FUNCIÓN CUADRÁTICA O DE SEGUNDO GRADO.

Las funciones cuadráticas son más que curiosidades algebraicas, son ampliamente usadas en la ciencia, los negocios, y la ingeniería. La parábola con forma de U puede describir trayectorias de chorros de agua en una fuente y el botar de una pelota, o pueden ser incorporadas en estructuras como reflectores parabólicos que forman la base de los platos satelitales y faros de los carros. Las funciones cuadráticas ayudan a predecir ganancias y pérdidas en los negocios, graficar el curso de objetos en movimiento, y asistir en la determinación de valores mínimos y máximos. Muchos de los objetos que usamos hoy en día, desde los carros hasta los relojes, no existirían si alguien, en alguna parte, no hubiera aplicado funciones cuadráticas para su diseño. Comúnmente usamos ecuaciones cuadráticas en situaciones donde dos cosas se multiplican juntas y ambas dependen de la misma variable. Por ejemplo, cuando trabajamos con un área. Si ambas dimensiones están escritas en términos de la misma variable, usamos una ecuación cuadrática. Porque la cantidad de un producto vendido normalmente depende del precio, a veces usamos una ecuación cuadrática para representar las ganancias como un producto del precio y de la cantidad vendida. Las ecuaciones cuadráticas también son usadas donde se trata con la gravedad, como por ejemplo la trayectoria de una pelota o la forma de los cables en un puente suspendido.

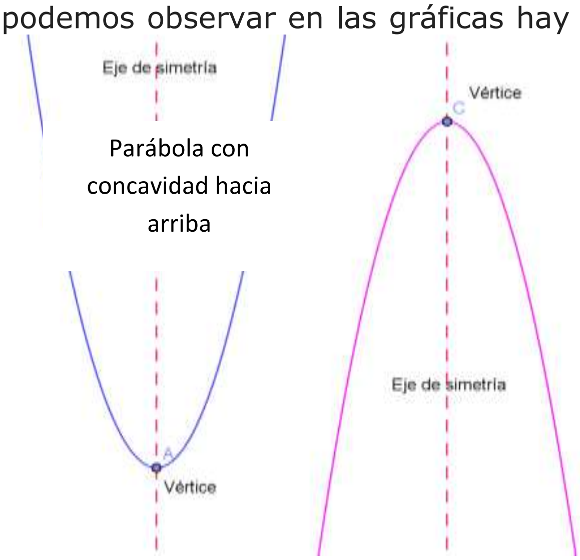
MARCO TEÓRICO

Una ecuación de segundo grado es una ecuación en la que el exponente máximo de las incógnitas es 2. Toda ecuación de segundo grado se puede escribir siempre de la forma $ax^2 + b_x + c = 0$ en donde **a** es el coeficiente de x^2 y es distinto de cero, **b** el coeficiente de x y **c** el término independiente. La representación gráfica es una **parábola**, estas gráficas son fáciles de trazar, son simétricas con rema es respecto a una recta vertical, tiene un punto **máximo** o un punto **mínimo** llamado **vértice** y su forma es **cóncava o convexa.**

CONCAVIDAD DE UNA PARÁBOLA.

La representación gráfica de la función y=$ax^2 + b_x + c$ es una parábola que puede tener una concavidad hacia arriba o hacia abajo.

Como podemos observar en las gráficas hay un eje de simetría, que siempre es paralelo al eje y.



Parábola con concavidad hacia abajo

EFECTOS DE LOS PARÁMETROS a, b y c.

La parábola y=$ax^2 + b_x + c$ queda totalmente definida cuando conocemos a, b y c. estos números determinan su forma y posición en el plano cartesiano.

- **COEFICIENTE a:**
  - ✓ Si a > 0 la parábola es **cóncava** hacia arriba. Su vértice está en el **mínimo** de la función.
  - ✓ Si a < 0 la parábola es **cóncava** hacia abajo. Su vértice está en el **máximo** de la función

- **COEFICIENTE b:** Produce el desplazamiento lateral en la parábola
  - ✓ Si a>0 y b<0, la parábola se desplaza a la izquierda y si b < 0 se desplaza a la derecha.
  - ✓ Si a<0 sucede lo contrario
- **COEFICIENTE c:** El término c produce desplazamientos verticales en la parábola
  - ✓ Si c > 0 se desplaza la parábola hacia arriba
  - ✓ Si c< 0 se desplaza la parábola hacia abajo.

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DEL VÉRTICE MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA PARÁBOLA.

El vértice de una parábola puede ser **máximo** si la concavidad es hacia abajo y **mínimo** cuando la concavidad es hacia arriba.

Para obtener estos vértices usaremos las siguientes fórmulas: Las coordenadas del vértice vienen dadas por V(h,k) donde h representa el eje de las abscisas o eje x y k el eje de las ordenadas o eje y.

Así; $h = \frac{-b}{2a}$ y $k = \frac{4ac- b^2}{4a}$ entonces; v(h,k) = v($\frac{-b}{2a}$, $\frac{4ac- b^2}{4a}$)

EJE DE SIMETRÍA:

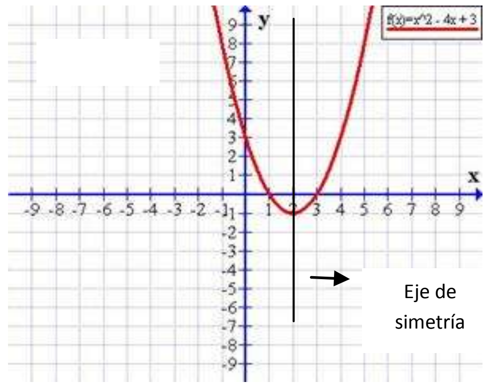
El eje de simetría recta vertical que pasa por el vértice y divide la parábola en dos partes iguales. Su ecuación es x=h

EJEMPLO 1: Dada la función **f(x) = x² − 4x + 3**, representarla gráficamente.

Respuesta:

Dándole valores a x tanto positivos como negativos, tendremos los valores de y o f(x).

X	**0**	**1**	**-1**	**2**
y	3	0	7	-1



Características:

- ✓ La función **f(x) = x² – 4x + 3** es de la forma y=$ax^2 + b_x + c$ en donde a = 1
- ✓ La gráfica obtenida es una parábola que tiene su vértice en v(h,k) = $(\frac{-b}{2a}\ ,\ \frac{4ac - b^2}{4a})$

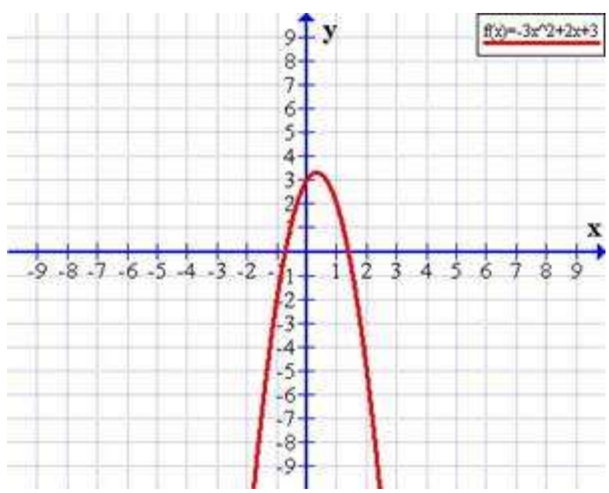
  V(h,k) = $(\ \frac{-(-4)}{2.1}\ ,\ \frac{4.1.3-(-4)^2}{4.1}\ )$ = V(2, -1)
- ✓ Como a>0 la parábola es **cóncava hacia arriba.**
- ✓ Eje de simetría: x= 2

EJEMPLO 2: Dada la función **f(x) = −3x² + 2x + 3** representarla gráficamente.

Respuesta:

Dándole valores a x tanto positivos como negativos, tendremos los valores de y o f(x).

x	**0**	**1**	**-1**	$\frac{1}{3}$
y	-5	-6	0	$\frac{10}{3}$



Características:

- ✓ La función **f(x) = −3x² + 2x + 3**es de la forma y=$ax^2 + b_x + c$ en donde a = -3
- ✓ La gráfica obtenida es una parábola que tiene su vértice en v(h,k) = $(\frac{-b}{2a}\ ,\ \frac{4ac - b^2}{4a})$

  V(h,k) = $(\ \frac{-2}{2.(-3)}\ ,\ \frac{4.(-3).3-(2)^2}{4.(-3)}\ )$ = V($\frac{1}{3}$, $\frac{10}{3}$)

- ✓ Como a<0 la parábola es **cóncava hacia abajo.**
- ✓ Eje de simetría x= $\frac{1}{3}$

INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS

- ✓ Intersección con el eje y: Hacemos x=0
  y= f(0) = a(0)^2 + b(0) +c
  y= C
- ✓ Intersección con el eje x: Hacemos y=0
  $ax^2 + b_x + c = 0$ obtenemos una ecuación cuadrática que podemos resolver por factorización o por fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

EJEMPLO 3: Dada la siguiente función $h(x) = x^2 - 2x - 3$ graficarla y hallar: Concavidad, vértice y puntos de corte en la parábola.

Respuesta:

Dándole valores a x tanto positivos como negativos, tendremos los valores de y o h(x).

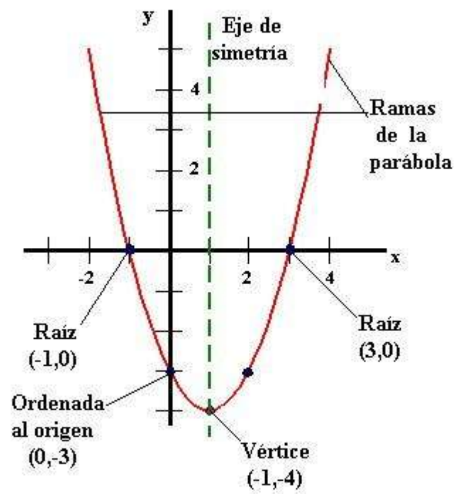
X	**0**	**1**	**-1**	**2**
y	-3	-4	0	-3

Características:

- ✓ La función $\boldsymbol{h(x) = x^2 - 2x - 3}$ es de la forma y=$ax^2 + b_x + c$ en donde a = 1
- ✓ La gráfica obtenida es una parábola que tiene su vértice en v(h,k) = ($\frac{-b}{2a}$, $\frac{4ac - b^2}{4a}$)
  V(h,k) = ($\frac{-(-2)}{2.1}$, $\frac{4.(1).(-3) - (-2)^2}{4.(1)}$) = V(1, -4)
- ✓ Como a>0 la parábola es **cóncava hacia arriba.**
- ✓ Eje de simetría: x= 1
- ✓ Los puntos de corte o de intersección son:

  Con respecto a y : Hacemos x=0
  $\boldsymbol{h(0) = 0^2 - 2.0 - 3}$ ⇨ y= -3 así el punto de corte con respecto a y es (o, -3)

  Con respecto a x: Hacemos y= 0
  $\boldsymbol{0 = x^2 - 2x - 3}$
  Factorizamos para encontrar las raíces: (x-3) (x+1)
  Las raíces son x= 3 y x= -1
  Los puntos de cortes con respecto a x son (-1,0) y (3,0)



DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA.

- El **Dominio** de toda función cuadrática es el conjunto de todos los números reales: D_f= X € R.

- El **Rango** de toda función cuadrática depende de la concavidad de la parábola: Si una **parábola** es **cóncava hacia arriba a>0** en este caso tendremos que R_f: y≥ k, y ∈ [k, +∞) ; si por el contrario la **parábola** es **cóncava hacia abajo a<0** en este caso tendremos R_f: y≤ k, y ∈ (-∞, k]

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Identifica si la siguiente ecuación es cuadrática o no y explica porque.

$$y = -2x + 4x^2$$

Respuesta:

La función y=-2x+ $4x^2$ si es una ecuación cuadrática ya que tiene la forma y=ax^2 + bx + c donde a=4, b=-2 y c=0

2. ¿La función $y = 2x + 5$ es una ecuación cuadrática? ¿Por qué?

Respuesta:

La función y=2x + 5 no es una ecuación cuadrática, la mis ma representa una función afín o ecuación de la recta.

3. La función y=-$2x^2$ + x + 3 abre hacia arriba o hacia abajo. Justifica tu respuesta.

Respuesta:

La función y=-$2x^2$ + x + 3 abre hacia abajo ya que a= -2; el signo negativo indica que la parábola abre hacia abajo.

4. Resuelve por factorización la siguiente ecuación de segundo grado.

$$y= x^2 -4x -21$$

Respuesta:

Esta ecuación podemos resolverla por factorización sencilla, simplemente buscamos dos números que multiplicados nos den -21 y que sumados o restados nos den -4.

Así; obtenemos :

x^2 -4x -21= 0
(x-7). (x+3) = 0
Nuestras raíces vienen dadas por x=7 y x=-3.

5. Resuelve por fórmula cuadrática la siguiente ecuación.
$y= 6x^2 - x- 2$

Respuesta:

Sabemos que $x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$ sustituimos los valores: a= 6, b=-1 y c= -2

Entonces; $x = \frac{-(-1) \pm\sqrt{(-1)^2 - 4.6.(-2)}}{2.6}$

$X_1 = \frac{1+\sqrt{1+48}}{12} = \frac{2}{3}$; $X_2 = \frac{1-\sqrt{1+48}}{12} = \frac{-1}{2}$

Luego;
$6x^2 - x- 2=0$
$6(x - \frac{2}{3}). (x+ \frac{1}{2})= 0$

6. Dada la siguiente función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ determinar:
   a. Intersección con el eje de las abscisas x
   b. Eje de simetría
   c. Vértice
   d. Intersección con el eje de las ordenadas y
   e. Máximo o mínimo
   f. Gráfica

Respuesta:
a.Hacemos y =0
$0= -x^2 + 2x +3$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$
Sustituimos a=-1, b=2 y c=3

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.(-1).3}}{2.(-1)}$$
$X_1 = \frac{-2+\sqrt{16}}{-2} = -1$ y $x_2 = \frac{-2-\sqrt{16}}{-2} = 3$
Puntos de corte con respecto a x: (-1,0) y (3,0).

b. Eje de simetría: x= 1

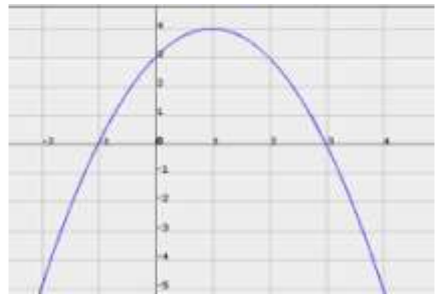
c. Vértice: $v(h,k)= (\frac{-b}{2a} , \frac{4ac- b^2}{4a})$
$v(h,k)= (\frac{-2}{2(-1)} , \frac{4(-1)3- 2^2}{4(-1)})$

v(h,k)= (1,4)

d. Hacemos x=0
$y= -x^2 + 2x +3$
$y= -(0)^2 +2(0) + 3$
y= 3
Punto de corte con respecto a y (0,3)

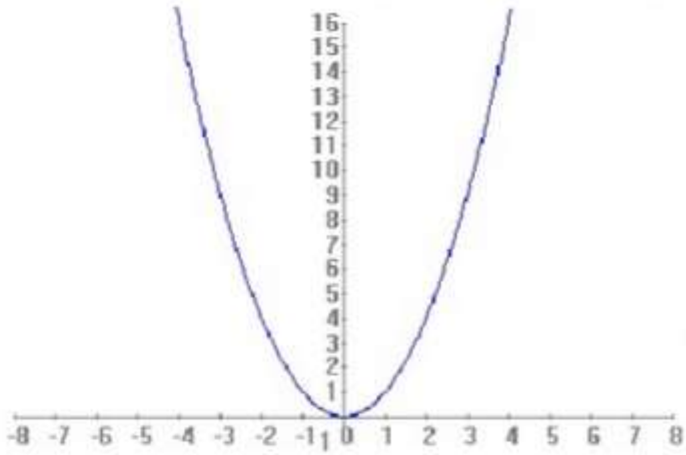
e. La gráfica tiene un máximo y es 4.

f.



7. Halla el dominio y rango de la función y= x^2

Respuesta:



Dominio

$X^2 \geq 0$

$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{0}$

$x \geq 0$

Así; R_f : $[0, +\infty)$

Vértice: (h,k)

V(0,0)

Rango

$y \in [k, +\infty)$

$y \in [0, +\infty)$

Glosario

- ✓ **Función cuadrática** se llama así a toda función de la forma y= $ax^2 + b_x + c$ donde a, b y c son números reales y a≠0.
- ✓ **Vértice de la parábola**, el punto donde la parábola cambia de dirección, cundo está subiendo y comienza a bajar o cuando está bajando y comienza a subir.

Otras Referencias

- http://www.ecured.cu/index.php/Funci%C3%B3n_Cuadr%C3%A1tica
- http://math2me.com/playlist/pre-calculo/dominio-y-rango-de-una-funcion-cuadratica-ejercicio
- https://es.wikipedia.org/wiki/Par%C3%A1bola_(matem%C3%A1tica)