8

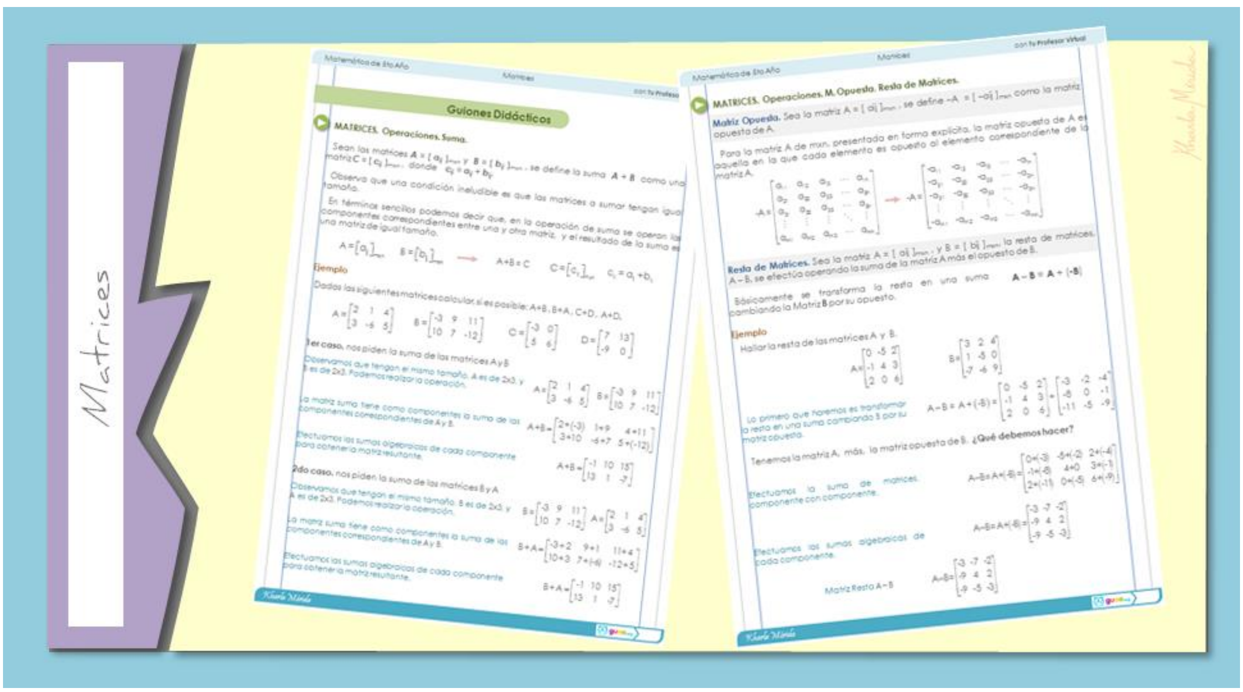
8va Unidad

Matrices

8.2 Operaciones

"Y si…" es un par de sonidos que usualmente preceden a la duda, a la sensación de no lograr… Usémoslo más para algo como "Y si trabajamos en función de lograrlo"

Descripción



Las operaciones entre matrices, y sus propiedades establecen las formas en que se relacionan las matrices, y cómo efectuar el cálculo de operadores definidos en base a matrices. Conozcamos cómo se efectúan.

Conocimientos Previos Requeridos

Definición de Matrices, Operaciones entre Números Reales.

Contenido

Operaciones de Suma y Multiplicación de Matrices, Propiedades de Suma y Multiplicación de Matrices.

Videos Disponibles

MATRICES. Operaciones. Suma

MATRICES. Operaciones. Multiplicación por un Escalar

MATRICES. Operaciones. M. Opuesta, Resta de Matrices

MATRICES. Operaciones. Multiplicación

MATRICES. Propiedades de la Suma. Conmutativa, Asociativa, Elementos Neutro, Opuesto, Distributiva de un Escalar por una Suma de Matrices

MATRICES. Propiedades de la Multiplicación por un Escalar

MATRICES. Propiedades de la Multiplicación. Conmutativa, Asociativa, Elemento Neutro, Simétrico

MATRICES. Propiedades de Matriz Transpuesta y de Matriz Inversa

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para familiarizarse con los conceptos nuevos y fortalecer el lenguaje operativo.

Guiones Didácticos

MATRICES. Operaciones. Suma.

Sean las matrices $\boldsymbol{A} = [\ \boldsymbol{a_{ij}}\ ]_{mxn}$ y $\boldsymbol{B} = [\ \boldsymbol{b_{ij}}\ ]_{mxn}$, se define la suma $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ como una matriz $\boldsymbol{C} = [\ \boldsymbol{c_{ij}}\ ]_{mxn}$, donde $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}$.

Observa que una condición ineludible es que las matrices a sumar tengan igual tamaño.

En términos sencillos podemos decir que, en la operación de suma se operan las componentes correspondientes entre una y otra matriz, y el resultado de la suma es una matriz de igual tamaño.

$$A = \left[a_{ij}\right]_{mxn} \quad B = \left[b_{ij}\right]_{mxn} \quad \longrightarrow \quad A + B = C \quad C = \left[c_{ij}\right]_{mxn} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ejemplo

Dadas las siguientes matrices calcular, si es posible: A+B , B+A , C+D , A+D.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 11 \\ 10 & 7 & -12 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

1er caso. nos piden la suma de las matrices A y B

Observamos que tengan el mismo tamaño. A es de 2x3, y B es de 2x3. Podemos realizar la operación.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 11 \\ 10 & 7 & -12 \end{bmatrix}$$

La matriz suma tiene como componentes la suma de las componentes correspondientes de A y B.

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + (-3) & 1 + 9 & 4 + 11 \\ 3 + 10 & -6 + 7 & 5 + (-12) \end{bmatrix}$$

Efectuamos las sumas algebraicas de cada componente para obtener la matriz resultante.

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 15 \\ 13 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

2do caso. nos piden la suma de las matrices B y A

Observamos que tengan el mismo tamaño. B es de 2x3, y A es de 2x3. Podemos realizar la operación.

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 11 \\ 10 & 7 & -12 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

La matriz suma tiene como componentes la suma de las componentes correspondientes de A y B.

$$B + A = \begin{bmatrix} -3 + 2 & 9 + 1 & 11 + 4 \\ 10 + 3 & 7 + (-6) & -12 + 5 \end{bmatrix}$$

Efectuamos las sumas algebraicas de cada componente para obtener la matriz resultante.

$$B + A = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 15 \\ 13 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Nota: la matriz resultante de la suma A + B es igual a la matriz resultante de la suma B+A. Esto ocurre para cualquier suma de matrices, es una propiedad que estudiaremos formalmente en otra lección.

$$A+B=\begin{bmatrix}-1 & 10 & 15\\ 13 & 1 & -7\end{bmatrix} \qquad B+A=\begin{bmatrix}-1 & 10 & 15\\ 13 & 1 & -7\end{bmatrix}$$

La suma C+D puede efectuarse porque ambas matrices son del mismo tamaño, 2x2, dejaremos esta operación para que tu la realices.

La operación A + D no puede efectuarse porque las matrices no son del mismo tamaño, A es de 2x3 y D es de 2x2.

MATRICES. Operaciones. Multiplicación por un Escalar.

Sea la matriz $\mathbf{A} = [\ a_{ij}\ ]_{mxn}$ y k un número real, se define la multiplicación $\mathbf{kA}$ como $[\ ka_{ij}\ ]_{mxn}$, es decir, para la matriz **A** de mxn presentada en forma explícita la multiplicación de un escalar k por la matriz **A** consiste en multiplicar **k** por cada elemento de la matriz.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} \rightarrow kA=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n}\\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & ka_{m3} & \cdots & ka_{mn}\end{bmatrix}$$

Veamos un ejemplo de cómo efectuar el producto de un escalar por una matriz.

Ejemplo

Sean las matrices A y B, calcular 3A + (-5)B .

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ 6 & -7\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}7 & 13\\ -9 & 0\end{bmatrix}$$

Primeramente hallamos 3A y -5B

$$3A=\begin{bmatrix}-9 & -15\\ 18 & -21\end{bmatrix} \qquad -5B=\begin{bmatrix}-35 & -65\\ 45 & 0\end{bmatrix}$$

Calculamos 3A + (-5)B, sumamos componente con componente, y efectuamos las operaciones indicadas.

$$3A+(-5B)=\begin{bmatrix}-9+(-35) & -15+(-65)\\ 18+45 & -21+0\end{bmatrix}$$

Efectuamos la suma 3A + (-5)B

$$3A+(-5B)=\begin{bmatrix}-44 & -80\\ 63 & -21\end{bmatrix}$$

MATRICES. Operaciones. M. Opuesta, Resta de Matrices.

Matriz Opuesta. Sea la matriz $A = [\ aij\ ]_{mxn}$, se define $-A = [\ -aij\ ]_{mxn}$ como la matriz opuesta de A.

Para la matriz A de mxn, presentada en forma explícita, la matriz opuesta de A es aquella en la que cada elemento es opuesto al elemento correspondiente de la matriz A.

$$-A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & -a_{m3} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

Resta de Matrices. Sea la matriz $A = [\ aij\ ]_{mxn}$, y $B = [\ bij\ ]_{mxn}$, la resta de matrices, A – B, se efectúa operando la suma de la matriz A más el opuesto de B.

Básicamente se transforma la resta en una suma cambiando la Matriz **B** por su opuesto.

$$\mathbf{A - B = A + (-B)}$$

Ejemplo

Hallar la resta de las matrices A y B.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 0 \\ -7 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

Lo primero que haremos es transformar la resta en una suma cambiando B por su matriz opuesta.

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -8 & 0 & -1 \\ -11 & -5 & -9 \end{bmatrix}$$

Tenemos la matriz A, más, la matriz opuesta de B. **¿Qué debemos hacer?**

Efectuamos la suma de matrices, componente con componente.

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 0+(-3) & -5+(-2) & 2+(-4) \\ -1+(-8) & 4+0 & 3+(-1) \\ 2+(-11) & 0+(-5) & 6+(-9) \end{bmatrix}$$

Efectuamos las sumas algebraicas de cada componente.

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -2 \\ -9 & 4 & 2 \\ -9 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Matriz Resta A – B

$$A - B = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -2 \\ -9 & 4 & 2 \\ -9 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

MATRICES. Operaciones. Multiplicación.

Condición necesaria para efectuar multiplicación de matrices.

Si A es una matriz de orden mxn, B debe ser una matriz de orden nxr.

Esto significa que el número de columnas de la matriz A debe ser igual al número de filas de la matriz B. y resulta una matriz de orden mxr.

$$\mathbf{A}_{mxn} \quad \mathbf{B}_{nxr} \quad \rightarrow \quad (\mathbf{AB})_{mxr}$$

Sean las matrices A_{mxn} , B_{nxr} se define la matriz Producto AB como la matriz M_{mxr} , $M = [mij]_{mxr}$ tal que.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2r} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \quad M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1r} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2r} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nr} \end{bmatrix}$$

- m_{11} es igual a la suma de los productos de los elementos de la **1ra fila de A** con los elementos de la **1ra columna de B**,
- m_{12} es igual a la suma de los productos de los elementos de la **1ra fila de A** con la **2da columna de B**,
- m_{1r} es igual a la suma de los productos de los elementos de la **1ra fila de A** con los elementos de la **errésima columna de B**.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} \cdot \\ a_{12} \cdot \\ a_{13} \cdot \\ \vdots \\ a_{1n} \cdot \end{matrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2r} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

Nota: Para obtener los elementos de la 1ra fila de la matriz producto M, se opera la 1ra fila de A, con cada columna de B.

$$m_{11} = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} + \cdots + a_{1n}\cdot b_{n1}$$
$$m_{12} = a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} + \cdots + a_{1n}\cdot b_{n2}$$
$$m_{13} = a_{11}\cdot b_{13} + a_{12}\cdot b_{23} + a_{13}\cdot b_{33} + \cdots + a_{1n}\cdot b_{n3}$$
$$m_{1r} = a_{11}\cdot b_{1r} + a_{12}\cdot b_{2r} + a_{13}\cdot b_{3r} + \cdots + a_{1n}\cdot b_{nr}$$

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1r} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2r} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nr} \end{bmatrix}$$

Para obtener los elementos de la 2da fila de la matriz producto M, se opera la 2da fila de A, con cada columna de B.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{21} \cdot \\ a_{22} \cdot \\ a_{23} \cdot \\ \vdots \\ a_{2n} \cdot \end{matrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2r} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$m_{21}=a_{21}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}+\cdots+a_{1n}\cdot b_{n1}$$
$$m_{22}=a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+a_{23}\cdot b_{32}+\cdots+a_{2n}\cdot b_{n2}$$
$$m_{13}=a_{21}\cdot b_{13}+a_{22}\cdot b_{23}+a_{23}\cdot b_{33}+\cdots+a_{2n}\cdot b_{n3}$$
$$m_{2r}=a_{21}\cdot b_{1r}+a_{22}\cdot b_{2r}+a_{23}\cdot b_{3r}+\cdots+a_{2n}\cdot b_{nr}$$

$$M=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1r} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2r} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nr} \end{bmatrix}$$

En general para obtener un elemento específico de la matriz producto basta con operar la fila de A correspondiente a la fila de dicho elemento, con la columna de B correspondiente a la columna del elemento buscado.

Ejemplo

Para obtener el elemento m_{54}, opero la fila 5 de A con la columna 4 de B.

$\boldsymbol{m_{54}}$

Operamos

fila 5 de A → columna 4 de *B*

Ejemplo

Hallemos el producto de las matrices A y B.

La matriz A es de 2x2, y la matriz B es de 2x2, recordemos que para multiplicar matrices, el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la 2da, A y B satisfacen esta condición.

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad A\cdot B=\underset{2\text{x}2}{\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}}\cdot\underset{2\text{x}2}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}}$$

Y el tamaño de la matriz producto esta dado por el número de filas de la 1ra por el número de columnas de la 2da, así que la matriz producto es de orden 2.

El elemento 11 de la matriz producto se obtiene de operar la fila 1 de A con la columna 1 de B.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & \\ & \end{bmatrix}$$

El elemento 12 de la matriz producto se obtiene de operar la fila 1 de A con la columna 2 de B.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 5 \cdot 6 \\ & \end{bmatrix}$$

El elemento 21 de la matriz producto se obtiene de operar la fila 2 de A con la columna 1 de B.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 5 \cdot 6 \\ 7 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & \end{bmatrix}$$

Y por ultimo, el elemento 22 de la matriz producto se obtiene de operar la fila 2 de A con la columna 2 de B, efectuamos las operaciones básicas en cada componente y obtenemos la matriz producto AB.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & -2 \cdot 1 + 5 \cdot 6 \\ 7 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 7 \cdot 1 + 4 \cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 21 & 31 \end{bmatrix}$$

MATRICES. Propiedades de la Suma. Conmutativa, Asociativa, Elementos Neutro, Opuesto, Distributiva de un Escalar por una Suma de Matrices.

Sean las matrices A, B y C de orden mxn, se cumplen las siguientes propiedades:

Conmutatividad (Propiedad Conmutativa). Esta propiedad la conocemos desde el estudio de los números naturales. Simbólicamente consiste en:

A + B = **B + A** el orden de los sumandos no altera la suma.

En la lección de suma de matrices, vimos la suma de las matrices A y B en un orden y en el otro, y observamos que el resultado es el mismo, eso es porque en las matrices se cumple la propiedad conmutativa de la suma.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 11 \\ 10 & 7 & -12 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 15 \\ 13 & 1 & -7 \end{bmatrix} \qquad B + A = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 15 \\ 13 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

Asociatividad o Propiedad Asociativa. Consiste en que:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Esto es, la suma de tres matrices A, B y C no se altera si se efectúa la suma de A y B y el resultado con C, o si se efectúa la suma de A con la suma de B + C.

Elemento Neutro de la Suma. También conocida como matriz nula, representada con O mayúscula, esta matriz satisface la condición de que A + O = O + A = A.

Podemos concluir de forma simple que cuando sumamos una matriz cualquiera con la matriz nula resulta siempre dicha matriz.

$$A + O = A$$

Elemento simétrico u opuesto. Para la Matriz A, existe una matriz B, tal que

$$A + B = B + A = 0$$

Esta matriz B se denota por –A y es llamada opuesta de A, cuyas componentes son opuestas a las de la matriz A.

$$B = -A = [-a_{ij}]$$

La suma de una matriz con su opuesta resulta la matriz nula.

MATRICES. Propiedades de la Multiplicación por un Escalar.

Sean las matrices **A**= [a_{ij}]$_{mxn}$ y **B** = [b_{ij}]$_{nxp}$, se define el producto **A.B** como una matriz **C** = [c_{ij}]$_{mxp}$ para el que se cumple que

Distributiva de un escalar por la suma de matrices. El producto de un escalar ***k*** por la suma de matrices ***A*** + ***B*** es igual a la suma de los productos de k por la matriz A + k por la matriz B.

$$k(A + B) = kB + kA$$

Distributiva de la suma de dos escalares por una matriz. El producto de la suma de dos escalares k + c por la matriz ***A*** es igual a la suma de los productos de k por ***A*** más c por ***A***.

$$(k+c)A = kA + cA$$

Asociativa de multiplicación. El producto de dos escalares k y c por una matriz ***A*** es igual al producto del escalar k por el producto de c por la matriz ***A*** .

$$(kc)A = k(cA)$$

Identidad multiplicativa. el producto del escalar 1 por una matriz ***A*** es igual a la matriz ***A***.

$$1.A = A$$

MATRICES. Propiedades de la Multiplicación Conmutativa, Asociativa, Elemento Neutro, Simétrico.

Sean A_{mxn} , B_{nxp} , y C_{pxq} se cumplen las siguientes propiedades:

Asociatividad o Propiedad Asociativa. El producto de las matrices A, B y C puede ejecutarse hallando el producto de A por B y luego por C, o hallando el producto de A por el producto de B y C.

$$(AB)C = A(BC)$$

Distributiva a la Izquierda. El producto de la suma de las matrices A y B por la matriz C es igual a la suma de los productos de las matrices A y C mas el producto de las matrices B y C.

$$(A+B)C = AC+BC$$

Distributiva a la Derecha. El producto de la suma de la matriz A por el producto de las matrices B y C es igual a la suma de los productos de las matrices A y B mas el producto de las matrices A y C.

$$A\cdot(B+C) = AB + AC$$

Potencia de una Matriz. Sea una matriz A_{nxn}, y k un escalar natural, se define **A** a la k como sigue, A a la k es igual a A por A por A por A por A por, A, k veces.

$$A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot A\cdot A\cdot A\ldots\cdot A}_{k \text{ veces}}$$

Matriz Identidad. Sea I_n la matriz identidad presentada en la tercera lección de matrices, se cumple que

$$I\cdot A = A\cdot I = A$$

MATRICES. Propiedades de Matriz Transpuesta y de Matriz Inversa.

Transpuesta de la Transpuesta, de un Escalar por una Matriz y de Suma de Matrices. Sean las matrices ***A*** y **B** de orden mxn, y k un escalar real. Se cumple que:

- La transpuesta de la transpuesta de A, es A, $(A^t)^t = A$.
- La transpuesta de k por A, es k por la transpuesta de A, $(k\cdot A)^t = k\cdot A^t$
- La transpuesta de la suma de A y B, es la suma de las transpuestas de A y B, $(A + B)^t = A^t + B^t$.

Transpuesta de Un Producto. Sean las matrices A y B de orden n. Se cumple que:

La transpuesta del producto de A y B, es el producto de las transpuestas de B y A.

$$(A.B)^t = B^t.A^t$$

Nota: Al aplicar la transposición a un producto de matrices cambia el orden de las matrices ya transpuestas.

Propiedades de la Matriz Inversa. Sean las Matrices A, B, y C, de orden n, se cumple que:

- Si **B** es inversa de **A**, y **C** es inversa de **A**, entonces **B** = **C**, esto implica que la matriz inversa de A s única.
- La inversa de la inversa de la Matriz **A**, es la matriz **A**. $(A^{-1})^{-1} = A$
- La inversa de la transpuesta de la matriz **A**, es la transpuesta de la inversa de la matriz **A**. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Propiedades de la Matriz Inversa. Sean las Matrices A y B, de orden n, y k un escalar, se cumple que:

- La inversa de la potencia k de la matriz **A**, es la potencia k de la inversa de la matriz **A**.
- la inversa de k por la matriz **A**, es el inverso de k por la matriz inversa de **A**.
  $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$
- la inversa del producto de la matriz **A** y la matriz **B**, es igual al producto de la inversa de la matriz **B** por la inversa de la matriz **A**. $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}^{-1}$

A Practicar

1. Verifique cuáles de las siguientes matrices se pueden sumar y determine la suma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 11 \\ 0 & 9 & -4 \\ 7 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 12 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Halle una matriz D tal que 2A + B - D sea la matriz nula de 3x2, para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 12 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

3. En los siguientes problemas efectúe el cálculo.

8. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

4. Dada las siguientes matrices y los escalares a y b

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

a = 4
b = -7

Comprobar las siguientes igualdades

a. A + (B + C) = (A + B) + C
b. (AB)C = A(BC)
c. (a + b)C = aC + bC
d. a(B – C) = aB – aC
e. a(BC) = (aB)C = B (aC)
f. A(B – C) = AB – AC
g. (B +C)A = BA + CA

Lo Hicimos Bien?

1. $$A+D=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 7 & 14 & -1 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix} \qquad B+C=\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 14 & 3 \\ 13 & 7 \end{bmatrix}$$

2. $$D=\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 26 & 3 \\ 21 & 9 \end{bmatrix}$$

3. En los siguientes problemas efectúe el cálculo.

8. $\begin{bmatrix} 8 & 20 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -1 & 58 \\ -8 & 15 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -17 & 12 \\ -1 & 18 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 13 & 35 & 18 \\ 20 & 26 & 20 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 19 & -17 & 34 \\ 8 & -12 & 20 \\ -8 & -11 & 7 \end{bmatrix}$