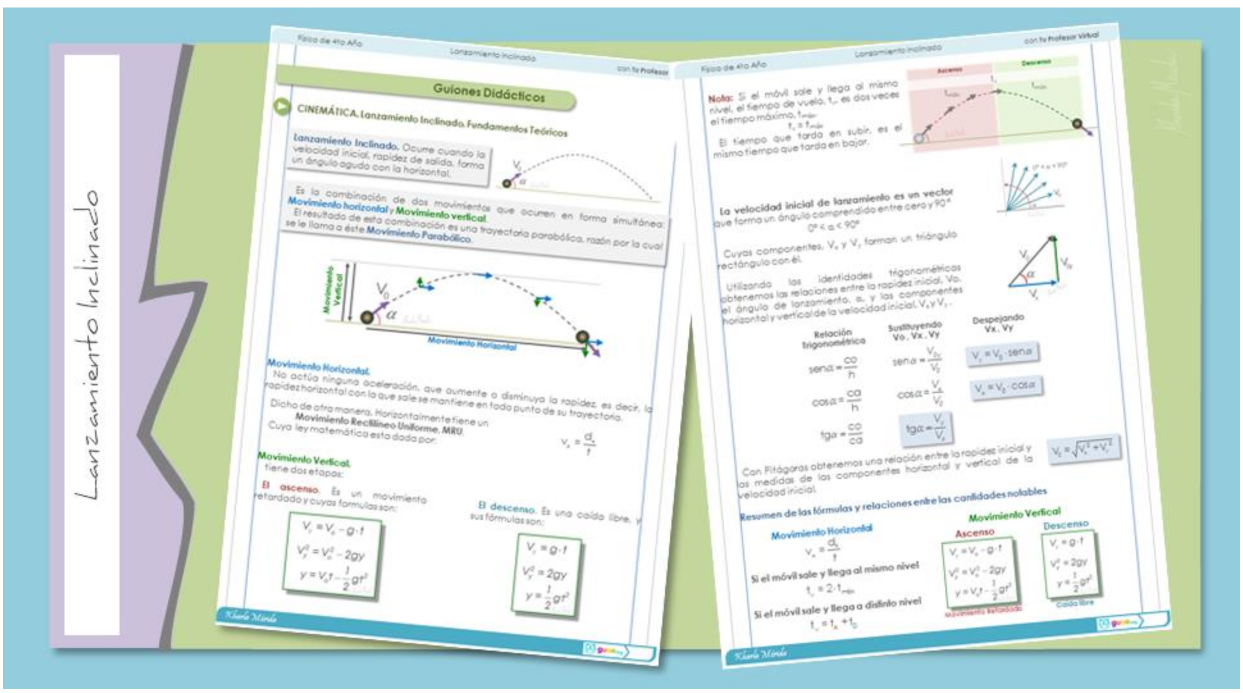
# 6
6ta Unidad

# Lanzamiento Inclinado

*Toda persona feliz es exitosa, porque ha logrado un invaluable tesoro que no puede ser comprado, transferido, prestado, cedido o heredado. La felicidad emana desde dentro y su radiación es reconocida por otros igual de exitosos.*

## Descripción




Este objetivo presenta otro movimiento combinado, se trata del generado por un lanzamiento inclinado. Estos casos son también conocidos como lanzamiento de proyectiles o movimiento parabólico, por la forma parabólica de su trayectoria. Las aplicaciones son ilimitadas cuando se trata de lanzamientos de cuerpos a determinadas distancias, su estudio se remonta al desarrollo de catapultas y otros recursos bélicos usados por civilizaciones antiguas. Aprendamos sobre este movimiento.

## Conocimientos Previos Requeridos

Movimiento Rectilíneo Uniforme, Movimiento Vertical, Lanzamiento Horizontal.

## Contenido

Fundamentos Teóricos de Lanzamientos Inclinados, Ejercicios

## Videos Disponibles

CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Fundamentos Teóricos

CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Ejercicio 1

CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Ejercicio 2

CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Ejercicio 3

CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Ejercicio 4. Parte I

CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Ejercicio 4. Parte II

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para familiarizarse con los conceptos nuevos y fortalecer el lenguaje operativo.

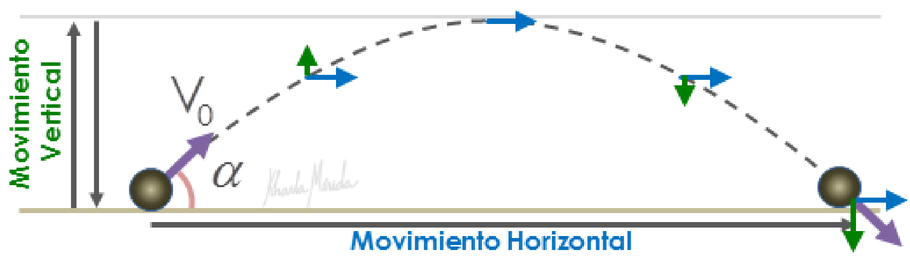
## Guiones Didácticos

### CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Fundamentos Teóricos

**Lanzamiento Inclinado.** Ocurre cuando la velocidad inicial, rapidez de salida, forma un ángulo agudo con la horizontal.


Es la combinación de dos movimientos que ocurren en forma simultánea: **Movimiento horizontal** y **Movimiento vertical**.

El resultado de esta combinación es una trayectoria parabólica, razón por la cual se le llama a éste **Movimiento Parabólico**.




**Movimiento Horizontal.**

No actúa ninguna aceleración, que aumente o disminuya la rapidez, es decir, la rapidez horizontal con la que sale se mantiene en todo punto de su trayectoria.

Dicho de otra manera, Horizontalmente tiene un **Movimiento Rectilíneo Uniforme, MRU.** Cuya ley matemática esta dada por:

$$V_x = \frac{d_x}{t}$$

**Movimiento Vertical.**

tiene dos etapas:

**El ascenso.** Es un movimiento retardado y cuyas formulas son:

$$\boxed{\begin{aligned} V_y &= V_o - g\cdot t \\ V_y^2 &= V_o^2 - 2gy \\ y &= V_o t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}}$$

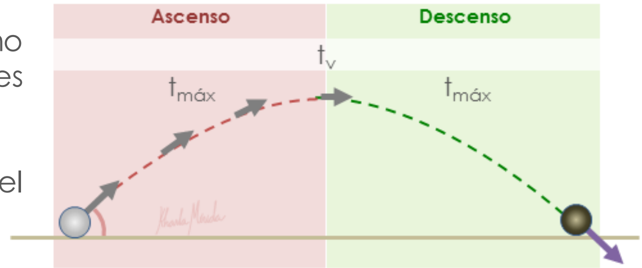
**El descenso.** Es una caída libre, y sus fórmulas son:

$$\boxed{\begin{aligned} V_y &= g\cdot t \\ V_y^2 &= 2gy \\ y &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}}$$

**Nota:** Si el móvil sale y llega al mismo nivel, el tiempo de vuelo, $t_v$, es dos veces el tiempo máximo, $t_{máx}$.

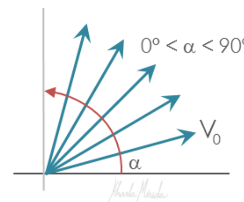
$$t_v = t_{máx}$$

El tiempo que tarda en subir, es el mismo tiempo que tarda en bajar.



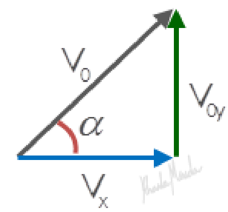

**La velocidad inicial de lanzamiento es un vector** que forma un ángulo comprendido entre cero y 90 °

$$0° < \alpha < 90°$$




Cuyas componentes, $V_x$ y $V_y$ forman un triángulo rectángulo con él.

Utilizando las identidades trigonométricas obtenemos las relaciones entre la rapidez inicial, Vo, el ángulo de lanzamiento, α, y las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial, $V_x$ y $V_y$ .




| **Relación Trigonométrica** | **Sustituyendo Vo , Vx , Vy** | **Despejando Vx , Vy** |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{co}{h}$ | $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{V_{0y}}{V_0}$ | $V_y = V_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha$ |
| $\cos\alpha = \dfrac{ca}{h}$ | $\cos\alpha = \dfrac{V_x}{V_0}$ | $V_x = V_0 \cdot \cos\alpha$ |
| $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{co}{ca}$ | $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{V_y}{V_x}$ | |

Con Pitágoras obtenemos una relación entre la rapidez inicial y las medidas de las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial.

$$V_0 = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2}}$$

## Resumen de las fórmulas y relaciones entre las cantidades notables

### Movimiento Horizontal

$$v_x = \frac{d_x}{t}$$

**Si el móvil sale y llega al mismo nivel**

$$t_v = 2 \cdot t_{máx}$$

**Si el móvil sale y llega a distinto nivel**

$$t_v = t_A + t_D$$

### Movimiento Vertical

**Ascenso**

$$V_y = V_o - g \cdot t$$

$$V_y^2 = V_o^2 - 2gy$$

$$y = V_o t - \frac{1}{2} g t^2$$

Movimiento Retardado

**Descenso**

$$V_y = g \cdot t$$

$$V_y^2 = 2gy$$

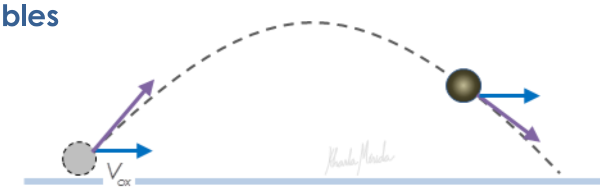
$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

Caída libre

## Representación Gráfica de cantidades notables

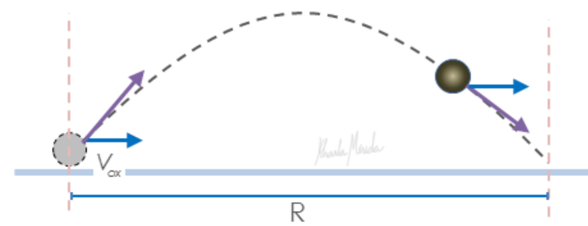
**Horizontalmente** tenemos:

**Vox, rapidez inicial en x.** Es la rapidez horizontal que mantiene a lo largo de toda la trayectoria




**Alcance.** Es la distancia horizontal máxima lograda por el móvil.

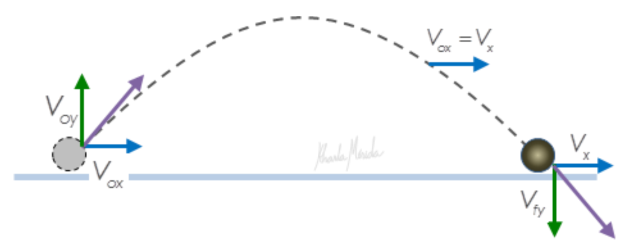
Se mide desde la vertical que contiene el punto de salida, hasta la vertical que contiene el punto de llegada



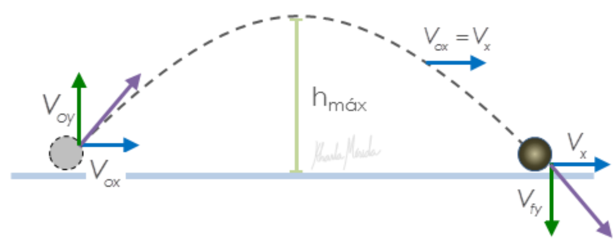

**Verticalmente** tenemos:

**Voy, rapidez inicial en y.** Es la componente vertical del vector velocidad inicial.

Su valor es el mismo que el de la componente vertical de la velocidad final, considerando que llega a la mismo nivel del cual salió.



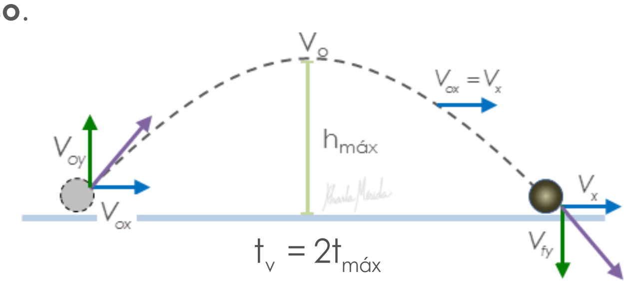

**Altura máxima.** que es la distancia desde el suelo hasta el punto más alto al que llega el móvil.




**Nota:** En ese punto, la velocidad es cero. Entonces, **cero es la velocidad final del ascenso, y la velocidad inicial del descenso**.

**Tiempo máximo.** Es el tiempo que tarda en llegar al punto máximo.

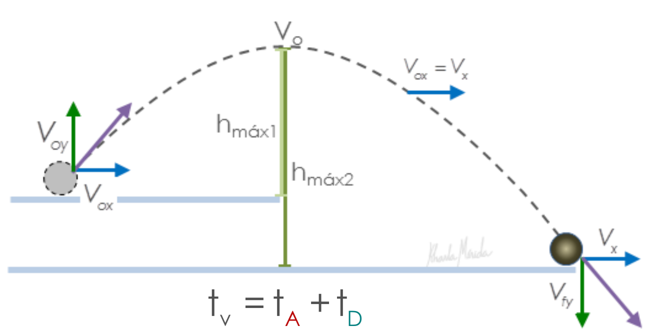
Es decir el tiempo que tarda en subir y también el tiempo que tarda en bajar desde el punto máximo al suelo, si parte y llega al mismo nivel.




**Tiempo de vuelo.** Es el tiempo que está en el aire.

Si el móvil parte y llega al mismo nivel.

es la suma del tiempo que tarda en subir (Ascenso), más el tiempo que tarda en bajar (Descenso).



## CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Ejercicio 1

Se efectúa un disparo con un ángulo de elevación de 60º, y la bala sale con una rapidez de 200 m/s. Calcular, a) el alcance, b) La altura máxima que alcanza, c) El tiempo de vuelo.

### Datos

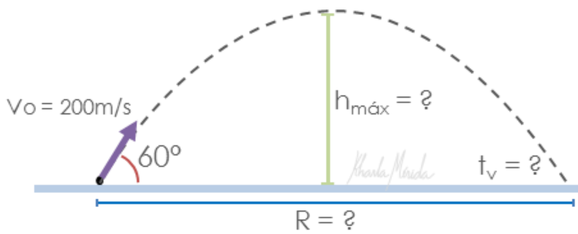
$\alpha = 60^\circ$

$V_o = 200 m/s$

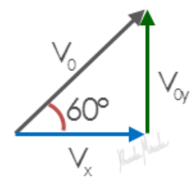
a) R = ?

b) $h_{máx}$ = ?

c) $t_v$ = ?




Lo primero que haremos es obtener las componentes de la rapidez inicial en x y en y, $V_{ox}$ y $V_{oy}$.




$$V_x = V_0 \cdot \cos 60^\circ \qquad V_{0y} = V_0 \cdot \text{sen} 60^\circ$$

Sustituimos, Vo = 200m/s

$$V_x = 200 \, m/s \cdot \cos 60^\circ \qquad V_{0y} = 200 \, m/s \cdot \text{sen} 60^\circ$$

Efectuamos los cálculos

$$\boxed{V_x = 100 \, m/s} \qquad \boxed{V_{0y} = 173{,}20 \, m/s}$$

---

## Análisis y Estrategia

**1ro** El **Alcance** es una medida horizontal, para calcularlo debemos utilizar la fórmula de movimiento horizontal.

Conocemos *Vx*, pero falta el tiempo de vuelo, $t_v$, para calcular el alcance, *R*.

$$V_x = \frac{d_x}{t}$$

$$V_x = \frac{R}{t_v}$$

**2do** Del ascenso, y respecto al movimiento vertical, conocemos la rapidez inicial, la rapidez final y la gravedad

Con la 1ra fórmula podemos hallar el tiempo.

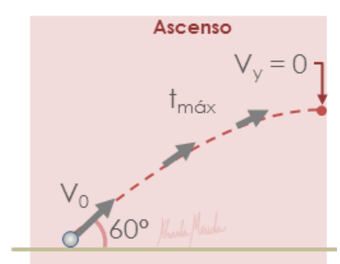
**Ascenso**

$$\cancel{V_y}^{\,0} = V_{oy} - g \cdot t$$

$$\cancel{V_y^2}^{\,0} = V_{oy}^2 - 2gy$$

$$y = V_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

**Movimiento Retardado**




**Nota:** como estamos usando valores correspondientes al punto de salida y el punto máximo, el tiempo que hallamos es el tiempo máximo, $t_{máx}$.

$$\cancel{V_y}^{\,0} = V_{oy} - g \cdot t$$

Sustituimos ***Voy***, ***Vy*** y ***g*** en la primera fórmula

$$0 = 173{,}2\,m/s - 9{,}8\,m/s^2 \cdot t_{máx}$$

Pasamos el término que contiene $t_{máx}$ sumando al 1er lado de la igualdad.

$$9{,}8\,m/s^2 \cdot t_{máx} = 173{,}2\,m/s$$

Pasamos el factor que multiplicando a $t_{máx}$ dividiendo al 2do lado de la igualdad.

$$t_{máx} = \frac{173{,}2\,m/s}{9{,}8\,m/s^2}$$

Efectuamos los cálculos y simplificamos unidades

$$\boxed{t_{máx} = 17{,}67\,s}$$

**Nota:** La bala parte y llega al mismo nivel, entonces el tiempo de vuelo es dos veces el tiempo máximo, que es 17,67 segundos.

Sustituimos $t_{máx}$ hallado para obtener $t_v$.

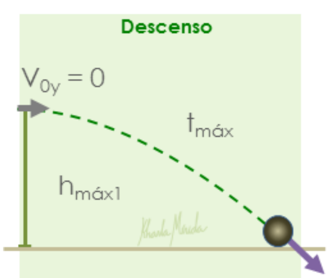
$$t_v = 2 \cdot 17{,}67\,s$$

$$\boxed{t_v = 35{,}34\,s}$$

Veamos dos opciones para hallar la altura máxima.

**Opciones:**

1 Utilizar las fórmulas de caída libre, considerando la segunda parte del movimiento, en el que la rapidez inicial vertical es cero.




$$V_y = g \cdot t$$

$$V_y^2 = 2gy$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

Conocemos el tiempo máximo, que es el que tarda en caer.
Usamos la 3ra fórmula.

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

Sustituimos $t_{máx}$ y g en la 3ra fórmula.

$$y = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 312{,}23\,s^2$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot 312{,}23\,s^2$$

$$\boxed{y = 1529{,}93\,m}$$

**2** Considerando la primera parte del movimiento, el ascenso, sabemos que la componente vertical de la velocidad en el punto máximo es cero.

**Ascenso**

$$\cancel{V_y}^{0} = V_{oy} - g \cdot t$$
$$\cancel{V_y^2}^{0} = V_{oy}^2 - 2gy$$
$$y = V_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

**Movimiento Retardado**

Usamos la 2da fórmula, donde la única incógnita es y.

**Nota:** como estamos usando valores correspondientes al punto de salida y el punto máximo, la altura que hallamos es la altura máximo, $h_{máx}$.

$$\cancel{V_y^2}^{0} = V_{oy}^2 - 2gy$$

Sustituimos $t_{máx}$ y g en la 3ra fórmula.

$$0 = \left(173{,}2\,{}^{m}/_{s}\right)^2 - 2 \cdot 9{,}8\,{}^{m}/_{s^2} \cdot h_{máx}$$

Efectuamos la potencia y producto.

$$0 = 29.998{,}24\,{}^{m^2}/_{s^2} - 19{,}6\,{}^{m}/_{s^2} \cdot h_{máx}$$

Pasamos restando al 1er lado de la igualdad el término que contiene $h_{máx}$.

$$19{,}6\,{}^{m}/_{s^2} \cdot h_{máx} = 29.998{,}24\,{}^{m^2}/_{s^2}$$

$$h_{máx} = \frac{29.998{,}24\,{}^{m^2}/_{s^2}}{19{,}6\,{}^{m}/_{s^2}}$$

$$\boxed{h_{máx} = 1.530{,}52\text{m}}$$

**¿Por qué obtenemos resultados diferentes en cada opción?**

En la primera estrategia se usó $t_{máx}$, cuyo valor fue aproximado:

Valor obtenido: 17,6734693877551020408163265306 12…
Valor aproximado: 17,67

Esto generó un error por aproximación, al sustituir 17,67 en la fórmula de altura máxima. Luego, es necesario aproximar el cuadrado:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\,{}^{m}/_{s^2} \cdot (17{,}67\text{s})^2$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\,{}^{m}/_{s^2} \cdot 312{,}23\text{s}^2$$

Cuadrado obtenido: 312,2289
Cuadrado aproximado: 312,23

Esto sumó otro error por aproximación.

$$y = 1529{,}93\text{m}$$

**Nota:** Si al usar la calculadora, sustituimos los valores obtenidos (tal cual) en cada fórmula, obtenemos 1.530,5224489795918367346938775 51... Que es más cercano a lo obtenido en la 2da opción de desarrollo.

Retomamos la estrategia planteada al comienzo para hallar el alcance.

**1ro** Usamos la fórmula de movimiento horizontal.

$$V_x = \frac{R}{t_v}$$

Conocemos $V_x$, y el tiempo de vuelo, $t_v$, podemos despejar y calcular el alcance, $R$.

Sustituimos $V_x$ y $t_v$ en la fórmula.

$$100\,m/s = \frac{R}{35{,}34s}$$

$$100\,m/s \cdot 35{,}34s = R$$

$$R = 3.534m$$

Valores pedidos

$t_v = 35{,}34s$ $\quad h_{máx} = 1.530{,}52m$ $\quad R = 3.534m$

## CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Ejercicio 2

Se patea una pelota saliendo del pie con un ángulo de elevación de 45°, y una rapidez de 40 m/s. Calcular: a) a qué altura se encuentra del suelo a un segundo de partir, b) cuál es su velocidad real a los dos segundos.

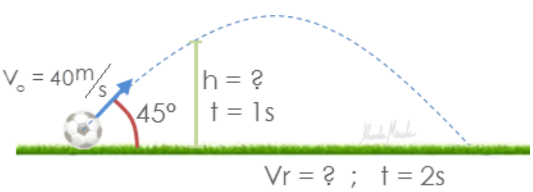
**Datos**

$\alpha = 45°$

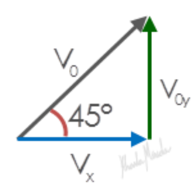
$V_o = 40m/s$

a) $h = ?$ ; $t = 1s$

b) $V_r = ?$ ; $t = 2s$




Lo primero que haremos es obtener las componentes de la rapidez inicial en x y en y, $V_{ox}$ y $V_{oy}$.




$$V_x = V_0 \cdot \cos 45° \qquad V_{0y} = V_0 \cdot \mathrm{sen} 45°$$

Sustituimos, Vo = 200m/s

$$V_x = 40\,m/s \cdot \cos 45° \qquad V_{0y} = 40\,m/s \cdot \mathrm{sen} 45°$$

Efectuamos los cálculos

$$V_x = 28{,}28\,m/s \qquad V_{0y} = 28{,}28\,m/s$$

**Ascenso**

$$V_y = V_{oy} - g \cdot t$$

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2gy$$

$$y = V_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

**Movimiento Retardado**

**Altura a un segundo de partir.** Al momento de salir inicia verticalmente un Movimiento Retardado. Entonces utilizamos las fórmulas de movimiento vertical ascendente.

$$V_y = V_{oy} - g \cdot t$$
$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2gy$$
$$y = V_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

A 1s de haber partido conocemos: Voy , t, y g.

Con la 3ra fórmula podemos hallar la altura a la que se encuentra el móvil para un tiempo cualquiera de su recorrido

$$y = V_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

**Recordemos.** La altura es una distancia vertical, que puede representarse con $y$, $d_y$ o $h$.

**Nota:** Por costumbre general, muchos docentes y textos utilizan la letra "h" para diferenciarla de otras distancias verticales, que no son necesariamente son medidas desde el suelo, basados en el término inglés "higth" que significa altura.

**higth**
↓
**h**

Sustituimos $V_{oy}$, t y g en la fórmula.

$$h = 28,28\frac{m}{s} \cdot 1s - \frac{1}{2} \cdot 9,8\frac{m}{s^2} \cdot (1s)^2$$

Simplificamos unidades en el 1er término, distribuimos las potencias y simplificamos unidades en el 2do término.

$$h = 28,28m - 4,9m$$

$$\boxed{h = 23,38m}$$

**Velocidad real a los 2 segundos.** Debemos conocer el valor de Vy a los 2s. Para esto, usamos la 1ra fórmula hallamos dicho valor.

$$V_y = V_{oy} - g \cdot t$$

Sustituimos $V_{oy}$, t y g en la fórmula.

$$V_y = 28,28\frac{m}{s} - 9,8\frac{m}{s^2} \cdot 2s$$

$$\boxed{V_y = 8,68\frac{m}{s}}$$

Velocidad real es igual a raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes de la velocidad.

$$V_R = \sqrt{V_x^{\ 2} + V_y^{\ 2}}$$

Sustituimos $V_x$ y $V_y$ en la fórmula.

$$V_R = \sqrt{\left(28,28\,{}^m\!/_s\right)^2 + \left(8,68\,{}^m\!/_s\right)^2}$$

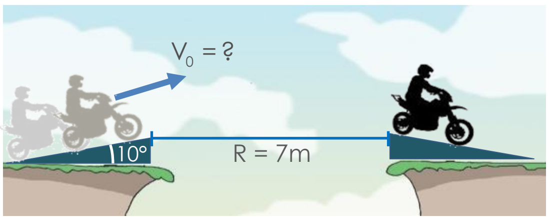
Distribuimos las potencias y efectuamos las operaciones.

$$V_R = \sqrt{28,28^2\,{}^{m^2}\!/_{s^2} + 8,68^2\,{}^{m^2}\!/_{s^2}}$$

$$\boxed{V_R = 29,58\frac{m}{s}}$$

## CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Ejercicio 3

Una moto llega a una zanja. Se ha construido una rampa con una inclinación de 10º con el fin de que la moto pueda saltar por encima. Si la distancia horizontal que debe atravesar la moto para alcanzar el otro lado de la zanja es de 7 metros. ¿Con que velocidad debe abandonar la rampa?



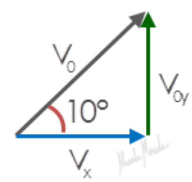

**Datos**

$\alpha = 10º$

$R = 7m$

$V_o = ?$

**Nota:** en este ejercicio se desprecia la longitud de la moto.




Lo primero que haremos es obtener las componentes de la rapidez inicial en x y en y, $V_{ox}$ y $V_{oy}$.

$$V_x = V_0 \cdot \cos 10º \qquad V_{0y} = V_0 \cdot \operatorname{sen} 10º$$

Sustituimos, Vo = 200m/s $\qquad V_x = V_0 \cdot \cos 10º \qquad V_{0y} = V_0 \cdot \operatorname{sen} 10º$

---

Con la fórmula de movimiento horizontal obtenemos una relación entre la Vox y tv, usando como distancia horizontal el alcance, 7 metros.

$$V_x = \frac{R}{t_v}$$

$$V_0 \cdot \cos 10º = \frac{7m}{t_v}$$

$t_v$, que está dividiendo, pasa al otro lado multiplicando.

$$V_0 \cdot t_v \cdot \cos 10º = 7m$$

**Nota:** Como la moto sale y cae al mismo nivel, tiempo de vuelo es dos veces el tiempo máximo

$$t_v = 2 \cdot t_{máx}$$

Sustituimos $2t_{máx}$ en la relación

$$V_0 \cdot 2t_{máx} \cdot \cos 10º = 7m$$

---

Ahora usaremos la primera de las fórmulas del ascenso en el movimiento vertical.

$$V_y = V_{oy} - g \cdot t$$

Sustituimos $V_y = 0$, $V_{oy} = V_o \cdot \operatorname{sen} 10º$, $g = 9{,}8 m/s^2$ y $t = t_{máx}$.

$$0 = V_o \cdot \operatorname{sen} 10º - 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot t_{máx}$$

Despejamos $t_{máx}$.

$$9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot t_{máx} = V_o \cdot \operatorname{sen} 10º$$

$$t_{máx} = \frac{V_o}{9{,}8\frac{m}{s^2}} \cdot \operatorname{sen} 10º$$

Hemos obtenido dos ecuaciones con $V_o$ y $t_{máx}$ de incógnitas.

(1) $V_0 \cdot 2t_{máx} \cdot \cos 10° = 7m$

(2) $t_{máx} = \dfrac{V_o}{9{,}8\frac{m}{s^2}} \cdot \operatorname{sen} 10°$

Sustituimos $t_{máx}$ en la ecuación (1)

$$V_0 \cdot 2\frac{V_o}{9{,}8\frac{m}{s^2}} \cdot \operatorname{sen}10° \cdot \cos 10° = 7m$$

Multiplicamos los factores $V_o$ y reunimos los factores 2, sen10° y cos10°.

$$\frac{V_o^{\,2}}{9{,}8\frac{m}{s^2}} \cdot 2\operatorname{sen}10°\cos 10° = 7m$$

Aplicamos la identidad trigonométrica:

sen2a = 2·sena·cosa

de forma inversa, 2·sen10°·cos10° = sen(2·10°)

$$\frac{V_o^{\,2}}{9{,}8\frac{m}{s^2}} \cdot 2\operatorname{sen}10°\cos 10° = 7m$$

Despejando $V_o$

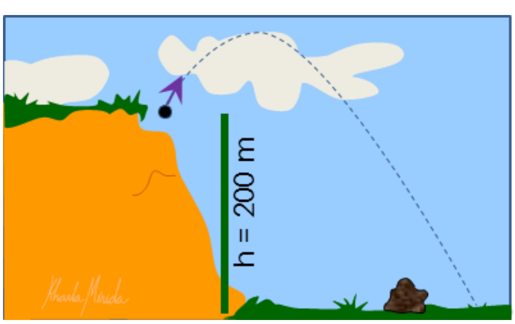
$$V_o = \sqrt{\frac{7m \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2}}{2\operatorname{sen}10°\cos 10°}}$$

Efectuamos los cálculos

$$\boxed{V_o = 14{,}14\frac{m}{s}}$$

## CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Ejercicio 4. Parte I

Se dispara un proyectil al aire desde la cima de una cornisa a 200 m por encima de un valle. Su velocidad inicial es de 60 m/s a 60° respecto a la horizontal. Despreciando la resistencia del aire, ¿dónde caerá el proyectil?.




**Datos**

h = 200m

$V_o$ = 60m/s

$\alpha$ = 60°

R = ?

Alcance es una distancia horizontal por lo tanto se necesita la fórmula de movimiento horizontal para calcularla

$$V_x = \frac{d_x}{t_v}$$

**Nota:** Cuando el tiempo que se utiliza es el tiempo de vuelo, la distancia horizontal que se calcula es el alcance.

$$V_x = \frac{R}{t_v}$$

El tiempo de vuelo, que está dividiendo, pasa al otro lado multiplicando

$$V_x \cdot t_v = R$$

Ordenando la ecuación

$$R = V_x \cdot t_v$$

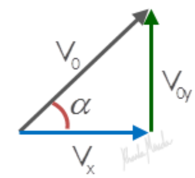
Para calcular el alcance necesitamos conocer $V_x$ y $t_v$. Conocemos $V_o$ y $\alpha$, con eso hallamos $V_{ox}$, que es $V_x$. El $t_v$, podemos hallarlo por movimiento vertical.

---

Hallemos las componentes de la rapidez inicial.

$$V_x = V_0 \cdot \cos\alpha$$

$$V_{0y} = V_0 \cdot \text{sen}\alpha$$




Sustituimos $V_o$ y $\alpha$

$$V_x = V_0 \cdot \cos\alpha \qquad V_y = V_0 \cdot \text{sen}\alpha$$

$$V_x = 60 \,{}^{m}\!/\!{}_{s} \cdot \cos 60^\circ \qquad V_y = 60 \,{}^{m}\!/\!{}_{s} \cdot \text{sen} 60^\circ$$

$$V_x = 30 \,{}^{m}\!/\!{}_{s} \qquad V_y = 51{,}96 \,{}^{m}\!/\!{}_{s}$$

---

Para hallar el tiempo de vuelo utilizaremos las fórmulas de movimiento vertical.

Conocemos $V_o$, g, y la altura desde la cual fue lanzado.

$$V_y = V_{oy} - g \cdot t$$

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2gy$$

$$y = V_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2$$

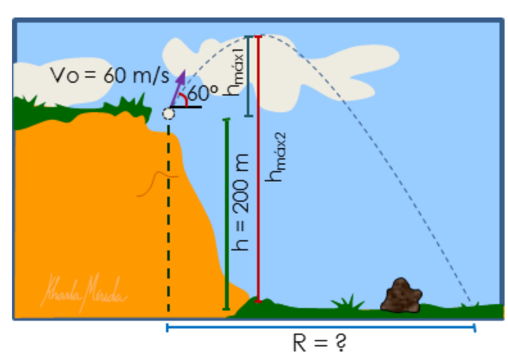
**Nota:** el valor de esta altura no debe ser usado en las fórmulas, **las distancias que aparecen en las fórmulas son distancias recorridas**, y esta altura no es una distancia recorrida.

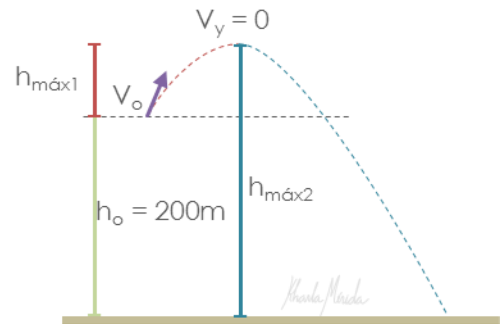
El tiempo de vuelo de este proyectil es la suma del $t_{máx1}$, que es el tiempo que tarda en subir, más el $t_{máx2}$, que es el tiempo que tarda en bajar del punto máximo al suelo del valle.

$$t_v = t_{máx1} + t_{máx2}$$

Estos tiempos no son iguales, porque la altura máxima para el descenso tiene 200 metros más que la altura máxima para el ascenso.

**Recordemos.** En el punto máximo la velocidad es cero.
Esta velocidad es la velocidad final del ascenso y la inicial del descenso.






**Ascenso.** Tiene como rapidez inicial $V_{oy}$, y como rapidez final $V_y = 0$.

De la primera fórmula conocemos $V_y$, $V_o$ y g, podemos despejar el tiempo.

$$V_y = V_{oy} - g \cdot t$$

**Nota:** Como usamos valores del punto de salida y punto máximo, El tiempo obtenido es $t_{máx1}$ (tiempo que tarda desde el punto de partida al punto máximo alcanzado).

Sustituimos $V_{oy}$, t y g en la fórmula.

$$0 = 51{,}96 \, m/s - 9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot t_{máx1}$$

Sustituimos $V_{oy}$, t y g en la fórmula.

$$9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot t_{máx1} = 51{,}96 \, m/s$$

Sustituimos $V_{oy}$, t y g en la fórmula.

$$t_{máx1} = \frac{51{,}96 \, m/s}{9{,}8 \frac{m}{s^2}}$$

$$\boxed{t_{máx1} = 5{,}30s}$$

## CINEMÁTICA. Lanzamiento Inclinado. Ejercicio 4. Parte II

Para hallar el $\boldsymbol{t_{máx2}}$, necesitamos $\boldsymbol{h_{máx2}}$, que es la altura máxima para el descenso. Esta altura resulta de sumar la altura desde la cual fue lanzado, $\boldsymbol{h_o}$, más la altura máxima de ascenso, $\boldsymbol{h_{máx1}}$.

$$\boldsymbol{h_{máx2} = h_o + h_{máx1}}$$

La altura desde la cual fue lanzado es $\boldsymbol{h_o}$ = 200 metros. La altura máxima de ascenso, $\boldsymbol{h_{máx1}}$, debemos calcularla.

Para hallar la $\boldsymbol{h_{máx1}}$, podemos usar la 2da fórmula. Recordemos que la velocidad final de ascenso es cero, la velocidad inicial del ascenso es 51,96 metros por segundos y la gravedad es una constante conocida.

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2gy$$

Sustituimos $V_y$, $V_{oy}$ y g en la fórmula.

$$0 = \left(51{,}96 \, m/s\right)^2 - 2 \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot h_{máx1}$$

$$2 \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2} \cdot h_{máx1} = \left(51{,}96 \, m/s\right)^2$$

$$h_{máx1} = \frac{\left(51{,}96 \, m/s\right)^2}{2 \cdot 9{,}8 \frac{m}{s^2}}$$

$$\boxed{h_{máx1} = 137{,}74m}$$

$$h_{máx2} = h_o + h_{máx1}$$

Sustituimos $h_o$ y $h_{máx1}$

$$h_{máx2} = 200m + 137,74m$$

$$\boxed{h_{máx2} = 337,74m}$$

---

Ahora podemos hallar el $t_{máx2}$ usando la 3ra fórmula de caída libre aplicada al descenso del proyectil.

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

Sustituimos $y = h_{máx2}$ y g

$$y = h_{máx2} = 337,74m$$

$$337,74m = \frac{1}{2}\cdot 9,8\frac{m}{s^2}\cdot t_{máx2}{}^2$$

$$\frac{2\cdot 337,74m}{9,8\frac{m}{s^2}} = t_{máx2}{}^2$$

$$t_{máx2} = \sqrt{\frac{2\cdot 337,74m}{9,8\frac{m}{s^2}}}$$

$$t_{máx2} = 8,30s$$

---

**Recordemos.** que el $t_{máx2}$ se calculó para hallar el tiempo de vuelo, $t_v$, que a su vez nos servirá para hallar el alcance, R.

Sustituimos $t_{máx1}$ y $t_{máx2}$

$$t_v = t_{máx1} + t_{máx2}$$

$$t_v = 5,30s + 8,30s$$

$$t_v = 13,60s$$

---

Fórmula de alcance obtenido

$$R = V_x \cdot t_v$$

Sustituimos $V_{ox}$ y $t_v$

$$R = 30 \,{}^{m}\!/_{s} \cdot 13,60s$$

$$\boxed{R = 408m}$$

El proyectil cayó a 408 m de la vertical de la cual fue disparado

## Emparejando el Lenguaje

**Lanzamiento Inclinado.** Ocurre cuando la velocidad inicial, rapidez de salida, forma un ángulo agudo con la horizontal.
**Movimiento Horizontal.** No actúa ninguna aceleración, que aumente o disminuya la rapidez, es decir, la rapidez horizontal con la que sale se mantiene en todo punto de su trayectoria.
**Movimiento Vertical.** La rapidez inicial en la dirección vertical es cero. Esto quiere decir, verticalmente es una caída libre, porque la rapidez inicia en 0 y aumenta por efecto de la aceleración de gravedad.

## A Practicar

1. Se lanza una pelota de golf, que alcanza una altura máxima de 20 m y un alcance de 120 m en un tiempo de vuelo de 5 seg. Calcular: a) la velocidad de lanzamiento; b) el ángulo de elevación.
2. Un proyectil es lanzado con velocidad inicial de 196m/s y ángulo de elevación de 30º. No tomando en cuenta la resistencia del aire, ¿Cuál es el desplazamiento máximo vertical?, ¿Qué tiempo emplea el proyectil en este desplazamiento?, ¿Cuál es el alcance horizontal del disparo?, ¿Cuál es la velocidad del proyectil al cabo de 5s?
3. Un proyectil es lanzado con velocidad inicial 98m/s y ángulo de elevación de 45º. Cuál es el desplazamiento vertical y el desplazamiento horizontal al cabo de 3s?, ¿Cuál es el tiempo de vuelo?, ¿Cuál es la velocidad final del proyectil?, ¿Cuál es la velocidad del proyectil en el punto mas alto de la trayectoria?
4. Un proyectil es lanzado con velocidad inicial de 49m/s y ángulo de inclinación de 30º. ¿Cuál es la velocidad del proyectil cuando el desplazamiento vertical sea 20m?, ¿Cuál es el desplazamiento horizontal?, ¿Cuál es el alcance máximo horizontal?, y ¿Cuál es el desplazamiento máximo vertical?.
5. El alcance horizontal de un proyectil que ha sido lanzado con cierto ángulo de elevación, no tomando en cuenta la resistencia del aire, es de 245m. Si el tiempo de vuelo es de 10s ¿Cuál es la velocidad inicial y el ángulo de elevación?, ¿Cuál es el alcance máximo horizontal?, ¿Cuál es el desplazamiento máximo vertical?.

## Lo Hicimos Bien?

1. a) la velocidad de lanzamiento es **V** = 29,7m/s **i** + 19,8m/s **j**, y su módulo es V = 35,7m/s; b) el ángulo de elevación es $\alpha$ = 33,7°.
2. El desplazamiento máximo vertical es $h_{máx}$ = 490m, el tiempo que en realizar este desplazamiento es $t_{máx}$ = 10s, el alcance horizontal del disparo es R = 3394,8m, la velocidad del proyectil al cabo de 5s es **V** = 169,74m/s **i** + 49m/s **j**, esto es V = 176,67m/s , $\alpha$ = 16,10°.
3. Al cabo de 3s el desplazamiento vertical es y = 163,8m y el desplazamiento horizontal x = 207,9m, el tiempo de vuelo es $t_v$ = 14,14s , la velocidad final del proyectil es **V** = 69,3m/s **i** + 69,3m/s **j**, esto es V = 98m/s , $\alpha$ = -45° ; la velocidad del proyectil en el punto mas alto de la trayectoria es $V_y = V_{ox}$ = 69,3m/s.
4. La velocidad del proyectil cuando el desplazamiento vertical es de 20m es V = 44,83m/s , $\alpha$ = 18,79°, y el desplazamiento horizontal es 43,71m, el alcance máximo horizontal es R = 212,2m, y el desplazamiento máximo vertical es 30,625m.
5. la velocidad inicial es $V_o$ = 54,78m/s , $\alpha$ = 63,43°, el desplazamiento máximo vertical es $h_{máx}$ = 63,43°.

**Nota:** los caracteres en negrita son vectores.