1

1ra Unidad

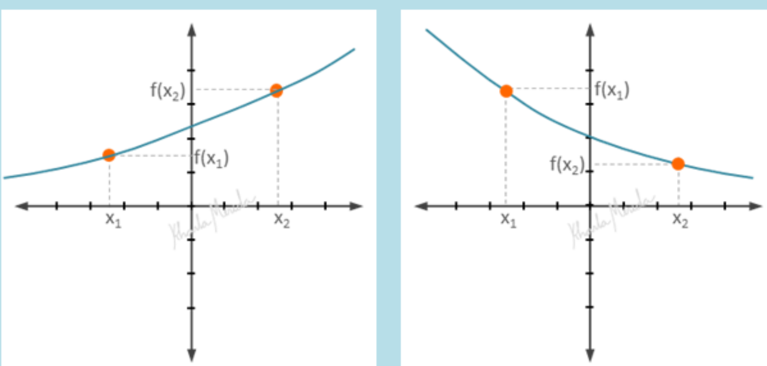
Funciones

1.1 Funciones Notables

Un paso a la vez, un punto a la vez. Nuestra vida, como el gráfico de una función, se traza con cada instante, cada vivencia y sentir. Hagamos buenos los instantes y lograremos un buen trazo.

Descripción

Las funciones son expresiones matemáticas de fenómenos tangibles



El comportamiento de las funciones nos da información acerca del comportamiento de los fenómenos que representan.

En esta entrega contamos con la presentación y análisis de 6 tipos funciones que por sus características, nos ayudarán a interpretar el comportamiento de funciones particulares y los eventos que ellas representan. ¿La tendencia del consumo de un producto?, eso se mide por el crecimiento o decrecimiento de las ventas. ¿aumenta o disminuye la temperatura a medica que transcurre el tiempo? También podemos verlo por el crecimiento de la función temperatura. ¿tiene la misma rapidez en la subida que en la bajada un móvil con trayectoria parabólica? Eso se cumple para funciones pares. Veamos qué otras cosas podemos conocer de una función por su gráfico.

Conocimientos Previos Requeridos

Definición de Funciones, Dominio y Rango, Tabla de Valores, Gráfico de Funciones, Función Afín.

Contenido

Funciones Par e Impar, Creciente y Decreciente, Funciones Compuesta, Funciones Inversa

Videos Disponibles

FUNCIONES. Notables. Par e Impar

FUNCIONES. Notables. Creciente y Decreciente

FUNCIONES. Notables. Compuesta

FUNCIONES. Notables. Inversa

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

FUNCIONES. Notables. Par e Impar

Función Par. Sea ***f*** una función de imagen ***f(x)***. Si se cumple que ***f(-x)*** = ***f(x)***, entonces ***f*** es una **función par**.

Ejemplo

sea la función $f(x) = x^2 + 3$, verificaremos si es una función par.

Para verificar si esta función es par. Sustituimos **–x** en **x**,

Se cambia **x** por **–x**

En cada lugar de la función donde haya **x** colocaremos **–x**,

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 3$$

Error Común: escribir sin paréntesis la potencia al sustituir **-x**.

$f(-x) = -x^2 + 3$ *Escrito de esta manera el exponente no afecta al signo.*

Estamos cambiando una expresión de un solo elemento, **x**, por una expresión de dos elementos, **-x**. La forma correcta de hacer ese cambio es asegurar que cada elemento de la expresión que se sustituye quede afectado por el exponente, con paréntesis.

Por propiedades de las potencias sabemos que toda potencia con exponente par resulta positiva. $(-x)^2 = x^2$.

$$f(-x) = x^2 + 3$$

Comparamos las expresiones de $f(-x)$ y $f(x)$.

Observamos que son iguales

Entonces podemos concluir que $f(-x) = f(x)$

$$f(x) = \boxed{x^2 + 3}$$

$$f(-x) = \boxed{x^2 + 3}$$

f es una función par

Función Impar. Sea ***f*** una función de imagen ***f(x)***. Si se cumple que ***f(-x)*** = ***-f(x)***, entonces ***f*** es una **función impar**.

Ejemplo

sea la función $f(x) = x^5$, verificaremos si es una función impar.

Para verificar si esta función es par. Sustituimos **–x** en **x**,

En cada lugar de la función donde haya **x** colocaremos **–x**,

$$f(x) = x^5$$

$$f(-x) = (-x)^5$$

Por propiedades de las potencias sabemos que toda potencia con exponente impar resulta con el signo de la base. $(-x)^5 = -x^5$.

Comparamos las expresiones de $f(-x)$ y $f(x)$.

Observamos que son de signo contrario

Entonces podemos concluir que $f(-x) = -f(x)$

$f(-x) = -x^5$

$f(x) = x^5$

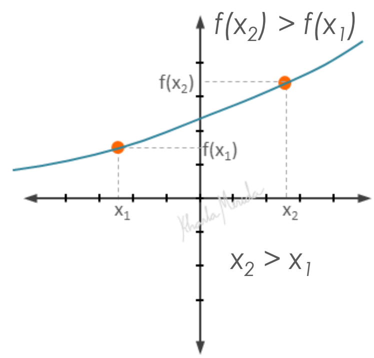
$f(-x) = -x^5$

$f(-x) = -f(x)$

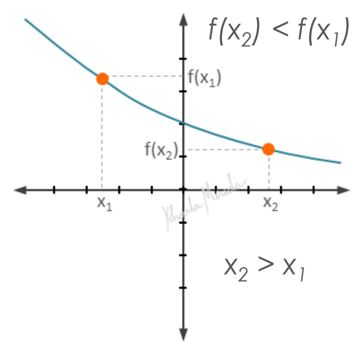
f es una función impar

FUNCIONES. Notables. Creciente y Decreciente

Función Creciente. Sea ***f*** una función de imagen ***f(x)***.
Si $f(x_2) > f(x_1)$ cuando $x_2 > x_1$,
entonces ***f*** es una **función creciente**.



Función Decreciente. Sea ***f*** una función de imagen ***f(x)***.
Si $f(x_2) < f(x_1)$ cuando $x_2 > x_1$,
entonces ***f*** es una **función decreciente**.



Nota: Un equivalente de esta condición es:
si $f(x_2) > f(x_1)$ cuando $x_2 < x_1$, f es decreciente

Función Creciente

Si $f(x_2) > f(x_1)$ cuando $x_2 > x_1$

entonces ***f*** es una función decreciente

Función Decreciente

Si $f(x_2) < f(x_1)$ cuando $x_2 > x_1$

entonces ***f*** es una función decreciente

Si $f(x_2) > f(x_1)$ cuando $x_2 < x_1$

entonces ***f*** es una función decreciente

Vamos a poner en práctica estas dos definiciones.

Ejemplo

Verifiquemos si la función $f(x) = 2x^3 + 7$ es creciente, decreciente o ninguna.

1ro. debemos hallar $f(x_2)$ y $f(x_1)$.

$$f(x) = 2x^3 + 7$$

Para obtener $f(x_1)$ sustituimos x_1 donde esté **x** en la función, y para obtener $f(x_2)$ sustituimos x_2 donde esté **x** en la función.

$$f(x_1) = 2x_1^3 + 7$$
$$f(x_2) = 2x_2^3 + 7$$

Ahora, partimos de la condición $f(x_2) > f(x_1)$.
Si llegamos a la condición $x_2 > x_1$, la función es creciente.
Si llegamos a la condición $x_2 < x_1$, la función es decreciente.

2do. Sustituimos las imágenes de $f(x_2)$ y $f(x_1)$ en la relación de orden $f(x_2) > f(x_1)$.

$$f(x_2) > f(x_1)$$
$$2x_2^3 + 7 > 2x_1^3 + 7$$

3ro. Simplificamos la expresión

$$2x_2^3 + \cancel{7} > 2x_1^3 + \cancel{7}$$

Agregamos a ambos lados de la desigualdad el opuesto de 7, para simplificar los términos independientes.

$$2x_2^3 + \cancel{7 - 7} > 2x_1^3 + \cancel{7 - 7}$$

Dividimos ambos lados de la desigualdad entre 2, para simplificar estos factores.

$$\frac{2x_2^3}{2} > \frac{2x_1^3}{2}$$
$$x_2^3 > x_1^3$$

Aplicamos raíces cúbicas de ambos lados para simplificar las potencias cúbicas y llegamos a, x_2 mayor que x_1.

$$\cancel{\sqrt[3]{x_2^3}} > \cancel{\sqrt[3]{x_1^3}}$$
$$x_2 > x_1$$

Partimos de la relación $f(x_2) > f(x_1)$ y llegamos la relación $x_2 > x_1$

f **es una función Creciente**

FUNCIONES. Notables. Compuesta

Función Compuesta. Sean ***f*** y ***g*** funciones reales de variable real, con ***f(x)*** y ***g(x)*** sus imágenes respectivamente.
Se define **Función Compuesta**, ***g*** compuesta con ***f***, como la función ***f(g(x))***.

Función Compuesta, *f∘g* :

$$f \circ g = f(g(x))$$

Operativamente esto significa que, sustituimos la imagen de ***g***, ***g(x)***, en el lugar de **x** en ***f***.

$g(x)$
$\downarrow$
$f(\,x\,)$

Ejemplo

hallar la función g compuesta con f si $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = x^2$. $f \circ g = ?$

partiremos de $f(x) = 3x + 5$, $f(x) = 3x + 5$ $g(x) = x^2$

Donde está **x** colocaremos ***g(x)***. $f(x) = 3x + 5 \rightarrow f(g(x)) = 3g(x) + 5$

Cambiamos ***g(x)*** por su imagen, finalmente ***g*** compuesta con ***f(x)*** es $3x^2 + 5$.

$g(x) = x^2 \longrightarrow f(g(x)) = 3x^2 + 5$

$f \circ g(x) = 3x^2 + 5$

Nota: la expresión ***fog***, se lee "***g* compuesta con *f***" mientras que la expresión ***f(g(x))*** se lee "***f*** de ***g(x)***".

Es importante tener en cuenta que **La operación de composición no es conmutativa**, es decir, $g \circ f \neq f \circ g$.
Si bien es cierto hay casos muy particulares de funciones en las que se cumple la igualdad, no puede generalizare y por tanto **no existe la propiedad**.

En cambio **La operación de composición es asociativa**, es decir:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Composición de funciones inversas, f^{-1} (f inversa) compuesta con ***f***, es igual a ***f*** compuesta con f^{-1}, e igual a la **función identidad**.

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

FUNCIONES. Notables. Inversa

función Inversa. Sea ***f*** una función real de variable real y de imagen ***f(x)*** función inversa de ***f***, f^{-1}, es la función que satisface:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

Ejemplo

verifique si la función ***h*** es la función inversa de ***f***, con $h(x) = x^3 - 1$ y $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

Si la función ***h*** es inversa de la función ***f***, al componerlas, en cualquier orden, debe resultar la función identidad,

$$(f \circ h)(x) = (h \circ f)(x) = I(x)$$

Haremos la composición ***h*** compuesta con ***f***, es decir, $f(h(x))$.

En ***f***, donde está x sustituimos $h(x)$.

$$f(h(x)) = \sqrt[3]{h(x) + 1}$$

$$f(h(x)) = \sqrt[3]{x^3 - 1 + 1}$$

$$f(h(x)) = \sqrt[3]{x^3}$$

f y h son funciones inversas una de la otra

$$f(h(x)) = x$$

Emparejando el Lenguaje

Función Par. Es toda función **f** cuya imagen, **f**(x), satisface **f**(-x) = **f**(x).

Función Impar. Es toda función **f** cuya imagen, **f**(x), satisface **f**(-x) = -**f**(x).

Función Creciente. Es toda función **f** en la que se cumple que si x aumenta **f**(x) aumenta.

Función Decreciente. Es toda función **f** en la que se cumple que si x aumenta **f**(x) disminuye.

Función Compuesta, fog. Es toda función que resulta de componer la imagen de una función con otra función. Sean f y g, entonces **f**o**g**(x) = **f**(**g**(x))

Función Inversa. La función inversa de **f** es una función única, f^{-1}, que satisface: $f o f^{-1} = f^{-1} o f = x$

Función Identidad. La función de imagen x, **f**(x) = x.

A Practicar

Verificar en cada caso si las siguientes funciones son pares o impares, crecientes o decrecientes.

1. $f(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = -5x^3$
4. $f(x) = \sqrt{x}$

Verificar cuáles pares de funciones son inversas.

5. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} \quad g(x) = x^3 - 1$
6. $f(x) = \dfrac{3}{x+1} \quad g(x) = \dfrac{3x+1}{x}$
7. $f(x) = 3x + 15 \quad g(x) = \dfrac{1}{3}x - 5$

Hallar la función inversa de las siguientes funciones

8. $h(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$
9. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
10. $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

Hallar las composiciones f**o**g, g**o**f en cada caso

11. $f(x) = x + 1 \quad g(x) = x^2$
12. $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad g(x) = x + 1$

¿Lo Hicimos Bien?

Verificar en cada caso si las siguientes funciones son pares o impares, crecientes o decrecientes.

1. No es par ni impar, es Función Creciente.
2. Función par. No es creciente ni decreciente.
3. Función Impar, decreciente.
4. No es par ni impar. Es función creciente.
5. Si son inversas.
6. No son inversas
7. Si son inversas

Hallar la función inversa de las siguientes funciones

8. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-1}$
9. $h^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-1}$
10. $g^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Hallar las composiciones **f**o**g**, **g**o**f** en cada caso

11. $fog(x) = x^2+1$

    $gof(x) = (x+1)^2$

12. $fog(x) = \dfrac{1}{x+1}$

    $gof(x) = \dfrac{1}{x}+1$