Estudio de la Circunferencia

Marco Teórico

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. La distancia constante de un punto cualquiera P al centro se llama radio.

Un círculo es el conjunto de puntos que son equidistantes de un punto único. Este único punto se llama el centro del círculo. Un círculo no tiene un enfoque o una directriz, sino que simplemente tiene un centro. Los círculos pueden ser reconocidos inmediatamente de la ecuación general de una cónica cuando los coeficientes de x^2 y y^2 son del mismo signo y el mismo valor. Las circunferencias no son funciones, ya que no pasan la prueba de la línea vertical. La distancia desde el centro de un círculo hasta el borde del círculo se llama el radio del círculo. La distancia de un extremo del círculo a través del centro al otro extremo del círculo se llama diámetro. El diámetro es igual a dos veces el radio.

La forma de representación gráfica de una circunferencia, según su ecuación canónica, es:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

El centro del círculo es (h,k) y el radio del círculo es "r". Tenga en cuenta que esto se parece mucho a el Teorema de Pitágoras.

La ecuación General con centro (a, b) se escribe como:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Resultando:

$$a=-\frac{D}{2}$$
$$b=-\frac{E}{2}$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2-F}$$

Para que una expresión del tipo: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ sea una circunferencia debe cumplir que:

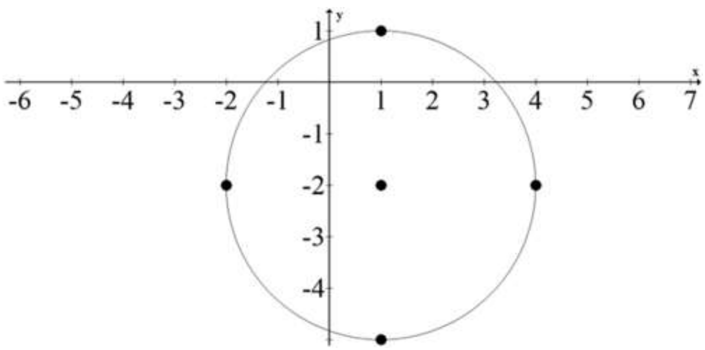
- Los coeficientes de x^2 e y^2 sean iguales a la unidad. Si tuvieran ambos un mismo coeficiente distinto de 1, podríamos dividir por él todos los términos de la ecuación.
- No tenga término en xy.
- $\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2-C>0$

Ejemplo A

Grafica el siguiente círculo.

$$(x-1)^2+(y+2)^2=9$$

Solución: Grafica el centro y los cuatro puntos a exactamente 3 unidades del centro.



Ejemplo B

Convierte a la siguiente ecuación a forma canónica para una circunferencia. Identifica el centro y el radio.

$$36x^2+36y^2-24x+36y-275=0$$

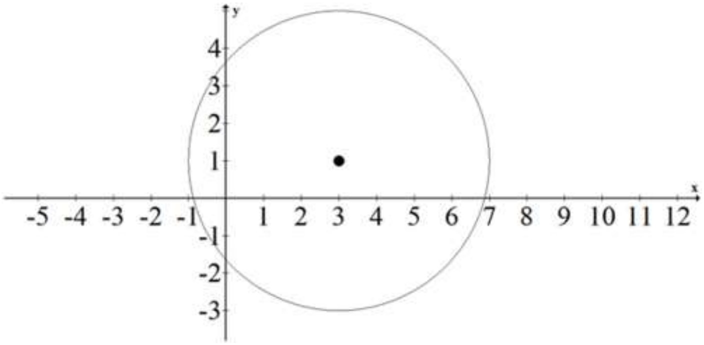
Solución: Completa el cuadrado y luego dividir por el coeficiente de x^2 y y^2

$$\begin{aligned}
&36x^2-24x+36y^2+36y=275\\
&36\left(x^2-\frac{2}{3}x+\underline{\quad}\right)+36(y^2+y+\underline{\quad})=275\\
&36\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+36\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)=275+4+9\\
&36\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+36\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=288\\
&\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=8
\end{aligned}$$

El centro es $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$. El radio es $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Ejemplo C

Escribe la ecuación del siguiente círculo.



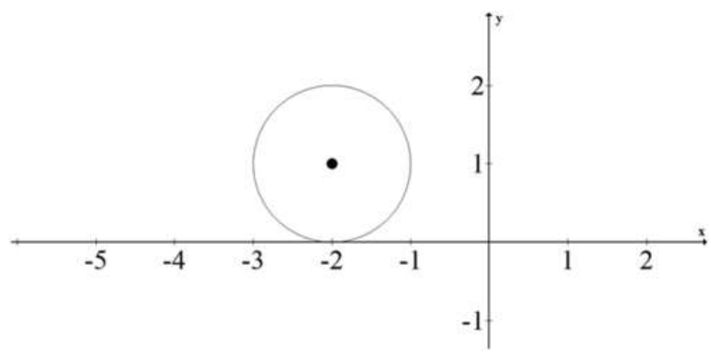
Solución:

El centro del círculo está en (3, 1) y el radio del círculo es $r=4$. La ecuación es $(x-3)^2+(y-1)^2=16$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Grafica la siguiente cónica: $(x+2)^2+(y-1)^2=1$

Solución:



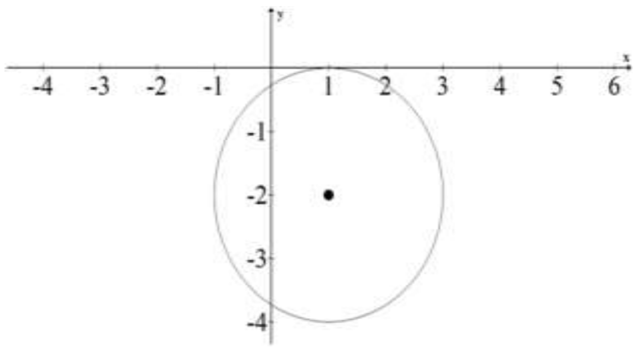
2. Traducir la siguiente cónica de la forma general a forma canónica.

$$x^2-34x+y^2+24y+\frac{749}{2}=0$$

Solución:

$$x^2-34x+y^2+24y+\frac{749}{2}=0$$
$$x^2-34x+y^2+24y=-\frac{749}{2}$$
$$x^2-34x+289+y^2+24y+144=-\frac{749}{2}+289+144$$
$$(x-17)^2+(y+12)^2=\frac{117}{2}$$

3. Escribe la ecuación para el círculo siguiente.



Solución:
$$(x-1)^2+(y+2)^2=4$$

4. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro (3, 4) y radio 2.

Solución:
$$(x-3)^2+(y-4)^2=4$$
$$x^2-6x+9+y^2-8y+16=4$$
$$\mathbf{x^2+y^2-6x-8y+21=0}$$

5. Dada la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-2x+4y-4=0$, hallar el centro y el radio.

Solución:
$-2=-2a$ $\quad$ $a=1$

$C(1,-2)$

$4=-2b$ $\quad$ $b=-2$

$C=a^2+b^2-r^2$ $\quad$ $-4=1+4-r^2$

r=3

6. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A (2,0), B(2,3), C(1, 3).Si sustituimos x e y en la ecuación $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ por

Solución:
$$\begin{cases}4+0+2A+0+C=0\\4+9+2A+3B+C=0\\1+9+A+3B+C=0\end{cases}$$

las coordenadas de los puntos se obtiene el sistema:

A=-3 B=-3 C=2

$x^2+y^2-3x-3y+2=0$

7. Indicar si la ecuación: $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$, corresponde a una circunferencia, y en caso afirmativo, calcular el centro y el radio.

Solución:

1.Como los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos a la unidad, dividimos por 4:

$$x^2 + y^2 - x - 2y - \frac{11}{4} = 0$$

2. No tiene término en xy.

3.

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - \left(-\frac{11}{4}\right) > 0$$

Es una circunferencia, ya que se cumplen las tres condiciones.

$$-1 = -2a \qquad a = \frac{1}{2}$$

$$C\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

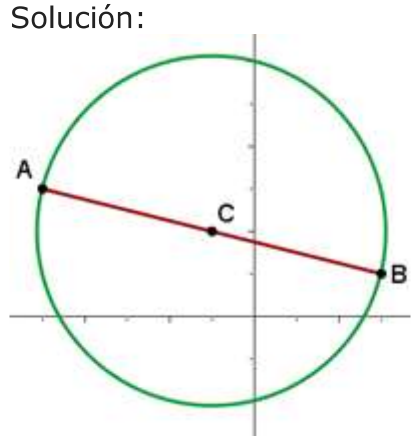
$$-2 = -2b \qquad b = 1$$

$$-\frac{11}{4} = \frac{1}{4} + 1 - r^2$$

r=2

8. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos A $(-5, 3)$ y B$(3, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de esta circunferencia?

Solución:



$$r = \frac{1}{2}d(A,B) = \frac{1}{2}\sqrt{(3+5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{17}$$

$$C = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (-1, 2)$$

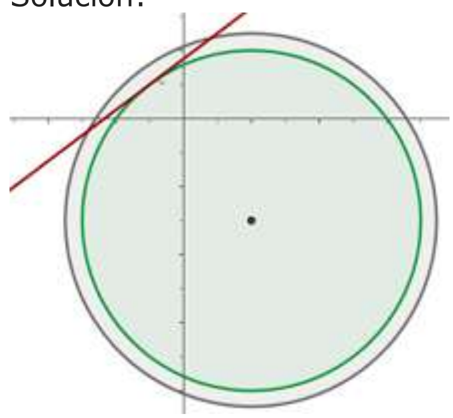
$$A = -2\cdot(-1) = 2 \qquad B = -2\cdot 2 = -4$$

$$C = (-1)^2 + 2^2 - \left(\sqrt{17}\right)^2 = -12$$

$x^2+y^2+2x-4y-12=0$

9. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

Solución:



$$-4 = -2a \qquad a = 2$$

$$C(2, -3)$$

$$6 = -2b \qquad b = -3$$

$$r = d(C, s) = \frac{2\cdot 3 - 4(-3) + 7}{\sqrt{9+16}} = 5$$

$$A = -4 \qquad B = 6 \qquad C = 4 + 9 - 25 = -12$$

$x^2+y^2-4x+6y-12=0$

10. Determinar las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación, en su forma reducida, es $(x-3)^2+ (y+1)^2=16$

Solución:
Establezcamos una comparación entre la expresión $(x-3)^2+(y+1)^2=16$ y la ecuación reducida de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r:

$(x-3)^2+(y+1)^2=16 \quad \rightarrow \quad -h=-3 \Rightarrow h=3$
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad -k=1 \Rightarrow k=-1$
$r^2=16 \Rightarrow r=\pm 4$

Luego C(h, k) → **C(3,-1) y r=4**

Glosario

El **radio** de un círculo es la distancia desde el centro del círculo hasta el borde exterior.

El **centro** de un círculo es el punto que define la ubicación del círculo.

Un **círculo** es el conjunto de puntos que son equidistantes de un punto dado.

Otras Referencias

http://www.vitutor.com/geo/coni/fActividades.html

Videos.