3

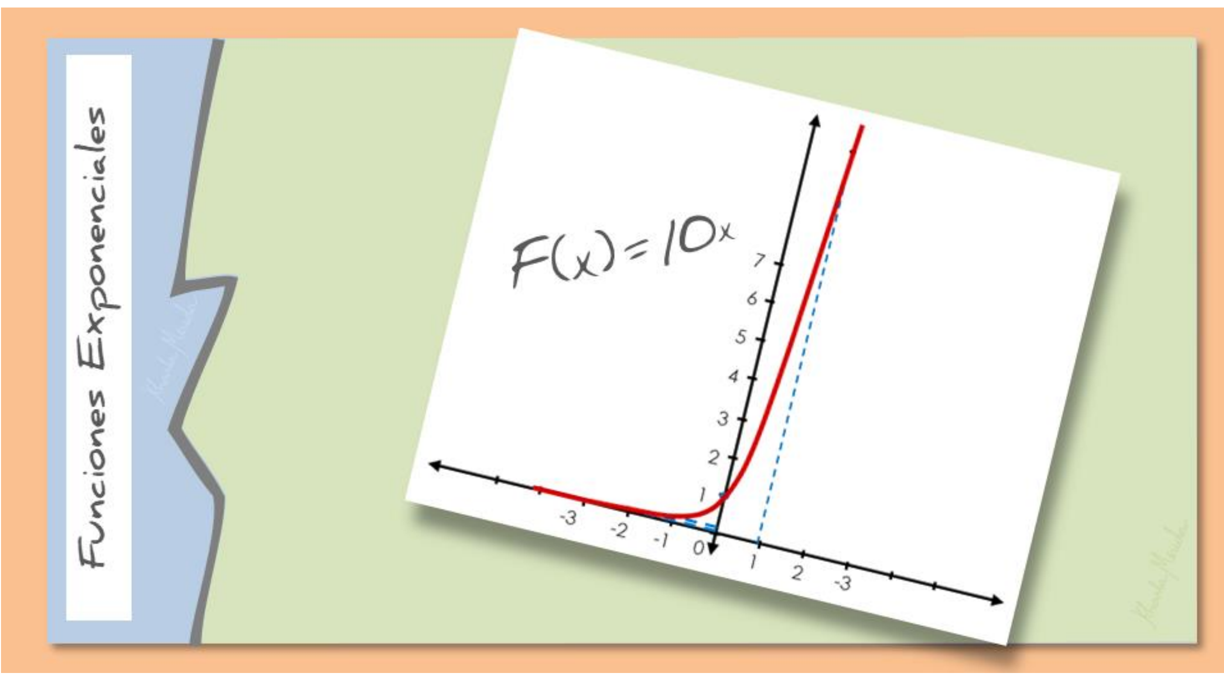
3ra Unidad

Exponenciales

3.3 Funciones

En medio de cada dificultad hay infinitas posibilidades, de éxito y de fracaso. Cuidemos usar lentes de amor, voluntad y compasión para elegir y diseñar el camino que transitaremos.

Descripción



Con esta entrega cerramos el ciclo de estudio básico de expresiones, ecuaciones funciones exponenciales. Estamos listos para avanzar a nuevas etapas y relaciones matemáticas que nos permitirán a su vez estudiar fenómenos físicos que con los recursos matemáticos aprendidos hasta ahora no es posible.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Reales, Propiedades de las Potencias, Resolución de Ecuaciones, Ecuaciones Lineales y Ecuaciones de 2do Grado, Funciones, Tabla de Valores, Gráfico.

Contenido

Dominio y Rango de Funciones Exponenciales, Gráfico, Inversa de la Función Logaritmo.

Videos Disponibles

EXPONENCIALES. Funciones Exponenciales. Dominio y Rango

EXPONENCIALES. Funciones Exponenciales. Gráfico

EXPONENCIALES. Funciones Exponenciales. Inversa de la Función Logaritmo

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

EXPONENCIALES. Funciones Exponenciales. Dominio y Rango

Función Exponencial. Es una función cuya imagen es de la forma $f(x) = a^x$

Una expresión con forma de potencia que tiene como base un número conocido y como exponente la variable o cualquier forma matemática que contenga la variable

¿Cuáles de las siguientes funciones son exponenciales?

$$f(x) = 4e^{3x} \qquad g(x) = (ex)^2 \qquad h(x) = \sqrt[x]{e}$$

1ra. Función. la imagen es el producto de un número, 4, por una expresión exponencial, e^{3x}. Entonces f es una **función exponencial.** $f(x) = 4e^{3x}$

2da. Función. La imagen es una forma de potencia, cuya base es ex y cuyo exponente es 2. Entonces g es una **función potencia**. $g(x) = (ex)^2$

3ra. Función. La imagen es una raíz de índice x y cantidad subradical e. $h(x) = \sqrt[x]{e}$

Escribiendo la raíz como potencia con exponente fraccionario vemos claramente que la base es un número y el exponente contiene la variable. Entonces h es una **función exponencial**. $h(x) = e^{1/x}$

Estudiemos la siguiente función exponencial notable, sus valores, dominio y rango:

$$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty) \qquad f(x) = 10^x$$

Esto se lee, la función f de los reales en cero a más infinito, con $f(x) = 10^x$

Hagamos una tabla de valores, como el exponente de una potencia puede ser negativo, cero o positivo, daremos a x los valores -3, -2, -1, 0, 1, 2 y 3.

En la sección de **Notación Científica** en 1er Lapso de 2do año vimos cómo calcular rápidamente potencias de 10. Sin embargo puedes utilizar el método que se resulte más efectivo.

$$f(-3) = 10^{-3} = 0{,}001$$
$$f(-2) = 10^{-2} = 0{,}01$$
$$f(-1) = 10^{-1} = 0{,}1$$
$$f(0) = 10^{0} = 1$$
$$f(1) = 10^{1} = 10$$
$$f(2) = 10^{2} = 100$$
$$f(3) = 10^{3} = 1000$$

x	f(x)
-3	0,001
-2	0,01
-1	0,1
0	1
1	10
2	100
3	1000

Observa que todos los valores obtenidos son positivos es decir, las imágenes de f son todas positivas

Nota: Pudimos haber llegado a esta conclusión antes de los cálculos considerando que si la base de una potencia es positiva el resultado de ésta siempre será positivo.

De todo lo anterior podemos concluir que el dominio de f es todos los reales, y el rango es todos los reales positivos.

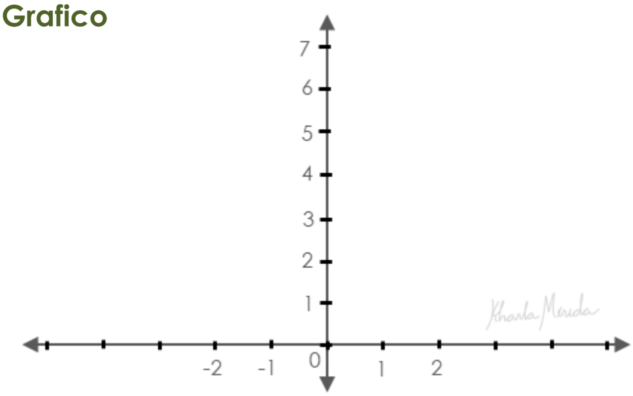
Dom$_f$: $\mathbb{R}$ **Rgo$_f$**: $\mathbb{R}^+$

Veamos el gráfico de esta función para visualizar con total claridad su comportamiento. Acompáñanos a la siguiente lección.

EXPONENCIALES. Funciones Exponenciales. Grafico

En la lección anterior vimos que los valores de $f(x) = 10^x$, que son los valores de y, son todos positivos. Eso quiere decir que consideraremos la parte del plano que está por encima del eje x.

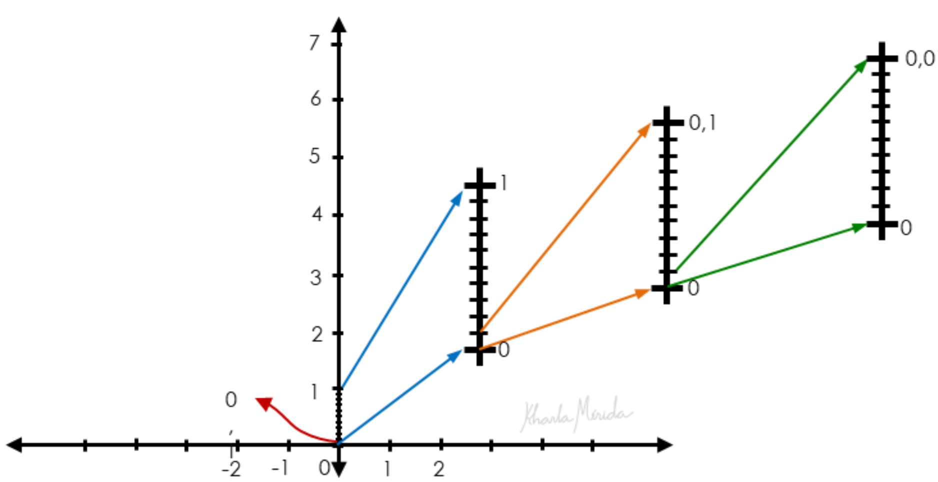
En cuanto a los valores de x, nos centraremos en la sección del eje que va de -2 a 2, veamos por qué.



Hagamos un zoom a la sección del eje y que está entre 0 y 1. Si dividimos en 10 partes, cada una vale 0,1.

Si a éstas la dividimos en 10 partes, cada una vale 0,01. Y si a éstas también las dividimos en 10 partes, cada una vale 0,001.

¿Te das cuenta de lo pequeño que es este valor ?

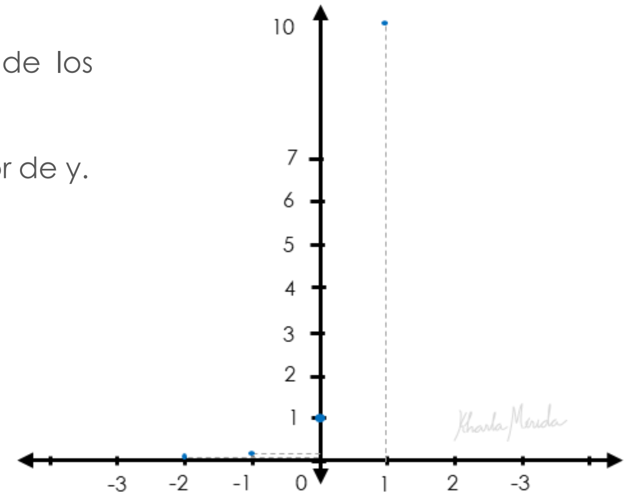


Se hace algo difícil graficar los puntos: (-3 , 0,001) y (-2 , 0,01) por lo pequeño de los valores de y.

O los puntos: (3 , 1000) y (2 , 100) por lo grande del valor de y.

Vamos a trazar los puntos:

(-1 , 0,1) , (0 , 1) , (1 , 10)

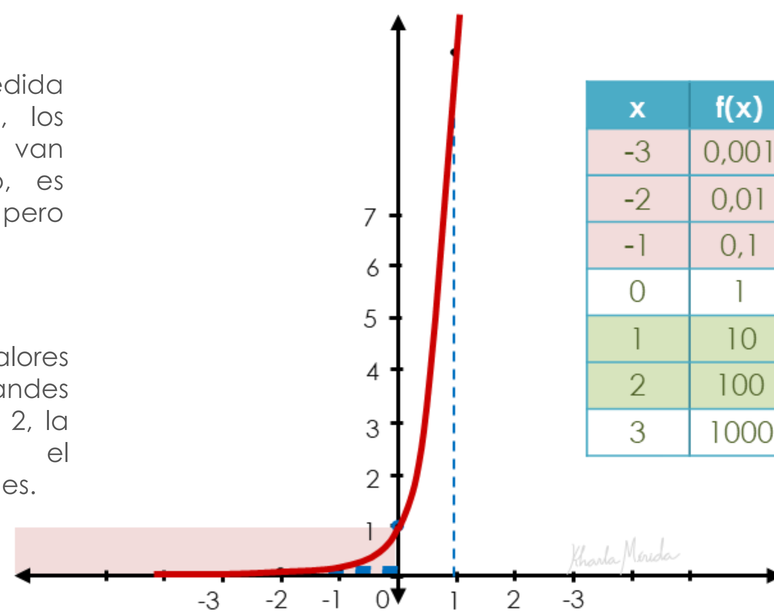


El gráfico de una función es una manifestación en trazos de su comportamiento. **¿Qué puedes deducir de la función 10^x por su gráfico?**

Para valores negativos x. A medida que nos acercamos al cero, los valores de la función van aumentando de a poquitico, es decir, la función va creciendo pero de forma casi imperceptible.

En x = 0. La función vale 1.

Para valores positivos x. Los valores de la función aumentan a grandes pasos. Al pasar de x = 1 a x = 2, la función pasa de 10 a 100, el incremento es de casi 90 unidades.



x	f(x)
-3	0,001
-2	0,01
-1	0,1
0	1
1	10
2	100
3	1000

Otra observación importante es que **para valores distintos de x, se tienen valores distintos de y**. Esto define una función inyectiva, entonces **f es inyectiva**.

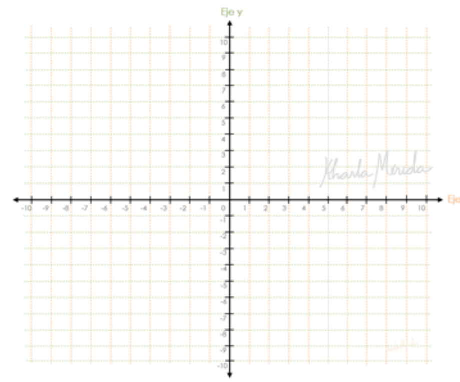
Por otro lado, **el rango coincide con el conjunto de llegada**, esto define una función **sobreyectiva**, entonces **f es sobreyectiva**.

Como f es Inyectiva y Sobreyectiva, entonces es **Biyectiva**, la función $f(x) = 10^x$ **es biyectiva.**

Te invito a realizar la tabla de valores y grafico de las funciones: $f(z) = -2^x$ y $f(x) = e^{-x}$. Comparte tu estudio con nosotros a través de comentarios, para enriquecer todo lo que hemos visto hasta ahora.

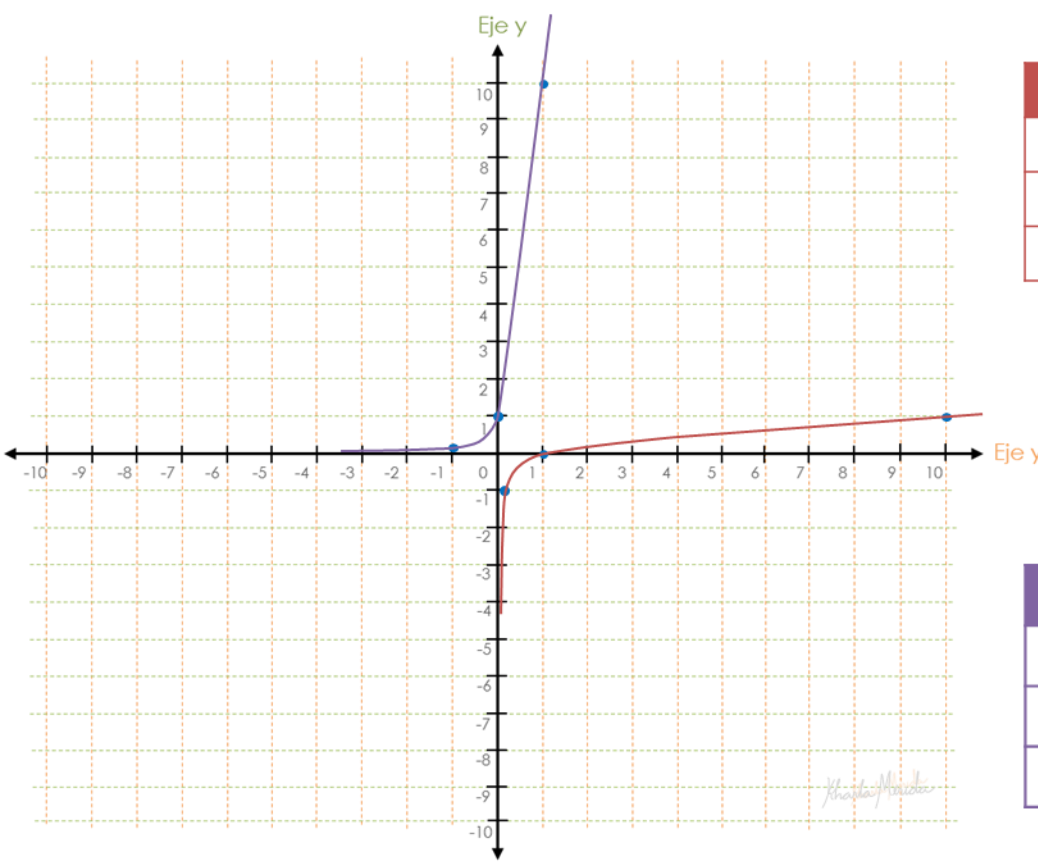
EXPONENCIALES. Funciones Exponenciales. Inversa de la Función Logaritmo

Vamos a trazar un plano cartesiano, lo haremos representando la parte del plano que contempla valores de x desde -10 hasta 10 y valores de y desde -10 hasta 10,



En el objetivo **2.5 Funciones Logarítmicas** vimos cómo trazar el gráfico del logaritmo de x. Con tres puntos de referencia podemos hacer la representación siguiendo la forma de esta función.

En la lección anterior vimos cómo trazar el gráfico de $f(x) = 10^x$. Ubicamos tres puntos de referencia y dibujamos la curva correspondiente a esta función guiándonos por lo aprendido en esa lección.



$f(x) = \log x$

x	y
0,1	-1
1	0
10	1

$g(x) = 10^x$

x	Y
-1	0,1
0	1
1	10

¿Qué observas de especial en estas curvas?

De los tres puntos que seleccionamos para cada gráfico podemos observar que:

- Los valores de x para la función logaritmo, son los valores de y para la función exponencial, y
- Los valores de y de la función logaritmo son los valores de x de la función exponencial este comportamiento es característico de funciones inversas

$f(x) = \log x$

x	y
0,1	-1
1	0
10	1

$g(x) = 10^x$

x	Y
-1	0,1
0	1
1	10

Este es un comportamiento característico de **funciones inversas**.

En el objetivo 1.1 Funciones Notables, 1er lapso de matemática 4to año, vimos que si dos funciones son inversas una de la otra se cumple que:

$$(g\circ f)(x) = x \qquad (f\circ g)(x) = x$$

gof o **fog** resulta la **función identidad**

Hallaremos f(g(x))

Tenemos: $f(x) = \log x$ y $g(x) = 10^x$,

Realizamos la sustitución: $x \to g(x)$

$f(x) = \log x \longrightarrow f(g(x)) = \log(g(x))$

Sabemos que: $g(x) = 10^x$

$f(g(x)) = \log(10^x)$

¿Qué tenemos aquí?

Logaritmo de una potencia

Esto es, el exponente, x, por el logaritmo de la base de la potencia, 10.

$f(g(x)) = x\cdot\log 10$

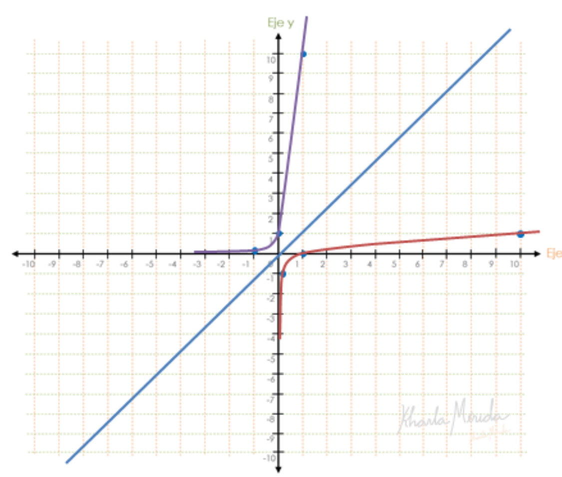
Sabemos que: $\log 10 = 1$

$f(g(x)) = x\cdot 1$

$f(g(x)) = x$

Hemos obtenido la función identidad, y de esta manera hemos comprobado que la función logaritmo y la función exponencial son inversas una de la otra.

También puedes observar que los gráficos de estas dos funciones son simétricos, es decir, son uno el reflejo del otro, respecto a la recta y = x que divide a primer y tercer cuadrante en dos partes iguales esto es una propiedad geométrica de las funciones inversas.



A Practicar

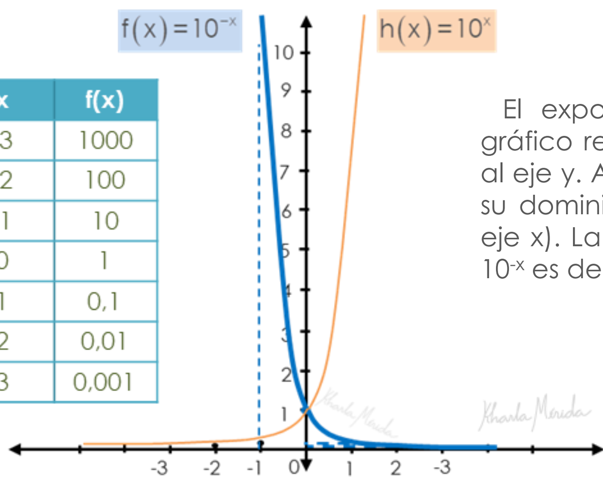
Esbozar el gráfico de las siguientes funciones y analizar las diferencias basadas en las variaciones de la imagen:

1. $f(x)=10^{-x}$
2. $f(x)=-10^{x}$
3. $f(x)=10^{x-1}$
4. $f(x)=10^{x}-1$

¿Lo Hicimos Bien?

1.

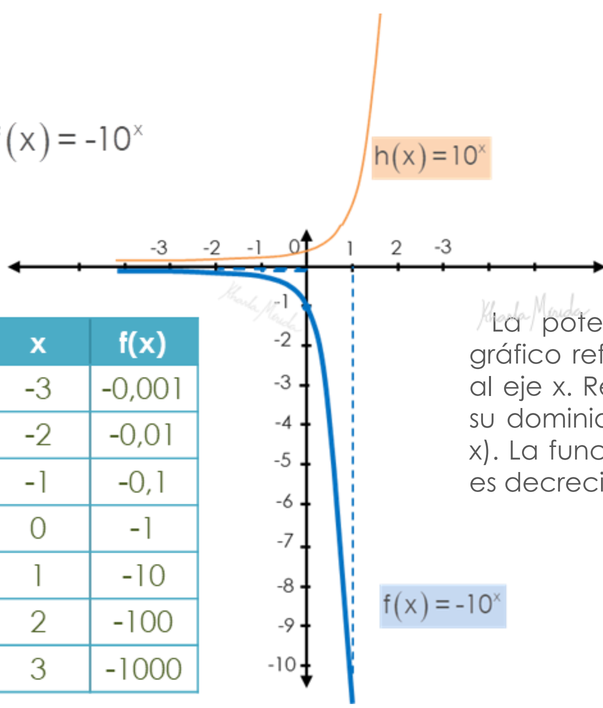
x	f(x)
-3	1000
-2	100
-1	10
0	1
1	0,1
2	0,01
3	0,001



El exponente negativo en 10^{-x} genera un gráfico reflejo de la función 10^{x} con respecto al eje y. Ambas funciones son positivas en todo su dominio (los gráficos están por encima del eje x). La función 10^{x} es creciente y la función 10^{-x} es decreciente.

2. $f(x)=-10^{x}$

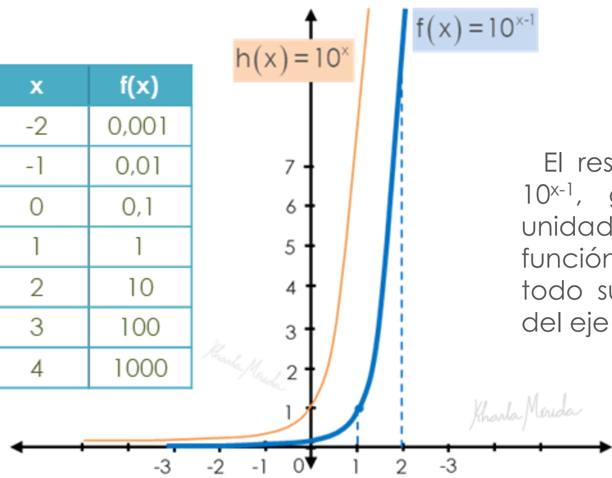
x	f(x)
-3	-0,001
-2	-0,01
-1	-0,1
0	-1
1	-10
2	-100
3	-1000



La potencia negativa en -10^{x} genera un gráfico reflejo de la función 10^{x} con respecto al eje x. Resulta una función negativa en todo su dominio (el gráfico está por debajo del eje x). La función 10^{x} es creciente y la función -10^{x} es decreciente.

3.

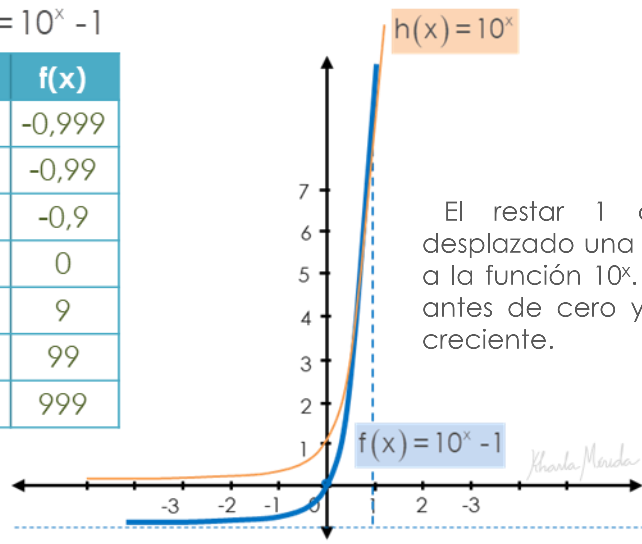
x	f(x)
-2	0,001
-1	0,01
0	0,1
1	1
2	10
3	100
4	1000



El restar 1 a la variable del exponente, en 10^{x-1}, genera un gráfico desplazado una unidad hacia la derecha, respecto a la función 10^x. Resulta una función positiva en todo su dominio (el gráfico está por encima del eje x). Ambas funciones son crecientes.

4. $f(x)=10^x-1$

x	f(x)
-3	-0,999
-2	-0,99
-1	-0,9
0	0
1	9
2	99
3	999



El restar 1 a 10^x, genera un gráfico desplazado una unidad hacia abajo, respecto a la función 10^x. Resulta una función negativa antes de cero y positiva después de cero, y creciente.