

FUNCIÓN POLINÓMICA

Hasta ahora hemos visto funciones descritas por líneas rectas (funciones lineales, en esta sección introduciremos funciones polinomiales. Un **polinomio** está constituido de diferentes términos que contienen potencias **enteras positivas** de las variables. Aquí está un ejemplo de polinomio.

$$4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Cada parte del polinomio que es sumada o restada es llamada un **término** del polinomio. El ejemplo de arriba es un polinomio con *cuatro términos*.

$$4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

términos

Los números que aparecen en cada término en frente de las variables son llamados los **coeficientes**. El número que aparece sin ninguna variable es llamado una **constante**.

$$4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

coeficientes constante

En este caso, el coeficiente de x^3 es 4, el coeficiente de x^2 es 2, el coeficiente de x es -3 y la constante es 1.

Grado de un polinomio y forma estándar

Cada término en el polinomio tiene un grado. Este es la potencia de la variable en ese término.

$4x^3$ es de grado 3 y es llamado un término cúbico o término de 3er orden.

$2x^2$ es de grado 2 y es llamado término cuadrático o término de 2do orden.

$-3x$ es de grado 1 y es llamado el término lineal o término de 1er orden.

1 es de grado 0 y es llamado la constante.

Por definición, **el grado de un polinomio** es el mismo grado que el del término con mayor grado. Este ejemplo es un polinomio de 3er grado, el cual es también llamado polinomio "cúbico". (¿Por qué

piensas que este es llamado cúbico?).

Los polinomios pueden tener más de una variable. Aquí está otro ejemplo de un polinomio.

$$t^4 - 6s3t^2 - 12st + 4s^4 - 5$$

Este es un polinomio porque todos los exponentes de las variables son enteros positivos. Este polinomio tiene cinco términos. Revisemos cada término más de cerca.

Nota: El grado de un término es la suma de las potencias de cada variable en el término.

t^4 es de grado 4, así que es un término de 4to orden.

$-6s3t^2$ es de grado 5, así que es un término de 5to orden.

$-12st^2$ es de grado 2, así que es un término de 2do orden.

$4s^4$ es de grado 4, así que es un término de 4to orden.

-5 es una constante, así que su grado es 0.

Ya que el grado mayor de uno de los términos en este polinomio es 5, entonces este es un polinomio de grado 5 o un polinomio de 5to orden.

Ejemplo 1

Para los siguientes polinomios, identificar el coeficiente de cada término, el grado de cada término y el grado del polinomio.

a) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$

b) $x^4 - 3x^3 y^2 + 8x - 12$

Respuesta:

a) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$

Los coeficientes de cada término en orden son 1, -3, 4, -5 y la constante es 7.

Los grados de cada término son 5, 3, 2, 1, y 0. Por consiguiente, el grado del polinomio es 5.

b) $x^4 - 3x^3 y^2 + 8x - 12$

Los coeficientes de cada término en orden son 1, -3, 8 y la constante es -12.

Los grados de cada término son 4, 5, 1, y 0. Por consiguiente, el grado del polinomio es 5.

Ejemplo 2

Identificar las siguientes expresiones como polinomios o no-polinomios.

a) $5x^2 - 2x$

b) $3x^2 - 2x - 2$

c) $x\sqrt{x} - 1$

d) $\frac{5}{x^3+1}$

e) $4x^{\frac{1}{3}}$

f) $4xy^2 - 2x^2y - 3 + y^3 - 3x^3$

Solución

(a) $5x^2 - 2x$ Este es un polinomio.

(b) $3x^2 - 2x - 2$ Este no es un polinomio porque tiene un exponente negativo.

(c) $x\sqrt{x} - 1$ Este no es un polinomio porque tiene una raíz cuadrada.

d) $\frac{5}{x^3+1}$ Este no es un polinomio porque la potencia de x aparece en el denominador.

e) $4x^{\frac{1}{3}}$ Este no es un polinomio porque tiene un exponente fraccionario.

(f) $4xy^2 - 2x^2y - 3 + y^3 - 3x^3$ Este es un polinomio.

Observaste que cada término en un polinomio tiene grado. El mayor grado de un término es también el grado del polinomio. A menudo, organizamos los términos en un polinomio de tal forma que el término con el grado mayor sea el primero, seguido de los otros términos en orden decreciente de acuerdo a su potencia. Esta forma de organizar los polinomios es llamada forma estándar.

Los siguientes polinomios están en forma estándar.

$$4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$a^4 b^3 - 2a^3 b^3 + 3a^4 b - 5ab^2 + 2$$

El primer término de un polinomio en forma estándar es llamado término principal y el coeficiente del término principal es llamado coeficiente principal.

El término principal del primer polinomio de arriba es $4x^4$ y el coeficiente principal es 4.

El término principal del segundo polinomio de arriba es $a^4 b^3$ y el coeficiente principal es 1.

Ejemplo 3

Reordena los términos en los siguientes polinomios de tal manera que estén en la forma estándar. Indique el término principal y el coeficiente principal en cada polinomio.

(a) $7 - 3x^3 + 4x$

(b) $ab - a^3 + 2b$

(c) $-4b + 4 + b^2$

Respuesta:

(a) $7 - 3x^3 + 4x$ es reordenado como $-3x^3 + 4x + 7$.
El término principal es $-3x^3$ y el coeficiente principal es -3 .

(b) $ab - a^3 + 2b$ es reordenado como $-a^3 + ab + 2b$.
El término principal es $-a^3$ y el coeficiente principal es -1 .

(c) $-4b + 4 + b^2$ es reordenado como $b^2 - 4b + 4$.
El término principal es b^2 y el coeficiente principal es 1 .

Simplificación de polinomios

Un polinomio está simplificado si no tiene términos semejantes. **Términos semejantes** son términos en el polinomio que tienen la(s) misma(s) variable(s) con los mismos exponentes, pero pueden tener coeficientes diferentes.

$2x^2y$ y $5x^2y$ son términos semejantes. $6x^2y$ y $6xy^2$ no son términos semejantes.

Si tenemos un polinomio que contiene términos semejantes, lo podemos simplificar combinándolos.

$$x^2 + 6xy - 4xy + y^2$$

Los términos en rojo son semejantes

Este polinomio de ejemplo puede ser simplificado combinando los términos semejantes $6xy - 4xy = 2xy$. Escribimos el polinomio simplificado como

$$x^2 + 2xy + y^2$$

Ejemplo 4

Simplificar los siguientes polinomios agrupando términos semejantes y combinándolos.

(a) $2x - 4x^2 + 6 + x^2 - 4 + 4x$

(b) $a^3 b^3 - 5ab^4 + 2a^3 b - a^3 b^3 + 3ab^4 - a^2 b$

Respuesta:

(a) $2x - 4x^2 + 6 + x^2 - 4 + 4x$

Reordenando los términos de tal manera que los términos semejantes se agrupen juntos:

$$= (-4x^2 + x^2) + (2x + 4x) + (6 - 4)$$

Combinar cada conjunto de términos semejantes sumando o restando los coeficientes:

$$= -3x^2 + 6x + 2$$

(b) $a^3 b^3 - 5ab^4 + 2a^3 b - a^3 b^3 + 3ab^4 - a^2 b$

Reordenando los términos de tal manera que los términos semejantes se agrupen juntos:

$$= (a^3 b^3 - a^3 b^3) + (-5ab^4 + 3ab^4) + 2a^3 b - a^2 b$$

Combinar cada conjunto de términos semejantes sumando o restando los coeficientes:

$$= 0 - 2ab^4 + 2a^3 b - a^2 b$$

$$= -2ab^4 + 2a^3 b - a^2 b$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Indicar cuáles expresiones son polinomios. Explica.

- a. $X^2 + 3x^{1/2}$
 b. $\frac{1}{2}x^2 y - 9y^2$
 c. $3x^{-3}$

Respuesta:

- a. **No es un polinomio. El exponente de uno de los términos es una fracción.**
 b. **Si es un polinomio**
 c. **No es un polinomio. El exponente de uno de los términos es negativo**

2. Expresa el siguiente polinomio en forma estándar. Da el grado del polinomio.
 $3-2x$

Reorganiza en forma decreciente

Respuesta: $-2x+3$

3. Expresa el siguiente polinomio en forma estándar. Da el grado del polinomio.
 $8-4x+3x^3$

Reorganizando en forma decreciente

Respuesta: $3x^3-4x+8$

4. Expresa el siguiente polinomio en forma estándar. Da el grado del polinomio.
 $-5+2x-5x^2+8x^3$

Reorganizando en forma decreciente

Respuesta: $8x^3-5x^2+2x-5$

5. Simplifica y reescribe el siguiente polinomio en su forma estándar. Indica el orden del polinomio.

Para empezar, simplificamos combinando términos semejantes:

$$16x^2y^3 - 3xy^5 - 2x^3y^2 + 2xy - 7x^2y^3 +$$

$$16x^2y^3 - 3xy^5 - 2x^3y^2 + 2xy - 7x^2y^3$$

$$(16x^2y^3 - 7x^2y^3) - 3xy^5 + (-2x^3y^2 + 2xy)$$

y simplificado es

$$9x^2y^3 - 3xy^5 + 2xy.$$

Para reescribir el polinomio en su forma estándar es necesario determinar el grado de cada término. El primer término tiene grado $2 + 3 = 5$, el segundo término tiene grado $1 + 5 = 6$, y el último término tiene grado $1 + 1 = 2$. Vamos a reescribir los términos en orden en forma decreciente según su grado:

$$-3xy^5 + 9x^2y^3 + 2xy$$

El orden de un polinomio es el grado del término con el mayor grado. En este caso, el polinomio es de 6to orden.

Respuesta: 6° grado

6. Simplifica y reescribe el siguiente polinomio en su forma estándar. Indica el orden del polinomio.

Como no hay que simplificar se reordena

$$-9x^4+x^2+12$$

El polinomio es de 4° grado

$$x^2 - 9x^4 + 12$$

Respuesta: 4° grado

7. Simplifica y reescribe el siguiente polinomio en su forma estándar. Indica el orden del polinomio.

$$5x + 2x^2 - 3x$$

Simplifica
 $(5x-3x)+2x^2$
 $2x+2x^2$

Y ahora reordena
 $2x^2+2x$
 El polinomio es de 2° grado

Respuesta: 2° grado

8. Indica si la siguiente expresión es un polinomio. Explica.

$$\frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{t^2}$$

Respuesta: No es un polinomio. En uno de los términos la variable está en el denominador

9. Indica si la siguiente expresión es un polinomio. Explica.

$$\sqrt{x} - 2x$$

Respuesta: No es un polinomio. Uno de los términos la variable está dentro de una raíz, su exponente es una fracción

10. Indica si la siguiente expresión es un polinomio. Explica.

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^2$$

Respuesta: No es un polinomio el exponente de la variable es una fracción

Profesor Danesa Padilla

Versión Fecha 2015-07-28

Glosario

Un **polinomio** es una expresión que contiene constantes, variables y *números enteros positivos* como potencias de las variables.

En un polinomio, el número que aparece en cada término en frente de las variables se denomina **coeficiente**.

En un polinomio, el número que aparece por sí mismo y sin variable(s) se denomina **constante o término independiente**.

El **grado u orden de un polinomio** es el grado del término con mayor grado. El **grado de un término** es la potencia de la variable, o si el término tiene más de una variable, es la suma de las potencias de cada variable.

Un polinomio en su **forma estándar**, es un polinomio que tiene ordenados de forma decreciente sus términos según el grado de cada término.

Los términos semejantes son términos en un polinomio que tienen la(s) misma(s) variable(s) con la(s) misma(s) potencia(s), pero que pueden tener diferentes coeficientes

Otras Referencias

http://www.vitutor.com/ab/p/p_e.html

