10

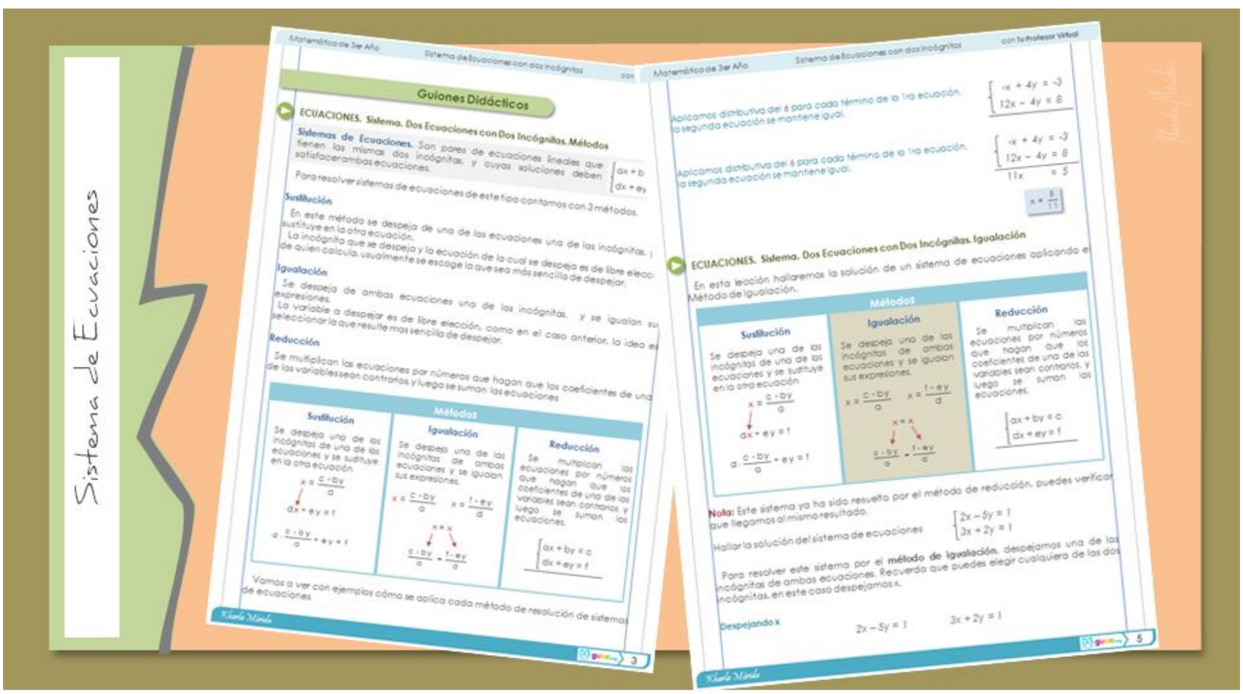
10ma Unidad

Ecuaciones

10.1 Sistema de Ecuaciones.

La mirada de un aprendiz, que se apoya en nuestra sabiduría para sentir seguridad y abrigo, es una gran y grata sensación de responsabilidad. Siempre disfruto el momento de ver su vuelo libre y determinado.

Descripción



Los sistemas de ecuaciones son parte inevitable de la visión matemática de toda situación de la que somos parte socialmente. Siempre hay cantidades relacionadas, para las que determinados valores satisfacen determinadas condiciones propias del fenómeno estudiado. Siempre que tengamos más de una cantidad en estudio, con más de una condición que las relaciona, tenemos la posibilidad de establecer un sistema de ecuaciones. Veamos cómo resolverlos.

Conocimientos Previos Requeridos

Ecuaciones Lineales, Operaciones en los Reales, Despeje.

Contenido

Sistema de dos Ecuaciones con dos Incógnitas de Métodos, Reducción y Sustitución, Resolver Sistema de Ecuaciones de Métodos, Reducción y Sustitución.

Videos Disponibles

ECUACIONES. Sistemas. Dos Ecuaciones con Dos Incógnitas. Métodos

ECUACIONES. Sistemas. Dos Ecuaciones con Dos Incógnitas. Reducción

ECUACIONES. Resolver Sistemas de Ecuaciones. Reducción

ECUACIONES. Sistemas. Dos Ecuaciones con Dos Incógnitas. Igualación

ECUACIONES. Resolver Sistemas de Ecuaciones. Igualación

ECUACIONES. Sistemas. Dos Ecuaciones con Dos Incógnitas. Sustitución

ECUACIONES. Resolver Sistemas de Ecuaciones. Sustitución

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

ECUACIONES. Sistema. Dos Ecuaciones con Dos Incógnitas. Métodos

Sistemas de Ecuaciones. Son pares de ecuaciones lineales que tienen las mismas dos incógnitas, y cuyas soluciones deben satisfacer ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Para resolver sistemas de ecuaciones de este tipo contamos con 3 métodos.

Sustitución

En este método se despeja de una de las ecuaciones una de las incógnitas, y se sustituye en la otra ecuación.

La incógnita que se despeja y la ecuación de la cual se despeja es de libre elección de quien calcula, usualmente se escoge la que sea más sencilla de despejar.

Igualación

Se despeja de ambas ecuaciones una de las incógnitas, y se igualan sus expresiones.

La variable a despejar es de libre elección, como en el caso anterior, la idea es seleccionar la que resulte mas sencilla de despejar.

Reducción

Se multiplican las ecuaciones por números que hagan que los coeficientes de una de las variables sean contrarios, y luego se suman las ecuaciones

<table>
<tr><th colspan="3">Métodos</th></tr>
<tr><th>Sustitución</th><th>Igualación</th><th>Reducción</th></tr>
<tr>
<td>Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra ecuación
$x = \frac{c - by}{a}$
$dx + ey = f$
$d \cdot \frac{c - by}{a} + ey = f$</td>
<td>Se despeja una de las incógnitas de ambas ecuaciones y se igualan sus expresiones.
$x = \frac{c - by}{a}$ $x = \frac{f - ey}{d}$
$x = x$
$\frac{c - by}{a} = \frac{f - ey}{d}$</td>
<td>Se multiplican las ecuaciones por números que hagan que los coeficientes de una de las variables sean contrarios, y luego se suman las ecuaciones.
$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

Vamos a ver con ejemplos cómo se aplica cada método de resolución de sistemas de ecuaciones

ECUACIONES. Sistema. Dos Ecuaciones con Dos Incógnitas. Reducción

En esta lección hallaremos la solución de un sistema de ecuaciones aplicando el Método de Reducción.

Métodos

Sustitución

Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra ecuación

$$x = \frac{c-by}{a}$$

$$dx + ey = f$$

$$d \cdot \frac{c-by}{a} + ey = f$$

Igualación

Se despeja una de las incógnitas de ambas ecuaciones y se igualan sus expresiones.

$$x = \frac{c-by}{a} \qquad x = \frac{f-ey}{d}$$

$$x = x$$

$$\frac{c-by}{a} = \frac{f-ey}{d}$$

Reducción

Se multiplican las ecuaciones por números que hagan que los coeficientes de una de las variables sean contrarios, y luego se suman las ecuaciones.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Nota: Este sistema se encuentra resuelto por los métodos de sustitución e Igualación en próximas lecciones, puedes compararlos y verificar que llegamos al mismo resultado.

Hallar la solución del sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Para resolver este sistema por el **método de reducción**, debemos lograr que los coeficientes de una de las variables sean opuestos, es decir, mismo número distinto signo.

Eliminando y
Aprovechamos los signos opuestos de y, falta hacer que los coeficientes sean iguales.

Multiplicamos la 1ra ecuación por 2 y la 2da ecuación por 5.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2x - 5y = 1 \\ 5 & 3x + 2y = 1 \end{array}$$

El 2 multiplica a cada término de la 1ra ecuación y 5 multiplica cada término de la 2da ecuación.

$$\begin{cases} 4x - 10y = 2 \\ 15x + 10y = 5 \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro ambas ecuaciones

$$\begin{array}{l} 4x - 10y = 2 \\ 15x + 10y = 5 \\ \hline 19x \qquad\quad = 7 \end{array}$$

Hemos llegado a una ecuación sencilla con una incógnita, x. Despejamos x y ya obtenemos su valor.

$$19x = 7 \qquad \boxed{x = \frac{7}{19}}$$

Eliminando x

Multiplicamos la 1ra ecuación por -3 y la 2da ecuación por 2.

$$\begin{array}{r} -3 \\ 2 \end{array}\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

El 2 multiplica a cada término de la 1ra ecuación y 5 multiplica cada término de la 2da ecuación.

$$\begin{cases} -6x + 15y = -3 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$$

Sumamos miembro a miembro ambas ecuaciones

$$\begin{cases} -6x + 15y = -3 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$19y = -1$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{19}}$$

ECUACIONES. Resolver Sistema de Ecuaciones. Reducción

Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + 4y = -3 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

Método de Reducción

Eliminando x

Podemos eliminar la x con mucha facilidad, multiplicando la 1ra ecuación por 6.

$$6\begin{cases} -x + 4y = -3 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

Aplicamos distributiva del 6 para cada término de la 1ra ecuación, la segunda ecuación se mantiene igual.

$$\begin{cases} -6x + 24y = -18 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

Sumamos lado a lado,

$$\begin{cases} -6x + 24y = -18 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$22y = -14$$

Despejamos

$$\boxed{y = -\frac{7}{11}}$$

Eliminando y

Multiplicamos la 2da ecuación por 2, la 1ra ecuación queda igual.

$$\begin{array}{r} \\ 2 \end{array}\begin{cases} -x + 4y = -3 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

Aplicamos distributiva del 6 para cada término de la 1ra ecuación, la segunda ecuación se mantiene igual.

$$\begin{cases} -x + 4y = -3 \\ 12x - 4y = 8 \end{cases}$$

Aplicamos distributiva del 6 para cada término de la 1ra ecuación, la segunda ecuación se mantiene igual.

$$\begin{cases} -x + 4y = -3 \\ 12x - 4y = 8 \end{cases}$$
$$11x \quad = 5$$

$$\boxed{x = \frac{5}{11}}$$

ECUACIONES. Sistema. Dos Ecuaciones con Dos Incógnitas. Igualación

En esta lección hallaremos la solución de un sistema de ecuaciones aplicando el Método de Igualación.

Métodos		
Sustitución Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra ecuación $x = \frac{c - by}{a}$ $dx + ey = f$ $d \cdot \frac{c - by}{a} + ey = f$	**Igualación** Se despeja una de las incógnitas de ambas ecuaciones y se igualan sus expresiones. $x = \frac{c - by}{a}$ $x = \frac{f - ey}{d}$ $x = x$ $\frac{c - by}{a} = \frac{f - ey}{d}$	**Reducción** Se multiplican las ecuaciones por números que hagan que los coeficientes de una de las variables sean contrarios, y luego se suman las ecuaciones. $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

Nota: Este sistema ya ha sido resuelto por el método de reducción, puedes verificar que llegamos al mismo resultado.

Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

Para resolver este sistema por el **método de igualación**, despejamos una de las incógnitas de ambas ecuaciones. Recuerda que puedes elegir cualquiera de las dos incógnitas, en este caso despejamos x.

Despejando x

$$2x - 5y = 1 \qquad\qquad 3x + 2y = 1$$

1ra ecuación $2x - 5y = 1$

Pasamos 5y, que está restando, sumando al otro lado. $2x = 1 + 5y$

Pasamos 2, que está multiplicando, al otro lado dividiendo. $x = \frac{1+5y}{2}$

2da ecuación $3x + 2y = 1$

Pasamos 5y, que está restando, sumando al otro lado. $3x = 1 - 2y$

Pasamos 2, que está multiplicando, al otro lado dividiendo. $x = \frac{1-2y}{3}$

Igualamos las x

Partimos de la igualdad base $x = x$

Sustituimos la expresiones obtenidas de los despejes en cada x de la igualdad.

$$\frac{1+5y}{2} = \frac{1-2y}{3}$$

Pasamos 3 multiplicando al primer lado de la igualdad y el 2 multiplicando al 2do lado de la igualdad.

$$3(1+5y) = 2(1-2y)$$

Aplicamos propiedad distributiva efectuamos los productos.

$$3 + 15y = 2 - 4y$$

Reunimos todos los términos con la incógnita $15y + 4y = 2 - 3$

Simplificamos términos semejantes $19y = -1$

Despejamos

$$\boxed{y = -\frac{1}{19}}$$

Sustituimos el valor de y en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas.

$$x = \frac{1-2y}{3} \qquad x = \frac{1-2(-\,^{1}\!/_{19})}{3}$$

$$x = \frac{1+\,^{2}\!/_{19}}{3}$$

$$x = \frac{^{21}\!/_{19}}{3} \qquad \boxed{x = \frac{7}{19}}$$

ECUACIONES. Resolver Sistema de Ecuaciones. Igualación

Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + 4y = -3 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

Método de Igualación

Despejando x

$$-x + 4y = -3 \qquad 6x - 2y = 4$$

1ra ecuación $-x + 4y = -3$

Pasamos 4y, que está sumando, restando al otro lado. $-x = -3 - 4y$

Multiplicando por -1, toda la ecuación. $-1(-x = -3 - 4y)$

$$x = 3 + 4y$$

2da ecuación $6x - 2y = 4$

Pasamos 2y, que está restando, sumando al otro lado. $6x = 4 + 2y$

Pasamos 6, que está multiplicando, al otro lado dividiendo. $x = \dfrac{4+2y}{6}$

Nota: la fracción obtenida puede ser simplificada dividiendo numerador y denominador entre 2. $x = \dfrac{2+y}{3}$

Igualamos las x

Partimos de la igualdad base $x = x$

Sustituimos la expresiones obtenidas de los despejes en cada x de la igualdad. $3 + 4y = \dfrac{2+y}{3}$

Pasamos 3 multiplicando al primer lado de la igualdad. $3(3 + 4y) = 2 + y$

Reunimos todos los términos con la incógnita $9 + 12y = 2 + y$

Simplificamos términos semejantes $12y - y = 2 - 9$

$$11y = -7$$

Despejamos

$$\boxed{y = -\frac{7}{11}}$$

Sustituimos el valor de y en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas.

$$x = 3 + 4y \qquad x = 3 + 4\left(-\frac{7}{11}\right)$$

$$x = 3 - \frac{28}{11}$$

$$\boxed{x = \frac{5}{11}}$$

ECUACIONES. Sistema. Dos Ecuaciones con Dos Incógnitas. Sustitución

En esta lección hallaremos la solución de un sistema de ecuaciones aplicando el Método de Sustitución.

Métodos		
Sustitución	**Igualación**	**Reducción**
Se despeja una de las incógnitas de una de las ecuaciones y se sustituye en la otra ecuación	Se despeja una de las incógnitas de ambas ecuaciones y se igualan sus expresiones.	Se multiplican las ecuaciones por números que hagan que los coeficientes de una de las variables sean contrarios, y luego se suman las ecuaciones.
$x = \frac{c - by}{a}$ $dx + ey = f$ $d \cdot \frac{c - by}{a} + ey = f$	$x = \frac{c - by}{a} \qquad x = \frac{f - ey}{d}$ $x = x$ $\frac{c - by}{a} = \frac{f - ey}{d}$	$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

Nota: Este sistema se encuentra resuelto por los métodos de reducción e Igualación en lecciones anteriores, puedes compararlos y verificar que llegamos al mismo resultado.

Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

Para resolver este sistema por el **método de sustitución**, despejamos una de las incógnitas de una ecuación. Recuerda que puedes elegir cualquiera de las dos incógnitas y cualquiera de las dos ecuaciones, en este caso despejamos de la primera ecuación, x.

1ra ecuación

$$2x - 5y = 1$$

Ver despeje en la página 7.

$$x = \frac{1 + 5y}{2}$$

Sustituyendo en la 2da Ecuación

$$x = \frac{1+5y}{2} \rightarrow 3x + 2y = 1$$

$$3 \cdot \frac{1+5y}{2} + 2y = 1$$

Multiplicamos toda la ecuación por 2, para eliminar el denominador de la fracción.

$$2 \cdot \left[3 \cdot \frac{1+5y}{2} + 2y \right] = 2 \cdot 1$$

Aplicamos distributiva del 2 en el primer lado de la igualdad.

$$2 \cdot 3 \cdot \frac{1+5y}{2} + 2 \cdot 2y = 2$$

Simplificamos el 2.

$$3(1+5y) + 4y = 2$$

$$3 + 15y + 4y = 2$$

$$15y + 4y = 2 - 3$$

$$19y = -1 \qquad \boxed{y = -\frac{1}{19}}$$

Sustituimos el valor de y obtenido en la ecuación de y despejada.

$$y = -\frac{1}{19} \qquad x = \frac{1+5y}{2}$$

$$x = \frac{1 + 5(-\, ^1\!/_{19})}{2}$$

$$x = \frac{1 - \, ^5\!/_{19}}{2}$$

$$x = \frac{^{14}\!/_{19}}{2} \qquad \boxed{x = \frac{7}{19}}$$

ECUACIONES. Resolver Sistema de Ecuaciones. Sustitución

Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x + 4y = -3 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$

Método de Sustitución

Despejando x de la 1ra ecuación $-x + 4y = -3$

Ver despeje en la página 8. $x = 3 + 4y$

Sustituyendo en la 2da Ecuación $x = 3 + 4y$ $6x - 2y = 4$

$$6(3 + 4y) - 2y = 4$$

Aplicamos distributiva del 6. $18 + 24y - 2y = 4$

Simplificamos términos con y, y pasamos 18 restando al 2do lado de la igualdad. $22y = 4 - 18$

Simplificamos términos semejantes $22y = -14$

$$y = -\frac{14}{22} \qquad \boxed{y = -\frac{7}{11}}$$

Sustituimos el valor de y obtenido en la ecuación de x despejada.

$$x = 3 + 4y$$

$$x = 3 + 4\left(-\frac{7}{11}\right)$$

Efectuamos el producto con la fracción.

$$x = 3 - \frac{28}{11}$$

Efectuamos la resta.

$$\boxed{x = \frac{5}{11}}$$

Emparejando el Lenguaje

Sistemas de Ecuaciones. Son pares de ecuaciones lineales que tienen las mismas dos incógnitas, y cuyas soluciones deben satisfacer ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

A Practicar

En cada ejercicio hallar la solución del sistema de ecuaciones, aplicando los tres métodos.

1. $-7x + 4y = -1$
   $2x - 3y = 5$

2. $6x + y = -11$
   $-3x + 4y = 2$

3. $10x + 2y = 9$
   $5x - 3y = -8$

4. $8y = -1$
   $12x + y = 4$

5. $-4x + 3y = 6$
   $6x - 5y = 0$

6. $-5x - 2y = 4$
   $3x + 7y = 6$

A Practicar

En cada ejercicio hallar la solución del sistema de ecuaciones, aplicando los tres métodos.

1. $x = -\frac{17}{13} \quad y = -\frac{33}{13}$

2. $x = -\frac{22}{27} \quad y = -\frac{7}{9}$

3. $x = \frac{11}{40} \quad y = \frac{25}{8}$

4. $x = \frac{11}{32} \quad y = -\frac{1}{8}$

5. $x = -15 \quad y = -18$

6. $x = -\frac{40}{29} \quad y = \frac{42}{29}$