ECUACIONES IRRACIONALES

$$\sqrt{6(x+5)} = x+5$$

Suponga que su profesor ha dado instrucciones a los miembros de su clase de matemáticas que en parejas, encuentren la longitud de un segmento de línea. Usted recibe $\sqrt{2x+6}$ unidades de la longitud, y su pareja recibe 10 unidades. Usted le pregunta a su maestro cuál de las respuestas es correcta, y él les dice que ambos tienen razón. ¿Se puede establecer una ecuación para calcular x en este caso? ¿Cómo lo haría? En esta guía, usted aprenderá a resolver ecuaciones radicales como el ejemplo anterior.

MARCO TEÓRICO

Resolver ecuaciones radicales no es diferente de la resolución de ecuaciones lineales o cuadráticas. Antes de poder comenzar a resolver una ecuación radical, debe saber cómo cancelar el radical. Para ello, es necesario conocer su **inversa**.

Funcionamiento original	Operación inversa
Raíz cubica	Elevar a la tercera potencia.
Raíz cuadrada	Elevar a la segunda potencia.
Cuarta Raíz	Elevar a la cuarto potencia.
" n " raíz	Elevar a " n" potencia.

Para resolver una ecuación radical, se aplican las medidas para resolver ecuaciones que se han enseñado en las guías anteriores, incluyendo las operaciones inversas para las raíces.

EJEMPLO 1

Resolver $\sqrt{2x-1} = 5$.

Respuesta: La primera operación que debe realizar es eliminar la raíz cuadrada. Elevando al cuadrado ambos lados.

$(\sqrt{2x-1}\ )^2 = (5)^2$

$2x-1 = 25$ (Se cancela el cuadrado con la raíz)

$2x = 25 + 1$

$2x = 26$

$x = \frac{26}{2}$

$x = 13$

Recuerde comprobar su respuesta sustituyendo la x en el problema original para ver si tiene sentido.

Así;

$\sqrt{2.(13)-1} = \sqrt{26-1} = \sqrt{25} = 5$

SOLUCIONES EXTRAÑAS 

No todas las soluciones de una ecuación radical cumplirá el problema original. Esto se llama una **solución extraña**. Esto significa que usted puede encontrar una solución utilizando álgebra, pero no va a funcionar en el caso de control. Esto es debido a la regla $\sqrt[n]{x}$ no está definido cuando ***n*** es un número par entero y ***X*** < 0, esto quiere decir que ***las raíces de números negativos no están definidas***.

Ejemplo 2

Resolver $\sqrt{x-3} - \sqrt{x} = 1$.

Respuesta:

$\sqrt{x-3} = \sqrt{x} + 1$ *Separe las expresiones radicales*

$(\sqrt{x-3})^2 = (\sqrt{x} + 1)^2$ *Eleve al cuadrado ambos miembros*

$x-3 = (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} \cdot 1 + (1)^2$ *Elimine los paréntesis*

$x-3 = x + 2\sqrt{x} + 1$ *Simplifica*

$x - x + 2\sqrt{x} = -3 - 1$ *Agrupamos términos*

$2\sqrt{x} = -4$ *Dividimos ambos miembros entre dos*

$\sqrt{x} = \frac{-4}{2}$

$(\sqrt{x})^2 = (-2)^2$ *Elevamos ambos miembros al cuadrado para eliminar la raíz*

$X = 4$

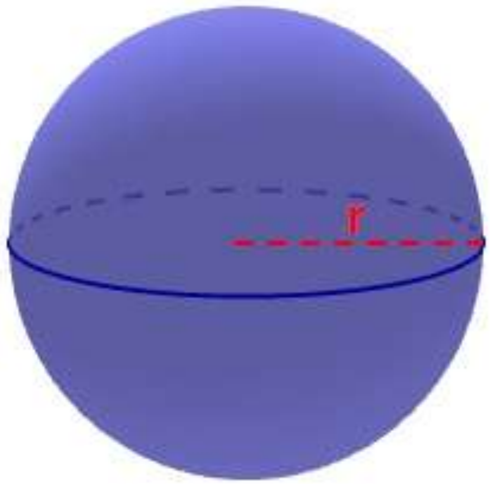
Comprobar:

$\sqrt{4-3} - \sqrt{4} = \sqrt{1} - \sqrt{4} = 1 - 2 = -1$, *entonces* $-1 \neq 1$. La solución no es la salida. La ecuación no tiene soluciones reales. Por lo tanto, *X = 4* es una solución extraña.

ECUACIONES RADICALES EN LA VIDA REAL

EJEMPLO 3

Una esfera tiene un volumen de 456 cm^3. Si el radio de la esfera se incrementa en 2 cm, ¿cuál es el nuevo volumen de la esfera?



Respuesta:

Definir variables. r el radio de la esfera.

Encontrar una ecuación. El volumen de una esfera está dado por la fórmula: V = $\frac{4}{3}\pi r^3$

Mediante la sustitución de 456 para la variable de volumen, la ecuación se convierte en :

$456 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

$1368 = 4\pi r^3$ Multiplique por 3 ambos miembros

$108{,}92 = r^3$ Dividiendo entre 4π ambos miembros

$\sqrt[3]{108{,}92} = \sqrt[3]{r^3}$ Aplicamos raíz CÚBICA ambos Miembros para eliminar la potencia

4,776 cm = r

4,776 cm + 2 cm = r El radio se incrementa en dos

6,776 cm = r Valor de el nuevo radio

Ahora;

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}(3{,}14).(6{,}776)^3$

V = 1302,5 cm^3

Comprobar mediante la sustitución de los valores de los radios en la fórmula del volumen.

V = $\frac{4}{3}\pi r^3$ = V = $\frac{4}{3}\pi(4{,}776)^3$ = V = $\frac{4}{3}.(3{,}14)(4{,}776)^3$ = 456 cm^3. La solución concuerda.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Resolver* $\sqrt{x+15} = \sqrt{3x-3}$

Respuesta:

Comience por la cancelación de las raíces cuadradas elevando al cuadrado ambos lados.

$(\sqrt{x+15})^2 = (\sqrt{3x-3})^2$

$x + 15 = 3x - 3$

15 + 3 = 3x −x

18 = $2x$

$\frac{18}{2} = x$

$x = 9$

Comprobando la solución:

$\sqrt{x+15} = \sqrt{3x-3}$

$\sqrt{9+15} = \sqrt{3.(9)-3}$

$\sqrt{24} = \sqrt{27-3}$

$\sqrt{24} = \sqrt{24}$

2. *Resolver* $\sqrt{x+2}$ *- 2 = 0*

Respuesta:

$\sqrt{x+2}$ = *2*

$(\sqrt{x+2})^2 = (2)^2$

$x + 2 = 4$

$x = 4 - 2$

$x = 2$

Comprobando la solución

$\sqrt{2+2} - 2 = \sqrt{4} - 2 = 2 - 2 = 0$

3. *Resolver* $\sqrt[3]{x-3} = 1$

Respuesta:

$\sqrt[3]{x-3} = 1$

$(\sqrt[3]{x-3})^3 = (1)^3$

$x - 3 = 1$

$x = 1 + 3$

$x = 4$

Comprobando la solución: $\sqrt[3]{4-3} = \sqrt[3]{1} = 1$

4. *Resolver* $\sqrt{x} = x - 6$

Respuesta:

$(\sqrt{x})^2 = (x-6)^2$

$X = (x - 6)^2$

$X = X^2 - 2x.\ 6 + (6)^2$

Resolviendo por producto notable

$X = X^2 - 12x + 36$

$0 = X^2 - 12x - x + 36$

Agrupando términos

$0 = X^2 - 13x + 36$

Para hallar los valores de x debemos factorizar aplicando la ecuación cuadrática

$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$X_1 = \dfrac{-(-13)+\sqrt{169-144}}{2}$

$X_2 = \dfrac{-(-13)-\sqrt{169-144}}{2}$

$X_1 = \frac{13+5}{2}$

$X_2 = \frac{13-5}{2}$

$X_1 = 9$
$X_2 = 4$

Comprobando las soluciones

$X^2 - 13x + 36 = 0$

Para x =9

81 – 117 + 36= 0

Para x = 4

16 – 52 + 36 = 0

5.
Resuelve $2\sqrt{4-3x}$ *+3 = 0*

Respuesta:

$2\sqrt{4-3x} = -3$

$\sqrt{4-3x} = \frac{-3}{2}$
Dividiendo entre dos ambos miembros

$(\sqrt{4-3x})^2 = (\frac{-3}{2})^2$

$4 - 3x = \frac{9}{4}$

$4 - \frac{9}{4} = 3x$

$\frac{7}{4} = 3x$

$\frac{\frac{7}{4}}{3} = x$

$\frac{7}{12} = x$

Comprobando la solución

$2\sqrt{4-3x}$ +3 = 0

$2\sqrt{4-3.(\frac{7}{12})}$ +3 = 0

$2\sqrt{\frac{9}{4}}$ +3 = 0

$2.(\ \frac{3}{2}\ )$ + 3 = 0

6 $\neq 0$. La ecuación no tiene soluciones reales, es por eso que x= $\frac{7}{12}$ es una solución extraña.

6. El área de un triángulo es 24 m^2 y la altura del triángulo es el doble de la base. ¿Cuáles son la base y la altura del triángulo?

Respuesta:
El área de un triángulo viene dado por: A= $\frac{b.h}{2}$; donde b representa la base y h la altura.

A= $\frac{b.h}{2}$

24 = $\frac{b.2b}{2}$

Sustituyendo la altura por (2b), dos veces la base

24 = $\frac{2b^2}{2}$

24 = b^2

Eliminando términos

$\sqrt{24}$ = $\sqrt{b}^2$

Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros

$4{,}90$ = b

Comprobando la solución;

A= $\frac{4{,}90\ x\ 2\ x(4{,}90)}{2}$ = $\frac{48}{2}$ = 24 cm^2

7. El volumen de un cilindro es 245 cm^3 y la altura del cilindro es de un tercio del diámetro de la base del cilindro. El diámetro del cilindro se mantiene el mismo, pero la altura del cilindro se incrementa en dos centímetros. ¿Cuál es el volumen del nuevo cilindro? $V = \pi . r^2 . h$

Respuesta:

V= 245 cm^3

$h = \frac{1}{3}D$ Donde D es el diámetro

$r^2 = (\frac{D}{2})^2$

Ahora; sutituyendo

$V = \pi . r^2 . h$

$245 = \pi . (\frac{D}{2})^2 . \frac{1}{3}D$

$245 = (3,14) . \frac{D^2}{4} . \frac{D}{3}$

Resolviendo el cuadrado

$245 = \frac{3,14}{12}D^3$

$\frac{12 \ . \ 245}{3,14} = D^3$

Multiplicando por 12 y dividiendo entre 3,14 ambos miembros

$936,31 = D$

$\sqrt[3]{936,31} = \sqrt[3]{D^3}$

Aplicando raíz cúbica a ambos miembros

9,78 = D

Comprobando la Solución

$V = \pi . r^2 . h$

$V = (3,14) . (\frac{9,78}{2})^2 . \frac{1}{3}(9,78)$

V = (3,14) . (23,91) . (3,26)

V= 245 cm^3

Glosario

- **Raíz Cuadrada**: se llama **raíz cuadrada** de un número positivo a un segundo número positivo que al multiplicarlo por sí mismo resulta el valor del primero, es decir, que es un segundo número que al elevarlo al cuadrado es igual al primero. Abreviado como **raíz** tiene el símbolo: $\sqrt{\ }$ .Es la radicación de índice 2 o, equivalentemente, la potenciación con exponente ½.

- **Raíz Cúbica:** Es el resultado de la operación de radicación con índice 3. La radicación cúbica es la función inversa de la función real cubo. La operación de calcular la raíz cúbica de un número real admite la composición de funciones con la potenciación de un número real, con restricciones, y posee la distributiva con la multiplicación y división, pero no es asociativa ni distributiva con la suma o la resta.

- **Raíz N-ésima:** La "raíz n-ésima" de un valor dado, cuando se multiplica **n veces** da el valor inicial. En vez de hablar de la "4ª (cuarta)", "16ª (decimosexta)", etc., si queremos hablar en general decimos la "n-ésima". Así como la **raíz cuadrada** es lo que se multiplica **dos** veces para tener el valor original y la **raíz cúbica** es lo que se multiplica **tres** veces para tener el valor original, la **raíz n-ésima** es lo que se multiplica **n** veces para tener el valor original.

- **Variable:** Es un símbolo que puede ser remplazado o que toma un valor numérico en una ecuación o expresión matemática en general.

- **Ecuación:** Es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas

Otras Referencias

- ✓ https://www.youtube.com/watch?v=cGdY2PRpqXA
- ✓ http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_irracional
- ✓ http://matematicas.relatividad.org/resoluciondeecuacionesirracionales.htm