2

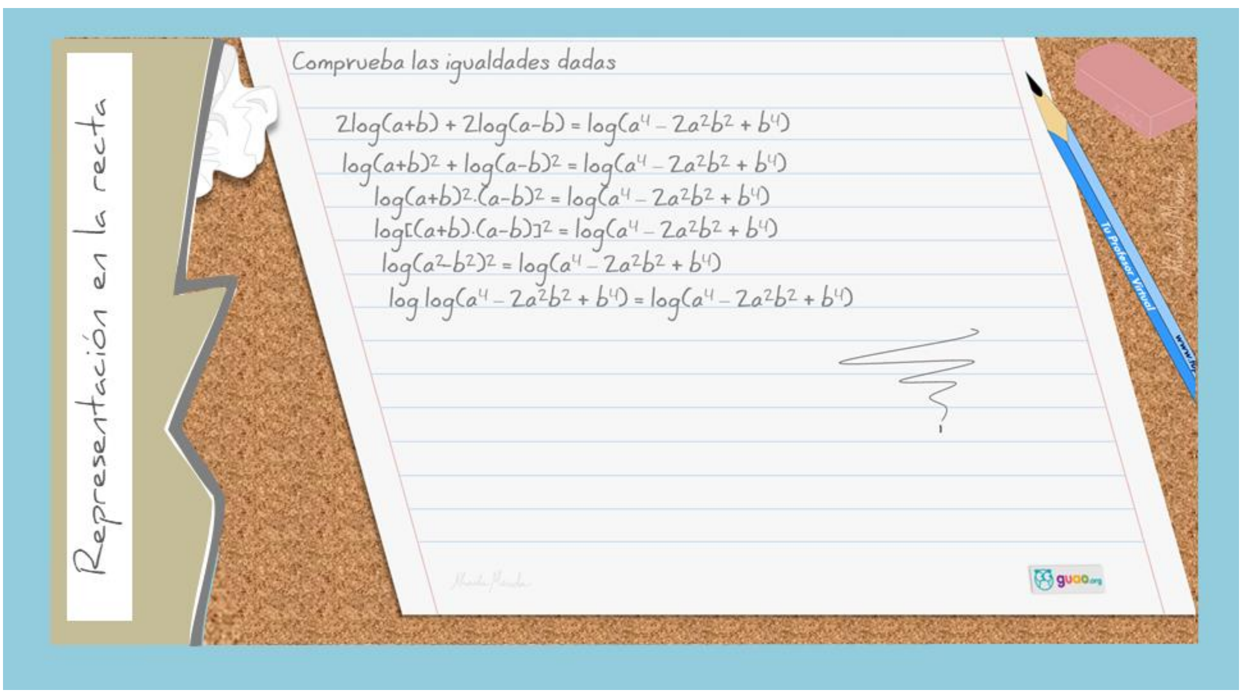
2da Unidad

Logaritmo

2.3 Ejercicios de Logaritmo

Aprendemos cuando ejercitamos, y mientras más ejercitamos más aprendemos.

Descripción



Esta sección es práctica, cuentas con una gama de ejercicios diversos donde aplicar propiedades de logaritmos, y valores notables de logaritmo. Aprovechemos al máximo esta práctica para fortalecer el conocimiento de Logaritmos.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Propiedades de los Números Reales, Propiedades de las Potencias, Despeje.

Contenido

Definición y Propiedades de Logaritmo, Propiedades de Logaritmo, Comprobar Igualdades, Ejercicios.

Videos Disponibles

LOGARITMO. Definición y Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 1

LOGARITMO. Definición y Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 2

LOGARITMO. Definición y Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 3

LOGARITMO. Definición y Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 4

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Comprobar Igualdades. Ejercicio 1

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Comprobar Igualdades. Ejercicio 2

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Comprobar Igualdades. Ejercicio 3

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones. Poner al día esta información básica amerita por lo menos 2 encuentros, de manera que puedan desarrollarse prácticas guiadas con oportunidad de intercambiar y aclarar dudas.

Guiones Didácticos

LOGARITMO. Definición y Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 1

Sabiendo que $\log_5 a = -1$ hallar $\log_{25} a$

Partimos de la igualdad que nos dan como dato: $\log_5 a = -1$

Despejamos a, aplicando la definición de logaritmo. $\log_5 a = -1 \rightarrow 5^{-1} = a$

Propiedad simétrica de la igualdad: $a = 5^{-1}$

Igualemos a x el $\log_{25} a$, que es el valor que queremos hallar $\log_{25} a = x$

Despejamos a, aplicando la definición de logaritmo. $\log_{25} a = x \rightarrow 25^x = a$

Propiedad simétrica de la igualdad: $a = 25^x$

Tenemos que: $a = 5^{-1}$ y $a = 25^x$, igualamos sus equivalencias $5^{-1} = 25^x$

Sabemos que: $25 = 5^2$ $5^{-1} = (5^2)^x$

Potencia de Potencia: $(a^n)^m = a^{nm}$ $5^{-1} = 5^{2x}$

Si las bases son iguales, los exponentes son iguales $-1 = 2x$

Despejamos x $x = -\frac{1}{2}$

Sabemos que: $\log_{25} a = x$, entonces $\log_{25} a = -\frac{1}{2}$

$$\boxed{\log_{25} a = -\frac{1}{2}}$$

LOGARITMO. Definición y Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 2

Sabiendo que $\log_b \sqrt{7} = 0,5$ hallar $\log_b 343$

Partimos de la igualdad que nos dan como dato:

El argumento del logaritmo es **una raíz**. $\log_b \sqrt{7} = 0,5$

el **logaritmo de una raíz es el inverso del índice por el logaritmo de la cantidad sub-radical** $\frac{1}{2}\log_b 7 = 0,5$

Pasamos el 2 que está dividiendo, al otro lado de la igualdad multiplicando. $\log_b 7 = 2 \cdot 0,5$

$\log_b 7 = 1$

Ahora vamos con el 2do logaritmo:

descompongamos el 343 en factores primos $\log_b 343 = \log_b 7^3$

Aplicamos logaritmo de una potencia: $\log_b 7^3 = 3\log_b 7$ $\quad \log_b 343 = 3\log_b 7$

Sabemos que: $\log_b 7 = 1$ $\quad \log_b 343 = 3 \cdot 1$

$$\boxed{\log_b 343 = 3}$$

---

sabiendo que $\log_b a = 3$. Hallar $\log_b \sqrt[3]{a.b}$

Partimos del logaritmo que nos dan como incógnita:

El argumento del logaritmo es **una raíz**. $\quad \log_b \sqrt[3]{a.b}$

el **logaritmo de una raíz es el inverso del índice por el logaritmo de la cantidad sub-radical** $\quad \log_b \sqrt[3]{a.b} = \frac{1}{3}\log_b a.b$

El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores $\quad = \frac{1}{3}(\log_b a + \log_b b)$

Sabemos que: $\log_b a = 3$ y $\log_b b = 1$ $\quad = \frac{1}{3}(3+1) = \frac{1}{3}\cdot 4$

$$\boxed{\log_b \sqrt[3]{a.b} = \frac{4}{3}}$$

LOGARITMO. Definición y Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 3

sabiendo que $\log_a 625 = 4$, $\log_{16} b = \frac{1}{2}$, $\log_{\sqrt{x}} x = c$. Hallar $\sqrt[c]{a+b}$

Debemos hallar los valores de a, b y c para sustituirlos en la expresión.

1ra Igualdad

Aplicamos la definición de logaritmo $\quad \log_a 625 = 4 \longrightarrow a^4 = 625$

Despejamos a aplicando raíz cuarta $\quad a = \sqrt[4]{625} \quad \boxed{a = 5}$

Recordemos. no se considera la raíz negativa porque la base del logaritmo, a, debe ser positiva y distinta de 1.

2da Igualdad

Aplicamos la definición de logaritmo $\quad \log_{16} b = \frac{1}{2} \longrightarrow b = 16^{\frac{1}{2}}$

Escribimos la potencia como raíz y hallamos su valor $\quad b = \sqrt{16} \quad \boxed{b = 4}$

3ra Igualdad

Aplicamos la definición de logaritmo $\log_{\sqrt{x}} x = c \longrightarrow x = \left(\sqrt{x}\right)^c$

Escribimos la raíz como potencia con exponente fraccionario $x = \left(x^{1/2}\right)^c$

Aplicamos potencia de potencia $x = x^{c/2}$

Como las bases son iguales son iguales los exponentes $x^1 = x^{c/2}$

$1 = \dfrac{c}{2}$

Despejando c $\boxed{c = 2}$

Tenemos que: a = 5, b = 4 y c = 2

Sustituimos en la expresión del planteamiento $\sqrt[c]{a+b}$

$$\sqrt[c]{a+b} = \sqrt[2]{5+4}$$
$$= \sqrt{9}$$

$$\boxed{\sqrt[c]{a+b} = 3}$$

LOGARITMO. Definición y Propiedades de Logaritmo. Ejercicio 4

Sabiendo $\log_b 36 = 4$, $\log_9 d = \frac{1}{4}$, $\log_\pi 1 = k$. Hallar $x = \left(\dfrac{5\sqrt{6} - b}{d}\right)^k$

Para hallar el valor de x, debemos hallar los valores de b, d y k.

Aplicamos definición de logaritmo en las tres igualdades dadas, para despejar cada una de las incógnitas

1ra Igualdad $\log_b 36 = 4 \longrightarrow b^4 = 36$

Despejamos b $b = \sqrt[4]{36}$

Sabemos que: $36 = 6^2$ $b = \sqrt[4]{6^2}$

Simplificamos la raíz: $\boxed{b = \sqrt{6}}$

2da Igualdad $\log_9 d = \frac{1}{4} \longrightarrow d = 9^{1/4}$

Escribimos la potencia como raíz cúbica $d = \sqrt[4]{9}$

Sabemos que: $9 = 3^2$ $d = \sqrt[4]{3^2}$

Simplificamos la raíz: $\boxed{d = \sqrt{3}}$

3ra Igualdad $\log_\pi 1 = k \longrightarrow 1 = \pi^k$

Sabemos que: $\pi^0 = 1$ $\pi^0 = \pi^k$

Son iguales las bases, entonces son iguales los exponentes $0 = k$

$\boxed{k = 0}$

Ahora sustituimos los valores obtenidos en la igualdad de x: $x=\left(\dfrac{5\sqrt{6}-b}{d}\right)^{k}$

$b=\sqrt{6}$ $\quad d=\sqrt{3}$ $\quad k=0$

$$x=\left(\frac{5\sqrt{6}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)^{0}$$

Efectuamos la resta del numerador

$$x=\left(\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)^{0}$$

Sabemos que: $\sqrt{6}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$

$$x=\left(\frac{4\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}\right)^{0}$$

Simplificamos $\sqrt{3}$ de numerador y denominador

$$x=\left(4\sqrt{2}\right)^{0}$$

toda potencia con exponente cero es uno

$$x=1$$

$$\boxed{x=1}$$

¿Pudimos haber obtenido este resultado algunos pasos antes?. Que opinas tu?

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Comprobar Igualdades. Ejercicio 1

Comprueba la siguiente igualdad aplicando propiedades de logaritmo

$$2\log(a+b)+2\log(a-b)=\log\left(a^{4}-2a^{2}b^{2}+b^{4}\right)$$

Para comprobar una igualdad de expresiones se puede:

- transformar el 1er lado de la igualdad hasta lograr que se parezca al 2do,
- se puede transformar el 2do lado de la igualdad para que se parezca al 1ro,
- se pueden transformar ambos hasta llegar a un punto en que las expresiones sean iguales.

Transformar →
1er lado de la igualdad = 2do lado de la igualdad
← Transformar

1er lado de la igualdad → = ← 2do lado de la igualdad

En esta lección **transformemos el 1er lado de la igualdad**, para esto debemos aplicar las propiedades de los logaritmos de forma inversa, es decir, en lugar de aplicarlas para desarrollar, las aplicaremos para comprimir.

Ejemplo

En lugar de sustituir el logaritmo de un producto por la suma de los logaritmos de cada factor.

Sustituimos una suma de logaritmos por el logaritmo del producto de los argumentos.

$$\log(a\cdot b)\longrightarrow \log a+\log b$$

$$\log a+\log b\longrightarrow \log(a\cdot b)$$

En la expresión dada tenemos dos términos, y en cada uno de ellos hay un 2 multiplicando al logaritmo.

$$2\log(a+b)+2\log(a-b)=\log(a^4-2a^2b^2+b^4)$$

Aplicaremos **logaritmo de una potencia**, entonces el 2 subirá como exponente del argumento.

$$\log(a+b)^2+\log(a-b)^2=\log(a^4-2a^2b^2+b^4)$$

Ahora tenemos suma de dos logaritmos: $\log(a+b)^2+\log(a-b)^2$

Aplicaremos **logaritmo de un producto**.

$$\log\left[(a+b)^2\cdot(a-b)^2\right]=\log(a^4-2a^2b^2+b^4)$$

En el argumento tenemos producto de dos potencias con el mismo exponente, $(a+b)^2(a-b)^2$ podemos escribirla como la potencia de un producto: $[(a+b)(a-b)]^2$

$$\log\left[(a+b)\cdot(a-b)\right]^2=\log(a^4-2a^2b^2+b^4)$$

¿Qué tipo de expresión ves aquí?

Efectuamos **producto de conjugadas**.

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\log(a^2-b^2)^2=\log(a^4-2a^2b^2+b^4)$$

Desarrollamos **cuadrado de la diferencia**.

$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

$$\log(a^4-2a^2b^2+b^4)=\log(a^4-2a^2b^2+b^4)$$

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Comprobar Igualdades. Ejercicio 2

Comprueba la siguiente igualdad aplicando propiedades de logaritmo

$$2\log(a+b)+2\log(a-b)=\log(a^4-2a^2b^2+b^4)$$

En esta lección transformemos el 2do lado de la igualdad para esto debemos factorizar el trinomio que está como argumento del logaritmo.

¿Qué tipo de trinomio es este? $2\log(a+b)+2\log(a-b)=\log(a^4-2a^2b^2+b^4)$

Tenemos dos términos que son **cuadrados perfectos**, de raíces a^2 y b^2, y tienen el mismo signo.

El **término central** es el doble producto de las raíces de los cuadrados perfectos, $2a^2b^2$.

esto es un trinomio cuadrado perfecto

$$\boxed{a^4}-\boxed{2a^2b^2}+\boxed{b^4}$$

$$a^2 \qquad 2a^2b^2 \qquad b^2$$

Trinomio Cuadrado Perfecto

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto:

Colocamos entre paréntesis las dos raíces, a^2 y b^2, separadas con el signo del término central, – , y el paréntesis elevado al cuadrado.

$$a^4-2a^2b^2+b^4$$
$$=(a^2-b^2)^2$$

la igualdad queda: $2\log(a+b)+2\log(a-b)=\log(a^2-b^2)^2$

Para repasar esta valioso recurso puedes ir a la sección de **Factorización**, en 2do lapso de matemática de 2do año.

Bajamos el exponente a multiplicar al logaritmo de la base de la potencia $2\log(a+b)+2\log(a-b)=2\log(a^2-b^2)$

En el argumento ha quedado una diferencia de cuadrados, esto es igual al producto de conjugadas $2\log(a+b)+2\log(a-b)=2\log(a+b)(a-b)$

logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos $2\log(a+b)+2\log(a-b)=2[\log(a+b)+\log(a-b)]$

Recordemos. que se coloca entre corchetes porque el 2 afecta a cada término del desarrollo.

Aplicamos propiedad distributiva del 2 $2\log(a+b)+2\log(a-b)=2\log(a+b)+2\log(a-b)$

$$2\log(a+b)+2\log(a-b)=2\log(a+b)+2\log(a-b)$$

Hemos llegado a una expresión exactamente igual a la del 1er lado de la igualdad.

LOGARITMO. Propiedades de Logaritmo. Comprobar Igualdades. Ejercicio 3

Comprueba la siguiente igualdad aplicando propiedades de logaritmo

$$\frac{1}{2}\log b+\frac{1}{2}\log(a+b)-\frac{1}{2}\log(a-b)-\frac{1}{2}\log a=\log\sqrt{\frac{ab+b^2}{a^2-ab}}$$

Recordemos. Comprobar una igualdad tiene tres posibles opciones: transformar el 1er lado de la igualdad hasta obtener el 2do, transformar el 2do lado de la igualdad hasta obtener el primero, y transformar ambos lados de la igualdad hasta llegar a una expresión común.

Transformando el 1er lado:

En el primer lado de la igualdad tenemos 4 términos o sumandos, todos tienen ½ multiplicando a un logaritmo.

El logaritmo de una potencia es el exponente que baja a multiplicar al logaritmo de la base.
Si tenemos un número multiplicando a un logaritmo, podemos subirlo como exponente del argumento

$$\log_b a^n = n\log_b a$$

$$\log b^{\frac{1}{2}}+\log(a+b)^{\frac{1}{2}}-\log(a-b)^{\frac{1}{2}}-\log a^{\frac{1}{2}}=\log\sqrt{\frac{ab+b^2}{a^2-ab}}$$

Nos han quedado 4 logaritmos libres de coeficientes, dos positivos y dos negativos.

sacamos el menos como factor común en los dos logaritmos negativos y quedan como una suma de logaritmos dentro de los corchetes

$$-\log(a-b)^{\frac{1}{2}}-\log a^{\frac{1}{2}}=-\left[\log(a-b)^{\frac{1}{2}}+\log a^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\log b^{\frac{1}{2}}+\log(a+b)^{\frac{1}{2}}-\left[\log(a-b)^{\frac{1}{2}}+\log a^{\frac{1}{2}}\right]=\log\sqrt{\frac{ab+b^2}{a^2-ab}}$$

Sabemos que el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de cada factor.

Si tenemos sumas de logaritmos, podemos escribirlo como el logaritmo del producto de los argumentos

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b x$$

$$\log\left[b^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}\right]-\log\left[(a-b)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}\right]=\log\sqrt{\frac{ab+b^2}{a^2-ab}}$$

Sabemos que la potencia de un producto es el producto de las potencias,

Si tenemos dos potencias con el mismo exponente podemos escribirla como una sola potencia del producto de las bases

$$(xy)^n = x^n \cdot y^n$$

$$\log\left[b(a+b)\right]^{\frac{1}{2}}-\log\left[(a-b)a\right]^{\frac{1}{2}}=\log\sqrt{\frac{ab+b^2}{a^2-ab}}$$

Aplicamos propiedad distributiva en el argumento de ambos logaritmos

$$\log\left(ab+b^2\right)^{\frac{1}{2}}-\log\left(a^2-ab\right)^{\frac{1}{2}}=\log\sqrt{\frac{ab+b^2}{a^2-ab}}$$

Sabemos que una potencia con exponente fraccionario es una raíz escribiremos los argumentos de los logaritmos como raíces cuadradas.

$$\log\sqrt{ab+b^2}-\log\sqrt{a^2-ab}=\log\sqrt{\frac{ab+b^2}{a^2-ab}}$$

¿Qué tenemos ya en este punto?

El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos del numerador y denominador.

Si tenemos la diferencia de logaritmos podemos escribirlo como el logaritmo del cociente

$$\log\frac{\sqrt{ab+b^2}}{\sqrt{a^2-ab}}=\log\sqrt{\frac{ab+b^2}{a^2-ab}}$$

Cuando se dividen radicales con iguales índices se coloca una sola vez el radical con dicho índice y se dividen las cantidades sub-radicales.

$$\log\sqrt{\frac{ab+b^2}{a^2-ab}}=\log\sqrt{\frac{ab+b^2}{a^2-ab}}$$

Hemos llegado a una expresión exactamente igual a la del 1er lado de la igualdad.

A Practicar

1. Sabiendo que $\log_a c = 8$, hallar $\log_{\sqrt{a}} c$

2. Sabiendo que $\log_2 k = -3$, hallar $\log_{16} k$

3. Sabiendo $\log_x 16 = 4$, $\log_6 y = \frac{1}{2}$, $\log_{\sqrt{7}} 1 = z$. Hallar $x = \dfrac{\left(z + 3\sqrt{11}\right)^x}{y}$

Comprueba las siguientes igualdades

4. $\dfrac{\log 15 + \log 12 - \log 5}{\log 4 - \log 7 + \log 21} = 2$

5. $\dfrac{\log 6 + \log 2}{\log 9 + \log 8 - \log 6} = 1$

6. $\dfrac{1 + \log 8}{\log 5 + 2\log 4} = 1$

---

7. $\log \dfrac{a^2 b^6}{c\sqrt{d}} = 2\log a + 4\log b - \dfrac{1}{2}\log c - \dfrac{1}{2}\log d$

8. $\log \dfrac{\sqrt[6]{a^{10} b^{21}}}{\sqrt{1000 a^5 b^{28}}} = -\dfrac{5}{6}\log a - \dfrac{21}{2}\log b - \dfrac{3}{2}$

9. $\log \sqrt{\dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 6x - 16}} = \dfrac{1}{2}\log(x-2) + \dfrac{1}{2}\log\left(x^2+4\right) - \dfrac{1}{2}\log(x-8)$

1. $\log_{\sqrt{a}} c = 16$

2. $\log_{16} k = -\dfrac{3}{4}$