7

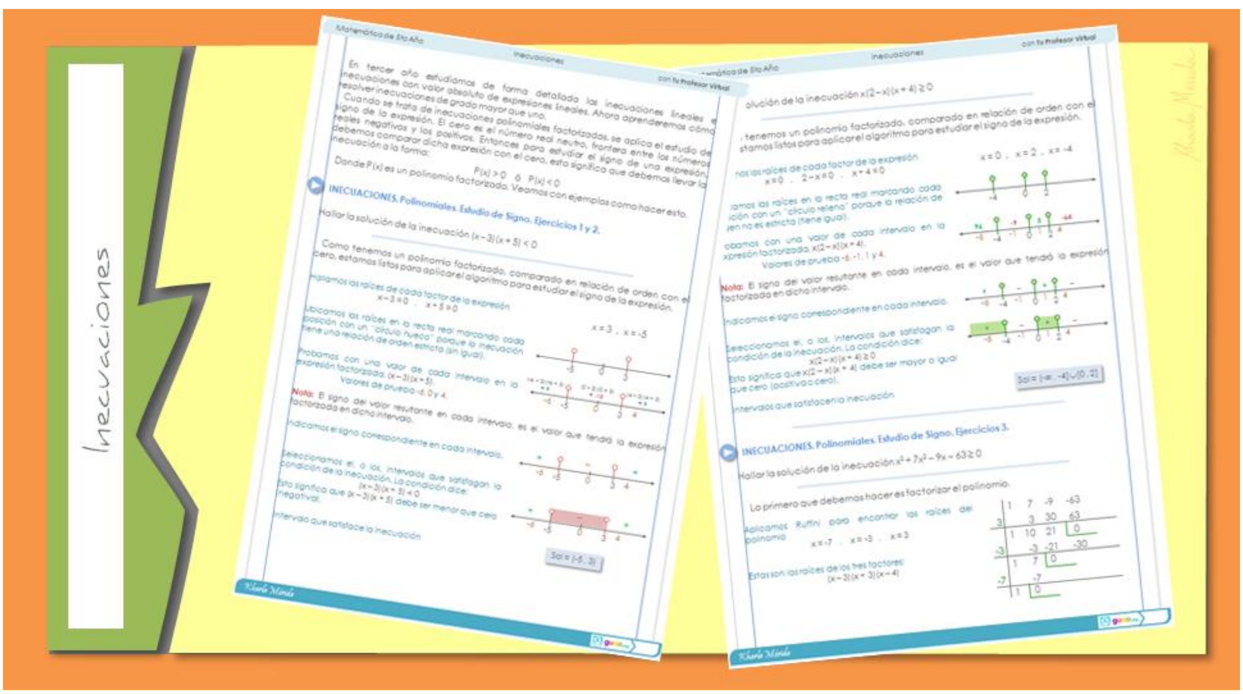
7ma Unidad

Inecuaciones

7.1 Con una Variable

Compararnos con nosotros de forma que cada día seamos mejor que el anterior, es ser exitosos.

Descripción



Las inecuaciones son la forma matemática de las relaciones de orden entre cantidades variables, y su resolución constituye el epicentro del estudio del comportamiento de las funciones o modelos matemáticos. Saber resolver inecuaciones es saber realizar el estudio de signo de expresiones matemáticas, y esto es vital para conocer su comportamiento, así como prever futuros eventos representados por ellas.

Conocimientos Previos Requeridos

Propiedades de los Números Reales, Relaciones de Orden, Inecuaciones, Simplificación de Expresiones Algebraicas, Despeje.

Contenido

Definición y Elementos de Inecuaciones, Polinomiales, Estudio de Signo, Ejercicios.

Videos Disponibles

INECUACIONES. Definición y Elementos

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para familiarizarse con los conceptos nuevos y fortalecer el lenguaje operativo.

Guiones Didácticos

INECUACIONES. Definición y Propiedades

Inecuaciones. Son relaciones de orden en las que hay una o más incógnitas.

Propiedades

Sean a , b y c pertenecientes a $\mathbb{R}$ se cumple:

Para la suma

Si $x < a$ entonces $x + b < a + b$

Si $x > a$ entonces $x + b > a + b$

Si sumamos un mismo número en ambos lados de una inecuación, se mantiene la relación de orden.

Para la multiplicación

Si $a > 0$, $b > 0$ entonces $a \cdot b > 0$

Multiplicar ambos lados de una igualdad por un número positivo no altera el sentido de la relación de orden.

Si $a > 0$, $b < 0$ entonces $a \cdot b < 0$

Si $a < 0$, $b < 0$ entonces $a \cdot b > 0$

Multiplicar ambos lados de una igualdad por un número negativo cambia el sentido de la relación de orden.

Nota: Otra conclusión que podemos sacar de esto es que el producto de factores de igual signo es positivo, y el producto de factores con distinto signo es negativo. Esto lo aprendimos en operaciones con los signos en las lecciones de números enteros.

Transitividad

Si $a > b$ y $b > c$ entonces $a > c$

Si un número a es mayor que otro número b, que a su vez es mayor que otro número c, se concluye que a es mayor que c.

En tercer año estudiamos de forma detallada las inecuaciones lineales e inecuaciones con valor absoluto de expresiones lineales. Ahora aprenderemos cómo resolver inecuaciones de grado mayor que uno.

Cuando se trata de inecuaciones polinomiales factorizadas, se aplica el estudio de signo de la expresión. El cero es el número real neutro, frontera entre los números reales negativos y los positivos. Entonces para estudiar el signo de una expresión, debemos comparar dicha expresión con el cero, esto significa que debemos llevar la inecuación a la forma:

$$P(x) > 0 \quad ó \quad P(x) < 0$$

Donde P(x) es un polinomio factorizado. Veamos con ejemplos como hacer esto.

INECUACIONES. Polinomiales, Estudio de Signo. Ejercicios 1 y 2.

Hallar la solución de la inecuación $(x-3)(x+5) < 0$

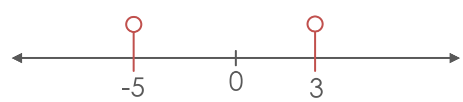
Como tenemos un polinomio factorizado, comparado en relación de orden con el cero, estamos listos para aplicar el algoritmo para estudiar el signo de la expresión.

Hallamos las raíces de cada factor de la expresión

$$x - 3 = 0 \quad , \quad x + 5 = 0$$

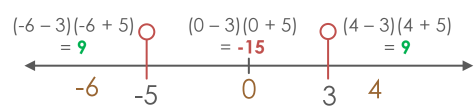
$$x = 3 \;\; , \;\; x = -5$$

Ubicamos las raíces en la recta real marcando cada posición con un "círculo hueco" porque la inecuación tiene una relación de orden estricta (sin igual).



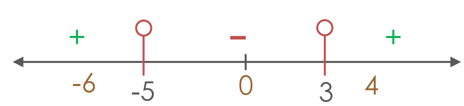
Probamos con una valor de cada intervalo en la expresión factorizada, $(x-3)(x+5)$.

Valores de prueba -6, 0 y 4.



Nota: El signo del valor resultante en cada intervalo, es el valor que tendrá la expresión factorizada en dicho intervalo.

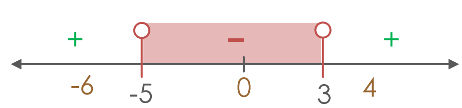
Indicamos el signo correspondiente en cada intervalo.



Seleccionamos el, o los, intervalos que satisfagan la condición de la inecuación. La condición dice:

$$(x-3)(x+5) < 0$$

Esto significa que $(x-3)(x+5)$ debe ser menor que cero (negativa).



Intervalo que satisface la inecuación

Sol = (-5 , 3)

Hallar la solución de la inecuación $x(2-x)(x+4) \geq 0$

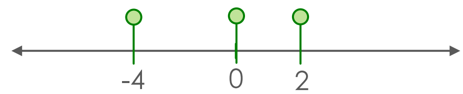
Como tenemos un polinomio factorizado, comparado en relación de orden con el cero, estamos listos para aplicar el algoritmo para estudiar el signo de la expresión.

Hallamos las raíces de cada factor de la expresión

$x = 0 \quad , \quad 2 - x = 0 \quad , \quad x + 4 = 0$

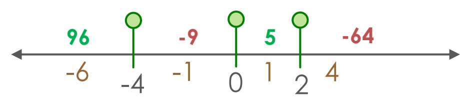
$x = 0 \ , \ x = 2 \ , \ x = -4$

Ubicamos las raíces en la recta real marcando cada posición con un "círculo relleno" porque la relación de orden no es estricta (tiene igual).



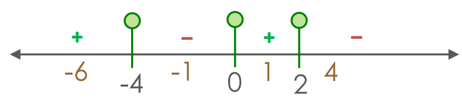
Probamos con una valor de cada intervalo en la expresión factorizada, $x(2-x)(x+4)$.

Valores de prueba -6, -1, 1 y 4.



Nota: El signo del valor resultante en cada intervalo, es el valor que tendrá la expresión factorizada en dicho intervalo.

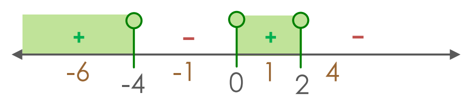
Indicamos el signo correspondiente en cada intervalo.



Seleccionamos el, o los, intervalos que satisfagan la condición de la inecuación. La condición dice:

$x(2-x)(x+4) \geq 0$

Esto significa que $x(2-x)(x+4)$ debe ser mayor o igual que cero (positiva o cero).



Intervalos que satisfacen la inecuación

Sol = $(-\infty, -4] \cup [0, 2]$

INECUACIONES. Polinomiales, Estudio de Signo. Ejercicios 3.

Hallar la solución de la inecuación $x^3 + 7x^2 - 9x - 63 \geq 0$

Lo primero que debemos hacer es factorizar el polinomio.

Aplicamos Ruffini para encontrar las raíces del polinomio

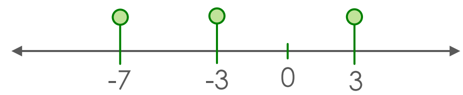
$x = -7 \quad , \quad x = -3 \quad , \quad x = 3$

	1	7	-9	-63
3		3	30	63
	1	10	21	0
-3		-3	-21	-30
	1	7	0	
-7		-7		
	1	0		

Estas son las raíces de los tres factores:

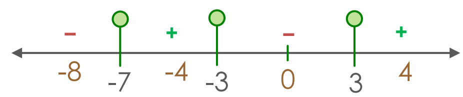
$(x-3)(x+3)(x-4)$

Ubicamos las raíces en la recta real marcando cada posición con un "círculo relleno" porque la relación de orden no es estricta (tiene igual).



Probamos con una valor de cada intervalo en la expresión factorizada, $(x-3)(x+3)(x-4)$.

Valores de prueba -8, -4, 0 y 4.

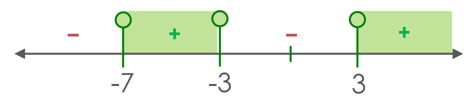


Nota: El signo del valor resultante en cada intervalo, es el valor que tendrá la expresión factorizada en dicho intervalo. En este caso colocamos solo el signo del resultado, que es nuestro objetivo.

Seleccionamos el, o los, intervalos que satisfagan la condición de la inecuación. La condición dice:

$$(x-3)(x+3)(x-4) \geq 0$$

Esto significa que $(x-3)(x+3)(x-4)$ debe ser mayor o igual que cero (positiva o cero).



Intervalos que satisfacen la inecuación

$$Sol = [-7\ ,\ -3] \cup [3\ ,\ \infty)$$

INECUACIONES. Polinomiales, Estudio de Signo. Ejercicios 4.

Hallar la solución de la inecuación $x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 32x - 32 \leq 0$

Lo primero que debemos hacer es factorizar el polinomio.

Aplicamos Ruffini para encontrar las raíces del polinomio

$x = -7$, $x = -3$, $x = 3$

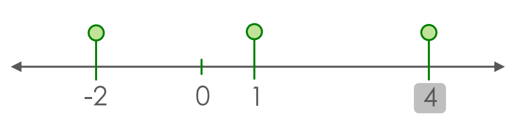
	1	-7	6	32	-32
-2		-2	18	-48	32
	1	-9	24	-16	0
1		1	-8	16	
	1	-8	16	0	
4		4	-16		
	1	-4	0		
4		4			
	1	0			

Estas son las raíces de los tres factores:

$$(x+2)(x-1)(x-4)^2$$

Nota: $x = 4$ es raíz del polinomio dos veces, esto significa que hay dos factores de la forma $(x-4)$, es por eso el cuadrado.

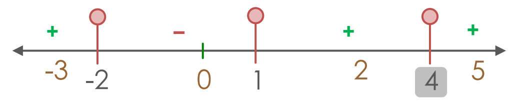
Ubicamos las raíces en la recta real marcando cada posición con un "círculo relleno" porque la relación de orden no es estricta (tiene igual).



Nota: Resaltaremos el 4 para que prestemos atención al comportamiento del signo a ambos lados de la raíz que se repite.

Probamos con una valor de cada intervalo en la expresión factorizada, $(x + 2)(x - 1)(x - 4)^2$.

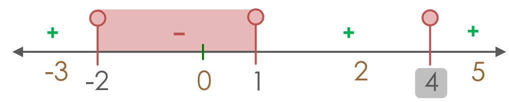
Valores de prueba -3, 0, 2 y 5.



Seleccionamos el, o los, intervalos que satisfagan la condición de la inecuación. La condición dice:

$$(x + 2)(x - 1)(x - 4)^2 \leq 0$$

Esto significa que $(x + 2)(x - 1)(x - 4)^2$ debe ser menor o igual que cero (negativo o cero).



Intervalo que satisfacen la inecuación

Sol = [-2 , 1]

Nota: El signo a ambos lados de una raíz que se repite una cantidad par de veces (tiene potencia par) se repite.

Emparejando el Lenguaje

Inecuaciones. Son relaciones de orden en las que hay una o más incógnitas.

A Practicar

Halle los intervalos solución para cada inecuación:

1. $x(x+5)(x-4) > 0$
2. $(x+2)^2(x-2) \leq 0$
3. $x(x-6)^3(x+2) \geq 0$
4. $x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 16x \geq 0$
5. $x^4 - x^3 - 39x^2 - 31x + 70 < 0$
6. $x^5 - 10x^3 + 12x^2 - 39x + 36 > 0$
7. $\dfrac{(x-1)(x+6)}{(x+1)(x-4)} \geq 0$
8. $\dfrac{x(x^2+5)(x-6)}{(x-1)(x+3)} \leq 0$

Lo Hicimos Bien?

Halle los intervalos solución para cada inecuación:

1. $(-5, 0) \cup (0, 4)$
2. $(-\infty, 2]$
3. $[-2, 0] \cup [6, \infty)$
4. $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$
5. $(-7, -2) \cup (1, 5)$
6. $(-4, 1) \cup (3, \infty)$
7. $(-\infty, -6] \cup [-1, 1] \cup [4, \infty)$
8. $(-3, 0] \cup (1, 6]$