1

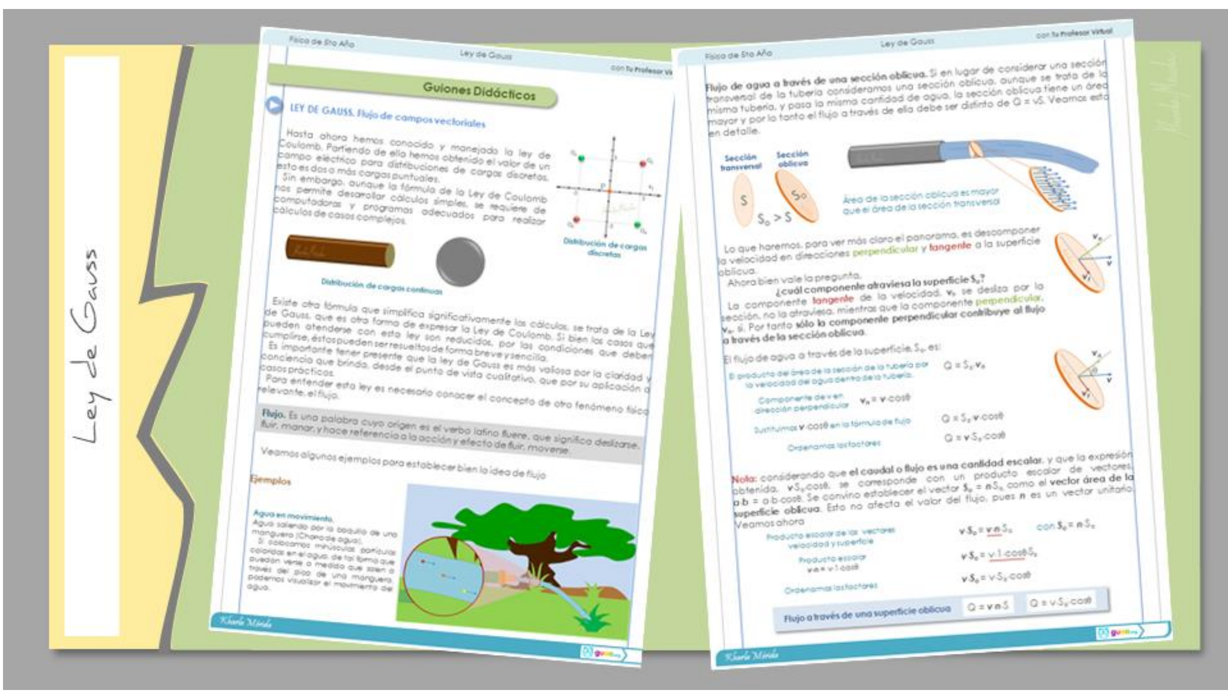
1ra Unidad

Electrostática

1.4 Ley de Gauss

Tenemos la capacidad de crear campos emocionales y espirituales para nuestra vida, de tal manera que podamos nutrirnos de los eventos a nuestro alrededor, ya sea que podamos modificarlos o no.

Descripción



Conociendo ya lo que son los campos eléctricos, es momento de facilitar el cálculo de campos eléctricos en situaciones específicas, y lograr un mejor nivel de conciencia de muchos fenómenos eléctricos antes de avanzar hacia el efecto dinámico de la electricidad. En esta sección conoceremos Ley de Gauss, sus fundamentos, características y aplicaciones, acompáñanos.

Conocimientos Previos Requeridos

Simplificación de Potencia, Operaciones de Unidades, Conversión de Unidades, Vectores, Fuerza Eléctrica, Ley de Coulomb, Campo Eléctrico.

Contenido

Energía Potencial Eléctrico, Potencial Eléctrico, Diferencia de Potencial Eléctrico, Ejercicios.

Guiones Didácticos

LEY DE GAUSS. Flujo de campos vectoriales

LEY DE GAUSS. Cálculo de flujo de campos vectoriales

LEY DE GAUSS. Definición

LEY DE GAUSS. Casos sencillos de cálculo de flujo de un campo eléctrico I

LEY DE GAUSS. Casos sencillos de cálculo de flujo de un campo eléctrico II

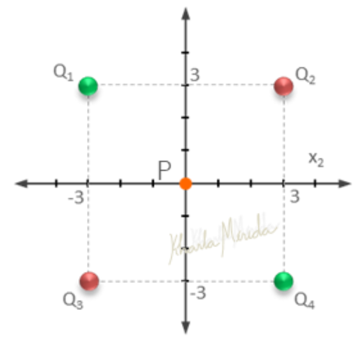
Los videos correspondientes a los guiones didácticos de este capítulo estarán disponibles en próxima entrega.

Guiones Didácticos

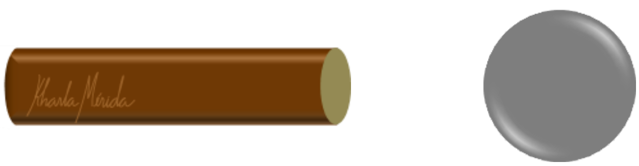
LEY DE GAUSS. Flujo de campos vectoriales

Hasta ahora hemos conocido y manejado la ley de Coulomb. Partiendo de ella hemos obtenido el valor de un campo eléctrico para distribuciones de cargas discretas, esto es dos o más cargas puntuales.

Sin embargo, aunque la fórmula de la Ley de Coulomb nos permite desarrollar cálculos simples, se requiere de computadoras y programas adecuados para realizar cálculos de casos complejos.



Distribución de cargas discretas



Distribución de cargas continuas

Existe otra fórmula que simplifica significativamente los cálculos, se trata de la Ley de Gauss, que es otra forma de expresar la Ley de Coulomb. Si bien los casos que pueden atenderse con esta ley son reducidos, por las condiciones que deben cumplirse, éstos pueden ser resueltos de forma breve y sencilla.

Es importante tener presente que la ley de Gauss es más valiosa por la claridad y conciencia que brinda, desde el punto de vista cualitativo, que por su aplicación a casos prácticos.

Para entender esta ley es necesario conocer el concepto de otro fenómeno físico relevante, el flujo.

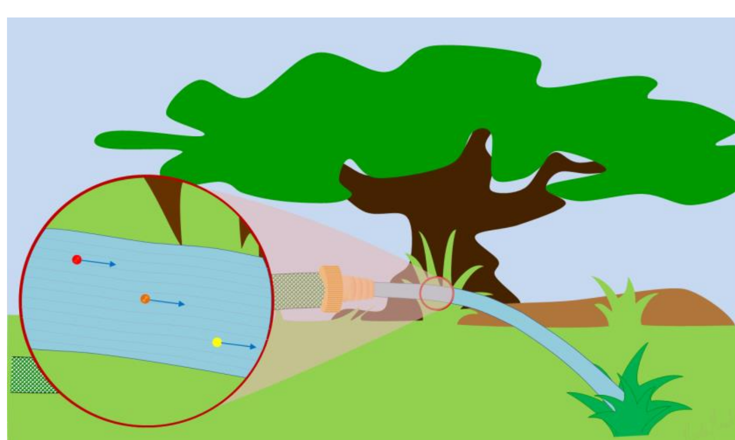
Flujo. Es una palabra cuyo origen es el verbo latino *fluere*, que significa *deslizarse*, *fluir*, *manar*, y hace referencia a la acción y efecto de *fluir*, *moverse*.

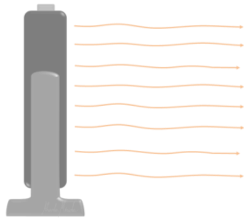
Veamos algunos ejemplos para establecer bien la idea de flujo

Ejemplos

Agua en movimiento.
Agua saliendo por la boquilla de una manguera (Chorro de agua).

Si colocamos minúsculas partículas coloridas en el agua, de tal forma que puedan verse a medida que salen a través del pico de una manguera, podemos visualizar el movimiento del agua.

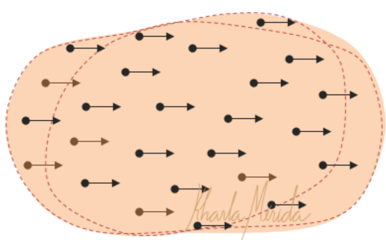




Flujo de aire.
Frente a un ventilador o a través de un ducto de ventilación.
Si colocamos algún tipo de polvo o partículas ligeras frente al ventilador veremos cómo se mueven siguiendo el movimiento del aire generado por él.

Otro concepto vital, presente siempre que hablemos de flujos, son los campos vectoriales.

Campo vectorial. Es un conjunto de vectores que representan un fenómeno físico presente en una región del espacio, de tal manera que cada punto de dicho espacio tiene asociado un vector.



Campo vectorial.
Cada punto (de los infinitos puntos) del espacio correspondiente a un campo vectorial, tiene asociado un vector.
Un campo vectorial puede representar velocidad (rapidez, dirección y sentido) de movimiento de un fluido, también la intensidad y dirección de un campo fuerza, como el gravitacional.

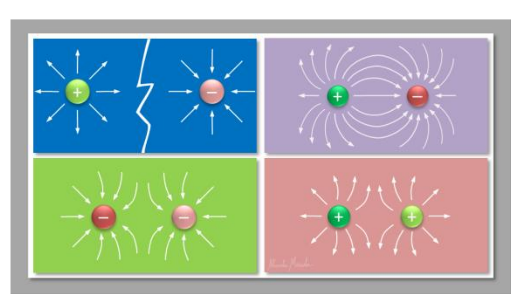
En el flujo de agua y en el flujo de aire el campo vectorial es la velocidad, ya que cada partícula de agua o aire se desplaza con la velocidad el flujo.

Campos vectoriales en electricidad

Campo magnético. Es una región del espacio en la que el campo vectorial ejerce fuerzas magnéticas sobre los materiales.
Los campos magnéticos están presentes en los imanes, y también puede ser generado por corrientes eléctricas. La letra con la que se denomina al campo magnético es B y su unidad de medida es el Tesla.

El campo magnético no produce efecto alguno sobre cargas en reposo, pero afecta cargas eléctricas en movimiento.
Si una carga en movimiento atraviesa un campo magnético, sufre la acción de una fuerza magnética, que modifica solo la trayectoria de ésta, dejando inalterado el módulo de la velocidad.

Campo electrostático. Son regiones de espacio en las que cada carga eléctrica puntual es afectada por una fuerza proporcional a su carga, que a su vez depende del punto en que se encuentre. El campo eléctrico acelera, a través de la fuerza eléctrica, a las cargas en reposo.



Este campo fue estudiado en la sección anterior, **1.3 Campo eléctrico**.

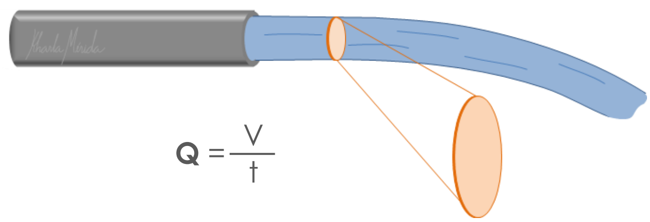
LEY DE GAUSS. Cálculo de flujo de campos vectoriales

Flujo de un campo vectorial

El estudio de un flujo en física está relacionado desplazamiento de un campo vectorial a través de una sección plana o una superficie. Veamos esto en la cotidianidad.

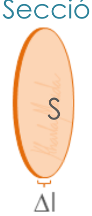
Flujo de agua en una tubería. A través de un tubo de sección transversal S fluye agua con la misma velocidad ***v*** en todos sus puntos.

Caudal, Q. Se define como la cantidad de agua (volumen, V) que atraviesa una sección de la tubería por unidad de tiempo. **Esto es el flujo de agua por la tubería**.



$$Q = \frac{V}{t}$$

Sección de la tubería



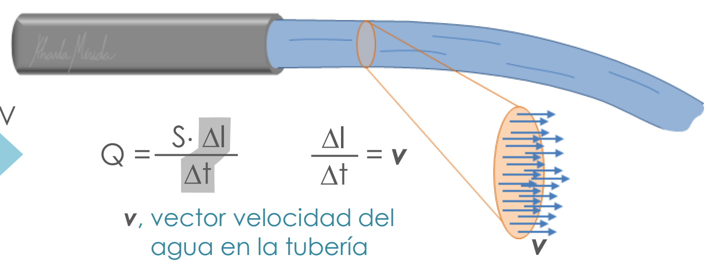
Volumen, ΔV

Si consideramos una sección de la tubería como una lámina muy delgada de agua, de longitud Δl, entonces su volumen, ΔV, es:

$\Delta V = S \cdot \Delta l$ Con $\Delta l \to 0$

Δl , longitud de la lámina de agua tiende a cero por ser muy delgada.

Caudal, flujo de agua por la tubería



$Q = \dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ Volumen / tiempo

Con $\Delta t \to 0$

Sustituimos, ΔV

$\Delta V = S \cdot \Delta l$

$Q = \dfrac{S \cdot \Delta l}{\Delta t}$ $\dfrac{\Delta l}{\Delta t} = \boldsymbol{v}$

v, vector velocidad del agua en la tubería

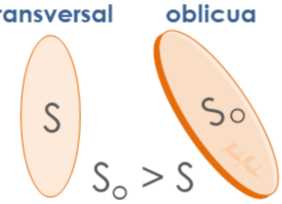
Sustituimos *v* en Q $Q = S \cdot \boldsymbol{v}$

El flujo de agua por la tubería, $Q = S \cdot \boldsymbol{v}$

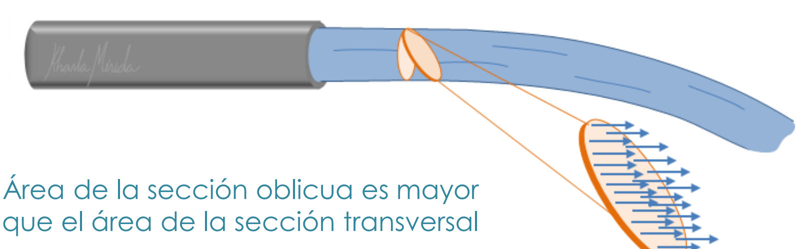
Es el producto del área de la sección de la tubería por la velocidad del agua dentro de la tubería.

Flujo de agua a través de una sección oblicua. Si en lugar de considerar una sección transversal de la tubería consideramos una sección oblicua, aunque se trata de la misma tubería, y pasa la misma cantidad de agua, la sección oblicua tiene un área mayor y por lo tanto el flujo a través de ella debe ser distinto de Q = vS. Veamos esto en detalle.

Sección transversal **Sección oblicua**

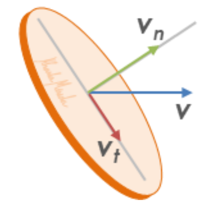


$S_o > S$



Área de la sección oblicua es mayor que el área de la sección transversal

Lo que haremos, para ver más claro el panorama, es descomponer la velocidad en direcciones **perpendicular** y **tangente** a la superficie oblicua.

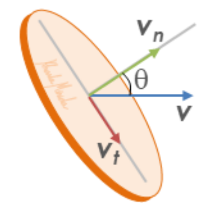


Ahora bien vale la pregunta,

¿cuál componente atraviesa la superficie S_o?

La componente **tangente** de la velocidad, $\mathbf{v_t}$, se desliza por la sección, no la atraviesa, mientras que la componente **perpendicular**, $\mathbf{v_n}$, si. Por tanto **sólo la componente perpendicular contribuye al flujo a través de la sección oblicua**.

El flujo de agua a través de la superficie, S_o, es:



El producto del área de la sección de la tubería por la velocidad del agua dentro de la tubería. $Q = S_o \cdot \boldsymbol{v_n}$

Componente de v en dirección perpendicular $\mathbf{v_n} = \boldsymbol{v} \cdot \cos\theta$

Sustituimos $\boldsymbol{v} \cdot \cos\theta$ en la fórmula de flujo $Q = S_o \cdot \boldsymbol{v} \cdot \cos\theta$

Ordenamos los factores $Q = \boldsymbol{v} \cdot S_o \cdot \cos\theta$

Nota: considerando que **el caudal o flujo es una cantidad escalar**, y que la expresión obtenida, $\boldsymbol{v} \cdot S_o \cdot \cos\theta$, se corresponde con un producto escalar de vectores, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a \cdot b \cdot \cos\theta$. Se convino establecer el vector $\boldsymbol{S_o} = \boldsymbol{n} \cdot S_o$, como el **vector área de la superficie oblicua**. Esto no afecta el valor del flujo, pues $\boldsymbol{n}$ es un vector unitario. Veamos ahora

Producto escalar de los vectores velocidad y superficie $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S_o} = \underline{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}} \cdot S_o$ con $\boldsymbol{S_o} = \boldsymbol{n} \cdot S_o$

Producto escalar $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v \cdot 1 \cdot \cos\theta$ $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S_o} = \underline{v \cdot 1 \cdot \cos\theta} \cdot S_o$

Ordenamos los factores $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S_o} = v \cdot S_o \cdot \cos\theta$

Flujo a través de una superficie oblicua	$Q = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \cdot S$	$Q = v \cdot S_o \cdot \cos\theta$

En general, la fórmula de flujo de un campo vectorial de velocidad, $\boldsymbol{v}$, a través de una superficie:

$$Q = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S}$$

Características del flujo de un campo vectorial a través de una superficie abierta

- El flujo es una cantidad escalar.
- El valor está relacionado con campos vectoriales.
- El singo del flujo es:
    - Positivo si el campo atraviesa la superficie en el mismo sentido de la normal,
    - Negativo si la atraviesa en sentido contrario.
- Las unidades del flujo son las del campo vectorial multiplicado por una superficie.

Características del flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada

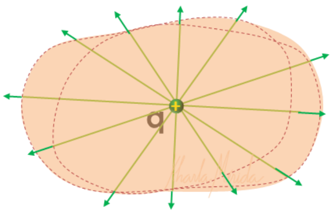
Nota: En el caso de una superficie cerrada el convenio establece que la normal a la superficie está dirigida hacia el exterior. En consecuencia se define el flujo a través de una superficie cerrada como

Flujo a través de una superficie cerrada se entiende como la cantidad de campo que escapa del volumen.

- Es positivo si el está dirigido hacia afuera. En este caso se dice que el volumen contiene una cantidad neta de manantiales.
- Es negativo si el está dirigido hacia adentro. En este caso se dice que el volumen contiene una cantidad neta de *sumideros*.
- Es nulo si el campo es nulo, en este caso se dice que el volumen contiene tantos *manantiales* como *sumideros*.

LEY DE GAUSS. Definición

Ley de Gauss. El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada en dicha superficie.



Hay tres elementos fundamentales en la fórmula correspondiente a la Ley de Gauss:

Campo vectorial: campo eléctrico, ***E***.

Flujo de un campo eléctrico: ϕ,

Superficie (vector área de superficie): ***A*** = A***n***.

En la sección anterior obtuvimos la fórmula general de flujo de campo velocidad:

$$Q = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S}$$

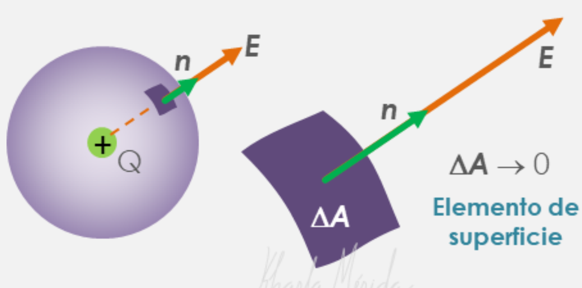
La **Ley de Gauss** es una extensión de esa fórmula aplicada al campo eléctrico:

$$\phi = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A}$$

Es el **producto escalar del campo eléctrico por la superficie.**
A = A***n*** (área de la superficie por vector normal a la superficie).

Nota: Aunque la ley de gauss está definida para campos eléctricos de cargas encerradas por una superficie, se ha convenido el caso especial de campos que actúan sobre superficies abiertas.

Ley de Gauss en superficie cerrada



Flujo eléctrico a través de la superficie cerrada

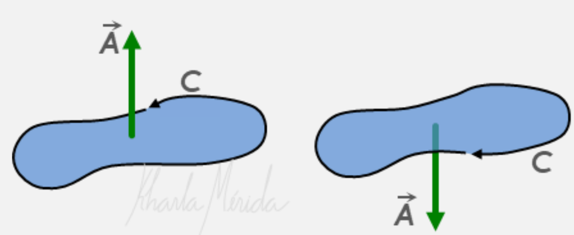
$$\phi = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A}$$

Superficie cerrada es un vector de

- **Módulo:** área de la superficie, A.
- **Dirección**: Normal (perpendicular) a la superficie, ***n***.
- **Sentido**: hacia fuera de la superficie.

Nota: Solo atenderemos casos de superficies simétricas, ***n*** || ***E***.

Ley de Gauss en superficie abierta



Superficie cerrada es un vector de

- **Módulo:** área de la superficie, A.
- **Dirección**: Normal (perpendicular) a la superficie, ***n***.
- **Sentido**: según la regla de la mano derecha aplicado al sentido de circulación de **C**.

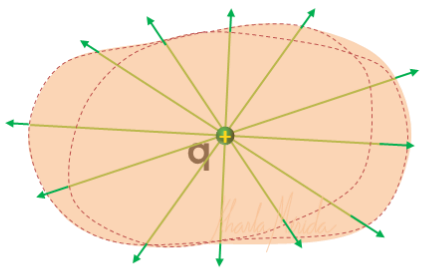
Nota: Solo podemos atender casos en los que la superficie es plana.

Características notables del campo eléctrico y la ley de gauss

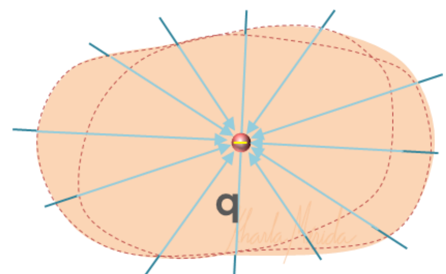
La ley de gauss es válida para cualquier superficie. La forma general de la Ley de Gauss está definida con cálculo superior, pero su desarrollo nos lleva al mismo resultado,

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

Las líneas de campo empiezan o terminan en la carga. A las líneas de campo que salen de la carga se les llama manantiales, o fuentes "source", a las líneas de campo que van en dirección a la carga se les llama sumideros, pozos "sink".



Líneas de campo que salen de la carga (manantiales, o fuentes "source")



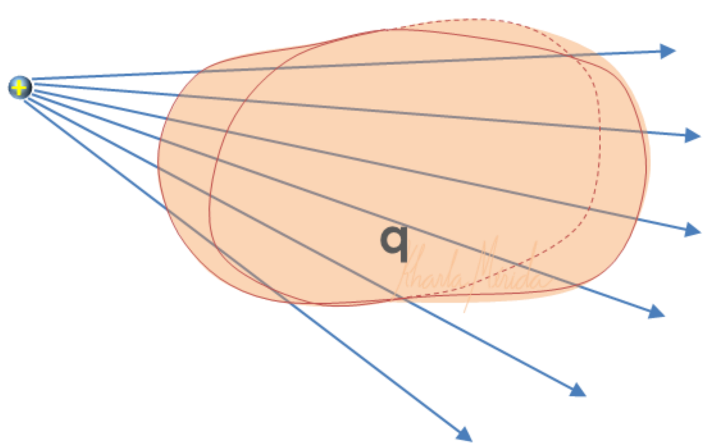
Líneas de campo que van en dirección a la carga (sumideros, o pozos "sink")

- $\phi > 0$, entonces la carga es positiva y ***E*** está dirigido hacia fuera de la superficie.
- $\phi < 0$, entonces la carga es negativa y ***E*** está dirigido hacia dentro de la superficie.
- $\phi = 0$, entonces la carga es nula, $q = 0$.

Solo la carga encerrada cuenta para el cálculo del flujo eléctrico. Cuando hay más de una carga puntual, el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total dentro de la superficie entre ε_0 (permitividad en el vacío).

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_o} \qquad \text{con} \qquad Q = \sum_{i=1}^{a} q_i$$

El flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada que no contenga la carga es nulo. Todas las líneas de campo eléctrico que entren a la superficie salen de nuevo de ella.

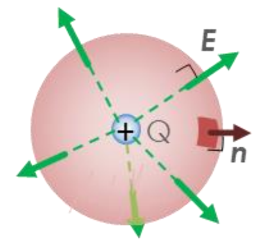


LEY DE GAUSS. Casos sencillos de cálculo de flujo de un campo eléctrico I

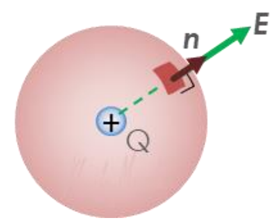
Caso 1. Campo de una carga puntual, Q, ubicada en el centro de una esfera de radio R.

La fórmula general de flujo eléctrico es $\phi = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A}$

Recordemos que ***E*** es el vector campo eléctrico, y ***A*** es el vector área de superficie. El flujo es el producto escalar de ambos.



Nota: La dirección de las líneas de campo de una carga puntual positiva es radial y saliente, esto significa que todas las líneas de campo están saliendo radialmente desde la carga.
Como **los radios son perpendiculares a la superficie de una esfera** sabemos entonces que **las líneas de campo son perpendiculares a la superficie**.
Por otro lado, sabemos que ***n***, vector normal a la superficie, también **es perpendicular a la superficie**.
Entonces,
E y ***n*** **son paralelos en cada punto de la superficie**.



El producto escalar de vectores paralelos es igual al producto de sus módulos. El flujo eléctrico queda

$$\phi = E \cdot A$$

Campo eléctrico: $E = k\frac{q}{r^2}$ **Área de la superficie de una esfera:** $A = 4\pi r^2$

Sustituimos en la fórmula $$\phi = k\frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$

Simplificando $$\phi = 4\pi \cdot kq$$

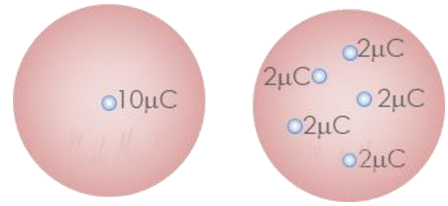
Sustituyendo $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $$\phi = 4\pi \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q$$

Simplificando 4π $$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

El flujo a través de la superficie esférica es igual al inverso de la constante de permisividad por la carga. $$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

Nota: El flujo eléctrico no depende del radio, esto quiere decir que pasa el mismo flujo eléctrico por una esfera de radio R que por una de radio 2R u otro.

Caso 2. Dos cascarones esféricos del mismo radio, uno contiene una carga puntual de 10μC y otro contiene 5 cargas puntuales de 2μC cada una. ¿El flujo que atraviesa ambos cascarones es el mismo? ¿Qué podemos decir respecto al campo eléctrico?



En la página 10 vimos que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada depende únicamente de la carga encerrada por la superficie, cuando hay más de una carga el flujo es igual a la carga eléctrica total entre la permitividad.

1ra pregunta: ¿El flujo que atraviesa ambos cascarones es el mismo?

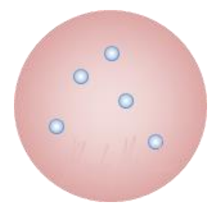
Ambos cascarones encierran la misma carga total, 10μC, entonces ambos cascarones son atravesados por el mismo flujo eléctrico.

2da pregunta: ¿Qué podemos decir respecto al campo eléctrico?

El campo eléctrico es un conjunto de vectores, que varían en dirección y sentido de acuerdo a la ubicación y distribución de las cargas. Entonces, los campos eléctricos en cada caso es distinto.

LEY DE GAUSS. Casos sencillos de cálculo de flujo de un campo eléctrico II

Caso 3. Se sabe que dentro de una esfera de radio 0,5m se encuentra una distribución de cargas que crea un campo eléctrico, perpendicular en todo momento a la superficie de la esfera y de valor



$$E = \frac{750}{r^2}$$

Con ***r*** la distancia de un punto cualquiera al centro de la esfera (asumiendo que está en el vacío).

¿Cuál es el valor de la carga?

En la superficie r = R (0,5m) y el campo eléctrico queda $E = \frac{750}{R^2}$

Igualamos por Ley de Gauss $\phi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$ $\phi = E \cdot A$ $\frac{Q}{\varepsilon_o} = E \cdot A$

Despejando $Q = E \cdot A \cdot \varepsilon_o$

Sustituyendo $E = \frac{750}{R^2}$ $A = 4\pi R^2$ $Q = \frac{750}{R^2} \cdot 4\pi R^2 \cdot \varepsilon_o$

Simplificando R $Q = 750 \cdot 4\pi \cdot \varepsilon_o$

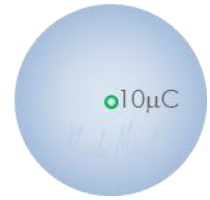
Sustituyendo ε_o $Q = 3000\pi \cdot 8,84 \cdot 10^{-12} C$

Efectuando los cálculos $Q = 8,33 \cdot 10^{-8} C$

$$\boxed{Q = 0,0833 \cdot \mu C}$$

Caso 4. Deducir la ley de Coulomb para dos cargas puntuales usando la ley de Gauss.

Para aplicar Gauss se necesita una superficie cerrada y una carga dentro de ella.



Asumiremos una esfera de radio *r* con una carga q_1 en su centro

Sabemos que el área de la superficie es $A = 4\pi r^2$

Igualamos por Ley de Gauss $\phi = \dfrac{q_1}{\varepsilon_o}$ $\phi = E \cdot A$ $\dfrac{q_1}{\varepsilon_o} = E \cdot A \Rightarrow \dfrac{q_1}{\varepsilon_o} = E \cdot 4\pi r^2$

Despejando *E* $E = \dfrac{q_1}{4\pi r^2 \cdot \varepsilon_o} \Rightarrow E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \dfrac{q_1}{r^2}$

Tenemos el campo eléctrico producido por q_1 a una distancia r, si la distancia de q_2 a q_1 es *r*, la fuerza de q_1 sobre q_2.

$$F = q_2 \cdot E \Rightarrow F = q_2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_1}{r^2}$$

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}}$$

$$\boxed{F = K_o \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}}$$

LEY DE GAUSS. Aplicaciones

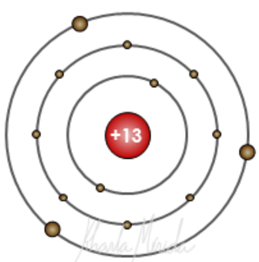
Campo eléctrico dentro de un conductor

Conductores. Son materiales con la propiedad de liberar electrones fácilmente, debido a que sus átomos tienen pocos electrones en la última capa y tienden a ceder (liberar) electrones para alcanzar estabilidad.

Clasificación de los materiales según su conductividad

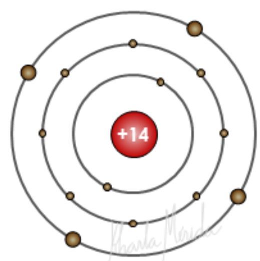
- **Conductor.** Menos de 4 electrones en la última capa.
- **Semiconductor.** 4 electrones en la última capa.
- **Aislante.** Mas de 4 electrones en la última capa.

Átomo de Aluminio (Al)



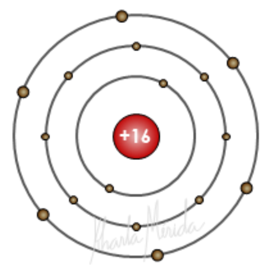
Tiene 3 electrones en la última capa. Es **conductor**.

Átomo de Silicio (Si)



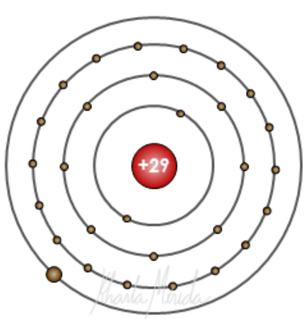
Tiene 4 electrón en la última capa. Es **semiconductor**.

Átomo de Azufre (S)

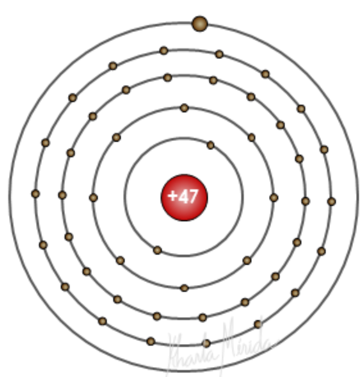


Tiene 6 electrón en la última capa. Es **aislante**.

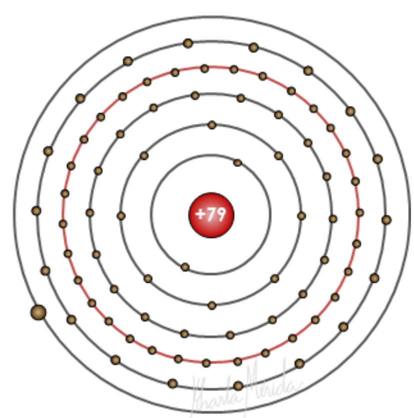
Los elementos cuyos átomos tienen 1 sólo elemento en la última capa, como el cubre, plata y oro, son los mejores conductores.



Átomo de cubre (Cu)



Átomo de Plata (Ag)

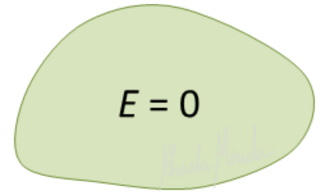


Átomo de Oro (Au)

Nota: La estructura atómica de los conductores, constituida por **iones +** en posiciones fijas, y una **nube** constituida por **electrones e⁻** (**nube electrónica**), permite que puedan desplazarse libremente por el conductor.

Esta libertad de movimiento de los electrones en el conductor le otorga propiedades bien particulares. Veamos estas propiedades.

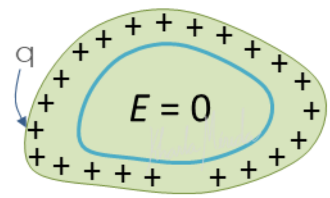
El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio es nulo (cero).



Con un campo eléctrico en el interior del conductor, las cargas se mueven en la dirección del campo, lo que genera una corriente **e⁻**, así que el conductor no estaría en equilibrio.

Si las cargas en el conductor no están en equilibrio, el conductor no está en equilibrio, lo que no es el caso.

La carga de un conductor está ubicada solo en la superficie.



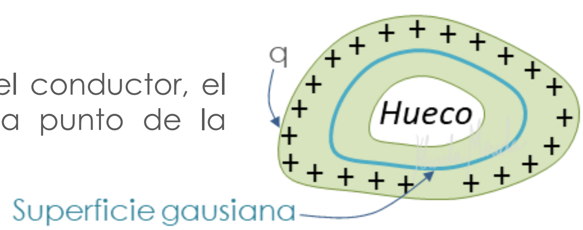
Sabemos que en un conductor en equilibrio tiene campo nulo en el interior, entonces E = 0.

Ley de Gauss: $\phi = E \cdot A$ y $\phi = \frac{q_1}{\varepsilon_o} \rightarrow$ igualamos $\frac{q_1}{\varepsilon_o} = E \cdot A \rightarrow q_1 = E \cdot A \cdot \varepsilon_o$

Sustituimos $E = 0$ $q_1 = 0 \cdot A \cdot \varepsilon_o$

Todas las cargas se ubican en la superficie del conductor $\boxed{q_1 = 0}$

La carga de un conductor hueco.



Como $E = 0$ en todos los puntos dentro del conductor, el campo eléctrico es igual a cero en cada punto de la superficie gaussiana.

La carga de un conductor hueco con una carga $-q_a$ aislada en la cavidad.

Para que E sea igual a cero en cada punto de la superficie gaussiana, debe haber una carga total de q_a en la superficie de la cavidad, lo que anula el campo de la carga $-q_a$.

La carga del conductor es $\boxed{Q = q + q_a}$