmatrix}}{-18}=\frac{18}{-18}=-1$$

x=2, y=3 ,z=-1

5. Resolver:

$$\begin{cases}2x-y+z-2t=-5\\ 2x+2y-3z+t=-1\\ -x+y-z=-1\\ 4x-3y+2z-3t=-8\end{cases}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -3 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 0\\ 4 & -3 & 2 & -3\end{vmatrix}=-10$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-5 & -1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & -3 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 0\\ 8 & -3 & 2 & -3\end{vmatrix}}{-10}=\frac{0}{-10}=0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -3 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 0\\ 4 & 8 & 2 & -3\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-10}{-10}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & -5 & -2\\ 2 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 0\\ 4 & -3 & 8 & -3\end{vmatrix}}{-10}=\frac{-20}{-10}=2$$

x=0 ,y=1 ,z=2

Profesor:Militza Indaburo Fe y Alegría Versión :2016-07-06

Glosario

Una **ecuación de la matriz** representa un sistema de ecuaciones multiplicando una matriz de coeficientes y una matriz variable para obtener una matriz de solución.

Otras Referencias

http://www.vitutor.net/1/15.html

Videos.