5

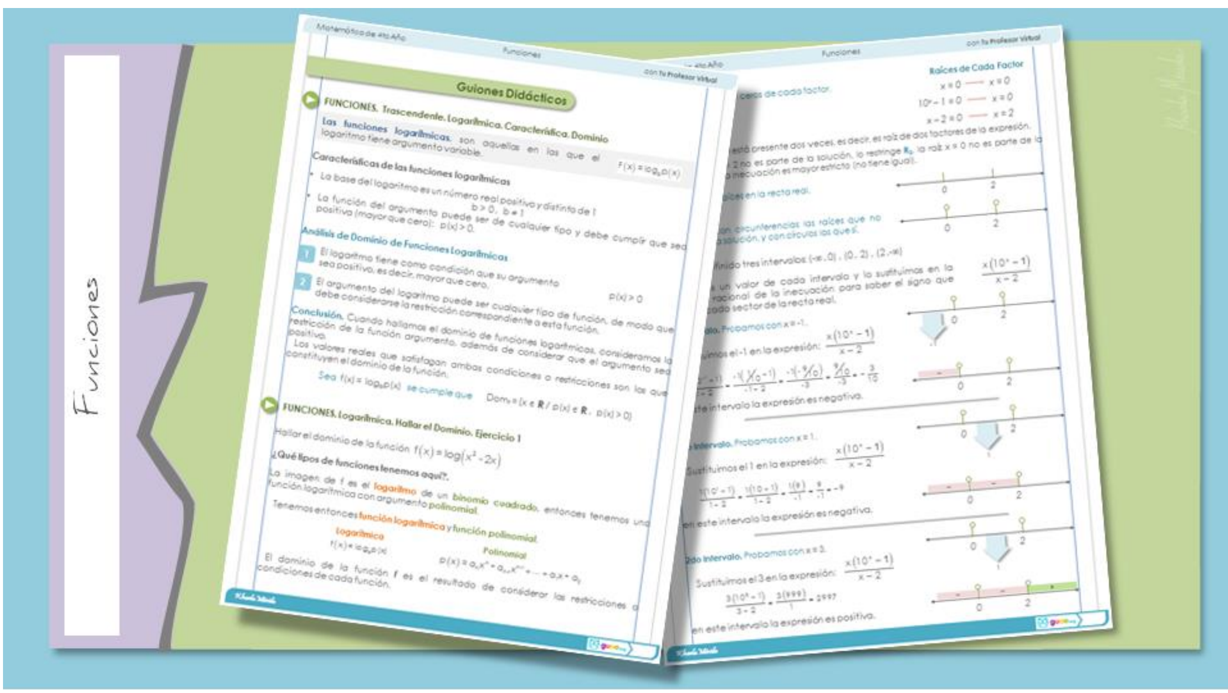
5ta Unidad

# Funciones

## 5.2 Trascendentes. Dominio de Exponenciales

*Buenas intenciones, buena voluntad, buen ánimo… Son apenas la chispa que enciende el motor evolutivo. Para lograr grandes metas se necesita además preparación, disciplina, constancia.*

### Descripción




Las funciones exponenciales son vitales para el estudio de muchas situaciones reales e ideales. Por ejemplo, es fundamental en el estudio de las probabilidades, lo que tiene ilimitadas aplicaciones en el desarrollo de la vida en sociedad. Conocer su comportamiento ayuda muchísimo al análisis de dichas situaciones (reales o ideales). En este objetivo contamos con el estudio del dominio de estas funciones.

## Conocimientos Previos Requeridos

Exponenciales, Logaritmo, Trigonometría, Inecuaciones, Intervalos.

## Contenido

Funciones Exponenciales, Característica, Dominio, Ejercicios.

## Videos Disponibles

FUNCIONES. Trascendentes. Exponenciales. Características, Dominio

FUNCIONES. Exponenciales. Hallar el Dominio. Ejercicio 1

FUNCIONES. Exponenciales. Hallar el Dominio. Ejercicio 2

FUNCIONES. Exponenciales. Hallar el Dominio. Ejercicio 3

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

# Guiones Didácticos

## FUNCIONES. Trascendente. Exponenciales. Característica, Dominio

**Las funciones exponenciales**, son aquellas en las que tienen como base un número real y como exponente una función, es decir, es una constante elevada a una función.

$$F(x) = a^{p(x)}$$

**Características de las funciones exponenciales,** $a^{p(x)}$

- La base de la función exponencial es un número real positivo y distinto de uno:
  $$a > 0\ ,\ \ a \neq 1$$
- La función del exponente puede ser de cualquier tipo. Esto es, puede ser cualquiera de las funciones algebraicas, cualquiera de las funciones trascendentes o cualquiera de las funciones especiales.

### Análisis de Dominio de Exponenciales

**1** Como la base es un número real, siempre que la función del exponente exista en los reales, la expresión exponencial resultará en valor real.

$$\text{Si } p(x) \in \mathbb{R} \longrightarrow a^{p(x)} \in \mathbb{R}$$

**2** El dominio de una función es el conjunto de valores reales de x para los que la función tiene imágenes reales.

$$Dom_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \in \mathbb{R}\}$$

**Conclusión.** Para las funciones Exponenciales el dominio es el conjunto de todos los valores reales de la variable x tales que la función del exponente, p(x), exista en los reales. Dicho de otra manera:

***El dominio de la función exponencial es el dominio de la función del exponente***

Sea $f(x) = a^{p(x)} \in \mathbb{R}$ se cumple que $Dom_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ p(x) \in \mathbb{R}\}$

**Nota:** Si la función del exponente tiene restricción, ésta será la restricción de la función exponencial.

## FUNCIONES. Exponenciales. Hallar el Dominio. Ejercicio 1

Hallar el dominio de la función $f(x) = e^{1/x}$

**1ro.** Identificamos el tipo de función.

La imagen de ***f*** es una expresión **exponencial**, cuya base es la constante "e" y cuyo exponente es el **racional** más simple, 1/x.

$$f(x) = e^{1/x}$$

$e^{r(x)}$ **Exponencial** $\qquad r(x) = \frac{1}{x}$ **Racional**

***f*** es una **función exponencial** compuesta con una **función racional**. Su dominio es el resultado de considerar las restricciones o condiciones de cada una.

**Exponencial:** no tiene restricción.
**Racional:** ***El denominador debe ser distinto de cero***.

$$R(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \longrightarrow g(x) \neq 0$$

Aplicando la restricción del racional, a ***f***:

$$f(x) = e^{1/x} \longrightarrow \textbf{R:} \quad x \neq 0$$

El denominador de la fracción debe ser distinto de cero.

Si x debe ser distinta de cero, significa que puede tomar cualquier valor real menos el cero.

$$x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Tenemos tres formas de representar esta solución.

$\mathit{Dom}_f = (-\infty\ , 0) \cup (0\ , \infty)$ $\qquad \mathit{Dom}_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\qquad \mathit{Dom}_f = \mathbb{R}^*$

**Nota:** La segunda y la tercera opción son las más usadas por lo simple. La segunda aplica cuando tenemos uno o más números específicos que están excluidos del dominio, la tercera es la forma de representar el conjunto de números reales sin el cero.

## FUNCIONES. Exponenciales. Hallar el Dominio. Ejercicio 2

Hallar el dominio de la función $f(x) = 3^{\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}}$

**¿Qué tipos de función tenemos?.**

La imagen de f es una expresión **exponencial** cuyo exponente es la **raíz** de una **fracción** de numerador x y denominador un binomio cuadrado.

Tenemos entonces funciones:

| Exponencial | Irracional | Racional |
|---|---|---|
| $f(x) = a^{p(x)}$ | $p(x) = \sqrt[n]{r(x)}$ | $r(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ |

El dominio de la función ***f*** es el resultado de considerar las restricciones o condiciones de cada función.

**Exponencial:** no tiene restricción.
**Irracional:** Si el índice de la raíz es par la cantidad subradical debe ser positiva o cero.

$$p(x) = \sqrt[n]{r(x)} \qquad \text{Si n es Par,} \quad r(x) \geq 0$$

**Racional:** El denominador debe ser distinto de cero.

$$R(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \longrightarrow g(x) \neq 0$$

Aplicando las restricciones, a ***f***: $f(x) = 3^{\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}}$

**R$_1$:** Restricción Irracional

$$\frac{x}{x^2-1} \geq 0$$

**R$_2$:** Restricción Racional

$$x^2 - 1 \neq 0$$

**Nota:** El dominio de la función son los valores que satisfagan ambas condiciones.

---

Empezaremos resolviendo la 2da restricción, que es más sencilla y rápida.

$$x^2 - 1 \neq 0$$

Pasamos 1 sumando al otro lado. $x^2 \neq 1$

Sacamos raíz cuadrada del otro lado con el doble signo correspondiente. $x \neq \pm\sqrt{1}$

Y finalmente x debe ser distinto de mas o menos 1. $x \neq \pm 1$

Para efectos de la función racional presente en ***f***, x puede tomar cualquier valor real menos ±1.

$$\boxed{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}}$$

La 2da restricción es una ***inecuación racional***. Debemos lograr que la expresión esté expresada en función factores simples, es decir, en factores algebraicos primos (que no puedan factorizarse más) para realizar el ***Estudio de Signo***.

**$R_1$:** Restricción Irracional

$$\frac{x}{x^2 - 1} \geq 0$$

En el denominador tenemos una diferencia de cuadrados, que se factoriza como un producto de conjugadas.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Te invitamos a revisar los conocimientos previos, ya sea no recuerdes o que tengas dudas. Para repasar factorización cuentas con la **unidad 7 de Matemática 2do año, 3er Lapso: Factorización**.

Cuando ya tenemos la expresión en función de factores simples o primos, debemos buscar las raíces de cada factor.

Igualamos a cero de cada factor y despejamos.

**Raíces de Cada Factor**

$x = 0 \rightarrow x = 0$

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

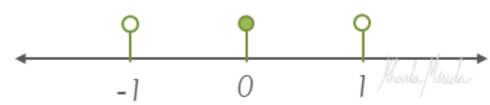
**Recordemos.** Para hallar las raíces de una expresión algebraica se iguala a cero.

Ubicamos las raíces en la recta real.


**Nota:** Las raíces x = -1 y x = 1, no son parte del dominio, según lo obtenido en ***$R_1$***: $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$x \neq -1 \ , \ x \neq 1$

Marcamos con circunferencias las raíces que no son parte de la solución, y con círculos las que sí.

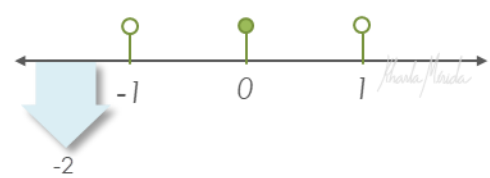



Se han definido cuatro intervalos: $(-\infty, -1)$ , $(-1, 0)$ , $(0, -1)$ , $(0, -\infty)$

Tomamos un valor de cada intervalo y lo sustituimos en la expresión racional de la inecuación para saber el signo que tiene en cada sector de la recta real.

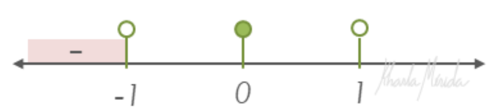
$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

**1er Intervalo.** Tomamos x = -2 del segundo intervalo tomamos el -1/2 o -0,5 que es lo mismo.



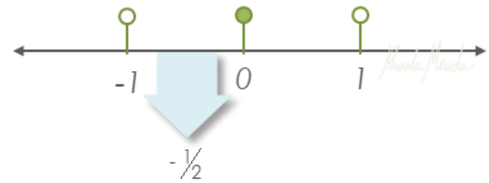

Sustituimos el -2 en la expresión: $\frac{x}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{-2}{(-2-1)(-2+1)} = \frac{-2}{(-3)(-1)} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$




en este intervalo la expresión es negativa.

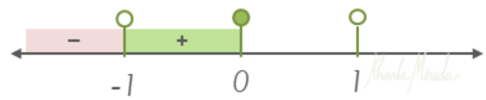
**2do Intervalo.** Tomamos x = -½ o -0,5 que es lo mismo.



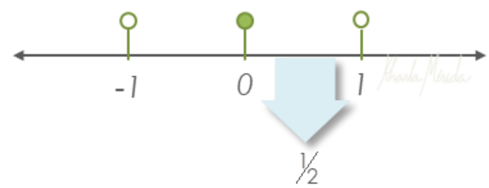

Sustituimos el -½ en la expresión: $\frac{x}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} > 0$$

en este intervalo la expresión es positiva.



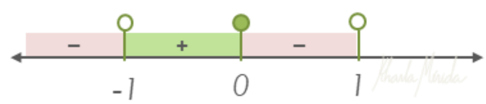

**3er Intervalo.** Tomamos x = ½ o 0,5.



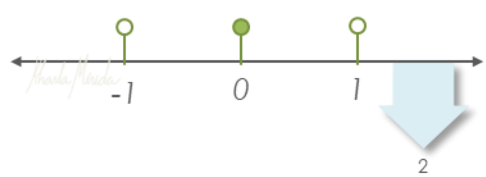

Sustituimos el ½ en la expresión: $\frac{x}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} < 0$$

en este intervalo la expresión es negativa.



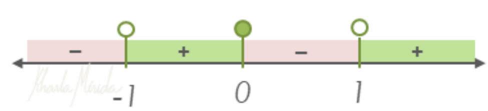

**4to Intervalo.** Tomamos x = 2.




Sustituimos el ½ en la expresión: $\frac{x}{(x-1)(x+1)}$

$$\frac{2}{(2-1)(2+1)} = \frac{2}{(1)(3)} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} > 0$$

en este intervalo la expresión es positiva.




La inecuación pide los valores que hacen que la fracción sea positiva o igual a cero. Entonces tomamos los intervalos que están en verde, considerando que -1 debe ir abierto, cero cerrado y uno abierto.

$$Dom_f = (-1\ ,\ 0] \cup (1\ ,\ \infty)$$

## FUNCIONES. Exponenciales. Hallar el Dominio. Ejercicio 3

Hallar el dominio de la función $f(x)=\frac{1}{10^x-1}$

**¿Qué tipos de funciones tenemos aquí?.**

La imagen de f es una **fracción** con un valor fijo en el numerador y una expresión **exponencial** en el denominador.

Tenemos entonces **función racional** y **función exponencial**.

| **Racional** | **Exponencial** |
|---|---|
| $r(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ | $f(x)=a^{p(x)}$ |

El dominio de la función ***f*** es el resultado de considerar las restricciones o condiciones de cada función.

**Exponencial:** no tiene restricción.

**Racional:** El denominador debe ser distinto de cero.

$$R(x)=\frac{h(x)}{g(x)} \longrightarrow g(x)\neq 0$$

Aplicando la restricción a ***f***: $f(x)=\frac{1}{10^x-1}$

**$R_2$:** Restricción Racional

$$10^x-1\neq 0$$

Tenemos una ecuación exponencial, **¿cómo resolvemos ecuaciones exponenciales?**

Puedes visitar la **Unidad 3, Exponenciales, de Matemática de 4to año 1er Lapso**, para revisar los procedimientos, por ahora veamos cómo resolver esta.

Pasamos el uno sumando al otro lado $\qquad 10^x\neq 1$

tenemos varias opciones para resolver a partir de aquí

1. Escribir 1 como una potencia de base 10. De esta manera se puede comparar los exponentes partiendo de la igualdad de las bases. $\qquad 10^x\neq 10^?$

**¿Que exponente debe tener el 10 para que la potencia valga 1?.**

Sabemos que toda potencia con exponente cero vale 1. $\qquad 10^x\neq 10^0$

Si las bases son iguales entonces para satisfacer la diferencia, x debe ser diferente de 0. $\qquad x\neq 0$

Hemos llegado a que x es distinto de cero esto significa que x puede tomar cualquier valor real menos el cero entonces el dominio de la función es todos los reales menos el cero.

$$Dom_f=\mathbb{R}-\{0\} \qquad Dom_f=\mathbb{R}^*$$

2 Aplicamos logaritmo en base 10 a ambos lados.

$$10^x \neq 1$$

$$\log 10^x \neq \log 1$$

Por propiedad de los logaritmos, bajamos $x$ a multiplicar a $\log 10$.

$$x \cdot \log 10 \neq \log 1$$

Sabemos que:

- ***logaritmo en base 10 de 10 es 1***
- ***logaritmo en cualquier base de 1 es 0***

$$x \cdot 1 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

Nuevamente llegamos a $x \neq 0$.

$Dom_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\quad$ $Dom_f = \mathbb{R}^*$

## Emparejando el Lenguaje

**Funciones Exponenciales**, son aquellas en las que tienen como base un número real y como exponente una función, es decir, es una constante elevada a una función.

## A Practicar

Halle el dominio de las funciones dadas

1. $f(x) = \left(x^2+1\right)2^{x^2+x+7}$

2. $g(x) = \dfrac{4^x}{x^2-2x}$

3. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x-6}}}{x^2+1}$

4. $f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

5. $f(x) = 7^{\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}}$

6. $g(x) = 3^{\sqrt{x+10}}+4$

## ¿Lo Hicimos Bien?

1. $Dom_f = \mathbb{R}$
2. $Dom_g = \mathbb{R} - \{0,2\}$
3. $Dom_f = [6 , \infty)$
4. $Dom_f = \mathbb{R} - \{0\}$
5. $Dom_f = (-\infty , -3) \cup (6 , \infty)$
6. $Dom_g = [-10 , \infty)$