5

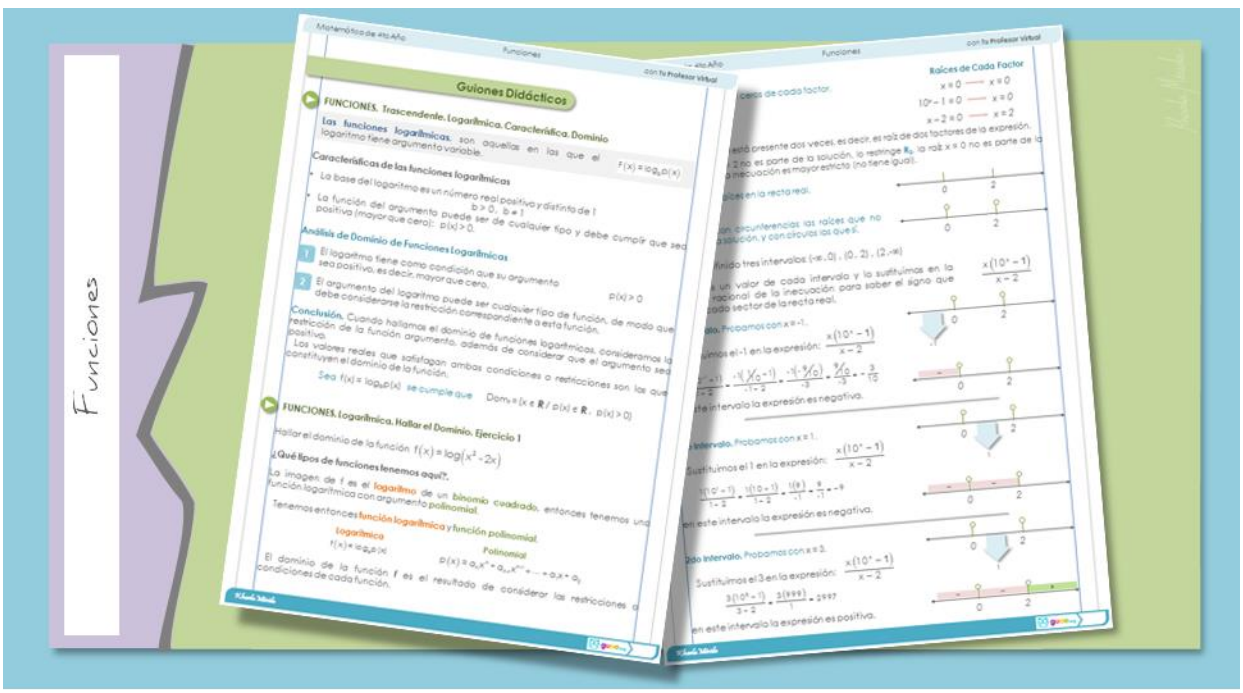
5ta Unidad

Funciones

5.3 Trascendentes. Dominio de Logarítmica

Hacer que cada momento valga es cuestión de decisión. Los "Momentos especiales" no existen por sí solos, nosotros hacemos que sean especiales.

Descripción



Los logaritmos surgieron como una necesidad de simplificar cálculos, y constituyen hoy día una herramienta sin la que la ciencia y la tecnología no podría avanzar. El logaritmo está en cosas tan sencillas como el análisis del PH de las sustancias, de modo que para garantizar que el PH de una crema sea el apropiado para determinados tipos de piel, se ha debido aplicar relaciones que involucran logaritmos. También hace presencia en la representación matemática de procesos complejos, ya sea químicos, mecánicos como la explicación de fenómenos en estudio, como los valores medidos en la escala de Richter para los terremotos. Las funciones logarítmicas son entonces de gran importancia, estudiemos su comportamiento.

Conocimientos Previos Requeridos

Exponenciales, Logaritmo, Trigonometría, Inecuaciones, Intervalos.

Contenido

Funciones Logarítmicas, Característica, Dominio, Ejercicios.

Videos Disponibles

FUNCIONES. Trascendentes. Logarítmicas. Características, Dominio

FUNCIONES. Logarítmica. Hallar el Dominio. Ejercicio 1

FUNCIONES. Logarítmica. Hallar el Dominio. Ejercicio 2

FUNCIONES. Logarítmica. Hallar el Dominio. Ejercicio 3

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

FUNCIONES. Trascendente. Logarítmica. Característica, Dominio

Las funciones logarítmicas, son aquellas en las que el logaritmo tiene argumento variable. $F(x) = \log_b p(x)$

Características de las funciones logarítmicas

- La base del logaritmo es un número real positivo y distinto de 1
  $$b > 0 \ , \ b \neq 1$$
- La función del argumento puede ser de cualquier tipo y debe cumplir que sea positiva (mayor que cero): $p(x) > 0$.

Análisis de Dominio de Funciones Logarítmicas

1. El logaritmo tiene como condición que su argumento sea positivo, es decir, mayor que cero. $p(x) > 0$

2. El argumento del logaritmo puede ser cualquier tipo de función, de modo que debe considerarse la restricción correspondiente a esta función.

Conclusión. Cuando hallamos el dominio de funciones logarítmicas, consideramos la restricción de la función argumento, además de considerar que el argumento sea positivo.

Los valores reales que satisfagan ambas condiciones o restricciones son los que constituyen el dominio de la función.

Sea $f(x) = \log_b p(x)$ se cumple que $Dom_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ p(x) \in \mathbb{R} \ , \ p(x) > 0\}$

FUNCIONES. Logarítmica. Hallar el Dominio. Ejercicio 1

Hallar el dominio de la función $f(x) = \log\left(x^2 - 2x\right)$

¿Qué tipos de funciones tenemos aquí?.

La imagen de f es el **logaritmo** de un **binomio cuadrado**, entonces tenemos una función logarítmica con argumento **polinomial**.

Tenemos entonces **función logarítmica** y **función polinomial**.

Logarítmica	**Polinomial**
$f(x) = \log_b p(x)$	$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

El dominio de la función ***f*** es el resultado de considerar las restricciones o condiciones de cada función.

¿Qué restricciones debemos considerar?.

Polinomial. no tiene restricción
Logarítmica. tiene como restricción que el argumento debe ser mayor que cero.

R: Restricción Logarítmica $x^2 - 2x > 0$

La restricción de la función es que el argumento del logaritmo sea mayor que cero.

Esto es una **inecuación polinomial**. Para hallar la solución, factorizaremos la expresión.

$$x(x-2) > 0$$

Raíces de Cada Factor

hallamos las raíces o ceros de cada factor.

$x = 0 \longrightarrow x = 0$

$x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$

Ubicamos las raíces en la recta real.

Nota: Las raíces x = 0 y x = 2, no son parte del dominio, porque la desigualdad es mayor estricto (no contempla igualdad).

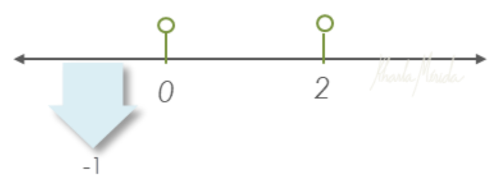
$x \neq 0 \ , \ x \neq 2$

Marcamos con circunferencias las raíces que no son parte de la solución, y con círculos las que sí.

Se han definido tres intervalos: (-∞ , 0) , (0 , 2) , (2 ,-∞)

Estudio del signo de la expresión

1er Intervalo. Probamos con x = -1.

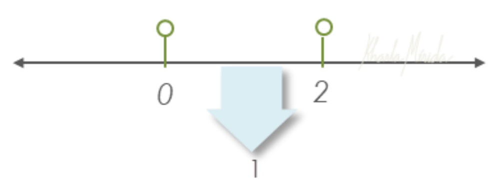


Sustituimos el -1 en la expresión: $x(x-2)$

$$-1(-1-2) = -1(-3) = 3$$

en este intervalo la expresión es positiva.

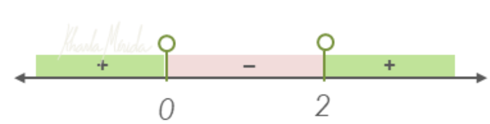
2do Intervalo. Probamos con x = 1.



Sustituimos el 1 en la expresión: $x(x-2)$

$$1(1-2) = 1(-2) = -2$$

en este intervalo la expresión es negativa.

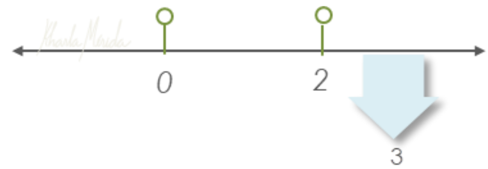


3er Intervalo. Probamos con $x = 3$.

Sustituimos el 3 en la expresión: $x(x-2)$

$$3(3-2) = 3(1) = 3$$

en este intervalo la expresión es positiva.



Como la inecuación pide que la expresión sea positiva, tomamos los intervalos donde esto se cumple.

$Dom_f = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

FUNCIONES. Logarítmica. Hallar el Dominio. Ejercicio 2

Hallar el dominio de la función $f(x) = \log\left(\dfrac{1-x}{x+4}\right)$

¿Qué tipos de funciones tenemos aquí?

La imagen de f es el **logaritmo** de una **fracción**.

función logarítmica	**función racional**
$f(x) = \log[r(x)]$	$r(x) = \left(\dfrac{1-x}{x+4}\right)$

¿Qué restricciones debemos considerar?.

Logarítmica. El argumento debe ser mayor que cero
Racional. El denominador debe ser diferente de cero

R_1: Restricción Logarítmica $\dfrac{1-x}{x+4} > 0$ **R_2:** Restricción Racional $x + 4 \neq 0$

R_2: Restricción Racional $x + 4 \neq 0$

Pasamos 4 restando al otro lado.

$$x \neq -4$$

$$x \in \mathbb{R} - \{-4\}$$

R_1: Restricción Logarítmica $\dfrac{1-x}{x+4} > 0$

Tenemos una ***inecuación racional***. Tanto numerador como denominador son factores algebraicos primos (que no puedan factorizarse más).
Debemos hallar las raíces de cada factor para realizar ***Estudio de Signo***.

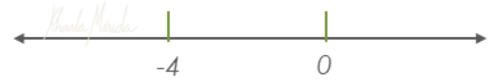
Raíces de Cada Factor

hallamos las raíces o ceros de cada factor.

$1 - x = 0 \longrightarrow x = 1$

$x + 4 = 0 \longrightarrow x = -4$

Ubicamos las raíces en la recta real.



Nota: La raíz x = -4, no es parte del dominio, está restringida por $\mathbf{R_2}$.

$x \neq -4$

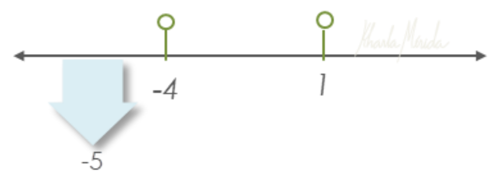
Marcamos con circunferencias las raíces que no son parte de la solución, y con círculos las que sí.

Se han definido tres intervalos: (-∞ , -4) , (-4 , 1) , (1 ,-∞)

Tomamos un valor de cada intervalo y lo sustituimos en la expresión racional de la inecuación para saber el signo que tiene en cada sector de la recta real.

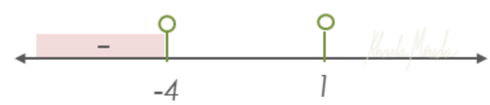
$$\frac{1-x}{x+4} > 0$$

1er Intervalo. Probamos con x = -5.



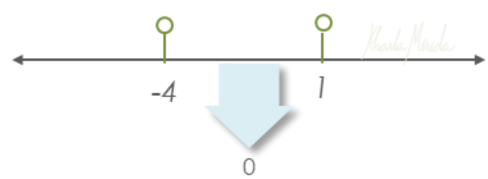
Sustituimos el -5 en la expresión: $\dfrac{1-x}{x+4}$

$$\frac{1-(-5)}{(-5)+4} = \frac{6}{-1} = -6$$



en este intervalo la expresión es negativa.

2do Intervalo. Probamos con x = 0.

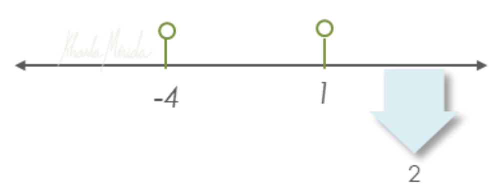


Sustituimos el 0 en la expresión: $\dfrac{1-x}{x+4}$

$$\frac{1-0}{0+4} = \frac{1}{4}$$

en este intervalo la expresión es positiva.

3er Intervalo. Probamos con x = 2.



Sustituimos el 2 en la expresión: $\dfrac{1-x}{x+4}$

$$\frac{1-2}{2+4} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$$

en este intervalo la expresión es negativa.

La inecuación pide que la expresión sea positiva entonces tomaremos el 2do intervalo, que es el que cumple la condición este es el dominio.

$\mathrm{Dom}_f = (-4\ ,\ 1)$

FUNCIONES. Logarítmica. Hallar el Dominio. Ejercicio 3

Hallar el dominio de la función $f(x) = \log\left[\frac{x(10^x - 1)}{x - 2}\right]$

¿Qué tipos de funciones tenemos aquí?.

La imagen de ***f*** es el **logaritmo** de una **fracción** cuyo numerador es el producto de un factor algebraico y un factor que contiene expresión **exponencial**, mientras que el denominador es una binomio.

Tenemos una **función logarítmica**, **función racional** y **función exponencial**.

función logarítmica	**función racional**	**función exponencial**
$f(x) = \log[r(x)]$	$r(x) = \frac{x(10^x - 1)}{p(x)}$	$r(x) = 10^x - 1$

¿Qué restricciones debemos considerar?.

Logarítmica. El argumento debe ser mayor que cero
Racional. El denominador debe ser diferente de cero
Exponencial. No tiene restricción

R_1: Restricción Logarítmica $\frac{x(10^x - 1)}{x - 2} > 0$ **R_2:** Restricción Racional $x - 2 \neq 0$

R_2: Restricción Racional $x - 2 \neq 0$

Pasamos 2 sumando al otro lado $x \neq 2$

x puede tomar cualquier valor menos 2. $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

R_1: Restricción Logarítmica $\frac{x(10^x - 1)}{x - 2} > 0$

Tenemos una ***inecuación racional***. En el numerador hay dos factores que no pueden escribirse de forma más simple, y en el denominador un factores algebraico primo.

Debemos hallar las raíces de cada factor para realizar ***Estudio de Signo***.

hallamos las raíces o ceros de cada factor.

Raíces de Cada Factor

$x = 0 \longrightarrow x = 0$

$10^x - 1 = 0 \longrightarrow x = 0$

$x - 2 = 0 \longrightarrow x = 2$

Nota 1: La raíz x = 0 está presente dos veces, es decir, es raíz de dos factores de la expresión.

Nota 2: La raíz x = 2 no es parte de la solución, lo restringe $\mathbf{R_2}$, la raíz x = 0 no es parte de la solución porque la inecuación es mayor estricto (no tiene igual).

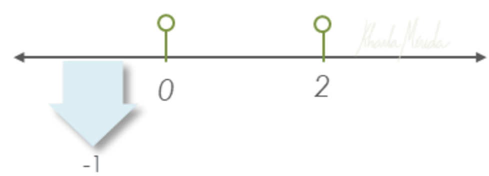
Ubicamos las raíces en la recta real.

Marcamos con circunferencias las raíces que no son parte de la solución, y con círculos las que sí.

Se han definido tres intervalos: (-∞ , 0) , (0 , 2) , (2 ,-∞)

Tomamos un valor de cada intervalo y lo sustituimos en la expresión racional de la inecuación para saber el signo que tiene en cada sector de la recta real.

$$\frac{x\left(10^x - 1\right)}{x-2}$$

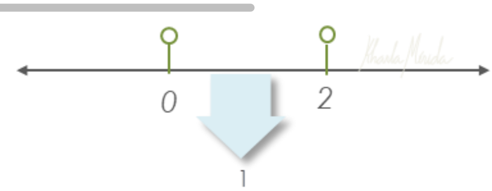


1er Intervalo. Probamos con x = -1.

Sustituimos el -1 en la expresión: $\dfrac{x\left(10^x - 1\right)}{x-2}$

$$\frac{-1\left(10^{-1}-1\right)}{-1-2} = \frac{-1\left(\frac{1}{10}-1\right)}{-1-2} = \frac{-1\left(-\frac{9}{10}\right)}{-3} = \frac{\frac{9}{10}}{-3} = -\frac{3}{10}$$

en este intervalo la expresión es negativa.

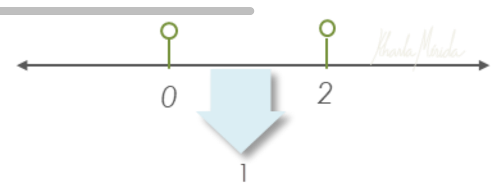


2do Intervalo. Probamos con x = 1.

Sustituimos el 1 en la expresión: $\dfrac{x\left(10^x - 1\right)}{x-2}$

$$\frac{1\left(10^{1}-1\right)}{1-2} = \frac{1\left(10-1\right)}{1-2} = \frac{1(9)}{-1} = \frac{9}{-1} = -9$$

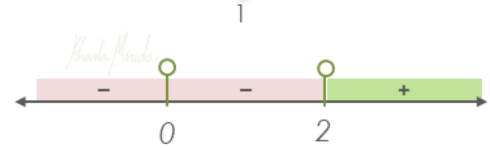
en este intervalo la expresión es negativa.



2do Intervalo. Probamos con x = 3.

Sustituimos el 3 en la expresión: $\dfrac{x\left(10^x - 1\right)}{x-2}$

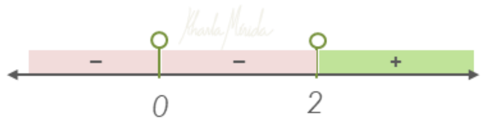
$$\frac{3\left(10^{3}-1\right)}{3-2} = \frac{3(999)}{1} = 2997$$



en este intervalo la expresión es positiva.

La inecuación pide que la expresión sea positiva esto se cumple en el 3er intervalo $(2\,,\,\infty)$.

$$\frac{x\left(10^{x}-1\right)}{x-2}>0$$



$Dom_f = (2\,,\,\infty)$

Emparejando el Lenguaje

Funciones Logarítmicas, son aquellas en las que el logaritmo tiene argumento variable.

A Practicar

Halle el dominio de las funciones dadas

1. $f(x)=(3x-7)\log\left(x^2-2x-15\right)$

2. $g(x)=\dfrac{\log(6-x)}{x+11}$

3. $f(x)=\dfrac{\log\sqrt{-3-x}}{\log x}$

4. $f(x)=\log\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-12}$

5. $f(x)=\log\sqrt{\dfrac{x+\pi}{4-x^2}}$

6. $g(x)=\ln\sqrt{x^2+10x}$

¿Lo Hicimos Bien?

1. $Dom_f = (-\infty , -3) \cup (5 , \infty)$
2. $Dom_g = (-\infty , -11) \cup (-11 , 6)$
3. $Dom_f = \varnothing$
4. $Dom_f = \left(-\infty , -2\sqrt{3}\right) \cup (-2 , -1) \cup \left(2\sqrt{3} , \infty\right)$
5. $Dom_f = (-2 , 2)$
6. $Dom_g = (-\infty , -10) \cup (0 , \infty)$