1

1ra Unidad

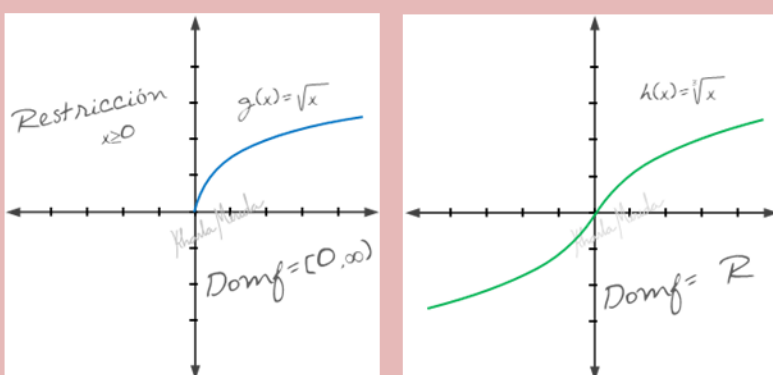
Funciones Algebraica

1.3 Dominio de Irracionales

La forma en que asumimos nuestros límites es lo que nos define como personas, es lo que determina nuestra individualidad. Podemos detenernos ante los límites o podemos renovarnos haciendo que seamos capaces de superarlos.

Descripción

Funciones Irracionales



Las raíces y sus propiedades son parte también de las funciones. Sus limitantes definen dos tipos de funciones irracionales. Las que tienen restricción y las que no.

En esta entrega cuentas con un estudio detallado de las condiciones y restricción de las funciones irracionales. Llegado a este punto, se hace sumamente necesario el manejo con dominio de inecuaciones. Si lo consideras necesario repasa y practica la resolución de inecuaciones antes de abordar este estudio.

Conocimientos Previos Requeridos

Definición de Funciones, Dominio y Rango, Tabla de Valores, Gráfico de Funciones, Función Afín.

Contenido

Características y Dominio de Funciones Irracionales, Ejercicios Resueltos.

Videos Disponibles

FUNCIONES. Algebraicas. Irracionales. Características, Dominio

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 4

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 5

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 6

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 7

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 8

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

FUNCIONES. Algebraica. Irracionales. Característica, Dominio

Funciones Irracionales. Son funciones algebraicas cuya estructura tiene raíz con cantidad subradical variable. Es decir, la variable forma parte de la cantidad subradical.

$$R(x)=\sqrt[n]{p(x)}$$

Características de las Funciones Irracionales

Cuando estudiamos el conjunto de los números reales conocimos los números irracionales y de forma particular los radicales, que son los números irracionales presentados en forma de raíz, sabemos que hay radicales con índice par y radicales con índice impar.

Radicales $\begin{cases} \text{Con } n \text{ par} \\ \text{Con } n \text{ impar} \end{cases}$

Cuando el índice es impar, la cantidad sub radical puede tomar cualquier valor real, es decir, la función no tiene restricción.

$R(x)=\sqrt[n]{p(x)}$ **Si n es impar** — **No tiene restricción**

Cuando el índice es par, la cantidad sub radical debe ser positiva o cero, para que resulte un valor real, esta es la restricción de los radicales.

$R(x)=\sqrt[n]{p(x)}$ **Si n es par** — **Restricción** $p(x)\geq 0$

Dominio de las Funciones Irracionales

Sabemos que el dominio de una función es el conjunto de valores reales de x para los que la función tiene imágenes reales.

Para las funciones irracionales, con índice par, el dominio es el conjunto de todos los valores reales de la variable x tales que la cantidad sub radical, p(x), sea mayor o igual que cero.

$R(x)=\sqrt[n]{p(x)}$

Si n es par

$$Dom_f=\{x\in\mathbb{R}\ /\ p(x)\geq 0\}$$

La definición de este conjunto dominio está basada en la restricción que presentamos en las características.

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 4

Hallar el dominio de la función $f(x)=\sqrt{-3x}$

1ro. Identificamos el tipo de función.

La imagen de ***f*** es la raíz de un monomio de grado uno.

$f(x)=\sqrt{-3x}$ Monomio de grado 1

Cuando la imagen de una función contiene uno o más radicales con cantidad subradical variable, tenemos una **función irracional**.

Funcional Irracional

$$f(x)=\sqrt[n]{p(x)}$$

¿La función racional tiene restricción?

Cuando el índice de una raíz es par, la cantidad subradical no debe ser negativa, pues no existe en los números reales la raíz con índice par de números negativos, matemáticamente se entiende que **la cantidad sub radical debe ser mayor o igual que cero**.

$$p(x) \geq 0$$

El **índice de la raíz** de la función dada es dos, es decir, **índice par**, entonces **la expresión sub radical debe ser mayor o igual que cero**.

$$f(x) = \sqrt{-3x}$$

$$-3x \geq 0$$

Esto es una inecuación, en este nivel de estudio se entiende que manejamos muy bien las propiedades de los números reales necesarias para resolver las inecuaciones, pero igual te hacemos la invitación a revisar la sección de inecuaciones para poner al día estos conocimientos.

Multiplicamos ambos lados de la desigualdad por -1 para dejar el coeficiente de x positivo.

$$-1 \cdot (-3x \geq 0)$$

$$3x \leq 0$$

Recordemos. que al efectuar la multiplicación de ambos lados de una inecuación por un número negativo cambia el sentido de la desigualdad.

El 3 que está multiplicando a la x, pasa al otro lado dividiendo.

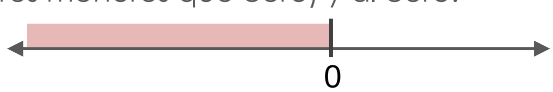
$$3x \leq 0$$

$$x \leq \frac{0}{3}$$

Simplificando la fracción, obtenemos x menor o igual que cero.

$$x \leq 0$$

Gráficamente se representa resaltando lo que está a la izquierda del cero (valores menores que cero) y al cero.



El dominio de una función es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable x, entonces el dominio de esta función es el conjunto de valores desde menos infinito hasta cero, incluyendo el cero.

$$Dom_f = (-\infty, 0]$$

Recordemos. Para representar un intervalo el **corchete** se utiliza para indicar que se toma el valor extremo del intervalo, y el **paréntesis** indica que no se toma.

Nota: Infinito es un símbolo que indica que el intervalo se extiende indefinidamente hacia el lado del intervalo donde se encuentre.

Para el intervalo solución tenemos que:
El **extremo izquierdo** debe tener paréntesis, porque infinito no es un número definido, no se puede tomar.
El **extremo derecho** tiene al cero, que se toma por indicación de la igualdad en la inecuación, así que cerramos ese extremo del intervalo con corchete.

Revisa la sección de **Inecuaciones** para recordar o fortalecer este conocimiento.

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 5

Hallar el dominio de la función $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

1ro. Identificamos el tipo de función.

La imagen de ***f*** es la raíz de un binomio de grado uno.

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$ Monomio de grado 1

Cuando la imagen de una función contiene uno o más radicales con cantidad subradical variable, tenemos una **función irracional**.

Funcional Irracional

$f(x)=\sqrt[n]{p(x)}$

¿cuál es la restricción de la función irracional?

Cuando el índice de una raíz es par, la cantidad subradical no debe ser negativa, pues no existe en los números reales la raíz con índice par de números negativos, matemáticamente se entiende que **la cantidad sub radical debe ser mayor o igual que cero**.

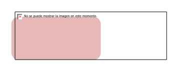
$p(x)\geq 0$

El **índice de la raíz** de la función dada es dos, es decir, **índice par**, entonces **la expresión sub radical debe ser mayor o igual que cero**.

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2\geq 0$

Tenemos una **diferencia de cuadrados** en la inecuación, para resolver inecuaciones de este tipo **se estudia el signo de la expresión**, considerando todas las raíces o ceros de la misma.



Si en este punto no tienes claro lo qué son raíces o ceros de un polinomio te invito a recordar esto en la sección de **Polinomios**.

Raíces o ceros de $4-x^2$

Para obtener los ceros o raíces de una expresión **igualamos a cero dicha expresión**.

$4-x^2=0$

Tenemos dos maneras de resolver esta ecuación:

Despejando x:

$4-x^2=0$

Pasamos x^2 sumando al otro lado. $4=x^2$

Aplicamos propiedad simétrica de la igualdad, $x^2=4$

Para eliminar el cuadrado de la x, aplicamos raíz cuadrada del otro lado, recordando el doble signo correspondiente a las dos soluciones de una ecuación cuadrática. $x=\pm\sqrt{4}$

$x=-2 \quad x=2$

Factorizando:

$4-x^2=0$

La diferencia de cuadrados se factoriza como un producto de conjugadas. $(2-x)(2+x)=0$

Los que hacen cero a cada factor son los que hacen cero a toda la expresión.	$2 - x = 0$; $2 + x = 0$
Despejamos x en cada igualdad, y obtenemos 2 soluciones	$x = 2$; $x = -2$

Nota: puedes notar que por cualquier procedimiento llegamos a la misma Solución.

Ya tenemos las raíces, ahora las ubicaremos en la recta real.

La recta queda dividida en tres intervalos:
(-∞,-2] ; [-2 , 2] y [2,∞)

Probaremos la expresión con valores de cada intervalo para estudiar su signo.

De (-∞,-2] probaremos con -3:

Sustituimos el -3 en la expresión de la inecuación, $4 - x^2$. $4 - (-3)^2$

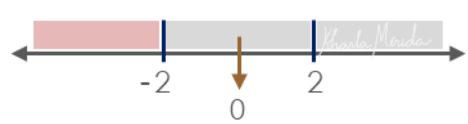
Recordemos. Escribimos -3 entre paréntesis porque se debe elevar al cuadrado el número con su signo.

Efectuamos la potencia y la resta, nos queda -5. $= 4 - 9$

$= -5$

El resultado negativo nos indica que **en este intervalo la expresión es negativa**.

De [-2 , 2] probaremos con 0

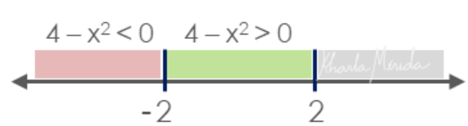


Sustituimos el 0 en la expresión de la inecuación, $4 - x^2$. $4 - (0)^2$

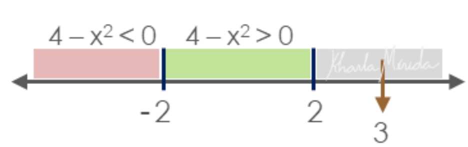
Efectuamos la potencia y la resta, nos queda 4. $= 4 - 0$

$= 4$

El resultado positivo nos indica que **en este intervalo la expresión es positiva**.



De [2,∞) probaremos con 3



Sustituimos el 3 en la expresión de la inecuación, $4 - x^2$.

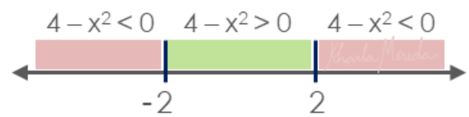
$$4 - (3)^2$$

$$= 4 - 9$$

$$= -5$$

Efectuamos la potencia y la resta, nos queda -5.

El resultado negativo nos indica que **en este intervalo la expresión es negativa**.



La inecuación plantea que $4 - x^2$ debe ser mayor o igual que cero.

De los tres intervalos estudiados el segundo cumple con la condición de que $4 - x^2$ sea mayor que cero, es decir, positivo.

Si $x \in (-2\,,\,2)$, $4 - x^2 > 0$

Y sabemos que $4 - x^2$ se hace cero en -2 y 2.

Entonces, la inecuación $4 - x^2 \geq 0$ tiene como solución:

$$x \in [-2\,,\,2]$$

todos los valores de x pertenecientes al intervalo cerrado desde -2 hasta 2.

Resolver la inecuación nos dio los valores que x puede tomar para que la raíz exista. **¿por qué estábamos buscando esos valores?**

Estamos buscando el Dominio de la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Sabemos que **el dominio son todos los valores que puede tomar la variable**, x, entonces el dominio de esta función es:

$$\boldsymbol{Dom_f} = [-2\,,\,2]$$

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 6

Hallar el dominio de la función $f(x) = \sqrt[6]{x^2 + 5x}$

1ro. Identificamos el tipo de función.

La imagen de ***f*** es la raíz de un binomio de grado 2.

$f(x) = \sqrt[6]{x^2 + 5x}$ Monomio de grado 1

Cuando la imagen de una función contiene radicales con cantidad subradical variable, tenemos una **función irracional**.

Funcional Irracional

$$f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$$

¿cuál es la restricción de la función irracional?

Cuando el índice de una raíz es par, la cantidad subradical debe ser mayor o igual que cero.

$$p(x) \geq 0$$

El **índice de la raíz** de la función dada es seis, es decir, **índice par**, entonces **la expresión sub radical debe ser mayor o igual que cero**.

$$f(x) = \sqrt[6]{x^2 + 5x}$$

$$x^2 + 5x \geq 0$$

Tenemos una expresión cuadrática en la inecuación, para resolver inecuaciones Polinomiales de 2do grado en adelante, **se estudia el signo de la expresión**, considerando todas las raíces o ceros de la misma.

$$x^2 + 5x \geq 0$$

Te invito a recordar cómo estudiar el signo de expresiones matemáticas en la sección de **Inecuaciones**, y cómo hallar los ceros o raíces de un polinomio en la sección de **Polinomios**.

> Es importante que estés consciente de la necesidad de dominar los conocimientos que se han estudiado con anterioridad y a lo largo de tus estudios básicos.
>
> Fíjate, estamos en funciones, pero hemos necesitado saber de polinomios, potenciación, inecuaciones, resolución de ecuaciones, no hay modo de entender un nuevo conocimiento sin el dominio de los conocimientos previos

Raíces o ceros de $x^2 + 5x$

Para obtener los ceros o raíces de una expresión igualamos a cero dicha expresión.

$$x^2 + 5x = 0$$

¿Qué hacemos ahora?

Podemos observar que la x es un factor común aplicaremos factorización por factor común ahora.

$$x(x+5) = 0$$

Para que el producto de dos factores sea cero, es necesario que uno de los dos factores sea cero:

$$x = 0 \qquad x + 5 = 0$$

La primera igualdad ya nos da el valor x = 0 y la segunda igualdad se cumple para x = -5.

$$\boxed{x = 0} \qquad \boxed{x = -5}$$

> Has podido notar que para hallar el dominio de funciones debemos manejar bien todo lo que hemos aprendido antes no podemos explicar los detalles de cómo factorizar, o resolver ecuaciones en esta lección porque haría muy larga la explicación y nos distraería del objetivo principal. Es por ello que te invitamos a revisar esas lecciones básicas en caso de necesitarlo, y así volver aquí mas claro para avanzar por ahora continuemos con este ejercicio.

Ya tenemos las raíces, ahora las ubicaremos en la recta real.

Raíces o ceros de $x^2 + 5x$

x = -5 x = 0

La recta queda dividida en tres intervalos:

(-∞,-5] ; [-5 , 0] y [0,∞)

Probaremos la expresión con valores de cada intervalo para estudiar su signo.

De (-∞,-5] probaremos con -6:

Sustituimos el -6 en la expresión de la inecuación, $x^2 + 5x$.

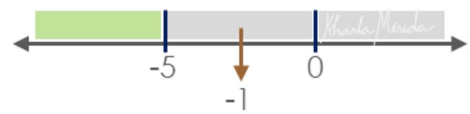
$$(-6)^2 + 5(-6)$$

Efectuamos las operaciones, nos queda 6.

$$= 36 - 30$$
$$= 6$$

El resultado positivo nos indica que **en este intervalo la expresión es positiva**.

De [-5 , 0] probaremos con -1:



Sustituimos el -1 en la expresión de la inecuación, $x^2 + 5x$.

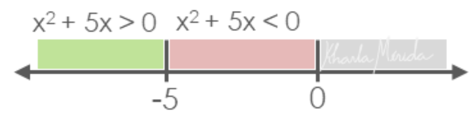
$(-1)^2 + 5(-1)$

Efectuamos las operaciones, nos queda -4.

$= 1 - 5$

$= -4$

El resultado negativo nos indica que **en este intervalo la expresión es negativa**.



De [0,∞) probaremos con 1:

Sustituimos el 1 en la expresión de la inecuación, $x^2 + 5x$.

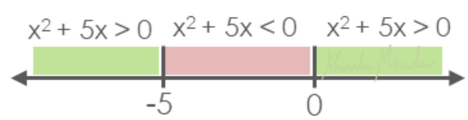
$(1)^2 + 5(1)$

Efectuamos las operaciones, nos queda -4.

$= 1 + 5$

$= 6$

El resultado positivo nos indica que **en este intervalo la expresión es positiva**.



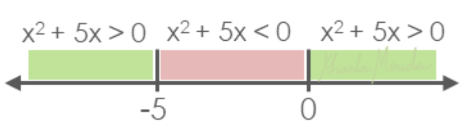
La inecuación plantea que $x^2 + 5x$ debe ser mayor o igual que cero.
De los tres intervalos estudiados, el 1ro y 3er intervalo cumplen con la condición de que $x^2 + 5x$ sea mayor que cero, es decir, positivo

Si $x \in (-\infty , -5)$, $x^2 + 5x > 0$

Si $x \in (-5 , 0)$, $x^2 + 5x < 0$

Si $x \in (0 , \infty)$, $x^2 + 5x > 0$

Y sabemos que $x^2 + 5x$ se hace cero en -5 y 0. Entonces la solución de la inecuación $x^2 + 5x > 0$ es:



Solución de $x^2 + 5x$:
$x \in (-\infty , -5] \cup [0 , \infty)$

La solución de esta inecuación nos da los valores de x que satisfacen las condiciones del Dominio de la función.

$\boldsymbol{Dom_f} = (-\infty , -5] \cup [0 , \infty)$

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 7

Hallar el dominio de la función $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-4}}$

1ro. Identificamos el tipo de función.

La imagen de ***f*** es la raíz de una fracción que tiene binomios de grado 1 en numerador y denominador.

$$f(x)=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-4}}$$

Tenemos dos tipos de funciones:

Primero nos conseguimos con una **función irracional**, por tener **raíz** con variable en la expresión sub radical.

$$f(x)=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-4}}$$

Luego nos conseguimos con una **función racional**, por tener una **fracción** con variable en el denominador.

$$f(x)=\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-4}}$$

¿Cuáles son la restricciones?

Restricción Irracional: Como la raíz tiene índice 4, número par, la expresión sub radical no debe ser negativa, es decir, debe ser mayor o igual que cero. La 1ra restricción de la función es:

$$\mathbf{R_1:}\ \frac{x+1}{x-4}\geq 0$$

Restricción racional: El denominador debe ser distinto de cero. La 2da restricción de la función es:

$$\mathbf{R_2:}\ x-4\neq 0$$

Esta restricción se resuelve rápido, basta con despejar x.

$$x\neq 4$$

Tenemos que x debe ser distinto de 4, es decir, para efecto de la función racional x puede tomar cualquier valor real menos el 4.

$$x\in\mathbb{R}-\{4\}$$

Trabajemos con la segunda restricción.

Es una inecuación racional, para resolverla debemos **estudiar el cambio de signo que tiene la expresión en las raíces de cada factor.**

Raíces o ceros de cada factor

Recordemos. Para hallar los ceros de cada factor, debemos igualarlos a cero.

La 1ra igualdad nos da x = -1 $\quad x+1=0 \longrightarrow x=-1$

La 2da igualdad nos da x = 4 $\quad x-4=0 \longrightarrow x=4$

Ubicamos las dos raíces en la recta real

Aprovecharemos para hacer marcación importantísima de una vez.

Observación:

La fracción puede ser igual a cero porque la inecuación dice mayor o igual que cero, y una fracción vale cero cuando su numerador vale cero.

Esto es, en x = -1

$$\frac{x+1}{x-4}\geq 0$$

$$\frac{x+1}{x-4}=0 \text{ cuando } x+1=0$$
$$x=-1$$

Entonces en la recta marcaremos -1 con un circulo rojo para indicar que **el -1 es parte de la solución**.

Por lo que toca a la raíz del denominador, Sabemos que **x no puede tomar el valor 4**, entonces marcaremos el 4 con una circunferencia para indicar que el 4 no es parte de la solución

Nota: con círculos, ●, indicamos que ese valor se toma como parte de la solución, por lo que se escribirá en el intervalo usando un corchete. y con circunferencias, ○, indicamos que ese valor no se toma como parte de la solución, por lo que se escribirá en el intervalo usando un paréntesis.

Probaremos la expresión con valores de cada intervalo para estudiar su signo.

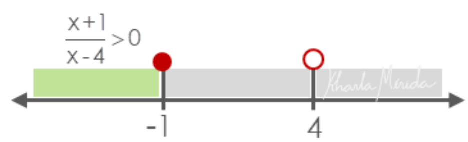
De (-∞ ,-1] probaremos con -2:

Sustituimos el 1 en la expresión de la inecuación, $\frac{x+1}{x-4} \geq 0$

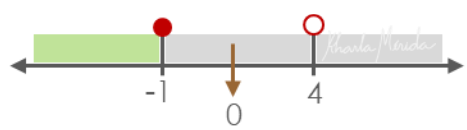
Efectuamos las operaciones, nos queda 1/6.

$$\frac{-2+1}{-2-4} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$$

El resultado positivo nos indica que **en este intervalo la expresión es positiva**.



De [-1 , 4] probaremos con 0:

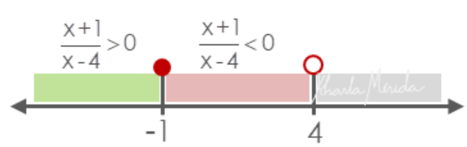


Sustituimos el 0 en la expresión de la inecuación, $\frac{x+1}{x-4} \geq 0$

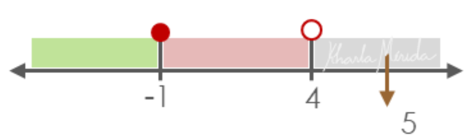
Efectuamos las operaciones, nos queda -1/4.

$$\frac{0+1}{0-4} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

El resultado negativo nos indica que **en este intervalo la expresión es negativa**.



De [4 , ∞) probaremos con 5:

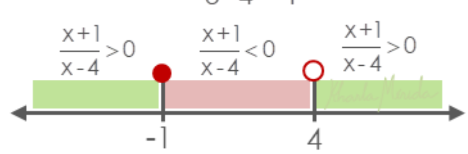


Sustituimos el 5 en la expresión de la inecuación, $\frac{x+1}{x-4} \geq 0$

Efectuamos las operaciones, nos queda 6.

$$\frac{5+1}{5-4} = \frac{6}{1} = 6$$

El resultado positivo nos indica que **en este intervalo la expresión es positiva**.



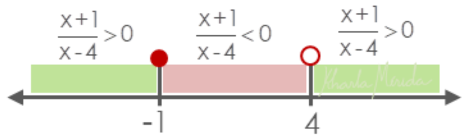
La fracción es mayor que cero en el 1er y 3er intervalo, y es cero en x = -1.

El dominio de la función es:

$$\text{Si } x \in (-\infty , -1) , \ \frac{x+1}{x-4} > 0$$

$$\text{Si } x \in (-1 , 4) , \ \frac{x+1}{x-4} < 0$$

$$\text{Si } x \in (-1 , 4) , \ \frac{x+1}{x-4} > 0$$



$$\textbf{Dom}_f = (-\infty , -1] \cup (4 , \infty)$$

FUNCIONES. Algebraica. Hallar el Dominio. Ejercicio 8

Hallar el dominio de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-6}} + \sqrt{5-x}$

1ro. Identificamos el tipo de función.

La imagen de ***f*** es la suma de una fracción, cuyo numerador es un valor fijo y cuyo denominador es la raíz de un binomio de grado 1, y la raíz de un binomio de grado uno.

Fracción Raíz

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-6}} + \sqrt{5-x}$$

Raíz

Tenemos dos tipos de funciones:

Primero nos conseguimos con una **función racional**, por tener **fracción** variable en el denominador, con **irracional**, por tener **raíz** con variable en la expresión sub radical.

$$\frac{1}{\sqrt{2x-6}}$$

Luego nos conseguimos con una **función irracional**, por tener **raíz** con variable en la expresión sub radical.

$$\sqrt{5-x}$$

El dominio de la función f es el resultado de considerar las restricciones o condiciones de cada función.

Restricción Racional. Que el denominador sea diferente de cero,

$$\mathbf{R_1:} \ \sqrt{2x-6} \neq 0$$

Restricción Irracional. Que la expresión sub radical sea mayor o igual que cero. Esta aplica a las dos raíces

$$\mathbf{R_2:} \ 2x - 6 \geq 0$$

$$\mathbf{R_3:} \ 5 - x \geq 0$$

Nota: La 1ra y 2da restricción pueden resumirse en una sola inecuación.

¿cómo?.

Si necesitamos que: $2x - 6 \geq 0$ pero a la vez $2x - 6 \neq 0$,

Podemos concluir que: $2x - 6 > 0$,

$$\mathbf{R:} \ 2x - 6 > 0$$

Al quitarle la igualdad a la inecuación satisfacemos la condición **diferente de cero**.

Ahora debemos resolver las inecuaciones de las restricciones que han quedado. El dominio de la función es el conjunto que satisfaga ambas condiciones.

$$\mathbf{R_3:} \ 5 - x \geq 0 \qquad \mathbf{R:} \ 2x - 6 > 0$$

En la primera inecuación pasamos la x sumando al otro lado.

Si 5 es mayor o igual que x, es porque x es menor o igual que 5, esto significa que partiendo del 5, tomaremos los valores menores que 5 y al 5.

$$5 - x \geq 0$$

$$5 \geq x$$

$$x \leq 5$$

En la 2da inecuación pasamos el 6 restando al otro lado.

Ahora despejando nos queda x > 3,

Esto significa que partiendo del 3, tomaremos los valores mayores que 3, como la inecuación no tiene igual, no toma al tres como solución esto lo indicamos con una pequeña circunferencia.

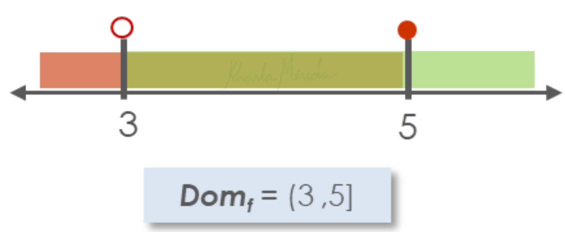
$$2x - 6 > 0$$

$$2x > 6$$

$$x > \frac{6}{2}$$

$$x > 3$$

El dominio de la función es el resultado de considerar ambas condiciones. Entonces intersectamos las soluciones obtenidas.



A Practicar

Hallar el dominio de la función

1. $f(x) = -\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}$
2. $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}$
3. $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$

¿Lo Hicimos Bien?

1. $Dom_f = R - \{-1\}$
2. $Dom_f = R - \{0\}$
3. $Dom_f = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$
4. $Dom_f = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$