Matriz inversa

Marco Teórico

Si premultiplicamos (multiplicamos por la izquierda) o posmultiplicamos (multiplicamos por la derecha) una matriz cuadrada por su inversa obtenemos la matriz identidad.

$$\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I}$$

¿Cómo encontrar la matriz A^{-1} si sólo tienes la matriz A?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, A^{-1} = ?$$

La respuesta es que se debe aumentar la matriz A con la matriz de la identidad y reduciendo filas.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

La fila reductora se demuestra en el Ejemplo A. La parte derecha de la matriz aumentada es la matriz inversa A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Las fracciones son generalmente inevitables al calcular inversas.

Una razón por la que las inversas son tan poderosas es que permiten que puedas resolver sistemas de ecuaciones con la misma lógica que una ecuación lineal. Considera el siguiente sistema basado en los coeficientes de la matriz A de arriba.

$$x + 2y + 3z = 96$$
$$x + 0y + z = 36$$
$$0x + 2y - z = -12$$

Al escribir este sistema como una ecuación matricial que se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 36 \\ -12 \end{bmatrix}$$
$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 36 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Si esto fuera una ecuación lineal normal, tendría que multiplicar ambos lados por el inverso multiplicativo del coeficiente. Has lo mismo en este caso.

$$A^{-1} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 96 \\ 36 \\ -12 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 96 \\ 36 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Todo lo que queda es realizar la multiplicación de matrices para obtener la solución. Véase el ejemplo B.

Ejemplo A

Mostrar los pasos para encontrar la matriz inversa Ade la sección de orientación.

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \\ -I \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ & \rightarrow & \\ \rightarrow & +II & \rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ccc} & \rightarrow & \\ \rightarrow & \div(-2) & \rightarrow \\ \rightarrow & \div(-3) & \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{array}{ccc} \rightarrow & -3III & \rightarrow \\ \rightarrow & -III & \rightarrow \\ & \rightarrow & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{array}{c} \rightarrow \quad -2II \quad \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

La matriz de la derecha es la matriz inversa A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ejemplo B

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando matrices inversas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96 \\ 36 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 96 \\ 36 \\ -12 \end{bmatrix} \\ A^{-1} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 96 \\ 36 \\ -12 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 96 \\ 36 \\ -12 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 96 \\ 36 \\ -12 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \cdot 96 + \frac{4}{3} \cdot 36 + \frac{1}{3} \cdot (-12) \\ \frac{1}{6} \cdot 96 - \frac{1}{6} \cdot 36 + \frac{1}{3} \cdot (-12) \\ \frac{1}{3} \cdot 96 - \frac{1}{3} \cdot 36 - \frac{1}{3} \cdot (-12) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 24 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo C

Encontrar la inversa de la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 24 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} \rightarrow \\ -4I \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Esta matriz no es invertible, ya que sus filas no son linealmente independientes. Para poner a prueba para ver si una matriz cuadrada es invertible, compruebe si el determinante es cero. Si el determinante es cero, entonces la matriz no es invertible porque las filas no son linealmente independientes.

EJERCICIOS RESUELTOS

1 Calcular por el método de Gauss la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Construir una matriz del tipo M = (A | I)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Utilizar el método Gauss para transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: A^{-1}.

$F_2 - F_1$

$F_3 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_2 - F_3$

$F_1 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$(-1)\ F_2$

La matriz inversa es:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2

Calcular por el método de Gauss la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Construir una matriz del tipo M = (A | I)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2 Utilizar el método Gauss para transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: A^{-1}.

$$\xrightarrow{f_3-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Hallar por determinantes la matriz inversa de:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{vmatrix}=54 \qquad A^{*}=\begin{pmatrix} 25 & -9 & 4 \\ 7 & -9 & -14 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^{*}\right)^{t}=\begin{pmatrix} 25 & 7 & -1 \\ -9 & -9 & 9 \\ 4 & -14 & 2 \end{pmatrix} \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{25}{54} & \frac{7}{54} & \frac{-1}{54} \\ \frac{-9}{54} & \frac{-9}{54} & \frac{9}{54} \\ \frac{4}{54} & \frac{-14}{54} & \frac{2}{54} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{25}{54} & \frac{7}{54} & \frac{-1}{54} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{27} & \frac{-7}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$$

4 ¿Para qué valores de x la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ no admite matriz inversa?

Solución:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0-m^2-6-0-1-0=-m^2-7$$

$$-m^2-7=0 \qquad m=\pm\sqrt{-7}\notin\mathbb{R}$$

Para cualquier valor real de m existe la matriz inversa A^{-1}

5 ¿Para qué valores de x la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ no admite matriz inversa?

Solución:

$$A=\begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=x$$

Para x = 0 la matriz A no tiene inversa.

Glosario

Inversos multiplicativos son dos números o matrices cuyo producto es una o la matriz de identidad.

Otras Referencias

http://www.vitutor.com/algebra/matrices/i_e.html

Videos.